Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 4 (29). С. 212–217

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

ДВЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО АНАЛОГА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. М. Долгополов, И. Н. Родионова

Самарский государственный университет,
443011, Россия, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

E-mail: `mikhaildolgopolov@rambler.ru`

Для полного уравнения гиперболического типа третьего порядка с переменными коэффициентами в бесконечной прямоугольной области поставлена задача с двумя интегральными условиями и сопряжением на характеристической плоскости (задача I). В качестве вспомогательной задачи авторами решается методом Римана задача Дарбу, вид решения которой значительно упрощается за счет специального представления одного из краевых условий. Принимая за основу решение задачи Дарбу, авторы сводят поставленную задачу I к однозначно разрешимому интегральному уравнению, что позволяет получить в явном виде решение задачи I.

Ключевые слова: *интегральные уравнения, краевые задачи, уравнения гиперболического типа высшего порядка.*

Настоящая работа является продолжением исследований постановок и решений краевых задач для уравнений гиперболического типа в трехмерном пространстве, опубликованных в статьях [1, 2].

В бесконечной прямоугольной области для уравнения третьего порядка получено в явном виде решение задачи с интегральными условиями и сопряжением на нехарактеристической плоскости. При этом за основу берётся полученное авторами методом Римана решение задачи Дарбу со специальным представлением одной из заданных функций.

Уравнение

$$\begin{aligned} L(u) = U_{xyz} + b(y)U_{xy} + a(x)U_{xy} + C(z)U_{xy} + b(y)c(z)U_x + \\ + a(x)C(z)U_y + a(x)b(y)U_z + a(x)b(y)c(z)U = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

рассматривается на множестве $H = H_1 \cup H_2$, где

$$H_1 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 < x < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix} \right\}, \quad H_2 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 < y < x < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix} \right\}$$

$a(x), b(y)$ интегрируемы на $[0, h]$, $c(z)$ интегрируема на $[0, +\infty)$. Обозначим через $\alpha(x)$, $\beta(y)$, $\gamma(z)$ первообразные функций $a(x)$, $b(y)$, $c(z)$.

Задача I. *В области H найти решение уравнения* (1), *непрерывное в* $\bar{H}$, *с данными*

$$\int_0^y e^{\alpha(t)} U(t, y, z)dt = \varphi(y, z), \quad (y, z) \in D_0 = \left\{ (y, z) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 < y < h \\ 0 < z < +\infty \end{matrix} \right\}; \tag{2}$$

Вячеслав Михайлович Долгополов (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математики и бизнес-информатики.
Ирина Николаевна Родионова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математики и бизнес-информатики.

$$\int_0^x e^{\beta(t)}U(x,t,z)dt = \psi(x,z), \quad (x,z) \in D_0^* = \left\{ (x,z) \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 < x < h \\ 0 < z < +\infty \end{array} \right\}; \tag{3}$$

$$U(x,y,z) = \begin{cases} f_1(x,y), & (x,y) \in \bar{D}_1, \quad D_1 = \{(x,y) \mid 0 < x < y < h\}, \\ f_2(x,y), & (x,y) \in \bar{D}_2, \quad D_2 = \{(x,y) \mid 0 < y < x < h\} \end{cases}$$

и условиями сопряжения на плоскости $y = x$:

$$e^{2\beta(x)} \lim_{y\to x+0}(U_y - U_x) = e^{2\alpha(x)} \lim_{y\to x+0}(U_y - U_x). \tag{4}$$

На заданные в задаче I функции налагаются нижеследующие условия.

Условия A. *Функции φ, ψ, f_1, f_2 непрерывны в рассматриваемых областях вместе со своими смешанными частными производными второго порядка и имеют место представления*

$$\varphi(y,z) = y^{1+\varepsilon_1}\varphi_1(y,z), \quad \varphi_1(y,z) \in C(\bar{D}_0), \quad \varepsilon_1 > 0;$$
$$\psi(x,z) = x^{1+\varepsilon_2}\psi_1(x,z), \quad \psi_1(x,z) \in C(\bar{D}_0^*), \quad \varepsilon_2 > 0;$$
$$f_1(x,x) = f_2(x,x) = 0.$$

Условия B. *Справедливы следующие условия ортогональности*:

$$\int_0^y e^{\alpha(t)} f_1(t,y)dt = 0, \quad \int_0^x e^{\beta(t)} f_2(x,t)dt = 0.$$

Уравнение (1) рассмотрим в области H_1 и решим вспомогательную задачу, которую возьмем за основу при решении задачи I.

Задача Дарбу. *В области H_1 найти решение уравнения* (1), *непрерывное в $\bar{H}_1$, с данными*

$$U(x,y,z) = \tau_1(x,z), \quad (x,z) \in \bar{D}_0^*,$$
$$\lim_{y\to x+0}(U_y - U_x) = \nu_1(x,z), \quad (x,z) \in D_0^*,$$
$$U(x,y,0) = f_1(x,y), (x,y) \in \bar{D}_1.$$

Причём ${\tau''}_{1xz} \in C(D_0^*)$, ${\nu'}_{1z}(x,z) \in C(D_0^*)$, $\nu_1(x,z) \in C(D_0^*)$, функция f_1 удовлетворяет условиям A и интегрируема по x на $[0,h]$ при любом $z \in [0,+\infty)$, кроме того $\tau_1(0,z) = \tau_1(x,0) = \nu_1(x,0) = 0$.

Для решения задачи Дарбу применим метод Римана, обоснованный в работе [3], в ней же построена функция Римана для уравнения (1). С учётом введённых обозначений она имеет вид

$$R(M,M_0) = \exp\bigl(\alpha(x) - \alpha(x_0) + \beta(y) - \beta(y_0) + \gamma(z) - \gamma(z_0)\bigr).$$

Запишем один из трёхмерных аналогов тождества Грина [3] применительно к уравнению (1):

$$RL(U) - UL^*(R) = (R_x + Q_y + H_z)/6, \tag{5}$$

$L^*(U)$ — сопряженный оператор,

$$P = 2[R_{yz}U + RU_{yz}] - R_yU_z - R_zU_y + 3\gamma(z)[RU_y - UR_y] + \\ + 3\beta(y)[RU_z - UR_z] + 6\beta(y)\gamma(z)RU,$$

$$Q = 2[R_{xz}U + RU_{xz}] - R_xU_z - R_zU_x + 3\gamma(z)[RU_x - UR_x] + \\ + 3\alpha(x)[RU_z - uR_z] + 6\alpha(x)\gamma(z)RU, \quad (6)$$

$$H = 2[R_{xy}U + RU_{xy}] - R_xU_y - R_yU_x + 3\beta(y)[RU_x - UR_x] + \\ + 3\alpha(x)[RU_y - UR_y] + 6\alpha(x)\beta(y)RU.$$

Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in H_1$ и рассмотрим область H_0, ограниченную плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $z = 0$, $x = y$. В предположении, что $U(x, y, z)$ — решение уравнения (1), а R — функция Римана, тождество (5) принимает вид $P_x + Q_y + H_z = 0$. Проинтегрируем его по области H_0. Применим формулу Гаусса—Остроградского, получим $\sum_{i=1}^{5} \underline{O}_i = 0$, где

$$\underline{O}_i = \iint_{S_i} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + H\cos\gamma)\, dS_i,$$

S_i — грани области H_0, $S = \bigcup_{i=1}^{5} S_i$.

Вычисляя интегралы $\underline{O}_i$, пользуясь соотношениями (6) и свойствами функции Римана, после ряда преобразований и переобозначения переменных приходим к функции

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}\Bigg[\tau_1(x, z)e^{\beta(x)-\beta(y)} + \tau_1(y, z)e^{\alpha(y)-\alpha(x)} + \\ + \int_x^y \tau_1(t, z)(\beta'(t) - \alpha'(t))e^{\alpha(t)-\alpha(x)+\beta(t)-\beta(y)}\, dt + + \\ \int_x^y \nu_1(t, z)e^{-\alpha(x)+\alpha(t)-\beta(y)+\beta(t)}\, dt + e^{\gamma(0)-\gamma(z)}f_1(x, y)\Bigg]. \quad (7)$$

Проверкой устанавливаем, что функция, определяемая формулой (7), является решением задачи Дарбу для уравнения (1). Преобразуем решение (7), вводя интегральное представление функции τ_1:

$$\tau_1(x, z) = \int_0^x T_1(t, z)e^{2\beta(t)-2\beta(x)}\, dt, \quad T_1(x, z) \in C(D_0^*), \quad T_1(x, 0) = 0, \quad (8)$$

где $T_1(x, z)$ интегрируема по x на $[0, h]$ при любом $z \in [0, +\infty)$. Подставляя выражение (8) в формулу (7), получаем

$$U(x, y, z) = \int_0^x T_1(t, z)e^{2\beta(t)-\beta(x)-\beta(y)}\, dt + \\ + \int_x^y N_1(t, z)e^{\alpha(t)+\beta(t)-\alpha(x)-\beta(y)}\, dt + e^{\gamma(0)-\gamma(z)}f_1(x, y), \quad (9)$$

где

$$N_1(t, z) = (\nu_1(x, z) + T_1(x, z))/2. \quad (10)$$

Аналогичными рассуждениями получаем решение задачи Дарбу в области H_2 с данными

$$U(x, y, z) = \tau_2(x, z), \quad (x, z) \in \bar{D}_0^*;$$
$$\lim_{y \to x-0}(U_y - U_x) = \nu_2(x, z), \quad (x, z) \in D_0^*;$$
$$U(x, y, 0) = f_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}_2,$$

которое при представлении

$$\tau_2(x,z) = \int_0^x T_2(t,z)e^{2\alpha(t)-2\alpha(x)}\,dt \tag{11}$$

принимает вид

$$U(x,y,z) = \int_0^y T_2(t,z)e^{2\alpha(t)-\alpha(x)-\alpha(y)}\,dt + \\ + \int_y^x N_2(t,z)e^{\alpha(t)+\beta(t)-\alpha(x)-\beta(y)}\,dt + e^{\gamma(0)-\gamma(z)}f_2(x,y), \tag{12}$$

$$N_2 = (T_2 - \nu_2)/2. \tag{13}$$

Здесь $T_2(x,z)$ интегрируема по x на $[0,h]$ при любом $z \in [0,+\infty)$; f_2 удовлетворяет условиям A; τ_2, ν_2 обладают такими же свойствами, что и τ_1, ν_1.

Для решения задачи I найдём функции T_1, T_2, N_1, N_2. Применив к решению (9) условие (2), с учётом условий ортогональности B получаем

$$\int_0^y e^{\alpha(t)}dt \int_t^0 T_1(s,z)e^{2\beta(s)-\beta(t)-\beta(y)}\,ds + \\ + \int_0^y dt \int_t^y N_1(s,z)e^{\alpha(s)+\beta(s)-\beta(y)}\,ds = \varphi(y,z).$$

Умножим обе части последнего выражения на $e^{\beta(y)}$ и продифференцируем по y. Условию (3) подчиним решение (12), обе части полученного тождества умножим на $e^{\alpha(x)}$ и, учитывая одинаковое изменение переменных x и y, после дифференцирования приходим к соотношениям

$$\int_0^x T_1(t,z)e^{2\beta(t)-\beta(x)+\alpha(x)}\,dt + N_2(x,z)xe^{\alpha(x)+\beta(x)} = [\varphi(x,z)e^{\beta(x)}]'_x, \tag{14}$$

$$\int_0^x T_2(t,z)e^{2\alpha(t)-\alpha(x)+\beta(x)}\,dt + N_2(x,z)xe^{\alpha(x)+\beta(x)} = [e^{\alpha(x)}\psi(x,z)]'_x, \tag{15}$$

Из непрерывности решения на плоскости $y = x$ и представлений (8), (11) получаем

$$\int_0^x T_1(t,z)e^{2\beta(t)-2\beta(x)}\,dt = \int_0^x T_2(t,z)e^{2\alpha(t)-2\alpha(x)}\,dt. \tag{16}$$

Из условий сопряжения (4), формул (10), (13) имеем

$$T_1e^{2\beta(x)+T_2e^{2\alpha(x)}} = 2(N_1e^{2\beta(x)} + N_2e^{2\alpha(x)}). \tag{17}$$

Сложим выражения (14), (15) с учётом формулы (17), обозначим $T(x,z) = T_1e^{2\beta(x)} + T_2e^{2\alpha(x)}$ и в итоге получим уравнение относительно T:

$$T(x,z) + \frac{2}{x}\int_0^x T(t,z)\,dt = g(x,z), \tag{18}$$

в котором

$$g(x,z) = \frac{2}{x}\big[e^{\beta(x)-\alpha(x)}(e^{\beta(x)}\varphi(x,z))'_x + e^{\alpha(x)-\beta(x)}(e^{\alpha(x)}\psi(x,z))'_x\big]. \tag{19}$$

Единственное решение уравнения (18), полученное методом последовательных приближений в классе интегрируемых по x на $[0,h]$ при любом $z \in [0,+\infty)$ функций, имеет вид

$$T_1(x,z)e^{2\beta(x)} + T_2(x,z)e^{2\alpha(x)} = g(x,z) - \frac{2}{x}\int_0^x g(t,z)\left(\frac{t}{x}\right)^2 dt. \tag{20}$$

Из равенств (17), (20) получаем

$$N_1(x,z)e^{2\beta(x)} + N_2(x,z)e^{2\alpha(x)} = \frac{g(x,z)}{2} - \frac{1}{x}\int_0^x g(t,z)\left(\frac{t}{x}\right)^2 dt. \tag{21}$$

Обе части соотношений (14), (15) умножим на $e^{-\beta(x)-\alpha(x)}$, вычтем из одного другое, применяя условие (16):

$$N_1 - N_2 = \frac{e^{-\alpha(x)-\beta(x)}}{x}[\varphi e^{\beta(x)'} - \psi e^{\alpha(x)}]'_x. \tag{22}$$

Из системы (21), (22) находим функции N_1, N_2:

$$N_1(x,z) = \frac{1}{x(e^{2\alpha(x)} + e^{2\beta(x)})}\Bigg[2\operatorname{ch}(\alpha(x)-\beta(x))[\varphi(x,z)e^{\beta(x)}]'_x - \\ - \int_0^x g(t,z)\left(\frac{t}{x}\right)^2 dt\Bigg], \tag{23}$$

$$N_2(x,z) = \frac{1}{x(e^{2\alpha(x)} + e^{2\beta(x)})}\Bigg[2\operatorname{ch}(\alpha(x)-\beta(x))[\psi(x,z)e^{\alpha(x)}]'_x - \\ - \int_0^x g(t,z)\left(\frac{t}{x}\right)^2 dt\Bigg]. \tag{24}$$

Вычислением получаем

$$\int_0^x [T_1(t,z)e^{2\beta(t)} + T_2(t,z)e^{2\alpha(t)}]\,dt = \int_0^x g(t,z)\left(\frac{t}{x}\right)^2 dt. \tag{25}$$

Из системы (25), (16) находим

$$\int_0^y T_2(t,z)e^{2\alpha(t)}\,dt = \frac{e^{2\alpha(y)}}{e^{2\alpha(y)} + e^{2\beta(y)}}\int_0^y g(t,z)\left(\frac{t}{y}\right)^2 dt, \tag{26}$$

$$\int_0^y T_1(t,z)e^{2\beta(t)}\,dt = \frac{e^{2\beta(x)}}{e^{2\alpha(x)} + e^{2\beta(x)}}\int_0^x g(t,z)\left(\frac{t}{x}\right)^2 dt. \tag{27}$$

Найденные выражения функций (23), (24), (26), (27), в которых функция $g(t,z)$ определена формулой (19), подставляем в решения (9), (12). В результате получаем решение задачи I в явном виде. Единственность решения задачи следует из единственности решения задачи Дарбу, полученного методом Римана, и единственности решения интегрального уравнения (18), к которому свелась задача. Из изложенного выше следует следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условий A и B задача I для уравнения* (1) *имеет единственное решение, определяемое формулами* (9), (12), (23), (24), (26), (27), (19).

Работа выполнена в рамках госзаказа ФГБОУ ВПО «СамГУ» 1.909.2011.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Долгополов М. В., Родионова И. Н.* Смешанная задача V_2 для одного пространственного аналога уравнения гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 252–257. [*Dolgopolov M. V., Rodionova I. N.* A Mixed Problem for One 3D Space Analogue of Hyperbolic Type Equation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 252–257].
2. *Родионова И. Н.* Задача с интегральным условием для одного пространственного уравнения гиперболического типа, вырождающегося на координатных плоскостях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 189–193. [*Rodionova I. N.* The problem with integral condition for one space analog of hyperbolic type equation degenerated on a coordinate planes // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 2(23). Pp. 189–193].
3. *Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н.* Функции для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применение. Самара: Самарский университет, 1995. 75 с. [*Volkodavov V. F., Nikolaev N. Ya., Bystrova O. K., Zakharov V. N.* Riemann Functions for Certain Differential Equations in n-Dimensional Euclidean Space and Their Applications. Samara: Samarskiy Universitet, 1995. 75 pp.]

Поступила в редакцию 31/VIII/2012;
в окончательном варианте — 29/X/2012.

MSC: 35L25

TWO PROBLEMS FOR THREE-DIMENSIONAL SPACE ANALOGUE OF THE THIRD ORDER HYPERBOLIC TYPE EQUATION

V. M. Dolgopolov, I. N. Rodionova

Samara State University,
1, Academician Pavlov st., Samara, 443011, Russia.

E-mail: mikhaildolgopolov@rambler.ru

For a complete hyperbolic equation of the third order with variable coefficients in the infinite rectangle the problem with two integral conditions and conjugation on the characteristic plane (Problem I) is considered. As auxiliary Darboux problem is solved by Riemann method which is much simplified by the special presentation of one of the boundary conditions. Taking Darboux problem as a basis for the solution, authors reduce the Problem I to the uniquely solvable integral equation, which gives an explicit solution to the Problem I.

Key words: *integral equations, boundary value problems, higher order hyperbolic type equations.*

Original article submitted 31/VIII/2012;
revision submitted 29/X/2012.

Vyacheslav M. Dolgopolov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics.
Irina N. Rodionova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematics & Business Informatics.