Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 2 (27). С. 26–33

УДК 517.91/.93

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТНОСИТЕЛЬНО ДИССИПАТИВНЫМ ПУЧКОМ ОПЕРАТОРОВ

А. А. Замышляева, О. Н. Цыпленкова

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
454080, Россия, Челябинск, пр. Ленина, 76.

E-mails: alzama@mail.ru, Tsyplenkova_Olga@mail.ru

Рассмотрена задача Коши для уравнения соболевского типа второго порядка. Введено определение относительной диссипативности пучка операторов, обобщено понятие диссипативности и относительной диссипативности оператора. Установлена связь с результатами теории аккретивных операторов. Согласно идеологии Келдыша, исходная задача редуцируется к задаче Коши для уравнения соболевского типа первого порядка. Приводятся результаты для исследуемой задачи.

Ключевые слова: *уравнение соболевского типа, относительная диссипативность пучка операторов, аккретивные операторы, фазовое пространство.*

Введение. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{G}$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ и $[\cdot,\cdot]$ соответственно, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{G})$, а операторы B_1, $B_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{V};\mathcal{G})$ (линейны, замкнуты, плотно определены в $\mathcal{V}$).

Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, \quad \dot{v}(0) = v_1 \tag{1}$$

для операторно-дифференциального уравнения

$$A\ddot{v} = B_1\dot{v} + B_0 v. \tag{2}$$

Данная задача рассматривалась многими авторами, в частности в [1–3]. R. Showalter исследовал задачу (1), (2) в случае непрерывной обратимости оператора A, когда оператор $(-A^{-1}B_1)$ непрерывен и аккретивен, а оператор $(-A^{-1}B_0)$ регулярно m-аккретивен. В работе A. Favini и A. Yagi накладываются условия самосопряжённости и неотрицательности на оператор A, самосопряжённости и положительности на оператор B_0 и диссипативности на оператор B_1. Нас интересует разрешимость задачи (1), (2) в случае необратимости оператора A.

Неполное уравнение соболевского типа

$$A\ddot{v} = Bv, \tag{3}$$

где операторы A, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{G})$, причём оператор B (A,p)-ограничен, было впервые изучено в [4]. Единственное решение $v \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V})$ задачи Коши (1) для уравнения (3) представимо в виде

$$v(t) = V_1^t v_1 + V_0^t v_0,$$

Алёна Александровна Замышляева (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. уравнений математической физики. *Ольга Николаевна Цыпленкова*, аспирант, каф. уравнений математической физики.

где *пропагаторы* V_k^t имеют следующий вид:

$$V_k^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu^{1-k}\left(\mu^2 A - B\right)^{-1} Ae^{\mu t}d\mu, \quad k = 0, 1.$$

Здесь контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую A-спектр оператора B, а начальные значения $v_k \in \operatorname{im} V_1^0 = \operatorname{im} V_0^0$, $k = 0, 1$, где $\operatorname{im} \dot{V}_1^0 = \operatorname{im} V_0^0$ — подпространство в $\mathcal{V}$.

Полное уравнение соболевского типа второго порядка (2) было изучено ранее [1] в случае относительно полиномиальной ограниченности пучка операторов B_0 и B_1 (в дальнейшем пучок будем обозначать через $\vec{B}$). Здесь построено аналитическое семейство M, N-функций и фазовое пространство данного уравнения.

Согласно идеологии М. В. Келдыша, в данной работе уравнение (2) редуцируется к эквивалентному ему уравнению соболевского типа первого порядка. Наш подход заключается в построении фазового пространства такого уравнения.

Работа содержит 4 пункта. В первом даны основные определения и результаты теории уравнений соболевского типа, необходимые в дальнейших исследованиях. Во втором пункте приводятся результаты, касающиеся L-диссипативных операторов из [5], и вводится понятие A-диссипативности пучка операторов $\vec{B}$. Третий пункт содержит некоторые результаты теории аккретивных операторов [3]. Здесь же доказывается, что результаты данной работы являются более общими по сравнению с [3]. Основной результат — теорема о существовании и единственности решения задачи (1), (2) — приведён в четвёртом пункте работы.

1. Уравнения соболевского типа с относительно радиальными операторами. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — гильбертовы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, а оператор $M : \operatorname{dom} M \subset \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ линеен и замкнут, плотно определён.

Определение 1.1. Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M *относительно* оператора L (короче, *L-резольвентным множеством* оператора M). Множество $\mathbb{C}\backslash\rho^L(M) = \sigma^L(M)$ называется *спектром* оператора M *относительно* оператора L (короче, *L-спектром* оператора M).

Определение 1.2. Оператор-функции $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ называются соответственно *резольвентой, правой резольвентой, левой резольвентой* оператора M *относительно* оператора L (короче, *L-резольвентой, правой L-резольвентой, левой L-резольвентой оператора* M).

Определение 1.3. Оператор M называется $(L, 0)$*-радиальным относительно* оператора L, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \mu > a\ \mu \in \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K \in \mathbb{R}_+\ \forall \mu > a\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\left\{\|(R^L(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|(L^L(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\right\} \leqslant \frac{K}{(\mu - a)^n}.$$

Замечание 1.1. Без потери общности в определении 1.3 можно положить $a = 0$. И в дальнейшем будем считать, что $a = 0$.

Утверждение 1.1. *Пусть оператор L непрерывно обратим. Тогда оператор $L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ (или ML^{-1}) радиален точно тогда, когда оператор M $(L, 0)$-радиален.*

Определение 1.4. Множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ называется *фазовым пространством* уравнения

$$L\dot{u} = Mu, \tag{4}$$

если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (4) лежит в $\mathcal{P}$, т. е. $u(t) \in \mathcal{P}$ $\forall t \in [0, T]$, $T > 0$;

(ii) для любого u_0 из некоторого плотного в $\mathcal{P}$ множества существует единственное решение задачи

$$u(0) = u_0 \tag{5}$$

для уравнения (4).

Теорема 1.1 [6]. *Пусть оператор M является $(L, 0)$-радиальным. Тогда $\mathfrak{U}^1 = \overline{im(\mu L - M)^{-1}L}$ есть фазовое пространство уравнения* (4).

2. *L*-диссипативные операторы. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — гильбертовы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим задачу Коши (5) для операторно-дифференциального уравнения (4).

Определение 2.1. Оператор M будем называть *диссипативным относительно* оператора L (короче, *L-диссипативным*) по отношению к скалярным произведениям $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ в $\mathfrak{U}$ и $[\, \cdot\, , \cdot\,]$ в $\mathfrak{F}$, если

(i) $\forall u \in \operatorname{dom} M$ $\operatorname{Re}[Lu, Mu] \leqslant 0$;

(ii) существует положительное число $\alpha \in \rho^L(M)$;

(iii) $\forall u \in \operatorname{dom} M$ $\operatorname{Re}\langle (\alpha L - M)^{-1}Lu, (\alpha L - M)^{-1}Mu \rangle \leqslant 0$.

Замечание 2.1. Если условие (i) определения 2.1 записать в эквивалентном виде

$$\forall f \in \mathfrak{F} \quad \operatorname{Re}[L(\alpha L - M)^{-1}f, M(\alpha L - M)^{-1}f] \leqslant 0,$$

то условия (i) и (iii) примут симметричный вид.

Лемма 2.1. *Пусть выполняется условие* (i) *определения* 2.1, *тогда условие* (ii) *эквивалентно следующему*:

$$(\ker L \cap \ker M = \{0\}) \wedge (im(\alpha L - M) = \mathfrak{F}).$$

Теорема 2.1. *Если оператор M L-диссипативен, тогда он $(L, 0)$-радиален.*

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{G}$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ и $[\, \cdot\, , \cdot\,]$ соответственно, операторы $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{G})$, а операторы $B_1, B_0 \in \mathcal{C}l(\mathcal{V}; \mathcal{G})$.

Рассмотрим задачу Коши (1) для операторно-дифференциального уравнения (2).

Определение 2.2. Операторный пучок $\vec{B}$ будем называть *диссипативным относительно* оператора A (короче, *A-диссипативным*) по отношению к скалярным произведениям $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ в $\mathcal{V}$ и $[\, \cdot\, , \cdot\,]$ в $\mathcal{G}$, если

(i) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{dom} \vec{B} (\operatorname{dom} \vec{B} = \operatorname{dom} B_1 \bigcap \operatorname{dom} B_0)$ $\operatorname{Re}(\langle v_1, v_2 \rangle) + [Av_2, B_0 v_1 + B_1 v_2] \leqslant 0$;

(ii) существует положительное число $\alpha \in \rho^A(\bar{B})$;

(iii) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{dom} \vec{B}$ $\operatorname{Re}\langle R_\alpha B_0 v_1 + \alpha R_\alpha A v_2, R_\alpha(\alpha A - B_1 + \alpha B_0) v_1 + R_\alpha(A + \alpha B_1 + B_0) v_2 \rangle \leqslant 0$, где $R_\alpha = (\alpha^2 A - \alpha B_1 - B_0)^{-1}$ — относительная A-резольвента *пучка* $\vec{B}$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнено условие* (i) *определения* 2.2, *тогда условие* (ii) *эквивалентно следующему*:

$$(\ker A \cap \ker B_1 \cap \ker B_0 = \{0\}) \wedge (im(\alpha^2 A - \alpha B_1 - B_0) = \mathcal{G}).$$

Доказательство. Покажем, что из (i) и тривиальности пересечения ядер $\ker A$, $\ker B_1$ и $\ker B_0$ следует инъективность оператора $\alpha^2 A - \alpha B_1 - B_0$, $\alpha > 0$. Пусть $\alpha^2 A = \alpha B_1 + B_0$ и возьмём $v_2 = \alpha u$, $v_1 = u$. Тогда

$$\operatorname{Re}(\langle u, \alpha u \rangle + [A\alpha u, B_0 u + B_1 \alpha u]) = \operatorname{Re}(\alpha \langle u, u \rangle + \alpha [Au, \alpha^2 Au]) = \\ = \operatorname{Re}(\alpha \langle u, u \rangle + \alpha^3 [Au, Au]) = \operatorname{Re}(\alpha \|u\|^2 + \alpha^3 \|Au\|^2) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $u \in (\ker A \cap \ker B_1 \cap \ker B_0)$, то есть $u = 0$. □

Сведём задачу (1), (2) к задаче (4), (5), где $u(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$, операторы $L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, пространства $\mathfrak{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $\mathfrak{F} = \mathcal{V} \times \mathcal{G}$.

Лемма 2.3. *Пучок операторов $\vec{B}$ является A-диссипативным точно тогда, когда оператор M является L-диссипативным.*

Доказательство. Докажем *необходимость*.

(i) Докажем выполнение условия (i) в определении 2.2:

$$\operatorname{Re}(\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{V}} + [Av_2, B_0 v_1 + B_1 v_2]_{\mathcal{G}}) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ Av_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ B_0 v_1 + B_1 v_2 \end{pmatrix} \right) = \\ = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Re}[Lu, Mu] \leqslant 0.$$

(ii) Пусть существует положительное число $\mu \in \rho^L(M)$, тогда существует $(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$, при этом

$$(\mu L - M)^{-1} = \left(\mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ = \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} \mu & -I \\ -B_0 & \mu A - B_1 \end{pmatrix}^{-1} = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \begin{pmatrix} \mu A - B_1 & I \\ B_0 & \mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\mu A - B_1)(\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} & (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \\ B_0(\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} & \mu(\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует существование $(\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G};\mathcal{V})$, то есть $\mu \in \rho^A(\vec{B})$, где $\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G},\mathcal{V})\}$.

(iii) Докажем выполнение пункта (iii) в определении 2.2:

$$\mathrm{Re}(\langle R_\alpha B_0 v_1 + \alpha R_\alpha A v_2, R_\alpha(\alpha A - B_1 + \alpha B_0)v_1 + R_\alpha(A + \alpha B_1 + B_0)v_2\rangle) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(R_\alpha \begin{pmatrix} \alpha A - B_1 & A \\ B_0 & \alpha A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, R_\alpha \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ \alpha B_0 & B_0 + \alpha B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(R_\alpha \begin{pmatrix} \alpha A - B_1 & I \\ B_0 & \alpha \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, R_\alpha \begin{pmatrix} \alpha A - B_1 & I \\ B_0 & \alpha \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} \alpha & -I \\ -B_0 & \alpha A - B_1 \end{pmatrix}^{-1} L \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -I \\ -B_0 & \alpha A - B_1 \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\left(\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, (\alpha L - M)^{-1} M u\right) =$$
$$= \mathrm{Re}((\alpha L - M)^{-1} L u, (\alpha L - M)^{-1} M u) \leqslant 0.$$

Доказательство *достаточности* проводится аналогично. □

3. Аккретивные операторы. Пусть H — гильбертово пространство, D — подпространство в H и пусть оператор $A : D \to H$ линеен.

Определение 3.1. Неограниченный оператор $A : D \to H$ называется *аккретивным*, если

$$(Au, u)_H \geqslant 0, \quad x \in D,$$

и *m-аккретивным*, если он аккретивен и $\mathrm{Im}(A + I) = H$.

Утверждение 3.1. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *оператор* $A : D \to H$ *аккретивен и существует* $\mu \geqslant 0$, *что* $\mathrm{Im}(\mu I + A) = H$;

(ii) *оператор* A — *m-аккретивен*;

(iii) *оператор* A *аккретивен с областью определения* D, *плотной в* H, *и* $\mathrm{Im}(\lambda I + A) = H$ *для всех* $\lambda > 0$.

Определение 3.2. Неограниченный оператор $A : D \to H$ называется *регулярно m-аккретивным,* если для всех $\varepsilon > 0$ $\mathrm{Im}(A + \varepsilon I) = H$.

Пусть $V = G = H$.

Замечание 3.1. Пусть существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G};\mathcal{V})$. Если оператор $(-A^{-1}B_1)$ непрерывен и аккретивен, а оператор $(-A^{-1}B_0)$ регулярно m-аккретивен, то пучок $\vec{B}$ является A-диссипативным.

Доказательство. Без ограничения общности положим $A = I$.

(i) $\mathrm{Re}(\langle v_1, v_2\rangle + [v_2, B_0 v_1 + B_1 v_2]) = \mathrm{Re}((\langle v_1, v_2\rangle + [v_2, B_0 v_1] + [v_2, B_1 v_2]) = \mathrm{Re}((\langle v_1, v_2\rangle + [B_0 v_1, v_2] + [v_2, B_1 v_2])$.

Рассмотрим скалярное произведение в $\mathfrak{U} = H \times H$:

$$(\bar{u}, \bar{v})_{\mathfrak{U}} = (-B_0 u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

Оно эквивалентно естественному скалярному произведению в $\mathfrak{U}$, так как оператор $(-B_0)$ регулярно m-аккретивный.

Операторы $L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, пространства $\mathfrak{U} = H \times H$, $\mathfrak{F} = H \times H$. Причём

$$(L\bar{u}, M\bar{u})_{\mathfrak{U}} = (\bar{u}, M\bar{u})_{\mathfrak{U}} = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ B_0u_1 + B_1u_2 \end{pmatrix} \right)_{\mathfrak{U}} =$$
$$= (-B_0u_1, u_2) + (u_2, B_0u_1 + B_1u_2) = (B_1u_2, u_2) \leqslant 0.$$

(ii) Рассмотрим уравнение (2). Положим $w(t) = e^{-\alpha t}v(t)$. Выражая $v(t)$ и подставляя в (2), получаем

$$\ddot{w}(t) + (2\alpha I - B_1)\dot{w}(t) + (\alpha^2 I - \alpha B_1 - B_0)w(t) = 0.$$

Оператор B_1 является аккретивным, т. е. $(-B_1u, u)_H \geqslant 0$.
Рассмотрим скалярное произведение в $\mathfrak{U} = H \times H$:

$$(\bar{u}, \bar{v})_{\mathfrak{U}} = (-B_0u_1, v_1) + (u_2, v_2).$$

Оно эквивалентно естественному скалярному произведению в $\mathfrak{U}$, так как оператор $-B_0$ регулярно m-аккретивный.

Определим оператор $\mathbb{A}$ следующим образом: $\mathbb{A}\bar{u} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ -B_0u_1 - B_1u_2 \end{pmatrix}$, $\forall u_1, u_2 \in \operatorname{dom}\vec{B} (\operatorname{dom}\vec{B} = \operatorname{dom}B_1 \bigcap \operatorname{dom}B_0)$. Это оператор, который появляется, когда мы запишем уравнение (2) в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) - u(t) = 0, \\ \dot{u}(t) - B_1u(t) - B_0v(t) = 0; \end{cases}$$

в таком случае функция $\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ при $t > 0$ является решением уравнения $\dot{\bar{u}}(t) + \mathbb{A}\bar{u}(t) = \bar{0}$.

Пусть $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{F}$, попытаемся найти $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ такой, что $\alpha\bar{u} + \mathbb{A}\bar{u} = \bar{f}$, то есть

$$\begin{cases} (\alpha^2 I - \alpha B_1 - B_0)u_1 = (\alpha - B_1)f_1 + f_2, \\ u_2 = \alpha u_1 - f_1. \end{cases}$$

Билинейная форма, определённая в H формулой

$$a(u, v) = \alpha^2(u, v)_H + \alpha(-B_1u, v)_H + (-B_0u, v)_H,$$

непрерывна и коэрцитивна. Требуемый результат следует из теоремы Лакса—Мильграма: для каждого $h \in H$ существует единственное $u \in H$ такое, что

$$a(u, v) = (h, v)_H,$$

а это равносильно $(\alpha^2 I - \alpha B_1 - B_0)u = h$. Следовательно, $(\alpha^2 I - \alpha B_1 - B_0) = H$.

(iii) Так как $A = I$, то и $L = I$. Имеем $\langle(\alpha L - M)^{-1}L\bar{u}, (\alpha L - M)^{-1}M\bar{u}\rangle_{\mathfrak{U}} = = \langle(\alpha I - M)^{-1}\bar{u}, (\alpha I - M)^{-1}M\bar{u}\rangle_{\mathfrak{U}}$; $(\alpha I - M)^{-1}M = -(\alpha I - M)^{-1}(\alpha I - - M - \alpha I) = -I + \alpha(\alpha I - M)^{-1} = -(\alpha I - M)(\alpha I - M)^{-1} + \alpha(\alpha I - M)^{-1} = = (-\alpha I + M + \alpha I)(\alpha I - M)^{-1} = M(\alpha I - M)^{-1}$.
Обозначив $(\alpha I - M)^{-1}\bar{u} = \bar{v}$, получаем $\langle(\alpha I - M)^{-1}\bar{u}, (\alpha I - M)^{-1}M\bar{u}\rangle_{\mathfrak{U}} = = \langle(\alpha I - M)^{-1}\bar{u}, M(\alpha I - M)^{-1}\bar{u}\rangle_{\mathfrak{U}} = \langle\bar{v}, M\bar{v}\rangle_{\mathfrak{U}} \leqslant 0$ в силу (i). $\square$

4. Задача Коши для уравнения соболевского типа второго порядка с относительно диссипативным пучком операторов.

Определение 4.1. *Решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $v(t) \in \mathcal{C}^2([0,T], \mathcal{V}) \cap \mathcal{C}^1([0,T], \operatorname{dom} B_1) \cap \mathcal{C}([0,T], \operatorname{dom} B_0)$, удовлетворяющую уравнению (2) и условиям (1).

Теорема 4.1. *Если пучок операторов $\vec{B}$ является A-диссипативным, то для любых $(v_0, v_1) \in \overline{\operatorname{im}(\mu L - M)^{-1}L}$ задача* (1), (2) *имеет единственное решение $v(t)$.*

Доказательство. Сведём задачу (1), (2) к задаче (4), (5), где $u(t) = = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$. Рассмотрим операторы $L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B_0 & B_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, пространства $\mathfrak{U} = \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $\mathfrak{F} = \mathcal{V} \times \mathcal{G}$.

В силу леммы 2.3 пучок операторов $\vec{B}$ является A-диссипативным точно тогда, когда оператор M является L-диссипативным. Из L-диссипативности оператора M следует его $(L, 0)$-радиальность.

По теореме 1.1 $\mathfrak{U}^1 = \overline{\operatorname{im}(\mu L - M)^{-1}L}$ является фазовым пространством уравнения (4). В силу определения 1.4 для любых $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ задача Коши для уравнения (4) имеет единственное решение $u(t)$. Значит задача (1), (2) также однозначно разрешима при любых $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}^1$, причём её решение $v(t)$ является первой компонентой вектора $u(t)$.$\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // *Вычисл. технол.*, 2003. Т. 8, № 4. С. 45–54. [*Zamyshlyaeva A. A.* Phase spaces of some class of linear second-order Sobolev-type equations // *Vychisl. Tekhnol.*, 2003. Vol. 8, no. 4. Pp. 45–54].
2. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations is Banach spase / Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker. Vol. 215. New York, NY: Marcel Dekker, 1999. 312 pp.
3. *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations / Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 49. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997. 278 pp.
4. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / Inverse and Ill-Posed Problems Series. Vol. viii. Utrecht: VSP. 216 pp.
5. *Федоров В. Е.* Сжимающие полугруппы уравнений соболевского типа и относительно диссипативные операторы // *Мат. замет. ЯГУ*, 2001. Т. 8, № 2. С. 75–83. [*Fedorov V. E.* Contracting semigroups of Sobolev-type equations and relatively dissipative operators // *Mat. Zamet. YaGU*, 2001. Vol. 8, no. 2. Pp. 75–83].
6. *Федоров В. Е.* Обобщение теоремы Хилле–Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448; англ. пер.: *Fedorov V. E.* A generalization of the Hille–Yosida Theorem to the case

of degenerate semigroups in locally convex spaces // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 2. Pp. 333–350.

Поступила в редакцию 19/X/2011;
в окончательном варианте — 12/II/2012.

MSC: 34G10; 47N20

THE SOBOLEV-TYPE EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH THE RELATIVELY DISSIPATIVE OPERATOR PENCILS

A. A. Zamyshlyaeva, O. N. Tsyplenkova

South Ural State University (National Research University),
76, Lenin av., Chelyabinsk, 454080, Russia.

E-mails: alzama@mail.ru, Tsyplenkova_Olga@mail.ru

Of concern is the Cauchy problem for the Sobolev-type equation of the second order. We introduce the definition of relatively dissipative operator pencils, generalize the notion of dissipativity and relative dissipativity of operators. The connection with the theory of accretive operators is established. According to the Keldysh ideology, the original problem is reduced to the Cauchy problem for the Sobolev-type equation of the first order and the results for the investigated problem are obtained.

Key words: *Sobolev-type equation, relative dissipativity of the operator pencil, accretive operators, phase space.*

Original article submitted 19/X/2011;
revision submitted 12/II/2012.

Alyona A. Zamyshlyaeva (Ph. D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Mathematical Physics Equations. *Ol'ga N. Tsyplenkova*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Physics Equations.