

Дискретная математика

УДК 512.14

ПРИВЕДЕНИЕ СУММЫ ВЗВЕШЕННЫХ ОДИНАКОВЫХ СТЕПЕНЕЙ К ЯВНОМУ КОМБИНАТОРНОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ

А. И. Никонов

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: nikonovai@mail.ru

Доказывается, что компонент суммы взвешенных одинаковых степеней натуральных чисел, зависимость от весовых коэффициентов, равен сумме произведений биномиальных и весовых коэффициентов. Также доказывается, что компонент этой суммы, независимый от весовых коэффициентов, является алгебраической суммой произведений биномиальных коэффициентов и степеней натуральных чисел. Явное комбинаторное представление суммы взвешенных одинаковых степеней содержит величины, берущиеся из доказанных равенств.

Ключевые слова: сумма взвешенных одинаковых степеней, комбинаторное представление, биномиальные коэффициенты, весовые коэффициенты.

В настоящей работе путём выработки соответствующих доказательств формируется явное комбинаторное представление суммы взвешенных одинаковых степеней (СВОС) натуральных чисел, не использующее проведение операций рекуррентного характера. При этом полагается, что данное комбинаторное представление СВОС содержит основные компоненты, соответственно независимые и зависящие от весовых коэффициентов.

Компоненты первого из названных видов будем называть свободными, а компоненты второго вида, как и сами коэффициенты, от которых они зависят, — весовыми. Весовые коэффициенты отображают в СВОС информацию, соответствующую исходному тексту, который требуется передать от источника зашифрованных сообщений к их получателю.

В доказательствах, обеспечивающих получение комбинаторного представления основных компонентов СВОС, будет использоваться известное комбинаторное выражение СВОС [1, 2] вида

$$\Phi(p, \nu) = \sum_{r=1}^{\max r} \alpha_0^r \Phi_{p-r, 0}; \quad (1)$$

$$p, \nu \in \mathbb{N}, r = 1, \dots, \max r, \max r = \min(p, \nu),$$

Александр Иванович Никонов (д.т.н., проф.), профессор, каф. электронных систем и информационной безопасности.

где α_0^r , $\Phi_{p-r,0}$ — соответственно свободный и весовой компоненты СВОС. Сами же исходные весовые коэффициенты имеют вид

$$b_{p-k} = b_{p-k}^0, \quad k = 0, \dots, p-1.$$

Здесь полагается, в частности, что сумма взвешенных степеней выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{p-r,0} &= \sum_{\tau=0}^{p(r)} b_{p(r)-\tau}^r, \quad p(r) = p-r; \\ b_{p(r)-\tau}^r &= \sum_{k=0}^{\tau} b_{p(i)-k}^i, \quad i = r-1. \end{aligned}$$

Достижение искомого комбинаторного представления СВОС будет производиться ниже сначала применительно к весовому, а затем — к свободному компоненту данной СВОС.

ТЕОРЕМА 1. *Для чисел вида p, ν, r, b_{p-k} справедливо равенство*

$$\Phi_{p-r,0} = \sum_{k=0}^{p-r} C_{p-k}^r b_{p-k}^0. \quad (2)$$

Доказательство. В качестве исходного станем рассматривать здесь соотношение, полученное ранее [3]:

$$\Phi_{p-r,0} = \sum_{\tau=0}^{p-r} \sum_{k=0}^{\tau} C_{i+\tau-k}^i b_{p-k}^0; \quad \tau \in \{0, \dots, p-r\}. \quad (3)$$

Перемену порядка двойного суммирования (3) произведём ниже с учётом заданного формулой (3) неравенства $\tau \geq k$. Перед этим рассмотрим вспомогательный вопрос о нахождении пределов суммирования некоторой целочисленной величины $v(j, l)$, когда действует неравенство, связывающее значения её целочисленных индексов $j = 1, \dots, \max j$ и $l = 0, \dots, \max l: l \leq j-1$, или $j \geq l+1$.

Определим набор парных индексов вида (j, l) , ограниченный пределами исходной двойной суммы

$$\sum_v = \sum_{j=1}^{\max j} \sum_{l \leq j-1}^{\max l} v(j, l),$$

как допустимое множество индексов M ;

$$M = \{\{j\} \times \{l; l \leq j-1\}; j = 1, \dots, \max j\} = \{\{j; j \geq l+1\} \times \{l\}; l = 0, \dots, \max l\}.$$

Отсюда видим, что искомые пределы двойного суммирования после перемены его порядка представляют собой границы интервалов: по $l - [0, \dots, \max l]$; по $j - [l+1, \dots, \max j]$. Тогда исходная двойная сумма приобретает вид

$$\sum_v = \sum_{l=0}^{\max l} \sum_{j=l+1}^{\max j} v(l, j).$$

Используя решение данного вспомогательного вопроса, можно записать:

$$\Phi_{p-r\ 0} = \sum_{k=0}^{p-r} \left(\sum_{\tau=k}^{p-r} C_{i+\tau-k}^i \right) b_{p-k}^0. \quad (4)$$

Теперь преобразуем сумму из правой части равенства (4), заключенную в скобки, используя для этого известное комбинаторное правило [4]:

$$\sum_{\tau=k}^{p-r} C_{i+\tau-k}^i = C_{(i+(p-r)-k)+1}^{i+1} = C_{p-k}^r.$$

Следовательно, имеем

$$\Phi_{p-r\ 0} = \sum_{k=0}^{p-r} C_{p-k}^r b_{p-k}^0,$$

что и завершает доказательство справедливости соотношения (2). $\square$

ТЕОРЕМА 2. Для чисел $p, \nu \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, \dots, \min(p, \nu)\}$ свободный компонент СВОС может быть представлен в виде

$$\alpha_0^r = \alpha_0^r(\nu) = \sum_{q=1}^r (-1)^{r+q} C_r^q q^\nu. \quad (5)$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведём, используя метод математической индукции и вводя в рассмотрение отсылочные (промежуточные) величины вида ν^ν . Нам потребуется также использовать известное выражение свободного компонента СВОС [1, 2]

$$\alpha_{j(r)}^r = \sum_{j(i)=j(r)+1}^{\max j(i)} C_{j(i)}^{j(r)} \alpha_{j(i)}^i,$$

где $j(i) \in \{1, \dots, \max j(i)\} \subset N$, $j(r) \in \{0, \dots, \max j(r)\} \subset N \cup \{0\}$;

$$\max j(i) = \nu - i, \quad \max j(r) = \nu - r.$$

База индукции предусматривает здесь обращение к значению $\nu = 1$ и к соответствующей отсылочной величине 1^1 . В данном случае, используя вышеприведенное выражение для $\alpha_{j(r)}^r$, компонент α_0^r можно выразить следующим образом:

$$\alpha_0^r(1) = \alpha_0^1(1) = \sum_{j(0)=1}^{\max j(0)=1} C_{j(0)}^{j(1)} \alpha_{j(0)}^0 \Big|_{j(1)=0}.$$

Отсюда при $\alpha_{j(0)=1}^0 = 1$ имеем $\alpha_0^1(1) = 1$. Это соответствует частному случаю $\nu = 1 \Rightarrow r = 1$, относящемуся к выражению (5), когда

$$\alpha_0^r(\nu)|_{r=1} = \sum_{q=1}^1 (-1)^2 C_1^1 1^1 = 1.$$

В рамках индукционного шага будем рассматривать последовательность с членами вида ν^ν , каждый из которых можно представлять как

$$\begin{aligned}\Phi(p, \nu) &= \Phi(\nu, \nu) = \Phi(\nu, \nu, \beta(\nu)); \\ \beta(\nu) &= (b_{p-\tau} = \delta_{p-\tau p}, \tau = 0, \dots, \nu - 1),\end{aligned}$$

где $\delta_{p-\tau p}$ — символ Кронекера. Другими словами, имеем $\beta(\nu) = 1, 0_{\nu-1}; 0_{\nu-1}$ — конечная последовательность, состоящая из $(\nu - 1)$ нулей.

Для $\nu = n - 1 \geq 1$ полагаем, что исходное допущение вида (5) справедливо при любом $\nu \leq n - 1$. Тогда, используя рекуррентное комбинаторное представление СВОС [1, 2], имеем

$$\begin{aligned}(n - 1)^{n-1} &= \Phi(n - 1, n - 1, \beta(n - 1)) = \sum_{r=1}^{n-1} \alpha_0^r(n - 1) \Phi_{n-1-r} 0 = \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \left(\sum_{q=1}^r (-1)^{r+q} C_r^q q^{n-1} \right) C_{n-1}^r, \quad (6)\end{aligned}$$

$$\beta(n - 1) = (b_{p-\tau} = \delta_{p-\tau p}, \tau = 0, \dots, n - 2) = 1, 0_{n-2},$$

где 0_{n-2} — последовательность, содержимое которой состоит из $(n - 2)$ нулей.

Множитель C_{n-1}^r из выражения (6) оказывается не чем иным, как числом $\Phi_{n-1-r} 0$, поскольку согласно доказанной выше теореме 1

$$\Phi_{n-1-r} 0 = \sum_{k=0}^{n-1-r} C_{n-1-k}^r b_{n-1-k}.$$

В данном выражении среди всех коэффициентов вида b_{n-1-k} лишь коэффициент b_{n-1} не равен нулю; он имеет единичное значение.

Изменив в выражении (6) порядок двойного суммирования, с учётом неравенства $q \leq r$ получаем:

$$\Phi(n - 1, n - 1, \beta(n - 1)) = \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{r=q}^{n-1} (-1)^{r+q} C_r^q C_{n-1}^r q^{n-1}.$$

Далее используем известное комбинаторное тождество [4], связанное с произведением двух биномиальных коэффициентов:

$$\begin{aligned}\Phi(n - 1, n - 1, \beta(n - 1)) &= \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{r=q}^{n-1} (-1)^{r+q} C_{n-1}^q C_{n-1-q}^{r-q} q^{n-1} = \\ &= \sum_{q=1}^{n-1} C_{n-1}^q q^{n-1} A_q(n - 1); \quad (7)\end{aligned}$$

$$A_q(n - 1) = \sum_{r=q}^{n-1} (-1)^{r+q} C_{n-1-q}^{r-q} q^{n-1}. \quad (8)$$

Значениям числа q на основании другого известного тождества могут быть поставлены в соответствие следующие значения, относящиеся к выражению (8):

$$A_q(n-1) = \begin{cases} 0 : q < n-1, \\ 1 : q = n-1. \end{cases}$$

Как видим, левая и правая части из (7) имеют одинаковое значение:

$$\Phi(n-1, n-1, \beta(n-1)) = C_{n-1}^{n-1}(n-1)^{n-1} = (n-1)^{n-1}.$$

Следует помнить, что в правой части (7) данное значение появилось с использованием исходного допущения (5).

Рассмотрим приращение величины (7), состоящее из двух частей, обозначаемых как $\Delta\Phi_{n-1}^1$, $\Delta\Phi_{n-1}^2$. При этом

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{n-1}^1 &= \sum_{q=1}^{n-1} \Delta\Phi_{n-1}(r, q); \\ \Delta\Phi_{n-1}(r, q) &= (-1)^{r+q}(C_n^q C_{n-q}^{r-q} q^n - C_{n-1}^q C_{n-1}^{r-q} q^{n-1}), \\ & \quad q \leq r, \quad q, r \in \{1, \dots, n-1\}; \\ \Delta\Phi_{n-1}^2 &= \sum_{q=1}^n (-1)^{n+q} C_n^q q^n = \sum_{q=1}^n (-1)^{n+q} C_n^q C_{n-q}^{n-q} q^n. \end{aligned}$$

Таким образом, получив приращение

$$\Delta\Phi_{n-1}^s = \Delta\Phi_{n-1}^1 + \Delta\Phi_{n-1}^2,$$

величина $\Phi(n-1, n-1, \beta(n-1))$ перешла на уровень

$$\sum_{q=1}^n C_n^q q^n A_q(n); \quad A_q(n) = \sum_{r=q}^n (-1)^{r+q} C_{n-q}^{r-q}. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что все значения $A_q(n)$, кроме того, которое соответствует $q = n$ и равно единице, являются нулевыми. Это аналогично тому, что наблюдалось выше применительно к величине $A_q(n-1)$. Тогда уровень (9) оказывается не чем иным, как величиной

$$\Phi(n, n, \beta(n)) = n^n, \quad \beta(n) = 1, 0_{n-1};$$

0_{n-1} — последовательность, состоящая из $(n-1)$ нулей.

Произведём теперь возвращение порядка двойного суммирования к его исходному виду, то есть возвратимся к порядку двойного суммирования, характерному для выражения (6). При этом, учитывая справедливость тождества

$$C_n^q C_{n-q}^{r-q} = C_r^q C_n^r$$

и неравенства $r \geq q$, будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi(n, n, \beta(n)) &= \sum_{q=1}^n C_n^q q^n A_q(n) = \sum_{r=1}^n \left(\sum_{q=1}^r (-1)^{r+q} C_r^q q^n \right) C_n^r = \\ &= \sum_{r=1}^n \alpha_0^r(n) \Phi_{n-r, 0}. \quad (10)\end{aligned}$$

Здесь биномиальный коэффициент C_n^r интерпретируется как величина

$$\Phi_{n-r, 0} = \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-k}^r b_{n-k}, \quad b_{n-k} = \delta_{n-k, n},$$

а значения весовых коэффициентов вида b_{n-k} берутся из последовательности $\beta(n)$, участвующей в формировании суммы (10).

Итак, с использованием допущения (5) о виде величины α_0^r при $\nu = n - 1$ найдено соответствующее комбинаторное представление числа $(n-1)^{n-1}$. После добавления к нему величины $\Delta \Phi_{n-1}^s$ было получено число n^n , комбинаторное представление которого в виде суммы (10) и её алгебраического компонента α_0^r по своей структуре совпадает с соответствующими величинами

$$\Phi(n-1, n-1, \beta(n-1)), \quad \alpha_0^r(n-1)$$

из выражения (6) при учёте принятия в (10) числом ν значения, на единицу превышающего $(n-1)$. Другими словами, из истинности выражений (6), (10) следует, что изменение значения ν с $(n-1)$ на n вызывает соответствующее изменение свободного компонента СВОС от исходного принятого вида

$$\alpha_0^r(n-1) = \sum_{q=1}^r (-1)^{r+q} C_r^q q^{n-1},$$

используемого выражением (6), к виду

$$\alpha_0^r(n) = \sum_{q=1}^r (-1)^{r+q} C_r^q q^n,$$

используемому выражением (10).

Указанные действия и представление используемых величин действительны при всех последовательных изменениях натурального $n > 1$. Таким образом, данную теорему можно считать доказанной. $\square$

Тогда основу явного комбинаторного представления СВОС составляет, согласно исходному выражению (1), сумма попарных произведений величин, которые определяются из равенств, доказанных в теоремах 1 и 2:

$$\Phi(p, \nu) = \sum_{r=1}^{\max r} \alpha_0^r \Phi_{p-ro} = \sum_{r=1}^{\max r} \left(\sum_{q=1}^r (-1)^{r+q} C_r^q q^\nu \right) \left(\sum_{k=0}^{p-r} C_{p-k}^r b_{p-k}^0 \right).$$

Данное представление обеспечивает вычисление СВОС, не требующее выполнения рекуррентных переходов от предыдущих к последующим состояниям её свободных и весовых компонентов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никонов А. И. Преобразование суммы взвешенных степеней натуральных чисел с одинаковыми показателями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 258–262. [Nikonov A. I. Converting the Sum of Weighted Degrees of Natural Numbers with the Same Parameters // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 258–262].
2. Никонов А. И. Об одном свойстве взвешенных сумм одинаковых степеней как матричных произведений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 313–317. [Nikonov A. I. On One Property of the Weighed Sums of Equal Powers as Matrix Products // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 313–317].
3. Никонов А. И. Модифицированное описание компонентов, образующих сумму взвешенных одинаковых степеней // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1(26). С. 223–232. [Nikonov A. I. The update exposition of the components organising the sum of weighted equal powers // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012. no. 1(26). Pp. 223–232].
4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с. [Vilenkin N. Ya. Combinatorics. Moscow: Nauka, 1969. 328 pp.]

Поступила в редакцию 26/VI/2012;
в окончательном варианте — 16/VII/2012.

MSC: 05A10

REDUCTION OF THE SUM OF THE WEIGHTED EQUAL POWERS TO EXPLICIT COMBINATORIAL REPRESENTATION

A. I. Nikonov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: nikonovai@mail.ru

The paper contains the proof of the statement that the component of the sum of weighted powers with natural bases and equal parameters, dependent on weight coefficients, is equal to the sum of products of binomial and weight coefficients. It is proved also, that the component of this sum, independent of weight coefficients, is the algebraic sum of products of binomial coefficients and powers of natural numbers. Explicit combinatorial representation of the sum of the weighted equal powers contains the magnitudes taken from proved equalities.

Key words: *sum of weighted equal powers, combinatorial representation, binomial coefficients, weight coefficients.*

Original article submitted 26/VI/2012;
revision submitted 16/VII/2012.