Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1 (26). С. 8–20

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

ТРЁХМЕРНАЯ ИНТЕГРО-МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ВОЛЬТЕРРО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БИАНКИ

И. Г. Мамедов

Институт Кибернетики им. А. И. Гусейнова НАН Азербайджана,
AZ1141, Азербайджан, Баку, ул. Б. Вахабзаде,, 9.

E-mail:: ilgar-mammadov@rambler.ru

Рассматривается комбинированная трёхмерная нелокальная краевая задача с интегро-многоточечными краевыми условиями для нагруженного вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа Бианки. При этом принципиально важным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа P-интегрируемости и ограниченности, и поэтому рассмотренный гиперболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряжённого оператора. В частности, например, функция Римана задачи Гурса для такого уравнения не может быть построена классическим методом характеристик.

Ключевые слова: *трёхмерная нелокальная краевая задача, нагруженные интегро-дифференциальные уравнения, гиперболическое уравнение, уравнения с разрывными коэффициентами.*

Постановка задачи. Рассмотрим нагруженное вольтерро-гиперболическое интегро-дифференциальное уравнение типа Бианки

$$(V_{1,1,1}u)(x) \equiv D_1D_2D_3u(x) + (\overline{V}_{1,1,1}u)(x) = Z_{1,1,1}(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in G = G_1 \times G_2 \times G_3$, $G_\xi = (0, h_\xi)$, $\xi = 1, 2, 3$, а нагруженный интегро-дифференциальный оператор $\overline{V}_{1,1,1}$ имеет следующий вид:

$$\left(\overline{V}_{1,1,1}u\right)(x) \equiv \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3<3,\\ i_\xi\in\{0,1\},\\ \xi=1,2,3}} a_{i_1,i_2,i_3}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) + \\ + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\xi=1}^{3}\int_{G_\xi} K_\xi^i(x;\tau_\xi) D_\xi\Big(u(x)\big|_{\substack{x=x^{(i)}\\ x_\xi^{(i)}=\tau_\xi}}\Big) d\tau_\xi\right] + \\ + \sum_{l<m}\int_0^{x_l}\int_0^{x_m} B_{l,m}(x;\tau_l,\tau_m) D_l D_m\Big(u(x)\big|_{\substack{x_l=\tau_l\\ x_m=\tau_m}}\Big) d\tau_l d\tau_m$$

Ильгар Гурбат оглы Мамедов (к.ф.-м.н., доц.), ведущий научный сотрудник.

при следующих нелокальных условиях

$$
\begin{aligned}
&V_{0,0,0}u \equiv u(0,0,0) + \overline{V}_{0,0,0}u = Z_{0,0,0};\\
&(V_{1,0,0}u)(x_1) \equiv D_1u(x_1,0,0) + (\overline{V}_{1,0,0}u)(x_1) = Z_{1,0,0}(x_1);\\
&(V_{0,1,0}u)(x_2) \equiv D_2u(0,x_2,0) + (\overline{V}_{0,1,0}u)(x_2) = Z_{0,1,0}(x_2);\\
&(V_{0,0,1}u)(x_3) \equiv D_3u(0,0,x_3) + (\overline{V}_{0,0,1}u)(x_3) = Z_{0,0,1}(x_3);\\
&(V_{1,1,0}u)(x_1,x_2) \equiv D_1D_2u(x_1,x_2,0) + (\overline{V}_{1,1,0}u)(x_1,x_2) = Z_{1,1,0}(x_1,x_2);\\
&(V_{0,1,1}u)(x_2,x_3) \equiv D_2D_3u(0,x_2,x_3) + (\overline{V}_{0,1,1}u)(x_2,x_3) = Z_{0,1,1}(x_2,x_3);\\
&(V_{1,0,1}u)(x_1,x_3) \equiv D_1D_3u(x_1,0,x_3) + (\overline{V}_{1,0,1}u)(x_1,x_3) = Z_{1,0,1}(x_1,x_3);
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $D_\xi = \partial/\partial x_\xi$ — оператор обобщённого дифференцирования в смысле С. Л. Соболева; $\overline{V}_{i_1,i_2,i_3}u \equiv N_{i_1,i_2,i_3}u + L_{i_1,i_2,i_3}u$; N_{i_1,i_2,i_3}, L_{i_1,i_2,i_3} — линейные ограниченные интегральные и многоточечные операторы соответственно, определяемые следующим образом $\left(i_\xi \in \{0,1\},\ \xi = 1,2,3,\ \sum_{\xi=1}^{3} i_\xi < 3\right)$:

$$N_{0,0,0} \equiv \sum_{\xi=1}^{3} \int_{G_\xi} K^{(\xi)}_{0,0,0}(\tau_\xi)\, D_\xi u(x)\Big|_{\substack{x_\xi=\tau_\xi\\ x_\eta=0\\ \eta\neq\xi}} d\tau_\xi;$$

$$(N_{1,0,0}u)(x_1) \equiv \iint_{G_2\times G_3} K_{1,0,0}(x_1,\tau_2,\tau_3)\, D_1D_2D_3u(x_1,\tau_2,\tau_3)\, d\tau_2 d\tau_3;$$

$$(N_{0,1,0}u)(x_2) \equiv \iint_{G_1\times G_3} K_{0,1,0}(\tau_1,x_2,\tau_3)\, D_1D_2D_3u(\tau_1,x_2,\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_3;$$

$$(N_{0,0,1}u)(x_3) \equiv \iint_{G_1\times G_2} K_{0,0,1}(\tau_1,\tau_2,x_3)\, D_1D_2D_3u(\tau_1,\tau_2,x_3)\, d\tau_1 d\tau_2;$$

$$(N_{1,1,0}u)(x_1,x_2) \equiv \int_{G_3} K_{1,1,0}(x_1,x_2,\tau_3)\, D_1D_2D_3u(x_1,x_2,\tau_3)\, d\tau_3;$$

$$(N_{0,1,1}u)(x_2,x_3) \equiv \int_{G_1} K_{0,1,1}(\tau_1,x_2,x_3)\, D_1D_2D_3u(\tau_1,x_2,x_3)\, d\tau_1;$$

$$(N_{1,0,1}u)(x_1,x_3) \equiv \int_{G_2} K_{1,0,1}(x_1,\tau_2,x_3)\, D_1D_2D_3u(x_1,\tau_2,x_3)\, d\tau_2;$$

$$L_{0,0,0}u \equiv \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)});$$

$$(L_{1,0,0}u)(x_1) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{2} \rho_i^{(j)}(x_1) D_1^{j-1} u(x_1, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})\right];$$

$$(L_{0,1,0}u)(x_2) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{2} \lambda_i^{(j)}(x_2) D_2^{j-1} u(x_1^{(i)}, x_2, x_3^{(i)})\right];$$

$$(L_{0,0,1}u)(x_3) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{2} \mu_i^{(j)}(x_3) D_3^{j-1} u(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3)\right];$$

$$(L_{1,1,0}u)(x_1,x_2) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{2}\eta_i^{(j)}(x_1,x_2)D_1^{j-1}D_2^{j-1}u(x_1,x_2,x_3^{(i)})\right];$$

$$(L_{0,1,1}u)(x_2,x_3) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{2}\nu_i^{(j)}(x_2,x_3)D_2^{j-1}D_3^{j-1}u(x_1^{(i)},x_2,x_3)\right];$$

$$(L_{1,0,1}u)(x_1,x_3) \equiv \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{2}\gamma_i^{(j)}(x_1,x_3)D_1^{j-1}D_3^{j-1}u(x_1,x_2^{(i)},x_3)\right].$$

Выше коэффициенты уравнения считаются заданными измеримыми функциями на G, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$\begin{array}{lll} a_{0,0,0}(x)\in L_p(G); & a_{1,0,0}(x)\in L_{\infty,p,p}^{x_1,x_2,x_3}(G); & a_{0,1,0}(x)\in L_{p,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3}(G); \\ a_{0,0,1}(x)\in L_{p,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G); & a_{1,1,0}(x)\in L_{\infty,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3}(G); & a_{0,1,1}(x)\in L_{p,\infty,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G); \\ a_{1,0,1}(x)\in L_{\infty,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G). & & \end{array}$$

Кроме этого, предполагается, что

$$\begin{array}{ll} K_\xi^i\left(x;\tau_\xi\right)\in L_{p,q}^{x,\tau_\xi}\left(G\times G_\xi\right), & \xi=1,2,3; \\ B_{l,m}\left(x;\tau_l,\tau_m\right)\in L_{p,q,q}^{x,\tau_l,\tau_m}\left(G\times G_l\times G_m\right), & l<m; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K_{0,0,0}^{(\xi)}\left(\tau_\xi\right)\in L_q\left(G_\xi\right),\ \xi=1,2,3; & K_{1,0,0}\left(x_1,\tau_2,\tau_3\right)\in L_{p,q,q}^{x_1,\tau_2,\tau_3}(G); \\ K_{0,1,0}\left(\tau_1,x_2,\tau_3\right)\in L_{q,p,q}^{\tau_1,x_2,\tau_3}(G); & K_{0,0,1}\left(\tau_1,\tau_2,x_3\right)\in L_{q,q,p}^{\tau_1,\tau_2,x_3}(G); \\ K_{1,1,0}\left(x_1,x_2,\tau_3\right)\in L_{p,p,q}^{x_1,x_2,\tau_3}(G); & K_{0,1,1}\left(\tau_1,x_2,x_3\right)\in L_{q,p,p}^{\tau_1,x_2,x_3}(G); \\ K_{1,0,1}\left(x_1,\tau_2,x_3\right)\in L_{p,q,p}^{x_1,\tau_2,x_3}(G); & pq=p+q,\ \tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in G; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma_i\in R;\rho_i^{(j)}(x_1)\in L_\infty(G_1); & \lambda_i^{(j)}(x_2)\in L_\infty(G_2); \\ \mu_i^{(j)}(x_3)\in L_\infty(G_3); & \eta_i^{(j)}(x_1,x_2)\in L_\infty(G_1\times G_2), \\ \nu_i^{(j)}(x_2,x_3)\in L_\infty(G_2\times G_3), & \gamma_i^{(j)}(x_1,x_3)\in L_\infty(G_1\times G_3); \end{array}$$

Z_{i_1,i_2,i_3} — заданные измеримые функции; $x^{(i)}=(x_1^{(i)},x_2^{(i)},x_3^{(i)})$ — фиксированные точки из $\overline{G}$, где $i=1,2,\ldots,n$.

При вышеналоженных условиях решение $u(x)$ задачи (1), (2) естественно искать в пространстве С. Л. Соболева:

$$W_p^{(1,1,1)}(G)\equiv\left\{u(x):D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}u(x)\in L_p(G),\ i_\xi\in\{0,1\};\ \xi=1,2,3\right\},$$

где $1\leqslant p\leqslant\infty$. Норму в пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)}=\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1}\|D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}u(x)\|_{L_p(G)}.$$

Уравнение (1) является трёхмерным уравнением Бианки с интегральным возмущением. Различные аспекты краевых задач для уравнений Бианки исследованы в работах [1–6 и др].

Известно [3, 4, 6], что если $K_\xi^i(x;\tau_\xi) = B_{l,m}(x;\tau_l,\tau_m) \equiv 0$, то функция Римана $v = R(x_1,x_2,x_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ задачи Гурса для уравнения

$$(V_{1,1,1}u)(x) = D_1D_2D_3u(x) + \sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+i_2+i_3<3}}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1} a_{i_1,i_2,i_3}(x)D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}u(x) = 0 \qquad (3)$$

определяется как решение следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} v(x) - \int_{\beta_3}^{x_3} a_{1,1,0}(x_1,x_2,\tau_3)\, v(x_1,x_2,\tau_3)\, d\tau_3 - \\ - \int_{\beta_1}^{x_1} a_{0,1,1}(\tau_1,x_2,x_3)\, v(\tau_1,x_2,x_3)\, d\tau_1 - \\ - \int_{\beta_2}^{x_2} a_{1,0,1}(x_1,\tau_2,x_3)\, v(x_1,\tau_2,x_3)\, d\tau_2 + \\ + \int_{\beta_2}^{x_2}\int_{\beta_3}^{x_3} a_{1,0,0}(x_1,\tau_2,\tau_3)\, v(x_1,\tau_2,\tau_3)\, d\tau_2 d\tau_3 + \\ + \int_{\beta_1}^{x_1}\int_{\beta_3}^{x_3} a_{0,1,0}(\tau_1,x_2,\tau_3)\, v(\tau_1,x_2,\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_3 + \\ + \int_{\beta_1}^{x_1}\int_{\beta_2}^{x_2} a_{0,0,1}(\tau_1,\tau_2,x_3)\, v(\tau_1,\tau_2,x_3)\, d\tau_1 d\tau_2 - \\ - \int_{\beta_1}^{x_1}\int_{\beta_2}^{x_2}\int_{\beta_3}^{x_3} a_{0,0,0}(\tau)\, v(\tau)\, d\tau = 1. \qquad (4) \end{aligned}$$

Из (4), в частности, следует, что если $a_{i_1,i_2,i_3}(x) \equiv 0$, $i_1+i_2+i_3<3$, $i_\xi \in \{0,1\}$, $\xi = 1,2,3$, то функция Римана $R(x_1,x_2,x_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3) \equiv 1$. Нетрудно видеть, что при условиях $a_{i_1,i_2,i_3}(x) \in C^{i_1+i_2+i_3}(\overline{G})$ запись (4) легче всего получить, отправляясь от сопряжённого с (3) уравнения:

$$\begin{aligned} \left(V_{1,1,1}^* v\right)(x) \equiv D_1D_2D_3v(x) + \\ + \sum_{\substack{i_1=0\\ i_1+i_2+i_3<3}}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1} (-1)^{(i_1+i_2+i_3)+1} D_1^{i_1}D_2^{i_2}D_3^{i_3}\left(a_{i_1,i_2,i_3}(x)v(x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в этих работах функция Римана определяется как решение интегрального уравнения (4). Это более естественно, чем классический способ введения функции Римана. Дело в том, что в этом случае для определения функции Римана нет необходимости налагать жёсткие условия гладкости на коэффициенты уравнения (3).

Уравнения со старшей производной $D_1D_2D_3u(x)$ используются при моделировании процессов вибрации [7, с. 63] и играют существенную роль в теориях аппроксимации и отображений [7, с. 109]. В частности, при отсутствии операторов $L_{i_1,i_2,i_3}u$ в краевых условиях (2) эту задачу можно рассматривать как трёхмерную нелокальную задачу с интегральными условиями, и, наоборот, в случае $N_{i_1,i_2,i_3}u \equiv 0$ задача (1), (2) принимает вид трёхмерной нелокальной задачи с многоточечными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского и Самарского—Ионкина. В этом смысле задачу (1), (2) можно рассматривать как трёхмерную комбинированную нелокальную краевую задачу, т. е. трёхмерную интегро-многоточечную краевую задачу. Особо нужно отметить, что разнообразные нелокальные задачи для различных классов дифференциальных уравнений исследованы в работах [8–16 и др.]

Задачу (1), (2) мы будем исследовать методом теории операторных уравнений. Запишем её в операторной форме:

$$Vu = Z, \tag{5}$$

где V — векторный оператор, определяемый следующим образом:

$$V = (V_{1,1,1}, V_{0,0,0}, V_{1,0,0}, V_{0,1,0}, V_{0,0,1}, V_{1,1,0}, V_{0,1,1}, V_{1,0,1}) : W_p^{(1,1,1)}(G) \to E_p^{(1,1,1)},$$

а Z — заданный векторный элемент вида

$$Z = (Z_{1,1,1}, Z_{0,0,0}, Z_{1,0,0}, Z_{0,1,0}, Z_{0,0,1}, Z_{1,1,0}, Z_{0,1,1}, Z_{1,0,1})$$

из пространства $E_p^{(1,1,1)} \equiv L_p(G) \times R \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_3) \times L_p(G_1 \times G_2) \times$ $\times L_p(G_2 \times G_3) \times L_p(G_1 \times G_3)$.

В пространстве $E_p^{(1,1,1)}$ норму будем определять естественным образом:

$$\|Z\|_{E_p^{(1,1,1)}} = \|Z_{1,1,1}\|_{L_p(G)} + \|Z_{0,0,0}\|_R + \|Z_{1,0,0}\|_{L_p(G_1)} + \|Z_{0,1,0}\|_{L_p(G_2)} +$$
$$+ \|Z_{0,0,1}\|_{L_p(G_3)} + \|Z_{1,1,0}\|_{L_p(G_1 \times G_2)} + \|Z_{0,1,1}\|_{L_p(G_2 \times G_3)} + \|Z_{1,0,1}\|_{L_p(G_1 \times G_3)}.$$

Определение. Если задача (1), (2) для любого $Z \in E_p^{(1,1,1)}$ имеет единственное решение $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ такое, что

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)} \leqslant M \|Z\|_{E_p^{(1,1,1)}}$$

то будем говорить, что оператор V задачи (1), (2) (или уравнения (5)) задаёт гомеоморфизм из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $E_p^{(1,1,1)}$ или задача (1), (2) везде корректно разрешима. Здесь M — постоянная величина, не зависящая от Z.

Очевидно, что если оператор V задачи (1), (2) задаёт гомеоморфизм из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $E_p^{(1,1,1)}$, то существует ограниченный обратный оператор

$$V^{-1} : E_p^{(1,1,1)} \to W_p^{(1,1,1)}(G).$$

В современной теории дифференциальных уравнений особое значение имеет вопрос о выявлении классов задач, операторы которых осуществляют гомеоморфизм между определенными парами банаховых пространств. Такие гомеоморфизмы выявлены в работах Ю. М. Березанского и Я. А. Ройтберга [17], Н. В. Житарашу [18], С. С. Ахиева [19], И. Г. Мамедова [20] и др. для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными.

Задача (1), (2), т. е. операторное уравнение (5), исследуется при помощи интегральных представлений специального вида для функций $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$. Для функций $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ можно найти различные интегральные представления. Функцию $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ можно представить, например, в виде

$$u(x) = u(0,0,0) + \int_0^{x_1} D_1 u(\tau_1,0,0)\, d\tau_1 + \int_0^{x_2} D_2 u(0,\tau_2,0)\, d\tau_2 + \\ + \int_0^{x_3} D_3 u(0,0,\tau_3)\, d\tau_3 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} D_1D_2 u(\tau_1,\tau_2,0)\, d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} D_2D_3 u(0,\tau_2,\tau_3)\, d\tau_2 d\tau_3 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_3} D_1D_3 u(\tau_1,0,\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_3 + \\ + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} D_1D_2D_3 u(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (6)$$

посредством следов $u(0,0,0)$, $D_1 u(x_1,0,0)$, $D_2 u(0,x_2,0)$, $D_3 u(0,0,x_3)$, $D_1D_2 u(x_1,x_2,0)$, $D_2D_3 u(0,x_2,x_3)$, $D_1D_3 u(x_1,0,x_3)$ и старшей производной $D_1D_2D_3 u(x_1,x_2,x_3)$. Существуют также представления других видов, позволяющих выразить функцию $u(x)$ посредством некоторых следов и частных производных. Однако мы будем ставить такой вопрос: нельзя ли для функций $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ найти представление, которое позволило бы определить функцию $u(x)$ однозначно по значениям $(P_k u)$ некоторых заданных операторов P_k, $k = 1,2,\ldots,m$, на этой функции $u(x)$? Если, например, функцию $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ можно было бы восстановить однозначно по значениям $V_{i_1,i_2,i_3} u$ операторов V_{i_1,i_2,i_3} на этой функции, то нахождение решения задачи (1), (2) не представляло бы особой трудности. Однако нахождение подобного представления равносильно построению обратного оператора для оператора V этой задачи.

Если же $\overline{V}_{i_1,i_2,i_3} u \equiv 0$, то задача (1), (2) примет вид

$$(V_{1,1,1}u)(x) \equiv D_1D_2D_3 u(x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &V_{0,0,0}u \equiv u(0,0,0);\\ &(V_{1,0,0}u)(x_1) \equiv D_1 u(x_1,0,0);\\ &(V_{0,1,0}u)(x_2) \equiv D_2 u(0,x_2,0);\\ &(V_{0,0,1}u)(x_3) \equiv D_3 u(0,0,x_3);\\ &(V_{1,1,0}u)(x_1,x_2) \equiv D_1D_2 u(x_1,x_2,0);\\ &(V_{0,1,1}u)(x_2,x_3) \equiv D_2D_3 u(0,x_2,x_3);\\ &(V_{1,0,1}u)(x_1,x_3) \equiv D_1D_3 u(x_1,0,x_3) \end{aligned} \quad (8)$$

и её можно рассматривать как задачу Гурса нового типа [21, с. 17]. Такая постановка задачи обладает рядом преимуществ:

– во-первых, в этой постановке не требуется никаких дополнительных условий согласования;
– во-вторых, именно такая постановка порождает гомеоморфизм между двумя банаховыми пространствами $W_p^{(1,1,1)}(G)$ и $E_p^{(1,1,1)}$;
– в третьих, эту задачу можно рассматривать как задачу, сформулированную по следам в пространстве С. Л. Соболева $W_p^{(1,1,1)}(G)$.

Учитывая здесь выражения операторов V_{i_1,i_2,i_3} и используя интегральное представления (6) функций $u(x) \in W_p^{(1,1,1)}(G)$, решение $u(x)$ начально-краевой задачи (7), (8) можно найти посредством операторов V_{i_1,i_2,i_3} в явном виде:

$$u(x) = V_{0,0,0}u + \int_0^{x_1} (V_{1,0,0}u)(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^{x_2} (V_{0,1,0}u)(\tau_2)\,d\tau_2 + \\ + \int_0^{x_3} (V_{0,0,1}u)(\tau_3)\,d\tau_3 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} (V_{1,1,0}u)(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_0^{x_2}\int_0^{x_3} (V_{0,1,1}u)(\tau_2,\tau_3)\,d\tau_2 d\tau_3 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_3} (V_{1,0,1}u)(\tau_1,\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_3 + \\ + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} (V_{1,1,1}u)(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Если же $N_{i_1,i_2,i_3}u = L_{i_1,i_2,i_3}u \equiv 0$, то условия (2) примут локальный вид, который можно рассматривать как условия Гурса нового типа. Но в этом случае задача (1), (2) имеет нелокальный характер, поскольку хорошо известно, что к числу нелокальных задач относятся также задачи, связанные с уравнениями «нелокального характера», например, нагруженными или интегро-дифференциальными уравнениями, если даже краевые условия для них являются локальными [22].

Для простоты изложения задачу (1), (2) мы будем изучать как возмущенную задачу для задачи Гурса (7), (8).

Определим оператор в векторном виде следующим образом:

$$\bar{V} \equiv \left(\bar{V}_{1,1,1}, \bar{V}_{0,0,0}, \bar{V}_{1,0,0}, \bar{V}_{0,1,0}, \bar{V}_{0,0,1}, \bar{V}_{1,1,0}, \bar{V}_{0,1,1}, \bar{V}_{1,0,1}\right) : W_p^{(1,1,1)}(G) \to E_p^{(1,1,1)}.$$

Теорема. *Пусть оператор* $\bar{V} : W_p^{(1,1,1)}(G) \to E_p^{(1,1,1)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *по норме достаточно мал, а в случае* $p = \infty$ *имеет сопряжённый действующий в* $E_1^{(1,1,1)}$. *Тогда задача* (1), (2) *везде корректно разрешима.*

Доказательство. Формула (6) показывает, что каждую функцию $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ можно отождествлять с элементом

$$b = \big(D_1D_2D_3u(x), u(0,0,0), D_1u(x_1,0,0), D_2u(0,x_2,0), D_3u(0,0,x_3), \\ D_1D_2u(x_1,x_2,0), D_2D_3u(0,x_2,x_3), D_1D_3u(x_1,0,x_3)\big) = \\ = \big(b_{1,1,1}(x), b_{0,0,0}, b_{1,0,0}(x_1), b_{0,1,0}(x_2), b_{0,0,1}(x_3), \\ b_{1,1,0}(x_1,x_2), b_{0,1,1}(x_2,x_3), b_{1,0,1}(x_1,x_3)\big)$$

из $E_p^{(1,1,1)}$ т. е.

$$u(x) = (Qb)(x) \equiv b_{0,0,0} + \int_0^{x_1} b_{1,0,0}(\tau_1)d\tau_1 + \int_0^{x_2} b_{0,1,0}(\tau_2)d\tau_2 + \\ + \int_0^{x_3} b_{0,0,1}(\tau_3)d\tau_3 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} b_{1,1,0}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} b_{0,1,1}(\tau_2,\tau_3)d\tau_2 d\tau_3+\int_0^{x_1}\int_0^{x_3} b_{1,0,1}(\tau_1,\tau_3)d\tau_1 d\tau_3+$$
$$+\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} b_{1,1,1}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

При этом существуют положительные постоянные M_1^0 и M_2^0 такие, что

$$M_1^0\|b\|_{E_p^{(1,1,1)}}\leqslant\|(Qb)(x)\|_{W_p^{(1,1,1)}(G)}\leqslant M_2^0\|b\|_{E_p^{(1,1,1)}}\ \forall\, b\in E_p^{(1,1,1)}. \tag{9}$$

Очевидно, что оператор $Q: E_p^{(1,1,1)}\to W_p^{(1,1,1)}$ является линейным ограниченным оператором. Неравенство (9) показывает, что оператор Q имеет также ограниченный обратный оператор, определённый на пространстве $W_p^{(1,1,1)}(G)$. Следовательно, оператор Q задает гомеоморфизм между банаховыми пространствами $E_p^{(1,1,1)}$ и $W_p^{(1,1,1)}(G)$. Поэтому решение уравнения (5) эквивалентно решению уравнения

$$VQb=Z. \tag{10}$$

Уравнение (10) будем называть каноническим видом уравнения (5). Тогда задача (1), (2) эквивалентна каноническому операторному уравнению

$$VQb\equiv b+\overline{V}Qb=Z, \tag{11}$$

где $Z=(Z_{1,1,1},Z_{0,0,0},Z_{1,0,0},Z_{0,1,0},Z_{0,0,1},Z_{1,1,0},Z_{0,1,1},Z_{1,0,1})\in E_p^{(1,1,1)}$, $V==(V_{1,1,1},V_{0,0,0},V_{1,0,0},V_{0,1,0},V_{0,0,1},V_{1,1,0},V_{0,1,1},V_{1,0,1})$.

Далее пусть $f=\big(f_{1,1,1}(x),f_{0,0,0},f_{1,0,0}(x_1),f_{0,1,0}(x_2),f_{0,0,1}(x_3),f_{1,1,0}(x_1,x_2),$ $f_{0,1,1}(x_2,x_3),f_{1,0,1}(x_1,x_3)\big)\in E_q^{(1,1,1)}\equiv L_q(G)\times\mathbb{R}\times L_q(G_1)\times L_q(G_2)\times L_q(G_3)\times$ $\times L_q(G_1\times G_2)\times L_q(G_2\times G_3)\times L_q(G_1\times G_3)$ — линейный ограниченный функционал на $E_p^{(1,1,1)}$, где $1/p+1/q=1$. Так как $\overline{V}$ имеет сопряжённый оператор $\overline{V}^*=(\overline{\omega}_{1,1,1},\overline{\omega}_{0,0,0},\overline{\omega}_{1,0,0},\overline{\omega}_{0,1,0},\overline{\omega}_{0,0,1},\overline{\omega}_{1,1,0},\overline{\omega}_{0,1,1},\overline{\omega}_{1,0,1})$, действующий в $E_q^{(1,1,1)}$, то для всех $u\in W_p^{(1,1,1)}(G)$ справедливо тождество

$$f\left(\overline{V}u\right)\equiv f_{0,0,0}\left(\overline{V}_{0,0,0}u\right)+\int_{G_1} f_{1,0,0}(x_1)\left(\overline{V}_{1,0,0}u\right)(x_1)dx_1+$$
$$+\int_{G_2} f_{0,1,0}(x_2)\left(\overline{V}_{0,1,0}u\right)(x_2)dx_2+\int_{G_3} f_{0,0,1}(x_3)\left(\overline{V}_{0,0,1}u\right)(x_3)dx_3+$$
$$+\iint_{G_1\times G_2} f_{1,1,0}(x_1,x_2)\left(\overline{V}_{1,1,0}u\right)(x_1,x_2)dx_1dx_2+$$
$$+\iint_{G_2\times G_3} f_{0,1,1}(x_2,x_3)\left(\overline{V}_{0,1,1}u\right)(x_2,x_3)\,dx_2dx_3+$$
$$+\iint_{G_1\times G_3} f_{1,0,1}(x_1,x_3)\left(\overline{V}_{1,0,1}u\right)(x_1,x_3)dx_1dx_3+$$
$$+\iiint_G f_{1,1,1}(x)\left(\overline{V}_{1,1,1}u\right)(x)dx=$$

$$= (\overline{\omega}_{0,0,0} f)\, f_{0,0,0} + \int_{G_1} (\overline{\omega}_{1,0,0} f)\ (x_1)\ D_1 u\,(x_1, 0, 0)\, dx_1 +$$

$$+ \int_{G_2} (\overline{\omega}_{0,1,0} f)\ (x_2)\ D_2 u\,(0, x_2, 0)\ dx_2 + \int_{G_3} (\overline{\omega}_{0,0,1} f)\ (x_3) D_3 u\,(0, 0, x_3)\, dx_3 +$$

$$+ \iint_{G_1 \times G_2} (\overline{\omega}_{1,1,0} f)\,(x_1, x_2) D_1 D_2 u\,(x_1, x_2, 0)\ dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint_{G_2 \times G_3} (\overline{\omega}_{0,1,1} f)\,(x_2, x_3) D_2 D_3 u\,(0, x_2, x_3)\ dx_2 dx_3 +$$

$$+ \iint_{G_1 \times G_3} (\overline{\omega}_{1,0,1} f)\,(x_1, x_3) D_1 D_3 u\,(x_1, 0, x_3)\, dx_1 dx_3 +$$

$$+ \iiint_{G} (\overline{\omega}_{1,1,1} f)\,(x) D_1 D_2 D_3 u(x) dx \equiv \left(\overline{V}^* f\right)(u), \quad (12)$$

из которого следует, что для всех $f \in E_q^{(1,1,1)}$ и $u \in W_p^{(1,1,1)}(G)$ имеет место соотношение

$$f\,(Vu) \equiv (f_{0,0,0} + \overline{\omega}_{0,0,0} f)\, u(0,0,0) +$$

$$+ \int_{G_1} (f_{1,0,0}(x_1) + (\overline{\omega}_{1,0,0} f)\ (x_1))\, D_1 u\,(x_1, 0, 0)\, dx_1 +$$

$$+ \int_{G_2} (f_{0,1,0}(x_2) + (\overline{\omega}_{0,1,0} f)\ (x_2))\, D_2 u\,(0, x_2, 0)\ dx_2 +$$

$$+ \int_{G_3} (f_{0,0,1}(x_3) + (\overline{\omega}_{0,0,1} f)\ (x_3))\, D_3 u\,(0, 0, x_3)\, dx_3 +$$

$$+ \iint_{G_1 \times G_2} (f_{1,1,0}\,(x_1, x_2) + (\overline{\omega}_{1,1,0} f)\ (x_1, x_2))\, D_1 D_2 u\,(x_1, x_2, 0)\ dx_1 dx_2 +$$

$$+ \iint_{G_2 \times G_3} (f_{0,1,1}\,(x_2, x_3) + (\overline{\omega}_{0,1,1} f)\ (x_2, x_3))\, D_2 D_3 u\,(0, x_2, x_3)\, dx_2 dx_3 +$$

$$+ \iint_{G_1 \times G_3} (f_{1,0,1}\,(x_1, x_3) + (\overline{\omega}_{1,0,1} f)\ (x_1, x_3))\, D_1 D_3 u\,(x_1, 0, x_3)\ dx_1 dx_3 +$$

$$+ \iiint_{G} (f_{1,1,1}(x) + (\overline{\omega}_{1,1,1} f)\ (x))\, D_1 D_2 D_3 u(x) dx \equiv (V^* f)\,(u). \quad (13)$$

Из (13) следует, что и оператор V имеет сопряжённый V^*, который действует в пространстве $E_q^{(1,1,1)}$. Более того,

$$V^* f = \big(f_{1,1,1}(x) + (\overline{\omega}_{1,1,1} f)(x), f_{0,0,0} + (\overline{\omega}_{0,0,0} f), f_{1,0,0}(x_1) + (\overline{\omega}_{1,0,0} f)(x_1),$$
$$f_{0,1,0}(x_2) + (\overline{\omega}_{0,1,0} f)(x_2), f_{0,0,1}(x_3) + (\overline{\omega}_{0,0,1} f)(x_3), f_{1,1,0}(x_1, x_2) + (\overline{\omega}_{1,1,0} f)(x_1, x_2),$$
$$f_{0,1,1}(x_2, x_3) + (\overline{\omega}_{0,1,1} f)(x_2, x_3), f_{1,0,1}(x_1, x_3) + (\overline{\omega}_{1,0,1} f)(x_1, x_3)\big) = f + \overline{V}^* f.$$

Поэтому сопряжённое уравнение $V^* f = \psi$ можно записать в виде

$$V^* f = f + \overline{V}^* f = \psi, \quad (14)$$

где $\psi = (\psi_{1,1,1}, \psi_{0,0,0}, \psi_{1,0,0}, \psi_{0,1,0}, \psi_{0,0,1}, \psi_{1,1,0}, \psi_{0,1,1}, \psi_{1,0,1})$ — заданный элемент из $E_q^{(1,1,1)}$.

Используя тождество (12), можно показать, что в случае $1 \leqslant p < \infty$ оператор $\overline{V}^*$ является сопряжённым для $\overline{V}Q$, а при $1 < p \leqslant \infty$ оператор $\overline{V}Q$ является сопряжённым для $\overline{V}^*$. Поэтому во всех случаях $\|\overline{V}Q\| = \|\overline{V}^*\|$.

Очевидно, что если $f \in E_q^{(1,1,1)}$ — решение уравнения (14), то

$$\|f\|_{E_q^{(1,1,1)}} \leqslant \|\overline{V}^*\| \cdot \|f\|_{E_q^{(1,1,1)}} + \|\overline{V}^* f\|_{E_q^{(1,1,1)}}. \tag{15}$$

Выбирая $\Delta = \|\overline{V}^*\| < 1$, из (15) получим

$$\|f\|_{E_q^{(1,1,1)}} \leqslant M^* \|\overline{V}^* f\|_{E_q^{(1,1,1)}}, \quad M^* = \mathrm{const}.$$

При этом же условии, используя (11), можно показать, что

$$\|u\|_{W_p^{(1,1,1)}} \leqslant M \|Vu\|_{E_p^{(1,1,1)}}, \quad M = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Из неравенства (16) следует, что оператор V задачи (1), (2) (или уравнения (11)) задаёт гомеоморфизм из $W_p^{(1,1,1)}(G)$ на $E_p^{(1,1,1)}(G)$, т. е. задача (1), (2) везде корректно разрешима. □

В задаче (1), (2) имеется большой произвол в выборе оператора $\bar{V}$. Поэтому задачу (1), (2) можно использовать в качества источника для получения новых классов корректно поставленных нелокальных краевых задач.

Продемонстрированная нелокальная краевая задача (1), (2) как комбинированная задача играет агентную роль между задачами с интегральными и многоточечными краевыми условиями. Хорошо известно, что подобные нелокальные условия возникают, например, при изучении вопросов управления различными агроэкосистемами и моделирования некоторых физических и биологических процессов и явлений [22–27]. С этой точки зрения эта задача представляет не только теоретический, но и большой практический интерес.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bateman H.* Logarithmic Solutions of Bianchi's Equation // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1933. Vol. 19, no. 9. Pp. 852–854.
2. *Фаге М. К.* Задача Коши для уравнения Бианки // *Матем. сб.*, 1958. Т. 45(87), № 3. С. 281–322. [*Fage M. K.* The Cauchy problem for Bianchi's equation // *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958. Vol. 45(87), no. 3. Pp. 281–322].
3. *Жегалов В. И.* Трёхмерный аналог задачи Гурса / В сб.: *Неклассич. уравнения и уравнения смешан. типа*. Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР, 1990. С. 94–98. [*Zhegalov V. I.* A three-dimensional analogue of the Goursat problem / In: *Nonclassical equations and equations of mixed type*. Novosibirsk: Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., 1990. Pp. 94–98].
4. *Жегалов В. И.* О трёхмерной функции Римана // *Сиб. матем. журн.*, 1997. Т. 38, № 5. С. 1074–1079; англ. пер.: *Zhegalov V. I.* On the three-dimensional riemann function // *Siberian Math. J.*, 1997. Vol. 38, no. 5. Pp. 929–934.

5. *Джохадзе О. М.* О трёхмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерры первого рода // *Диффер. уравнения*, 2006. Т. 42, № 3. С. 385–394; англ. пер.: *Dzhokhadze O. M.* On the three-dimensional generalized Goursat problem for a third-order equation, and related general two-dimensional Volterra integral equations of the first kind // *Differ. Equ.*, 2006. Vol. 42, no. 3. Pp. 412–421.

6. *Уткина Е. А.* Задача со смещениями для трёхмерного уравнения Бианки // *Диффер. уравнения*, 2010. Т. 46, № 4. С. 535–539; англ. пер.: *Utkina E. A.* A problem with shifts for the three-dimensional Bianchi equation // *Differ. Equ.*, 2010. Vol. 46, no. 4. Pp. 538–542.

7. *Бондаренко Б. А.* Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. Ташкент: Фан, 1987. 147 с. [*Bondarenko B. A.* Basis systems of polynomial and quasipolynomial solutions of partial differential equations. Tashkent: Fan, 1987. 147 pp.]

8. *Солдатов А. П., Шхануков М. Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *ДАН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552; англ. пер.: *Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh.* Boundary value problems with A. A. Samarskiĭ's general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations // *Soviet Math. Dokl.*, 1988. Vol. 36, no. 3. Pp. 507–511.

9. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. [*Nakhushev A. M.* Problems with shifts for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006. 287 pp.]

10. *Репин О. А.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. № 34. С. 5–9. [*Repin O. A.* A nonlocal problem for a mixed-type equation with a singular coefficient // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2005. no. 34. Pp. 5–9].

11. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 25–36. [*Repin O. A., Kumykova S. K.* Nonlocal problem for a equation of mixed type of third order with generalized operators of fractional integro-differentiation of arbitrary order // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 4(25). Pp. 25–36].

12. *Пулькина Л. С.* О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Дифференциальные уравнения*, 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280; англ. пер.: *Pul'kina L. S.* On the solvability in L_2 of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // *Differ. Equ.*, 2000. Vol. 36, no. 2. Pp. 316–318.

13. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана-Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 24–36. [*Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S.* Setting and Solving of the Cauchy type problems for the Second Order Differential Equations with Riemann–Liouville Fractional Derivatives // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 24–36].

14. *Арланова Е. Ю.* О задаче для уравнения смешанного типа с операторами М. Сайго // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 157–161. [*Arlanova E. Y.* On the problem for mixed type equation with M. Saigo operators // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011. no. 3(24). Pp. 157–161].

15. *Данилкина О. Ю.* Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. Т. 1(14). С. 5–9. [*Danilkina O. Yu.* On one nonlocal problem for the heat equation with an integral condition // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007. no. 1(14). Pp. 5–9].

16. *Тарасенко А. В.* Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. Т. 5(21). С. 263–267. [*Tarasenko A. V.* The Boundary Value Problem for the Loaded Equation of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type in Rectangular Area // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 5(21). Pp. 263–267].

17. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // *Укр. мат. ж.*, 1967. Т. 19, № 5. С. 3–32. [*Berezanskiy Yu. M., Roytberg Ya. A.* A theorem on homeomorphisms and Green's function for general elliptic boundary problems // *Ukrain. Mat. Z.*, 1967. Vol. 19, no. 5. Pp. 3–32].

18. *Житарашу Н. В.* Теорема о полном наборе изоморфизмов в L_2-теории модельных начальных параболических краевых задач / В сб.: *Мат. исслед. Вып. 88.* Кишинёв, 1986. С. 40–59. [*Zhitarashu N. V.* A theorem on the complete set of isomorphisms in the L_2-theory of model initial parabolic boundary value problems / In: *Mat. Issled. No. 88.* Kishinyov, 1986. Pp. 40–59].

19. *Ахиев С. С.* Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления // *ДАН СССР*, 1983. Т. 271, № 2. С. 265–269. [*Akhiev S. S.* Fundamental solutions of some local and nonlocal boundary value problems and their representations // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983. Vol. 271, no. 2. Pp. 265–269].

20. *Мамедов И. Г.* Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 2. С. 54–64; англ. пер.: *Mamedov I. G.* One Goursat problem in a Sobolev space // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011. Vol. 55, no. 2. Pp. 46–55.

21. *Мамедов И. Г.* Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений с чисто смешанными производными третьего порядка с негладкими коэффициентами, 2000. 65 с. (Деп. в АзНИИНТИ, № 2669-Аз) [*Mamedov I. G.* Local and nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations with purely mixed derivatives of third-order with non-smooth coefficients, 2000. 65 pp. (Deposited at AzNIINTI, № 2669-Az)]

22. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. [*Nakhushev A. M.* Equations of Mathematical Biology: Vyssh. Shk., 1995. 301 pp.]

23. *Мамедов И. Г.* Задача оптимального управления в процессах, описываемых нелокальной задачей с нагружениями для гиперболического интегро-дифференциального уравнения // *Изв. НАН Азерб. (сер. физ.-техн. и матем. наук)*, 2004. Т. 24, № 2. С. 74–79. [*Mamedov I. G.* The optimal control problem in the processes described by the non-local problem with loadings for hyperbolic integro-differential equation // *Izv. NAN Azerb. (Ser. Fiz.-Tekhn. Matem. Nauk)*, 2004. Vol. 24, no. 2. Pp. 74–79].

24. *Mamedov I. G.* Generalization of multipoint boundary-value problems of Bitsadze–Samarski and Samarski–Ionkin type for fourth order loaded hyperbolic integro-differential equations and their operator generalization // *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2005. Vol. 23. Pp. 77–84.

25. *Mamedov I. G.* Three-dimensional nonlocal boundary-value problem with integral conditions for loaded Volterra-hyperbolic integro-differential equations // *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2006. Vol. 24. Pp. 153–162.

26. *Мамедов И. Г.* Смешанная задача с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского и Самарского–Ионкина, возникающая при моделировании фильтрации жидкости в трещиноватых средах // *Изв. НАН Азерб. (сер. физ.-техн. и матем. наук)*, 2006. Т. XXVI, № 3. С. 32–37. [*Mamedov I. G.* A mixed problem with nonlocal boundary conditions of Bitsadze–Samarskiy and Samarskiy–Ionkin types that arises in modeling the filtration of a fluid in fractured media // *Izv. NAN Azerb. (Ser. Fiz.-Tekhn. Matem. Nauk)*, 2006. Vol. 26, no. 3. Pp. 32–37].

27. *Мамедов И. Г.* Исследование задачи с интегро-многоточечными краевыми условиями для обобщенного уравнения влагопереноса // *Изв. НАН Азерб. (сер. физ.-техн. и матем. наук)*, 2007. Т. 27, № 2–3. С. 121–126. [*Mamedov I. G.* The study of the problem with integro-multipoint boundary conditions for the generalized equation of moisture transfer // *Izv. NAN Azerb. (Ser. Fiz.-Tekhn. Matem. Nauk)*, 2007. Vol. 27, no. 2–3. Pp. 121–126].

Поступила в редакцию 05/VI/2011;
в окончательном варианте — 27/II/2012.

MSC: 35L35; 35S15, 35L25, 47G30

THREE-DIMENSIONAL INTEGRO-MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED VOLTERRA-HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF BIANCHI TYPE

I. G. Mamedov

A. I. Huseynov Institute of Cybernetics of NAS of Azerbaijan,
9, B. Vakhabzade str., Baku, AZ1141, Azerbaijan.

E-mail:: `ilgar-mammadov@rambler.ru`

In this paper the combined three-dimensional non-local boundary value problem with integro-multipoint conditions for loaded volterra-hyperbolic integro-differential equation of Bianchi type is explored. The matter of principle is the fact, that the considered equation has discontinuous coefficients which satisfy only some conditions of P-integrability type and boundedness, i.e. the considered hyperbolic differential operator has no traditional conjugate operator. In particular, for example, Riemann function under Goursat conditions for such equation cannot be constructed by classical method of characteristics.

Key words: *three-dimensional non-local boundary problem, loaded integro-differential equations, hyperbolic equation, equations with discontinuous coefficients.*

Original article submitted 05/VI/2011;
revision submitted 27/II/2012.

Ilgar G. Mamedov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Leading Research Scientist.