Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Е. А. Козлова

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: leni2006@mail.ru

Рассматривается задача граничного управления для телеграфного уравнения. Изучен случай малого времени управления, когда области, в которых решение полностью определено начальными и финальными данными, имеют общую часть. Установлено, что задача управления может быть решена только при выполнении определённых соотношений между начальными и финальными условиями. Указанные соотношения приведены для двух промежутков изменения времени управления. В областях, на которые исходную область делят характеристики уравнения, с помощью метода Римана построены решения двух задач Коши. На основе найденных данных решены две задачи Гурса. Управляющие функции на правом и левом концах отрезка найдены с помощью подстановки в полученные выражения соответствующих значений пространственной координаты.

Ключевые слова: *телеграфное уравнение, граничное управление, метод Римана.*

Пусть в области $Q = [0, l] \times [0, T]$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет телеграфному уравнению

$$u_{tt} - u_{xx} + c^2 u = 0, \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

и финальным условиям

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,T) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Построить функции

$$\mu(t) = u(0,t), \quad \nu(t) = u(l,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

которые являются граничными управлениями. Данная задача была исследована В. А. Ильиным и Е. А. Моисеевым [1,2] для $0 \leqslant x \leqslant 2l$ и $T = 2l$ в классе обобщённых

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

решений. Если время управления мало ($T < l$), то для того, чтобы управление было возможным, должны выполняться некоторые условия. Рассмотрим этот случай подробнее.

Пусть $\varphi_i(x) \in C^2[0,l]$, $\psi_i(x) \in C^1[0,l]$, $i = 0,1$; $\mu(t)$, $\nu(t) \in C[0,T]$. Характеристики уравнения (1) — прямые $x+t = C_1$ и $x-t = C_2$. В области, ограниченной прямой $t = 0$ и характеристиками $x - t = 0$ и $x + t = l$ (Δ_1), функцию $u(x,t)$ определяют начальные условия (2):

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} {}_0F_1\Big(1; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-t^2\big)\Big)\psi_0(z)dz - \\ - \frac{c^2t}{4}\int_{x-t}^{x+t} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-t^2\big)\Big)\varphi_0(z)dz, \quad (4)$$

а в области, ограниченной прямой $t = T$ и характеристиками $x-t = l-T$ и $x+t = T$ (Δ_3), — финальные условия (3):

$$u(x,t) = \frac{\varphi_1(x-t+T)+\varphi_1(x+t-T)}{2} - \\ - \frac{1}{2}\int_{x+t-T}^{x-t+T} {}_0F_1\Big(1; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-(T-t)^2\big)\Big)\psi_1(z)dz - \\ - \frac{c^2(T-t)}{4}\int_{x+t-T}^{x-t+T} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-(T-t)^2\big)\Big)\varphi_1(z)dz. \quad (5)$$

Приведённые решения получены методом Римана [3], ${}_0F_1(\alpha;\sigma)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [4]. Учитывая, что при $T < l$ пересечение $\Delta_1 \bigcap \Delta_3$ не пусто, значения $u(x,t)$, определённые формулами (4) и (5), в этой области должны совпадать. Отсюда находим условия, при которых управление возможно для $0 < T < l/2$:

$$\varphi_0(T) + \varphi_0(2x-T) + \int_{2x-T}^{T} {}_0F_1\Big(1; \frac{c^2}{4}(2x-T-z)(T-z)\Big)\psi_0(z)dz - \\ - \frac{c^2(T-x)}{2}\int_{2x-T}^{T} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}(2x-T-z)(T-z)\Big)\varphi_0(z)dz = \\ = \varphi_1(2x) + \varphi_1(0) - \int_0^{2x} {}_0F_1\Big(1; \frac{c^2}{4}(z-2x)z\Big)\psi_1(z)dz - \\ - \frac{c^2x}{2}\int_0^{2x} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}(z-2x)z\Big)\varphi_1(z)dz \quad (6)$$

при $T/2 \leqslant x \leqslant T$,

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi_1(x+T)+\varphi_1(x-T)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x-T}^{x+T} {}_0F_1\Big(1; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-T^2\big)\Big)\psi_1(z)dz - \\ - \frac{c^2T}{4}\int_{x-T}^{x+T} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-T^2\big)\Big)\varphi_1(z)dz,$$

$$\psi_0(x) = \frac{{\varphi_1}'(x-T)-{\varphi_1}'(x+T)}{2} + \frac{c^2T}{4}\int_{x-T}^{x+T} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-T^2\big)\Big)\varphi_1(z)dz +$$

$$+\frac{c^2T}{4}(\varphi_1(x+T)+\varphi_1(x-T))-\frac{c^4T^2}{16}\int_{x-T}^{x+T}{}_0F_1\Big(3;\frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-T^2\big)\Big)\varphi_1(z)dz+$$
$$+\frac{\psi_1(x+T)+\psi_1(x-T)}{2}-\frac{c^2T}{4}\int_{x-T}^{x+T}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}\big((x-z)^2-T^2\big)\Big)\psi_1(z)dz$$

при $T \leqslant x \leqslant l-T$ и

$$\varphi_0(2x+T-l)+\varphi_0(l-T)+\int_{l-T}^{2x+T-l}{}_0F_1\Big(1;\frac{c^2}{4}(l-T-z)(2x+T-l-z)\Big)\psi_0(z)dz-$$
$$-\frac{c^2(x+T-l)}{2}\int_{l-T}^{2x+T-l}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}(l-T-z)(2x+T-l-z)\Big)\varphi_0(z)dz=$$
$$=\varphi_1(l)+\varphi_1(2x-l)-\int_{2x-l}^{l}{}_0F_1\Big(1;\frac{c^2}{4}(2x-l-z)(l-z)\Big)\psi_1(z)dz-$$
$$-\frac{c^2(l-x)}{2}\int_{2x-l}^{l}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}(2x-l-z)(l-z)\Big)\varphi_1(z)dz \quad (7)$$

при $l-T \leqslant x \leqslant l-T/2$.

Для $l/2 \leqslant T \leqslant l$ должно выполняться условие (6) при $T/2 \leqslant x \leqslant l/2$ и условие (7) при $l/2 \leqslant x \leqslant l-T/2$.

Решая две задачи с данными на характеристиках $x+t=T$, $x-t=0$ и $x+t=l$, $x-t=l-T$ и подставляя в полученные выражения $x=0$ и $x=l$ соответственно, получаем искомые функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$. Пусть

$$a_{00}=l-T,\quad a_{10}=0,\quad a_{01}=T,\quad a_{11}=l,\quad b(t)={}_0F_1\Big(1;\frac{c^2}{4}(T-t)(l-T+t)\Big),$$

$$r_{ij}(x)=\frac{\varphi_i(2x-a_{ij})+\varphi_i(a_{ij})}{2}+$$
$$+\frac{(-1)^{i+j}}{2}\int_{a_{ij}}^{2x-a_{ij}}{}_0F_1\Big(1;\frac{c^2}{4}(z-a_{ij})(z-2x+a_{ij})\Big)\psi_i(z)dz-$$
$$-\frac{c^2(x-a_{ij})}{4}\int_{a_{ij}}^{2x-a_{ij}}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}(z-a_{ij})(z-2x+a_{ij})\Big)\varphi_i(z)dz,$$

где индексы i, j принимают значения 0, 1. Тогда

$$\mu(t)=r_{00}\Big(\frac{t-T+l}{2}\Big)+r_{10}\Big(\frac{T-t}{2}\Big)-b(t)r_{00}\Big(\frac{l}{2}\Big)+$$
$$+\frac{c^2(T-t-l)}{4}\int_0^{t-T}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}(z-t+T)(t-T+l)\Big)r_{00}\Big(\frac{z+l}{2}\Big)dz-$$
$$-\frac{c^2(T-t)}{4}\int_0^{T-t-l}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}(z+t+l-T)(T-t)\Big)r_{10}\Big(\frac{z+l}{2}\Big)dz,$$

$$\nu(t)=r_{01}\Big(\frac{l+T-t}{2}\Big)+r_{11}\Big(\frac{t-T+2l}{2}\Big)-b(t)r_{11}\Big(\frac{l}{2}\Big)-$$
$$-\frac{c^2(T-t-l)}{4}\int_0^{T-t}{}_0F_1\Big(2;\frac{c^2}{4}(z+t-T)(T-t-l)\Big)r_{01}\Big(\frac{z+l}{2}\Big)dz+$$

$$+ \frac{c^2(T-t)}{4} \int_0^{t-T+l} {}_0F_1\Big(2; \frac{c^2}{4}(z-t-l+T)(t-T)\Big) r_{11}\Big(\frac{z+l}{2}\Big) dz.$$

Полученные функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ есть управления на левом и правом концах отрезка $[0, l]$, построенные для объекта, поведение которого определено уравнением (6) и начальными и финальными данными (2), (3), в случае $T < l$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // *Докл. РАН*, 2002. Т. 387, № 5. С. 600–603. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Boundary control at one endpoint of a process described by a telegraph equation // *Dokl. Akad. Nauk*, 2002. Vol. 387, no. 5. Pp. 600–603].
2. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // *Докл. РАН*, 2004. Т. 394, № 2. С. 154–158. [*Il'in V. A., Moiseev E. I.* Boundary control at two endpoints of a process described by the telegraph equation // *Dokl. Akad. Nauk*, 2004. Vol. 394, no. 2. Pp. 154–158].
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с. [*Bitsadze A. V.* Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981. 448 pp.]
4. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

Поступила в редакцию 28/III/2012;
в окончательном варианте — 28/V/2012.

MSC: 35L51

BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: leni2006@mail.ru

In the paper we consider the boundary control problem for the telegraph equation. We study the case of the short period of control, when the initial and final data determine the solution in two regions, having the common part. It means, the control problem has the solution only for the special way related initial and final conditions. We give these relations for two intervals of control time changing and construct solutions for two Cauchy problems in the regions bounded by the characteristics of the equation. This construction allows to find data on characteristics and to solve two Goursat problems. Finally, the substitution of necessary values of spatial coordinate in the obtained expressions gives the required boundary control functions.

Key words: *telegraph equation, boundary control, Riemann method.*

Original article submitted 28/III/2012;
revision submitted 28/V/2012.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.