Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1 (26). С. 150–156

УДК 539.376

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ЯДРОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. В. Горбунов

Самарский государственный технический университет,
443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: 0gorbunov0@gmail.com

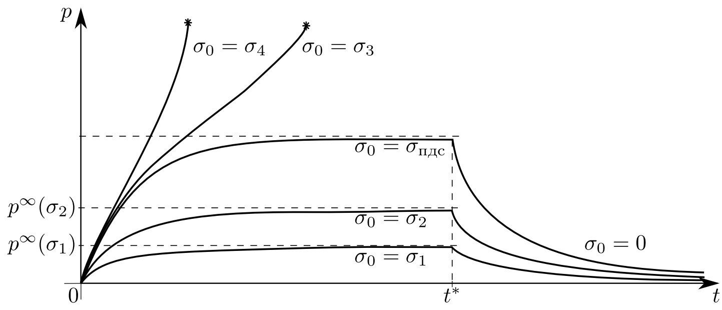
Предложен вариант математической модели одноосного деформирования вязкоупругого материала с ядром ползучести экспоненциального вида. Исследована устойчивость решений модели по Ляпунову при постоянных напряжениях. Установлена область устойчивости решений системы дифференциальных уравнений математической модели, соответствующая асимптотически ограниченной ползучести материала. Область неустойчивости решений соответствует появлению третьей стадии ползучести. Установлена связь между устойчивостью решений по Ляпунову и устойчивостью вычислительного алгоритма при численном решении системы уравнений. В качестве иллюстрации приведено исследование модельной задачи.

Ключевые слова: *вязкоупругий материал, устойчивость решений по Ляпунову, ядро ползучести экспоненциального вида, область устойчивости решений, третья стадия ползучести, устойчивость вычислительного алгоритма.*

1. Проблема построения моделей неупругого реологического деформирования имеет давние корни [1–11] и в настоящее время далека от завершения. Разработанные модели ориентированы в основном на конструкционные материалы. Однако имеется класс вязкоупругих материалов (биоматериалы, полимеры, органопластики), деформирование которых в рамки имеющихся моделей не укладывается. Так, для указанных материалов существует напряжение $\sigma = \sigma_{\text{пдс}}$, называемое пределом длительного сопротивления, такое, что если $\sigma < \sigma_{\text{пдс}}$, то деформация ползучести $p = p(t)$ при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$ является асимптотически ограниченной, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = p^{\infty}(\sigma_0)$, где $p^{\infty}(\sigma_0)$ — предельное значение деформации ползучести, причём разрушения образца не происходит, а при полной разгрузке образца при $t = t^*$ ($\sigma_0 = 0$, $t > t^*$) вязкоупругая деформация полностью обратима. Если же $\sigma > \sigma_{\text{пдс}}$, то вязкоупругая деформация является неограниченной, появляется третья стадия ползучести, и процесс деформирования заканчивается разрушением образца. Схематически реологическое деформирование одноосных образцов показано на рисунке. Цель настоящей работы — разработка модели реологического деформирования этого класса материалов, при этом основной задачей является установление связи разупрочнения материала с процессом неустойчивого поведения решения предложенной ниже системы дифференциальных уравнений.

2. Для описания асимптотически ограниченной ползучести вязкоупругих материалов можно использовать экспоненциальные ядра ползучести [3, 12]. Поэтому в настоящей работе рассматривается частный случай теории пол-

Сергей Владимирович Горбунов, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.



Схематические кривые ползучести при постоянных напряжениях:
$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_{\text{пдс}} < \sigma_3 < \sigma_4$

зучести [3, 12] применительно к исследуемому классу вязкоупругих материалов, но при этом вводятся дополнительные кинетические уравнения, описывающие процесс накопления повреждённости. Предлагаемый вариант модели имеет следующий вид:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t), \tag{1}$$

$$\dot{p}_1(t) = \lambda_1 \left(a_1 \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^m - p_1(t) \right), \tag{2}$$

$$\dot{p}_2(t) = \lambda_2 \left(a_2 \left(\frac{\sigma}{\sigma^*} \right)^m - p_2(t) \right), \tag{3}$$

$$\sigma = \sigma_0(1+\omega), \tag{4}$$

$$\dot{\omega} = \alpha\sigma\dot{p}, \tag{5}$$

с начальными условиями $p(0) = 0$, $\omega(0) = 0$. В системе (1)–(5) $p(t)$ — деформация ползучести; $p_1(t)$, $p_2(t)$ — составляющие деформации ползучести; σ_0 — номинальное напряжение; σ — истинное напряжение; ω — параметр повреждённости; λ_1, λ_2, a_1, a_2, m, α, σ^* — константы модели.

Если повреждённость незначительна и величиной ω можно пренебречь ($\omega \approx 0$), то $\sigma \cong \sigma_0$ и решение (1)–(5) при $\sigma_0 = \text{const}$ задаётся функцией

$$p(t) = \sum_{k=1}^{2} a_k \left(1 - e^{-\lambda_k t}\right) \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^*}\right)^m, \tag{6}$$

т. е. имеем асимптотически ограниченную (при $t \to \infty$) ползучесть с двумя экспоненциальными слагаемыми. Покажем, что при существенных значениях параметра повреждённости ω система (1)–(5) описывает третью стадию ползучести, которая связана с неустойчивостью решения данной системы при $\sigma_0 = \text{const}$.

Найдём первый интеграл системы, разрешив совместно (4) и (5):

$$\frac{d\omega}{1+\omega} = \alpha\sigma_0 dp; \quad \ln(1+\omega) = \alpha\sigma_0 p + \ln C.$$

Используя начальные условия $p(0) = 0$, $\omega(0) = 0$, находим $C = 1$. Таким образом, после элементарных преобразований первый интеграл системы принимает вид

$$1+\omega=e^{\alpha\sigma_0 p}. \tag{7}$$

Запишем уравнения (2), (3) с учётом (7):

$$\dot p_k(t)=\lambda_k\left(a_k\Big(\frac{\sigma_0}{\sigma^*}\Big)^m e^{\alpha\sigma_0 pm}-p_k(t)\right),\quad k=1,\,2. \tag{8}$$

Введём следующие обозначения:

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma^*}\right)^m=b,\quad \alpha\sigma_0 m=\eta. \tag{9}$$

С учётом (9) уравнения (8) принимают вид:

$$\dot p_k(t)=\lambda_k\big(a_k b e^{\eta p}-p_k(t)\big),\quad k=1,\,2. \tag{10}$$

Таким образом, задача свелась к исследованию на устойчивость системы (10) с учётом (1) при различных постоянных значениях напряжения σ_0. Для этой цели применим метод Ляпунова исследования устойчивости по первому приближению. Введём возмущённые переменные

$$y_k=p_k-p_k^0,\quad k=1,\,2, \tag{11}$$

где p_0^k — установившиеся движения. Согласно (1), $p^0=p_1^0+p_2^0$ — также установившееся движение. Найдём его из системы (10), положив возмущения равными нулю ($y_1=0$, $y_2=0$):

$$p_1^0=a_1be^{\eta p^0},\quad p_2^0=a_2be^{\eta p^0}, \tag{12}$$

отсюда

$$p^0=(a_1+a_2)\,be^{\eta p^0}. \tag{13}$$

Уравнение (13) относительно p^0 при заданном значении σ_0 можно разрешить численными методами.

Составим систему уравнений возмущённого движения, учитывая, что согласно (11), $\dot p_k=\dot y_k$:

$$\begin{cases}\dot y_1=\lambda_1a_1be^{\eta(p^0+y_1+y_2)}-\lambda_1\left(p_1^0+y_1\right),\\ \dot y_2=\lambda_2a_2be^{\eta(p^0+y_1+y_2)}-\lambda_2\left(p_2^0+y_2\right).\end{cases} \tag{14}$$

Разложим экспоненту в правых частях уравнений системы (14) как функцию двух переменных y_1 и y_2 в ряд Тейлора в окрестности точки (0; 0):

$$\begin{cases}\dot y_1=\lambda_1a_1be^{\eta p^0}+\lambda_1a_1b\eta e^{\eta p^0}\left(y_1+y_2\right)-\lambda_1p_1^0-\lambda_1y_1+o\left(y_1+y_2\right),\\ \dot y_2=\lambda_2a_2be^{\eta p^0}+\lambda_2a_2b\eta e^{\eta p^0}\left(y_1+y_2\right)-\lambda_2p_2^0-\lambda_2y_2+o\left(y_1+y_2\right).\end{cases} \tag{15}$$

Исключим из уравнений (15) слагаемые более высокого порядка малости, чем (y_1+y_2), тем самым получим систему уравнений первого приближения. С учётом равенства (12) окончательно получим

$$\begin{cases}\dot y_1=\lambda_1\left(\eta p_1^0-1\right)y_1+\lambda_1\eta p_1^0y_2,\\ \dot y_2=\lambda_2\eta p_2^0y_1+\lambda_2\left(\eta p_2^0-1\right)y_2.\end{cases} \tag{16}$$

Исследуем на устойчивость положение равновесия $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ системы уравнений первого приближения (16). Представим систему уравнений в матричном виде:

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

где $y = [y_1 \quad y_2]^\top$ и

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1\left(\eta p_1^0 - 1\right) & \lambda_1 \eta p_1^0 \\ \lambda_2 \eta p_2^0 & \lambda_2\left(\eta p_2^0 - 1\right) \end{bmatrix}.$$

Найдём корни характеристического уравнения $\det(A - rE) = 0$, где E — единичная матрица:

$$r^2 + r\left(\lambda_1\left(1 - \eta p_1^0\right) + \lambda_2\left(1 - \eta p_2^0\right)\right) + \lambda_1\lambda_2\left(1 - \eta\left(p_1^0 + p_2^0\right)\right) = 0.$$

В данном случае воспользуемся необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости положения равновесия — условием Стодолы, которое здесь принимает вид

$$\begin{cases} \lambda_1\left(1 - \eta p_1^0\right) + \lambda_2\left(1 - \eta p_2^0\right) > 0, \\ \lambda_1\lambda_2\left(1 - \eta\left(p_1^0 + p_2^0\right)\right) > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Таким образом, при выполнении условия (17), отвечающего заданному значению σ_0, положение равновесия (13) системы (1)–(5) будет асимптотически устойчивым.

Конкретизируем условие (17) для рассматриваемого частного случая, в котором (из физических предпосылок)

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ p_1^0 > 0,\ p_2^0 > 0. \tag{18}$$

Согласно (18) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, и второе условие в (17) упрощается:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \eta\left(\lambda_1 p_1^0 + \lambda_2 p_2^0\right) > 0, \\ \eta < \dfrac{1}{p_1^0 + p_2^0}, \end{cases}$$

отсюда

$$\begin{cases} \eta < \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 p_1^0 + \lambda_2 p_2^0}, \\ \eta < \dfrac{1}{p^0}. \end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим подробнее первое неравенство в (19), преобразовав знаменатель с учётом (12):

$$\eta < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\left(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\right) b e^{\eta p^0}}. \tag{20}$$

Записывая (13) в виде $be^{\eta p^0} = p^0/(a_1 + a_2)$ и подставляя это выражение в (20), получим

$$\eta < \frac{1}{p^0}\left(1 + \frac{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}\right). \tag{21}$$

Из условий (18) следует, что

$$\frac{\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1}{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2} > 0,$$

поэтому правая часть неравенства (21) будет больше правой части второго неравенства (19). Значит, с учётом обозначения (9), окончательно получаем условие асимптотической устойчивости в виде

$$\sigma_0 p^0 < \frac{1}{\alpha m}, \tag{22}$$

где p^0 находится из (13).

3. В качестве модельного примера использовался материал со следующими характеристиками: $a_1 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$; $a_2 = 0{,}47 \cdot 10^{-3}$; $\lambda_1 = 0{,}015$; $\lambda_2 = 0{,}056$; $m = 0{,}51$; $\alpha = 0{,}22$; $\sigma^* = 150$ МПа. В результате применения критерия (22) получено значение $\sigma_{\text{пдс}} = 587$ МПа, которое отделяет область устойчивого деформирования (асимптотически ограниченная ползучесть при $\sigma_0 = \mathrm{const}$) для $\sigma_0 \leqslant \sigma_{\text{пдс}}$ от области неустойчивого деформирования (появление третьей стадии ползучести) для $\sigma_0 > \sigma_{\text{пдс}}$.

Следует отметить, что систему (1)–(5) можно разрешить численно, например методом Эйлера («шагами» по времени). Установлено, что значение $\sigma = \sigma_{\text{пдс}}$ является граничным значением для номинального напряжения σ_0, при котором численный метод либо сходится ($\sigma_0 \leqslant \sigma_{\text{пдс}}$, асимптотически ограниченная ползучесть), либо расходится ($\sigma_0 > \sigma_{\text{пдс}}$, неограниченная ускоренная ползучесть), при этом получено, что значение $\sigma_{\text{пдс}}$, расчитанное на основе численного решения задачи (1)–(5) методом Эйлера, практически совпадает со значением $\sigma_{\text{пдс}}$ по критерию (22).

Таким образом, установлена прямая связь между устойчивостью решений системы (1)–(5) и устойчивостью численных методов решения этой системы, а появление стадии ускоренной ползучести связано с нарушением условий устойчивого деформирования (22) и потерей устойчивости (расходимостью) численного алгоритма. Аналогичные результаты для пластически разупрочняющихся материалов получены В. В. Стружановым [10,11,13]. В заключение следует отметить, что никаких принципиальных трудностей с исследованием системы уравнений типа (1)–(5), но с бóльшим количеством экспоненциальных слагаемых в (6) и, соответственно, с бóльшим количеством слагаемых деформации $p_i(t)$ в (1)–(5), не возникает.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с. [*Rabotnov Yu. N.* Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 1966. 752 pp.]
2. *Радченко В. П., Павлова Г. А., Горбунов С. В.* Устойчивость по Ляпунову решений эндохронной теории пластичности без поверхности текучести в условиях плоского напряженного состояния // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. №2(17). С. 143–151. [*Radchenko V. P., Pavlova G. A., Gorbunov S. V.* Stability by Lyapunov of solutions in endochronic plasticity theory without fluidity surface in flat tension conditions // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2008. no. 2(17). Pp. 143–151].

3. *Радченко В. П., Еремин Ю. А.* Реологическое деформирование материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. [*Radchenko V. P., Eremin Yu. A.* Rheological Deformation and Failure of Materials and Structural Elements. Moscow: Mashinostroenie-1, 2004. 264 pp.]
4. *Ибрагимов В. А., Клюшников В. Д.* Некоторые задачи для сред с падающей диаграммой // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1971. №4. С. 116–121. [*Ibragimov V. A., Klyushnikov V. D.* Some problems for media with an incident diagram // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1971. no. 4. Pp. 116–121].
5. *Кадашевич Ю. И.* Теория пластичности и ползучести, учитывающая микроразрушения // *Докл. АН СССР*, 1982. Т. 266, №6. С. 1341–1344. [*Kadashevich Yu. I.* The theory of plasticity and creep taking into account the microfracture // *Dokl. AN SSSR*, 1982. Vol. 266, no. 6. Pp. 1341–1344].
6. *Лебедев А. А., Чаусов Н. Г.* Феноменологические основы оценки трещиностойкости материалов по параметрам спадающих участков диаграммы деформаций // *Пробл. прочности*, 1983. №2. С. 6–10; англ. пер.: *Lebedev A. A., Chausov N. G.* Phenomenological fundamentals of the evaluation of crack resistance of materials on the basis of parameters of falling portions of strain diagrams // *Strength of Materials.* Vol. 15, no. 2. Pp. 155–160.
7. *Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И.* Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с. [*Novozhilov V. V., Kadashevich Yu. I.* Microstresses in Structural Materials. Leningrad: Mashinostroenie, 1990. 223 pp.]
8. *Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.* Эндохронная теория неупругости для разупрочняющихся материалов с учётом больших деформаций / В сб.: *Современные проблемы ресурса материалов и конструкций.* М.: МАМИ, 2009. С. 158–165. [*Kadashevich Yu. I., Pomytkin S. P.* Endochronic theory of inelasticity for softening materials with regard to large deformations / In: *Modern problems of resource materials and structures.* Moscow: MAMI, 2009. Pp. 158–165].
9. *Стружанов В. В.* Свойства разупрочняющихся материалов и определяющие соотношения при одноосном напряженном состоянии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. №2(15). С. 69–78. [*Struzhanov V. V.* The properties of softening materials and constitutive relations under uniaxial stress state // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2007. no. 2(15). Pp. 69–78].
10. *Стружанов В. В., Миронов В. И.* Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 191 с. [*Struzhanov V. V., Mironov V. I.* Deformational Softening of Material in Structural Elements. Ekaterinburg: UrO RAN, 1995. 191 pp.]
11. *Стружанов В. В., Бахарева Е. А.* Итерационные процедуры расчёта параметров равновесия и устойчивость процесса чистого изгиба балок из пластических и хрупких разупрочняющихся материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. №1(20). С. 84–95. [*Struzhanov V. V., Bakhareva E. A.* Iterative procedures of equilibrium parameters estimation and process stability of pure bending of beams from soft and brittle weakening materials // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010. no. 1(20). Pp. 84–95].
12. *Самарин Ю. П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Куйбышевский госуниверситет, 1979. 84 с. [*Samarin Yu. P.* Equation of State for Materials with Complex Rheological Properties. Kuibyshev: Kuibyshev State Univ., 1979. 84 pp.]
13. *Жижерин С. В., Стружанов В. В., Миронов В. И.* Итерационные методы расчёта напряжений при чистом изгибе балки из повреждаемого материала // *Вычисл. технол.*, 2001. Т. 6, №5. С. 24–33. [*Zgizherin S. V., Struzhanov V. V., Mironov V. I.* Iterative computational methods of calculating stresses for a pure bending of a beam of a damageable material // *Vychisl. Tekhnol.*, 2001. Vol. 6, no. 5. Pp. 24–33].

Поступила в редакцию 02/XI/2011;
в окончательном варианте — 13/III/2012.

MSC: 74G55; 74Cxx

MATHEMATICAL MODEL OF VISCOELASTIC SOFTENING MATERIAL WITH EXPONENTIAL CREEP KERNEL

S. V. Gorbunov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: `0gorbunov0@gmail.com`

The variant of mathematical model of uniaxial strain for viscoelastic material with exponential creep kernel is proposed. Lyapunov stability of the solution of the model in case of permanent stress is investigated. The stability region of solutions of mathematical model's differential equations, corresponding to asymptotically restricted creep of material, is established. Instability region of solutions is in accord with appearance of tertiary creep. Relation between stability of solutions by Lyapunov and stability of iterative calculation for numerical solving the system of equations is established. As an illustration the investigation of model problem is quoted.

Key words: *viscoelastic material, Lyapunov stability of solutions, exponential creep kernel, stability region of solutions, tertiary creep, stability of numerical iterative calculation.*

Original article submitted 02/XI/2011;
revision submitted 13/III/2012.

Sergey V. Gorbunov, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.