

УДК 519.634

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В. П. Федотов, О. А. Нефедова

Институт машиноведения УрО РАН,
620219, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

E-mails: fedotov_vp@mail.ru; nefedova@imach.uran.ru

Предложен алгоритм для нахождения численно-аналитического решения задач параболического типа (диффузии и теплопроводности). В рамках алгоритма решение задачи осуществляется в три этапа. На первом этапе решается одномерная задача для базового отрезка, которая имеет самостоятельное значение, и в то же время служит основой для второго этапа. На втором этапе рассматривается двумерная задача, ее решение выполняется с использованием модифицированного метода граничных элементов. На третьем этапе применяется приём пошагового интегрирования во времени.

Ключевые слова: линейные параболические уравнения, модифицированный метод граничных элементов, численно-аналитическое интегрирование.

Введение. Разработан численно-аналитический алгоритм решения задач параболического типа, в основе которого лежит модифицированный метод граничных элементов (МГЭ). В алгоритме также предложена оригинальная аппроксимация неизвестных граничных функций, когда при решении двумерной задачи в качестве аппроксимирующих функций используются решения одномерной задачи, выраженные через узловые граничные значения и функции влияния. В целях сокращения времени вычислений одномерная задача решается для удобного базового отрезка. Такая аппроксимация, включающая в себя два вложенных друг в друга алгоритма, позволяет получить для двумерной области аналитическое решение, наиболее близкое к действительному.

1. Постановка задачи и её слабая формулировка. В работе рассматриваются однородные нестационарные дифференциальные уравнения параболического типа для задач диффузии и теплопроводности при заданных начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= 0, \quad x \in \Omega; \\ p(x, t_0) &= p_0^*(x), \quad x \in \Omega; \\ p(x_0, t) &= p^*(x_0, t), \quad x_0 \in S_1; \\ u(x_0, t) &= u^*(x_0, t), \quad x_0 \in S_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ — оператор Лапласа; $p(x, t)$ — температура или концентрация примеси в точке $x(x_1, x_2)$ в момент времени $t \geq t_0$; t_0 — начальный момент времени; λ — не зависящий от координат и времени физический

Владимир Петрович Федотов (д.т.н., проф.), главный научный сотрудник, лаб. прикладной механики. *Ольга Анатольевна Нефедова*, младший научный сотрудник, лаб. прикладной механики.

параметр; Ω — исследуемая область; $S = S_1 \cup S_2$ — гладкая граница области Ω ; $p_0^*(x)$, $p^*(x_0, t)$ и $u^*(x_0, t)$ — известные функции; $u(x, t) = -\partial p(x, t)/\partial n(x)$ — тепловой или диффузионный поток через границу с внешней нормалью $n(x)$. Потребуем выполнения (1) в целом по области Ω с весом G и учтём изменение температуры (концентрации примеси) во времени:

$$\int_{t_0}^{t_K} \int_{\Omega} \left[\Delta p(x, t) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \right] G(\xi, x, t_K, t) d\Omega(x) dt = 0, \quad (2)$$

где t_K — момент наблюдения; $\xi(\xi_1, \xi_2)$ — произвольная точка области. В соответствии с методом граничных элементов [1] в качестве весовой функции $G(\xi, x, t_K, t)$ выберем фундаментальное решение исходного уравнения. Фундаментальное решение $G(\xi, x, t_K, t)$ описывает реакцию в точке x в момент времени t_K на действие единичного точечного источника вида дельта-функции Дирака $\delta(\xi, x, t_K, t)$, помещенного в точку ξ неограниченной области в момент времени t , и определяется из уравнения

$$\Delta G(\xi, x, t_K, t) - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial G(\xi, x, t_K, t)}{\partial t} = \delta(\xi, x, t_K, t). \quad (3)$$

Решение уравнения (3) известно:

$$G^*(\xi, x, t_K, t) = \frac{1}{4\pi\lambda\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4\lambda\tau}\right).$$

Здесь $\tau = t_K - t$; $r^2 = z_i z_i$; $z_i = x_i - \xi_i$, $i = 1, 2$.

Направленный поток F^* , обусловленный G^* , задаётся выражением

$$F^*(\xi, x, t_K, t) = -\frac{\partial G^*}{\partial n} = -\frac{\partial G^*}{\partial x_i} n_i = \frac{G^* z_i n_i}{2\lambda\tau} = \frac{d}{8\pi\lambda^2\tau^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\lambda\tau}\right),$$

где $n_i(x)$ — компоненты единичного вектора внешней нормали к линейному элементу, проходящему через точку $x(x_1, x_2)$; $d = (x_1 - \xi_1)n_1 + (x_2 - \xi_2)n_2$.

В общем случае m -мерного пространства зависящее от времени фундаментальное решение имеет вид

$$G^*(\xi, x, t_K, t) = \frac{1}{(4\pi\lambda\tau)^{m/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\lambda\tau}\right) H(\tau),$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Проинтегрируем выражение (2) по частям дважды по x , а затем выполним интегрирование по t . Полученное выражение для температуры (концентрации примеси) $p(\xi, t_K)$ в произвольный момент времени t_K в произвольной внутренней точке ξ области Ω имеет вид

$$\begin{aligned} p(\xi, t_K) = & -\lambda \int_{t_0}^{t_K} \int_S u(x, t) G^*(\xi, x, t_K, t) dS(x) dt + \\ & + \lambda \int_{t_0}^{t_K} \int_S p(x, t) F^*(\xi, x, t_K, t) dS(x) dt + \int_{\Omega} p_0^*(x) G^*(\xi, x, t_K, t_0) d\Omega(x). \quad (4) \end{aligned}$$

Граничное интегральное уравнение для задачи (1) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p(x_0, t_K) = & -\lambda \int_{t_0}^{t_K} \int_S u(x, t) G^*(x_0, x, t_K, t) dS(x) dt + \\ & + \lambda \int_{t_0}^{t_K} \int_S p(x, t) F^*(x_0, x, t_K, t) dS(x) dt + \int_{\Omega} p_0^*(x) G^*(x_0, x, t_K, t_0) d\Omega(x). \end{aligned}$$

2. Одномерный случай. В качестве области Ω рассмотрим базовый отрезок длины L , который лежит на оси абсцисс и один из концов которого совпадает с началом координат. Тогда граница S области Ω вырождается до двух точек: 0 и L . Перепишем интегральное уравнение (4) в предположении, что $p_0^* = \text{const}$:

$$\begin{aligned} p(\xi, t_K) = \lambda \int_{t_0}^{t_K} \left[-u(x) G^*(\xi, x, t_K, t) + p(x) F^*(\xi, x, t_K, t) \right]_0^L dt + \\ + p_0^* \int_0^L G^*(\xi, x, t_K, t_0) dx. \quad (5) \end{aligned}$$

Для получения аналитического решения уравнения (5) используем алгоритм, предложенный в [2]. Рассмотрим плоскость $\{x, t\}$ и одномерную однородную область, простирающуюся от $x = 0$ до $x = L$, с заданными вдоль неё начальными условиями $p_0^* = \text{const}$. Другими границами являются прямые, параллельные оси времени, вдоль которых заданы две постоянные граничные величины. Принимая время t в качестве параметра, две неизвестные граничные величины также предполагаем постоянными во времени. Соотношение (5) запишется в виде

$$\begin{aligned} p(\xi, t_K) = & -\lambda \left[u_2 \int_{t_0}^{t_K} G^*(\xi, L, t_K, t) dt - u_1 \int_{t_0}^{t_K} G^*(\xi, 0, t_K, t) dt \right] + \\ & + \lambda \left[p_2 \int_{t_0}^{t_K} F^*(\xi, L, t_K, t) dt - p_1 \int_{t_0}^{t_K} F^*(\xi, 0, t_K, t) dt \right] + \\ & + p_0^* \int_0^L G^*(\xi, x, t_K, t_0) dx, \quad (6) \end{aligned}$$

где $u_1 = u(0^+)$, $u_2 = u(L^-)$, $p_1 = p(0^+)$, $p_2 = p(L^-)$.

Интегралы по времени и пространственной переменной в правой части выражения (6) были вычислены аналитически, затем точка ξ поочередно устремлялась к точкам 0 и L . В результате была получена система двух уравнений для нахождения двух неизвестных граничных значений.

Функциональная зависимость $p(\xi, t_K)$ для произвольной точки отрезка $[0, L]$ принимает вид

$$p(\xi, t_K) = -u_2 \left[\sqrt{\frac{\lambda(t_K - t_0)}{\pi}} \exp\left(\frac{-(L - \xi)^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) - \left(\frac{L - \xi}{2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{L - \xi}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + u_1 \left[\sqrt{\frac{\lambda(t_K - t_0)}{\pi}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) - \frac{\xi}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) \right] + \\
 & + \frac{p_2}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{(L - \xi)}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) + \frac{p_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} p_0^* \left[\operatorname{erf}\left(\frac{(L - \xi)}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) \right]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Здесь $\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y)$, $\operatorname{erf}(y) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^y \exp(-z^2) dz$ — функция ошибок.

Для нахождения функциональной зависимости $u(\xi, t_K)$ используются формула для определения потока $u(x, t) = -\partial p(x, t)/\partial n(x)$ и свойство симметрии функции G^* относительно x и ξ :

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t_K) = \lambda \int_{t_0}^{t_K} \left[u(x) \frac{\partial G^*(\xi, x, t_K, t)}{\partial \xi} - p(x) \frac{\partial F^*(\xi, x, t_K, t)}{\partial \xi} \right]_0^L dt - \\
 - p_0^* \int_0^L \frac{\partial G^*(\xi, x, t_K, t_0)}{\partial \xi} dx, \quad (8)
 \end{aligned}$$

или, после аналитического интегрирования правой части выражения (8),

$$\begin{aligned}
 u(\xi, t_K) = \frac{u_2}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{(L - \xi)}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) + \frac{u_1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\lambda(t_K - t_0)}}\right) - \\
 - \frac{p_2}{2\sqrt{\pi\lambda(t_K - t_0)}} \exp\left(\frac{-(L - \xi)^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) + \frac{p_1}{2\sqrt{\pi\lambda(t_K - t_0)}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) + \\
 + \frac{p_0^*}{2\sqrt{\pi\lambda(t_K - t_0)}} \left[\exp\left(-\frac{(L - \xi)^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) - \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) \right]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение одномерной задачи для базового отрезка, полученное на первом этапе, записывается в аналитическом виде и определяется граничными условиями на концах отрезка.

3. Двумерный случай и модифицированный метод граничных элементов.

Разобьём границу $S = S_1 \cup S_2$ двумерной области Ω на конечное число отрезков $[a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, 2, \dots, N + M$, в предположении, что на одной части границы $S_1 = \{[a_{j-1}, a_j], j = 1, 2, \dots, N\}$ задана температура или концентрация примеси, а на другой части $S_2 = \{[a_{j-1}, a_j], j = N + 1, N + 2, \dots, N + M\}$ задан тепловой или диффузионный поток. Тогда интегральное уравнение (4) переписется в виде

$$\begin{aligned}
 p(\xi, t_K) = \lambda \int_{t_0}^{t_K} \sum_{j=1}^N \int_{a_{j-1}}^{a_j} (-u^{(j)}(x, t) G^*(\xi, x, t_K, t) + \\
 + p^{(j)*}(x, t) F^*(\xi, x, t_K, t)) dx dt + \\
 + \lambda \int_{t_0}^{t_K} \sum_{j=N+1}^{N+M} \int_{a_{j-1}}^{a_j} (-u^{(j)*}(x, t) G^*(\xi, x, t_K, t) + p^{(j)}(x, t) F^*(\xi, x, t_K, t)) dx dt +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega} p_0^*(x) G^*(\xi, x, t_K, t_0) d\Omega(x). \quad (10)$$

Здесь звездочкой обозначены известные величины и введены следующие обозначения: $u^{(j)*}(x, t) = u(x, t)$, $p^{(j)*}(x, t) = p^*(x, t)$ при $x \in [a_{j-1}, a_j] \in S_1$; $u^{(j)*}(x, t) = u^*(x, t)$, $p^{(j)*}(x, t) = p(x, t)$ при $x \in [a_{j-1}, a_j] \in S_2$.

Интеграл по Ω в правой части уравнения (10) преобразуем с помощью второго тождества Грина к граничному интегралу

$$\int_{\Omega} p_0^*(x) G^*(\xi, x, t_K, t_0) d\Omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{d}{r^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) p_0^*(x) + \frac{1}{2} E_1\left(\frac{r^2}{4\lambda(t_K - t_0)}\right) u_0^*(x) \right\} dS(x), \quad (11)$$

что возможно для гармонической функции $p_0^*(x)$. Здесь

$$E_1(y) = \int_{-\infty}^y (\exp(z)/z) dz, \quad u_0^*(x) = -\partial p_0^*(x)/\partial n(x).$$

Для аппроксимации неизвестных граничных условий в уравнении (10) используются функциональные зависимости (7) и (9).

Модифицированный метод граничных элементов [3] позволяет заменить произвольное граничное разбиение $[a_{j-1}, a_j]$ на базовый отрезок $[0, L]$. Выполним преобразование координат для разбиения $[a_{j-1}, a_j]$, при котором длина отрезка не изменяется, точка a_{j-1} отображается в начало координат, а точка a_j отображается в точку $L(L, 0)$. Такое преобразование является комбинацией параллельного переноса и поворота отрезка на угол φ (угол наклона отрезка к оси абсцисс). Тогда произвольная точка на плоскости $x(x_1, x_2)$ отображается в точку $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, связанную с ней соотношением

$$x = B\bar{x} + C, \quad \bar{x} = B^{-1}(x - C),$$

где B — матрица поворота; C — вектор координат той точки граничного отрезка, которая при преобразовании отображается в начало координат. При таком преобразовании исследуемая система объектов жестко перемещается как единое целое. Поскольку величина p — скалярное поле в задаче (1), то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int_{a_{j-1}}^{a_j} u(x, t) G^*(\xi, x, t_K, t) dx &= \int_0^L \bar{u}(x, t) G^*(\bar{\xi}, x, t_K, t) dx, \\ \int_{a_{j-1}}^{a_j} p(x, t) F^*(\xi, x, t_K, t) dx &= \int_0^L \bar{p}(x, t) F^*(\bar{\xi}, x, t_K, t) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\bar{\xi} = B^{-1}(\xi - C)$.

Запишем вид функции влияния и ее нормальной производной для базового отрезка $[0, L]$, на котором $\bar{x}_2 = 0$, $n_1(x) = 0$, $n_2(x) = -1$:

$$\begin{aligned} G^*(\bar{\xi}, x, t_K, t) &= \frac{1}{4\pi\lambda\tau} \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda\tau}\right), \\ F^*(\bar{\xi}, x, t_K, t) &= \frac{\bar{\xi}_2}{8\pi\lambda^2\tau^2} \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda\tau}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим выражения (7), (9), (13) в уравнение (10) и учтём равенства (11) и (12). В результате получим

$$\begin{aligned}
 p(\xi, t_K) = & \int_{t_0}^{t_K} \sum_{j=1}^N \left[-c_1(u_{j-1}I_1^{(\bar{\xi})} + u_j I_2^{(\bar{\xi})}) - c_2(p_{j-1}^* I_3^{(\bar{\xi})} - p_j^* I_4^{(\bar{\xi})}) + \right. \\
 & + 2c_3 p_{j-1}^* I_5^{(\bar{\xi})} \left. \right] dt + \int_{t_0}^{t_K} \sum_{j=N+1}^{N+M} \left[c_3(p_{j-1} I_1^{(\bar{\xi})} + p_j I_2^{(\bar{\xi})}) + c_3(u_{j-1}^*(c_4 I_3^{(\bar{\xi})} - I_6^{(\bar{\xi})}) - \right. \\
 & \left. - u_j^*(c_4 I_4^{(\bar{\xi})} - I_7^{(\bar{\xi})})) - 2c_1 u_{j-1}^* I_5^{(\bar{\xi})} \right] dt + \\
 & + \int_{t_0}^{t_K} \left[\sum_{j=1}^N c_2 p_{0j-1}^* (I_3^{(\bar{\xi})} - I_4^{(\bar{\xi})}) + \sum_{j=N+1}^{N+M} c_3 p_{0j-1}^* (I_1^{(\bar{\xi})} + I_2^{(\bar{\xi})} + 2I_5^{(\bar{\xi})}) \right] dt + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N+M} \left(p_{0j-1}^* I_8^{(\bar{\xi})} + \frac{1}{2} u_{0j-1}^* I_9^{(\bar{\xi})} \right). \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь u_j , u_j^* , p_j , p_j^* — узловые значения соответствующих функций; звёздочкой, как и прежде, обозначены заданные величины;

$$c_1 = \frac{1}{8\pi(t_K - t)}, \quad c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{\pi\lambda(t - t_0)}}, \quad c_3 = \frac{\bar{\xi}_2}{16\pi\lambda(t_K - t)^2}, \quad c_4 = 2\sqrt{\frac{\lambda(t - t_0)}{\pi}};$$

$$I_1^{(\bar{\xi})} = \int_0^L \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\lambda(t - t_0)}}\right) \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_2^{(\bar{\xi})} = \int_0^L \operatorname{erfc}\left(\frac{L - x}{2\sqrt{\lambda(t - t_0)}}\right) \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_3^{(\bar{\xi})} = \int_0^L \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda(t - t_0)}\right) \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_4^{(\bar{\xi})} = \int_0^L \exp\left(-\frac{(L - x)^2}{4\lambda(t - t_0)}\right) \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_5^{(\bar{\xi})} = \int_0^L \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_6^{(\bar{\xi})} = \int_0^L x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\lambda(t - t_0)}}\right) \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_7^{(\bar{\xi})} = \int_0^L (L - x) \operatorname{erfc}\left(\frac{L - x}{2\sqrt{\lambda(t - t_0)}}\right) \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_8^{(\bar{\xi})} = \int_0^L \frac{\bar{\xi}_2}{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2} \exp\left(-\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx,$$

$$I_9^{(\bar{\xi})} = \int_0^L E_1\left(\frac{(x - \bar{\xi}_1)^2 + \bar{\xi}_2^2}{4\lambda(t_K - t)}\right) dx.$$

Соответствующее уравнению (14) граничное интегральное уравнение для произвольной граничной точки $x_0(x_{01}, x_{02})$ имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p(x_0, t_K) = & \int_{t_0}^{t_K} \sum_{j=1}^N \left[-c_1(u_{j-1}J_1^{(\bar{x}_0)} + u_jJ_2^{(\bar{x}_0)}) - c_2(p_{j-1}^*J_3^{(\bar{x}_0)} - p_j^*J_4^{(\bar{x}_0)}) + \right. \\ & \left. + 2c_3p_{j-1}^*J_5^{(\bar{x}_0)} \right] dt + \int_{t_0}^{t_K} \sum_{j=N+1}^{N+M} \left[c_3(p_{j-1}J_1^{(\bar{x}_0)} + p_jJ_2^{(\bar{x}_0)}) + \right. \\ & \left. + c_3[u_{j-1}^*(c_4J_3^{(\bar{x}_0)} - J_6^{(\bar{x}_0)}) - u_j^*(c_4J_4^{(\bar{x}_0)} - J_7^{(\bar{x}_0)})] - 2c_1u_{j-1}^*J_5^{(\bar{x}_0)} \right] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_K} \left[\sum_{i=1}^N c_2p_{0j-1}^*(J_3^{(\bar{x}_0)} - J_4^{(\bar{x}_0)}) + \sum_{j=N+1}^{N+M} c_3p_{0j-1}^*(J_1^{(\bar{x}_0)} + J_2^{(\bar{x}_0)} + 2J_5^{(\bar{x}_0)}) \right] dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N+M} \left(p_{0j-1}^*J_8^{(\bar{x}_0)} + \frac{1}{2}u_{0j-1}^*J_9^{(\bar{x}_0)} \right), \quad (15) \end{aligned}$$

где $\bar{x}_0 = B^{-1}(x_0 - C)$. Интегралы $J_n^{(\bar{x}_0)} = J_n(\bar{x}_0, x, t_K, t)$ в уравнении (15) соответствуют интегралам $I_n^{(\bar{\xi})} = I_n(\bar{\xi}, x, t_K, t)$ из уравнения (14) с заменой точки $\bar{\xi}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ на точку $\bar{x}_0(\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02})$.

Уравнение (15) интегрируется по пространственной переменной. Для получения результата интегрирования в аналитическом виде специальная функция ошибок $\text{erf}(y)$ была приближена кубическим сплайном.

4. Интегрирование по времени. Рассмотрим заключительный, третий этап. Разобьём интервал интегрирования $[t_0, t_K]$ на K шагов $[t_{k-1}, t_k]$, считая граничные условия постоянными на каждом временном шаге, и будем выполнять интегрирование по времени.

Использование модифицированного МГЭ позволяет ограничиться в конце каждого временного шага подсчётом значений функций лишь в граничных узлах, для того чтобы использовать их при подсчёте значений функции температуры (концентрации примеси) внутри и на границе области Ω на следующем шаге по времени.

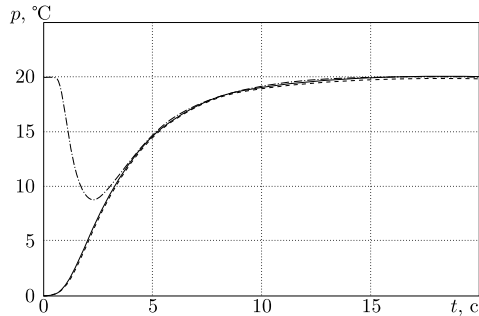
Осуществляя в левой части граничного интегрального уравнения (15) перебор по всем граничным узлам, получаем систему линейных уравнений, решение которой определяет температуру (концентрацию примеси) и тепловой (диффузионный) поток в узловых точках границы на каждом временном шаге:

$$\sum_{k=1}^K Q_{kK}^* P_k + \sum_{k=1}^K R_{kK}^* U_k + S_0^* P_0^* = 0. \quad (16)$$

Здесь Q_{kK}^* , R_{kK}^* — матрицы коэффициентов $\int_{t_{k-1}}^{t_k} q^*(\bar{x}_0, t_K, t) dt$, $\int_{t_{k-1}}^{t_k} r^*(\bar{x}_0, t_K, t) dt$ при $k = 1, 2, \dots, K$. Подынтегральные функции $q^*(\bar{x}_0, t_K, t)$ и $r^*(\bar{x}_0, t_K, t)$ — аналитические выражения от различных комбинаций произ-

ведений функции ошибок $\operatorname{erf}(\bar{x}_0, t_K, t)$ и функции $\exp(\bar{x}_0, t_K, t)$. Коэффициенты матриц P_k и U_k — узловые значения температуры (концентрации примеси) и теплового (диффузионного) потока соответственно для каждого момента времени t_k . Коэффициенты матрицы S_0^* обусловлены интегрированием $J_8^{(\bar{x}_0)}$, когда $x_0 \in [a_{j-1}, a_j] \in S_2$; P_0^* — вектор коэффициентов p_{0j-1}^* .

Система уравнений (16) решается численно для момента времени $t = t_K$ при уже найденных на предыдущем шаге значениях P_k и U_k при $k = 1, 2, \dots, K - 1$. После решения системы уравнений (16) и определения всех граничных величин в каждый момент времени рассчитывается температура (концентрация примеси) в произвольной внутренней точке ξ области Ω .



помощью пакета **FreeFem++-cs** (штриховая линия) и для аналитического решения [4] (штрих-пунктирная линия). Все данные приведены для точки, расположенной в центре пластины.

Отклонение результатов численных расчётов от аналитического решения вблизи начального момента времени обусловлено тем, что принятый в качестве аналитического решения ряд Фурье даёт на этом интервале времени заведомо неточное приближение, что объясняется видом ряда Фурье, а также разрывом между начальными и граничными условиями. Однако в данной постановке задачи поведение решения на начальном интервале времени является несущественным, поскольку основной интерес представляет развитый процесс теплопроводности. Начиная с некоторого момента времени все три решения задачи стремятся к асимптотическому значению.

Заключение. Разработанный метод расчета позволяет находить численно-аналитическое решение для линейных задач параболического типа: диффузии, теплопроводности и т. д.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0202) и Программы Президиума РАН № 14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 526 с. [Brebbyia K., Telles Zh., Vroubel L. Boundary element techniques. Moscow: Mir, 1987. 526 pp.]

2. Бенерджи П., Баттерфилд В. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с. [*Benerdzhii P. K., Butterfield R.* The boundary elements methods in applied sciences. Moscow: Mir, 1984. 494 pp.]
3. Федотов В. П., Спевак Л. Ф. Модифицированный метод граничных элементов в задачах механики, теплопроводности и диффузии. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. 161 с. [*Fedotov V. P., Spevak L. F.* A modified boundary element method in problems of mechanics, heat transfer, and diffusion. Ekaterinburg: UrO RAN, 2009. 161 pp.]
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с. [*Lykov A. V.* Theory of Heat Conduction. Moscow: Vyssh. shk., 1967. 600 pp.]

Поступила в редакцию 04/XI/2010;
в окончательном варианте — 27/IX/2011.

MSC: 65M38

APPLICATION OF THE MODIFIED BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE SOLUTION OF PARABOLIC PROBLEMS

V. P. Fedotov, O. A. Nefedova

Institute of Teoretical Engineering, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Yekaterinburg, 620083, Russia.

E-mails: fedotov_vp@mail.ru; nefedova@imach.uran.ru

An algorithm for finding numerically-analytical solution of parabolic problems (diffusion and heat conduction) is proposed. The problem is solved by the proposed algorithm in three steps. At the first step the one-dimensional problem is solved for a base interval of integration. This problem is of independent significance as well as the basis for the second step. At the second step the two-dimensional parabolic problem is considered. Its solution is performed using the modified boundary elements method. At the third step, the method of step-by-step integration over time is used.

Key words: linear parabolic equation, modified boundary element method, numerical-analytical integration.

Original article submitted 04/XI/2010;
revision submitted 27/IX/2011.

Vladimir P. Fedotov (Dr. Sci. (Techn.)), Chief Research Scientist, Lab. of Applied Mechanics.
Olga A. Nefedova, Associate Researcher, Lab. of Applied Mechanics.