УДК 517.95+517.986.7

# ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

***Х. Г. Умаров***

Чеченский государственный университет,
364907, Россия, Грозный, ул. Шерипова, 32.

E-mail: umarov50@mail.ru

*Для линеаризованной системы уравнений фазового поля получен явный вид решения задачи Коши сведением её к абстрактной задаче Коши в банаховом пространстве.*

**Ключевые слова:** *линеаризованная система уравнений фазового поля, сильно непрерывные полугруппы операторов в банаховых пространствах.*

Рассмотрим в области $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, задачу Коши для системы уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} v_t = \triangle v - \triangle w, \\ \triangle w + (\alpha - 1)w + v = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \tag{2}$$

которая является, с точностью до линейной замены, линеаризацией в нуле квазистационарной системы уравнений фазового поля [1, с. 24], моделирующей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода. В системе (1) искомые функции $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ характеризуют распределение температуры и параметр порядка; $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — дифференциальный оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$; $\alpha$ — постоянная, зависящая от характеристик среды.

В работе [1] система (1) исследуется в ограниченной области методами теории уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами.

Наша цель — получить для системы (1) явный вид решения задачи Коши в $\mathbb{R}^3$. Явный вид решения задачи Коши (первой начально-краевой задачи в полупространстве и смешанной задачи в пространственном слое в предположении анизотропии среды) получен в [2].

Будем искать решение системы (1) в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < +\infty$. В этом пространстве оператор Лапласа с областью определения $\mathcal{D}(\triangle) = \{\psi \in L_p(\mathbb{R}^3) : \triangle\psi \in L_p(\mathbb{R}^3)\}$ является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной (более того — аналитической) полугруппы $U(t; \triangle)$ класса $C_0$ [3, с. 228; 4, с. 58]:

$$U(t; \triangle)\psi(x, y, z) = (4\pi t)^{-3/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right)/(4t)}\psi(\xi, \eta, \zeta)d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{3}$$

и его область определения является пространством Соболева: $\mathcal{D}(\triangle) = W_p^2(\mathbb{R}^3)$.

Исключим из системы (1) одну из неизвестных функций. Для этого воспользуемся тем, что положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора Лапласа в пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$: предполагая, что $\alpha < 1$, из второго уравнения системы (1) выводим

$$w = \left((1 - \alpha)I - \triangle\right)^{-1} v. \tag{4}$$

*Хасан Галсанович Умаров* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. дифференциальных уравнений.

Подставляя полученное значение $w$ в первое уравнение системы (1), имеем

$$v_t = \triangle v + v - (1-\alpha)\big((1-\alpha)I - \triangle\big)^{-1} v. \tag{5}$$

Таким образом, обозначая в уравнении (5) операторы $\triangle = A$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = W_p^2(\mathbb{R}^3)$ и $I - (1-\alpha)\big((1-\alpha)I - \triangle\big)^{-1} = B$ с областью определения $\mathcal{D}(B) = L_p(\mathbb{R}^3)$, приходим к абстрактному дифференциальному уравнению первого порядка в банаховом пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$:

$$v_t = (A+B)V \tag{6}$$

относительно функции $V = V(t) : [0, +\infty) \xrightarrow{V} L_p(\mathbb{R}^3)$ по правилу: для любого $t \geqslant 0$ $V(t) = v(x,y,z,t) \in L_p(\mathbb{R}^3)$. Начальным условием для уравнения (6) будет являться равенство

$$V\big|_{t=0} = \phi, \tag{7}$$

где $\phi = V(0) = v(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$ — заданный элемент пространства $L_p(\mathbb{R}^3)$ в соответствии с условием (2).

Оператор $B = I - (1-\alpha)\left((1-\alpha)I - \triangle\right)^{-1}$ — линеен и ограничен на всём пространстве $L_p(\mathbb{R}^3)$, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы (более того — группы) класса $C_0$: $U(t;B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} B^k \psi$, для которой справедливо представление

$$U(t;B)\psi = e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k (1-\alpha)^k}{k!} \big((1-\alpha)I - \triangle\big)^{-k} \psi,$$

где $\psi$ — произвольный элемент пространства $L_p(\mathbb{R}^3)$. Для полугруппы $U(t;B)$, $t \geqslant 0$, справедлива оценка нормы:

$$\|U(t;B)\| \leqslant e^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-\alpha)^k t^k}{k!} \big\| \big((1-\alpha)I - \triangle\big)^{-1} \big\|^k \leqslant e^{2t}.$$

Выражая степени резольвенты $\big((1-\alpha)I - \triangle\big)^{-k}$ через полугруппу (3), находим представление полугруппы, порождаемой оператором $B$:

$$U(t;B)\psi = e^t \left[\psi - \sqrt{(1-\alpha)t} \int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s} J_1\left(2\sqrt{(1-\alpha)ts}\right) U(s;\triangle)\psi \frac{ds}{\sqrt{s}}\right],$$

где $J_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — функция Бесселя.

Из полученных представлений полугрупп $U(t;A)$ и $U(t;B)$ через полугруппу, порождаемую оператором Лапласа, следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора $A$ сильно непрерывной полугруппы $U(t;A)$ класса $C_0$ линейным ограниченным оператором $B$ оператор $A+B$ с областью определения $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$ также порождает [5, с. 403] сильно непрерывную полугруппу $U(t;A+B)$ класса $C_0$, при этом возмущённая полугруппа определяется разложением в ряд:

$$U(t;A+B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(t)\psi, \quad t \geqslant 0,$$

где

$$U_k(t)\psi = \int_0^t U(t-s;A) B U_{k-1}(s)\psi ds, \quad k \geqslant 1$$

и $U_0(t)\psi = U(t;A)\psi$ для произвольного элемента $\psi$ банахова пространства, причём ряд абсолютно сходится равномерно по $t$ в любом конечном интервале положительной полуоси.

В нашем случае возмущающий линейный ограниченный оператор $B$ коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором $A$: $BU(t;A)\psi = U(t;A)B\psi$, так как этим свойством обладают резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ и полугруппа $U(t;A)$ для любого производящего оператора $A$ сильно непрерывной полугруппы класса $C_0$. Отсюда следует, что

$$U_k(t)\psi = \frac{t^k}{k!}B^k U(t;A)\psi = \frac{t^k}{k!}U(t;A)B^k\psi$$

и, значит, справедливо следующее представление для полугруппы, порождаемой оператором $A+B$:

$$\begin{aligned} &U(t;A+B)\psi = U(t;A)U(t;B)\psi = U(t;B)U(t;A)\psi = \\ &= e^t\left[U(t;\triangle)\psi - \sqrt{(1-\alpha)t}\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s}J_1\left(2\sqrt{(1-\alpha)ts}\right)U(s+t;\triangle)\psi\frac{ds}{\sqrt{s}}\right], \end{aligned} \tag{8}$$

и оценка нормы

$$\|U(t;A+B)\| \leqslant \|U(t;A)\|\cdot\|U(t;B)\| \leqslant e^{2t}. \tag{9}$$

Для того чтобы задача Коши (6), (7) была равномерно корректной [4, с. 64], необходимо и достаточно, чтобы оператор $A+B$ был производящим оператором полугруппы класса $C_0$, при этом решение задачи Коши (6), (7) даётся формулой

$$V = U(t;A+B)\phi, \tag{10}$$

если начальное данное $\varphi$ принадлежит области определения $\mathcal{D}(A+B)$.

Принадлежность элемента $\varphi$ множеству $\mathcal{D}(A+B)$ будет следовать из принадлежности начального данного $\varphi = \varphi(x,y,z)$ пространству Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^3)$. Предполагая это выполненным и используя представление (8), выводим из (10) формулу решения задачи Коши для уравнения (5):

$$\begin{aligned} v(x,y,z,t) = e^t\Bigg[&U(t;\triangle)\varphi(x,y,z) - \\ &- \sqrt{(1-\alpha)t}\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s}J_1\left(2\sqrt{(1-\alpha)ts}\right)U(s+t;\triangle)\varphi(x,y,z)\frac{ds}{\sqrt{s}}\Bigg], \end{aligned} \tag{11}$$

для которого, в силу (9), справедлива оценка

$$\|v(x,y,z,t)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \leqslant e^{2t}\|\varphi(x,y,z)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}. \tag{12}$$

Наконец, используя в формуле (11) представление (3) полугруппы, порождаемой оператором Лапласа, получаем явный вид решения задачи Коши (5), (2):

$$\begin{aligned} v(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\Bigg[&\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}\varphi(x+2\sqrt{t}\xi, y+2\sqrt{t}\eta, z+2\sqrt{t}\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta - \\ &- \sqrt{(1-\alpha)t}\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s}J_1\left(2\sqrt{(1-\alpha)ts}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\times \\ &\times\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}\varphi(x+2\sqrt{s+t}\xi, y+2\sqrt{s+t}\eta, z+2\sqrt{s+t}\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta\Bigg]. \end{aligned} \tag{13}$$

Теперь из соотношения (4), используя формулу и оценку резольвенты оператора Лапласа в $L_p(\mathbb{R}^3)$, получаем явный вид второй искомой функции системы (1):

$$w(x,y,z,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}e^t\Bigg[\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)r}dr\times$$
$$\times\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}\varphi(x+2\sqrt{r+t}\xi, y+2\sqrt{r+t}\eta, z+2\sqrt{r+t}\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$
$$-\sqrt{(1-\alpha)t}\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)r}dr\int_0^{+\infty} e^{-(1-\alpha)s}J_1\left(2\sqrt{(1-\alpha)ts}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\times$$
$$\times\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-\xi^2-\eta^2-\zeta^2}\varphi(x+2\sqrt{r+s+t}\xi, y+2\sqrt{r+s+t}\eta, z+2\sqrt{r+s+t}\zeta)d\xi\,d\eta\,d\zeta\Bigg] \tag{14}$$

и её оценку

$$\|w(x,y,z,t)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)} \leqslant \frac{e^{2t}}{1-\alpha}\|\varphi(x,y,z)\|_{L_p(\mathbb{R}^3)}. \tag{15}$$

Таким образом, имеет место

Теорема. *Предположим, что в системе уравнений фазового поля* (1) *параметр* $\alpha$ *удовлетворяет неравенству* $\alpha < 1$ *и пусть в задаче Коши* (1), (2) *решение* $v(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ *ищется в пространстве* $L_p(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < +\infty$, *а начальное данное* $\varphi(x,y,z)$ *принадлежит пространству Соболева* $W_p^2(\mathbb{R}^3)$, *тогда единственное решение этой системы даётся формулами* (13), (14) *и для него справедливы оценки* (12), (15).

Замечание. Отметим, что по переменной $t$ решение (13) удовлетворяет полугрупповому свойству, дифференцируемо при $t \geqslant 0$ и бесконечно дифференцируемо при $t > 0$. По переменным $(x,y,z)$ значения решения при $t \geqslant 0$ принадлежат пространству Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^3)$ и, значит, у решения существуют частные и смешанные обобщённые производные по переменным $(x,y,z)$ до второго порядка включительно, принадлежащие пространству $L_p(\mathbb{R}^3)$ при $t \geqslant 0$, и обобщённые производные любого порядка при $t > 0$. Из оценок (12), (15) следует непрерывная зависимость решения системы (1) от начального данного на любом конечном временном отрезке.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера—Сидорова // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 3. С. 22–28; англ. пер.: *Zagrebina S. A.* On the Showalter–Sidorov problem // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007. Vol. 51, no. 3. Pp. 19–24.

2. *Умаров Х. Г.* Явный вид решения линеаризованной системы уравнений фазового поля. Грозный: ЧечГУ, 2010. 27 с. (Деп. в ВИНИТИ 24.05.10 № 303–В2010) [*Umarov Kh. G.* The explicit form of solutions for linearized system of phase field equations. Groznyi: ChechGU, 2010. 27 pp. (Deposited at VINITI 24.05.10 No. 303–B2010)]

3. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с. [*Tribel' Kh.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. Moscow: Mir, 1980. 664 pp.]

4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с. [*Krein S. G.* Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka, 1967. 464 pp.]

5. *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностр. лит., 1962. 829 с. [*Hille E., Fillips R.* Functional analysis and semi-groups. Moscow: Inostran. Lit., 1962. 829 pp.]

Поступила в редакцию 30/VI/2011;
в окончательном варианте — 29/XI/2011.

**MSC: 35G10; 47D06**

## EXPLICIT SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR THE LINEARIZED SYSTEM OF PHASE FIELD EQUATIONS

***Kh. G. Umarov***

Chechen State University,
32, Sheripova st., Groznyi, 364907, Russia.

E-mail: umarov50@mail.ru

*The explicit solution of Cauchy problem for the linearized system of phase field equations is received by reduction it to the abstract Cauchy problem in Banach space.*

**Key words:** *linearized system of phase field equations, strongly continuous semi-groups of operators in Banach spaces.*

Original article submitted 30/VI/2011;
revision submitted 29/XI/2011.

*Khasan G. Umarov* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Differential Equations.