Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.32

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н. Д. Голубева

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: depcy@yandex.ru

Рассматривается нелокальная задача с интегральным условием первого рода для гиперболического уравнения. Доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи. Для доказательства разрешимости используется метод вспомогательных задач, получена априорная оценка.

Ключевые слова: *нелокальная задача, интегральное условие, априорная оценка.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T;\ T < l\}$ уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x,y)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него задачу со следующими условиями:

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x); \tag{2}$$

$$u_x(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^l K(x)u(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

Будем считать, что функции $\phi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$, $K(x)$ заданы и для них выполнены условия согласования:

$$\int_0^l K(x)\phi(x)dx = \int_0^l K(x)\psi(x)dx = 0, \quad \phi'(0) = 0.$$

Задачи с интегральными условиями образуют один из классов нелокальных задач, к исследованию которых приводят математические модели различных физических процессов. Представляют интерес смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями, они активно изучаются (см. [1–3] и список литературы в них). Задача с двумя интегральными условиями, где вместо граничного условия (3) задаётся интегральное условие вида (4), была

Наталья Дмитриевна Голубева (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. высшей математики и прикладной информатики.

рассмотрена в [1]. Условие (4), как отмечено в [2], является интегральным условием первого рода, так как содержит лишь значения искомого решения во внутренних точках области.

Используя методы, разработанные в [1], исследуем исходную задачу.

Решением задачи (1)–(4) будем называть функцию $u(x,t) \in W_2^2(D)$, удовлетворяющую в классическом смысле условиям (2)–(4) и для п. в. $(x,t) \in D$ уравнению (1).

Основной результат работы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если* $f(x,t) \in L_2(D)$, $f_t(x,t) \in L_2(D)$, $\phi(x) \in W_2^2(0,l)$, $\psi(x) \in W_2^1(0,l)$, $K(x) \in C^2[0,l]$, $c(x,t) \in C(\bar{D})$, $c_t(x,t) \in C(\bar{D})$, $K'(0) = 0$, *то существует единственное решение задачи* (1)–(4).

2. Априорная оценка. Прежде чем доказать основную теорему, докажем следующее утверждение.

Лемма. *Если выполнены условия теоремы, то существует постоянная* $C > 0$ *такая, что решение задачи* (1)–(4) *удовлетворяет неравенству*

$$\int_0^l \left(u^2(x,\tau) + \left(\int_x^l K(\xi) u_t(\xi,\tau) d\xi \right)^2 \right) dx \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\| f \|^2_{L_2(D)} + \| \phi \|^2_{L_2(D)} + \| \psi \|^2_{L_2(D)} \right). \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4). Умножим обе части уравнения (1) на функцию

$$v(x,t) = K(x) \int_0^l (\xi - x) K(\xi) u_t(\xi,t) d\xi$$

и проинтегрируем по области $D_\tau = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < \tau; \tau \in [0,T]\}$:

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt} - u_{xx} + cu) v dx dt = \int_0^\tau \int_0^l f v dx dt. \quad (6)$$

Преобразуем первый интеграл в левой части равенства

$$I_1 = \int_0^\tau \int_0^l u_{tt} v dx dt,$$

проинтегрировав сначала по x, затем по t, с учётом условия (4):

$$I_1 = \int_0^\tau \int_0^l u_{tt} v dx dt = \int_0^\tau \int_0^l u_{tt}(x,t) K(x) \int_x^l (\xi - x) K(\xi) u_t(\xi,t) d\xi dx dt =$$
$$= - \int_0^l \left(\int_x^l K(\xi) u_t(\xi,t) d\xi \right)^2 \Bigg|_0^\tau + \int_0^l \int_0^\tau \left(\int_x^l K(\xi) u_t(\xi,t) d\xi \right) \times$$
$$\times \left(\int_x^l K(\xi) u_{tt}(\xi,t) d\xi \right) dt dx.$$

Учитывая второе начальное условие (2), имеем

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int_0^l \left(\int_x^l K(\xi) u_t(\xi,\tau) d\xi \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\int_x^l K(\xi) \psi(\xi) d\xi \right)^2 dx.$$

Преобразуем второй интеграл в левой части равенства

$$I_2 = \int_0^\tau \int_0^l u_{xx} v dx dt,$$

интегрируя дважды по x и учитывая условие (4):

$$I_2 = \int_0^\tau \int_0^l u_{xx} v dx dt = \int_0^\tau \int_0^l u_{xx}(x,t)K(x) \int_x^l (\xi - x)K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dx dt =$$

$$= -\int_0^\tau \left(u(x,t)K'(x) \int_x^l (\xi - x)K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi \right)\Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^l u(x,t)K''(x) \int_x^l (\xi - x)K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dt -$$

$$- \int_0^\tau \int_0^l u(x,t)K'(x) \int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dx dt +$$

$$+ \int_0^\tau \left(u(x,t)K(x) \int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi \right)\Big|_0^l - \int_0^\tau \int_0^l u(x,t)K'(x) \int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dx dt +$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^l u(x,t)K^2(x)u_t(x,t)dx dt.$$

Вычисляя последний интеграл, интегрируя по частям по t, а также учитывая условия леммы и первое начальное условие (2), получим

$$I_2 = \int_0^\tau \int_0^l u(x,t) \int_x^l (K''(x)(\xi - x) - 2K'(x))K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dx dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^l K^2(x)u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^l K^2(x)\phi^2(x)dx.$$

Теперь равенство (6) можно переписать так:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,\tau)d\xi \right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l K^2(x)u^2(x,\tau)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\int_x^l K(\xi)\psi(\xi)d\xi \right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l K^2(x)\phi^2(x)dx +$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^l u(x,t) \int_x^l (K''(x)(x - \xi) + 2K'(x) +$$

$$+ \int_0^\tau \int_0^l f(x,t)K(x) \int_x^l (x - \xi)K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dx dt +$$

$$+ C(x,t)K(x)(\xi - x))K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi dx dt.$$

Оценим интегралы в правой части этого равенства с помощью неравенства Коши:

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,\tau)d\xi \right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l K^2(x)u^2(x,\tau)dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^l \left(\int_x^l K(\xi)\psi(\xi)d\xi \right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^l K^2(x)\phi^2(x)dx + 3\int_0^\tau \int_0^l f^2(x,t)dx dt +$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l (2K^2(x)x^2+K^2(x)l^2)\left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi\right)^2 dxdt+3\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^\tau\int_0^l (K''(x)x+2K'(x)-C(x,t)K(x)x)^2\left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi\right)^2 dxdt+$$
$$+\int_0^\tau\int_0^l (-K''(x)+C(x,t)K(x))^2(x^2+l^2)\left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi\right)^2 dxdt.$$

Из условий леммы следует, что найдутся такие положительные постоянные m, M, N, что

$$m\left(\int_0^l\left(u^2(x,\tau)+\left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,\tau)d\xi\right)^2\right)dx\right)\leqslant$$
$$\leqslant M\int_0^\tau\int_0^l\left(u^2(x,t)+\left(\int_x^l K(\xi)u_t(\xi,t)d\xi\right)^2\right)dxdt+$$
$$+N\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2(x,t)dxdt+\int_0^l \phi^2(x)dx+\int_0^l \psi^2(x)dx\right),$$

$h\leqslant K(x,t)\leqslant k$, $h'\leqslant K'(x,t)\leqslant k'$, $h''\leqslant K''(x,t)\leqslant k''$, где $2m=\min(k^2,1)$, $M=$ $=\max(3,3k^2l^2+(k''l+2k'+c_0kl)^2+2(k''+c_0k)^2l^2)$, $2N=\max(k^2,k^2l^2,6)$.

Применив лемму Гроноулла из работы [5], получим неравенство (5) с константой $C=Ne^{MT/m}$.$\square$

3. Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи (1)–(4). Так как неравенство, полученное в лемме, справедливо для любого $\tau\in[0,T]$, то из неравенства (5) при $f=0$, $\phi=0$, $\psi=0$ следует, что не может существовать более одного решения задачи (1)–(4).

Аналогично [1] сведём исходную задачу к операторному уравнению.

Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (4). Умножим (1) на $K(x)$ и проинтегрируем по x от 0 до l:

$$\int_0^l K(x)u_{tt}(x,t)dx-\int_0^l K(x)u_{xx}(x,t)dx+\int_0^l K(x)c(x,t)u(x,t)dx=$$
$$=\int_0^l K(x)f(x,t)dx.$$

Вычисляя здесь второй интеграл по частям, с учётом условий (3) и (4) получим

$$-K(l)u_x(l,t)+\int_0^l (K'(x)u_x(x,t)+c(x,t)K(x)u(x,t))dx=\int_0^l K(x)f(x,t)dx.$$

Пусть $u(x,t)$ — решение второй краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями вида (3) и

$$u_x(l,t)=\mu(t) \tag{7}$$

и начальными условиями (2).

Если $\mu(t)$ можно подобрать так, чтобы выполнялось условие (4), то $u(x,t)$ будет решением исходной задачи (1)–(4).

Пусть $\mu(t)\in W_2^1(0,T)$, $\mu(t)\equiv 0$, $t<0$, тогда вторую краевую задачу для уравнения (1) с граничными условиями (3), (7) можно свести к задаче с однородными граничными условиями. Для этого введём новую неизвестную функцию $\tilde{u}(x,t)=$ $=u(x,t)-w(x,t)$, где

$$w(x,t)=\int_0^{l+x-l}\mu(\xi)d\xi.$$

Тогда $\tilde{u}(x,t)$ является решением следующей задачи:

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + c(x,t)\tilde{u} = \tilde{f}(x,t),$$
$$\tilde{u}(x,0) = \phi(x), \quad \tilde{u}_t(x,0) = \psi(x); \qquad \tilde{u}_x(0,t) = 0, \quad \tilde{u}_x(l,t) = 0,$$

где $\tilde{f}(x,t) = f(x,t) - c(x,t)w(x,t)$.

Используя результаты и методы работы [4], можно показать, что если $\tilde{f}_t(x,t) \in L_2(D)$, $K(l) \neq 0$ и $\mu(t) \in W_2^1(0,T)$, то существует единственное решение второй краевой задачи из $W_2^2(D)$.

Пусть $u(x,t) = T(\mu, f, \phi, \psi)$ — решение вспомогательной второй краевой задачи. Тогда, применив условие (4), приходим к уравнению относительно $\mu(t)$:

$$-K(l)\mu(t) + \tilde{l}T(\mu(t)) = G(t), \tag{8}$$

где

$$\tilde{l}V = \int_0^l (K'(x)v_x(x,t) + c(x,t)K(x)v(x,t))dx, \quad G(t) = \int_0^l K(x)f(x,t)dx + \tilde{l}T(f,\phi,\psi).$$

Лемма. *Если $K(l) \neq 0$ и выполняются условия теоремы, то существует единственное решение уравнения* (8).

Доказательство.

Единственность. Предположим, что существуют два решения $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, тогда $\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$-K(l)\mu(t) + \int_0^l (K'(x)\tilde{u}_x(x,t) + c(x,t)K(x)\tilde{u}(x,t))dx = 0, \tag{9}$$

где $\tilde{u}(x,t)$ — решение вспомогательной задачи для однородного уравнения

$$\tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} + c(x,t)\tilde{u} = 0,$$

но $\tilde{u}(x,t)$ является также решением однородной нелокальной задачи и, как доказано выше, $\tilde{u}(x,t) \equiv 0$. Тогда из (9) выполняется равенство $K(l)\mu(t) = 0$, так как $K(l) \neq 0$, то $\mu(t) \equiv 0$.

Существование. Условие $K(l) \neq 0$ позволяет решить уравнение (8) относительно $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \frac{1}{K(l)} \int_0^l (K'(x)u_x(x,t) + C(x,t)K(x)u(x,t))dx - \frac{1}{K(l)} \int_0^l K(x)f(x,t)dx.$$

В силу свойств решения вспомогательной задачи операторы T, $(\partial/\partial x)T$ ограничены, оператор $\tilde{l}V : W_2^2 \to W_2^1$ вполне непрерывен, поэтому оператор

$$A = \frac{1}{K(l)} \int_0^l (K'(x)u_x + c(x,t)K(x)u)dx$$

вполне непрерывен [6], и из единственности решения уравнения (8) следует существование решения, тогда существует единственное решение задачи (1)–(4) $u(x,t)$. □

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность Л. С. Пулькиной за постановку задачи, ценные советы и консультации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Дифференц. уравн.*, 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892; англ. пер.: *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // *Differ. Equ.*, 2004. Vol. 40, no. 7. Pp. 947–953.
2. *Пулькина Л. С.* Нелокальные задачи с интегральными условиями для одномерного волнового уравнения // *Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук*, 2010. Т. 12, № 2. С. 52–58. [*Pul'kina L. S.* Nonlocal problem with integral conditions for one-dimensional wave equation // *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) mezhdunarodnoy akademii nauk*, 2010. Vol. 12, no. 2. Pp. 52–58].
3. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // *Математический журнал (Казахстан)*, 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92. [*Kozhanov A. I., Pul'kina L. S.* On the solvability of some boundary value problems with shift for linear hyperbolic equations // *Matematicheskiy zhurnal (Kazakhstan)*, 2009. Vol. 9, no. 2. Pp. 78–92].
4. *Ладыженска О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с. [*Ladyzhenskaya O. A.* Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973. 407 pp.]
5. *Gårding L.* Cauchy's problem for hyperbolic equations. Helsinki: Mercators Tryckeri, 1958; русск. пер.: *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Иностр. лит., 1961. 120 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 484 с. [*Trenogin V. A.* Functional analysis. Fizmatlit: Nauka, 2002. 484 pp.]

Поступила в редакцию 10/X/2011;
в окончательном варианте — 11/XI/2011.

MSC: 35L20

MIXED PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR THE HYPERBOLIC EQUATION

N. D. Golubeva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: depcy@yandex.ru

In this paper we consider a nonlocal problem with integral condition of the first kind. Existence and uniqueness of a solution of this problem are proved. The proof is based on a priori estimates and auxiliary problem method.

Key words: *nonlocal problem, integral condition, a priori estimates.*

Original article submitted 10/X/2011;
revision submitted 11/XI/2011.

Natali D. Golubeva (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Higher Mathematics and Applied Informatics.