УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА—ДАРБУ

Е. А. Максимова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

Рассмотрена система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу. Получено решение задачи Коши для случая, когда характеристические числа матрицы-коэффициента комплексно-сопряжённые с действительной частью из интервала $(-1/2, 0)$.

Ключевые слова: *метод Римана, задача Коши, система уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу.*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{2G}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $U = (u_1(x,y), u_2(x,y))^\top$ — неизвестная вектор-функция, G — действительная 2×2-матрица.

В работе [1] построена матрица Римана и с её помощью получено решение задачи Коши для системы (1) в случае, когда спектр матрицы G принадлежит интервалу $(-1/2, 1/2)$. В [2] получено решение задачи Коши для случая, когда собственные значения матрицы G — комплексно-сопряжённые числа с действительной частью из интервала $(0, 1/2)$.

Цель данной работы — найти решение задачи Коши для случая, когда матрица G имеет комплексно-сопряжённые собственные значения λ_1, λ_2 с действительной частью из интервала $(-1/2, 0)$: $\lambda_1 = \mu_1 + i\mu_2$, $\lambda_2 = \mu_1 - i\mu_2$, $\mu_1 \in (-1/2, 0)$, $\mu_2 \neq 0$.

Задача Коши. *Найти вектор-функцию* $U(x,y)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

1) $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, *где* $D = \{(x,y) : 0 < -y < x < y+1\}$;

2) $U(x,y)$ *удовлетворяет системе* (1);

3) *выполняются начальные условия*

$$U(x,0) = \tau(x) = (\tau_1(x), \tau_2(x))^\top, \quad x \in [0,1]; \tag{2}$$

$$\lim_{y \to -0} K(y)\frac{\partial U}{\partial y} = \nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))^\top, \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

где

$$K(y) = (-y)^{2G} = (-y)^{2\mu_1}\Big(E\cos(2\mu_2 \ln(-y)) - \frac{G - \mu_1 E}{\mu_2}\sin(2\mu_2\ln(-y))\Big).$$

В характеристических координатах

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y \tag{4}$$

Екатерина Алексеевна Максимова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

область D переходит в область $H = \{(\xi,\eta) : 0 < \xi < \eta < 1\}$, а система (1) редуцируется к системе уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу специального вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{G}{\eta-\xi} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\frac{G}{\eta-\xi} = 0, \tag{5}$$

при этом начальные условия принимают следующий вид:

$$U(\xi,\xi) = \tau(\xi), \quad \xi \in [0,1], \tag{6}$$

$$\lim_{\eta\to\xi+0} K\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial U}{\partial\eta}\right) = \nu(\xi), \quad \xi \in (0,1). \tag{7}$$

Из свойств функции от матрицы [3] следует, что функция-матрица Римана $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ есть вещественная матрица даже в том случае, когда характеристические числа матрицы G комплексно-сопряжённые. Запишем её аналитический вид:

$$R = V^{\mu_1}\Big(\frac{G-\mu_1 E}{\mu_2}\big(\psi(\lambda_1,r)\cos(\mu_2\ln V) + \varphi(\lambda_1,r)\sin(\mu_2\ln V)\big) + \\ + E\big(\varphi(\lambda_1,r)\cos(\mu_2\ln V) + \psi(\lambda_1,r)\sin(\mu_2\ln V)\big)\Big).$$

Здесь

$$V = \frac{(\eta-\xi)^2}{(\eta-\xi_0)(\eta_0-\xi)}, \quad r = -\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\xi_0-\eta)},$$

$$\varphi(\lambda_1,r) = \mathrm{Re}\Big({}_2F_1\Big(\begin{matrix}\mu_1+i\mu_2,\mu_1+i\mu_2\\ 1\end{matrix};r\Big)\Big),$$

$$\psi(\lambda_1,r) = \mathrm{Im}\Big({}_2F_1\Big(\begin{matrix}\mu_1+i\mu_2,\mu_1+i\mu_2\\ 1\end{matrix};r\Big)\Big).$$

Если $U(\xi,\eta)$ является решением системы уравнений (5), а $R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ — матрица Римана этой системы уравнений, то, используя свойства матрицы Римана и векторный аналог тождества Грина [4], получаем

$$U_\varepsilon(\xi_0,\eta_0) = \frac{1}{2}(RU)\Big|_{\substack{\xi=\eta_0-\varepsilon\\ \eta=\eta_0}} + \frac{1}{2}(RU)\Big|_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=\xi_0+\varepsilon}} + \\ + \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon} R\left(\frac{\partial U}{\partial\eta} - \frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi - \\ - \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\eta_0-\varepsilon}\left(\frac{\partial R}{\partial\eta} - \frac{\partial R}{\partial\xi} + \frac{4RG}{\xi-\eta}\right)U\Big|_{\eta=\xi+\varepsilon} d\xi = \sum_{k=1}^{4} J_k(\varepsilon). \tag{8}$$

В равенстве (8) непосредственно переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$ нельзя, так как все внеинтегральные члены стремятся к бесконечности, а интеграл $J_4(\varepsilon)$ не существует. Интегрируя по частям $J_4(\varepsilon)$, применяя формулу автотрансформации и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим решение задачи Коши (6), (7) для системы уравнений (5) в области H, которое имеет вид

$$U(\xi,\eta) = -2^{2\mu_1-1}\left(K_1\psi(\lambda_1,1) + E\varphi(\lambda_1,1)\right)\int_\xi^\eta \sigma^{-\mu_1}(t)\cos\left(\mu_2\ln\frac{4}{\sigma(t)}\right)\nu(t)dt - \\ - 2^{2\mu_1-1}\left(K_1\varphi(\lambda_1,1) - E\psi(\lambda_1,1)\right)\int_\xi^\eta \sigma^{-\mu_1}(t)\sin\left(\mu_2\ln\frac{4}{\sigma(t)}\right)\nu(t)dt +$$

$$
\begin{gathered}
+ (\eta-\xi)^{-2\mu_1-1}\left[\frac{1}{2}\left(E\psi(-\lambda_1,1)-K_1\varphi(-\lambda_1,1)\right)\times\right.\\
\times\int_\xi^\eta \sigma^{\mu_1}(t)\sin\left(\mu_2\ln\frac{(\xi-\eta)^2}{\sigma(t)}\right)(\eta+\xi-2t)\tau'(t)dt-\\
-\frac{1}{2}\left(E\varphi(-\lambda_1,1)+K_1\psi(-\lambda_1,1)\right)\int_\xi^\eta \sigma^{\mu_1}(t)\cos\left(\mu_2\ln\frac{(\xi-\eta)^2}{\sigma(t)}\right)(\eta+\xi-2t)\tau'(t)dt+\\
+\left(K_2\varphi(-\lambda_1,1)+K_3\psi(-\lambda_1,1)\right)\int_\xi^\eta \sigma^{\mu_1}(t)\cos\left(\mu_2\ln\frac{(\xi-\eta)^2}{\sigma(t)}\right)\tau(t)dt+\\
\left.+\left(K_2\psi(-\lambda_1,1)-K_3\varphi(-\lambda_1,1)\right)\int_\xi^\eta \sigma^{\mu_1}(t)\sin\left(\mu_2\ln\frac{(\xi-\eta)^2}{\sigma(t)}\right)\tau(t)dt\right], \quad (9)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
K_1=\frac{G-\mu_1E}{\mu_2}, \quad K_2=2G+E,\\
K_3=(1+2\mu_1)K_1-2\mu_2E, \quad \sigma(t)=(t-\xi)(\eta-t),\\
\varphi(\lambda_1,1)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\lambda_1,1)}{(1)_n n!}, \quad \psi(\lambda_1,1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(\lambda_1,1)}{(1)_n n!},\\
\varphi_{n+1}(\lambda_1,1)=((\mu_1+n)^2-\mu_2^2)\varphi_n(\lambda_1,1)-2\mu_2(\mu_1+n)\psi_n(\lambda_1,1),\\
\psi_{n+1}(\lambda_1,1)=((\mu_1+n)^2-\mu_2^2)\psi_n(\lambda_1,1)+2\mu_2(\mu_1+n)\varphi_n(\lambda_1,1),\\
\varphi_1(\lambda_1,1)=\mu_1^2-\mu_2^2, \quad \psi_1(\lambda_1,1)=2\mu_1\mu_2.
\end{gathered}
$$

Используя (4), можно записать решение $U(x,y)$ в области D. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если* $\tau(x)\in C^3[0,1]$ *и* $\nu(x)\in C^2(0,1)$, *то задача Коши* (2), (3) *для уравнения* (1) *корректна по Адамару.*

Замечание. *Положив в* (9) $\mu_1=0$, *получим решение задачи Коши для случая мнимых собственных значений матрицы* G.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андреев А. А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа / В сб.: *Дифференциальные уравнения в частных производных*: Сб. тр. мат. кафедр пединститутов РСФСР. Вып. 16. Рязань: Рязан. гос. пед. инст., 1980. С. 9–14. [*Andreev A. A.* On a class of systems of differential equations of hyperbolic type / In: *Partial differential equations*. Ryazan: Ryazan. Gos. Ped. Inst., 1980. Pp. 9–14].
2. *Андреев А. А., Максимова Е. А.* Решение задачи Коши для одной системы гиперболического типа с сингулярными характеристиками / В сб.: *Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием.* Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Математическое моделирование и краевые задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 11–17. [*Andreev A. A, Maksimova E. A.* The solution of the Cauchy problem for one hyperbolic system with singular characteristics / In: *Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation.* Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2011. Pp. 11–17].
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka. 549 pp.]
4. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1966. 164 с.; англ. пер.: *Bitsadze A. V.* Equations of the Mixed Type. New York: Pergamon Press, 1964. 160 pp.

Поступила в редакцию 21/III/2011;
в окончательном варианте — 23/VIII/2011.

MSC: 35L52

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEM OF EULER–POISSON–DARBOUX EQUATIONS

E. A. Maksimova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: katyuha_mak@mail.ru

The system of Euler–Poisson–Darboux equations is considered, the Cauchy problem is solved for the case, when characteristic numbers of matrix–coefficient are complex conjugate and having real part in the interval $(-1/2, 0)$.

Key words: *Riemann method, the Cauchy problem, partial differential equations, Euler–Poisson–Darboux equation.*

Original article submitted 21/III/2011;
revision submitted 23/VIII/2011.

Ekaterina A. Maksimova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.