

# Дифференциальные уравнения

УДК 517.581

## НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О. А. Репин<sup>1,2</sup>, С. М. Заикина<sup>2,3</sup><sup>1</sup> Самарский государственный экономический университет, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.<sup>2</sup> Самарский государственный технический университет, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.<sup>3</sup> Волгоградский государственный университет, 400062, Волгоград, Университетский пр-т, 100.

E-mail's: matstat@mail.ru, svetzai@inbox.ru

*Рассматриваются новые интегральные преобразования, обобщающие классические интегральные преобразования Лапласа, Стильтеса, теории потенциала. Ядра этих преобразований содержат  $(\tau, \beta)$ -обобщённую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию Райта. Приведены формулы обращения новых интегральных преобразований, из равенства типа Парсеваля–Гольдштейна, примеры применения новых интегральных преобразований.*

**Ключевые слова:** интегральные преобразования, равенства Парсеваля–Гольдштейна, теоремы обращения.

**Введение.** Как известно, интегральные преобразования являются одним из наиболее эффективных и успешно используемых аналитических методов решения различных практических задач. Метод интегральных преобразований широко применяется в классических разделах математической физики, в теории дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, в теории автоматического регулирования и управления, в теории массового обслуживания и других областях. Он позволяет свести решение рассматриваемых задач к более простым (см. например [1–6]).

**1. Обобщённые преобразования.** Рассмотрим новые интегральные преобразования с обобщёнными гипергеометрическими функциями и их свойства.

Напомним классические интегральные преобразования:

– интегральное преобразование Лапласа [4]:

$$L\{f(x); y\} = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx; \quad (1)$$

---

Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики<sup>1</sup>; профессор, каф. прикладной математики и информатики<sup>2</sup>. Светлана Михайловна Заикина, аспирант, каф. прикладной математики и информатики<sup>2</sup>; ассистент, каф. компьютерных наук и экспериментальной математики<sup>3</sup>.

– интегральное преобразование теории потенциала (по Виддеру) [5]:

$$P\{f(x); y\} = \int_0^\infty \frac{xf(x)}{x^2 + y^2} dx; \quad (2)$$

– обобщённое интегральное преобразование Стилтеса [4]:

$$S_p\{f(x); y\} = \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)^p} dx. \quad (3)$$

Новые обобщённые преобразования будем получать с помощью  $(\tau, \beta)$ -обобщённой конфлюэнтной гипергеометрической функции  ${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a, c, z)$  [7]:

$${}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a, c, z) = \frac{1}{B(a, c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (c, \tau) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt$$

при  $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(a) > 0$ ;  $\tau, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $\tau > 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\tau - \beta < 1$ ,  $B(a, b)$  — классическая бета-функция [9],  ${}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (c, \tau) \\ (c, \beta) \end{matrix} \middle| zt^\tau \right]$  — частный случай обобщённой гипергеометрической функции Райта [1]:

$${}_p\Psi_q \left[ \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + n\alpha_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + n\beta_j)} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad (4)$$

где  $z \in \mathbb{C}$ ;  $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ ;  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  ( $\alpha_i \neq 0, \beta_j \neq 0$ );  $1 + \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i \geq 0$ .  
Рассмотрим ниже следующие новые интегральные преобразования.

1. Обобщённые интегральные преобразования Лапласа:

$$L_{\gamma_1, \gamma_2}\{f(x); y\} = \int_0^\infty x^{\gamma_2} e^{-(xy)^{\gamma_1}} f(x) dx, \quad (5)$$

$$\tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma}\{f(x); y\} = \int_0^\infty x^{\gamma_2} e_1^{-(xy)^{\gamma_1}} \Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; -b(xy)^{\gamma_1}) f(x) dx, \quad (6)$$

где  $x > 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $f(x) \equiv 0$  при  $x < 0$ ;  $x^{\gamma_2} f(x) < M e^{s_0 x^{\gamma_1}}$ ,  $M > 0$  и  $s_0$  — постоянные числа при  $x > 0$ .

Заметим, что при  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $b = 0$  преобразования (5) и (6) совпадают с классическим преобразованием Лапласа (1).

2. Обобщённые интегральные преобразования Стилтеса:

$$\begin{aligned} P_1^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4}\{f(u); x\} &= \tilde{P}_1\{f(u); x\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{u^{\gamma_2} f(u)}{(x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})^{\gamma_3}} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a_1; \tau); (a_2; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \left( \frac{u^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1}} \right)^{\gamma_4} \right] du = g_1(x), \end{aligned} \quad (7)$$

$$P_2^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4}\{f(u); x\} = \tilde{P}_2\{f(u); x\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{u^{\gamma_2} f(u)}{(x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})^{\gamma_3}} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a_1; \tau); (a_2; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \left( \frac{x^{\gamma_1}}{x^{\gamma_1} + u^{\gamma_1}} \right)^\gamma \right] du = g_2(x), \quad (8)$$

где  $\operatorname{Re} a_1 > 0$ ,  $\operatorname{Re} a_2 > 0$ ,  $\operatorname{Re} c > 0$ ;  $\gamma_i > 0$ ;  $\tau, \beta \in \mathbb{R}$ ;  $\tau > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\tau - \beta < 1$ ;  $b \geq 0$ ;  ${}_2\Psi_1$  — функция вида (4).

При  $b = 0$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = p$  преобразования (7) и (8) совпадают с классическим преобразованием Стилтеса (3).

Если положить  $\gamma_1 = 2$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = 1$ ,  $a_2 = 1$  в (7) и (8), то получим соответственно преобразования  $\tilde{P}_1\{f(u); x\}$ ,  $\tilde{P}_2\{f(u); x\}$ , рассмотренные в работе [12].

**2. Свойства обобщённых интегральных преобразований. Равенства типа Парсеваля—Гольдштейна.** Установим некоторые свойства вышеприведённых обобщённых интегральных преобразований.

**ТЕОРЕМА 1.** *При условиях существования и абсолютной сходимости интегралов (5)–(8) имеют место следующие композиционные соотношения:*

$$L_{\gamma_1, \gamma_2} \{ \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{ g(u); x \}; y \} = \frac{1}{\gamma_1} \Gamma \left( \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} \right) P_1^{\gamma_1, \gamma_2, \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1}, \gamma} \{ g(u); y \}, \quad (9)$$

$$\tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{ L_{\gamma_1, \gamma_2} \{ g(u); x \}; y \} = \frac{1}{\gamma_1} \Gamma \left( \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} \right) P_2^{\gamma_1, \gamma_2, \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1}, \gamma} \{ g(u); y \}. \quad (10)$$

*Доказательство.* Используя равенства (5), (6) и абсолютную сходимость интегралов, получим формулу (9):

$$\begin{aligned} & L_{\gamma_1, \gamma_2} \{ \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{ g(u); x \}; y \} = \\ &= \int_0^\infty x^{\gamma_2} e^{-(xy)^{\gamma_1}} \left( \int_0^\infty u^{\gamma_2} e^{-(xu)^{\gamma_1}} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} (a; c; -b(xu)^{\gamma_1}) g(u) du \right) dx = \\ &= \int_0^\infty u^{\gamma_2} g(u) \left( \int_0^\infty x^{\gamma_2} e^{-x^{\gamma_1}(y^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} (a; c; -b(xu)^{\gamma_1}) dx \right) du = \\ &= \frac{1}{\gamma_2} \int_0^\infty \frac{u^{\gamma_2}}{(y^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})^{\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} - 1}} g(u) \times \\ &\quad \times \left( \int_0^\infty e^{-z} z^{\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} - 1} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} \left( a; c; -b \left( \frac{zu^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1} + u^{\gamma_1}} \right)^\gamma \right) dz \right) du = \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \cdot \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{u^{\gamma_2}}{(y^{\gamma_1} + u^{\gamma_1})^{\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1}}} g(u) \times \\ &\quad \times {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a; \tau); (\frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1}; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \left( \frac{u^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1} + u^{\gamma_1}} \right)^\gamma \right] du = \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \Gamma \left( \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} \right) P_1^{\gamma_1, \gamma, \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1}, \gamma} \{ g(u); y \}. \end{aligned}$$

Формула (10) доказывается аналогично.  $\square$

Для интегральных преобразований вида (5)–(8) получены некоторые равенства типа Парсеваля—Гольдштейна.

ТЕОРЕМА 2. Если функция  $f(x) \in L(0; +\infty)$ ,  $g(x) \in L(0; +\infty)$ , то при условии абсолютной сходимости интегралов справедливы равенства типа Парсеваля—Гольдштейна:

$$\int_0^\infty u^{\gamma_2} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(t); u\} g(u) du = \int_0^\infty t^{\gamma_2} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{g(u); t\} f(t) dt, \quad (11)$$

$$\int_0^\infty x^{\gamma_2} \tilde{P}_1 \{f(t); x\} g(x) dx = \int_0^\infty x^{\gamma_2} \tilde{P}_2 \{g(t); x\} f(x) dx, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\gamma_2} L_{\gamma_1, \gamma_2} \{h(y); x\} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{g(u); x\} dx = \\ = \frac{1}{\gamma_1} \Gamma \left( \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} \right) \int_0^\infty y^{\gamma_2} h(y) \tilde{P}_1^{\gamma_1, \gamma, \frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}, \gamma} \{g(u); y\} dy, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\gamma_2} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(y); x\} L_{\gamma_1, \gamma_2} \{g(u); x\} dx = \\ = \frac{1}{\gamma_1} \Gamma \left( \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} \right) \int_0^\infty y^{\gamma_2} f(y) P_2^{\gamma_1, \gamma, \frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}, \gamma} \{g(u); y\} dy. \end{aligned} \quad (14)$$

*Доказательство.* Докажем, например, равенство (13). Используя равенства (5), (6), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\gamma_2} L_{\gamma_1, \gamma_2} \{h(y); x\} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{g(u); x\} dx = \\ = \int_0^\infty y^{\gamma_2} h(y) \left( \int_0^y x^{\gamma_2} e^{-(xy)^{\gamma_1}} \left( \int_0^\infty u^{\gamma_2} e^{-(xu)^{\gamma_1}} \times \right. \right. \\ \times {}_1\Phi_1^{\tau, \beta} (a; c; -b(xu)^{\gamma_1}) g(u) du \Big) dx \Big) dy = \\ = \int_0^\infty y^{\gamma_2} h(y) L_{\gamma_1, \gamma_2} \{ \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{g(u); x\}; y \} dy. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая равенство (9), окончательно получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\gamma_2} L_{\gamma_1, \gamma_2} \{h(y); x\} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{g(u); x\} dx = \\ = \frac{1}{\gamma_1} \Gamma \left( \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_1} \right) \int_0^\infty y^{\gamma_2} h(y) \tilde{P}_1^{\gamma_1, \gamma, \frac{\gamma_2+1}{\gamma_1}, \gamma} \{g(u); y\} dy. \end{aligned}$$

Равенства (11), (12) и (14) доказываются аналогично.  $\square$

### 3. Формулы обращения.

ТЕОРЕМА 3. При условиях существования интегрального преобразования  $P_1^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} \{f(x); y\}$  справедлива следующая формула обращения для (7):

$$f(y) = \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma}^{-1} \left\{ L_{\gamma_1, \gamma_2, a_2-1}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma(a_2)}{\gamma_1} g_1(z); x \right\}; y \right\}, \quad (15)$$

где  $g_1(z) = P_1^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} \{f(u); z\}$ ;  $\gamma_4 = \gamma$ ,  $\gamma_3 = a_2$ .

*Доказательство.* При доказательстве формулы (15) используется равенство

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\gamma_1 \cdot a_2 - 1} e^{-(y^{\gamma_1} + z^{\gamma_1})x^{\gamma_1}} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a; c; -b(xy)^{\gamma\gamma_1}) dx = \\ = \frac{1}{\gamma_1} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)} \frac{1}{(y^{\gamma_1} + z^{\gamma_1})^{a_2}} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a; \tau); (a_2; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \left( \frac{y^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1} + z^{\gamma_1}} \right)^\gamma \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (16) проверяется непосредственными вычислениями.

Положим в (7)  $\gamma_4 = \gamma$ ,  $\gamma_3 = a_2$ . Учитывая равенство (16), будем иметь

$$\begin{aligned} P_1^{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} \{f(y); z\} &= g_1(z) = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^\infty \frac{y^{\gamma_2} f(y)}{(z^{\gamma_1} + y^{\gamma_1})^{a_2}} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a; \tau); (a_2; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \left( \frac{y^{\gamma_1}}{y^{\gamma_1} + z^{\gamma_1}} \right)^\gamma \right] dy = \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^\infty \frac{y^{\gamma_2} f(y)}{(z^{\gamma_1} + y^{\gamma_1})^{a_2}} \left( \frac{\gamma_1 \Gamma(a_1) (z^{\gamma_1} + y^{\gamma_1})^{a_2}}{\Gamma(c)} \times \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty x^{\gamma_1 \cdot a_2 - 1} e^{-(y^{\gamma_1} + z^{\gamma_1})x^{\gamma_1}} {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a_1; c; -b(xy)^{\gamma\gamma_1}) dx \Big) dy = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a_2)} \int_0^\infty f(y) \left( \gamma_1 \int_0^\infty x^{\gamma_1 \cdot a_2 - 1} y^{\gamma_2} e^{-(y^{\gamma_1} + z^{\gamma_1})x^{\gamma_1}} \times \right. \\ &\quad \times {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a_1; c; -b(xy)^{\gamma\gamma_1}) dx \Big) dy = \\ &= \frac{\gamma_1}{\Gamma(a_2)} \int_0^\infty x^{\gamma_1 \cdot a_2 - 1} e^{-(xz)^{\gamma_1}} \left( \int_0^\infty y^{\gamma_2} e^{-(xy)^{\gamma_1}} \times \right. \\ &\quad \times {}_1\Phi_1^{\tau, \beta}(a_1; c; -b(xy)^{\gamma\gamma_1}) f(y) dy \Big) dx = \\ &= \frac{\gamma_1}{\Gamma(a_2)} \int_0^\infty x^{\gamma_1 \cdot a_2 - 1} e^{-(xz)^{\gamma_1}} \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(y); x\} dx = \\ &= \frac{\gamma_1}{\Gamma(a_2)} L_{\gamma_1, \gamma_2 a_2 - 1} \{ \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(y); x\}; z \}, \end{aligned}$$

откуда следует равенство (15).  $\square$

**ТЕОРЕМА 4.** При условии существования интегрального преобразования  $\tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(x); y\}$  справедлива следующая формула обращения для обобщённого интегрального преобразования Лапласа:

$$f(u) = \frac{\gamma_1 \Gamma(a)}{\Gamma(c)} u^{-\gamma_2} \int_0^\infty (ux)^{-1} g(x) K(ux) dx, \quad (17)$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{\xi(s)} ds, \quad g(y) = \tilde{L}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma} \{f(x); y\},$$

$$\xi(s) = {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a; \tau); (\frac{s}{\gamma_1}; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \right].$$

Доказательство теоремы дано в [13].

Нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. При условиях существования и абсолютной сходимости интегралов имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\mu-1} \tilde{L}_{m,m-1,\gamma} \{e^{-tu} g(t); x\} dx = \\ = 1/m \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)^2} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a; \tau); (\frac{\mu}{m}; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \right] \cdot L\{t^{m-1-\mu} g(t); u\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $L$  — классическое преобразование Лапласа (1).

**4. Применения обобщённых интегральных преобразований.** Остановимся на некоторых применениях обобщённых интегральных преобразований. С помощью равенства (18) и таблицы значений преобразования Лапласа [4] можно вычислить значения интегралов, стоящих в левой части равенства (18).

ПРИМЕР 1. Пусть  $g(t) = t^{\nu+\mu-m} e^{-\alpha t}$  ( $\operatorname{Re} \nu > 0$ ). Тогда, учитывая [4]

$$L\{t^{m-1-\mu} g(t); u\} = L\{t^{\nu-1} e^{-\alpha t}; u\} = \Gamma(\nu)(u + \alpha)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} u > -\operatorname{Re} \alpha,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\mu-1} \tilde{L}_{m,m-1,\gamma} \{t^{\nu+\mu-m} e^{-(\alpha+u)t}; x\} dx = \\ = 1/m \frac{\Gamma(c)\Gamma(\nu)}{\Gamma(a)^2} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a; \tau); (\frac{\mu}{m}; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \right] \cdot (u + \alpha)^{-\nu}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Пусть  $g(t) = t^{\mu-m} \sin \alpha t \cdot \sin \beta t$ . Учитывая [4]

$$L\{t^{-1} \sin \alpha t \cdot \sin \beta t; u\} = 2^{-2} \ln \frac{u^2 + (\alpha + \beta)^2}{u^2 + (\alpha - \beta)^2}, \quad \operatorname{Re} u > |\operatorname{Im}(\pm \alpha \pm \beta)|,$$

имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{\mu-1} \tilde{L}_{m,m-1,\gamma} \{t^{\mu-m} e^{-tu} \sin \alpha t \cdot \sin \beta t; x\} dx = \\ = 2^{-2} 1/m \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)^2} {}_2\Psi_1 \left[ \begin{matrix} 1(a; \tau); (\frac{s}{\gamma_1}; \gamma) \\ (c; \beta) \end{matrix} \middle| -b \right] \cdot \ln \frac{u^2 + (\alpha + \beta)^2}{u^2 + (\alpha - \beta)^2}. \end{aligned}$$

Если в (6) положить  $\gamma_2 = m - 1$ ,  $\gamma - 1 = m$ ,  $b = 0$ , то получим

$$L_m\{f(t); s\} = \int_0^\infty t^{m-1} e^{-s^m t^m} f(t) dt = F(s). \quad (19)$$

При  $m = 1$  приходим к классическому преобразованию Лапласа (1).

Учитывая, что  $L_m\{f(x); y\} = m^{-1}L\{f(\sqrt[m]{y}); y^m\}$ , получим

$$f(x) = L_m^{-1}\{F(s); x\} = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sqrt[m]{s}) e^{sx^m} ds. \quad (20)$$

Формула (20) есть формула обращения обобщённого интегрального преобразования Лапласа  $L_m\{f(x); y\}$ .

Дадим некоторые применения обобщённых интегральных преобразований для решения дифференциальных уравнений. Применяя формулы обращения интегральных преобразований, можно получить решения дифференциальных уравнений в частных производных [6].

Пусть

$$\delta_{m,t} = \frac{1}{t^{m-1}} \frac{d}{dt},$$

тогда

$$\delta_{m,t}^2 = (1-m) \frac{1}{t^{2m-1}} \frac{d}{dt} + \frac{1}{t^{2m-2}} \frac{d^2}{dt^2}. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 6. Если  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  — непрерывны,  $f^{(n)}$  — кусочно-непрерывна на интервале  $t \geq 0$ , а функция  $f$  имеет вид  $e^{c^m t^m}$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\begin{aligned} \text{а) } L_m\{\delta_{m,t}^n f(t); s\} &= m^n s^{mn} L_m\{f(t); s\} - m^{n-1} s^{m(n-1)} f(0^+) - \\ &- m^{n-2} s^{m(n-2)} (\delta_{m,t} f)(0^+) - \dots - (\delta_{m,t}^{n-1} f)(0^+) \quad \text{для } n = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{б) } L_m\{t^{mn} f(t); s\} = \frac{(-1)^n}{m^n} \delta_{m,s}^n L_m\{f(t); s\} \quad \text{для } n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 7. Если функция  $f$  — непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную в интервале  $t \geq 0$ , а  $f, f'$  имеют вид  $e^{c^m t^m}$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $c$  — постоянная, то

$$\text{а) } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} m s^m F(s); \quad \text{б) } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} m s^m F(s),$$

где  $F(s) = L_m\{f(t); s\}$ .

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (1-m) \frac{\partial u}{\partial t} - t^{2m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^m x \quad (x > 0, t > 0), \quad (24)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 1, \quad u'_x(x, 0) = 0. \quad (25)$$

Разделим обе части уравнения (24) на  $t^{2m-1}$ :

$$\frac{1}{t^{2m-2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (1-m) \frac{1}{t^{2m-1}} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x}{t^{m-1}}.$$

Учитывая (21), имеем

$$\delta_{m,t}^2(u(x, t)) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x}{t^{m-1}}. \quad (26)$$

Применяя к обеим частям уравнения (26) преобразование  $L_m$ , получим

$$U''_{xx}(x, s) - m^2 s^{2m} U(x, s) = \frac{\Gamma(1/m)}{ms} x, \quad (27)$$

где  $U(x, s) = L_m\{u(x, t); s\}$ .

Решением уравнения (27) является функция

$$U(x, s) = c_1 e^{ms^m} + c_2 e^{-ms^m} - \frac{\Gamma(1/m)}{m^3 s^{2m+1}} x.$$

Учитывая теорему 7 и (25), находим

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{ms^m}.$$

Применяя формулу обращения для интегрального преобразования (19), получим решение уравнения (24)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{1}{s} e^{-ms} - \frac{\Gamma(1/m)}{m^2 s^{2+1/m}} x \right] \cdot e^{st^m} ds.$$

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transforms: Theory and Applications / Analytical Methods and Special Functions. Vol. 9. Washington: Charman and Hall/CRC, 2004. 390 pp.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 590 с.; англ. пер.: Ditkin V. A., Prudnikov A. P. Integral transforms and operational calculus / International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics. Vol. 78. Oxford: Pergamon Press, 1965. 529 pp.
3. Вірченко Н. О. Парні (N-арні) інтегральні рівняння (укр.). Київ: Задруга, 2009. 476 с. [Virchenko N. A. Paired (N-ary) integral equations. Kiev: Zadruga, 2009. 476 pp.]
4. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Tables of Integral Transforms. Vol. 1 / Bateman Manuscript Project / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1954. 391 pp.; русск. пер.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.
5. Tranter C. J. Integral transforms in mathematical physics. New York: John Wiley and Sons Inc., 1956. 133 pp.; русск. пер.: Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: ГИТТЛ, 1956. 204 с.
6. Маричев О. И., Килбас А. А., Репин О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2008. 276 с. [Marichev O. I., Kilbas A. A., Repin O. A. Boundary value problems for partial differential equations with discontinuous coefficients. Samara: Izd-vo Samar. Gos. Èkon. Un-ta, 2008. 276 pp.]
7. Virchenko N. O. On the generalized confluent hypergeometric function and its application // Fract. Calc. Appl. Anal., 2006. Vol. 9, no. 2. Pp. 101–108.
8. Srivastava, H. M., Yürekli O. A theorem on Widder's potential transform and its applications // J. Math. Anal. Appl., 1991. Vol. 154, no. 2. Pp. 585–593.
9. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher transcendental functions. Vol. I / Bateman Manuscript Project / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.



10. Wright E. M. The asymptotic expansion of generalized hypergeometric functions // *J. London Math. Soc.*, 1935. Vol. 10, no. 1. Pp. 286–293.
11. Goldstein S. Operational representations of Whittaker's confluent hypergeometric function and Weber's parabolic cylinder function // *Proc. London Math. Soc. Ser. 2*, 1932. Vol. 34, no. 1. Pp. 103–125.
12. Вірченко Н. О. Заїкина С. М. Узагальнені інтегральні перетворення і їх застосування (укр.) // *Наукові вісті НТУУ "КПІ"*, 2008. № 6(62). С. 133–137. [Virchenko N. O., Zaikina S. M. The generalized integral transformations and their application // *Naukovi visti NTUU "KPI"*, 2008. no. 6(62). Pp. 133–137].
13. Вірченко Н. О. Заїкина С. М. Про нові інтегральні перетворення (укр.) // *Допов. НАН Укр.*, 2010. № 5. С. 11–17. [Virchenko N. O., Zaikina S. M. On new generalized integral transforms // *Dopov. NAN Ukr.*, 2010. no. 5. Pp. 11–17].

MSC: 33C15; 44A15

## SOME NEW GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORMATIONS AND THEIR APPLICATION IN DIFFERENTIAL EQUATIONS THEORY

O. A. Repin<sup>1,2</sup>, S. M. Zaikina<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Samara State Economic University,  
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russia.

<sup>2</sup> Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

<sup>3</sup> Volgograd State University,  
100, Universitetskiy pr-t, Volgograd, 400062, Russia.

E-mail's: matstat@mail.ru, svetzai@inbox.ru

*We present new integral transforms, generalized the classical Laplace, Stieltjes and Widder integral transforms in the potential theory. The  $(\tau, \beta)$ -generalized confluent hypergeometric functions are the kernels of these integral transforms. Inverse formulas for new integral transforms are proved. Relations of the Parseval–Goldstein type are established. Some examples of applications of the new integral transforms are given.*

**Key words:** *integral transforms, Parseval–Goldstein type identity, inversion theorems.*

Original article submitted 29/XII/2010;  
revision submitted 20/IV/2011.

---

Oleg A. Repin (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Statistics & Econometrics<sup>1</sup>; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science<sup>2</sup>. Svetlana M. Zaikina, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science<sup>2</sup>; Assistant, Dept. of Computer Science and Experimental Mathematics<sup>3</sup>.