

УДК 517.983

ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЁРТКИ
С ОСОБЕННОСТЯМИ ЯДЕР НА СФЕРАХ

А. В. Гиль, А. И. Задорожный, В. А. Ногин

Южный федеральный университет,
Факультет механики, математики и компьютерных наук,
344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а.

E-mail: gil-alexeu@yandex.ru

В рамках пространств Харди H^p изучаются многомерные операторы свёртки с ядрами, имеющими степенные особенности на конечном объединении сфер в $\mathbb{R}^n$. Получены необходимые и достаточные условия ограниченности таких операторов из H^p в H^q , $0 < p \leq q < \infty$, из H^p в BMO , и из BMO в BMO .

Ключевые слова: свёртка, сфера, осциллирующий символ, BMO , $(H^p - H^q)$ -оценки, мультипликатор, обобщённая функция.

1. Предварительные сведения. В данной работе рассматривается оператор свёртки

$$M_{\theta}^{\vec{\beta}} \varphi = m_{\theta}^{\vec{\beta}} * \varphi \quad (1)$$

с ядром, имеющим степенные особенности на конечном объединении сфер:

$$m_{\theta}^{\vec{\beta}}(y) = \theta_1(|y|)(r_1^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_1-1} \times \dots \\ \dots \times \theta_{s-1}(|y|)(r_{s-1}^2 - |y|^2 + i0)^{\beta_{s-1}-1} \cdot \theta_s(|y|)(1 - |y|^2)_+^{\beta_s-1}, \quad (2)$$

где $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$, $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{s-1} < r_s = 1$. Здесь $\theta_j(r)$ — гладкие функции, $\theta_j(r_j) \neq 0$.

Операторы вида (1) возникают при решении задачи Коши для волнового уравнения (см. [1–3]).

В настоящее время имеется ряд работ по $(H^p - H^q)$ -оценкам для операторов свёртки со степенными особенностями ядер на сферах (см. [4–9]). Случай особенностей ядер на нескольких сферах рассматривался ранее только в [6]. Однако развитый в [6] метод не охватывал наиболее трудный случай, когда $0 < p < 1$. Заметим также, что символ оператора вида (2) осциллирует на бесконечности, что используется при получении указанных оценок.

Через $H^p = H^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < \infty$, обозначим множество всех $\mathcal{S}'$ -распределений таких, что

$$f^+(x) = \sup_{0 < \varepsilon < \infty} |(f * \varphi_{\varepsilon})(x)| \in L^p,$$

где $\varphi \in \mathcal{S}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \neq 0$, $\varphi_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ и $(f * \varphi_{\varepsilon})(x) = \langle f, \varphi_{\varepsilon}(x - \cdot) \rangle$.

Положим $\|f\|_{H^p} = \|f^+\|_{L^p}$ (см. [4, р. 269]). Заметим, что при $1 < p < \infty$ пространство H^p изоморфно L^p .

Алексей Викторович Гиль (к.ф.-м.н.), ст. преподаватель, каф. дифференциальных и интегральных уравнений. Анатолий Иванович Задорожный, д.ф.-м.н., доц., зав. кафедрой, каф. дифференциальных и интегральных уравнений. Владимир Александрович Ногин, к.ф.-м.н., доц., доцент, каф. дифференциальных и интегральных уравнений.

Через $\text{ВМО} = \text{ВМО}(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех локально интегрируемых функций, для которых

$$\|f\|_{\text{ВМО}} = \sup_B \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \right\} < \infty,$$

где $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx$ и супремум берутся по всем шарам B из $\mathbb{R}^n$. Заметим, что пространство ВМО является сопряжённым к H^1 (см. [4, р. 271]).

2. Основные результаты. На $(1/p, 1/q)$ -плоскости рассмотрим множество

$$\mathcal{L}(\beta, n) = \left\{ \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right), 0 < p \leq q < \infty : \frac{1}{p} - \frac{n}{q} \leq \beta, \text{ если } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \right. \\ \left. \text{и } \frac{n}{p} - \frac{1}{q} \leq \beta + (n-1), \text{ если } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1 \right\}.$$

Через $\mathcal{H}(M_{\theta}^{\bar{\beta}})$ обозначим множество всех пар $(1/p, 1/q)$, для которых оператор (1) ограничен из H^p в H^q .

Для оператора (1) справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$, $\beta_0 = \min\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\}$. Тогда

$$\mathcal{L}(\beta_0, n) \subset \mathcal{H}(M_{\theta}^{\bar{\beta}}). \quad (3)$$

Доказательство. Заметим, что рассматриваемая задача сводится к случаю, когда $s = 2$ в формуле (2). В указанном случае докажем, что

$$\widehat{m_{\theta}^{\bar{\beta}}}(\xi) \in \mathcal{M}(H^p, H^q), \quad (1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_0, n), \quad (4)$$

где $\mathcal{M}(H^p, H^q)$ — класс мультипликаторов Фурье, порождающих ограниченные операторы из H^p в H^q . Тогда с учётом замечания 2.3 из [4] получаем, что оператор (1) ограничен из H^p в H^q .

Представим оператор $M_{\theta}^{\bar{\beta}}$ в виде

$$(M_{\theta}^{\bar{\beta}} \varphi)(x) = (M_{\theta}^{\bar{\beta}, 0} \varphi)(x) + (M_{\theta, 1}^{\beta_1} \varphi)(x) + (M_{\theta, 2}^{\beta_1} \varphi)(x) + (S_{\theta}^{\beta_2} \varphi)(x),$$

где

$$(M_{\theta}^{\bar{\beta}, 0} \varphi)(x) = \int_{|y| \leq 1} (1 - \omega_1(|y|))(1 - \omega_2(|y|)) m_{\theta}^{\bar{\beta}}(y) \varphi(x - y) dy, \\ (M_{\theta, 1}^{\beta_1} \varphi)(x) = \int_{r_1 - \delta_1 \leq |y| \leq r_1} (r_1 - |y|)^{\beta_1 - 1} u_1(|y|) \varphi(x - y) dy, \\ (M_{\theta, 2}^{\beta_1} \varphi)(x) = e^{i\pi(\beta_1 - 1)} \int_{r_1 \leq |y| \leq r_1 + \delta_1} (|y| - r_1)^{\beta_1 - 1} u_1(|y|) \varphi(x - y) dy, \\ u_1(|y|) = (r_1 + |y|)^{\beta_1 - 1} \omega_1(|y|) \theta_1(|y|) (1 - \omega_2(|y|)) \theta_2(|y|) (1 - |y|^2)^{\beta_2 - 1},$$

$$(S_{\theta}^{\beta_2} \varphi)(x) = \int_{1-\delta_2 \leq |y| \leq 1} (1 - |y|)^{\beta_2-1} u_2(|y|) \varphi(x - y) dy,$$

$$u_2(|y|) = (1 - \omega_1(|y|)) \theta_1(|y|) \omega_2(|y|) \theta_2(|y|) e^{i\pi(\beta_1-1)} (1 + |y|)^{\beta_2-1} (|y|^2 - r_1^2)^{\beta_1-1},$$

а функции $\omega_j(r) \in C^\infty[0, 1]$ таковы, что $0 \leq \omega_j(r) \leq 1$, $\omega_j(r) = 0$, если $r \notin [r_j - \delta_j, r_j + \delta_j]$ и $\omega_j(r) = 1$, если $r \in [r_j - \delta_j/2, r_j + \delta_j/2]$, $0 < \delta_j < 1$, $j = 1, 2$; $r_2 = 1$, $0 < r_1 - \delta_1 < r_1 < r_1 + \delta_1 < 1 - \delta_2 < 1$.

Рассмотрим оператор $M_{\theta}^{\bar{\beta}, 0}$. Введём обозначения

$$m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}(y) = (1 - \omega_1(|y|)) (1 - \omega_2(|y|)) m_{\theta}^{\bar{\beta}}(y),$$

$$u_3(\rho) = (2\pi)^{n/2} (r_1^2 - \rho^2 + i0)^{\beta_1-1} (1 - \rho^2)^{\beta_2-1} \theta_1(\rho) (1 - \omega_1(\rho)) \theta_2(\rho) (1 - \omega_2(\rho)).$$

Запишем $\widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi)$ в виде

$$\widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{1-\delta_2/2} \rho^{n-1} u_3(\rho) d\rho \int_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi \cdot \sigma)} d\sigma.$$

Имеем

$$\widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi) = (1 - v(|\xi|^2)) \widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi) + v(|\xi|^2) \widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi).$$

В силу теоремы Е из [4, р. 282] заключаем, что

$$(1 - v(|\xi|^2)) \widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi) \in \mathcal{M}(H^p, H^q), \quad 0 < p \leq q < \infty. \quad (5)$$

Рассмотрим $v(|\xi|^2) \widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi)$. Применив формулу

$$\int_{S^{n-1}} e^{i(x \cdot \sigma)} d\sigma = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|x|^{n/2-1}} J_{n/2-1}(|x|) \quad (6)$$

(см. [10], формула (25.13)), получаем

$$v(|\xi|^2) \widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi) = \frac{v(|\xi|^2)}{|\xi|^{n/2-1}} \int_0^{1-\delta_2/2} u_3(\rho) \rho^{n/2} J_{n/2-1}(\rho|\xi|) d\rho. \quad (7)$$

Проинтегрировав по частям l раз интеграл в (7), будем иметь

$$\begin{aligned} v(|\xi|^2) \widehat{m_{\theta, 0}^{\bar{\beta}}}(\xi) &= \frac{(-1)^l v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+l}} \int_0^{1-\delta_2/2} \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \right)^l (\rho u_3(\rho)) \rho^{\frac{n-2}{2}+l} J_{\frac{n-2}{2}+l}(\rho|\xi|) d\rho = \\ &= \frac{v(|\xi|^2) e^{i|\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+\beta_0}} \cdot \frac{(-1)^l \tilde{v}(|\xi|^2) e^{-i|\xi|}}{|\xi|^{l-\beta_0-\frac{1}{2}}} \int_0^{1-\delta_2/2} \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \right)^l (\rho u_3(\rho)) \rho^{\frac{n-2}{2}+l} J_{\frac{n-2}{2}+l}(\rho|\xi|) d\rho. \end{aligned}$$

Положим $l = [\beta_0] + 3 + \max\{[n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})], [\frac{n}{2}]\}$ (см. [4, р. 282], теорема Е).

Заметим, что

$$v(|\xi|^2) e^{i|\xi|} \cdot |\xi|^{\frac{1-n}{2}-\beta_0} \in \mathcal{M}(H^p, H^q)$$

в силу утверждения (I-i) теоремы 4.2 [4, р. 284], если $(1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_0, n)$. Кроме того,

$$\frac{(-1)^l \tilde{v}(|\xi|^2) e^{-i|\xi|}}{|\xi|^{l-\beta_0-\frac{1}{2}}} \int_0^{1-\delta_2/2} \left(\frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \right)^l (\rho u_3(\rho)) \rho^{\frac{n-2}{2}+l} J_{\frac{n-2}{2}+l}(\rho|\xi|) d\rho \in \mathcal{M}(H^p, H^p),$$

$0 < p < \infty$, по теореме Е [4, р. 282] и является мультипликатором в $\mathcal{S}$. Тогда

$$v(|\xi|^2) \widehat{m_{\theta,0}^\beta}(\xi) \in \mathcal{M}(H^p, H^q), \quad \text{если } (1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_0, n). \quad (8)$$

Из (5) и (8) следует вложение

$$\mathcal{L}(\beta_0, n) \subset \mathcal{H}(M_{\theta}^{\overline{\beta},0}). \quad (9)$$

Рассмотрим оператор $M_{\theta,1}^{\beta_1}$ с символом

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi) = \int_{r_1-\delta_1}^{r_1} \rho^{n-1} (r_1 - \rho)^{\beta_1-1} u_1(\rho) d\rho \int_{S^{n-1}} e^{i\rho(\xi \cdot \sigma)} d\sigma.$$

Имеем

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi) = (1 - v(|\xi|^2)) \widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi) + v(|\xi|^2) \widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1}}(\xi) \equiv \widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,0}}(\xi) + \widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi).$$

В силу теоремы Е [4, р. 282] заключаем, что

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,0}}(\xi) \in \mathcal{M}(H^p, H^q), \quad 0 < p \leq q < \infty. \quad (10)$$

Рассмотрим $\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi)$. Применив формулу (6) и асимптотическое разложение функции Бесселя [11] с $N = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$, получаем

$$\widehat{m_{\theta,1}^{\beta_1,\infty}}(\xi) = \sum_{k=0}^N (h_1^{\beta_1,k,-}(|\xi|) + h_1^{\beta_1,k,+}(|\xi|)) + R_1^{\beta_1,N,-}(|\xi|) + R_1^{\beta_1,N,+}(|\xi|),$$

где

$$h_1^{\beta_1,k,\pm}(|\xi|) = \frac{\gamma_{k,\pm} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2}+k}} \int_{r_1-\delta_1}^{r_1} \rho^{\frac{n-1}{2}-k} (r_1 - \rho)^{\beta_1-1} u_1(\rho) e^{\pm i\rho|\xi|} d\rho, \quad (11)$$

$$0 \leq k \leq N, \quad \gamma_{0,\pm} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{\mp \frac{i\pi}{4}(n-1)},$$

$$R_1^{\beta_1,N,\pm}(|\xi|) = \frac{B_N^{\pm} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n+1}{2}+N}} \int_{r_1-\delta_1}^{r_1} \frac{\rho^{\frac{n+1}{2}+N} u_1(\rho)}{(r_1 - \rho)^{1-\beta_1}} e^{\pm i\rho|\xi|} Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|\xi|) d\rho, \quad (12)$$

$$Q_{N,\pm}^{(\frac{n-2}{2})}(\rho|\xi|) = \int_0^1 (1-t)^N dt \int_0^{\infty} \exp(i\alpha) e^{-u} u^{\frac{n-1}{2}+N} \left(1 - \frac{ut}{\pm 2i\rho|\xi|} \right)^{\frac{n-5}{2}-N} du.$$

Рассмотрим мультипликатор (11). После замены $r_1 - \rho = \tau$ имеем

$$h_1^{\beta_1, k, \pm}(|\xi|) = \frac{\gamma_{k, \pm} e^{\pm i r_1 |\xi|} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2} + k}} \int_0^{\delta_1} \frac{\tau^{\beta_1-1} u_1(r_1 - \tau)}{(r_1 - \tau)^{k - \frac{n-1}{2}}} e^{\mp i |\xi| \tau} d\tau. \quad (13)$$

Преобразуем мультипликатор (13), используя лемму Эрдеи (см. [12, с. 97]). Будем иметь

$$h_1^{\beta_1, k, \pm}(|\xi|) = \gamma_{k, \pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i r_1 |\xi|} \cdot |\xi|^{\frac{1-n}{2} - k - \beta_1} \cdot \tilde{v}(|\xi|^2) \left(a_{\beta_1}^{k, \mp} + |\xi|^{\beta_1} W_1^{\mp, \beta_1}(|\xi|) \right),$$

где $a_{\beta_1}^{k, \mp} = r_1^{\frac{n-1}{2} + \beta_1 - k - 1} 2^{\beta_1-1} (1 - r_1^2)^{\beta_2-1} \theta_1(r_1) \theta_2(r_1) (\mp i)^{\beta_1} \Gamma(\beta_1)$, $W_1^{\mp, \beta_1}(|\xi|)$ — функция, равная разности двух функций. Первая функция — это исходное интегральное выражение в (13), вторая — $a_{\beta_1}^{k, \mp} |\xi|^{-\beta_1}$. Функция $W_1^{\mp, \beta_1}(|\xi|)$ допускает оценку

$$\left| (W_1^{\pm, \beta}(\lambda))^{(j)} \right| \leq \frac{C^{\pm, j}}{\lambda^{1+\beta+j}}, \quad \lambda > 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

постоянные $C^{\pm, j}$ не зависят от λ . Заметим, что

$$v(|\xi|^2) e^{\pm i r_1 |\xi|} \cdot |\xi|^{\frac{1-n}{2} - \beta_1} \in \mathcal{M}(H^p, H^q)$$

в силу утверждения (I-i) теоремы 4.2 [4, р. 284], если $(1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_1, n)$. Кроме того,

$$\gamma_{k, \pm} \tilde{v}(|\xi|^2) |\xi|^{\beta_1} W_1^{\mp, \beta_1}(|\xi|) \in \mathcal{M}(H^p, H^p), \quad 0 < p < \infty,$$

по теореме E [4, р. 282] и является мультипликатором в $\mathcal{S}$. Тогда

$$h_1^{\beta_1, 0, \pm}(|\xi|) \in \mathcal{M}(H^p, H^q), \quad \text{если} \quad (1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_1, n).$$

Аналогично доказывается, что $h_1^{\beta_1, k, \pm}(|\xi|) \in \mathcal{M}(H^p, H^q)$, $1 \leq k \leq N$, если $(1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_1 + 1, n)$.

Рассмотрим (12). После замены $r_1 - \rho = \tau$ получаем

$$R_1^{\beta_1, N, \pm}(|\xi|) = \frac{B_N^{\pm} e^{\pm i r_1 |\xi|} v(|\xi|^2)}{|\xi|^{\frac{n-1}{2} + N + 1}} \int_0^{\delta} \frac{\tau^{\beta_1-1} u_1(r_1 - \tau)}{(r_1 - \tau)^{N+1 - \frac{n-1}{2}}} e^{\mp i |\xi| \tau} Q_{N, \pm}^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}((r_1 - \tau)|\xi|) d\tau.$$

Применяя лемму Эрдеи, будем иметь

$$R_1^{\beta_1, N, \pm}(|\xi|) = \frac{B_N^{\pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i r_1 |\xi|}}{|\xi|^{\frac{n-1}{2} + N + 1 + \beta_1}} \cdot \tilde{v}(|\xi|^2) \left(g_{\beta_1}^{N+1, \mp}(|\xi|) + |\xi|^{\beta_1} W_1^{\mp, \beta_1}(|\xi|) \right),$$

где $g_{\beta_1}^{N+1, \mp}(|\xi|) = a_{\beta_1}^{N+1, \mp} \cdot Q_{N, \pm}^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(r_1 |\xi|)$. Тогда

$$B_N^{\pm} v(|\xi|^2) e^{\pm i r_1 |\xi|} \cdot |\xi|^{-\frac{n+1}{2} - N - \beta} \in \mathcal{M}(H^p, H^q),$$

если $(1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_1 + 1, n)$, в силу утверждения (I-i) теоремы 4.2 [4, р. 282]. Кроме того,

$$\tilde{v}(|\xi|^2) \left(g_{\beta_1}^{N+1, \mp}(|\xi|) + |\xi|^{\beta_1} W_1^{\mp, \beta_1}(|\xi|) \right) \in \mathcal{M}(H^p, H^p), \quad 0 < p < \infty,$$

по теореме Е [4, р. 282] и является мультипликатором в $\mathcal{S}$. Тогда $R_1^{\beta_1, N, \pm}(|\xi|) \in \mathcal{M}(H^p, H^q)$, если $(1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_1 + 1, n)$.

Резюмируя изложенное, получаем, что

$$\widehat{m_{\theta, 1}^{\beta_1, \infty}}(\xi) \in \mathcal{M}(H^p, H^q), \quad \text{если} \quad (1/p, 1/q) \in \mathcal{L}(\beta_1, n), \quad (14)$$

откуда с учётом (10) следует вложение

$$\mathcal{L}(\beta_1, n) \subset \mathcal{H}(M_{\theta, 1}^{\beta_1}). \quad (15)$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$\mathcal{L}(\beta_1, n) \subset \mathcal{H}(M_{\theta, 2}^{\beta_1}), \quad \text{и} \quad \mathcal{L}(\beta_2, n) \subset \mathcal{H}(S_{\theta}^{\beta_2}). \quad (16)$$

Из (9), (15) и (16) следует (4). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя идею доказательства точности $(H^p - H^q)$ -оценок для мультипликаторных операторов с символами

$$m_b^{\pm}(|\xi|) = v(|\xi|^2) |\xi|^{-b} e^{\pm i|\xi|}, \quad b > 0,$$

где $v(r) \in C^\infty(0, \infty)$, $0 \leq v(r) \leq 1$; $v(r) = 0$, если $r \leq 1$ и $v(r) = 1$, если $r \geq 2$, из [4], можно показать, что знак вложения в (3) можно заменить знаком равенства.

Используя утверждения (I-i) и (II-i) теоремы 4.2 [4, р. 284] и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, заключаем, что справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$, $\beta_0 = \min\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$. Если выполняется одно из условий $1 \leq 1/p \leq 1 + (\beta_0 - 1)/n$ либо $0 < 1/p \leq \min\{1, \beta_0\}$, то оператор (1) ограничен из H^p в BMO .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\beta_j > 0$, $1 \leq j \leq s$. Тогда оператор (1) ограничен из BMO в BMO .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Strichartz R. S Convolutions with kernels having singularities on a sphere // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1970. Vol. 146, no. 2. Pp. 461–471.
2. Sjöstrand S. On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.*, 1970. Vol. 24, no. 3. Pp. 331–348.
3. Peral J. C. L^p estimates for the wave equation // *J. Funct. Anal.*, 1980. Vol. 36, no. 1. Pp. 114–115.
4. Miyachi A. On some singular Fourier multipliers // *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA.*, 1981. Vol. 28, no. 2. Pp. 267–315.

5. Karasev D. N., Nogin V. A. On the $\mathcal{L}$ -characteristic of some potential-type operators with radial kernels, having singularities on a sphere // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2001. Vol. 4, no. 3. Pp. 343–366.
6. Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А. Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // *Изв. нац. акад. наук Армении*, 2003. Т. 38, № 2. С. 37–62; англ. пер.: Karapetyants A. N., Karasev D. N., Nogin V. A. 35–60 // *J. Contemp. Math. Anal.*, 2003. Vol. 38, no. 2.
7. Karasev D. N., Nogin V. A. On the boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels / В сб.: *Math. Nachr.*, Т. 278, 2005. С. 554–574.
8. Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // *Владикавказ. матем. журн.*, 2010. Т. 12, № 3. С. 21–29. [Gil A. V., Nogin V. A. Estimates for some potential-type operators with oscillating symbols // *Vladikavkaz. Matem. Zhurn.*, 2010. Vol. 12, no. 3. Pp. 21–29].
9. Гиль А. В., Ногин В. А. H^p-H^q оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими символами // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион*, 2010. № 5. С. 8–13. [Gil A. V., Nogin V. A. H^p-H^q estimates for some potential-type operators with oscillating symbols // *Izv. vuzov. Sev.-Kav. Region*, 2010. no. 5. Pp. 8–13].
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987. 688 pp.]
11. Watson G. A treatise on the theory of Bessel functions. London: Cambridge University Press, 1922. 804 pp.; русск. пер.: Ватсон Г. Г. Теория бесселевых функций. М.: Иностран. лит., 1949. 798 с.
12. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с. [Fedoryuk M. V. The saddle-point method. Moscow: Nauka, 1977. 368 pp.]

Поступила в редакцию 18/XI/2010;
в окончательном варианте — 18/II/2011.

MSC: 47B38; 30H35, 30H10

ESTIMATES FOR SOME CONVOLUTION OPERATORS WITH SINGULARITIES OF THEIR KERNELS ON SPHERES

A. V. Gil, A. I. Zadorozhnyi, V. A. Nogin

Southern Federal University,
Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science,
8a, Mil'chakova str., Rostov-on-Don, 344090, Russia.

E-mail: gil-alexey@yandex.ru

In the framework of Hardy spaces H^p , we study multidimensional convolution operators whose kernels have power-type singularities on a finite union of spheres in $\mathbb{R}^n$. Necessary and sufficient conditions are obtained for such operators to be bounded from H^p to H^q , $0 < p \leq q < \infty$, from H^p to BMO, and from BMO to BMO.

Key words: convolution, sphere, oscillating symbol, BMO, (H^p-H^q) -estimates, multiplier, distribution.

Original article submitted 18/XI/2010;
revision submitted 18/II/2011.

Alexei V. Gil (Ph.D. (Phys. & Math.)), Senior Lecturer, Dept. of Differential and Integral Equations. Anatoliy I. Zadorozhnyi (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Differential and Integral Equations. Vladimir A. Nogin (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Differential and Integral Equations.