Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 170–180

УДК 517.984

УРАВНЕНИЕ ФАДДЕЕВА И МЕСТОПОЛОЖЕНИЕ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ОДНОГО ТРЁХЧАСТИЧНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Т. Х. Расулов[1,2]***, А. А. Рахмонов***[1]

[1] Бухарский государственный университет,
физико-математический факультет,
Узбекистан, 200100, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.
[2] Университет Берна, философско-научный факультет,
Швейцария, CH-3012, Берн.

E-mail: `rth@mail.ru`, `araxmonov@mail.ru`

Рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трёх частиц на решётке. Описано местоположение существенного спектра оператора H через спектры канальных операторов. Получено уравнение типа Фаддеева для собственных векторов оператора H.

Ключевые слова: *модельный оператор, существенный спектр, оператор канала, уравнение Фаддеева.*

Введение. Исследованию существенного спектра непрерывных и дискретных операторов Шрёдингера посвящены многие работы (см. например [1, 2] и [3,4], соответственно). В настоящей работе рассматривается модельный оператор H, ассоциированный с системой трёх частиц на ν-мерной решётке. Выделены канальные операторы и через спектры канальных операторов описано местоположение существенного спектра оператора H, т. е. выделены двухчастичные и трёхчастичные ветви существенного спектра оператора H. Кроме этого, получен аналог уравнения Фаддеева и его симметризованный вариант для собственных векторов оператора H.

Заметим, что существенный и дискретный спектры, а также уравнение Фаддеева симметричного и несимметричного вариантов модельного оператора H изучены в работах [5–7] в случае, когда V_α (определённый ниже) является частичным интегральным оператором с вырожденным ядром. В данной работе изучается случай, когда оператор V_α является частичным интегральным оператором с невырожденным ядром. Следует отметить, что частично интегральные операторы вида

$$(A_1 f)(x, y) = \int_a^b k_1(s, y) f(x, s) ds, \quad (A_2 f)(x, y) = \int_a^b k_2(x, s) f(s, y) ds,$$

где $f \in L_2([a, b]^2)$, $k_i \in L_2([a, b]^2)$, $i = 1, 2$, часто встречаются в квантовой теории поля. Поэтому исследование спектральных свойств рассматриваемого модельного оператора играет важную роль в современной математической физике.

Здесь и далее в работе, где не оговорено противное, предполагается, что α принимает значения 1 и 2.

Расулов Тулкин Хусенович (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. алгебры и анализа[1]; докторант, математический институт[2]. *Рахмонов Аскар Ахмадович*, студент.

1. Модельный оператор. Пусть $\mathcal{T}^\nu$ — ν-мерный тор, т. е. куб $(-\pi,\pi]^\nu$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathcal{T}^\nu$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^\nu$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^\nu$.

Пусть $L_2(\mathcal{T}^\nu)$ и $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathcal{T}^\nu$ и $(\mathcal{T}^\nu)^2$, соответственно.

В гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$ рассмотрим линейный ограниченный самосопряжённый оператор

$$H = H_0 - V_1 - V_2, \tag{1}$$

где операторы H_0 и V_α определяются по формулам

$$(H_0 f)(p,q) = u(p,q)f(p,q),$$

$$(V_1 f)(p,q) = \int v_1(s,q)f(p,s)ds, \quad (V_2 f)(p,q) = \int v_2(p,s)f(s,q)ds.$$

Здесь $u(\cdot,\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot,\cdot)$ — вещественнозначные непрерывные функции на $(\mathcal{T}^\nu)^2$. Здесь и далее в работе интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования. Будем дополнительно предполагать, что операторы V_1 и V_2 являются положительными и принадлежат пространству операторов со следом.

Известно, что гамильтониан $\hat{H}$ системы трёх произвольных частиц на решётке, в импульсном представлении, действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^\nu)^3)$. После выделения полного квазиимпульса системы $K \in \mathcal{T}^\nu$, используя разложение в прямой операторный интеграл (см. например [3, 4]), изучение спектральных свойств оператора $\hat{H}$ можно свести к исследованию спектральных свойств семейства самосопряжённых ограниченных операторов $\hat{H}(K)$, $K \in \mathcal{T}^\nu$ (трёхчастичных дискретных операторов Шрёдингера), которые действуют в гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$ как

$$\begin{aligned}(\hat{H}(K)f)(p,q) = \big(\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(q) + \varepsilon_3(K-p-q)\big)f(p,q) - \\ - \int \hat{v}_1(p-s)f(s,q)ds - \int \hat{v}_2(s-q)f(p,s)ds - \\ - \int \hat{v}_3(p+q-s)f(s,p+q-s)ds.\end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_i(\,\cdot\,)$, $\hat{v}_i(\,\cdot\,)$ $(i=1,2,3)$ — вещественно-аналитические функции на $\mathcal{T}^\nu$. Если $\hat{v}_3 \equiv 0$, т. е. лишь две из трёх пар частиц имеют нетривиальное взаимодействие, то оператор $\hat{H}(K)$ имеет вид (1). По этой причине оператор H можно рассмотреть как модельный оператор, ассоциированный с системой трёх частиц на ν-мерной решётке.

2. Спектр модели Фридрихса. В этом пункте изучаются некоторые спектральные свойства модели Фридрихса $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$, действующего в гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{T}^\nu)$ по формуле

$$h_\alpha(p) = h_\alpha^0(p) - v_\alpha. \tag{2}$$

Здесь операторы $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ и v_α определяются по следующим правилам:

$$(h_\alpha^0(p)f)(q) = u_\alpha(p,q)f(q),$$
$$(v_1 f)(q) = \int v_1(s,q)f(s)ds, \quad (v_2 f)(q) = \int v_2(q,s)f(s)ds,$$

а функции $u_\alpha(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ определены так:

$$u_1(p,q) = u(p,q), \quad u_2(p,q) = u(q,p).$$

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

Так как $v_\alpha(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — непрерывная функция на $(\mathcal{T}^\nu)^2$, то она квадратично-интегрируема на этом множестве. Это означает, что оператор возмущения v_α оператора $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ является самосопряжённым оператором Гильберта—Шмидта, т. е. компактным оператором. Из теоремы Вейля [1] о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p))$ оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ совпадает с существенным спектром $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha^0(p))$ оператора $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$. Известно, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha^0(p)) = [m_\alpha(p); M_\alpha(p)]$, где числа $m_\alpha(p)$ и $M_\alpha(p)$ определяются равенствами

$$m_\alpha(p) = \min_{q \in \mathcal{T}^\nu} u_\alpha(p,q), \quad M_\alpha(p) = \max_{q \in \mathcal{T}^\nu} u_\alpha(p,q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p)) = [m_\alpha(p); M_\alpha(p)]$.

Замечание. Отметим, что для некоторого $p \in \mathcal{T}^\nu$ существенный спектр оператора $h_\alpha(p)$ может превратится в точку $\{m_\alpha(p)\}$, и, следовательно, для любого $p \in \mathcal{T}^\nu$ мы не можем сказать, что существенный спектр оператора $h_\alpha(p)$ является абсолютно непрерывным. Например, если функция $u(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ имеет вид

$$u(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p+q) + \varepsilon(q),$$

где функция $\varepsilon(\,\cdot\,)$ определяется равенством

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos q_i),\ q = (q_1,\dots,q_\nu) \in \mathcal{T}^\nu \quad \text{и} \quad p = (\underbrace{\pi,\dots,\pi}_{\nu}) \in \mathcal{T}^\nu,$$

то имеем $\sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p)) = \{4\nu\}$.

Лемма 1. *Операторы v_α являются положительными, и положительные квадратные корни $v_\alpha^{1/2}$ этих операторов задаются равенствами*

$$(v_1^{1/2}f)(q) = \int v_1^{1/2}(s,q)f(s)ds, \quad (v_2^{1/2}f)(q) = \int v_2^{1/2}(q,s)f(s)ds, \tag{3}$$

где функция $v_\alpha^{1/2}(\cdot,\cdot)$ есть квадратично-интегрируемое ядро оператора $v_\alpha^{1/2}$.

Доказательство. Из положительности операторов V_α следует, что операторы v_α также являются положительными. Следовательно, каждое нетривиальное собственное значение $\lambda_m^{(\alpha)}$ оператора v_α положительно. В силу теоремы Гильберта—Шмидта имеем разложение

$$v_\alpha = \sum_m \lambda_m^{(\alpha)} (\varphi_m^{(\alpha)}, \,\cdot\,) \varphi_m^{(\alpha)}$$

с условием $\sum_m \lambda_m^{(\alpha)} < \infty$; здесь $\varphi_m^{(\alpha)}$ — собственный вектор оператора v_α, соответствующий собственному значению $\lambda_m^{(\alpha)}$. Пусть $v_\alpha^{1/2}$ — положительный корень оператора v_α. Тогда

$$v_\alpha^{1/2} = \sum_m \sqrt{\lambda_m^{(\alpha)}} (\varphi_m^{(\alpha)}, \,\cdot\,) \varphi_m^{(\alpha)}.$$

В силу условии $\sum_m \lambda_m < \infty$ оператор $v_\alpha^{1/2}$ является оператором Гильберта—Шмидта. Следовательно, ядро $v_\alpha^{1/2}(\,\cdot\,, \,\cdot\,)$ интегрального оператора $v_\alpha^{1/2}$ является квадратично-интегрируемым. □

Пусть I_n — единичный оператор в $L_2((\mathcal{T}^\nu)^n)$, $n = 1, 2$.

Лемма 2. *Положительные корни операторов V_α определяются по формулам*

$$(V_1^{1/2} f)(p, q) = \int v_1^{1/2}(s, q) f(p, s) ds, \quad (V_2^{1/2} f)(p, q) = \int v_2^{1/2}(p, s) f(s, q) ds.$$

Доказательство. Операторы V_α представимы в виде $V_1 = v_1 \otimes I_1$, $V_2 = I_1 \otimes v_2$.

В силу леммы 1 операторы v_α являются положительными, и положительные корни этих операторов определяются по формуле (3). Можно проверить, что $V_1^{1/2} = v_1^{1/2} \otimes I_1$, $V_2^{1/2} = I_1 \otimes v_2^{1/2}$. □

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(h_\alpha^0(p))$, тогда $r_\alpha^0(p;\, z) := (h_\alpha^0 - z I_1)^{-1}$ — резольвента оператора $h_\alpha^0(p)$. При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^\nu$ определим оператор $t_\alpha(p;\, z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p))$, действующий в $L_2(\mathcal{T}^\nu)$ как

$$t_\alpha(p;\, z) := v_\alpha^{1/2} r_\alpha^0(p;\, z) v_\alpha^{1/2}.$$

Можно проверить, что при каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^\nu$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p))$ оператор $t_\alpha(p;\, z)$ принадлежит пространству операторов со следом. Следовательно, $\det[I_1 - t_\alpha(p;\, z)]$ — детерминант оператора $I_1 - t_\alpha(p;\, z)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ и нулями функции $\det[I_1 - t_\alpha(p;\, \cdot\,)]$, $p \in \mathcal{T}^\nu$.

Лемма 3. *При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^\nu$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h_\alpha(p))$ является собственным значением оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ тогда и только тогда, когда* $\det[I_1 - t_\alpha(p;\, z)] = 0$.

Доказательство. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(h_\alpha(p))$ является собственным значением оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ и пусть $f \in L_2(\mathcal{T}^\nu)$ — соответствующая собственная функция. Тогда для f справедливо уравнение

$$(h_\alpha(p) - zI_1)f - v_\alpha f = 0. \tag{4}$$

При любых $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(h_\alpha(p))$ из уравнения (4) для f имеем

$$f = r_\alpha^0(p;\, z)v_\alpha f. \tag{5}$$

Умножая (5) слева на $v_\alpha^{1/2}$ и полагая $\varphi_\alpha = v_\alpha^{1/2} f$, получим, что число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(h_\alpha(p))$ является собственным значением оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $t_\alpha(p;\, z)$.

В силу теоремы Фредгольма число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $t_\alpha(p;\, z)$ тогда и только тогда, когда $\det[I_1 - t_\alpha(p;\, z)] = 0$. $\square$

Из леммы 3 вытекает, что число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(h_\alpha(p))$ принадлежит дискретному спектру оператора $h_\alpha(p)$ тогда и только тогда, когда $\det[I_1 - t_\alpha(p;\, z)] = 0$. Следовательно, верна следующая лемма.

Лемма 4. *Для дискретного спектра $\sigma_{\rm disc}(h_\alpha(p))$ оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ имеет место представление*

$$\sigma_{\rm disc}(h_\alpha(p)) = \big\{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\rm ess}(h_\alpha(p)) : \det[I_1 - t_\alpha(p;\, z)] = 0\big\}, \quad p \in \mathcal{T}^\nu.$$

3. Спектр канальных операторов. Наряду с оператором H рассмотрим также оператор $H_\alpha = H_0 - V_\alpha$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$. Положим

$$m = \min_{p,q \in \mathcal{T}^\nu} u(p,q), \quad M = \max_{p,q \in \mathcal{T}^\nu} u(p,q),$$

$$\sigma_{\rm two}(H_\alpha) = \bigcup_{p \in \mathcal{T}^\nu} \sigma_{\rm disc}(h_\alpha(p)), \quad \sigma_{\rm three}(H_\alpha) = [m; M].$$

Спектр оператора H_α описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для спектра $\sigma(H_\alpha)$ оператора H_α имеет место следующее представление*:

$$\sigma(H_\alpha) = \sigma_{\rm two}(H_\alpha) \cup \sigma_{\rm three}(H_\alpha).$$

Доказательство. Можно проверить, что оператор H_1 (соответственно, H_2) коммутирует с любым оператором умножения на ограниченную функцию $w_1(p)$ (соответственно, $w_2(q)$) в $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$.

Из разложения в прямой интеграл пространства $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$:

$$L_2((\mathcal{T}^\nu)^2) = \int \oplus L_2(\mathcal{T}^\nu)dp \tag{6}$$

следует, что оператор H_α разлагается в прямой интеграл

$$H_\alpha = \int \oplus h_\alpha(p)dp, \tag{7}$$

где оператор (модель Фридрихса) $h_\alpha(p)$, $p \in \mathcal{T}^\nu$ определён по формуле (2). Отметим, что в разложении (6) под знаком прямого интеграла стоят одинаковые слои.

Применяя теорему о спектре разложимых операторов и учитывая формулу (7) и

$$\sigma(h_\alpha(p)) = \sigma_{\rm disc}(h_\alpha(p)) \cup [m_\alpha(p); M_\alpha(p)], \quad p \in \mathcal{T}^\nu,$$

$$\bigcup_{p\in\mathcal{T}^\nu} [m_\alpha(p); M_\alpha(p)] = [m; M],$$

приходим к утверждению теоремы. □

Замечание. Операторы H_1 и H_2 обладают характеристическими свойствами канальных операторов соответствующего трёхчастичного дискретного оператора Шрёдингера, см. например [3, 4]. По этой причине будем называть их канальными операторами, соответствующими модельному оператору H.

4. Аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора $\boldsymbol{H}$. В этом пункте получим аналог уравнения Фаддеева для собственных векторов оператора H, который играет важную роль при изучении существенного и дискретного спектра рассматриваемого оператора.

Обозначим через $R_0(z)$ и $R_\alpha(z)$ резольвенту оператора H_0 и H_α, соответственно.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_\alpha)$ и оператор $W_\alpha(z) = I_2 + V_\alpha^{1/2} R_\alpha(z) V_\alpha^{1/2}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$. Можно проверить, что

$$(I_2 - V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\alpha^{1/2})^{-1} = I_2 + V_\alpha^{1/2} R_\alpha(z) V_\alpha^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_\alpha).$$

Обозначим

$$L_2^{(2)}((\mathcal{T}^\nu)^2) := \big\{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_\alpha \in L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)\big\}.$$

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ и оператор $T(z)$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{(2)}((\mathcal{T}^\nu)^2)$ как $2{\times}2$ блочно-операторная матрица с элементами

$$T_{\alpha\alpha}(z) = 0; \quad T_{\alpha\beta}(z) = W_\alpha(z) V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\beta^{1/2}, \ \alpha \neq \beta.$$

Отметим, что ядерная функция $v_\alpha^{1/2}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ оператора $V_\alpha^{1/2}$ принадлежит к $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$. Тогда оператор $V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\beta^{1/2}$, $\alpha \neq \beta$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ принадлежит классу Гильберта—Шмидта. При любом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ оператор $W_\alpha(z)$ является ограниченным, следовательно, оператор $T_{\alpha\beta}(z)$ также принадлежит классу Гильберта—Шмидта. Таким образом, оператор $T(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$, является компактным оператором.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

Лемма 5. *Число $z \in \mathbb{C}\setminus(\sigma(H_1)\cup\sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $T(z)$ и их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ — собственное значение оператора H. Тогда уравнение $Hf = zf$, или уравнение

$$(H_0 - zI_2)f - V_1 f - V_2 f = 0, \tag{8}$$

имеет нетривиальное решение $f \in L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$.

Так как $z \notin \sigma_{\rm three}(H_1)$, то из уравнения (8) для f имеем

$$f = R_0(z)V_1 f + R_0(z)V_2 f. \tag{9}$$

Умножая (9) на $V_\alpha^{1/2}$ слева и полагая $\varphi_\alpha = V_\alpha^{1/2} f$, получим, что система уравнений

$$\varphi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\beta^{1/2} \varphi_\beta, \quad \varphi_\alpha \in L_2((\mathcal{T}^\nu)^2) \tag{10}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (8) имеет нетривиальное решение и линейные подпространства, порождённые решениями уравнений (8) и (10), имеют одинаковые размерности.

При каждом фиксированном $z \notin \sigma(H_\alpha)$ оператор $I_2 - V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\alpha^{1/2}$ является обратимым, поэтому уравнение (10) эквивалентно системе уравнений

$$\varphi_\alpha = W_\alpha(z) V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\beta^{1/2} \varphi_\beta, \quad \varphi_\alpha \in L_2((\mathcal{T}^\nu)^2), \tag{11}$$

т.е. $\varphi = T(z)\varphi$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2^{(2)}((\mathcal{T}^\nu)^2)$. $\square$

Отметим [8], что уравнение $\varphi = T(z)\varphi$ является аналогом уравнения типа Фаддеева для собственных векторов оператора H.

При каждом $z < \min \sigma(H_\alpha)$ оператор $W_\alpha(z)$ является положительным, следовательно, существует его положительный квадратный корень $W^{1/2}(z)$, $z < \min \sigma(H_\alpha)$. Пусть $z < \min(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ и $\hat{T}(z)$ — оператор, действующий в $L_2^{(2)}((\mathcal{T}^\nu)^2)$ как $2{\times}2$ блочно-операторная матрица с элементами

$$\hat{T}_{\alpha\alpha}(z) = 0; \quad \hat{T}_{\alpha\beta}(z) = W_\alpha^{1/2}(z) V_\alpha^{1/2} R_0(z) V_\beta^{1/2} W_\beta^{1/2}(z),\ \alpha \neq \beta.$$

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $\hat{T}(z)$.

Лемма 6. *Число $z < \min(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\hat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и кратности операторов совпадают.*

Доказательство. В силу леммы 5 число $z < \min(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда система уравнений (11) имеет ненулевое решение и линейные подпространства, порожденные решениями уравнений $Hf = zf$, $z < \min(\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$, и (11) имеют одинаковые размерности.

Как отмечено выше, при каждом $z < \min\sigma(H_\alpha)$ оператор $W_\alpha(z)$ является положительным, следовательно, существует $W^{-1/2}(z)$, $z < \min\sigma(H_\alpha)$. Далее, умножая (11) на $W_\alpha^{-1/2}(z)$ слева и полагая $\psi_\alpha = W_\alpha^{-1/2}(z)\varphi_\alpha$, получим, что система уравнений (11) эквивалентно уравнению $\psi = \hat{T}(z)\psi$, где $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in L_2^{(2)}((\mathcal{T}^\nu)^2)$. $\square$

Заметим, что уравнение $\psi = \hat{T}(z)\psi$ является симметризованным вариантом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H.

5. Местоположение существенного спектра оператора $\boldsymbol{H}$. В этом пункте, пользуясь утверждениями пунктов 2–4, а также критерием Вейля, описывается местоположение существенного спектра оператора H. Верна следующая теорема.

Теорема 2. *Существенный спектр $\sigma_{\rm ess}(H)$ оператора H совпадает с объединением спектров операторов H_1 и H_2: $\sigma_{\rm ess}(H) = \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \subset \sigma_{\rm ess}(H)$. С этой целью, используя теорему 1, множество $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$ перепишем в виде

$$\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) = \sigma_{\rm two}(H_1) \cup \sigma_{\rm two}(H_2) \cup \sigma_{\rm three}(H_1).$$

Докажем, что выполняется включение $\sigma_{\rm three}(H_1) \subset \sigma_{\rm ess}(H)$. Полагая, что $z_0 \in \sigma_{\rm three}(H_1)$ — произвольная точка, покажем, что $z_0 \in \sigma_{\rm ess}(H)$. Для этого воспользуемся критерием Вейля, т.е. построим последовательность ортонормированных векторов $\{f_n\}$, для которых $\|(H - z_0 I_2)f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Так как $u(\cdot,\cdot)$ — непрерывная функция на $(\mathcal{T}^\nu)^2$, для любого $z_0 \in \sigma_{\rm three}(H_1)$ существует точка $(p_0, q_0) \in (\mathcal{T}^\nu)^2$ такая, что $z_0 = u(p_0, q_0)$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим выколотую окрестность точки $p_0 \in \mathcal{T}^\nu$:

$$U_n(p_0) = \Big\{p \in \mathcal{T}^\nu : \frac{1}{n+1} < |p - p_0| < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Пусть $\mu(U_n(p_0) \times U_n(q_0))$ — Лебегова мера множества $U_n(p_0) \times U_n(q_0)$.

Последовательность $\{f_n\}$ построим следующим образом:

$$f_n(p,q) = \begin{cases} (\mu(U_n(p_0) \times U_n(q_0)))^{-1/2}, & \text{если} \quad (p,q) \in U_n(p_0) \times U_n(q_0), \\ 0, & \text{если} \quad (p,q) \notin U_n(p_0) \times U_n(q_0). \end{cases}$$

По построению множества $U_n(p_0)$, для всех $n \neq m$

$$(U_n(p_0) \times U_n(q_0)) \cap (U_m(p_0) \times U_m(q_0)) = \emptyset,$$

поэтому последовательность $\{f_n\}$ — ортонормальная система в $L_2((\mathcal{T}^\nu)^2)$.

Рассмотрим $(H - z_0 I_2) f_n$ и оценим его норму. Очевидно, что

$$\|(H - z_0 I_2) f_n\|^2 \leqslant 4 \left(\|(H_0 - z_0 I_2) f_n\|^2 + \|V_1 f_n\|^2 + \|V_2 f_n\|^2 \right).$$

Из непрерывности функции $u(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ на $(\mathcal{T}^\nu)^2$ и равенства $z_0 = u(p_0, q_0)$ вытекает, что

$$\sup_{(p,q)\in U_n(p_0)\times U_n(q_0)} |u(p,q) - z_0| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

следовательно,

$$\|(H_0 - z_0 I_2) f_n\|^2 \leqslant \sup_{(p,q)\in U_n(p_0)\times U_n(q_0)} |u(p,q) - z_0|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из неравенства Шварца и абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем

$$\int |(V_1 f_n)(p,q)|^2 dp dq \leqslant (2\pi)^{-3} \int_{U_n(p_0)} \int |v_1(s,q)|^2 ds dq \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$\int |(V_2 f_n)(p,q)|^2 dp dq \leqslant (2\pi)^{-3} \int \int_{U_n(q_0)} |v_2(p,s)|^2 dp ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Учитывая полученные выше оценки, имеем $\|(H - z_0 I_2) f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Так как $z_0 \in \sigma_{\text{three}}(H_1)$ взята произвольно, то $\sigma_{\text{three}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем, что $\sigma_{\text{two}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_1 \in \sigma_{\text{two}}(H_1)$ — произвольная точка. Тогда по лемме 4 существует точка $p_1 \in \mathcal{T}^\nu$ такая, что $z_1 \in \sigma_{\text{disc}}(h_1(p_1))$. Следовательно, существует ненулевой элемент $\psi \in L_2(\mathcal{T}^\nu)$ такой, что

$$(h_1(p_1) - z_1 I_1)\psi = 0. \tag{12}$$

Положим

$$f_n(p,q) = \frac{\chi_{U_n}(p)\psi(q)}{\|\psi\|\sqrt{\mu(U_n(p_1))}},$$

где $\chi_{V_n}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $U_n(p_1)$.

Легко можно проверить, что $\{f_n\}$ является ортонормированной. Покажем, что для ортонормированной системы $\{f_n\}$ при $z_1 \in \sigma_{\text{two}}(H_1)$ верно

$$\lim_{n\to+\infty} \|(H - z_1 I_2) f_n\| = 0.$$

Заметим, что

$$\|(H - z_1 I_2) f_n\|^2 \leqslant 2 \int \left|(H_1 - z_1 I_2) f_n(p,q)\right|^2 + \frac{2}{\mu(U_n(p_1))} \int \left| \int_{U_n(p_1)} v_2(p,s) ds \right|^2 dp.$$

Второе слагаемое оценим через $C\sqrt{\mu(U_n(p_1))}$, которое по построению множества $U_n(p_1)$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. А первое слагаемое оценим через

$$\int \frac{\chi_{V_n}(p)}{\mu(U_n(p_1))} \|h_1(p) - z_1 I_1\|^2 dp \leqslant \max_{p\in U_n(p_1)} \|h_1(p) - z_1 I_1\|^2.$$

В силу равенства (12) оценочное выражение стремится к нулю при $n \to +\infty$. Из произвольности точки $z_1 \in \sigma_{\text{two}}(H_1)$ вытекает, что $\sigma_{\text{two}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Включение $\sigma_{\text{two}}(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично.

Таким образом, доказано, что $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем обратное включение: $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. Отметим, что $T(z)$ — компактная операторнозначная аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ и операторнозначная функция $I - T(z)$ обратима при больших $|z|$, где $z \in \mathbb{C}$. Здесь I — единичный оператор в $L_2^{(2)}((\mathcal{T}^\nu)^2)$. Согласно аналитической теореме Фредгольма [1] существует дискретное множество $S \subset \mathbb{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ такое, что операторнозначная функция $(I - T(z))^{-1}$ существует и аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \cup S\}$, а в точках S имеет вычеты конечного ранга. Следовательно, в силу леммы 5 для оператора $H - zI_2$ существует ограниченный обратный оператор. Это означает, что $\sigma(H) \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ состоит только из изолированных точек, которые могут иметь предельные точки только в граничных точках множества $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. Отсюда $\sigma(H) \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)) \subset \sigma(H) \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. $\square$

Введём новые подмножества существенного спектра оператора H.

Определение. Множества $\sigma_{\text{two}}(H) = \sigma_{\text{two}}(H_1) \cup \sigma_{\text{two}}(H_2)$, $\sigma_{\text{three}}(H) = \sigma_{\text{three}}(H_1) = \sigma_{\text{three}}(H_2)$ называются двухчастичной и трёхчастичной ветвями существенного спектра оператора H соответственно.

Замечание. Отметим, что канальные операторы H_1 и H_2 имеют более простую структуру, чем H, и поэтому теорема 2 играет важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора H.

Работа выполнена при поддержке Deutsche Forschungsgemeinschaft (проект № TR368/6-2). Первый автор благодарит Математический Институт Университета Берна (Берн, Швейцария) за гостеприимство и поддержку. Авторы также выражают благодарность за поддержку на конференции «Математическая физика и её приложения – 2010» лабораторией математической физики СамГУ, грантами АВЦП 3341 и 10854 и контрактом ФЦП 2173.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. Vol. IV: Analysis of operators. New York–London: Academic Press, 1978. 396 pp.; русск. пер.: *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с.
2. *Жислин Г. М.* Исследование спектра оператора Шрёдингера для системы многих частиц // *Труды Моск. мат. общ-ва*, 1960. Т. 9. С. 81–120. [*Zhislin G. M.* Investigations of the spectrum of the Schrödinger operator for a many body system // *Trudy Mosk. Mat. Obsh-va*, 1960. Vol. 9. Pp. 81–120].
3. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics // *Ann. Henri Poincaré*, 2004. Vol. 5, no. 4. Pp. 743–772.
4. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices // *Math. Nachr.*, 2007. Vol. 280, no. 7. Pp. 699–716.
5. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices // *Russ. J. Math. Phys.*, 2007. Vol. 14, no. 4. Pp. 377–387.
6. *Albeverio S., Lakaev S. N., Djumanova R. Kh.* The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles // *Reports on Math. Phys.*, 2009. Vol. 63, no. 3. Pp. 359–380.

7. *Расулов Т. Х.* Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке // *ТМФ*, 2010. Т. 163, № 1. С. 34–44; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 163, no. 1. Pp. 429–437.
8. *Фаддеев Л. Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трёх частиц / Тр. МИАН СССР, Т. 69. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 3–122. [*Faddeev L. D.* Mathematical questions in the quantum theory of scattering for a system of three particles / Trudy Mat. Inst. Steklov., 69. Moscow–Leningrad: Acad. Sci. USSR, 1963. Pp. 3–122].

Поступила в редакцию 21/XII/2010;
в окончательном варианте — 21/V/2011.

MSC: 81Q10; 35P20, 47N50

THE FADDEEV EQUATION AND LOCATION OF THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A THREE-PARTICLE MODEL OPERATOR

T. Kh. Rasulov[1,2]***, A. A. Rakhmonov***[1]

[1] Bukhara State University, Physics and Mathematics Faculty,
11, Muhammad Ikbol, Bukhara, 200100, Uzbekistan.
[2] University of Bern, Faculty of Science,
5, Sidlerstrasse, Bern, CH-3012, Switzerland.

E-mail: rth@mail.ru, araxmonov@mail.ru

In this paper a model operator H associated to a system of three-particles on a lattice is considered. The location of the essential spectrum of H is described by the spectrum of channel operators. The Faddeev type equation for the eigenvectors of H is obtained.

Key words: *model operator, essential spectrum, channel operator, Faddeev equation.*

Original article submitted 21/XII/2010;
revision submitted 21/V/2011.

Tulkin Kh. Rasulov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Algebra and Analysis[1]; Doctoral Candidate, Mathematical Institute[2]. *Askar A. Rakhmonov*, Student.