Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (23). С. 251–259

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА НА $\mathfrak{p}$-АДИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА И ФЕЙНМАНА–КАЦА

Н. Н. Шамаров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119992, Москва, Воробьёвы горы.

E-mail: nshamarov@yandex.ru

Строятся однородные замкнутые псевдодифференциальные операторы, аналогичные степеням бесконечномерного лапласиана, действующие в банаховых пространствах комплексных функций, определённых, в свою очередь, на функциональных пространствах над полем $\mathfrak{p}$-адических чисел. Для элементов полугрупп, порождённых этими псевдодифференциальными операторами как генераторами, находятся формулы Фейнмана и Фейнмана—Каца.

Ключевые слова: *формулы Фейнмана–Каца, формулы Фейнмана, функциональный лапласиан, p-адический анализ.*

Введение. Некоторые бесконечномерные аналоги оператора Лапласа естественно возникают в квантовой теории поля, отвечая кинетическому члену в гамильтониане. Другого рода бесконечномерные аналоги оператора Лапласа используются в уравнениях, эквивалентных уравнениям Янга—Миллса. При этом областями определения функций, на которые действуют операторы, являются вещественные многообразия.

С другой стороны, трудности, возникающие при описании с помощью известных теорий, оперирующих вещественными координатами, процессов на планковских масштабах, привели к идее рассмотреть $\mathfrak{p}$-адический анализ в качестве альтернативного математического аппарата [1].

В аппарате теории комплексных функций конечного числа $\mathfrak{p}$-адических аргументов, то есть пробегающих поле $\mathfrak{p}$-адических чисел Гензеля, важную роль играет аналог оператора Лапласа, определяемый как псевдодифференциальный оператор (ПДО) и называемый оператором Владимирова. Поскольку известен иной оператор, также носящий имя В. С. Владимирова, то описанный выше ПДО Владимирова, аналогичный оператору Лапласа, называем далее оператором Лапласа—Владимирова.

Изложенное выше мотивирует изучение аналогов оператора Лапласа—Владимирова, действующих в пространстве комплекснозначных функций бесконечномерного $\mathfrak{p}$-адического аргумента. Область определения этих функций, являющаяся бесконечномерным $\mathfrak{p}$-адическим пространством, называется далее конфигурационным пространством. Пространство $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{N}}$ счётных последовательностей $\mathfrak{p}$-адических чисел в качестве конфигурационного рассмотрено как модельное в работах [2, 3]. Данная же работа посвящена случаю функционального конфигурационного пространства, которое представляет-

---

Николай Николаевич Шамаров (к.ф.-м.н.), научный сотрудник, институт теоретических проблем микромира им. Н. Н. Боголюбова.

ся в контексте упомянутых выше физических идей более естественным.

Формулой Фейнмана [4] называется представление решения задачи Коши эволюционного уравнения в виде предела последовательности кратных интегралов, в которой эта кратность неограниченно растёт. Формулой Фейнмана в конфигурационном пространстве называется формула Фейнмана, в которой кратные интегралы берутся по декартовым степеням области определения начальной функции задачи (которая и является конфигурационным пространством). Если конфигурационное пространство является векторным (соотв., многообразием), то соответствующим фазовым пространством называется произведение конфигурационного пространства на двойственное к нему (соотв., кокасательное расслоение конфигурационного многообразия), и формулой Фейнмана в фазовом пространстве называется формула Фейнмана, в которой кратные интегралы берутся по декартовым степеням этого фазового пространства. Формулами Фейнмана—Каца в конфигурационном (или в фазовом) пространстве для той же задачи называется представление решения задачи в виде интеграла по пространству траекторий (= отображений отрезка со значениями) в соответствующем пространстве (по счётно-аддитивной мере или по псевдомере, например, псевдомере Фейнмана). Ниже, если явно не оговорено обратное, под формулами Фейнмана и Фейнмана—Каца будут пониматься эти формулы в конфигурационном пространстве.

В настоящей работе строятся однородные замкнутые ПДО, аналогичные степеням бесконечномерного лапласиана (ср. [5, 6] для вещественного случая), действующие в банаховых пространствах комплексных функций, определённых, в свою очередь, на функциональных пространствах над полем $\mathfrak{p}$-адических чисел, и находятся формулы Фейнмана и Фейнмана—Каца (в конфигурационном пространстве) для элементов полугрупп, порождённых этими ПДО как генераторами.

Классический однородный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами (например, оператор Лапласа) от комплексной функции нескольких вещественных переменных можно определить как псевдодифференциальный оператор, символ которого равен квадратичной форме от «импульсных» переменных, сопряжённых исходным. Степени (абсолютной величины) оператора Лапласа определяются аналогично с помощью символов, равных соответствующим удвоенным степеням нормы вектора, составленного из «импульсных» координат. В случае комплексных функций конечного числа переменных, пробегающих поле не вещественных, но $\mathfrak{p}$-адических чисел, та же схема со степенями нормы приводит к определению операторов Владимирова D^α, являющихся аналогами степени $\alpha/2$ абсолютной величины оператора Лапласа. В обоих случаях итоговый оператор получается в результате последовательного применения трёх операций: обратного преобразования Фурье, умножения на однородную функцию-символ от «импульсных» переменных и, наконец, прямого преобразования Фурье. Данный алгоритм можно применить и в случае функций бесконечного числа переменных с той лишь разницей, что (обобщённые) меры, получаемые после первого (обратного) преобразования Фурье, на которые умножается символ, невозможно отождествить с функциями, даже обобщёнными, в силу отсутствия (по теореме Вейля) достаточно хорошей меры Хаара на бесконечномерных пространствах.

Бесконечномерные ПДО в пространствах функций, определённых на вещественных локально выпуклых пространствах, были определены с помощью описанного способа О. Г. Смоляновым [5].

1. Предварительные сведения и обозначения. Поле $\mathfrak{p}$-адических[1] ($\mathfrak{p} \in \{2, 3, 5, \dots\}$ — простое натуральное число) чисел, обозначаемое $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, представляет собой пополнение поля рациональных чисел относительно единственного нормирования[2], переводящего $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{p}^{-1}$ и всякое простое натуральное $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ в 1. Продолжение этого нормирования на $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ называется $\mathfrak{p}$-адическим, и его значения на всяком $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ обозначается $|x|_{\mathfrak{p}}$. Векторные пространства над $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ далее также называются $\mathfrak{p}$-адическими.

Без ссылок формулируются далее факты из [1], относящиеся к анализу комплекснозначных функций $\mathfrak{p}$-адических аргументов.

Каждое $\mathfrak{p}$-адическое число a допускает однозначное представление в виде (сходящегося в $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$) ряда

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z},\ k \geqslant -\log_{\mathfrak{p}} |a|_{\mathfrak{p}}} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k} = [a]_{\mathfrak{p}} + \{a\}_{\mathfrak{p}},$$

где $a_k \in \{0, 1, \dots, \mathfrak{p} - 1\}$ для всякого $k \in \mathbb{Z}$, причём для $a \neq 0$, $\log_{\mathfrak{p}} |a|_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ и $a_{\log_{\mathfrak{p}} |a|_{\mathfrak{p}}} \neq 0$ ($\log_{\mathfrak{p}} 0 = -\infty$, $a_{-\infty} = 0$), $[a]_{\mathfrak{p}} = \sum\limits_{k \geqslant 0} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k}$, и сумма $\{a\}_{\mathfrak{p}} = \sum\limits_{-\log_{\mathfrak{p}} |a|_{\mathfrak{p}} \leqslant k < 0} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k}$ конечна. При этом $\{a\}_{\mathfrak{p}}$ всегда является рациональным числом из вещественного полуинтервала $[0; 1)$.

Непрерывный гомоморфизм $\chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}$ аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ в мультипликативную группу $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, задаваемый формулой $\chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(a) = e^{2i\pi \{a\}_{\mathfrak{p}}}$, является аддитивным унитарным характером группы $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, +)$, причём каждый непрерывный унитарный комплексный аддитивный характер группы $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, +)$ имеет вид $a \mapsto \chi_y(a) \equiv \chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(y \cdot a)$ для некоторого $y \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, и соответствие $y \mapsto \chi_y$ является изоморфизмом аддитивной топологической группы $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ и (двойственной ей по Понтрягину) группы характеров на $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$. Та мера Хаара на локально компактной абелевой аддитивной группе $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, +)$, которая на каждом замкнутом шаре равна диаметру шара (совпадающему с его радиусом), называется далее канонической.

Под измеримостью отображений, определённых на измеримых пространствах и принимающих значения в нормированном поле $\mathfrak{p}$-адических, веще-

[1]Чтобы далее использовать стандартную пару переменных (q, p) при определении ПДО, для простых чисел (в термине p-адическое число, например) выбрано иное, чем стандартный курсив, написание. Оно выбрано готическим, поскольку так иногда в литературе обозначаются максимальные идеалы целых чисел, определяемые простыми числами.

[2]Нормированием на алгебраическом поле $(K, +_K, 0_K, \cdot_K, 1_K)$ называется всякая неотрицательная функция $N : K \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall k, l \in K$ ($N(k) = 0 \iff k = 0_K$), $N(k \cdot_K l) = N(k)N(l)$ и $N(k +_K l) \leqslant N(k) + N(l)$). При этом локально равномерно непрерывными относительно метрики $\rho_N(k, l) = N(l - k)$ и по совокупности аргументов являются соответственно отображения N и $+_K : K \times K \to K$ и $\cdot_K : K \times K \to K$, продолжения которых на ρ_N-пополнение K_N поля K превращают это пополнение снова в нормированное поле.

ственных или комплексных чисел понимаем измеримость относительно сигма-алгебры всех борелевских подмножеств в соответствующем поле, обозначаемой $\sigma_{\mathfrak{p}}$, $\sigma_{\mathbb{R}}$ или $\sigma_{\mathbb{C}}$ соответственно.

2. Бесконечномерный оператор Лапласа на $\mathfrak{p}$-адическом пространстве и соответствующее уравнение теплопроводности. В этом пункте считается заданным вещественное число $T > 0$, Q — пространство всех непрерывных справа функций без разрывов второго рода, определённых на вещественном отрезке $[0;T]$ и принимающих значения в поле $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$. Далее, P — пространство всех тех непрерывных слева функций $[0;T] \to \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, каждая из которых имеет (свои) не более чем конечное число точек разрыва и лишь конечное число значений. Зададим биекцию между пространством P и пространством всех тех $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$-значных борелевских мер на отрезке $[0;T]$, каждая из которых в носителе имеет не более конечного числа точек, формулой $p(s) = m_p[s;T]$ $(s \in [0;T])$, где $p \in P$ и m_p — мера, отвечающая функции p. Билинейное относительно поля $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ отображение $b : Q \times P \to \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, задаваемое формулой

$$b(q,p) = -\int_{[0;T]} q(s)\, m_p(d\,s) = -\sum_{s\in \operatorname{supp}(m_p)} q(s)\cdot m_p(\{s\}),$$

приводит пространства Q и P в двойственность.

Далее σ_P — сигма-алгебра с единицей P, порождённая всеми функционалами вида $b(q,\cdot)$ $(q \in Q)$; M_P — пространство комплекснозначных счётно-аддитивных мер на (P,σ_P) и F_Q — пространство их b-преобразований Фурье, то есть b-слабо секвенциально непрерывных функций $\widetilde{m} : Q \to \mathbb{C}$ вида

$$\widetilde{m}(q) = \int_P \chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(b(q,p))\, m(d\,p),$$

где $m \in M_P$. Биекция $M_P \ni m \mapsto \widetilde{m} \in F_Q$ переносит норму, определенную в M_P полной вариацией мер, в банахову норму на F_Q. Сходимость в пространстве F_Q влечёт равномерную сходимость, так как $|\widetilde{m}(q)| \leqslant \|m\|_{M_P} = \|\widetilde{m}\|_{F_Q}$ $(m \in M_P,\ q \in Q)$. Пространства M_P и F_Q не сепарабельны. Аналогично предыдущему определяем σ_Q как сигма-алгебру с единицей P, порожденную всеми функционалами вида $b(\,\cdot\,,p)$ $(p \in P)$; b-преобразованием Фурье произвольной счётно-аддитивной меры $m : \sigma_Q \to \mathbb{C}$ называем функцию $\widetilde{m} : P \to \mathbb{C}$, задаваемую формулой $\widetilde{m}(p) = \displaystyle\int_Q \chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(b(q,p))m(dq)$.

Если $p \in P$, то борелевским p-цилиндром (в пространстве Q) называется множество вида $C_{p,B} = \{q \in Q : b(q,p) \in B\}$, где $B \in \sigma_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}$. Аналогично определяются борелевские q-цилиндры (в пространстве P).

Теорема 1. *Каждое из двух определенных выше b-преобразований Фурье является инъективным линейным оператором на своем пространстве мер.*

Доказательство. Линейность очевидна. Для доказательства инъективности можно провести рассуждения, аналогичные сделанным в [7] для числовых цилиндрических мер на вещественных пространствах, однако укажем более короткий путь, сформулировав его независимым от используемого поля ($\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ или $\mathbb{R}$) образом. Во-первых, в силу линейности достаточно проверить, что если преобразуемая мера m ненулевая, то и её преобразование Фурье тоже. Пусть теперь $m \neq 0$. Поскольку область определения меры m как σ-алгебра порождена определенными выше борелевскими цилиндрами, мера принимает ненулевое значение на некотором цилиндре вида $\varphi^{-1}(B)$, где B — борелевское множество в поле, а φ — b-слабо непрерывный функционал на соответствующем пространстве. Таким образом, счётно-аддитивная мера $m \circ \varphi^{-1}$ ненулевая на $\sigma_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}$ или $\sigma_\mathbb{R}$ соответственно. Пространство счётно-аддитивных мер, заданных на поле $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ или $\mathbb{R}$, инъективно вложено в соответствующее пространство S' обобщённых функций. Наконец, на этом $\widetilde{S'}$, как известно, преобразование Фурье — автоморфизм, и, значит, $0 \neq \widetilde{m \circ \varphi^{-1}} \equiv \widetilde{m} \circ \varphi^*$, где φ^* — сопряженный к φ оператор, откуда $\widetilde{m} \neq 0$, что и требуется. $\Box$

Фиксируем ещё вещественное число $\alpha > 0$ и отвечающую ему неположительную вещественнозначную функцию $f : P \to (-\infty, 0]$, задав её формулой $f(p) = -\displaystyle\int_0^T (|p(s)|_\mathfrak{p})^\alpha ds$, где интеграл понимается в смысле Римана; функция f измерима относительно σ_P.

Теорема 2. *Для каждого $t \geqslant 0$ существует единственная вероятностная счётно-аддитивная мера w^t (аналог меры Винера) на σ_Q, обладающая преобразованием Фурье вида*

$$\widetilde{w^t}(p) = e^{t \cdot f(p)} = \exp\left(-t \cdot \int_0^T (|p(s)|_\mathfrak{p})^\alpha ds\right).$$

Доказательство. Для доказательства существования достаточно в качестве w^t взять распределение однородного по времени и фазовому пространству $(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}, +)$ (марковского) процесса ξ^t с переходными плотностями вида $p(t_1, t_2; x_1, x_2) = F_{(t_2 - t_1)\cdot t}(x_2 - x_1)$, где $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, x_1, $x_2 \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, и для каждого вещественного числа $s \geqslant 0$ и каждого $\mathfrak{p}$-адического числа x $F_s(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (e^{-s\mathfrak{p}^{k\cdot\alpha}} - e^{-s\mathfrak{p}^{(k+1)\cdot\alpha}})\mathfrak{p}^k \Omega(\mathfrak{p}^{-k}x)$, где, в свою очередь, $\Omega(x) = 1$ при $|x|_\mathfrak{p} \leqslant 1$ и $\Omega(x) = 0$ в противном случае. При $t = 1$ конструкция приведена в [1], при других $t > 0$ построения аналогичны, и, наконец, при $t = 0$ вероятностная мера m_1^0 сосредоточена в нуле пространства P.

Единственность вытекает из доказанной в теореме 1 инъективности оператора преобразования Фурье. $\Box$

Определение. Пусть для произвольной σ_Q-измеримой вещественной функции $f_0 : Q \to \mathbb{R}$, знакосочетание $(f_0\cdot)$ означает плотно определённый (и, вообще говоря, неограниченный) оператор поточечного умножения на (необязательно ограниченную) комплексную неположительную функцию f_0 в банаховом пространстве M_P, заданный на (так называемой естественной) области определения $D_{(f_0\cdot)} = \{m \in M : (f_0 \cdot m) \in M_P\}$ формулой $D_{(f_0\cdot)} \ni m \mapsto (f_0 \cdot m) \in M_P$. Пусть далее $\widehat{f_0}$ — оператор в $\widetilde{F_Q}$ с областью определения $D_{\widehat{f_0}} = \{\widetilde{m} \in F_Q : m \in D_{(f_0\cdot)}\}$, такой, что $\widehat{f_0}(\widetilde{m}) = \widetilde{f_0 \cdot m}$.

Отметим, что подпространство $D_{(f_0\cdot)}$ плотно в банаховом M_P, так как f_0 всюду конечна и σ_P-измерима, и что в случае ограниченного сверху множества значений функции f_0, $(f_0\cdot)$ — генератор сильно непрерывной полугруппы $\{(e^{t\cdot f_0}\cdot) : t \geqslant 0\}$ операторов в банаховом пространстве M_P.

Лемма 1. *В пространстве M_P корректно определён билинейный оператор свёртки мер, переводящий упорядоченную пару мер в образ их прямого произведения относительно сложения. Преобразование Фурье переводит такую свёртку мер в произведение их преобразований Фурье.*

Доказательство использует измеримость операции сложения в P относительно алгебры борелевских b-цилиндров, определяемых как прообразы борелевских множеств относительно b-слабо непрерывных конечномерных линейных отображений на P.

Теорема 3. *Оператор $\widehat{f}$ является генератором сильно непрерывной свёрточной операторной полугруппы $\{(w^t*) : t \geqslant 0\}$ в пространстве F_Q.*

Эта теорема есть следствие корректности определения свёртки, двух предыдущих теорем, леммы 1 и того факта, что $(f\cdot)$ — генератор однопараметрической сильно непрерывой полугруппы $\{e^{t\cdot(f\cdot)}\}_{t\geqslant 0}$ сжатий в банаховом M_P.

Определение. Оператор $\widehat{f}$, плотно определённый в банаховом пространстве F_Q, далее называется бесконечномерным оператором Лапласа в степени $\alpha/2$, причём в случае $\alpha = 2$ — просто бесконечномерным оператором Лапласа.

Поставим задачу Коши с соответствующим бесконечномерному оператору Лапласа уравнением теплопроводности (с включенным распределённым источником). Фиксируем меру $m \in M_P$.

Определение. Пусть $\psi_0 \in F_Q$ — начальное условие задачи, необходимо найти непрерывную функцию $\Psi : [0, \infty) \to F_Q$, дифференцируемую при каждом $t > 0$ и такую, что

$$\Psi'(t) = \widehat{f}\,\Psi_t + (\widetilde{m}\cdot)\Psi_t \quad (t > 0), \quad \Psi(0) = \psi_0, \tag{1}$$

где $\Psi_t = \Psi(t)$ $(t \in [0; +\infty))$. Эту задачу будем называть задачей (1).

Далее при $t \geqslant 0$ и $q \in Q$ запись $\psi(t, q)$ означает $\Psi_t(q)$.

3. Формулы Фейнмана и Фейнмана—Каца для задачи (1). Сумма генератора $\hat{f}$ и ограниченного оператора $(\widetilde{m}\cdot)$ сама является генератором сильно непрерывной полугруппы, элементы которой обозначаются $e^{t\cdot(\hat{f}+(\widetilde{m}\cdot))}$. При этом справедлива следующая теорема (формула Троттера).

Теорема 4. *Для всякого $\psi_0 \in F$*

$$\Psi(t) = e^{t\cdot\left(\widehat{f}+(\widetilde{m}\cdot)\right)}\psi_0 = \lim_{n\to\infty}(e^{(t/n)\cdot\widehat{f}}e^{(t/n)\cdot(\widetilde{m}\cdot)})^n\psi_0.$$

Лемма 1. *Для всякого $\psi_0 \in F$ и $q \in Q$ справедливы равенства*

$$\psi(t,q) = \lim_{n\to\infty}\big((e^{(t/n)\cdot\widehat{f}_0}e^{(t/n)\cdot(\widetilde{m}\cdot)})^n\psi_0\big)(q) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\big((\omega^{t/n}\,*)\circ(e^{(t/n)\widetilde{m}}\,\cdot)\big)^n\ \psi_0\Big)(q).$$

Следствие. *Положим* $I_n(q) = \big(((\omega^{t/n}\,*)\circ(e^{(t/n)\widetilde{m}}\,\cdot))^n\ \psi_0\big)(q) =$

$$= \int \omega^{t/n}(q-dq_{n-1})e^{(t/n)\widetilde{m}(dq_{n-1})}\int \omega^{t/n}(q_{n-1}-dq_{n-2})e^{(t/n)\widetilde{m}(dq_{n-2})}\int\cdots$$

$$\cdots\int \omega^{t/n}(q_2-dq_1)e^{(t/n)\widetilde{m}(dq_1)}\int \omega^{t/n}(q_1-dq_0)e^{(t/n)\widetilde{m}(dq_0)}\psi_0(q_0) =$$

(*замена* $q_j = q - \widetilde{q}_j$)

$$= \int \omega^{t/n}(d\widetilde{q}_{n-1})e^{(t/n)\widetilde{m}(q-\widetilde{q}_{n-1})}\int \omega^{t/n}(-\widetilde{q}_{n-1}+d\widetilde{q}_{n-2})e^{(t/n)\widetilde{m}(q-\widetilde{q}_{n-2})}\int\cdots$$

$$\cdots\int \omega^{t/n}(-\widetilde{q}_2+d\widetilde{q}_1)e^{(t/n)\widetilde{m}(q-\widetilde{q}_1)}\int \omega^{t/n}(-\widetilde{q}_1+d\widetilde{q}_0)e^{(t/n)\widetilde{m}(q-\widetilde{q}_0)}\psi_0(q-\widetilde{q}_0).$$

Тогда $\psi(t,x) = \lim_{n\to\infty} I_n(q)$.

Определение 1. Пусть $t>0$, пространство Γ_Q^t состоит из всех функций $\gamma:[0;t]\to Q$, не имеющих разрывов второго рода, и пусть G и g — ограниченные непрерывные функции $Q\to\mathbb{C}$. Интегралом

$$\int_{\Gamma_Q^t}\exp\bigg(\int_0^t g(\gamma(s))ds\bigg)\cdot G(\gamma(0))M_\omega^t(d\gamma)$$

по центральной псевдомере M_ω^t, определяемой переходными мерами

$$\big\{\omega^s(A-q) : s\geqslant 0,\quad q\in Q,\quad A\in\sigma_Q\big\},$$

от функции

$$\Gamma\ni\gamma\mapsto\exp\bigg(\int_0^t g(\gamma(s))ds\bigg)\cdot G(\gamma(0))$$

назовём предел при $n\to\infty$ интегралов вида

$$\int \omega^{t/n}(dq_{n-1})e^{(t/n)g(q_{n-1})}\int \omega^{t/n}(-q_{n-1}+dq_{n-2})e^{(t/n)g(q_{n-2})}\int\cdots$$

$$\cdots\int \omega^{t/n}(-q_2+dq_1)e^{(t/n)g(q_1)}\int \omega^{t/n}(-q_1+dq_0)e^{(t/n)g(q_0)}G(q_0).$$

Лемма. *Определение* 1 *корректно.*

Теорема 5 (Формула Фейнмана—Каца). *Для всякого* $\psi_0 \in F$ *и* $q \in Q$ *справедливо равенство*

$$\psi(t,x) = \int_{\Gamma^t_Q} \exp\left(\int_0^t \widetilde{m_0}(q-\gamma(s))ds\right) \cdot \psi_0(q-\gamma(0)) M^t_\omega(d\gamma).$$

Заключение. Одним из ключевых технических средств в конструкции разрешающей полугруппы для эволюционного уравнения является теорема о формуле Троттера, которая в настоящей работе применена для получения формул, называемых формулами Фейнмана и Фейнмана—Каца в конфигурационном пространстве. Возможно, псевдомеры M^t_ω счётно-аддитивны.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10–01–00724–а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Владимиров В. С, Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-Адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994. 352 с.; англ. пер.: *Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.* p-Adic analysis and mathematical physics / Series on Soviet and East European Mathematics. Vol. 1. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 1994. 319 pp.
2. *Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н., Кпекпасси М.* Формулы Фейнмана—Каца и Фейнмана для бесконечномерных уравнений с оператором Владимирова // *Докл. РАН*, 2011. Т. 438 (в печати). [*Smolyanov O. G., Shamarov N. N., Kpekpassi M.* Feynman and Feynman–Kac formulas for infinite-dimensional equations with Vladimirov operator // *Dokl. RAN*, 2011. Vol. 438 (to appear)].
3. *Beloshapka O. V.* Feynman formulas for an infinite dimensional p-adic heat type equation // *IDAQP*, 2011. Vol. 14, no. 1. Pp. 137–148.
4. *Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н.* Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова / В сб.: *Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа*: Сборник статей / Тр. МИАН, Т. 265. М.: МАИК, 2009. С. 229–240; англ. пер.: *Smolyanov O. G., Shamarov N. N.* Feynman formulas and path integrals for evolution equations with the Vladimirov operator // *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009. Vol. 265. Pp. 217–228.
5. *Смолянов О. Г.* Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шредингеру // *Докл. Акад. наук СССР*, 1982. Т. 263, № 3. С. 558–562; англ. пер.: *Smolyanov O. G.* Infinite-dimensional pseudodifferential operators and Schrödinger quantization // *Sov. Math. Dokl.*, 1982. Vol. 25, no. 3. Pp. 404–408.
6. *Аккарди Л., Смолянов О. Г.* Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях // *Докл. РАН*, 2006. Т. 407, № 5. С. 583–588; англ. пер.: *Accardi L., Smolyanov O. G.* Feynman formulas for evolution equations with Levy Laplacians on infinite-dimensional manifolds // *Doklady Mathematics*, 2006. Vol. 73, no. 2. Pp. 252–257.
7. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: МГУ, 1990. 150 с. [*Smolyanov O. G. Shavgulidze E. T.* Continual Integrals. Moscow: MGU, 1990. 150 pp.]

Поступила в редакцию 25/XII/2010;
в окончательном варианте — 17/V/2011.

MSC: 34G10; 28C20, 11D88

FUNCTIONAL LAPLACE OPERATOR ON A $\mathfrak{p}$-ADIC SPACE AND FEYNMAN–KAC AND FEYNMAN FORMULAS

N. N. Shamarov

M. V. Lomonosov Moscow State University,
Vorobjovy Gory, Moscow, 119899, Russia.

E-mail: `nshamarov@yandex.ru`

Homogeneous closed PDO are constructed which are analogous to the powers of (absolute value of) infinite dimensional Laplacian and acting in Banach spaces of complex-valued functions defined on function spaces over a field of $\mathfrak{p}$-adic numbers. For elements of semigroups, for which these PDOs are generators, Feynman formulas and Feynman–Kac ones are obtained.

Key words: *Feynman–Kac formulas, Feynman formulas, functional Laplacian, p-adic analysis.*

Original article submitted 25/XII/2010;
revision submitted 17/V/2011.

Nikolaj N. Shamarov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Scientific Fellow, N. N. Bogoliubov Institute for Theoretical Problems of Microphysics.