

УДК 539.3+539.4

АРМИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПО КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Ю. В. Немировский¹, Н. А. Фёдорова²

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

² Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, 660041 Красноярск, пр. Свободный, 79.

E-mails: ran@akadem.ru

Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования в рамках плоской задачи получены разрешающие уравнения для линейной ортотропной неоднородной задачи упругости, включая уравнение совместности деформаций, в случаях биполярной, эллиптической, параболической, гиперболической, кардиоидальной систем координат. Детерминантным методом исследован тип полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент тензора деформаций.

Ключевые слова: армирование, структурная модель, криволинейные траектории.

1. Плоская задача армированных сред в криволинейной ортогональной системе координат. Уравнения равновесия в криволинейных координатах u, v запишутся в виде [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(H_2\sigma_{11})}{\partial u} + \frac{\partial(H_1\sigma_{12})}{\partial v} + \frac{\partial H_1}{\partial v}\sigma_{12} - \frac{\partial H_2}{\partial u}\sigma_{22} + H_1H_2\Phi_1 &= 0, \\ \frac{\partial(H_2\sigma_{12})}{\partial u} + \frac{\partial(H_1\sigma_{22})}{\partial v} + \frac{\partial H_2}{\partial u}\sigma_{12} - \frac{\partial H_1}{\partial v}\sigma_{22} + H_1H_2\Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) $\sigma_{ij}(u, v)$ — компоненты тензора напряжений; Φ_1, Φ_2 — контравариантные компоненты вектора массовой силы; $H_1 = H_1(u, v)$, $H_2 = H_2(u, v)$ — дифференциальные коэффициенты Ламе (в дальнейшем — коэффициенты Ламе), представляющие собой в общей ортогональной системе координат заданные функции координат u, v . Система записана относительно физических компонент тензоров напряжений. Связь между физическими компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(u, v)$ и физическими компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(u, v)$ формулируется на основе структурной модели армированного материала [2]. В условиях термоупругого ортотропного деформирования в криволинейных ортогональных координатах она представляется такими же формулами, что и структурная модель в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \Omega\sigma_{ij}^c + \sum_{k=1}^2 \sigma_k\omega_k l_{ki}l_{kj}, \quad \Omega = 1 - (\omega_1(u, v) + \omega_2(u, v)), \\ l_{k1} &= \cos(\varphi_k), \quad l_{k2} = \sin(\varphi_k), \quad k \in \{1, 2\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Юрий Владимирович Немировский (д.ф.-м.н., профессор), главный научный сотрудник, лаб. физики быстротекущих процессов. Наталья Александровна Фёдорова (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и компьютерной безопасности.

В (2) напряжения в связующем находятся по формулам

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)T), \quad \sigma_{ij}^c = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}, \quad j = 3-i, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_k(u, v)$ — напряжения в волокнах; $\omega_k(u, v)$, $\varphi_k(u, v)$ — интенсивность и угол армирования волокон k -того семейства; T — температура; E , ν , α_c — соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями для констант: $m_1 = (1-\nu^2)^{-1}$, $m_2 = (1+\nu)^{-1}$, $m_3 = Em_1$, $m_4 = Em_2$. Условие постоянства сечений волокон k -того семейства имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u}(H_2\omega_k \cos \varphi_k) + \frac{\partial}{\partial v}(H_1\omega_k \sin \varphi_k) = 0. \quad (4)$$

Если углы армирования совпадают с направлениями координатных линий, то их значения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, и уравнения (4) можно проинтегрировать:

$$\omega_1(u, v) = \frac{H_2(u^0, v)\omega_1^0(v)}{H_2(u, v)}, \quad \omega_2(u, v) = \frac{H_1(u, v^0)\omega_2^0(u)}{H_1(u, v)},$$

где $\omega_1^0(v)$, $\omega_2^0(u)$ — известные функции, заданные на линиях $u = u^0 = \text{const}$, $v = v^0 = \text{const}$, удовлетворяющие условиям постоянства расхода арматуры. Общие ограничения для интенсивностей армирования задаются в виде $0 < \omega_k < 0,7$. Интенсивность прослоек связующего изменяется в интервале $0 < \Omega < 1$.

После выполнения ковариантного дифференцирования уравнения совместности Сен–Венана [3] и выражения символов Кристоффеля через коэффициенты Ламе получим для любой ортогональной криволинейной системы координат уравнение совместности деформаций относительно физических компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial u^2} + C_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial v^2} + C_3 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial u \partial v} + C_4 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial u} + C_5 \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial v} + C_6 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial u} + C_7 \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial v} + \\ + C_8 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial u} + C_9 \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial v} + C_{10} \varepsilon_{11} + C_{11} \varepsilon_{22} + C_{12} \varepsilon_{12} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты C_s в уравнении (5) связаны с коэффициентами Ламе следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} C_1 &= H_1^2, \quad C_2 = H_2^2, \quad C_3 = -2H_1H_2, \quad C_4 = -H_2 \frac{\partial H_2}{\partial u}, \\ C_5 &= H_1^2 \left(-\frac{2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial v} + \frac{4}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right), \\ C_6 &= H_2^2 \left(-\frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{4}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right), \quad C_7 = -H_1 \frac{\partial H_1}{\partial v}, \\ C_8 &= 2H_1H_2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial v} - \frac{1}{H_1H_2} \left(H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) \right), \\ C_9 &= 2H_1H_2 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} - \frac{1}{H_1H_2} \left(H_1 \frac{\partial H_2}{\partial u} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial u} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{10} &= 2 \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial u} + H_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u} \frac{\partial H_1}{\partial u} - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial v} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right), \\
 C_{11} &= 2 \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial v} + H_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial u^2} - \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial v} - \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right), \\
 C_{12} &= 2 \left(-\frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial v} + \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial u} - H_2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial v \partial u} - \frac{\partial H_1}{\partial u} \frac{\partial H_2}{\partial v} - \frac{\partial H_1}{\partial v} \frac{\partial H_2}{\partial u} \right. \\
 &\quad \left. - H_1 \frac{\partial^2 H_2}{\partial v \partial u} + \frac{\partial H_2}{\partial v} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} + \frac{\partial H_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial H_1}{\partial u} \left(\frac{\partial H_2}{\partial v} + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial v} \right) \right).
 \end{aligned}$$

На основе уравнений (1)–(5) строим систему разрешающих уравнений относительно компонент тензора деформаций. В классической плоской задаче теории упругости [4] решение строится через функцию напряжений, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка. При этом вводятся ограничения на объёмные силы — это либо сила тяжести, либо объёмные силы, обладающие потенциалом. Преимущества постановки задачи в деформациях заключаются в том, что объёмные силы могут быть произвольными, а исходная разрешающая система является системой более низкого порядка (второго вместо четвёртого), что важно в дальнейшем для построения численного алгоритма при аппроксимации дифференциального оператора при построении разностной схемы. Более низкий порядок дифференциального оператора дает возможность надёжного численного счёта при наличии градиентов решений (дырки в пластине). Поэтому в работе выбрана постановка задачи в деформациях. В дальнейшем в работе при присоединении граничных условий (как статических, так и кинематических) будет показана возможность сведения условий на границе к формулировкам в деформациях.

Зададимся некоторыми криволинейными ортогональными системами координат и сформулируем в них полученное выше уравнение (5).

2. Пример биполярной системы координат. Пусть (x, y) — декартовы координаты. Будем рассматривать биполярные координаты (u, v) , образующие взаимно ортогональную сетку кривых $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Выразим прямоугольные координаты x и y через биполярные u и v с помощью конформного отображения [5]:

$$x + iy = a \operatorname{th} \frac{u + iv}{2}.$$

Разделяя действительную и мнимую части, имеем

$$x = \frac{a \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u + \cos v}, \quad y = \frac{a \sin v}{\operatorname{ch} u + \cos v}. \quad (6)$$

Параметр $a = \text{const}$ задает координаты точек $x = \pm a$, которые называются полюсами. Координатные линии $u = u_0 = \text{const}$ представляют собой эксцентрисические окружности с центрами на оси OX :

$$(x - a \operatorname{cth} u_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 u_0}. \quad (7)$$

Координатные линии $v = v_0 = \text{const}$ — дуги окружностей с центрами на оси OY , проходящие через полюсы:

$$x^2 + (y + a \text{ctg } v_0)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 v_0}. \quad (8)$$

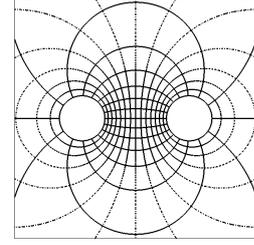


Рис. 1

Рассматриваемая структура армирования изображена на рис. 1.

Вычислим углы армирования φ_1, φ_2 в биполярной системе координат. Для этого продифференцируем (7) по x : $2(x - a \text{cth } u_0) + 2yy'_x = 0$. Отсюда получим

$$\text{tg } \varphi_1 = y'_x = -\frac{(x - a \text{cth } u_0)}{y},$$

и после замены по формулам (6):

$$\text{tg } \varphi_1 = -\frac{\text{sh } u - \text{cth } u_0(\text{ch } u + \cos v)}{\sin v}.$$

Дифференцируя (8) по x , получим

$$x + (y + a \text{ctg } v_0)y'_x = 0.$$

С учётом (6) получаем значение тангенса угла армирования второго семейства волокон:

$$y' = -\frac{x}{y + a \text{ctg } v_0} = -\frac{a \text{sh } u}{a \sin v + a \text{ctg } v_0(\text{ch } u + \cos v)} = \text{tg } \varphi_2.$$

В уравнения структурной модели (2) входят значения квадратов синусов и косинусов углов армирования φ_1, φ_2 и их произведений, находим их через полученные тангенсы по известным формулам тригонометрии. Подстановка коэффициентов Ламе, соответствующих биполярной системе координат, в (5) и дальнейшие преобразования приводят к следующему виду уравнения совместности относительно физических компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial u \partial v} + \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u + \cos v} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial u} + \frac{\sin v}{\text{ch } u + \cos v} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial v} - \\ & - \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u + \cos v} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial u} - \frac{\sin v}{\text{ch } u + \cos v} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial v} - 2 \frac{\sin v}{\text{ch } u + \cos v} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial u} + \\ & + 2 \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u + \cos v} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial v} + 2 \frac{1 + \text{ch } u \cos v}{(\text{ch } u + \cos v)^2} \varepsilon_{11} + 2 \frac{1 + \text{ch } u \cos v}{(\text{ch } u + \cos v)^2} \varepsilon_{22} + \\ & + 4 \frac{\text{sh } u \sin v}{(\text{ch } u + \cos v)^2} \varepsilon_{12} = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

3. Разрешающая система дифференциальных уравнений плоской задачи армированных сред в деформациях в криволинейной системе координат. Для формулировки разрешающей системы в деформациях к полученному уравнению совместности деформаций добавляем два уравнения равновесия (1),

сформулированные в деформациях после подстановки в них (2), (3). Деформации в волокне находим по структурной модели [2]:

$$\varepsilon_{11}l_{k1}^2 + \varepsilon_{22}l_{k2}^2 + 2\varepsilon_{12}l_{k1}l_{k2} = \varepsilon_k^0. \quad (10)$$

В формулах (10) использованы следующие обозначения: $\varepsilon_k^T = \alpha_k^a T$, $\varepsilon_k^0 = \varepsilon_k + \varepsilon_k^T$, α_k^a — коэффициенты линейного расширения материала k -того семейства волокон ($k \in \{1, 2\}$). В формулы входит напряжение в волокне, оно вычисляется по закону Гука $\sigma_k = E_k \varepsilon_k + E_k \varepsilon_k^T$, где E_k — модуль Юнга материала k -того семейства волокон. После преобразований с учетом условия постоянства сечений волокон (4) имеем следующий вид уравнений равновесия в деформациях:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial u} + a_{12} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial v} + a_{13} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial u} + a_{14} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial v} + a_{15} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial u} a_{16} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial v} + \\ + F_1(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,u}, \varphi_{1,v}, \varphi_{2,u}, \varphi_{2,v}) + H_1 H_2 \Phi_1 = 0, \\ a_{21} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial v} + a_{23} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial u} + a_{24} \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial v} + a_{25} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial u} a_{26} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial v} + \\ + F_2(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,u}, \varphi_{1,v}, \varphi_{2,u}, \varphi_{2,v}) + H_1 H_2 \Phi_2 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Коэффициенты a_{sr} в (11) определяются следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= H_2(\Omega m_3 + E_1 \omega_1 \cos^4 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^4 \varphi_2), \\ a_{12} &= H_1(E_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2), \\ a_{13} &= H_2(\Omega \nu m_3 + E_1 \omega_1 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_2), \\ a_{14} &= H_1(E_1 \omega_1 \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 + E_2 \omega_2 \sin^3 \varphi_2 \cos \varphi_2), \\ a_{15} &= 2H_2(E_1 \omega_1 \cos^3 \varphi_1 \sin \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^3 \varphi_2 \sin \varphi_2), \\ a_{16} &= 2H_1(E_1 \omega_1 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_2 + \Omega m_4/2), \\ a_{21} &= H_2(E_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \cos^3 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \sin \varphi_2 \cos^3 \varphi_2), \\ a_{22} &= H_1(\nu m_3 \Omega + E_1 \omega_1 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \sin^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_2), \\ a_{23} &= H_2(E_1 \omega_1 \cos \varphi_1 \sin^3 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos \varphi_2 \sin^3 \varphi_2), \\ a_{24} &= H_1(\Omega m_3 + E_1 \omega_1 \sin^4 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \sin^4 \varphi_2), \\ a_{25} &= 2H_2(\Omega m_4/2 + E_1 \omega_1 \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 + E_2 \omega_2 \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_2), \\ a_{26} &= 2H_1(E_1 \omega_1 \sin^3 \varphi_1 \cos \varphi_1 + E_2 \omega_2 \sin^3 \varphi_2 \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Найденная совокупность трех уравнений (5), (11) и представляет собой исходную разрешающую систему уравнений относительно трёх компонент тензора деформаций ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} .

4. Тип разрешающей системы плоской задачи в деформациях в криволинейной системе координат. Полученная выше система имеет следующую особенность — дифференциальные уравнения, входящие в систему, имеют разный порядок: первое уравнение (5) содержит вторые производные от неизвестных функций, два вторых уравнения — первые производные.

Для установления типа системы и дальнейшей постановки краевой задачи применим детерминантный метод [6, 7], предварительно продифференцировав уравнения (11) по любой из независимых переменных. После дифференцирования порядок системы не меняется (максимальный порядок производной, входящей в систему второй), но система становится системой типа Коши—Ковалевской [8] и, следовательно, возможно построение характеристического определителя. Запишем полученную систему в виде

$$A^{11} \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial u^2} + 2A^{12} \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial u \partial v} + A^{22} \frac{\partial^2 \bar{\varepsilon}}{\partial v^2} + \bar{F} = 0, \quad (12)$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})$. Вектор \bar{F} содержит первые производные искомым неизвестных и правые части уравнений (5), (11). Коэффициентами системы (12) являются квадратные матрицы третьего порядка A^{11} , A^{22} , A^{12} , они имеют такой вид:

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 \\ a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{25} \end{pmatrix}, \quad 2A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_3 \\ a_{12} & a_{14} & a_{16} \\ a_{22} & a_{24} & a_{26} \end{pmatrix}, \quad A^{22} = \begin{pmatrix} C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для анализа типа систем согласно [7] построим характеристическое уравнение вида

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}) = 0.$$

После подстановки матриц A^{11} , A^{12} , A^{22} найдем корни λ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} C_2 & C_1\lambda^2 & C_3\lambda \\ (a_{11}\lambda^2 + a_{12}\lambda) & (a_{13}\lambda^2 + a_{14}\lambda) & (a_{15}\lambda^2 + a_{16}\lambda) \\ (a_{21}\lambda^2 + a_{22}\lambda) & (a_{23}\lambda^2 + a_{24}\lambda) & (a_{25}\lambda^2 + a_{26}\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Далее при анализе характеристического уравнения ограничимся случаем, когда углы армирования совпадают с направлениями координатных линий, т. е. $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$. Заметим, что в каждой точке (u, v) коэффициенты Ламе равны между собой ($H_1 = H_2$), поскольку ортогональные системы координат вводятся аналитическими функциями комплексного переменного; следовательно, выполняются условия Коши—Римана [5]. Исходный характеристический определитель упрощаем и приравниваем нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & -2\lambda \\ \lambda(\Omega m_3 + E_1 \omega_1) & \lambda \Omega m_3 & \Omega m_4 \\ \Omega \nu m_3 & \Omega m_3 + E_2 \omega_2 & \Omega m_4 \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Соотношение (13) представляет собой неполное алгебраическое уравнение четвёртого порядка (биквадратное уравнение относительно λ). Коэффициенты этого уравнения зависят от технических характеристик материалов связующего и арматуры, интенсивностей армирования $\omega_1(u, v)$, $\omega_2(u, v)$, для которых справедливо физическое ограничение $0 < \omega_1(u, v), \omega_2(u, v) < 0,7$. Для широкого класса известных материалов, задавшись значениями коэффициентов Пуассона ν , модулями Юнга связующего и волокон E , E_1 , E_2 и учитывая ограничения для интенсивностей $\omega_1(u, v)$, $\omega_2(u, v)$, решаем биквадратное

уравнение путём замены и сведения к квадратному. При этом устанавливаем, что дискриминант квадратного уравнения строго больше нуля, а корни квадратного уравнения отрицательны. Следовательно, биквадратное уравнение (13) имеет четыре чисто мнимых попарно сопряжённых корня. Поэтому исходная система дифференциальных уравнений в частных производных (5), (11) является системой эллиптического типа [7].

Рассмотрим предельный случай: $\omega_1 = \omega_2 = 0$, нет армирующих семейств волокон. Тогда характеристический определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda^2 & -2\lambda \\ \lambda \frac{E}{1-\nu^2} & \lambda \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1+\nu} \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & \lambda \frac{E}{1+\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразований получим уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Оно имеет четыре чисто мнимых попарно сопряжённых корня ($\lambda = \pm i$). Это подтверждает известный в литературе факт об эллиптичности классической задачи теории упругости изотропного тела.

5. Граничные условия на криволинейном контуре в криволинейной системе координат. Полное напряжение на наклонной площадке с ортом $\bar{\nu}$ представляется в виде векторной суммы $\bar{P}_\nu = \bar{\sigma}_\nu + \bar{\tau}_\nu$, где $\bar{\sigma}_\nu = \sigma_\nu \bar{\nu}$ — нормальное напряжение, $\bar{\tau}_\nu$ — полное касательное напряжение. Разложение \bar{P}_ν в плоской декартовой системе координат с ортами \bar{i}, \bar{j} имеет вид $\bar{P}_\nu = X_\nu \bar{i} + Y_\nu \bar{j}$.

Если орт нормали $\bar{\nu}$ к контуру определен как вектор $\bar{\nu} = l\bar{i} + m\bar{j}$, то орт касательной \bar{s} на этой площадке $\bar{s} = m\bar{i} - l\bar{j}$. В скалярной форме напряжения на площадке с ортом $\bar{\nu}$ задаются соотношениями

$$\sigma_\nu = (\bar{P}_\nu, \bar{\nu}) = X_\nu l + Y_\nu m, \quad \tau_\nu = (\bar{P}_\nu, \bar{s}) = X_\nu m - Y_\nu l. \quad (14)$$

Величины l, m — направляющие косинусы углов, которые образует $\bar{\nu}$ с ортами осей координат. Значения X_ν, Y_ν выражаем через компоненты напряжений:

$$X_\nu = \sigma_{11}l + \sigma_{12}m, \quad Y_\nu = \sigma_{12}l + \sigma_{22}m. \quad (15)$$

Подставим (15) в (14), получим значение нормального и касательного напряжений на граничном контуре:

$$\sigma_\nu = \sigma_{11}l^2 + \sigma_{22}m^2 + 2\sigma_{12}lm, \quad \tau_\nu = (\sigma_{11} - \sigma_{22})lm + \sigma_{12}(m^2 - l^2). \quad (16)$$

Если векторная функция описывается в криволинейных координатах u, v , то применяют локальный базис из векторов, касательных к координатным линиям либо перпендикулярных к ним. Функции $\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial y}{\partial v}$ являются направляющими косинусами орта i -той координатной линии по отношению к осям OX, OY . Поэтому статические граничные условия (16) на контуре Γ_s при заданных p_n, p_τ относительно физических компонент тензора напряжений σ_{ij} преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial x}{\partial u} + \sigma_{22} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial y}{\partial v} + 2\sigma_{12} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial y}{\partial v} &= p_n, \\ (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \sigma_{12} \left(\frac{1}{g_{11}} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{g_{22}} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right) &= p_\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

В (17) g_{ii} – компоненты метрического тензора. Для формулировки граничных условий в деформациях в (17) подставим выражения для напряжений через деформации по формулам (2).

Пусть на граничном контуре Γ_u заданы кинематические условия для перемещений u_1, u_2 :

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \quad (18)$$

В соотношениях (18) $u_1^0(s), u_2^0(s)$ – известные функции. Дифференцируем заданные функции по формулам Коши в криволинейных координатах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial u} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial v} u_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial v} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial u} u_1, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u_1}{H_1} \right), \end{aligned}$$

где u_i – компоненты вектора смещений. В результате получим значения для компонент тензора деформаций на рассматриваемом контуре. Когда на одной части контура заданы статические граничные условия, а на другой – кинематические, комбинируем описанные выше случаи и устанавливаем формулировку граничных условий в деформациях.

Изложенный выше подход позволил получить разрешающие системы дифференциальных уравнений для структур армирования по ортогональным траекториям, изображенным на рис. 2.

Некоторые численные решения на основе установленных систем для структур армирования по параболическим, эллиптическим, гиперболическим системам координат получены в [9].

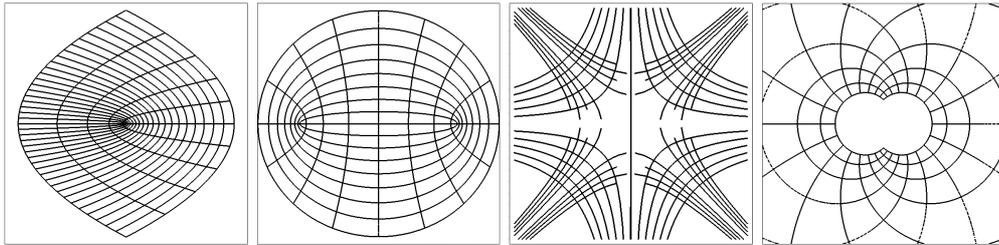


Рис. 2

6. Выводы. Для определения предельных деформаций плоских конструкций с криволинейными траекториями армирования в рамках плоской задачи на основе структурной модели в работе получены разрешающие уравнения для линейной ортотропной неоднородной задачи упругости в случаях биполярной, эллиптической, параболической, гиперболической, кардиоидальной

систем координат. Детерминатным методом исследован тип полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент тензора деформаций, поставлена краевая задача. Предложен численный алгоритм решения этой задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.: ОНТИ, 1935. — 674 с.
2. Nemirovsky Yu. V. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer // *Int. J. Mech. Sci.*, 1970. — No. 12. — P. 898–903.
3. Демидов С. П. Теория упругости. — М.: Высш. шк., 1979. — 432 с.
4. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1979. — 560 с.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1987. — 688 с.
6. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
7. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
8. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — 336 с.
9. Немировский Ю. В., Кургузов В. Д. Прочность и жёсткость стеновых железобетонных панелей со сложными структурами армирования // *Извест. вузов. Строительство*, 2003. — № 2. — С. 4–11.

Поступила в редакцию 25/VI/2010;
в окончательном варианте — 20/IX/2010.

MSC: 74A40, 74K20

REINFORCEMENT OF PLANAR STRUCTURES ALONG ORTHOGONAL CURVILINEAR TRAJECTORIES

*Yu. V. Nemirovsky*¹, *N. A. Feodorova*²

¹ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya str., Novosibirsk, 660041.

² Institute of Space and Information Technologies, Siberian Federal University,
79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660074.

E-mails: ran@akadem.ru

The resolving equations for linear orthotropic non-homogeneous elasticity problem, including the deformation compatibility equation, are obtained in cases of bipolar, elliptic, parabolic, hyperbolic and cardioidal coordinate systems for planar constructions extreme deformations detection in the context of planar problem. The type of obtained partial differential equations system for deformations tensor components is examined using the determinantal method.

Key words: reinforcement, structural model, curvilinear trajectories.

Original article submitted 25/VI/2010;
revision submitted 20/IX/2010.

Yuriy N. Nemirovsky (Dr. Sc. (Phys. & Math.)), Chief Scientist, Lab. of Fast Processes Physic.
Nataliya A. Feodorova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Security.