Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (22). С. 83–89

УДК 517.28+517.958+517.957

МЕТОД ОБОБЩЁННЫХ ПОДСТАНОВОК КОУЛА—ХОПФА В ТЕОРИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. Журавлев, К. С. Обрубов

Ульяновский государственный университет,
432001, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42.

E-mails: zhvictorm@gmail.com, constantin.phys@gmail.com

Рассматриваются результаты применения метода обобщённых подстановок Коула—Хопфа к интегрированию конечномерных динамических систем. Динамические системы представляются в форме матричных обыкновенных дифференциальных уравнений с заданной алгеброй матриц конечной размерности. К матричным уравнениям применяются подстановки типа Коула—Хопфа, использующие дифференцирование на алгебре в форме матричных коммутаторов с заданным элементом алгебры. Найдены рекуррентные соотношения для подстановок Коула—Хопфа. Приведены конкретные примеры точно интегрируемых динамических систем. Указан метод вычисления интегралов движения таких систем и их точных решений.

Ключевые слова: *уравнения типа Бюргерса, обобщённые подстановки Коула—Хопфа, конечномерные динамические системы.*

Введение. К настоящему времени методы интегрирования нелинейных уравнений математической физики в частных производных представлены несколькими достаточно общими методами, среди которых наиболее важную роль играют два. Это метод обратной задачи в разных вариантах [1, 2] и метод подстановок Коула—Хопфа [3]. Для конечномерных динамических систем прогресс в решении аналогичной проблемы построения полезных интегрируемых уравнений выглядит значительно скромнее. Здесь общие результаты в основном сводятся к отысканию уравнений, обладающих некоторым набором интегралов движения, как это имеет место для случая конечномерных гамильтоновских систем. Поскольку, как правило, сам по себе вид законов сохранения не выделяет среди множества всех возможных динамических систем системы с заданными физическими свойствами, простой перебор таких наборов оказывается мало полезным на практике. В результате возникает задача отыскания каких-либо методов, которые бы позволяли строить интегрируемые конечномерные динамические системы исходя из каких-либо других их свойств, как это имеет место в случае методов обратной задачи или подстановок Коула—Хопфа [3]. В настоящей работе предлагается один такой метод, строящийся на базе метода обобщённых подстановок Коула—Хопфа, который был развит в работах [3, 4]. Основная идея переноса метода подстановок Коула—Хопфа на конечномерные динамические системы состоит в замене производных по пространственной координате на производную на матричной алгебре, эквивалентную матричному коммутатору по одной из образующих алгебры. В работе развивается общая идеология такого подхода и приводятся результаты ее применения для некоторых алгебр небольшой размерности.

Виктор Михайлович Журавлев (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. теоретической физики.
Константин Сергеевич Обрубов, аспирант, каф. теоретической физики.

1. Дифференциально-алгебраический аналог обобщённых подстановок Коула—Хопфа. Рассмотрим матричные функции времени $\hat{T}(t)$, заданные на некоторой матричной алгебре $\mathcal{A}$ с конечным числом образующих $\hat{q}_i$:

$$\hat{T} = \sum_{i=1}^{N} \tau_i(t)\hat{q}_i. \tag{1}$$

На алгебре $\mathcal{A}$ рассмотрим оператор, действующий на любую функцию $\hat{F} = \sum_{i=1} N\phi_i(t)\hat{q}_i$ на этой алгебре по правилу

$$\hat{D}_x\hat{F} = [\hat{x},\, \hat{F}] = \sum_{i=1} N\phi_i(t)[\hat{x},\, \hat{q}_i], \tag{2}$$

где $\hat{x} = \xi_i\hat{q}_i$ — некоторый выделенный не зависящий от времени t элемент алгебры $\mathcal{A}$. Из (2) следует, что

$$\hat{D}_x\hat{F} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(t)\xi_j[\hat{q}_j,\, \hat{q}_i].$$

Пусть для образующих алгебры выполнены следующие соотношения:

$$\hat{q}_k\hat{q}_j = \sum_{i=1}^{N} C_{kji}\hat{q}_i.$$

Тогда имеем:

$$\hat{D}_x\hat{F} = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(t)\xi_j\Big[C_{jik} - C_{ijk}\Big]\hat{q}_k.$$

Можно видеть, что оператор $\hat{D}_x$ представляет собой оператор дифференцирования в том смысле, что он удовлетворяет правилу Лейбница. Ещё одним свойством оператора $\hat{D}_x$ является его перестановочность (коммутативность) с производной по переменной t, что обеспечивается независимостью от t выделенного элемента $\hat{x}$. Эти два свойства позволяют применить к уравнениям на любой матричной алгебре $\mathcal{A}$ метод обобщённых подстановок Коула—Хопфа, развитый в [3].

Для сокращения записи введём следующие обозначения:

$$\hat{T}_t = \frac{d}{dt}\hat{T}, \quad \hat{T}_x = \hat{D}_x\hat{T} = [\hat{x},\, \hat{T}], \quad \hat{T}_{xx} = \hat{D}_x\hat{D}_x\hat{T} = [\hat{x},\, [\hat{x},\, \hat{T}]], \ldots .$$

Аналогичные обозначения вводятся и для других матриц. По аналогии с [3] рассмотрим следующую совокупность дифференциальных соотношений для вспомогательной функции $\hat{T}$:

$$\hat{T}_t + \hat{V}\hat{T}_x = 0, \quad \hat{T}_{xx} + \hat{U}\hat{T}_x = 0, \quad \hat{T}_{xt} + \hat{Q}\hat{T}_x = 0, \tag{3}$$
$$\hat{T}_{xxx} = -\Big(\hat{U}_x - \hat{U}^2\Big)\hat{T}_x = 0,$$

$$\hat{T}_{xxt} = -\Big(\hat{U}_t - \hat{U}\hat{Q}\Big)\hat{T}_x = -\Big(\hat{Q}_x - \hat{Q}\hat{U}\Big)\hat{T}_x. \tag{4}$$

Здесь $\hat{Q} = -\Big(\hat{V}_x - \hat{V}\hat{U}\Big)$. Из равенства (4) следует соотношение

$$\hat{U}_t - \hat{Q}_x + [\hat{Q},\, \hat{U}] = 0,$$

связывающее матрицы $\hat{U}$ и $\hat{Q}$ в случае, если они определены соотношениями (3) при произвольной матрице $\hat{T}$. Это соотношение можно переписать таким образом:

$$\hat{U}_t - [\hat{x},\, \hat{Q}] + [\hat{Q},\, \hat{U}] = \hat{U}_t + [\hat{Q},\, (\hat{U} + \hat{x})] = 0. \tag{5}$$

Полагая

$$\hat{V} = \sum_{i=1}^{N} v_i \hat{q}_i, \quad \hat{U} = \sum_{i=1}^{N} u_i \hat{q}_i, \quad \hat{Q} = \sum_{i=1}^{N} q_i \hat{q}_i,$$

находим

$$\hat{Q} = -[\hat{x},\, \hat{V}] + \hat{V}\hat{U} = -\sum_{i,j,k=1}^{N} \Big([C_{jki} - C_{kji}]\xi_j + C_{jki}u_j\Big)v_k \hat{q}_i.$$

Отсюда

$$q_i(t) = -\sum_{j,\,k=1}^{N} \Big([C_{jki} - C_{kji}]\xi_j + C_{jki}u_j\Big)v_k. \tag{6}$$

В результате получаем, что уравнение (5) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\dot{u}_n = -\sum_{i,\,j=1}^{N} C_{ijn} q_i (u_j + \xi_j), \quad n = 1,\, 2,\, \ldots,\, N.$$

Подставляя в это уравнение соотношения (6), получаем систему уравнений

$$\dot{u}_n = \sum_{i,\,j=1}^{N} C_{ijn}\Big(C_{jki}(u_j + \xi_j) - C_{kji}\xi_j\Big)v_k(u_j + \xi_j),$$

представляющую собой совокупность дифференциальных тождеств, которым удовлетворяют функции $v_k(t)$, $u_k(t)$ в случае, если они вычисляются из соотношений (3) при произвольной матричной функции $\hat{T}$, заданной соотношением (1) на алгебре $\mathcal{A}$.

2. Общий метод дискретных подстановок Коула—Хопфа. Общий метод построения интегрируемых с помощью подстановок Коула—Хопфа дискретных систем, как и в случае уравнений в частных производных, состоит в явном вычислении нелинейного уравнения исходя из конкретного вида произвольного интегрируемого уравнения, например линейного, с помощью дифференциальных соотношений (3) и их произвольного порядка дифференциальных следствий относительно вспомогательной матричной функции $\hat{T}$. Именно из

(3) по аналогии с [3] можно получить все возможные дифференциальные соотношения следующего вида:

$$\frac{d^n}{dt^n}\underbrace{[\hat{x},\cdots,[\hat{x},\hat{T}]]}_{k}=\hat{A}^{(n,k)}[\hat{x},\hat{T}],\quad n=0,1,\ldots;\quad k=0,1,\ldots. \tag{7}$$

Матричные коэффициенты $\hat{A}^{(n,k)}$ могут быть вычислены с помощью рекуррентных соотношений:

$$\hat{A}^{(n+1,k)}=\frac{d}{dt}\hat{A}^{(n,k)}-\hat{A}^{(n,k)}\hat{Q},\quad \hat{A}^{(n,k+1)}=[\hat{x},\hat{A}^{(n,k)}]-\hat{A}^{(n,k)}\hat{U} \tag{8}$$

при начальных условиях

$$\hat{A}^{(0,1)}=\hat{1},\quad \hat{A}^{(1,0)}=-\hat{V},\quad \hat{A}^{(0,2)}=-\hat{U}.$$

Матричные коэффициенты $\hat{A}^{(n,k)}$ являются дифференциальными полиномами от функций $\hat{U}$ и $\hat{V}$.

В результате любому линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\hat{T}$ вида

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=0}^{L}\hat{C}_{k,n}(t)\frac{d^n}{dt^n}\underbrace{[\hat{x},\cdots,[\hat{x},\hat{T}]]}_{k}=0,\quad \hat{C}_{0,0}=0 \tag{9}$$

с произвольными функциями $\hat{C}_{k,n}(t)$ с помощью дифференциальных соотношений (7) можно поставить в соответствие нелинейное уравнение относительно функций $\hat{V}$ и $\hat{U}$:

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=0}^{L}\hat{C}_{k,n}(t)\hat{A}^{(n,k)}=0,\quad \hat{C}_{0,0}=0. \tag{10}$$

Из самого принципа построения уравнений (10) следует, что их интегрируемость связана напрямую с интегрируемостью уравнений (9). Действительно, в случае интегрируемости уравнений (9) имеется возможность явно вычислить решения для матричной функции $\hat{T}$. Тогда в силу дифференциальных соотношений (3) вычисляются явно функции $\hat{U}$, $\hat{V}$, $\hat{Q}$, которые заведомо обращают уравнения (10) в тождество. Соотношения (3) и являются собственно обобщёнными подстановками типа Коула—Хопфа.

3. Интегралы движения. Рассмотрим случай $\hat{C}_{k,n}=\mathrm{const}$, для которого запишем явно интегралы движения. Представим уравнения (10) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{M}\sum_{n=1}^{L}\hat{C}_{k,n}\hat{A}^{(n,k)}+\sum_{n=2}^{L}\hat{C}_{0,n}\hat{A}^{(n,0)}+\sum_{k=2}^{M}\hat{C}_{k,0}\hat{A}^{(0,k)}=\hat{C}_{1,0}\hat{V}-\hat{C}_{0,1}\hat{1}. \tag{11}$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями (8), преобразуем (11) к виду

$$\frac{d}{dt}\left[(\hat{F}+\hat{F}_0)[\hat{x},\hat{T}]+\hat{C}_{1,0}\hat{T}\right]+\left[\hat{x},\hat{G}_0[\hat{x},\hat{T}]+\hat{C}_{0,1}\hat{T}\right]=0. \tag{12}$$

Здесь введены $\hat{F}_0 = \sum_{n=2}^{L} \hat{C}_{0,n} \hat{A}^{(n-1,0)}$, $\hat{G}_0 = \sum_{k=2}^{M} \hat{C}_{k,0} \hat{A}^{(0,k-1)}$ и использовано первое из уравнений (3).

Полученное соотношение (12) представляет собой аналог дифференциального закона сохранения в теории уравнений с частными производными. Вычисляя след этого уравнения и учитывая, что след коммутатора равен нулю, приходим к общему интегралу движения:

$$\mathrm{Sp}\left\{\left[(\hat{F}+\hat{F}_0)[\hat{x},\hat{T}]+\hat{C}_{1,0}\hat{T}\right]\right\} = I_0 = \mathrm{const}.$$

Для построения других законов сохранения воспользуемся формулой

$$[\hat{x}^{n+1},\hat{T}] = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}^k [\hat{x},\hat{T}] \hat{x}^{n-k}.$$

Применяя эти соотношения к (12), приходим к совокупности аналогов дифференциальных законов сохранения:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{n} \hat{x}^k \left[(\hat{F}+\hat{F}_0)[\hat{x},\hat{T}]+\hat{C}_{1,0}\hat{T}\right] \hat{x}^{n-k}\right] + \\ + \left[\hat{x}^{n+1}, \hat{G}_0[\hat{x},\hat{T}]+\hat{C}_{0,1}\hat{T}\right] = 0, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Этим законам сохранения соответствуют следующие интегралы движения:

$$\mathrm{Sp}\left\{\sum_{k=0}^{n} \hat{x}^k \left[(\hat{F}+\hat{F}_0)[\hat{x},\hat{T}]+\hat{C}_{1,0}\hat{T}\right] \hat{x}^{n-k}\right\} = I_n = \mathrm{const}.$$

4. Построение точных решений уравнений. Решения уравнений, получаемых в результате использования метода, описанного выше, строятся с помощью явного вычисления решения уравнения для функций τ_k в представлении матрицы $\hat{T}$, которая удовлетворяет дополнительному уравнению. Дополнительные уравнения (7) для произвольного n эквивалентны следующей системе уравнений для τ_k:

$$\dot{\tau}_k = P^{(n)}_{km} \tau_m. \tag{13}$$

Коэффициенты $P^{(n)}_{km}$ образуют квадратную матрицу $\mathbf{P}^{(n)}$ размера N, которая может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}(\mathbf{Q})^n.$$

Решение уравнения (13) строится без труда. Обозначим собственные числа матрицы $\mathbf{P}^{(n)}$ через λ_1, λ_2, ..., λ_N, а её собственные векторы (столбцы) — через $\mathbf{h}_{(1)}$, $\mathbf{h}_{(2)}$, ..., $\mathbf{h}_{(N)}$. Тогда решение уравнения можно записать виде

$$\tau_j(t) = \sum_{k=1}^{N} e^{\lambda_k t} C_k h_{j(k)},$$

где C_k — произвольные постоянные интегрирования. Соответствующий данному решению вид функций $u_k(t)$ определяется из соотношений (3). В явном виде соотношение для вычисления $u_k(t)$ можно представить таким образом:

$$\mathbf{Au} = -\mathbf{f},$$

где $\mathbf{u} = \mathrm{column}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, $\mathbf{f} = \mathbf{Q}^2\mathbf{t} = \mathrm{column}(f_1, f_2, \ldots, f_N)$, $\mathbf{t} = \mathrm{column}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)$, а матрица $\mathbf{A}$ имеет следующие элементы:

$$A_{ij}(t) = \sum_{k,\,m=1}^{N} C_{jmi} Q_{mk} \tau_k(t).$$

Обращая матрицу $\mathbf{A}$, находим решение для $\mathbf{u}(t)$ в общем виде:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{f}(t).$$

Заключение. Построенная схема может быть использована для вычисления интегрируемых конечномерных динамических систем и их интегралов движения исходя из общего вида нелинейности и типа симметрии. Тип симметрии задаётся типом матричной алгебры, на которой строится дифференциальное уравнение, а тип нелинейности задаётся интегрируемым уравнением для матричной функции $\hat{T}_x$. D силу ограниченности объёма статьи конкретные примеры в данной работе не приводятся. Однако их можно без труда получить, опираясь на развитую схему.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (проект НК–594П/8).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов и метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980. 320 с. [*Zaharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevskiy L. P.* Theory of solitons. The method of the inverse problem. Moscow: Nauka, 1980. 320 pp.]
2. *Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., Morris H. C.* Solitons and nonlinear wave equations. London, New York: Academic Press, 1982. 630 pp.; русск. пер.: *Дод Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
3. *Журавлев В. М.* Метод обобщённых подстановок Коула—Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // *Теоретическая и математическая физика*, 2009. Т. 158, № 1. С. 58–71; англ. пер.: *Zhuravlev V. M.* The method of generalized Cole–Hopf substitutions and new examples of linearizable nonlinear evolution equations // *Theoret. and Math. Phys.*, 2009. Vol. 158, no. 1. Pp. 48–60.
4. *Журавлев В. М., Зиновьев Д. А.* Метод обобщённых подстановок Коула—Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости // *Письма в ЖЭТФ*, 2008. Т. 88, № 3. С. 194–197; англ. пер.: *Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A.* Method of generalized Cole–Hopf substitutions for dimension 1+2 and integrable models for two-dimensional compressible flows // *JETP Letters*, 2008. Vol. 88, no. 3. Pp. 164–166.

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 27/II/2011.

MSC: 70G60; 35Q70

METHOD OF GENERAL COULE–HOPF SUBSTITUTIONS IN THEORY OF FINITE-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS

V. M. Zhuravlev, K. S. Obrubov

Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432001, Russia.

E-mails: zhvictorm@gmail.com, constantin.phys@gmail.com

We consider the results of applying the method of generic Cole–Hopf substitutions to integration of finite-dimensional dynamical systems. Dynamical systems are represented in the form of matrix ordinary differential equations with specific matrix algebra of finite dimension. The Cole–Hopf type substitutions are applied to matrix equations by using the differentiation on algebra in the form of commutator with a specific algebra element. Recurrent relations for Cole–Hopf substitutions were found. Particular cases of exactly integrable dynamical systems are presented. The algorithm of calculating the integrals of motion is shown.

Key words: *Burgers type equations, general Cole–Hopf substitution, finite-dimensional dynamical systems.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 27/II/2011.

Victor M. Zhuravlev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Theoretical Physics.
Konstantin S. Obrubov, Postgraduate Student, Dept. of Theoretical Physics.