

УДК 517.98

p-АДИЧЕСКИЕ ВМО- И VMO-ФУНКЦИИ**Е. И. Зеленов**Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
119991, Москва, ул. Губкина, 8.

E-mails: evgeny.zelenov@gmail.com

*Рассматриваются пространства ВМО- и VMO-функций над полем p -адических чисел. Доказывается плотность пространства локально постоянных функций в пространстве VMO-функций относительно ВМО-нормы.***Ключевые слова:** p -адический анализ, ВМО-функции, VMO-функции.

1. ВМО- и VMO-функции. Пространства функций с ограниченными средними колебаниями (Bounded Mean Oscillations, ВМО-функции) и функций с малыми средними колебаниями (Vanishing Mean Oscillations, VMO-функции) являются одними из стандартных, широко используемых пространств в теории вещественных функций на окружности. [1].

В последнее время возник интерес к изучению и использованию такого рода пространств над полем p -адических чисел [2, 3].

Пусть f — измеримая функция на $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через f_B среднее функции f по шару B :

$$f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu.$$

Через $M_k(f)$ обозначим следующее выражение:

$$M_k(f) = p^k \sup_{B: \mu(B) \leq p^{-k}} \int_B |f - f_B| d\mu.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что измеримая на $\mathbb{Z}_p$ функция f является функцией с ограниченными средними колебаниями (ВМО-функцией), если $M_k(f)$ равномерно ограничено по k .

Легко проверить, что отображение

$$f \rightarrow \|f\|_{\text{ВМО}} = \sup_k M_k(f)$$

задаёт полунорму на пространстве ВМО-функций, ядро полунормы образует постоянные функции. Очевидно, что ограниченные измеримые на $\mathbb{Z}_p$ функции являются ВМО-функциями. Вместо полунормы часто удобнее рассматривать норму, которую будем обозначать тем же символом:

$$f \rightarrow \|f\|_{\text{ВМО}} = \sup_k M_k(f) + |f(0)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. ВМО-функцию f назовём функцией с малыми средними колебаниями (VMO-функцией), если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k(f) = 0.$$

Евгений Игоревич Зеленов (к.ф.-м.н.), докторант, отдел математической физики.

Легко увидеть, что ВМО-функции образуют замкнутое относительно ВМО-нормы подпространство в пространстве ВМО-функций.

Комплекснозначная функция f p -адического аргумента называется локально постоянной функцией порядка k ($\text{ord}(f) = k$), если она постоянна на всех шарах радиуса p^{-k} , причем k — минимальное целое число с таким свойством. Пространство комплекснозначных локально постоянных на $\mathbb{Z}_p$ функций будем обозначать через $\mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$.

2. ВМО-функции и локально постоянные функции. Понятие ВМО-функции является естественным понятием для комплекснозначных функций p -адического аргумента. Действительно, локально постоянные на $\mathbb{Z}_p$ функции с очевидностью являются ВМО-функциями, причём особого вида. Для локально постоянной функции f , ($f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$) справедливо равенство

$$M_k(f) = 0, \quad \forall k: k \geq \text{ord}(f).$$

Это легко следует из того факта, что локально постоянная функция порядка k представляется в виде линейной комбинации характеристических функций шаров радиуса p^{-k} .

Для любой ВМО-функции f на $\mathbb{Z}_p$ легко построить последовательность локально постоянных функций, сходящуюся по ВМО-норме к f . Действительно, пусть f — ВМО-функция на $\mathbb{Z}_p$. Обозначим через $[f]^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, функцию, которая получена из f путем усреднения по шарам радиуса p^{-k} :

$$[f]^k(x) = p^k \int_{|u|_p \leq p^{-k}} f(x+u) du, \quad x \in \mathbb{Z}_p.$$

Докажем, что при достаточно больших n выполняется неравенство

$$M_k(f - [f]^n) \leq M_n(f). \quad (1)$$

Прежде всего заметим, что при $n > k$ справедливо равенство $f_B = [f]_B^n$, $\mu(B) = p^{-k}$. Действительно, пусть B_i , $i = 1, 2, \dots, p^{n-k}$ — множество шаров радиуса p^{-n} , лежащих в шаре B . Тогда

$$f_B = p^k \int_B f d\mu = p^k \sum_i \int_{B_i} f d\mu = p^k \sum_i \int_{B_i} [f]^n d\mu = [f]_B^n.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_k(f - [f]^n) &= p^k \sup_{B: \mu(B) \leq p^{-k}} \int_B |f - f_B - [f]^n + [f]_B^n| d\mu = \\ &= p^k \sup_{B: \mu(B) \leq p^{-k}} \int_B |f - [f]^n| d\mu = p^k \sup_{B: \mu(B) \leq p^{-k}} \sum_i \int_{B_i} |f - f_{B_i}| d\mu \leq \\ &\leq p^k \sup_{B: \mu(B) \leq p^{-k}} p^{-k} M_n(f) = M_n(f). \end{aligned}$$

Заметим, что при $n \leq k$ выполнено неравенство $M_k(f - [f]^n) \leq M_k(f)$, поскольку в этом случае $M_k([f]^n) = 0$.

Поскольку f — VMO-функция, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N , что для всех $n > N$ будет выполнено неравенство $M_n(f) < \varepsilon$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f - [f]^n\|_{\text{BMO}} &= \sup_k M_k(f - [f]^n) = \\ &= \max \left\{ \sup_{k < n} M_k(f - [f]^n), \sup_{k \geq n} M_k(f - [f]^n) \right\} = \\ &= \max \{M_n(f), M_k(f)\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Пространство VMO-функций на $\mathbb{Z}_p$ является замыканием множества $\mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$ локально постоянных функций на $\mathbb{Z}_p$ относительно BMO-нормы.*

Непосредственным следствием доказанной выше теоремы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Пространство VMO-функций на $\mathbb{Z}_p$ является замыканием множества $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на $\mathbb{Z}_p$ относительно BMO-нормы.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант НШ-7675.2010.1, 09-01-12161-офи-м).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Sarason D.* Function theory on the unit circle: Notes for lectures at a conference at Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1978. 144 с.
2. *Rim K. S., Lee J.* Estimates of weighted Hardy-Littlewood averages on the p -adic vector space // *J. Math. Anal. Appl.*, 2006. Т. 324, № 2. С. 1470–1477.
3. *Volosivets S. S.* Multidimensional Hausdorff operator on p -adic field // *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl.*, 2010. Т. 2, № 3. С. 252–259.

MSC: 11E95, 46E99

p-ADIC BMO AND VMO FUNCTIONS

E. I. Zelenov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences,
8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russia.

E-mails: evgeny.zelenov@gmail.com

Spaces of p -adic BMO and VMO functions are considered. It is proved that locally constant functions are dense in VMO space under BMO norm.

Key words: p -adic analysis, BMO functions, VMO functions.

Original article submitted 12/I/2011;
revision submitted 12/III/2011.