УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. Гималтдинова

[1] Поволжская государственная социально-гуманитарная академия,
Россия, 443099, Самара, ул. М. Горького, 65/67.
[2] Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, Стерлитамак, ул. Ленина, 47 а.

E-mail: *g_alfira@mail.ru*

Получены условия на комплексный параметр, при которых единственно решение задачи Трикоми для уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа.

Ключевые слова: *задача Трикоми, уравнение смешанного типа, единственность решения.*

При изучении краевых задач для уравнений смешанного типа важными являются вопросы единственности решения и расположения спектра соответствующих спектральных задач.

Многими авторами изучалась задача Трикоми для модельного уравнения Лаврентьева—Бицадзе

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0. \qquad (1)$$

В работе [1] А. В. Бицадзе установил принцип экстремума для уравнений смешанного типа и на его основе доказал единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1) при $\lambda = 0$, а также существование решения.

Т. Ш. Кальменов в работе [2] на основе принципа экстремума А. В. Бицадзе и теории положительных решений операторных уравнений М. А. Красносельского доказал существование хотя бы одного собственного значения однородной задачи Трикоми для уравнения (1).

С. М. Пономарев [3] доказал единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1) при $\lambda = \alpha + i\beta$ таких, что $\alpha > 0$ и $|\beta| \leqslant 2\sqrt{2}\alpha$.

Е. И. Моисеев [4] для уравнения (1) с комплексным параметром $\lambda = \mu^2$ установил единственность решения задачи Трикоми при $|\arg \mu| \leqslant \operatorname{arctg} k_0$, где k_0 — корень уравнения $2k = 2k^2 - 1 + 2k\sqrt{2k^2 - 1}$, $k_0 > 1/\sqrt{2}$.

К. Б. Сабитов [5] изучил единственность решения задачи Трикоми для уравнения (1) с кусочно-постоянным параметром $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$.

В данной работе рассматривается смешанное эллиптико-гиперболическое уравнение с двумя линиями изменения типа

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + \operatorname{sgn} x \cdot u_{yy} - \lambda u = 0, \qquad (2)$$

где λ — комплексный параметр, в области D, ограниченной следующими линиями:

Альфира Авкалевна Гималтдинова (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. математики и методики обучения[1]; доцент, каф. математического анализа[2].

1) гладкой кривой Γ, лежащей в первой четверти плоскости (x, y) с концами в точках $A_1(l_1,0)$ и $A_2(0, l_2)$, l_1, $l_2 > 0$;
2) характеристиками OC_1 $(x + y = 0)$ и C_1A_1 $(x - y = l_1)$ уравнения (2) при $x > 0$, $y < 0$;
3) характеристиками OC_2 $(x + y = 0)$ и C_2A_2 $(y - x = l_2)$ при $x < 0$, $y > 0$, где $C_1 = (l_1/2, -l_1/2)$, $C_2 = (-l_2/2, l_2/2)$, $O = (0,0)$.

Введём обозначения: $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$. В области D для уравнения (2) поставим следующую задачу Трикоми.

Задача T. *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}(\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{3}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \tag{4}$$

$$u(x, y)\big|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

$$u(x, y)\big|_{C_1C_2} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in C_1C_2,$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции.

Определение. Под регулярным решением уравнения (2) в области D понимается функция $u(x, y)$, удовлетворяющая условиям (3), (4) и имеющая непрерывные частные производные u_x и u_y в $\overline{D}_0$, за исключением, быть может, точек O, A_1, A_2, где они могут иметь степенную особенность порядка меньше единицы.

В областях D_1 и D_2 для уравнения (2) рассмотрим следующие задачи.

Вторая задача Дарбу.

1) *Найти в области D_1 решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям:*

$$u_y(x,0) = \nu_1(x), \quad x \in (0, l_1), \tag{5}$$

$$u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, l_1/2], \tag{6}$$

где $\nu_1(x)$ — заданная функция.

2) *Найти в области D_2 решение $u(x, y)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям:*

$$u_x(0, y) = \nu_2(y), \quad y \in (0, l_2), \tag{7}$$

$$u(y, -y) = 0, \quad y \in [0, l_2/2], \tag{8}$$

где $\nu_2(y)$ — заданная функция.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.

1) *Если $\nu_1(x) \in \mathrm{C}^1(0, l_1) \cap L_1[0, l_1]$, то существует единственное решение задачи (2), (5) и (6) и оно определяется формулой*

$$u(x, y) = \int_0^{x+y} \nu_1(t) J_0\left[\sqrt{\lambda(x + y - t)(x - y - t)}\right] dt, \tag{9}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$.

2) *Если* $\nu_2(x) \in C^1(0,l_2) \cap L_1[0,l_2]$, *то существует единственное решение задачи* (2), (7) *и* (8) *и оно определяется формулой*

$$u(x,y) = \int_0^{y+x} \nu_2(t) J_0\left[\sqrt{\lambda(y+x-t)(y-x-t)}\right] dt. \qquad (10)$$

Доказательство теоремы 1.1) приведено в [6], а формула (10) получается из (9) заменой x на y, y на x в силу симметричности уравнения (2) относительно $y = x$.

Полагая в формулах (9) и (10) соответственно $y = 0$ и $x = 0$, найдем:

$$\begin{aligned} u(x,0) = \tau_1(x) &= \int_0^x J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] \nu_1(t) dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_1, \\ u(0,y) = \tau_2(y) &= \int_0^y J_0\left[\sqrt{\lambda}(y-t)\right] \nu_2(t) dt, \quad 0 \leqslant y \leqslant l_2. \end{aligned} \qquad (11)$$

Пусть комплексное число $\lambda = \mu^2$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, $\lambda_i,\ \mu_i \in \mathbb{R}$. Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) + iu_2(x,y)$, $\overline{u}(x,y) = u_1(x,y) - iu_2(x,y)$.

Лемма 1. *Если* $u\big|_{AC_1} = 0$, *то для любого регулярного решения уравнения* (2) *имеет место при любом* $x \in [0,l_1]$ *неравенство*

$$\mathrm{Re}\ J_{1a} = \mathrm{Re}\ \int_0^x e^{-2at}\overline{u}(t,0)\, u_y(t,0)\, dt \geqslant 0, \quad a = \mathrm{const} \geqslant |\mu_2|.$$

Доказательство. На основании формулы (11) и интегрального представления функции Бесселя

$$J_q(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(q+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^q \int_0^1 (1-\xi^2)^{q-1/2} \cos(z\xi) d\xi$$

вычислим интеграл

$$\begin{aligned} J_{1a} &= \int_0^x e^{-2at}\nu_1(t)\,\overline{\tau}_1(t)dt = \int_0^x e^{-2at}\nu_1(t) \int_0^t J_0\big[\overline{\mu}_1(t-s)\big]\overline{\nu}_1(s)\, ds\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^x e^{-2at}\nu_1(t) \int_0^t \overline{\nu}_1(s)\, ds \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2}\, e^{i\overline{\mu}(t-s)\,\xi}\, d\xi\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-1/2}\, d\xi \int_0^x e^{-2at} \int_0^t \nu_1(t)\,\overline{\nu}_1(s) e^{(\mu_2+i\mu_1)\,(t-s)\,\xi}\, ds\, dt. \end{aligned} \qquad (12)$$

Предварительно найдем:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left[\nu_1(t)\,\overline{\nu}_1(s)\, e^{i\mu_1\,(t-s)\,\xi}\right] = \\ &\quad = \mathrm{Re}\ \Big(\big[\nu_{11}(t)\,\nu_{11}(s) + \nu_{12}(t)\nu_{12}(s) + i\big(\nu_{12}(t)\,\nu_{11}(s) - \nu_{11}(t)\nu_{12}(s)\big)\big] \times \\ &\qquad\qquad \times \big[\cos\mu_1\,(t-s)\,\xi + i\,\sin\,\mu_1\,(t-s)\,\xi\big]\Big) = \\ &\qquad = \Big[\nu_{11}(t)\,\nu_{11}(s) + \nu_{12}(t)\nu_{12}(s)\Big] \cos\mu_1(t-s)\,\xi - \end{aligned}$$

$$-\Big[\nu_{12}(t)\nu_{11}(s)-\nu_{11}(t)\nu_{12}(s)\Big]\sin\mu_1(t-s)\,\xi=$$
$$=[\nu_{11}(t)\cos\mu_1 t\xi-\nu_{12}(t)\sin\mu_1 t\xi]\,[\nu_{11}(s)\cos\mu_1 s\xi-\nu_{12}(s)\sin\mu_1 s\xi]+$$
$$+[\nu_{11}(t)\sin\mu_1 t\xi+\nu_{12}(t)\cos\mu_1 t\xi][\nu_{11}(s)\sin\mu_1 s\xi-\nu_{12}(s)\cos\mu_1 s\xi]. \quad (13)$$

Введём в рассмотрение вспомогательные функции:

$$P_1(t,\xi)=[\nu_{11}(t)\cos\mu_1 t\xi-\nu_{12}(t)\sin\mu_1 t\xi]\,e^{-\mu_2\,t\xi};$$
$$P_2(t,\xi)=[\nu_{11}(t)\sin\mu_1 t\xi+\nu_{12}(t)\cos\mu_1 t\xi]\,e^{-\mu_2\,t\xi};$$
$$F_i(t,\xi)=\int_0^t P_i(s,\xi)\,ds,\ i=1{,}2.$$

Тогда на основании формул (12) и (13) получим неравенство

$$\operatorname{Re}J_{a_1}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\int_0^x e^{-2t(a-\mu_2\,\xi)}\times$$
$$\times\Big[P_1(t,\xi)\int_0^t P_1(s,\xi)ds+P_2(t,\xi)\int_0^t P_2(s,\xi)ds\Big]dtd\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\int_0^x e^{-2t(a-\mu_2\xi)}\frac{d}{dt}\big[F_1^2(t,\xi)+F_2^2(t,\xi)\big]dtd\xi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{-1/2}\Big(\big[F_1^2(x,\xi)+F_2^2(x,\xi)\big]\,e^{-2x(a-\mu_2\,\xi)}+$$
$$+2(a-\mu_2\xi)\int_0^x\big[F_1^2(t,\xi)+F_2^2(t,\xi)\big]\,e^{-2t(a-\mu_2\,\xi)}\,dt\Big)\,d\xi\geqslant 0,$$

которое доказывает лемму 1. □

Лемма 2. *Если $u|_{AC_2}=0$, то для любого регулярного решения уравнения* (2) *имеет место при любом $y\in[0,l_2]$ неравенство*

$$\operatorname{Re}J_{2a}=\operatorname{Re}\int_0^y e^{-2at}\overline{u}(0,t)\,u_x(0,t)\,dt\geqslant 0.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3. *Если $u\big|_\Gamma=0$, то справедливо неравенство*

$$\iint_{D_0}u^2dxdy\leqslant 9\,\mathrm{mes}\,D_0\iint_{D_0}|\nabla u|^2dxdy,$$

где $\mathrm{mes}\,D_0$ — площадь области D_0.

Доказательство. Отобразим область D_0 симметрично относительно оси Ox и полученную область обозначим D_0^*. Затем область $Q_1=D_0\cup D_0^*\cup OA_1$ отобразим относительно оси Oy, получим область Q_2. Теперь в области $Q=Q_1\cup Q_2\cup A_2B_2$, где $B_2(0,-l_2)$ — точка, симметричная точке A_2, доопределим функцию $u(x,y)$ чётным образом по обеим переменным, т. е. получим функцию $\tilde{u}(x,y)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Используя оценку [7, с.71]

$$||u||_{2,\Omega}\leqslant\frac{3}{2}(\mathrm{mes}\ \Omega)^{1/2}||\nabla u||_{2,\Omega},$$

получим
$$\iint_Q \tilde{u}^2 dxdy \leqslant \frac{9}{4}\mathrm{mes}\, Q \iint_Q |\nabla \tilde{u}|^2 dxdy,$$
откуда после возвращения к области D_0 и следует справедливость доказываемой оценки.□

Теорема 2. *Если в классе регулярных решений уравнения* (2) *существует решение задачи Трикоми, то оно единственно при всех* λ, *удовлетворяющих неравенству*
$$|\lambda| < 2\mathrm{Re}\,\lambda + p, \quad p = 1/(9\,\mathrm{mes}\, D_0). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $w(x,y) = \exp(-a(x+y))\,u(x,y)$, где $a = |\mu_2| = |\mathrm{Im}\,\mu|$, $u(x,y)$ — решение однородной задачи T, тогда $w(x,y)$ в области D_0 является решением уравнения
$$Mw = w_{xx} + w_{yy} + 2aw_x + 2aw_y + (2a^2 - \lambda)w = 0.$$

Рассмотрим равенство
$$\overline{w}\, Mw = (\overline{w}\, w_x)_x + (\overline{w}\, w_y)_y - \overline{w}_x\, w_x - \overline{w}_y\, w_y + 2a\, \overline{w}\, w_x + 2a\, \overline{w}\, w_y + (2a^2 - \lambda)|w|^2 = 0$$
и проинтегрируем его по области $D_0^{\varepsilon\delta}$, полученной из D_0 при отходе внутрь нее на расстояние $\varepsilon > 0$ от кривой Γ и на расстояние $\delta > 0$ от отрезков OA_1 и OA_2. У полученного равенства выделим вещественную часть:
$$\iint_{D_0^{\varepsilon\delta}} \Big[\Big(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}|w|^2 + a|w|^2\Big)_x + \Big(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}|w|^2 + a|w|^2\Big)_y\Big]\, dx\, dy -$$
$$- \iint\limits_{D_0^{\varepsilon\delta}} \Big[|\nabla w|^2 - \,\mathrm{Re}\,(2a^2 - \lambda)|w|^2\Big]\, dx\, dy = 0.$$

Применяя здесь формулу Грина, в пределе при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ с учётом граничного условия $w\big|_\Gamma = 0$ получим
$$\iint_{D_0} |\nabla w|^2\, dx\, dy + (\mathrm{Re}\,\lambda - 2a^2) \iint_{D_0} |w|^2\, dx\, dy +$$
$$+ \mathrm{Re} \int_0^{l_1} e^{-2ax}\, \overline{u}(x,0)\, u_y(x,0)\, dx + \mathrm{Re} \int_0^{l_2} e^{-2ay}\, \overline{u}(0,y)\, u_x(0,y)\, dy = 0. \tag{15}$$

В силу лемм 1 и 2 при $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 2(\mathrm{Im}\,\mu)^2$ из равенства (15) следует единственность решения задачи Трикоми. А если $-p < \mathrm{Re}\,\lambda - 2(\mathrm{Im}\,\mu)^2$, то в силу равенства (15) и леммы 3 получим
$$\iint_{D_0} |\nabla w|^2\, dx\, dy \leqslant -(\mathrm{Re}\,\lambda - 2a^2) \iint_{D_0} |w|^2\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{\mathrm{Re}\,\lambda - 2a^2}{p} \iint_{D_0} |\nabla w|^2\, dx\, dy,$$

откуда следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

Запишем неравенство $-p < \operatorname{Re}\lambda - 2(\operatorname{Im}\mu)^2$ в другом виде. Так как $\lambda = \mu^2 = (\mu_1 + i\mu_2)^2$, то $\mu_1^2 = \frac{1}{2}(|\lambda| + \operatorname{Re}\lambda)$, $\mu_2^2 = \frac{1}{2}(|\lambda| - \operatorname{Re}\lambda)$, поэтому получим неравенство

$$|\lambda| < 2\operatorname{Re}\lambda + p,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Неравенство (14) можно привести к виду

$$\frac{(\operatorname{Re}\lambda + 2p/3)^2}{(p/3)^2} - \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{(p/\sqrt{3})^2} > 1, \qquad \operatorname{Re}\lambda > -p/2,$$

т. е. на плоскости (λ) получится внутренность правой ветви гиперболы с вершиной в точке $(-2p/3, 0)$.

Таким образом, решение задачи Трикоми для уравнения (2) единственно при всех λ из указанной области.

Отметим, что в работе [8] была доказана единственность решения задачи Трикоми для уравнения (2) при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $|\operatorname{Im}\lambda/\operatorname{Re}\lambda| \leqslant 2\sqrt{2}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *А. В. Бицадзе*, “О некоторых задачах для уравнений смешанного типа” // *Докл. Акад. наук СССР*, 1950. Т. 70, № 4. С. 561–564. [*A. V. Bicadze*, “On some problems for mixed type equations” // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950. Vol. 70, no. 4. Pp. 561–564].
2. *Т. Ш. Кальменов*, “О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева—Бицадзе” // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 8. С. 1418–1425. [*T. Sh. Kal’menov*, “The spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent’ev-Bicadze equation” // *Differ. Uravn.*, 1977. Vol. 13, no. 8. Pp. 1418–1425].
3. *С. М. Пономарев*, “К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева–Бицадзе” // *Докл. Акад. наук СССР*, 1978. Т. 238, № 6. С. 1299–1302. [*S. M. Ponomarev*, “On the eigenvalue problem for the Lavrent’ev–Bicadze equation” // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978. Vol. 238, no. 6. Pp. 1299–1302].
4. *Е. И. Моисеев*, Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988. 150 с. [*E. I. Moiseev*, Equations of mixed type with a spectral parameter. Moscow: Moscow State Univ., 1988. 150 pp.]
5. *К. Б. Сабитов*, “О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром” // *Диффер. уравн.*, 1986. Т. 22, № 11. С. 1977–1984; англ. пер.: *K. B. Sabitov*, “Tricomi problem for the Lavrent’ev-Bitsadze equation with a spectral parameter” // *Differ. Equ.*, 1986. Vol. 22. Pp. 1380-1386.
6. *К. Б. Сабитов*, “Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. 1” // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 6. С. 1023–1032; англ. пер.: *K. B. Sabitov*, “Construction in explicit form of solutions of the Darboux problems for the telegraph equation and its application in the inversion of integral equations. I” // *Differ. Equ.*, 1990. Vol. 26, no. 6. Pp. 747–755.
7. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с. [*O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva*, Linear and quasilinear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp.]
8. *Ю. У. Талмирзаев*, К теории краевых задач для уравнений смешанного типа с негладкой линией вырождения: Автореф. ... канд. физ.-мат.наук: 01.01.02. Ташкент: АН Уз.ССР. Ин-т математики, 1980. 16 с. [*Yu. U. Talmirzaev*, On the theory of boundary value problems for equations of mixed type with a smooth line of degeneracy: Ph.D. Thesis (Phys. & Math.). Tashkent: AN Uz.SSR. In-t matematiki, 1980. 16 pp.]

Поступила в редакцию 15/XI/2012;
в окончательном варианте — 17/I/2013.

MSC: 35M10, 35M12

TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH TWO LINES OF TYPE CHANGING IN A SPECIAL AREA

A. A. Gimaltdinova

[1] Samara State Academy of Social and Humanities,
65/67, M. Gorky st., Samara, 443099, Russia.
[2] Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
47 a, Lenin st., Sterlitamak, 453103, Russia.

E-mail: *g_alfira@mail.ru*

We obtain conditions on the complex parameter, when there is an unique solution of the Tricomi problem for an equation with two perpendicular lines of degeneracy.

Key words: *Tricomi problem, mixed type equation, uniqueness of solution.*

Original article submitted 15/XI/2012;
revision submitted 17/I/2013.

Alfira A. Gimaltdinova (Ph. D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Mathematics and Teaching Methods[1]; Associate Professor, Dept. of Mathematical Analysis[2].