

УДК 539.3

СВЯЗАННАЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКАЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

В. А. Ковалев¹, Ю. Н. Радаев²

¹ Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия, 107045, Москва, ул. Сretenка, 28.

² Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

E-mails: vlad_koval@mail.ru; radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Дано развитие теории термоупругого континуума Грина–Нахди (GN) третьего типа (GNIII, type-III thermoelasticity) в плане дальнейшей спецификации определяющих уравнений термоупругости на основе принципа термодинамической (термомеханической) ортогональности. Получены важные с прикладной точки зрения нелинейные определяющие уравнения термодинамической ортогональности в «пространстве» термодинамических сил: в связанных процессах термоупругого деформирования и теплопроводности твердых тел необратимый термодинамический поток (необратимая составляющая референциального потока энтропии) геометрически ортогонален поверхности уровня потенциала рассеяния. Устанавливается нелинейный определяющий закон теплопроводности в теории GNIII, удовлетворяющий принципу ортогональности термодинамических потоков и сил.

Ключевые слова: термоупругость, принцип максимума, необратимый процесс, термодинамическая ортогональность, термодинамическая сила, термодинамический поток, определяющий закон.

1. Термодинамика необратимых процессов позволяет исследовать необратимую эволюцию термодинамических систем, не вскрывая ее молекулярного механизма. Термодинамика необратимых процессов пережила период бурного развития в 50-е и 60-е годы; тогда же предпринимались попытки статистического обоснования ее принципов и расширялась сфера ее приложений. Наиболее полно она изложена в классических монографиях [1, 2].

В последнее время в целом ряде областей механики и теоретической физики были предприняты успешные попытки выйти за пределы классической линейной термодинамики необратимых процессов. Новые подходы в термодинамике необратимых процессов основываются на расширении спектра переменных, представляющих состояние термодинамической системы, т.е. в модификации термодинамического базиса. При этом к стандартным переменным состояния присоединяются дополнительные переменные; это, в большинстве случаев, обобщенные термодинамические потоки или в двойственных формулировках — обобщенные термодинамические силы. Термодинамическая сила, как правило, определяется в форме пространственного (или референциального) градиента стандартной термодинамической переменной состояния. Таким образом, расширение списка стандартных термодинамических переменных

Владимир Александрович Ковалев (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. прикладной математики и аналитической поддержки принятия решений.

Юрий Николаевич Радаев (д.ф.-м.н., проф.), ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела.

состояния происходит за счет добавления их градиентов. В каждом данном состоянии значения термодинамической переменной и ее градиента считаются независимыми и, в известном диапазоне, произвольными. Выбор термодинамического базиса чрезвычайно важен и решающим образом сказывается на построении математической модели тех процессов, для исследования которых он собственно и используется.

Стандартные термодинамические переменные состояния относятся к числу «медленных» переменных. Их использование при построении теорий транспорта тепла в твердых деформируемых телах в качестве переменных состояния вместе с законами сохранения приводит к ряду противоречий, таких как бесконечная скорость распространения тепла, и ненулевому внутреннему производству энтропии в процессах, связанных с передачей тепла. Учет дополнительных переменных состояния («быстрых» переменных) позволяет дать формулировку теории в форме дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа. В частности, следуя по этому пути, можно получить гиперболические теории теплопроводности и гиперболические уравнения транспорта тепла, обладающие решениями в форме распространяющихся с конечной скоростью тепловых волн «второго звука» незатухающей амплитуды. Теория связанной термоупругости Грина—Нахди (А. Е. Green, Р. М. Naghdi) [3, 4] в полной мере отвечает принципам новой термодинамики необратимых процессов. В этой теории в качестве основной термической «медленной» переменной выступает температурное смещение, а его референциальный градиент — в качестве «быстрой» переменной. Однако в нелинейной теории Грина—Нахди по-прежнему остаётся достаточно широкий спектр теоретически допустимых определяющих уравнений, сузить который до практически приемлемого диапазона нельзя без дальнейшего развития теории. Одним из важных инструментов, пригодных для этой цели, является принцип термодинамической ортогональности, появление которого в современном естествознании исторически связано с построением математической теории пластичности.

Принцип термодинамической ортогональности и его двойственная формулировка были предложены Циглером (Н. Ziegler) в ряде публикаций начиная с 1958 г. как обобщение линейной теории Онсагера (L. Onsager), восходящей к 1931 г. (см. [5–7]). Основные сведения, касающиеся нелинейной теории термоупругости третьего типа, приводятся в [8–10].

2. Принцип, аналогичный принципу ортогональности термодинамических потоков и сил, первоначально возник в математической теории пластичности (там он известен как принцип максимума Мизеса (R. von Mises)) и выступал в качестве ее основополагающего принципа, из которого следовали геометрическая выпуклость в «пространстве» напряжений поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ($\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши) и в действительном процессе пластического течения — ортогональность приращения пластической деформации $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ поверхности текучести в гладких её точках. Условие, выражающее геометрическую ортогональность в «пространстве» напряжений свободного вектора, представляющего тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, поверхности текучести является основным определяющим законом математической теории пластичности — ассоциированным с условием пластичности $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ законом пластического течения:

$$d\varepsilon^P = (d\lambda) \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (f(\sigma) = 0, \quad df(\sigma) = 0), \quad (1)$$

где $d\lambda \geq 0$ — неопределённый множитель, выступающий в качестве множителя Лагранжа при решении экстремальной задачи, соответствующей принципу максимума. Уравнения в (1), заключенные в круглые скобки, представляют собой признаки активного нагружения идеально пластического тела, выполнение которых указывает на наличие необратимого термодинамического потока $d\varepsilon^P$ только тогда, когда действительные напряжения σ находятся на пределе текучести и, кроме того, при малом догружении $d\sigma$ напряжения $\sigma + d\sigma$ также *будут* находиться на пределе текучести, т.е. $f(\sigma + d\sigma) = 0$.

Таким образом, ассоциированный закон пластического течения (1) устанавливает геометрическую ортогональность в «пространстве» напряжений термодинамического потока, в роли которого в данном случае выступает приращение пластической деформации $d\varepsilon^P$, поверхности текучести в геометрическом месте, определяемом действительным напряжением σ . Сдвиговая природа пластического течения металлов и горных пород прекрасно отображается решениями гиперболических уравнений математической теории пластичности с определяющим уравнением в форме ассоциированного закона течения и критерием текучести в форме Кулона—Треска.

Принцип максимума Мизеса, по всей видимости, является одним из фундаментальных принципов механики деформируемого твердого тела, а в широком смысле — всеобъемлющим принципом современного естествознания. В сочетании с критерием текучести Кулона—Треска он даёт возможность сформулировать математическую теорию пластичности с помощью дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа. Принцип максимума Мизеса как исходный принцип математической теории пластичности и ассоциированный закон пластического течения обсуждаются практически во всех монографиях, посвященных математическим теориям идеальной пластичности (см., например, [11–13]). Принцип максимума может быть распространен на необратимые процессы транспорта тепла в твердых деформируемых телах с целью построения таких определяющих уравнений термоупругости, которые исключали бы присущие классической теории теплопроводности Фурье (СТЕ) недостатки: уравнения СТЕ предсказывают конечную скорость распространения упругой волны и — бесконечную для теплового импульса. Далее в работе мы рассмотрим внутреннее производство энтропии для процессов транспорта тепла, а затем с помощью концепции потенциала рассеяния сформулируем определяющие уравнения термодинамической ортогональности в обобщенной термоупругости третьего типа GNIII.

3. Для представления деформации термоупругого тела воспользуемся классическим лагранжевым отсчётным описанием: «конечная» деформация описывается «конечным» преобразованием отсчётной конфигурации в актуальную:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (2)$$

где $\mathbf{x}$ — пространственное положение точки, которая занимала место $\mathbf{X}$ в отсчётном положении.

В дальнейшем изложении систематически будет использоваться отсчётный оператор Гамильтона ∇_R , ассоциированный с лагранжевой перемен-

ной $\mathbf{X}$. «Конечные» тензоры деформации конструируются исходя из (2) с помощью градиента деформации

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{R}} \otimes \mathbf{x}.$$

Система основных соотношений нелинейной связанной термоупругости третьего типа (GNIII) состоит из следующих уравнений:

– уравнения баланса массы

$$\left. \frac{\partial \rho_{\mathbf{R}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = 0; \quad (3)$$

– уравнения баланса импульса

$$\rho_{\mathbf{R}} \ddot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}, \quad (4)$$

где $\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{T}$ — первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $J = \det \mathbf{F}$ — якобиан деформации;

– уравнения баланса внутренней энергии

$$\dot{e} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{h}_{\mathbf{R}} + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) + \varepsilon, \quad (5)$$

где e — плотность (в расчёте на единицу объёма в отсчётном состоянии $\mathbf{R}$) внутренней энергии, $\mathbf{h}_{\mathbf{R}}$ — референциальный вектор потока тепла (в единицу времени через единицу площади в отсчётном состоянии), ε — плотность объёмных источников тепла (radiant heat, лучистое тепло);

– уравнения баланса энтропии

$$\dot{s} = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \sigma + \xi, \quad (6)$$

где s — плотность энтропии (в расчёте на единицу объёма в отсчётном состоянии), $\mathbf{j}_{\mathbf{R}}$ — референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчётном состоянии), σ — внешнее производство энтропии, $\xi \geq 0$ — внутреннее производство энтропии.

Внутреннее производство энтропии должно удовлетворять неравенству необратимости

$$\xi \geq 0. \quad (7)$$

В качестве основной термической переменной в теории Грина—Нахди GN используется температурное смещение ϑ . В теории третьего типа GNIII полный термодинамический базис состоит из следующих термодинамических переменных состояния: ϑ , $\dot{\vartheta}$, $\nabla_{\mathbf{R}} \vartheta$, $\nabla_{\mathbf{R}} \dot{\vartheta}$, $\mathbf{F}$.

Далее полагается, что допустимы лишь такие процессы, когда выполняется уравнение баланса энтропии (6) с неотрицательным внутренним производством энтропии (7) при дифференциальных ограничениях (3)–(5). Возможная двойственная формулировка: выполняется уравнение баланса энергии (5) при ограничениях (3), (4), (6). Исходная и двойственная формулировки выступают как проявление принципа непротиворечивости уравнений термомеханики: баланс энтропии (энергии) не должен нарушать баланса массы, импульса, энергии (энтропии), т.е. уравнение баланса энтропии (энергии)

должно удовлетворяться тождественно для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса.

Ограничения в форме дифференциальных уравнений (3)–(5) учитываются с помощью множителей Лагранжа. В результате можно получить соотношения (θ — абсолютная температура, обратное значение которой («холодность») выступает в качестве множителя Лагранжа)

$$\theta \mathbf{j}_R = \mathbf{h}_R, \quad \theta \sigma = \varepsilon. \quad (8)$$

На основании уравнений (3)–(6) и соотношений (8) выводится приведённое уравнение баланса энергии

$$-(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^\top) - \mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \theta = \theta \xi, \quad (9)$$

где $\psi = e - s\theta$ — плотность (в расчёте на единицу объёма в отсчётном состоянии) свободной энергии Гельмгольца.

Дифференциальные уравнения термоупругости должны быть дополнены определяющими уравнениями:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \mathbf{h}_R &= \mathbf{h}_R(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & s &= s(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), \\ \xi &= \xi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \nabla_R \dot{\vartheta}, \mathbf{F}), & \theta &= \theta(\dot{\vartheta}). \end{aligned} \quad (10)$$

В такой общей форме определяющие уравнения термоупругости мало пригодны в прикладных вопросах. Дальнейшие ограничения на форму определяющих уравнений (10) могут быть получены следующим образом. Приведённое уравнение баланса энергии (9) с неотрицательным внутренним производством энтропии (7) должно удовлетворяться для всех термодинамически допустимых процессов в силу выполнения всех оставшихся уравнений баланса. Выполнив подстановку определяющих зависимостей (10) в уравнение (9) и замечая, что коэффициенты при $\ddot{\vartheta}$, $\nabla_R \ddot{\vartheta}$, $\dot{\mathbf{F}}$ должны обращаться в нуль, заключаем, что свободная энергия в действительности не может зависеть от переменной состояния $\nabla_R \dot{\vartheta}$, т.е.

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, \nabla_R \vartheta, \mathbf{F});$$

кроме того, должны выполняться следующие равенства:

$$s = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{\vartheta}}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}.$$

Для внутреннего производства энтропии, следовательно, остаётся выражение

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}\right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta} - \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}.$$

Предполагая, что определяющие уравнения не содержат явных вхождений температурного смещения ϑ , находим

$$\theta \xi = -\left(\mathbf{j}_R + \frac{\partial \psi}{\partial \nabla_R \vartheta}\right) \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}.$$

4. Следуя принципу термодинамической ортогональности, введём потенциал рассеяния (точнее говоря, сопряжённый потенциал рассеяния) согласно

$$\theta\xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta})$$

и будем рассматривать его как функцию от термодинамической силы $-\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}$, приходим к определяющему уравнению в форме соотношения термодинамической ортогональности в «пространстве» термодинамических сил неотражимой составляющей термодинамического потока $\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial\psi}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}$ поверхности уровня потенциала рассеяния $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) = \text{const}$. В гладких точках поверхности уровня имеем следующее уравнение градиентальности:

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} + \frac{\partial\psi}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}} = -\lambda^* \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}, \quad (11)$$

или

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}} - \lambda^* \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}. \quad (12)$$

Множитель λ^* в уравнении (11) вычисляется на основании определяющего потенциал рассеяния $\mathcal{D}$ равенства

$$\theta\xi = \mathcal{D} = \lambda^*(\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}},$$

откуда сразу же следует, что

$$\lambda^* = \frac{1}{(\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}} \mathcal{D}. \quad (13)$$

Поэтому, подставляя (13) в уравнение (12), можно констатировать, что закон теплопроводности в теории термоупругости типа GNIII, согласующийся с принципом термодинамической ортогональности, будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}} - \frac{\mathcal{D}}{(\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}} \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}. \quad (14)$$

Выполнение неравенства $\xi \geq 0$ обеспечивается выпуклостью поверхностей уровня $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, \nabla_{\mathbf{R}}\vartheta, \mathbf{F}; \nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}) = \text{const}$ в «пространстве» термодинамических сил.

Полученное выше уравнение (14) устанавливает определяющий закон теплопроводности в GNIII теории, основанный на принципе ортогональности термодинамических потоков и сил. Очевидно, что термодинамически корректен и такой вариант, когда процесс термоупругого деформирования не сопровождается внутренним производством энтропии. В этом случае $\mathcal{D} = 0$ и закон теплопроводности приобретает форму

$$\mathbf{j}_{\mathbf{R}} = -\frac{\partial\psi}{\partial\nabla_{\mathbf{R}}\dot{\vartheta}}, \quad (15)$$

характерную для теории GNII. Это определяющее уравнение для вектора потока энтропии — одно из самых замечательных в термомеханике континуума, поскольку поток энтропии, а следовательно, и поток тепла определяются согласно (15) заданием свободной энергии.

Теория связанной термоупругости GNI/СТЕ основывается на допущении о независимости свободной энергии ψ от температурного смещения ϑ и градиента температурного смещения $\nabla\vartheta$. Поэтому следует полагать, что

$$\psi = \psi(\dot{\vartheta}, \mathbf{F}).$$

В результате внутреннее производство энтропии вычисляется как

$$\theta\xi = -\mathbf{j}_R \cdot \nabla_R \dot{\vartheta}.$$

Таким образом, уравнение термодинамической ортогональности, обобщающее закон теплопроводности Фурье, имеет форму

$$\mathbf{j}_R = -\frac{D}{(\nabla_R \dot{\vartheta}) \cdot \frac{\partial D}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}} \frac{\partial D}{\partial \nabla_R \dot{\vartheta}}.$$

Представляемая работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00184-а «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *S. R. de Groot*, Thermodynamics of Irreversible Processes. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1951. xvi+242 pp.; русск. пер.: *С. Р. де Гроот*, Термодинамика необратимых процессов. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 280 с.
2. *S. R. de Groot, P. Mazur*, Non-equilibrium Thermodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1962. x+510 pp.; русск. пер.: *С. Р. де Гроот, П. Мазур*, Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
3. *A. E. Green, P. M. Naghdi*, "On undamped heat waves in an elastic solid" // *J. Thermal Stresses*, 1992. Vol. 15, no. 2. Pp. 253–264.
4. *A. E. Green, P. M. Naghdi*, "Thermoelasticity without energy dissipation" // *J. Elasticity*, 1993. Vol. 31, no. 3. Pp. 189–208.
5. *H. Ziegler*, "Some extreme principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics" / In: *Progress in Solid Mechanics IV*; eds. I. N. Sneddon, R. Hill. Amsterdam: North-Holland, 1963. Pp. 93–193; русск. пер.: *Г. Циглер*, Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 134 с.
6. *H. Ziegler*, "Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics" // *Z. Angew. Math. Phys.*, 1970. Vol. 21, no. 6. Pp. 853–863.
7. *H. Ziegler*, "Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality" // *Ingenieur-Archiv*, 1981. Vol. 50, no. 3. Pp. 149–164.
8. *В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*, Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с. [*V. A. Kovalev, YU. N. Radayev*, Elements of the classical field theory: variational symmetries and geometric invariants. Moscow: Fizmatlit, 2009. 156 pp.]
9. *В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев*, "Волновые задачи теории поля и термомеханика" / В сб.: *Вторая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»*: Материалы Межд. конф.; ред. чл.-корр. РАН И. В. Волович и д.ф.-м.н., проф.

- Ю. Н. Радаев. Самара: Книга, 2010. С. 165–166. [V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev, “Wave problems of field theory and thermomechanics” / In: *The 2nd International Conference “Mathematical Physics and its Applications”*: Book of Abstracts and Conference Materials; eds. I. V. Volovich and Yu. N. Radayev. Samara: Kniga, 2010. Pp. 165–166].
10. В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев, Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Сарат. ун-т, 2010. 328 с. [V. A. Kovalev, Yu. N. Radayev, Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Saratov Univ., 2010. 328 pp.]
 11. R. Hill, The mathematical theory of plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. x+356 pp.; русск. пер.: Р. Хилл, Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 408 с.
 12. Д. Д. Ивлев, Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с. [D. D. Ivlev, Theory of ideal plasticity. Moscow: Nauka, 1966. 232 pp.]
 13. Ю. Н. Радаев, Пространственная задача математической теории пластичности / 2-е изд., перераб. и доп.. Самара: Самар. гос. унив., 2006. 340 с. [Yu. N. Radayev, A Three-Dimensional Problem of the Mathematical Theory of Plasticity. Samara: Samar. Gos. Univ., 2006. 340 pp.]

Поступила в редакцию 14/XI/2012;
в окончательном варианте — 02/I/2013.

MSC: 74F05

COUPLED THERMODYNAMIC ORTHOGONALITY IN NON-LINEAR MODELS OF TYPE-III THERMOELASTICITY

V. A. Kovalev, Y. N. Radayev

¹ Moscow City Government University of Management,
28, Sretenka st., Moscow, 107045, Russia.

² A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russia.

E-mails: vlad_koval@mail.ru; radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

The present study is devoted to a derivation of non-linear constitutive equations for the non-linear Green-Naghdi type-III thermoelastic model on the basis of the principle of thermodynamic (or thermomechanical) orthogonality. The latter was proposed by Ziegler as an extension to the Onsager linear irreversible thermodynamics. It states that the irreversible constituent parts of thermodynamic currents (velocities) are orthogonal to the convex dissipation potential level surface in the space of thermodynamic forces for any process of heat propagation in a solid. Non-linear constitutive laws of the heat propagation complying with the principle of thermomechanical orthogonality are obtained and discussed.

Key words: thermoelasticity, maximum principle, irreversible process, thermodynamic orthogonality, thermodynamic force, thermodynamic flux, constitutive law.

Original article submitted 14/XI/2012;
revision submitted 02/I/2013.

Vladimir A. Kovalev (Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics and Analytical Support of Making Decisions.

Yuriy N. Radayev (Dr. Sci. (Phys. & Math.), Professor), Leading Researcher, Lab. of Modeling in Solid Mechanics.