Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 3. С. 574–582
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1809

Краткие сообщения

УДК 517.955.2:517.956

Корректность смешанной задачи для многомерного гиперболо-параболического уравнения

© *С. А. Алдашев*

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Казахстан, 480100, Алматы, ул. Толе Би, 86.

Аннотация

В цилиндрической области евклидова пространства рассматривается модельное многомерное гиперболо-параболическое уравнение, для которого ставится смешанная задача с неоднородными краевыми условиями. В классе непрерывно-дифференцируемых функций показывается однозначная разрешимость поставленной задачи и указывается способ получения явного вида классического решения.

Ключевые слова: корректность смешанной задачи, гиперболо-параболическое уравнение, цилиндрическая область, функции Бесселя.

Получение: 22 июля 2020 г. / Исправление: 25 августа 2020 г. / Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Введение. К многомерным гиперболо-параболическим уравнениям приводят различные задачи, например, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) [1], моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах [2]. При этом возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Теория краевых задач для гиперболо-параболических уравнений на плоскости изучена в [3]. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [4, 5].

Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах исследована в работах [6, 7]. В [8] доказана

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Алдашев С. А. Корректность смешанной задачи для многомерного гиперболо-параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 574–582. https://doi.org/10.14498/vsgtu1809.

Сведения об авторе

Серик Аймурзаевич Алдашев https://orcid.org/0000-0002-8223-6900
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. фундаментальной и прикладной математики; e-mail: aldash51@mail.ru

корректность этой задачи и получен явный вид классического решения. В работах [9,10] доказано, что для многомерных гиперболо-параболических уравнений в классе непрерывных функций смешанная задача в цилиндрической области имеет бесчисленное множество решений. В данной работе показывается, что в классе непрерывно-дифференцируемых функций эта задача однозначно разрешима, приводится явное представление классического решения для одного модельного многомерного гиперболо-параболического уравнения.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Через Ω_α и Ω_β обозначим части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$; S — общая часть границ областей Ω_α и Ω_β, представляющая собой множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим гиперболо-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt}, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$.

Перейдем от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$.

Задача 1. *Найти решение уравнения* (1) *в области* $\Omega_{\alpha\beta}$ *при* $t \neq 0$ *из класса* $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \varphi_1(t, \theta), \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\beta} = \varphi(r, \theta), \tag{3}$$

при этом $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$, $\psi_2(\beta, \theta) = \varphi(1, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$; $W_2^l(S)$ — пространства Соболева, $l = 0, 1, \ldots$.

Лемма 1 [11]. *Пусть* $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. *Если* $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (4) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leqslant c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leqslant c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\overline{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) для функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi_2(t,\theta)$.

Теорема 1. *Если* $\psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $\varphi(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$, *то задача 1 однозначно разрешима.*

2. Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид [11, 12]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [11, 12], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, его можно искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [12], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (3) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \psi_{2n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

Произведя в (7), (8) замену $\bar{v}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k - \bar{v}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{v}_n^k(r,\beta) = \varphi_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t) = \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k(t), \quad \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta).$$

Задача (9), (10) заменой $\bar{v}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r,t)$ приводится к следующей:

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}v_n^k = f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\beta)=\tilde{\varphi}_n^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0, \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{1}{4}(m-1)(3-m)-\lambda_n,\ f_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),\ \tilde{\varphi}_n^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищется в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)$, где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t);\quad \upsilon_{1n}^k(r,\beta)=0,\quad \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{13}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0;\quad \upsilon_{2n}^k(r,\beta)=\tilde{\varphi}_n^k(r),\quad \upsilon_{2n}^k(1,t)=0. \tag{14}$$

Решение вышеуказанных задач представим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{15}$$

при этом

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\quad \tilde{\varphi}_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), с учетом (16) получим

$$R_{srr}+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1;\quad R_s(1)=0,\ |R_s(0)|<\infty; \tag{17}$$

$$T_{st}+\mu T_s=-a_{s,n}(t),\ \beta<t<0;\quad T_s(\beta)=0. \tag{18}$$

Ограниченное решение задачи (17) имеет вид [13]

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r),\quad \nu=n+\frac{1}{2}(m-2),\ \mu=\mu_{s,n}^2. \tag{19}$$

Решение задачи (18) имеет вид

$$T_{s,n}(t)=\exp(-\mu_{s,n}^2t)\int_t^{\beta}a_{s,n}(\xi)\exp(\mu_{s,n}^2\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Подставляя (19) в (16), получим

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}}f_n^k(r,t)&=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}_n^k(r)&=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),\qquad 0<r<1. \end{aligned} \tag{21}$$

Ряды (21) являются рядами Фурье—Бесселя [14] для соответствующих функций, если

$$a_{s,n}(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}f_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \tag{22}$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\, d\xi, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (15), (19), (20) получим решение задачи (13) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $a_{s,n}(t)$ определяются из (22).

Подставляя (15) в (14), с учетом (16) приходим к задаче

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \ \beta < t < 0; \quad T_s(\beta) = b_{s,n}$$

с решением

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t). \tag{25}$$

Из (19), (25) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} (\exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t)) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{26}$$

где $b_{s,n}$ находятся из (23).

Следовательно, единственное решение задачи (1), (3) в области Ω_β имеет вид

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{27}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (24), (26).

Имеют место следующие формулы [1, 14]:

$$\begin{aligned} &2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \\ &J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\Big(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\Big) + O\Big(\frac{1}{z^{3/2}}\Big), \quad \nu \geqslant 0, \end{aligned} \tag{28}$$

По признаку Даламбера с учетом свойств (28) показывается, что ряды (24), (26) и их продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Применяя (28), оценки [11]

$$k_n \leqslant c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = 0, 1, \ldots,$$

а также леммы 1, 2 и ограничения на заданные функции $\psi_2(t,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, можно показать, что полученное решение в виде (27) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^1(\Omega_\beta \cup S) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Из (24), (26), (27) при $t \to -0$ имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{29}$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} \left[\int_0^{\beta} a_{s,n}(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi + \right.$$
$$\left. + b_{s,n}(\exp \mu_{s,n}^2 \beta)\right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

$$u_t(r,\theta,0) = \nu(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \nu_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{30}$$

$$\nu_n^k(r) = \psi_{2nt}^k(0) - \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[a_{s,n}(0) + \mu_{s,n}^2 b_{s,n}(\exp \mu_{s,n}^2 \beta) + \right.$$
$$\left. + \mu_{s,n}^2 \int_0^{\beta} a_{s,n}(\xi)(\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

Из (21)–(23), (28), а также из лемм 1, 2 вытекает, что $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$.

Таким образом, в области Ω_α получена смешанная задача для многомерного волнового уравнения:

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \tag{31}$$

$$u\big|_S = \tau(r,\theta), \quad u_t\big|_S = \nu(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t,\theta), \tag{32}$$

где соответствующие функции определяются условиями (2), (29), (30).

В [8] доказана

Теорема 2. *Если $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l > 3m/2$, то задача* (31), (32) *имеет единственное решение.*

Используя теорему 2, приходим к справедливости теоремы 1, и на основании работы [8] можно записать явное представление решения задачи 1.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 287 с.
2. Бицазе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
3. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнения в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.

4. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: Акад. АН СССР, Сиб. отдел., Ин-т. мат., 1983. 84 с.
5. Karatopraklíev G. D. Boundary value problems for equations of mixed type in multidimensional domains // *Banach Center Publications*, 1983. vol. 10. pp. 231–269 (In Russian). https://doi.org/10.4064/-10-1-231-269.
6. Ладыженская О. А. *Смешанная задача для гиперболического уравнения.* М.: Гостехиздат, 1953. 279 с.
7. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука, 1973. 407 с.
8. Алдашев С. А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // *Укр. мат. журн.*, 2017. Т. 69, № 7. С. 992–999. http://umj-old.imath.kiev.ua/article/?lang=en&article=10799.
9. Алдашев С. А. Некорректность смешанной задачи для многомерного гиперболо-параболического уравнения / *Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления*: Материалы межд. научно-практической конф. Алматы, 2009. С. 469–474.
10. Алдашев С. А. Некорректность смешанной задачи для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений // *Мат. журнал. Алматы*, 2010. Т. 10, № 4. С. 4–12.
11. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
12. Михлин С. Г. *Линейные уравнения в частных производных.* М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
13. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1965. 703 с.
14. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions.* vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 574–582
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1809

MSC: 35M12, 35A02

Well-posedness of a mixed type problem for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation

© ***S. A. Aldashev***

Kazakh National Pedagogical University named after Abay,
86, Tole-bi st., Almaty, 480100, Kazakhstan.

Abstract

We consider the modeling multidimensional hyperbolic-parabolic equation in the cylindrical area of Euclidean space and formulate the mixed problem with non-homogeneous boundary conditions for it. We show the unique solvability of the problem for the class of continuously differentiable functions and give a way to construct its explicit classical solution.

Keywords: well-posedness of mixed type problem, hyperbolic-parabolic equation, cylindrical area, Bessel functions.

Received: 22$^{\text{nd}}$ July, 2020 / Revised: 25$^{\text{th}}$ August, 2020 /
Accepted: 14$^{\text{th}}$ September, 2020 / First online: 30$^{\text{th}}$ September, 2020

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [The Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 287 pp. (In Russian)
2. Bitsaze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
3. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)

Short Communication

Please cite this article in press as:
Aldashev S. A. Well-posedness of a mixed type problem for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 574–582. https://doi.org/10.14498/vsgtu1809 (In Russian).

Author's Details:
Serik A. Aldashev https://orcid.org/0000-0002-8223-6900
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Fundamental and Applied Mathematics; e-mail: aldash51@mail.ru

4. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems for Nonclassical Equations in Mathematical Physics]. Novosibirsk, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., 1983, 84 pp. (In Russian)
5. Karatoprakliev G. D. Boundary value problems for equations of mixed type in multidimensional domains, *Banach Center Publications*, 1983, vol. 10, pp. 231–269 (In Russian). https://doi.org/10.4064/-10-1-231-269.
6. Ladyzhenskaia O. A. *Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia* [The Mixed Problem for a Hyperbolic Equation]. Mosocow, Gostekhizdat, 1953, 279 pp. (In Russian)
7. Ladyzhenskaia O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)
8. Aldashev S. A. Well-posedness of mixed problems for multidimensional hyperbolic equations with wave operator, *Ukr. Mat. Zh.*, 2017, vol. 69, no. 7, pp. 992–999 (In Russian). http://umj-old.imath.kiev.ua/article/?lang=en&article=10799.
9. Aldashev S. A. Ill-posedness of a mixed problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation, In: *Actual Problems of Mathematics, Computer Science, Mechanics and Control Theory*. Almaty, 2009, pp. 469–474 (In Russian).
10. Aldashev S. A. Ill-posedness of a mixed problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations, *Kazakh Math. J.*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 4–12 (In Russian).
11. Mikhlin S. G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Higher-Dimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 254 pp. (In Russian)
12. Mikhlin S. G. *Lineinye uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1977, 431 pp. (In Russian)
13. Kamke È. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 pp. (In Russian)
14. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.