



УДК 539.3

Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра

© Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.


Аннотация

Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра при удовлетворении на его лицевых поверхностях граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода. Рассматривается случай, когда скорость изменения температурного поля не оказывает влияние на инерционные характеристики упругой системы, что позволяет включить в исходные расчетные соотношения рассматриваемой задачи линейные уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности относительно радиальной компоненты вектора перемещений, электрического потенциала, а также функции изменения температурного поля. В расчетах применяется классический закон теплопроводности Фурье.

Для решения задачи используется математический аппарат неполного разделения переменных в виде обобщенного биортогонального конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор-функций двух однородных краевых задач. Важным моментом в процедуре структурного алгоритма данного метода является выделение сопряженного оператора, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние, температурное и электрическое поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном внешнем воздействии. Анализ численных результатов позволяет определить толщину стенки цилиндра, при которой электрическое поле приводит к перераспределению температурного поля. Установлено, что скорость изменения объема пьезокерамического тела при внешнем температурном воздействии не оказывает существенного влияния на температурное поле.

Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 677–691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.

Сведения об авторах

Дмитрий Аверкиевич Шляхин  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

доктор технических наук; заведующий кафедрой; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Мария Александровна Кальмова  <https://orcid.org/0000-0001-9212-8631>

старший преподаватель; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: kalmova@inbox.ru

Разработанный алгоритм расчета находит свое применение при проектировании нерезонансных пьезоэлектрических датчиков температуры.

Ключевые слова: длинный пьезокерамический цилиндр, связанная задача термоэлектроупругости, нестационарное температурное воздействие, конечные интегральные преобразования.

Получение: 31 апреля 2020 г. / Исправление: 19 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 17 декабря 2020 г.

Введение. В настоящее время в измерительных приборах широко используются пьезоэлектрические датчики температуры резонансного и нерезонансного классов. Их работа основана на зависимости электрического поля, индуцируемого в пьезокерамическом элементе, от величины внешнего температурного воздействия [1–4]. Для расширения функциональных возможностей датчиков данного типа возникает необходимость углубленного анализа нестационарных процессов, позволяющего понять эффект взаимодействия механических, температурных и электрических полей.

Математическая формулировка начально-краевых задач, описывающих связанность термоэлектроупругих полей, включает систему несамоспряженных дифференциальных уравнений, исследование которых в последнее время, как правило, проводится при использовании численных методов [5, 6]. Однако достаточно слабые эффекты взаимодействия полей различной физической природы удастся проанализировать только с помощью замкнутых аналитических решений. При этом проблема интегрирования исходных расчетных соотношений и построения общего решения приводит к проведению расчетов в упрощенной постановке, а именно исследуются несвязанные задачи [4, 7] или анализируются бесконечно длинные тела [8, 9].

Замкнутые решения динамических задач термоэлектроупругости представлены в немногих работах [4, 7–9]. В работе [4] на основании известных характеристик вынужденных стационарных электроупругих колебаний исследовалась плотность распределения температуры по длине конструкции. Статья [7] посвящена анализу напряженно-деформированного состояния длинного полого цилиндра в случае теплового удара без учета влияния электрического потенциала на термоупругие поля.

В [8, 9] рассматриваются связанные задачи для однородного и неоднородного пьезокерамических неограниченных слоев. Статья [8] посвящена анализу дисперсионных свойств тепловых и электроупругих волн, а в [9] рассматривалась нестационарная задача при действии тепловой и электрической нагрузок. Использование преобразования Лапласа позволило сформулировать в пространстве изображений интегральное уравнение Фредгольма, которое реализовывалось численным методом.

Целью настоящей работы является решение связанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра при действии на его поверхностях температурной нагрузки (граничные условия 1 рода) и учете конвекционного теплообмена с окружающей средой (граничные условия 3 рода) [10]. Рассматривается случай, когда скорость изменения нагрузки существенно меньше скорости распространения упругих волн, что позволяет не принимать во внимание инерционные свойства конструкции и использовать в расчетах уравнения равновесия [11, 12].

1. Постановка задачи. Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z) область $\Omega: \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$. Рассмотрим случай действия на его цилиндрических поверхностях нестационарной нагрузки в виде функций изменения температуры от времени $t_* - \omega_1^*(t_*)$ ($r_* = a$), $\omega_2^*(t_*)$ ($r_* = b$) (граничные условия 1 рода). Лицевые электродированные поверхности элемента короткозамкнуты.

В общем случае дифференциальные уравнения равновесия, электростатики и теплового баланса на основании классического закона теплопроводности Фурье имеют вид [13–15]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} = 0, \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla} D_r = 0, \quad T_0 \frac{\partial s}{\partial t_*} = \Lambda \tilde{\nabla} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r_*}. \quad (2)$$

Уравнения осесимметричного состояния электроупругой анизотропной среды при радиальной поляризации пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6 мм записываются следующим образом [8]:

$$\sigma_{rr} = C_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{13} \frac{U^*}{r_*} + e_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{33} \Theta^*, \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + e_{31} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{11} \Theta^*, \quad (4)$$

$$D_r = -\varepsilon_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} + e_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + e_{31} \frac{U^*}{r_*} + g_3 \Theta^*, \quad (5)$$

а объемная плотность энтропии $s(r_*, t_*)$ при разложении в ряд Тейлора с учетом условия $\Theta^*/T \ll 1$ ($\Theta^* = T - T_0$; Θ^* , T , T_0 — соответственно приращение, текущая температура и температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения), определяется равенством [9]:

$$s = \gamma_{33} \tilde{\nabla} U^* + k \frac{\Theta^*}{T_0} - g_3 \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}. \quad (6)$$

В равенствах (1)–(6) $\sigma_{rr}(r_*, t_*)$, $\sigma_{\theta\theta}(r_*, t_*)$ — компоненты тензора механических напряжений; $U^*(r_*, t_*)$, $D_r(r_*, t_*)$ — радиальные составляющие векторов перемещений и индукции электрического поля; $\phi^*(r_*, t_*)$ — потенциал электрического поля; C_{ms} , E_{ms} , ε_{33} — модули упругости, пьезомодули и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала, $m, s = 1, 2, 3$; Λ , k — коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости материала; γ_{11} , γ_{33} — компоненты тензора температурных напряжений; g_3 — компонента тензора пироккоэффициентов; $\tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*}$.

В результате подстановки (3), (6) в (1) получаем систему дифференциальных уравнений термоэлектроупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} = 0, \quad (7)$$

$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \left(a_7 \nabla U + \Theta - a_8 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0; \quad (9)$$

$$r = R, r = 1: \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \Theta|_{r=1} = \omega_2; \quad (10)$$

$$t = 0: \quad U = \phi = \Theta = 0; \quad (11)$$

где

$$\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\omega_2^* - T_0)\}, \quad \{U, r, R\} = \frac{1}{b} \{U^*, r_*, a\},$$

$$\phi = \frac{e_{33}}{C_{33}b} \phi^*, \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t^*, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}},$$

$$a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_5 = \frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3e_{33}}{\gamma_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}^2}{C_{33}k} T_0,$$

$$a_8 = \frac{\gamma_{33}g_3}{e_{33}k} T_0, \quad a_9 = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

2. Построение общего решения. На первом этапе решения выполняется процедура приведения неоднородных граничных условий (10) к однородным, что позволяет в дальнейшем для решения рассматриваемой задачи использовать биортогональный метод конечных интегральных преобразований [16]. Для этого вводятся новые функции $u(r, t)$, $\chi(r, t)$, связанные с $U(r, t)$, $\Theta(r, t)$ следующим образом:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + u(r, t), \quad \Theta(r, t) = H_2(r, t) + \chi(r, t), \quad (12)$$

где $H_1(r, t) = f_1(r)\omega_1 + f_2(r)\omega_2$, $H_2(r, t) = f_3(r)\omega_1 + f_4(r)\omega_2$.

Подстановка (12) в (7), (10), (11), при удовлетворении условий

$$\begin{aligned} \frac{df_1(r)}{dr} \Big|_{r=R} + a_9 \frac{f_1(R)}{R} &= 1, & \frac{df_1(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_9 f_1(1) &= 0, \\ \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_9 \frac{f_2(R)}{R} &= 0, & \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_9 f_2(1) &= 1, \\ f_3(R) = f_4(1) &= 1, & f_3(1) = f_4(R) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

позволяет получить новую начально-краевую задачу относительно функций $u(r, t)$, $\phi(r, t)$, $\chi(r, t)$ с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial u}{\partial r} - a_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \chi + a_3 \frac{\chi}{r} &= R_1, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + a_6 \nabla \chi &= R_2, \\ \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \left(a_7 \nabla u + \chi - a_8 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= R_3; \end{aligned} \quad (14)$$

$$r = R, r = 1: \frac{\partial u}{\partial r} + a_9 \frac{u}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi = \chi = 0; \quad (15)$$

$$t = 0 : u = -H_1|_{t=0}, \quad \phi = 0, \quad \chi = -H_2|_{t=0}; \quad (16)$$

где

$$R_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} + \nabla H_2 - a_3 \frac{H_2}{r}, \quad R_2 = -a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_6 \nabla H_2, \\ R_3 = a_7 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial H_2}{\partial t}.$$

Начально-краевую задачу (14)–(16) решаем, используя структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [16]. Для этого вводим на сегменте $[R, 1]$ КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$, $K_3(\lambda_i, r)$, $N_1(\mu_i, r)$, $N_2(\mu_i, r)$, $N_3(\mu_i, r)$:

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 \left(a_7 \nabla u(r, t) + \chi(r, t) - a_8 \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} \right) r K_3(\lambda_i, r) dr, \quad (17)$$

$$\{u(r, t), \phi(r, t), \chi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^2,$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K_3(\lambda_i, r) N_3(\lambda_i, r) r dr,$$

где λ_i , μ_i — собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_i, r)$ и инвариантных $N_k(\mu_i, r)$ компонент вектор-функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

В результате использования алгоритма КИП [16] получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_i, t)$:

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + \lambda_i G_i = -F_H, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$t = 0 : G_0 = - \int_R^1 [H_1(r, 0) K_1(\lambda_i, r) + H_2(r, 0) K_3(\lambda_i, r)] r dr, \quad (19)$$

решения которых имеют вид

$$G_i = G_0 \exp(-\lambda_i t) - \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_i (\tau - t) d\tau, \\ F_H = \int_R^1 (R_1 K_1 + R_2 K_2 + R_3 K_3) r dr, \quad (20)$$

а также две системы дифференциальных уравнений и граничные условия относительно неизвестных компонент преобразований $K_j = K_j(\lambda_i, r)$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots$:

$$\nabla \frac{dK_1}{dr} - a_1 \frac{K_1}{r^2} - a_4 \nabla \frac{dK_2}{dr} + \frac{a_5}{r} \frac{dK_2}{dr} - \lambda_i a_7 \frac{dK_3}{dr} = 0, \\ \nabla \frac{dK_1}{dr} + a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} + \nabla \frac{dK_2}{dr} + \lambda_i a_8 \nabla K_3 = 0, \\ \frac{dK_1}{dr} + a_3 \frac{K_1}{r} + a_6 \frac{dK_2}{dr} + \nabla \frac{dK_3}{dr} + \lambda_i K_3 = 0; \quad (21)$$

$$r = R, r = 1 : \frac{dK_1}{dr} + a_9 \frac{K_1}{r} - a_4 \frac{dK_2}{dr} = 0, \quad K_2 = K_3 = 0; \quad (22)$$

и $N_j = N_j(\mu_i, r)$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dN_1}{dr} - a_1 \frac{N_1}{r^2} + \nabla \frac{dN_2}{dr} - \frac{a_2}{r} \frac{dN_2}{dr} - \nabla N_3 + a_3 \frac{N_1}{r} &= 0, \\ \nabla \frac{dN_2}{dr} - a_4 \nabla \frac{dN_1}{dr} - \frac{a_5}{r} \frac{dN_1}{dr} - a_6 \nabla N_3 &= 0, \\ \nabla \frac{dN_3}{dr} + \mu_i \left[a_7 \nabla N_1 + N_3 - a_8 \frac{dN_2}{dr} \right] &= 0; \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = R, r = 1 : \frac{dN_1}{dr} + a_9 \frac{N_1}{r} + \frac{dN_2}{dr} = 0, \quad N_2 = N_3 = 0. \quad (24)$$

Задачи для трансформанты (18), (19) G_i и сопряженная однородная задача (21), (22) относительно компонент ядра $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$, $K_3(\lambda_i, r)$ получены в результате применения вырожденного преобразования (17), а соотношения (23), (24) построены путем использования к полученной (сопряженной) задаче (21), (22) аналогичного (17) КИП с компонентами ядра $N_1(\mu_i, r)$, $N_2(\mu_i, r)$, $N_3(\mu_i, r)$.

Системы (21), (23) при использовании условий

$$\frac{a_1 + a_2 a_5}{1 + a_4} \approx 1, \quad \{a_7, a_8\} \ll \{a_1, \dots, a_6\},$$

справедливых для пьезокерамических материалов, а также введении новых функций

$$\{K_4, N_4\} = r \frac{d\{K_2, N_2\}}{dr}, \quad \{K_5, N_5\} = r\{K_3, N_3\},$$

приводятся к следующим разрешающим уравнениям:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\frac{1}{r^2} + \lambda_i \right) \right] K_5 = D_{1i} \frac{p_1}{r^2}, \quad (25)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \mu_i \right) \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) N_5 = E_{1i} \frac{p_2}{r^2}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= a_6 + \frac{a_5(a_3 - a_2 a_6)}{1 + a_4}, \quad p_2 = \frac{\mu_i a_8 (b_1^2 - b_2^2) b_1 + b_2 (a_2 b_1^2 - a_8 b_2)}{b_1^3}, \\ b_1 &= (a_4 a_8 - a_7), \quad b_2 = (a_5 a_8 - a_7). \end{aligned}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (25), (26) имеют вид

$$K_5 = \sum_{n=1}^5 D_{ni} F_n(\lambda_i, r), \quad N_5 = \sum_{n=1}^5 E_{ni} P_n(\mu_i, r), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где

$$F_1(\lambda_i, r) = -p_1 \frac{\pi r}{2} \left[Y_0(B_i r) \int J_0(B_i r) dr - J_0(B_i r) \int Y_0(B_i r) dr \right],$$

$$\begin{aligned} \{F_2(\lambda_i, r), F_3(\lambda_i, r)\} &= r\{J_0(B_i r), Y_0(B_i r)\}, \\ F_4(\lambda_i, r) &= \frac{\pi B}{2} \left[r Y_0(B_i r) \int J_0(B_i r) r^{-1} dr - r J_0(B_i r) \int Y_0(B_i r) r^{-1} dr \right], \\ F_5(\lambda_i, r) &= \frac{r}{\lambda_i}, \quad B_i = \sqrt{\lambda_i}, \\ P_1(\mu_i, r) &= p_2 r \left[\int V_1(\mu_i, r) I_1(A_i r) dr - \int V_2(\mu_i, r) \tilde{K}_1(A_i r) dr \right], \\ P_2(\mu_i, r) &= r \left[\int V_3(\mu_i, r) I_1(A_i r) dr - \int V_4(\mu_i, r) \tilde{K}_1(A_i r) dr \right], \\ \{P_3(\mu_i, r), P_4(\mu_i, r)\} &= r\{I_0(A_i r), \tilde{K}_0(A_i r)\}, \quad P_5 = r, \\ V_1(\mu_i, r) &= \int r^{-1} \tilde{K}_1(A_i r) dr, \quad V_2(\mu_i, r) = \int r^{-1} I_1(A_i r) dr, \\ V_3(\mu_i, r) &= \int r^{-2} \tilde{K}_1(A_i r) dr, \quad V_4(\mu_i, r) = \int r^{-2} I_1(A_i r) dr, \quad A_i = \sqrt{\mu_i}. \end{aligned}$$

В равенствах (25)–(27) $D_{1i}, \dots, D_{5i}, E_{1i}, \dots, E_{5i}$ — постоянные интегрирования; $J_v(\cdot), Y_v(\cdot), I_v(\cdot), \tilde{K}_v(\cdot)$ — обыкновенные и модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода порядка v .

Использование дифференциальных зависимостей, полученных в процессе приведения (21), (23) к (25), (26), позволяет найти выражения для функций $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r)$.

Подстановка $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)$ в соответствующие граничные условия (22), (24) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых дает возможность определить постоянные интегрирования $D_{1i}, \dots, D_{6i}, E_{1i}, \dots, E_{6i}$ и собственные значения λ_i, μ_i .

Окончательные выражения функций $U(r, t), \phi(r, t), \Theta(r, t)$ получим, применяя к трансформанте (20) формулы обращения (17). В результате с учетом (12) имеем

$$\begin{aligned} \{U(r, t), \Theta(r, t)\} &= \{H_1(r, t), H_2(r, t)\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^{-2}, \\ \phi(r, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) N_2(\mu_i, r) \|K_i\|^{-2}. \end{aligned}$$

Функции $H_1(r, t), H_2(r, t)$ определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$\nabla \frac{\partial H_m}{\partial r} = 0, \quad m = 1, 2, \quad (28)$$

что позволяет существенно упростить правые части системы (14). В результате решения (28) при удовлетворении условий (13) получаем выражения для $f_1(r) - f_4(r)$:

$$f_1(r) = \frac{R}{a_9} \left[f_3(r) - \frac{1}{a_9 \ln R} \right], \quad f_2(r) = \frac{1}{a_9} \left[f_4(r) + \frac{1}{a_9 \ln R} \right],$$

$$f_3(r) = \frac{\ln r}{\ln R}, \quad f_4(r) = \frac{\ln R - \ln r}{\ln R}.$$

Построенный алгоритм расчета позволяет также исследовать начально-краевые задачи термоэлектроупругости при учете конвекционного теплообмена лицевых поверхностей с окружающей средой (граничные условия 3-го рода).

Рассмотрим случай действия на внутренней ($r_* = a$) цилиндрической поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры $\omega_1^*(t_*)$, а на внешней ($r_* = b$) лицевой поверхности пусть задан закон конвекционного теплообмена с окружающей средой

$$-\Lambda \frac{\partial \Theta^*(r_*, t_*)}{\partial r_*} \Big|_{r=b} = \alpha [\Theta^*(r_*, t_*) - \vartheta^*(t_*)],$$

и известна температура окружающей среды $\vartheta^*(t_*)$.

Для решения поставленной задачи необходимо в расчетных соотношениях (7)–(11) функцию $\omega_2(t)$, входящую в краевые условия (10), представить в виде

$$\omega_2(t) = \eta(t) - \frac{\Lambda}{\alpha b} \frac{\partial \Theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (29)$$

где $\eta = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \eta^*$; $\eta^* = \vartheta^* - T_0$, η^* — относительная температура внешней среды; α — коэффициент теплоотдачи.

На первом этапе исследования выполняется расчет при $\omega_2(t) = \eta(t)$ с следующим определением функции $\frac{\partial \Theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=1}$ и уточнением $\omega_2(t)$.

3. Численный анализ результатов. В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ($R = 0.8$) состава PZT-4, имеющего следующие физические характеристики:

$$\begin{aligned} \{C_{11}, C_{33}, C_{13}\} &= \{13.9, 11.5, 7.43\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \varepsilon_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \{e_{31}, e_{33}\} &= \{-5.2, 15.1\} \text{ Кл/м}^2, \quad \rho = 7500 \text{ кг/м}^3, \\ \{\gamma_{11}, \gamma_{33}\} &= \{4.6, 3.9\} \times 10^5 \text{ Н/(м}^2\text{К)}, \quad g_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/(м}^2\text{К)}, \\ k &= 3 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3\text{К)}, \quad \Lambda = 1.6 \text{ Вт/(мК)}, \quad \alpha = 5.6 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}. \end{aligned}$$

Исследуется задача, когда на внутренней поверхности ($r_* = a$) цилиндра температурная нагрузка изменяется по следующей зависимости:

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_* \right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \omega_2^*(t_*) = 0, \quad (30)$$

где $H(\cdot)$ — функция Хэвисайда; $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$; T_{\max}^* , t_{\max}^* — максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ($T_{\max}^* = 373 \text{ К}$ (100°C), $T_0 = 293 \text{ К}$ (20°C), $t_{\max}^* = 2 \text{ с}$).

На рис. 1 представлены графики изменения функций $\Theta^*(r, t)$, $\phi(r, t)$, $U(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t ($b = 0.02 \text{ м}$). Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты для $t = t_{\max}$, $3t_{\max}$,

$15t_{\max}$, где $t_{\max} = \frac{\Lambda}{kb^2} t_{\max}^*$.

Анализ представленных графиков позволяет сделать следующие выводы.

1. При достижении температурной нагрузкой максимальных значений $t = t_{\max}$ (рис. 1, а, кривая 1) температурное поле изменяется в области, близкой к лицевой нагреваемой поверхности ($r = R$). В дальнейшем температурное поле цилиндра растет (рис. 1, а, кривая 2) и полный прогрев пьезокерамической конструкции наблюдается при $t = 15t_{\max}$ (рис. 1, а, кривая 3).
2. При действии температурной нагрузки (30) наблюдается сжатие пьезокерамического цилиндра в радиальной плоскости (рис. 1, с), что приводит к образованию электрического поля. При этом электрический потенциал $\phi(r, t)$ и перемещения $U(r, t)$ имеют максимальное значение при $t = t_{\max}$ (рис. 1, б, кривая 1; рис. 1, с, кривая 1). В дальнейшем численные значения $\phi(r, t)$ и $U(r, t)$ уменьшаются (рис. 1, б, кривая 2;

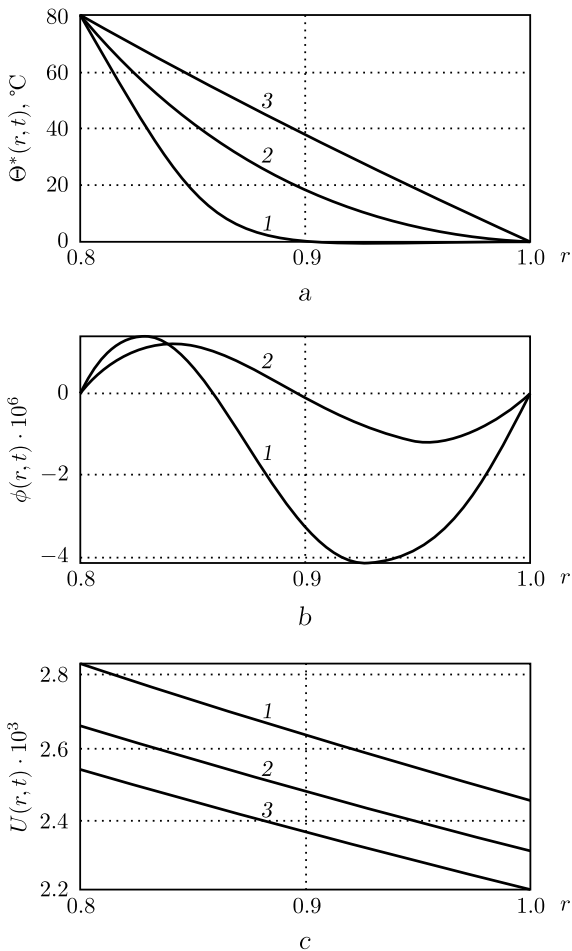


Рис. 1. Графики функций $\Theta^*(r, t)$ (а), $\phi(r, t)$ (б), $U(r, t)$ (с) по радиальной координате r в различные моменты времени: 1 — $t = t_{\max}$, 2 — $t = 3t_{\max}$, 3 — $t = 15t_{\max}$

[Figure 1. Graphs of the functions $\Theta^*(r, t)$ (а), $\phi(r, t)$ (б), and $U(r, t)$ (с) along the radial coordinate r at different times: 1 — $t = t_{\max}$, 2 — $t = 3t_{\max}$, 3 — $t = 15t_{\max}$]

рис. 1, с, кривые 2, 3) и электрическое поле исчезает при установившемся температурном режиме $t = 15t_{\max}$.

На рис. 2 приведены графики изменения радиальной компоненты напряженности электрического поля $E_r = \partial\phi/\partial r$ по координате r . Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты для цилиндра радиусом $b = 0.01, 0.02, 0.03$ м. Результаты расчета позволяют сделать вывод, что увеличение толщины стенки цилиндра, то есть уменьшение жесткости конструкции, приводит к росту напряженности электрического поля E_r .

На рис. 3 представлены графики изменения температурного поля $\Theta^*(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t ($b = 0.02$ м) в случае действия температурной нагрузки $\omega_1^*(t_*)$ (30) и при учете теплообмена (29). Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты для $t = t_{\max}, 8t_{\max}, 15t_{\max}$ ($\vartheta^* = T_0 = 293$ К (20°C)). Расчеты показывают, что при заданном внешнем воздействии температурный режим устанавливается при времени $t = 15t_{\max}$ и относительная температура на внешней лицевой поверхности цилиндра равна $\Theta^*(1, 15t_{\max}) = 78^\circ\text{C}$.

На рис. 4 представлены графики изменения температуры $\Theta(t)$ срединной поверхности цилиндра ($R = 0.1, b = 0.04$ м) по времени t . Сплошной и пунктирной линиями соответственно обозначены результаты, полученные с учетом и без учета электрического поля. Численные результаты расчета показывают, что только в толстостенном цилиндре индуцируемое электрическое поле оказывает влияние на температурное поле.

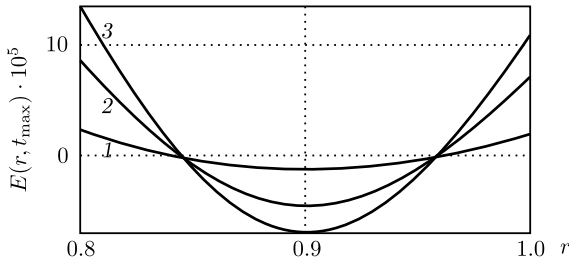


Рис. 2. Графики напряженности электрического поля $E_r(r, t_{\max})$ по радиальной координате r для цилиндров с различными радиусами b : 1 – $b = 0.01$ м, 2 – $b = 0.02$ м, 3 – $b = 0.03$ м

[Figure 2. Graphs of the electric field strength $E_r(r, t_{\max})$ along the radial coordinate r for cylinders with different radii b : 1 – $b = 0.01$ м, 2 – $b = 0.02$ м, 3 – $b = 0.03$ м]

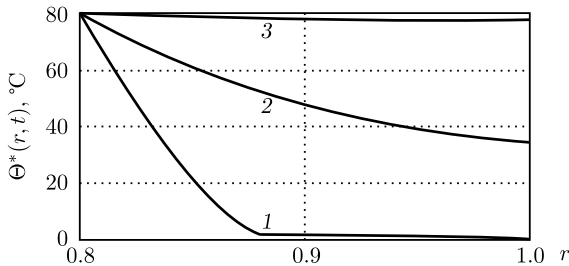


Рис. 3. Графики температурного поля $\Theta^*(r, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени t : 1 – $t = t_{\max}$, 2 – $t = 3t_{\max}$, 3 – $t = 15t_{\max}$

[Figure 3. Graphs of the temperature field $\Theta^*(r, t)$ along the radial coordinate r at different times t : 1 – $t = t_{\max}$, 2 – $t = 3t_{\max}$, 3 – $t = 15t_{\max}$]

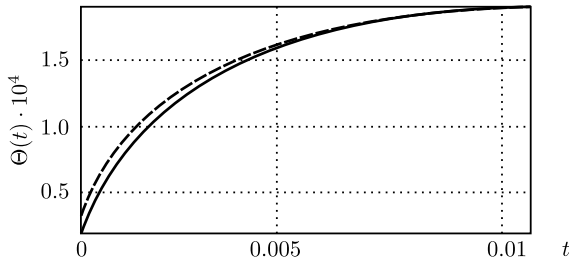


Рис. 4. Изменение температуры $\Theta(t)$ срединной поверхности толстостенного цилиндра: сплошная линия — с учетом электрического поля, пунктирная линия — без учета электрического поля

[Figure 4. The change in temperature $\Theta(t)$ of the middle surface of a thick-walled cylinder: the solid line corresponds to the calculation taking into account the electric field; the dotted line corresponds to the calculation without taking into account the electric field]

Заключение. При исследовании начально-краевых задач термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра в случае действия нестационарной температурной нагрузки связанность электрических и температурных полей необходимо учитывать в толстостенных элементах ($R \leq 0.1$).

В свою очередь, учет скорости изменения объема электроупругого тела $\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla U\right)$ не приводит к перераспределению в нем температуры. Данная зависимость наблюдается в конструкциях, изготовленных из материала, имеющего существенно больший коэффициент линейного теплового расширения, в частности в поливиниловых составах [17].

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Козлов В. Л. *Оптоэлектронные датчики*. Минск: Белорус. гос. ун-т, 2005. 116 с.
2. Кульчин Ю. Н. *Распределенные волоконно-оптические измерительные системы*. М.: Физматлит, 2001. 272 с.
3. Дмитриев С. А., Слепов Н. Н. *Волоконно-оптическая техника: современное состояние и новые перспективы*. М.: Техносфера, 2010. 608 с.
4. Паньков А. А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2018. № 2. С. 72–82. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
5. Abbas I. A., Youssef H. M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity // *Arch. Appl. Mech.*, 2009. vol. 79, no. 10. pp. 917–925. <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0259-9>.

6. He T., Tian X., Shen Y. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // *Eur. J. Mech. a/Solids*, 2005. vol. 24, no. 2. pp. 349–359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>.
7. Abbas I. A., Zenkour A. M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder // *Compos. Struct.*, 2013. vol. 96. pp. 89–96. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.046>.
8. Ватульян А. О., Кириютенко А. Ю., Наседкин А. В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектоупругости // *ПМТФ*, 1996. Т. 37, № 5. С. 135–142.
9. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектоупругости для функционально-градиентного слоя // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017. Т. 10, № 2. С. 117–126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
10. Коваленко А. Д. *Введение в термоупругость*. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
11. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018. № 78. С. 1–18. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761>.
12. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019. № 4. С. 191–200. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18>.
13. Лычев С. А., Манжиров А. В., Юбер С. В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 4. С. 138–154.
14. Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 53–61. <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>.
15. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. *Механика связанных полей в элементах конструкций*. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
16. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 8. С. 71–81.
17. Кобзарь В. Н., Фильштинский Л. А. Плоская динамическая задача связанной термоупругости // *ПММ*, 2008. Т. 72, № 5. С. 842–851.

MSC: 74F15, 74S20

The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder

© *D. A. Shlyakhin, M. A. Kalmova*Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract


A new closed solution of the coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long piezoelectric ceramic radially polarized cylinder is constructed while satisfying the boundary conditions of thermal conductivity of the 1st and 3rd kind on its front surfaces. The case when the rate of change of the temperature field does not affect the inertia characteristics of the elastic system is considered. This makes it possible to include linear equations of equilibrium, electrostatics, and thermal conductivity with respect to the radial component of the displacement vector, electric potential, and also the function of changing the temperature field in the initial calculated relations of the problem under consideration. In the calculations, the classical Fourier law of thermal conductivity is used.

To solve the problem, the mathematical apparatus of incomplete separation of variables is used in the form of a generalized biorthogonal finite integral transformation based on the multicomponent relation of the eigenvalue functions of two homogeneous boundary value problems. An important point in the procedure of the structural algorithm of this method is the selection of the adjoint operator, without which it is impossible to solve non-self-adjoint linear problems of mathematical physics.

The constructed calculated relationships make it possible to determine the stress-strain state, temperature and electric fields induced in a piezoelectric ceramic element under an arbitrary temperature external influence. An analysis of the numerical results makes it possible to determine the cylinder wall thickness at which the electric field leads to a redistribution of the temperature field. It is established that the rate of change in the volume of a piezoceramic body under external temperature influence does not significantly affect the temperature field.

The developed calculation algorithm finds its application in the design of non-resonant piezoelectric temperature sensors.

Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 677–691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781> (In Russian).

Authors' Details:

Dmitriy A. Shlyakhin  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

Dr. Techn. Sci.; Head of Dept.; Dept. of Structural Mechanics, Engineering Geology, Foundations and Foundations; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Mariya A. Kalmova  <https://orcid.org/0000-0001-9212-8631>

Senior Lecturer; Dept. of Structural Mechanics, Engineering Geology, Foundations and Foundations; e-mail: kalmova@inbox.ru

Keywords: long piezoceramic cylinder, coupled thermo-electro-elasticity problem, unsteady temperature effect, finite integral transformations.

Received: 31st April, 2020 / Revised: 19th October, 2020 /

Accepted: 16th November, 2020 / First online: 17th December, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Kozlov V. L. *Optoelektronnyye datchiki* [Optoelectronic Sensors]. Minsk, Belarus. State Univ., 2005, 116 pp. (In Russian)
2. Kulchin Yu. N. *Raspredelelennye volokonno-opticheskie izmeritel'nye sistemy* [Distributed Fiberoptic Measuring Systems]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 272 pp. (In Russian)
3. Dmitriev S. A., Slepov N. N. *Volokonno-opticheskaya tekhnika: sovremennoe sostoyanie i novye perspektivy* [Fiber-Optic Technology: Current Status and New Perspectives]. Moscow, Tekhnosfera, 2010, 608 pp. (In Russian)
4. Pan'kov A. A. Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electro-luminescent fiber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 72–82 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
5. Abbas I. A., Youssef H. M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity, *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol. 79, no. 10, pp. 917–925. <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0259-9>.
6. He T., Tian X., Shen Y. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder, *Eur. J. Mech. a/Solids*, 2005, vol. 24, no. 2, pp. 349–359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>.
7. Abbas I. A., Zenkour A. M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder, *Compos. Struct.*, 2013, vol. 96, pp. 89–96. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.046>.
8. Vatulyan A. O., Kiryutenko A. Yu., Nasedkin A. V. Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelectroelasticity, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 727–733. <https://doi.org/10.1007/BF02369312>.
9. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
10. Kovalenko A. D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to Thermoelasticity]. Kiev, Nauk. dumka, 1965, 204 pp. (In Russian)
11. Shlyakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed circular plate, *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 78, pp. 1–18 (In Russian). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761>.
12. Shlyakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 191–200 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18>.
13. Lychev S. A., Manzhairov A. V., Joubert S. V. Closed solutions of boundary value problems of coupled thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 610–623. <https://doi.org/10.3103/S0025654410040102>.

14. Radayev Yu. N., Taranova M. V. Wavenumbers of type III thermoelastic waves in a long waveguide under sidewall heat interchanging, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 2(23), pp. 53–61 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>.
15. Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Shul'ga N. A. *Mekhanika svyazannykh polei v elementakh konstruksii* [Mechanics of Coupled Fields in Structural Elements]. Kiev, Nauk. dumka, 1989, 279 pp. (In Russian)
16. Senitskij Yu. E. A biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems in mechanics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.
17. Kobzar' V. N., Fil'shtinskii L. A. The plane dynamic problem of coupled thermoelasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 611–618. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.11.002>.