



УДК 539.4

## Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек

© А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

### Аннотация


Разработана модель вязкоупругопластического деформирования гибких круговых цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования. Мгновенное пластическое поведение материалов композиции определяется теорией течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое деформирование компонентов композиции описывается уравнениями модели тела Максвелла–Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Используемые соотношения позволяют с разной степенью точности рассчитывать остаточные перемещения точек конструкции и остаточное деформированное состояние компонентов композиции. При этом моделируется возможное слабое сопротивление армированной оболочки поперечному сдвигу. В первом приближении используемые уравнения, начальные и граничные условия редуцируются в соотношения неклассической теории Амбарцумяна.

Численное решение сформулированной начально-краевой задачи строится по явной схеме «крест». Исследовано упругопластическое и вязкоупругопластическое динамическое деформирование тонких стеклопластиковых оболочек под действием внутреннего давления взрывного типа. Рассматриваются две структуры армирования:

- 1) ортогональное армирование в продольном и окружном направлениях;
- 2) пространственное армирование в четырех направлениях.

Показано, что даже для относительно тонких композитных оболочек теория Амбарцумяна неприемлема для получения адекватных результатов расчетов их вязкоупругопластического динамического деформирования. Продемонстрировано, что расчет по теории упругопластического деформирования армированных конструкций не позволяет даже приближенно оценить остаточные состояния композитных оболочек после их динамического нагружения. Показано, что даже для относительно тонкой и длинной цилиндрической оболочки замена традиционной

### Научная статья

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Янковский А. П. Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 343–364. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1838>.

### Сведения об авторе

*Андрей Петрович Янковский*  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

«плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций связующего материала. В случаях относительно толстых и, особенно, коротких оболочек положительный эффект от такой замены структур армирования проявляется в значительно большей степени.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, пространственное армирование, армирование по эквидистантным поверхностям, вязкоупруго-пластическое деформирование, нагрузки взрывного типа, уточненные теории изгиба, теория Амбарцумяна, геометрическая нелинейность, явная численная схема «крест».

Получение: 8 декабря 2020 г. / Исправление: 12 марта 2021 г. /

Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 5 июня 2021 г.

**Введение.** Оболочки из композиционных материалов (КМ) находят широкое применение в инженерной практике [1–7], поэтому актуальна проблема моделирования их механического поведения в особенности при действии высокоинтенсивных нагрузок, характерных для современных КМ-изделий [7–9].

Механическое поведение анизотропных и слоистых оболочек в рамках классической теории изгиба моделировалось в [10, 11], однако при этом не принимается во внимание плохое сопротивление таких конструкций поперечным сдвигам. Традиционно это негативное свойство тонкостенных КМ-изделий учитывают в рамках теорий Тимошенко—Рейсснера [5, 7, 12–14], Амбарцумяна [11, 15, 16] и Редди—Немировского [2, 17]; реже применяются более точные теории [5, 14, 18–20]. При этом большинство публикаций посвящено рассмотрению линейно-упругого деформирования КМ-конструкций [2, 5, 10–14, 17–19]. Однако при нагрузках высокой интенсивности компоненты композиции изделия могут деформироваться пластически [7, 8, 21, 22]. Проблема моделирования неупругого поведения КМ-конструкций сейчас находится на стадии начального становления. Так, в работе [14] исследовалось упругопластическое деформирование слоистых конструкций с изотропными слоями. В [15, 16, 20] моделировалось вязкоупругопластическое поведение армированных гибких пластин, пологих и цилиндрических оболочек, причем в [15, 20] рассматривались только традиционные «плоско»-перекрестные структуры армирования. Известно, что тонкостенные элементы конструкций с таким армированием плохо сопротивляются поперечному сдвигу и отрыву [9]. Для ликвидации этого серьезного недостатка КМ-изделий используют пространственные структуры армирования [9, 20, 23, 24]. В работе [16] была разработана структурная модель вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных сред, примененная для исследования механического поведения гибких пологих оболочек.

В [17] было показано, что в случае линейно-упругого деформирования компонентов композиции армированных оболочек уточнения расчетов, выполненных по теории Редди—Немировского, не требуется. (Напомним, что в теориях Редди—Немировского и Амбарцумяна [11] используются одинаковые кинематические соотношения, а различие заключается в уравнениях силового и моментного балансов.) Однако в [20] продемонстрировано, что

при исследовании динамического вязкоупругопластического поведения гибких цилиндрических оболочек, традиционно армированных в окружном и продольном направлениях, целесообразно использовать кинематические соотношения более высоких порядков, чем в теориях Редди—Немировского и Амбарцумяна. При этом открытым остался вопрос: нужно ли использовать теории изгиба КМ-оболочек высоких порядков точности при пространственных структурах армирования таких конструкций?

Решения нелинейных задач динамики тонкостенных конструкций, как правило, строят с использованием явных численных схем [14–16, 20], например схемы типа «крест», или неявных методов Ньюмарка [8, 25].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена моделированию вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных цилиндрических оболочек в рамках уточненной теории изгиба. Численные решения соответствующих начально-краевых задач предполагается при этом строить по явной схеме «крест».

### 1. Моделирование вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированной цилиндрической оболочки.

Рассматривается тонкая замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса  $R$ , длиной  $L$  и толщиной  $2h \ll \min(L, R)$  (рис. 1). С оболочкой связана цилиндрическая система координат  $x_i$  так, что  $x_1$  — осевая координата ( $0 \leq x_1 \leq L$ ),  $x_2$  — угловая координата в окружном направлении ( $0 \leq x_2 < 2\pi$ ),  $x_3$  — радиальная координата ( $R - h \leq x_3 \leq R + h$ ). Конструкция усилена «плоско»-перекрестно (традиционное армирование по эквидистантным поверхностям) или пространственно-перекрестно  $N$  семействами волокон с плотностями армирования  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Структура армирования по толщине оболочки квазиоднородна. На рис. 2 изображены представительные элементы таких композиций: «плоская» ортогональная 2D-структура армирования (рис. 2, а) и неортогональная пространственная 4D-структура (рис. 2, б) [9].

С волокнами  $k$ -го семейства свяжем ортогональную систему координат  $x_i^{(k)}$  так, как показано на рис. 3. Направление армирования при этом задается двумя углами сферической системы координат  $\theta_k$  и  $\varphi_k$ , а направляющие косинусы  $l_{ij}^{(k)}$  между осями  $x_i^{(k)}$  и  $x_j$  ( $i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq N$ ) вычисляются по формулам (27) из [16].

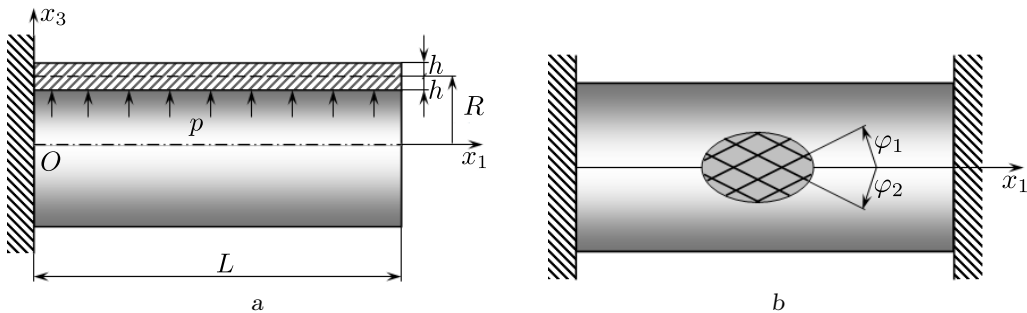


Рис. 1. Цилиндрические КМ-оболочки с жестким закреплением левой кромки (а) и с жестким закреплением обеих кромок (б) [Figure 1. Cylindrical CM-shells with rigid fastening of the left edge (a) and with rigid fastening of both edges (b)]

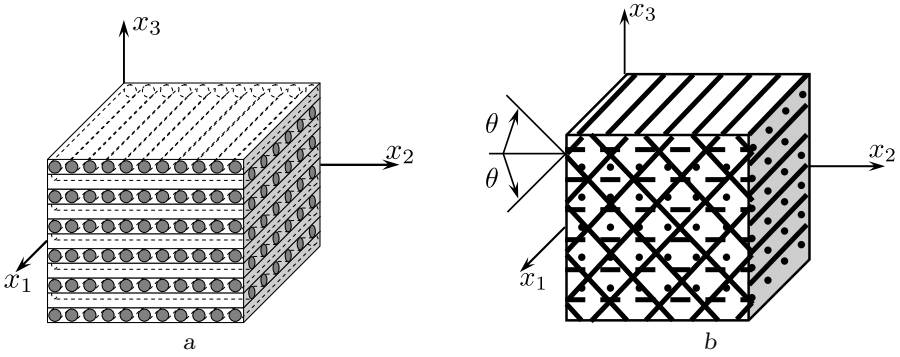


Рис. 2. Репрезентативная ячейка композиции с ортогональным 2D-армированием (a) и с пространственным 4D-армированием (b) [Figure 2. A representative cell of a composition with orthogonal 2D-reinforcement (a) and with spatial 4D-reinforcement (b)]

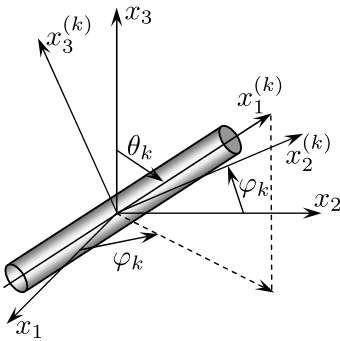


Рис. 3. Локальная система координат, связанная с волокнами  $k$ -го семейства

[Figure 3. Local coordinate system associated with  $k$ -th family of fibers]

Рассматривается частный, но практически важный случай нагружения оболочки, когда на ее лицевых поверхностях ( $x_3 = R \pm h$ ) можно пренебречь распределенными внешними касательными силами (рис. 1, a). При этом предполагается: пространственные структуры армирования таковы, что если арматура некоторого  $k$ -го семейства имеет наклонную траекторию ( $0 < \theta_k < \pi/2$ ), то обязательно найдется  $l$ -е семейство наклонных волокон, изготовленных из того же материала и имеющих параметры армирования  $\theta_l = \pi - \theta_k$ ,  $\varphi_l = \varphi_k$ ,  $\omega_l = \omega_k$ ,  $1 \leq k, l \leq N$ ,  $l \neq k$  (см. рис. 3). Структуры армирования с таким свойствами, как правило, и встречаются на практике [9, 24]. В частности, к ним относится структура, изображенная на рис. 2, b, а также ортогональная 3D-структура армирования [24]. (При нарушении этих двух условий не удастся разработать явную численную схему типа «крест».)

Для учета возможного плохого сопротивления армированной оболочки поперечным сдвигам [2, 5, 7, 11, 13, 14, 17, 20] используем более точные кинематические соотношения, чем в теориях Редди—Немировского [2, 17] и Амбарцумяна [11]. При этом, согласно [20], осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}$  и перемещения точек гибкой цилиндрической оболочки  $U_i$  в рамках уточненной теории аппроксимируются так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) = \partial_1 u_1 - z \partial_1^2 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(m)} + \frac{1}{2} (\partial_1 w)^2,$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{R+z} \left[ \frac{R+z}{R} \partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \partial_2 \varepsilon_{23}^{(m)} \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_2 w}{R+z} \right)^2, \\
 2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{R+z} \left[ \partial_2 u_1 - z \partial_1 \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \partial_2 \varepsilon_{13}^{(m)} \right] + \\
 &\quad + \frac{R+z}{R} \partial_1 u_2 + \partial_1 \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \partial_1 \varepsilon_{23}^{(m)} + \frac{1}{R+z} \partial_1 w \partial_2 w, \\
 \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) &= \frac{h^2 - z^2}{h^2} \sum_{m=0}^M \left( \frac{z}{h} \right)^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 U_1(t, \mathbf{r}) &= u_1(t, \mathbf{x}) - z \partial_1 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \varepsilon_{13}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\
 U_2(t, \mathbf{r}) &= \frac{R+z}{R} u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \varepsilon_{23}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\
 U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}); \\
 \mathbf{x} &= (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \Omega = \{ \mathbf{x} : 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 < 2\pi \}, \\
 \mathbf{r} &= (x_1, x_2, x_3), \quad x_3 \equiv R+z, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_i^{(m)}(z) &\equiv \frac{2}{h^2} [h^2 \Phi_i^{(m)}(z) - \Phi_i^{(m+2)}(z)], \quad i = 1, 2, \\
 \Phi_1^{(m)}(z) &\equiv \frac{z^{m+1}}{h^m (1+m)}, \quad \Phi_2^{(m)}(z) \equiv \frac{R+z}{h^m} \Psi_m(z), \\
 \Psi_m(z) &\equiv \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l R^l z^{m-l}}{m-l} - R^m \ln(R+z);
 \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbf{r}$  — вектор места;  $\mathbf{x}$  — вектор точки срединной поверхности ( $z = 0$ );  $z$  — введенная для удобства новая радиальная переменная;  $w$  — прогиб;  $u_1, u_2$  — перемещения точек срединной поверхности в осевом и окружном направлениях;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\Omega$  — область, которую занимает срединная поверхность оболочки в координатах  $x_1, x_2$ ;  $\partial_i$  — оператор частного дифференцирования по  $x_i$ ;  $M$  — целое число, задающее количество слагаемых, которые удерживаются в степенных разложениях деформаций поперечного сдвига  $\varepsilon_{i3}$ . При  $M = 0$  из (1)–(3) получаются кинематические соотношения теорий Редди–Немировского [2, 17] и Амбарцумяна [11]. В равенствах (1) и (2) неизвестны функции  $w, u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^{(m)}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ ), зависящие от времени  $t$  и двух пространственных координат  $x_1, x_2$ .

Материал  $k$ -го компонента композиции предполагается изотропным, а его вязкоупругопластическое деформирование описывается определяющими уравнениями [15, 16, 20]:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} &= 2G^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} \lambda^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)} - B^{(k)} \sigma_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} D^{(k)} \sigma_{ll}^{(k)} - \\
 &\quad - A^{(k)} s_{ij}^{(k)} s_{ml}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ml}^{(k)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N, \tag{4}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A^{(k)} &= \frac{G^{(k)} \kappa^{(k)}}{T_k^2}, & B^{(k)} &= \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} (1 - \kappa^{(k)}), & D^{(k)} &= \frac{1}{3} \left( B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}} \right), \\
 \kappa^{(k)} &= \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}, & g^{(k)} &= \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, & \lambda^{(k)} &= \frac{\nu^{(k)} E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}, \\
 G^{(k)} &= \frac{1}{2} \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}}, & K^{(k)} &= \frac{1}{3} \frac{E^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}}, \\
 c^{(k)} &= \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, s_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 / \eta^{(k)}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), s_{ij}^{(k)} \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 / \eta^{(k)}, \end{cases} & (5) \\
 T_k &= \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij}^{(k)} s_{ij}^{(k)}}, & \chi^{(k)} &= \int_{t_0}^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt, \\
 s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)}, & \sigma_0^{(k)} &= \frac{1}{3} \sigma_{ll}^{(k)};
 \end{aligned}$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензоров напряжений и малых деформаций;  $p_{ij}^{(k)}$  — компоненты тензора пластических деформаций ( $p_{ii}^{(k)} = 0$ );  $E^{(k)}$ ,  $\nu^{(k)}$  — мгновенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\eta^{(k)}$ ,  $\mu^{(k)}$  — коэффициенты линейной вязкости при чистом сдвиге и объемном расширении-сжатии;  $\tau_s^{(k)}$  — функция упрочнения при чистом сдвиге, которая зависит от параметра Одквиста  $\chi^{(k)}$ ;  $\bar{G}^{(k)}$  — касательный модуль на мгновенной диаграмме чистого сдвига  $\tau^{(k)} \sim \gamma_p^{(k)}$ ;  $\gamma_p^{(k)}$  — пластическая составляющая полной угловой деформации при сдвиге;  $\tau^{(k)}$  — касательное напряжение при сдвиге;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера; индекс  $k$  — номер компонента композиции ( $k = 0$  — связующее,  $1 \leq k \leq N$  — арматура  $k$ -го семейства); точка — дифференцирование по времени. Соотношения (4) при учете (5) получены в [15] в предположении, что деформации  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  можно разложить на сумму вязкоупругих и пластических  $p_{ij}^{(k)}$  составляющих. При этом пластическое поведение материала описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением, а вязкоупругое деформирование — уравнениями модели тела Максвелла—Больцмана.

Как и в работах [15, 16, 20], решение исследуемой задачи будем строить численно, используя пошаговый алгоритм [8, 25]. Согласно этому, значения искомых функций будем вычислять в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\Delta$  — шаг по времени. В [16] была разработана структурная модель вязкоупругопластического деформирования КМ с пространственным армированием, механическое поведение материалов композиции которого описывается соотношениями (4) при учете (5). При этом в рассматриваемый момент времени  $t_n$  определяющее уравнение для композиции записывается в матричной форме

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{P}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6)^\top \equiv (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^\top, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6)^\top \equiv (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\varepsilon_{23} \ 2\varepsilon_{31} \ 2\varepsilon_{12})^\top, \\ \mathbf{p} &= (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6)^\top;\end{aligned}\quad (7)$$

$$\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t_n, \mathbf{r}), \quad \overset{n}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_n, \mathbf{r}), \quad \overset{n}{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{p}(t_n, \mathbf{r}), \quad \overset{n}{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(t_n, \mathbf{r}); \quad (8)$$

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров усредненных напряжений и деформаций в КМ;  $\mathbf{B}$  — матрица размером  $6 \times 6$ ; индекс  $^\top$  — операция транспонирования.

Согласно [16], соотношение (6) линеаризовано по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости [26], причем матрица  $\mathbf{B}$  и вектор  $\mathbf{p}$  с учетом (7) вычисляются по матричным формулам (24) из [16]. На данной итерации указанного метода при  $t = t_n$  элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и вектора-столбца  $\mathbf{p}$  уже известны и определяются механическими характеристиками материалов композиции, напряженным состоянием в них (которое рассчитано на предыдущей итерации) и структурой армирования: углами  $\theta_k, \varphi_k$  (см. рис. 3) и плотностями  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) армирования.

Далее моделируется механическое поведение КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, поэтому нормальное напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по координате  $z$  [13]:

$$\begin{aligned}\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) &= \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \\ &+ \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (9)\end{aligned}$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — напряжения на внешней (+) и внутренней (−) лицевых поверхностях, которые известны из силовых граничных условий.

Матричное равенство (6) является системой шести алгебраических уравнений. В силу условий соответствия (7) из третьего равенства этой системы выразим скорость линейной поперечной деформации конструкции

$$\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_{33} \equiv \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_3 = (\overset{n}{b}_{33})^{-1} \left( \overset{n}{\dot{\sigma}}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) \overset{n}{b}_{3i} \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_i - \overset{n}{p}_3 \right), \quad (10)$$

где  $\overset{n}{b}_{3i}$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) — элементы матрицы  $\overset{n}{\mathbf{B}}$  в уравнении (6); производная  $\overset{n}{\dot{\sigma}}_3$  определяется путем дифференцирования по времени выражения (9). Скорости деформаций  $\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_i$  в правой части (10) получаются дифференцированием по  $t$  равенств (1), т. е. зависят от функций  $w, \dot{w}, \dot{u}_l, \dot{\varepsilon}_{l3}^{(m)}$  ( $0 \leq m \leq M$ ) и их частных производных по  $x_l$  ( $l = 1, 2$ ).

Для окончательной формулировки начально-краевой задачи вязкоупругопластического изгибного деформирования тонких армированных цилиндрических оболочек в рамках уточненной теории к равенствам (1), (2), (6), (10) следует добавить двумерные уравнения движения и соответствующие начальные и граничные условия (см. [20], соотношения (7), (17), (19) и (21)).

**2. Численный метод расчета.** В разделе 1 уже отмечалось, что для численного интегрирования сформулированной начально-краевой задачи будем использовать метод шагов по времени [8, 14–16, 20, 25, 26]. Согласно этому, предполагаем, что в дискретные моменты времени  $t_m$  уже известны следующие функции:

$$\begin{aligned} \overset{m}{w}(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & \overset{m}{u}_i^{(l)}(\mathbf{x}) &\equiv u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), & \overset{m}{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \overset{m}{\dot{\sigma}}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & \overset{m}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & i = 1, 2, & j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$m = n - 1, n, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h,$$

где

$$u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_i(t, \mathbf{r}) z^l dx_3 \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad (12)$$

— введенные новые кинематические неизвестные переменные [20].

За исключением необходимых преобразований уравнений (4) (см. [16], формулы (19) и (20)), обеспечивающих устойчивость разрабатываемой численной схемы [15], производные по времени далее заменяем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ . Это позволяет построить явную схему численного интегрирования рассматриваемой задачи. После аппроксимации в уравнениях движения вторых производных по времени от кинематических переменных  $w$  и  $u_i^{(l)}$  (см. (12)) их конечно-разностными аналогами, учитывая обозначения, аналогичные (8) и (11), получим [20]

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \partial_1 (\overset{n}{M}_{13}^{(0)} + \overset{n}{M}_{11}^{(0)}) \partial_1 \overset{n}{w} + \overset{n}{M}_{12}^{(0)} \partial_2 \overset{n}{w} + \\ &+ \partial_2 (\overset{n}{M}_{23}^{(0)} + \overset{n}{M}_{21}^{(0)}) \partial_1 \overset{n}{w} + \overset{n}{M}_{22}^{(0)} \partial_2 \overset{n}{w} - \overset{n}{M}_{22}^{(0)} + \overset{n}{\sigma}_{33}^{(+)} - \overset{n}{\sigma}_{33}^{(-)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta^2} (u_1^{n+1(l)} - 2u_1^{n(l)} + u_1^{n-1(l)}) &= \partial_1 (\overset{n}{M}_{11}^{(l)} - \overset{n}{M}_{13}^{(l)}) \partial_1 \overset{n}{w} + \partial_2 (\overset{n}{M}_{12}^{(l)} - \overset{n}{M}_{23}^{(l)}) \partial_1 \overset{n}{w} - \\ &- l \overset{n}{M}_{13}^{(l-1)} + l \overset{n}{M}_{33}^{(l-1)} \partial_1 \overset{n}{w} - h^l [\overset{n}{\sigma}_{33}^{(+)} - (-1)^l \overset{n}{\sigma}_{33}^{(-)}] \partial_1 \overset{n}{w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta^2} (u_2^{n+1(l)} - 2u_2^{n(l)} + u_2^{n-1(l)}) &= \partial_1 (\overset{n}{M}_{21}^{(l)} - \overset{n}{M}_{13}^{(l)}) \partial_2 \overset{n}{w} + \\ &+ \partial_2 (\overset{n}{M}_{22}^{(l)} - \overset{n}{M}_{23}^{(l)}) \partial_2 \overset{n}{w} - l \overset{n}{M}_{23}^{(l-1)} + l \overset{n}{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 \overset{n}{w} - \\ &- h^l [(R+h)^{-1} \overset{n}{\sigma}_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \overset{n}{\sigma}_{33}^{(-)}] \partial_2 \overset{n}{w} + \overset{n}{M}_{23}^{(l)}, \\ &0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где (см. выражение (9))

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, & M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, & \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \\
 &= \frac{h^l}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l\bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \frac{l}{2h} (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_l(h) - \Psi_l(-h)) + \\
 &+ \frac{l}{2} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h)),
 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M+1;$$

$\rho_0, \rho_k$  — объемная плотность материала связующего и волокон  $k$ -го семейства; функции  $\Psi_l(z)$  определены в (3). В уравнениях (13) массовые нагрузки не учитываются.

На основании формул (14) с учетом (11) при  $t = t_n$  можем определить все силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}, \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$  и внешние силы  $\sigma_{33}^{(\pm)}$ , которые входят в правые части равенств (13). Учитывая при этом необходимые граничные условия (см. (17) и (19) в [20]), из (13) определяем по явной схеме значения функций  $w^{n+1}, u_i^{n+1(l)}, 0 \leq l \leq M+1$ , в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . После этого по формуле (23) из [20], которая вытекает из (2) и (12) при учете (3), вычисляем функции  $u_i^{n+1}$  и  $\varepsilon_{i3}^{n+1(m)}, i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$ . Затем на основании (1) получаем осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$ . В предшествующий момент времени  $t_{n-1}$  деформации  $\varepsilon_{ij}^{n-1}$  уже известны (см. (1) при учете (11)), поэтому, используя численное дифференцирование по времени и соотношение (10), определяем и скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$  в текущий момент времени  $t_n$ . Дальнейшее численное решение исследуемой задачи строится совершенно так же, как и в работах [16, 20].

Структура левых частей равенств (13) свидетельствует о том, что для начала проведения расчетов по разработанной явной схеме нужно знать значения функций  $w^0$  и  $u_i^0$ , известные из начальных условий (см. (21) в [20]), а также  $w^1$  и  $u_i^1$  (см. (13) при  $n = 1$ ). Значения последних функций вычисляются по формуле Тейлора при учете начальных условий и уравнений движения, рассматриваемых при  $t = t_0$  (см. последние формулы раздела 2 в [20]).

Для замкнутой круговой цилиндрической оболочки область  $\Omega$  (см. (2)) является прямоугольной. Следовательно, аппроксимируя в соотношениях (13) производные  $\partial_i(\cdot)$  их конечно-разностными аналогами от уже известных (см. (14) при учете (11)) в текущий момент времени  $t_n$  сеточных функций, окончательно получим явную численную схему «крест» [14–16, 20]. Необходимые условия устойчивости этой схемы для однородных тонкостенных конструкций приведены в [14]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-оболочки.

**3. Обсуждение результатов расчетов.** Исследуем неупругое динамическое изгибное поведение относительно тонкой замкнутой цилиндрической КМ-оболочки толщиной  $2h = 2$  см, радиуса  $R = 1$  м и длиной  $L = 4$  м ( $2h/\min(L, R) = 1/50$ ), которая жестко закреплена на кромках ( $w = 0$ ,  $u_i^{(l)} = 0$  при  $x_1 = 0, L$  и  $t \geq t_0$  [20]) и до начального момента времени  $t = t_0 = 0$  покоится в естественном состоянии ( $w = 0$ ,  $u_i^{(l)} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq l \leq M + 1$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t < t_0$  [20]). Конструкция нагружается изнутри равномерным давлением  $p(t)$  по закону (см. (9), (13), (14)) [25]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0.01p_{\max},$$

где смысл параметров нагрузки  $p_{\max}$ ,  $t_{\max}$ ,  $t_{\min}$  и  $\alpha$  вполне очевиден и подробно описан в [16, 20]. Используя экспериментальные данные [25], в расчетах примем  $p_{\max} = 8$  МПа,  $t_{\max} = 0.1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс. Эти данные условно характеризуют давление, вызванное воздушной взрывной волной.

Оболочка изготовлена из эпоксидной смолы и армирована стекловолокнами. Мгновенное упругопластическое поведение  $k$ -го материала композиции при активном нагружении описывается диаграммой растяжения-сжатия с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} \equiv \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  — осевое напряжение и линейная деформация;  $E_s^{(k)}$  — модуль упрочнения;  $\sigma_s^{(k)}$  — предел текучести. Физико-механические характеристики материалов композиции приведены в таблице, причем объемная вязкость не учитывается:  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$  (см. (5)).

Physico-mechanical characteristics of the composite components [21, 22]

Components	$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , НПа	$E_s$ , НПа	$\eta$ , МПа·с
Epoxy	1210	0.33	20	2.8	1.114	250
Fiberglass	2520	0.25	4500	86.8	6.230	1000

Рассматриваются две структуры однородного армирования:

- 1) продольно-окружное 2D-армирование (рис. 2, а) с интенсивностями армирования  $\omega_1 = 0.1$  и  $\omega_2 = 0.3$  в осевом и окружном направлениях;
- 2) пространственное 4D-армирование, при котором два первых семейства волокон также уложены в продольном и окружном направлениях с плотностями армирования  $\omega_1 = 0.05$  и  $\omega_2 = 0.3$ , а третье и четвертое семейства стекловолокон уложены наклонно с плотностями  $\omega_3 = \omega_4 = 0.025$ .

В случае 4D-структуры направления армирования определяются следующими значениями углов сферической системы координат (см. рис. 3):  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ,  $\theta_3 = \pi/4$ ,  $\theta_4 = 3\pi/4$ ,  $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$  и  $\varphi_2 = \pi/2$  (на рис. 2, б

угол  $\theta = \pi/4$  и оси  $x_1, x_2$  следует поменять местами). В обеих структурах армирования расход волокон одинаков.

При указанных условиях армирования, закрепления и нагружения цилиндрическая КМ-оболочка деформируется осесимметрично (решение начально-краевой задачи не зависит от окружной переменной  $x_2$ ), а также симметрично относительно центрального сечения  $x_1 = L/2$ , например  $w(t, x) = w(t, -x)$ , где  $x = x_1 - L/2$  и  $|x| \leq L/2$ .

На рис. 4 изображены зависимости от времени наибольшего абсолютного значения прогиба КМ-конструкции

$$w_m(t) = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |w(t, x_1)|.$$

Номера кривых на рис. 4 соответствуют номеру структуры армирования. Кривые 1 и 2 получены при указанных выше входных данных. Кривая 1'' рис. 4, а рассчитана при тех же условиях, что и кривая 1, но в рамках теории упругопластического деформирования материалов композиции (при  $\eta^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq N$ ; см. (5)). Поведение кривой 1'' показывает, что согласно упругопластическому расчету, КМ-конструкция колеблется неограниченно долго. Кривые же 1 и 2 свидетельствуют о том, что к моменту времени  $t = 400$  мс осцилляции наибольшего по модулю значения прогиба практически прекращаются, а величина максимального остаточного прогиба имеет значение, равное примерно 1.3 мм. Сопоставление кривых 1 и 1'' на рис. 4, а показывает, что упругопластические расчеты (кривая 1'') не позволяют определить величину наибольшего остаточного прогиба цилиндрической КМ-оболочки даже весьма приближенно.

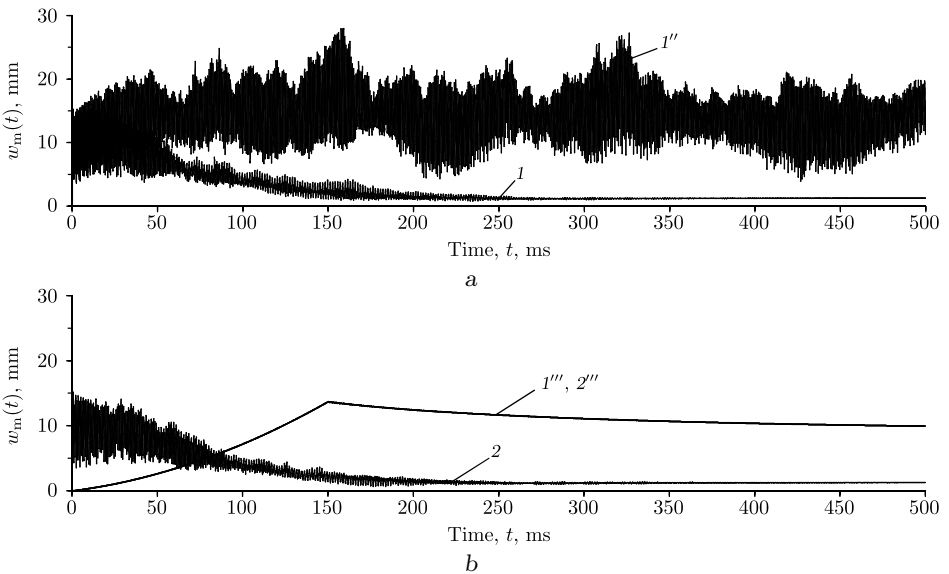


Рис. 4. Осцилляции максимального абсолютного значения прогиба: (а) — уточненные упругопластический и вязкоупругопластический расчеты КМ-оболочки с 2D-армированием; (б) — уточненный вязкоупругопластический расчет оболочки с 4D-армированием

[Figure 4. Oscillations of the maximum absolute value of the deflection: (a) — refined elastoplastic and viscoelastoplastic calculations for the CM-shell with 2D-reinforcement; (b) — refined viscoelastoplastic calculation for the shell with 4D-reinforcement]

На рис. 5 приведены зависимости  $w(x)$  ( $x = x_1 - L/2$ ), рассчитанные при  $t = 500$  мс. (Согласно поведению кривых 1 и 2 на рис. 4, осцилляции прогиба КМ-конструкции при этом практически уже прекратились.) Кривые 1 и 2 на рис. 5 определены при тех же условиях, что и кривые 1 и 2 на рис. 4. Как указывалось выше, решения исследуемой задачи обладают симметрией относительно центральных сечений конструкций  $x = 0$  ( $x_1 = L/2$ ), поэтому на рис. 5 изображены только правые части зависимостей  $w(x)$  ( $|x| \leq L/2$ ). Сравнение максимальных значений ординат точек на кривых 1 и 2 рис. 5, которые достигаются в зоне краевого эффекта ( $x \approx 1.84$  м), показывает, что при  $t = 500$  мс значения  $w_m$  на кривой 2 примерно на 2% больше, чем на кривой 1. Сопоставление же этих кривых при  $0 \leq x \leq 1.3$  м свидетельствует о том, что при использовании 4D-структуры армирования (кривая 2) остаточный прогиб в центральной части даже относительно тонкой КМ-конструкции на 10–20% меньше аналогичной величины в цилиндрической оболочке с традиционным 2D-армированием.

Все кривые на рис. 4 и 5 получены по уточненной теории изгиба оболочек при  $M = 7$  (см. (1) и (2)). Расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна ( $M = 0$ ), приводят к зависимостям  $w_m(t)$  и  $w(x)$  при  $t = 500$  мс, которые визуально практически не отличаются от кривых, приведенных на рис. 4 и 5, поэтому не изображены.

На рис. 6 представлены зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции  $\varepsilon_*^{(k)}$ :

$$\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{x_1, z} \varepsilon_*^{(k)},$$

где  $|z| \leq h$ ,  $0 \leq x_1 \leq L$  для цилиндрической оболочки с 4D-структурой армирования в окрестности начального момента времени (рис. 6, а) и в окрестности  $t = 500$  мс (рис. 6, б). Номера кривых соответствуют номеру  $k$ -го компонента композиции: 0, 0' — связующее ( $k = 0$ ); 2, 2' — арматура второго (окружного) семейства ( $k = 2$ ). Сплошные кривые 0 и 2 рассчитаны по

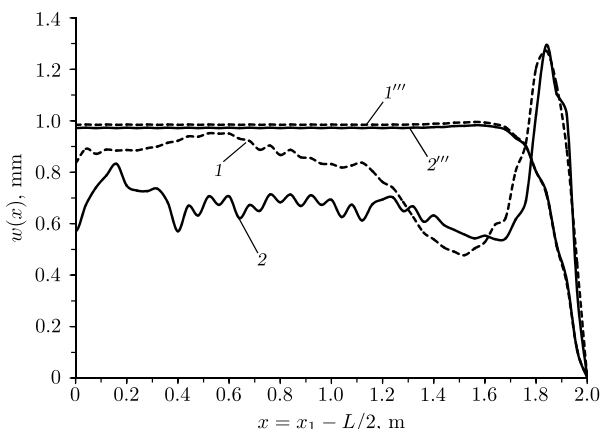


Рис. 5. Эпюры остаточных прогибов цилиндрических КМ-оболочек, рассчитанные по уточненной теории

[Figure 5. Diagrams of residual deflections of cylindrical CM-shells calculated by the refined theory]

уточненной теории ( $M = 7$ ), а штриховые кривые  $0'$  и  $2'$  — по теории Амбарцумяна ( $M = 0$ ). На рис. 6, а кривые 2 и  $2'$  визуально практически не различаются. Кривые 0,  $0'$  и 2,  $2'$  на рис. 6 получены при прежних входных данных.

Сравнение ординат глобальных максимумов на кривых 0 и  $0'$  (при  $t = 0.5$  мс) на рис. 6, а показывает, что расчет по традиционной теории Амбарцумяна завышает наибольшее значение  $\varepsilon_m^{(0)}$  в связующем оболочке с пространственной структурой армирования на 29% по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории. Сопоставление же кривых 0, 2 и  $0'$ ,  $2'$  на рис. 6, б демонстрирует, что теория Амбарцумяна примерно на 35% завышает величину интенсивности остаточных деформаций в компонентах композиции по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории.

На рис. 7 изображены зависимости  $\varepsilon_m^{(k)}(t)$ , рассчитанные по уточненной теории ( $M = 7$ ) в окрестности начального момента времени (рис. 7, а) и в ок-

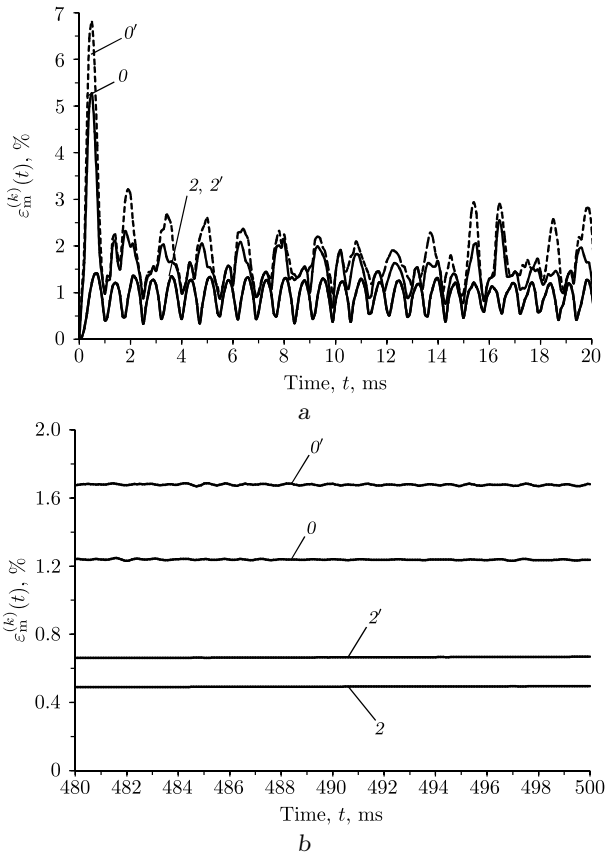


Рис. 6. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиции оболочки с 4D-армированием, рассчитанные по разным теориям: (а) — в окрестности начального момента времени; (б) — в окрестности  $t = 500$  мс

[Figure 6. Oscillations of the highest values of the deformation intensities of components of shell compositions with 4D-reinforcement calculated by the different theories: (a) — close to the initial moment of time; (b) — close to the time  $t = 500$  ms]

рестности  $t = 500$  мс (рис. 7, *b*) для КМ-оболочки с 2D-структурой армирования (сплошные кривые 0, 2) и с пространственной 4D-структурой (штриховые кривые 0', 2'). Как и на рис. 6, номера кривых соответствуют номеру  $k$ -го компонента композиции. Сравнение кривых 0 и 0' на рис. 7, *a* показывает, что для относительно тонкой цилиндрической оболочки замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру приводит к увеличению максимального значения  $\varepsilon_m^{(0)}$  примерно на 9% (см. кривые 0 и 0' при  $t \approx 0.5$  мс). Однако сопоставление этих же кривых на рис. 7, *b* свидетельствует о том, что к моменту времени  $t = 500$  мс конструкция с 4D-структурой армирования (кривая 0') практически перестала осциллировать, а оболочка с 2D-структурой (кривая 0) все еще колеблется. Сравнение ординаты точки кривой 0' при  $t = 500$  мс со средним значением ординат точек кривой 0 в окрестности этого момента времени демонстрирует, что замена 2D-структуры на 4D-структуру армирования позволяет уменьшить величину интенсивности остаточных

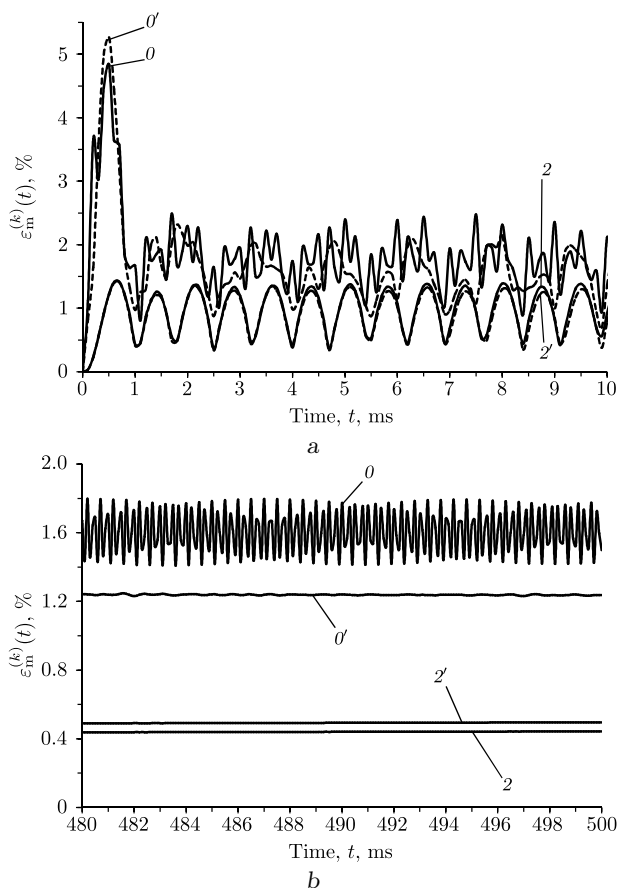


Рис. 7. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиций оболочек с разными структурами армирования, рассчитанные по уточненной теории: (а) — в окрестности начального момента времени; (б) — в окрестности  $t = 500$  мс

[Figure 7. Oscillations of the highest values of the deformation intensities of components of shell compositions with different structures of reinforcement calculated according to the refined theory: (a) — close to the initial moment of time; (b) — close to the time  $t = 500$  ms]

деформаций связующего примерно на 30 %. Из поведения кривых 2 и 2' на рис. 7, *b* видно, что при такой замене структуры армирования максимальное значение интенсивности остаточных деформаций второго (окружного) семейства возрастает на 12 %. Таким образом, замена «плоско»-перекрестной 2D-структуры армирования (рис. 2, *a*) на пространственную 4D-структуру (рис. 2, *b*) при динамическом нагружении тонкой длинной цилиндрической оболочки и фиксированном расходе волокон может приводить как к увеличению, так и уменьшению интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции.

В связи с этим целесообразно проанализировать неупругое поведение таких цилиндрических КМ-оболочек при квазистатическом нагружении. Так, на рис. 4, *b* кривые 1''' и 2''' характеризуют зависимости  $w_m(t)$ , рассчитанные при разных структурах армирования и следующих параметрах нагрузки:  $p_{\max} = 3$  МПа,  $t_{\max} = 150$  мс и  $t_{\min} = 300$  мс (см. (15)). При принятом на рис. 4, *b* масштабе по оси ординат кривые 1''' и 2''' визуально не различаются, однако кривая 2''' все же лежит ниже кривой 1'''. В отличие от кривой 2, кривые 1''' и 2''' не осциллируют. Это свидетельствует о том, что указанное нагружение действительно можно рассматривать как квазистатическое.

На рис. 5 кривые 1''' и 2''' характеризуют зависимости  $w(x)$ , рассчитанные при квазистатическом нагружении в момент времени  $t = 500$  мс. Ординаты точек этих кривых уменьшены в 10 раз (см. правые участки кривых 1''' и 2''' на рис. 4, *b*). Из поведения кривых 1''' и 2''' на рис. 5 видно, что при квазистатическом нагружении цилиндрических КМ-оболочек внутренним давлением такие конструкции после снятия нагрузки не приобретают гофрированную остаточную форму, как это наблюдается при динамическом нагружении (см. кривые 1 и 2). На отрезке  $0 \leq x \leq 1.6$  м кривые 1''' и 2''' имеют практически горизонтальные участки. Это свидетельствует о том, что при квазистатическом нагружении в длинных цилиндрических КМ-оболочках реализуется в основном безмоментное напряженное состояние и лишь в зонах краевых эффектов (при  $1.6 < x \leq 2$  м) возникает ярко выраженное моментное состояние. Сравнение правых участков всех кривых на рис. 5 показывает, что протяженность зон краевых эффектов как при динамическом (кривые 1 и 2), так и при квазистатическом (кривые 1''' и 2''') нагружениях примерно одна и та же.

Кривая 2''' на рис. 5 в основном лежит несколько ниже кривой 1''', т. е. при квазистатическом нагружении замена 2D-структуры армирования (кривая 1''') на 4D-структуру (кривая 2''') также приводит к уменьшению величины остаточного прогиба за пределами зон краевых эффектов. Однако это уменьшение мало (около 1.5 %). Сравнение же интенсивности деформаций в компонентах композиции при этом показывает, что при  $t = 500$  мс значения  $\varepsilon_m^{(0)} = 3.14$  %,  $\varepsilon_m^{(2)} = 1.11$  % в случае 2D-структуры армирования и  $\varepsilon_m^{(0)} = 4.08$  %,  $\varepsilon_m^{(2)} = 1.08$  % в случае использования 4D-структуры. Следовательно, при квазистатическом нагружении тонкой длинной цилиндрической оболочки замена традиционной «плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру приводит к увеличению интенсивности остаточных деформаций связующей матрицы на 29.9 % и к уменьшению аналогичной величины волокон второго семейства всего на 2.7 %. Очевидно,

что при квазистатическом нагружении таких конструкций указанная замена структур армирования неэффективна.

Кривые  $1'''$  и  $2'''$  на рис. 4, b и 5 получены по уточненной теории изгиба ( $M = 7$ ). Расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна, приводят практически к тем же результатам. Это относится и к определению деформированного состояния компонентов композиции оболочек. Поэтому неупругое поведение длинных тонких цилиндрических КМ-оболочек при их квазистатическом нагружении внутренним давлением вполне адекватно можно определять по традиционной неклассической теории Амбарцумяна.

Для расчета остаточных состояний (в частности, остаточных прогибов) динамически нагружаемых и неупруго деформируемых цилиндрических оболочек (в том числе и композитных, подкрепленных) ранее предлагалось использовать модель жесткопластического тела, что позволяет в ряде случаев получить достаточно простые и вполне обозримые аналитические решения [27]. Поэтому здесь целесообразно обсудить результаты расчетов по упругопластической модели, но приближенной к модели жесткопластического тела. С этой целью модули Юнга материалов композиции  $E^{(k)}$  (см. таблицу) были увеличены: для связующей матрицы ( $k = 0$ ) в  $15 \cdot 10^6$  раз, а для арматуры ( $k \geq 1$ ) в  $10^6$  раз. Для обеспечения устойчивости схемы «крест» шаг по времени  $\Delta$  при этом был уменьшен в  $10^3$  раз. Динамический расчет проводился при исходных параметрах нагрузки:  $p_{\max} = 8$  МПа,  $t_{\max} = 0.1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс (см. (15)). Оказалось, что при таких входных данных величины  $w_m$  имеют порядок  $10^{-9}$  м, а значения  $\varepsilon_m^{(k)}$  ( $0 \leq k \leq N$ ) — порядок  $10^{-6}$  % как в случае 2D-структуры армирования, так и в случае 4D-структуры, т. е. пластичность в материалах композиции вообще не возникает. Кроме того, в момент времени  $t = t_{\max} = 0.1$  мс, когда внутреннее давление достигает своего максимального значения  $p_{\max}$ , эпюра прогибов  $w(x)$  имеет вид, аналогичный кривым  $1'''$  и  $2'''$  на рис. 5, т. е. качественно отличается от поведения остаточного прогиба, характеризуемого кривыми 1 и 2 на рис. 5. Следовательно, расчеты динамического неупругого поведения стеклопластиковых цилиндрических оболочек, выполненные по модели жесткопластического тела, ни количественно, ни качественно не позволяют определить и даже грубо оценить остаточные формы таких конструкций.

Приведенные выше результаты относятся к относительно тонким длинным цилиндрическим КМ-оболочкам ( $2h/R = 1/50$ ,  $L = 4R$ ). Дополнительные расчеты показывают, что для относительно толстых конструкций ( $2h/\min(R, L) = 1/10$ ), а особенно для коротких цилиндрических КМ-оболочек, положительный эффект от замены «плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную 4D-структуру значительно возрастает, причем он начинает проявляться уже и при квазистатическом нагружении таких конструкций. В частности, величина наибольшего по модулю остаточного прогиба при такой замене может уменьшаться на несколько десятков процентов, а интенсивность остаточных деформаций в связующей матрице может уменьшаться даже в разы. Кроме того, с увеличением относительной толщины КМ-оболочки увеличивается различие между решениями, полученными по уточненной теории изгиба и традиционной неклассической теории Амбарцумяна. Разность наибольших по модулю значений остаточных прогибов при этом может превосходить 5 %, а разность максимальных значений



интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции может достигать даже сотен процентов как при «плоско»-перекрестном, так и при пространственном армировании конструкции.

**Заключение.** Разработана уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования, которая позволяет более точно, чем в рамках теории Амбарцумяна, рассчитывать остаточные перемещения и остаточные напряженно-деформированные состояния в компонентах композиции при действии интенсивных кратковременных нагрузок. Показано, что даже для относительно тонкой и длинной цилиндрической КМ-оболочки динамические расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна, могут на несколько десятков процентов завышать максимальное значение и остаточную величину интенсивности деформаций компонентов композиции. Однако при квазистатическом нагружении таких неупруго деформируемых КМ-конструкций вполне оправданно можно использовать теорию Амбарцумяна.

Следовательно, для получения адекватных результатов динамических расчетов вязкоупругопластического поведения гибких КМ-конструкций целесообразно использовать теории изгиба более высокой точности, чем теория Амбарцумяна [11].

Проведенные расчеты продемонстрировали, что даже для тонких длинных оболочек из стеклопластика, нагруженных изнутри давлением взрывного типа, замена традиционной перекрестной структуры армирования по эквидистантным поверхностям (см. рис. 1, b и 2, a) на пространственную структуру (см. рис. 2, b) позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций связующей матрицы, а также снизить на 10–20 % величину остаточных прогибов в центральной части КМ-оболочки. Наибольший остаточный прогиб, который возникает в зоне краевого эффекта, при такой замене структур армирования изменяется пренебрежимо мало. Однако осцилляции пространственно-армированной конструкции затухают быстрее, чем оболочки с «плоско»-перекрестной структурой армирования. При квазистатическом нагружении тонких длинных цилиндрических оболочек внутренним давлением такая замена структур армирования является неэффективной. В случаях же относительно толстых, и особенно коротких, цилиндрических оболочек положительный эффект от замены 2D-структуры армирования (рис. 2, a) на 4D-структуру (рис. 2, b) значительно возрастает, причем заметно проявляется и в случаях квазистатического нагружения таких конструкций.

Показано, что после неупругого динамического деформирования тонкие длинные стеклопластиковые цилиндрические КМ-оболочки приобретают гофрированную остаточную форму, причем образующиеся складки ориентированы в окружном направлении. При квазистатическом нагружении и неупругом деформировании таких конструкций складчатая остаточная форма не образуется (за пределами краевых эффектов цилиндрические КМ-оболочки при этом деформируются как безмоментные).

Продемонстрировано, что использование жесткопластической модели не позволяет адекватно рассчитывать форму остаточного прогиба цилиндрических стеклопластиковых оболочек при их динамическом нагружении. Такие расчеты на 6 порядков занижают максимальные значения прогибов и интенсивностей деформаций компонентов композиции по сравнению с расчетами,

проведенными с использованием вязкоупругопластической модели. Поэтому модель жесткопластического тела нецелесообразно использовать для проведения динамических расчетов неупругого поведения тонкостенных стеклопластиковых конструкций.

**Конкурирующие интересы.** У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

### Библиографический список

1. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.*, 2001. vol. 53, no. 1. pp. 21–42. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6).
2. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2003. xxiii+831 pp. <https://doi.org/10.1201/b12409>.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aerospace Sciences*, 2005. vol. 41, no. 2. pp. 143–151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>.
4. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. 700 pp. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
5. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier: Amsterdam, 2013. xii+412 pp. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
6. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
7. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андриюшин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
9. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
10. Григоренко Я. М. *Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости*. Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.
11. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
12. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
13. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
14. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
15. Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2019. Т. 12, № 1. С. 80–97. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8>.
16. Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования // *Вестн. Сам. гос.*

- техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 24, №3. С. 506–527. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1709>.
17. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания*. Новосибирск: Наука, 2001. 287 с.
  18. Whitney J. M., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. Sound Vib.*, 1973. vol. 30, no. 1. pp. 85–97. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(73)80052-5).
  19. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates // *J. Appl. Mech.*, 1977. vol. 44, no. 4. pp. 669–676. <https://doi.org/10.1115/1.3424155>.
  20. Янковский А. П. Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования армированных цилиндрических оболочек // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2020. №1. С. 138–149. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.11>.
  21. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
  22. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. xi+786 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1>.
  23. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites // *Sampe J.*, 2001. vol. 37, no. 3. pp. 3–17.
  24. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2009. vol. 45, no. 2. pp. 241–254. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>.
  25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-x](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-x).
  26. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
  27. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. *Динамика жесткопластических элементов конструкций*. Новосибирск: Наука, 1984. 234 с.

MSC: 74K20

## A refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible spatially-reinforced cylindrical shells

© A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

### Abstract


A model of viscoelastic-plastic deformation of flexible circular cylindrical shells with spatial reinforcement structures is developed. The instant plastic behavior of the materials of the composition is determined by flow theory with isotropic hardening. The viscoelastic deformation of the components of the composition is described by the equations of the Maxwell–Boltzmann model. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The used relations make it possible to calculate with varying degrees of accuracy the residual displacements of the points of the construction and the residual deformed state of the components of the composition. In this case, a possible weak resistance of the reinforced shell to transverse shear is simulated. In the first approximation, the equations used, the initial and boundary conditions, are reduced to the formulas of the nonclassical Ambardzumyan theory.

The numerical solution of the formulated initial boundary-value problem is constructed according to the explicit “cross” scheme. Elastoplastic and viscoelastic-plastic dynamic deformation of thin fiberglass shells under the influence of internal pressure of an explosive type is investigated. Two reinforcement structures are considered:

- 1) orthogonal reinforcement in the longitudinal and circumferential directions;
- 2) spatial reinforcement in four directions.

It is shown that even for relatively thin composite shells the Ambardzumyan theory is unacceptable to obtain adequate results of calculations of their viscoelastic-plastic dynamic deformation. It has been demonstrated that a calculation according to the theory of elastoplastic deformation of reinforced structures does not allow even an approximate estimate of the residual states of composite shells after their dynamic loading. It is shown that even for a relatively thin and long cylindrical shell, the replacement of the traditional “flat”-cross-reinforcement structure with a spatial structure

### Research Article

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Yankovskii A. P. A refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible spatially-reinforced cylindrical shells, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 343–364. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1838> (In Russian).

**Author’s Details:**

Andrei P. Yankovskii  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;

e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)

can significantly reduce the residual strain of the binder material. In cases of relatively thick and especially short shells, the positive effect of such a replacement of the reinforcement structures is manifested to a much greater extent.

**Keywords:** cylindrical shell, spatial reinforcement, reinforcement along equidistant surfaces, viscoelastic-plastic deformation, explosive-type loads, refined bending theories, Ambardzumyan theory, geometric nonlinearity, explicit numerical “cross” scheme type scheme.

Received: 8<sup>th</sup> December, 2020 / Revised: 12<sup>th</sup> March, 2021 /

Accepted: 11<sup>th</sup> May, 2021 / First online: 5<sup>th</sup> June, 2021

---

**Competing interests.** I hereby declare that I have no conflict of interest in the authorship and publication of this article.

**Author’s Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** The research was carried out within the framework of a state assignment; state registration number — 121030900260-6.

## References

1. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6).
2. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2003, xxiii+831 pp. <https://doi.org/10.1201/b12409>.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction, *Progress in Aerospace Sciences*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>.
4. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016, 700 pp. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
5. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier, Amsterdam, 2013, xii+412 pp. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
6. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
7. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp. (In Russian)
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
9. Tarnopol’skii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
10. Grigorenko Ya. M. *Izotropnyye i anizotropnyye sloistye obolochki vrashcheniia peremennoi zhestkosti* [Isotropic and Anisotropic Layered Shells of Revolution of Variable Stiffness]. Kiev, Naukova dumka, 1973, 228 pp. (In Russian)
11. Ambartsumyan S. A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 2002, 446 pp. (In Russian)

12. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
13. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Non-Linear Dynamic Problems for Composite Cylindrical Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
14. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukt-sii* [Nonlinear Problems of Dynamics of Composite Structures]. Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
15. Yankovskii A. P. Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear, *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 80–97 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8>.
16. Yankovskii A. P. Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 506–527 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1709>.
17. Andreev A. N., Nemirovskii Yu. V. *Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgb, ustoychivost' i kolebaniia* [Multilayer Anisotropic Shells and Plates. Bending, Stability, and Vibrations]. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 pp. (In Russian)
18. Whitney J. M., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85–97. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5).
19. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates, *J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, no. 4, pp. 669–676. <https://doi.org/10.1115/1.3424155>.
20. Yankovskii A. P. The refined model of viscoelastic-plastic deformation of reinforced cylindrical shells, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 138–149 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.11>.
21. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Naukova Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)
22. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, xi+786 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1>.
23. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites, *Sampe J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3–17.
24. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
26. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [Deformation and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
27. Komarov K. L., Nemirovskii Yu. V. *Dinamika zhestkoplasticheskikh elementov konstrukt-sii* [Dynamics of Rigid-Plastic Structural Elements]. Novosibirsk, Nauka, 1984, 234 pp. (In Russian)