Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 519–530
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1856

УДК 533.6.011

О месте звуковых точек в критическом течении

© *А. И. Беспорточный, А. Н. Бурмистров*

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

На основе анализа трехмерных уравнений Эйлера исследуются стационарные безвихревые баротропные течения газа. Критическими в статье называются течения, в которых число Маха всюду меньше или равно единице, и при этом хотя бы в одной точке число Маха достигает единицы. В 1954 году Гилбарг и Шифман показали, что если в критическом течении существует внутренняя (не лежащая на обтекаемой поверхности) звуковая точка, то она лежит на плоской звуковой поверхности, которая во всех своих точках перпендикулярна вектору скорости газа и не может заканчиваться внутри потока (теорема о звуковой точке). На основе этой теоремы Гилбарг и Шифман получили важный для задач максимизации критического числа Маха вывод. Он состоит в том, что при критическом обтекании для широкого класса обтекаемых тел звуковые точки могут располагаться только на его поверхности. Этот вывод существенным образом используется при построении форм обтекаемых тел с максимальным значением критического числа Маха (при заданных изопериметрических условиях).

В представляемой статье рассматривается вопрос о кривизне линий тока во внутренних звуковых точках критических течений. Показывается, что эта кривизна равна нулю. В результате получается новое необходимое условие существования внутренней звуковой точки (и звуковой поверхности). Оно состоит в том, что в точке пересечения со звуковой поверхностью нормальная кривизна обтекаемой поверхности в направлении нормали к звуковой поверхности должна равняться нулю. Приводятся примеры обтекаемых тел, для которых теорема Гилбарга и Шифмана (о звуковой точке) не дает ответа на вопрос о месте расположения звуковых точек. При этом новое необходимое условие позволяет доказать, что существование внутренних звуковых точек при критическом обтекании этих тел невозможно.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Беспорточный А. И., Бурмистров А. Н. О месте звуковых точек в критическом течении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 519–530. https://doi.org/10.14498/vsgtu1856.

Сведения об авторах

Александр Иванович Беспорточный https://orcid.org/0000-0002-1677-4604
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: aleksandr787@yandex.ru

Александр Николаевич Бурмистров https://orcid.org/0000-0003-3862-7936
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: a.burmistrov1@gmail.com

Ключевые слова: уравнения Эйлера, дозвуковой принцип максимума, критическое течение, звуковая точка, первая звуковая точка, звуковая линия, звуковая плоскость.

Получение: 25 марта 2021 г. / Исправление: 7 мая 2021 г. /
Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Дозвуковые течения, в каждой точке которых местное число Маха $\mathsf{M} \leqslant 1$ и при этом хотя бы в одной точке число Маха достигает единицы, называются критическими течениями. В задачах обтекания они соответствуют критическому числу Маха M^* набегающего потока, разграничивающему чисто дозвуковые течения и обтекания с местными сверхзвуковыми зонами. Если в набегающем потоке число Маха $\mathsf{M}_\infty > \mathsf{M}^*$, то при обтекании тела возникают местные сверхзвуковые зоны, что может привести к возникновению скачков уплотнения, которые, в свою очередь, могут вызывать отрыв потока. И скачки, и отрыв резко увеличивают сопротивление. Поэтому практически важной является задача максимизации M^*, состоящая в построении форм обтекаемых тел с максимальным значением M^* (при заданных изопериметрических условиях).

Известен эмпирический факт, что при медленном повышении дозвуковой скорости набегающего потока первые звуковые точки, в которых местное число Маха $\mathsf{M} = 1$, появляются именно на поверхности обтекаемого тела [1]. Из этого эмпирического факта возникло предположение о том, что среди первых звуковых точек обязательно есть точки, которые расположены на поверхности обтекаемого тела. Поэтому при поиске M^* для разных чисел Маха набегающего потока выясняют наличие звуковых точек не во всем течении, а только на поверхности обтекаемого тела. Это существенно упрощает решение задач максимизации M^* [2–7].

Теоретические исследования этого вопроса были проведены в работе [2], где было получено необходимое условие существования внутренних звуковых точек в течениях с $\mathsf{M} \leqslant 1$ (т.е. в критических течениях). Ниже это необходимое условие будет называться *теоремой о звуковой точке*. Согласно этой теореме, если в дозвуковом стационарном безвихревом баротропном течении существует внутренняя звуковая ($\mathsf{M} = 1$) точка, то она лежит на плоской звуковой поверхности (в двумерном случае — на прямой звуковой линии), которая в каждой точке перпендикулярна скорости газа и не может заканчиваться внутри течения. В работе [2] на основе теоремы о звуковой точке для широкого класса конфигураций обтекаемых тел был сделан вывод о том, что первые звуковые точки располагаются только на границе течения. Таким образом, при максимизации M^* в работах [2–7] использовался не только эмпирический, но и теоретически обоснованный факт появления первых звуковых точек именно на поверхности обтекаемого тела. В [2] рассмотрены только такие конфигурации обтекаемых тел, для которых любая плоская поверхность, проходящая через внутренние точки течения и, возможно, имеющая граничные точки на поверхности тела, либо простирается в бесконечность (в частности, это верно для любых выпуклых тел), либо эта поверхность расположена в углублении обтекаемого тела и со всех сторон ограничена поверхностью тела. Для случая, когда плоская поверхность простирается

в бесконечность, в [2] использовалось следующее рассуждение. Если во всем течении $\mathsf{M} \leqslant 1$, а в набегающем потоке $\mathsf{M}_\infty < 1$, то существование звуковой поверхности, простирающейся в бесконечность, невозможно вследствие условия затухания возмущений. Поэтому звуковые точки могут находиться только на поверхности таких тел. В [2] также рассмотрен случай, когда плоская звуковая поверхность расположена в углублении обтекаемого тела и со всех сторон ограничена поверхностью тела. Этот случай не противоречит условию $\mathsf{M} = \mathsf{M}_\infty < 1$ на бесконечности, поскольку звуковая поверхность ограничена. Однако в этом случае нарушался бы закон сохранения массы для области, ограниченной звуковой поверхностью и частью поверхности тела в каверне (через звуковую поверхность постоянно со звуковой скоростью двигался бы газ, в то время как оставшаяся часть границы области была бы непроницаема). Поэтому наличие углублений не меняет вывод о том, что звуковые точки могут находиться только на поверхности тел, рассмотренных в [2].

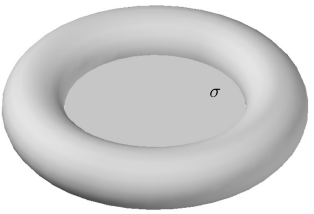
Однако для некоторых тел существование звуковых плоскостей не противоречит условию $\mathsf{M} = \mathsf{M}_\infty < 1$ на бесконечности и закону сохранения массы. Это имеет место, например, в каналах, где существуют плоские поверхности, ограниченные стенками канала. Невозможность существования некоторых таких звуковых поверхностей вытекает из того, что в точках поверхности тела звуковая поверхность и касательная к поверхности тела плоскость должны быть перпендикулярны. Это условие, которое ниже для краткости будем называть *первым геометрическим условием*, вытекает из ортогональности скорости газа к звуковой поверхности и из того, что скорость невязкого газа направлена по касательной к обтекаемой поверхности.

Таким образом, для вывода о появлении первых звуковых точек только на поверхности тела нет необходимости представлять картину течения и учитывать направление набегающего потока. Ответ на этот вопрос для некоторых обтекаемых тел можно получить без специальных знаний в области аэродинамики. Достаточно убедиться, что при любом взаимном расположении плоскости и тела либо часть плоскости, находящаяся в течении, простирается (хотя бы по одной кривой линии, лежащей на этой части плоскости) в бесконечность, либо эта часть ограничена поверхностью тела, но в ней либо нарушено первое геометрическое условие, либо она вместе с частью поверхности тела составляет замкнутую поверхность (нарушение закона сохранения массы). Примером тел, для которых такой подход легко приводит к выводу о появлении первых звуковых точек только на поверхности тела, являются все выпуклые тела, заглушенный цилиндр, полый конус и т.д. Однако для некоторых тел можно найти не простирающуюся в бесконечность плоскую поверхность σ, удовлетворяющую первому геометрическому условию. Например, самое узкое сечение сопла Лаваля. Целое семейство таких поверхностей можно указать для цилиндра с открытыми торцами — это плоские поверхности внутри цилиндра, перпендикулярные его стенкам. Одна поверхность существует для тора — это «перепонка» на самой узкой части отверстия тора (см. рисунок).

Эти примеры показывают, что для достаточно обширного класса обтекаемых тел вопрос о месте возникновения первых звуковых точек остается открытым. Цель данной статьи — сузить этот класс. Для решения некоторых проблем аэрогидродинамики недостаточно использования моделей идеаль-

Расположение звуковой поверхности на круглой части плоскости симметрии тора удовлетворяет первому геометрическому условию

[The location of the sonic surface on the circular part of the plane of symmetry of the torus satisfies the first geometric condition]



ных жидкости и газа (уравнения Эйлера) и требуется учитывать вязкость и другие, более сложные эффекты. Однако, как показывают работы [8–15], потенциал исследования идеальных жидкости и газа до сих пор не исчерпан. Еще одним подтверждением этого будет результат данной статьи, полученный на основе анализа уравнений Эйлера.

1. Баротропное безвихревое течение. Рассмотрим стационарное безвихревое баротропное течение идеального газа в общем пространственном случае. Используем обычные обозначения: $\mathbf{V}$ — скорость; ρ — плотность газа; $p = p(\rho)$ — давление, причем для каждой макрочастицы газа давление $p(\rho)$ является строго возрастающей функцией ρ. Будем считать, что все параметры течения (как функции пространственных координат) и функция $p(\rho)$ имеют необходимую для дальнейшего исследования гладкость.

В баротропном течении местная скорость звука является функцией плотности $c = c(\rho) = \sqrt{p'(\rho)} > 0$. Обозначим

$$g(\rho) = \int \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho, \quad V = |\mathbf{V}|.$$

Из уравнений Эйлера следует, что, поскольку $\mathbf{rot}\,\mathbf{V} = \mathbf{0}$, величина $h_0 = g(\rho) + \frac{V^2}{2}$ постоянна во всем поле течения (закон Бернулли). Так как неопределенный интеграл определяется с точностью до константы, без ограничения общности будем считать, что постоянная $h_0 > 0$. Давление, по предположению, растет с ростом плотности. Следовательно, $g'(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} > 0$, и обратная функция g^{-1} однозначно определена. Поэтому плотность, а вместе с ней и скорость звука, являются однозначными функциями скорости газа — $c = c(\rho(V))$. При этом плотность строго монотонно убывает с ростом V, что следует из выражения для постоянной h_0. Во всех точках дозвукового течения $V \leqslant c(\rho(V))$, а в звуковых точках $V = c(\rho(V))$.

В общем случае из баротропности и монотонности $p = p(\rho)$ не следует монотонность $c = c(\rho)$. Поэтому уравнение $V = c(\rho(V))$ может иметь несколько решений. Однако если дополнительно предположить, что скорость звука возрастает с ростом плотности, решение уравнения $V = c(\rho(V))$ будет единственным. И тогда, если во всем течении $\mathsf{M} \leqslant 1$, звуковые точки будут не только точками максимума числа Маха M, но и точками максимума скорости газа V (и точками максимума безразмерного параметра Чаплыгина $\tau = \frac{V}{\sqrt{2h_0}}$), т.е. можно будет считать, что во всем критическом течении скорость газа не превосходит скорость в звуковой точке.

Предположение о том, что в критическом течении скорость газа не превосходит скорость в звуковой точке, существенным образом использовалось в работе [2]. Однако для общего случая баротропных течений оно не следует

из сформулированного в [2] предположения о возрастании функции $p = p(\rho)$. Поэтому в данной работе предлагается принять физически обоснованное дополнительное предположение о росте скорости звука с ростом плотности. Далее, используя в формулировках термин «баротропность», будем подразумевать не только требование роста функции $p = p(\rho)$, но и требование роста функции $c = c(\rho)$ с ростом ρ.

Отметим, что эти требования выполнены, например, при изоэнтропическом течении совершенного газа (подчиняющегося уравнению Менделеева—Клапейрона), для которого баротропность означает $p = s_0\rho^k$, где $k > 1$ — показатель адиабаты, s_0 — энтропийная функция.

2. Кривизна линии тока во внутренней звуковой точке. Поскольку исследуются свойства течений вблизи звуковых точек, без ограничения общности будем считать, что величина скорости $V = |\mathbf{V}|$ отлична от нуля, и поэтому в каждой точке существует единичный вектор, касательный к линии тока $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$. Кроме того, параметр Чаплыгина $\tau = \frac{V}{\sqrt{2h_0}}$ также будет отличен от нуля в окрестности звуковой точки. Представим выражение для h_0 в виде

$$(1 - \tau^2)h_0 = \int \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho.$$

Производная по направлению $\mathbf{e}$ от обеих частей этого равенства дает

$$-2h_0\tau(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\tau) = \frac{p'(\rho)}{\rho}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho), \quad \text{или} \quad -2h_0\tau^2(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) = c^2(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho).$$

Отношение $2h_0\tau^2/c^2$ есть квадрат местного числа Маха M. Поэтому

$$-\mathsf{M}^2(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) = (\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho). \tag{1}$$

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = \operatorname{div}(\rho\tau\sqrt{2h_0}\mathbf{e}) = 0$$

представляется в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{e} + (\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla})\ln\{\rho\tau\sqrt{2h_0}\} = 0$$

или, с учетом (1),

$$\operatorname{div}\mathbf{e} + (1 - \mathsf{M}^2)(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) = 0.$$

Градиент этого равенства с использованием известной формулы векторного анализа

$$\boldsymbol{\nabla}\operatorname{div}\mathbf{b} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

(где Δ — оператор Лапласа) приводит к уравнению

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e} + (1 - \mathsf{M}^2)\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) + (\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau)\boldsymbol{\nabla}(1 - \mathsf{M}^2) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Получим выражение для $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e}$ из условия отсутствия завихренности

$$\mathbf{rot}(\sqrt{2h_0}\tau\mathbf{e}) = \mathbf{0},$$

которое, как замечено в [12], равносильно равенству

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{e} = [\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nabla} \ln \tau]. \tag{3}$$

Вычисляя ротор от обеих частей (3) и используя формулу для ротора векторного произведения, получим

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} = (\boldsymbol{\nabla} \ln \tau \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau + \mathbf{e}\Delta \ln \tau - (\operatorname{div} \mathbf{e})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau. \tag{4}$$

Рассмотрим внутреннюю звуковую точку A в критическом ($\mathsf{M} \leqslant 1$) течении. Как замечено в разделе 1, в этой точке параметр Чаплыгина τ принимает максимальное значение и, следовательно, выполнено необходимое условие максимума

$$\boldsymbol{\nabla} \ln \tau = \mathbf{0}.$$

Поэтому в звуковой ($\mathsf{M} = 1$) точке A уравнения (2) и (4) упрощаются и принимают соответственно вид

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} = -(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau + \mathbf{e}\Delta \ln \tau.$$

Исключим вектор $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e}$ из этих уравнений, а результат умножим скалярно на вектор $\mathbf{e}$:

$$\Delta \ln \tau - (\mathbf{e} \cdot ((\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau)) = -(\mathbf{e} \cdot \Delta\mathbf{e}). \tag{5}$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат $Ax_1x_2x_3$ так, чтобы ось Ax_3 совпадала с направлением вектора $\mathbf{e}$ в точке A. В этой системе координат уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_2^2} = -(\mathbf{e} \cdot \Delta\mathbf{e}). \tag{6}$$

Через e_1, e_2, e_3 обозначим координаты вектора $\mathbf{e}$ в системе координат $Ax_1x_2x_3$. Используя координатную запись операторов Δ и $\boldsymbol{\nabla}$, получаем (подробные выкладки можно найти в [12])

$$\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_3)^2 + 2e_1\Delta e_1 + 2e_2\Delta e_2 + 2e_3\Delta e_3,$$

или

$$\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_3)^2 + 2(\mathbf{e} \cdot \Delta\mathbf{e}).$$

Из последнего равенства с учетом того, что $\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \Delta(1) = 0$, имеем

$$(\mathbf{e} \cdot \Delta\mathbf{e}) = -(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 - (\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 - (\boldsymbol{\nabla} e_3)^2,$$

и уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_2^2} = (\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_3)^2. \tag{7}$$

Во внутренней точке A выполнены необходимые условия максимума:

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_1^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_2^2} \leqslant 0.$$

В силу (7) это возможно только в случае

$$(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_3)^2 = 0.$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение. *Пусть в рассматриваемом течении газа* $\mathsf{M} \leqslant 1$ *и есть внутренняя звуковая точка* A*. Тогда в точке* A *пространственные производные всех компонент вектора* $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$ *равны нулю. В частности, это означает, что кривизна линии тока во внутренней звуковой точке равна нулю.*

Замечание. Новизна полученного результата относится только к общему трехмерному случаю. Для плоскопараллельных безвихревых течений давно известно [16], что кривизна линии тока равна нулю в точке на звуковой линии, в которой вектор скорости перпендикулярен данной звуковой линии (такая точка в [16] называется центром околозвукового течения).

3. Второе геометрическое условие. В силу непрерывности на звуковой поверхности кривизна линий тока равна нулю не только во внутренних точках течения, но и в тех точках, которые лежат на пересечении звуковой поверхности с поверхностью обтекаемого тела. Таким образом, *в точке пересечения со звуковой поверхностью нормальная кривизна обтекаемой поверхности в направлении нормали к звуковой поверхности должна равняться нулю.* Это необходимое условие существования звуковой поверхности является основным результатом данной работы. Авторы предлагают называть его *вторым геометрическим условием.*

Использование второго геометрического условия расширяет класс обтекаемых тел, для которых появление первых звуковых точек только на поверхности тела строго обосновано. Так, например, это условие нарушено для поверхности, изображенной на рисунке. Поэтому при обтекании тора (с любого направления) первые звуковые точки будут появляться на поверхности тора, а не во внутренних точках течения. В случае сопла Лаваля существование звуковых поверхностей, доходящих до стенок в сужающейся и в расширяющейся частях канала, противоречит первому геометрическому условию. Что касается самой узкой части сопла Лаваля, где первое геометрическое условие выполнено, то существование звуковой поверхности невозможно, если стенки сопла имеют в самой узкой части ненулевую нормальную кривизну в направлении оси сопла. Следовательно, в таком сопле Лаваля первые звуковые точки будут появляться на стенках, а не во внутренних точках течения. Эти примеры показывают действенность полученного выше второго геометрического условия.

Заключение. В общем пространственном случае на основе анализа полных уравнения Эйлера исследован вопрос о месте расположения звуковых точек при критическом обтекании тела. Рассмотрены баротропные безвихревые стационарные течения с числом Маха $\mathsf{M} \leqslant 1$. Условие $\mathsf{M} \leqslant 1$ соответствует появлению первых звуковых точек при медленном повышении скорости набегающего потока. Ранее было известно, что если в течении существует внутренняя звуковая точка, то существует и плоская звуковая поверхность, на которой лежит эта точка. Плоская звуковая поверхность состоит из звуковых точек, и она в каждой своей точке перпендикулярна скорости газа и

не может заканчиваться внутри потока. Также было известно, что в точках поверхности тела звуковая поверхность и касательная к поверхности тела плоскость должны быть перпендикулярны (первое геометрическое условие). В данной работе получено второе геометрическое условие — в точке пересечения со звуковой поверхностью нормальная кривизна обтекаемой поверхности в направлении нормали к звуковой поверхности должна быть равна нулю. Это второе условие расширяет класс тел, для которых появление первых звуковых точек только на поверхности тела строго обосновано.

Результаты могут быть применены для качественного анализа течений, а также при построении пространственных конфигураций с максимальным критическим числом Маха.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Петров К. П. *Аэродинамика элементов летательных аппаратов*. М.: Машиностроение, 1985. 272 с.
2. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I // *Indiana Univ. Math. J.*, 1954. vol. 3, no. 2. pp. 209–230. https://doi.org/10.1512/iumj.1954.3.53010.
3. Брутян М. А., Ляпунов С. В. Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*, 1981. Т. 12, № 5. С. 10–22.
4. Вышинский В. В. Влияние удлинения цилиндрического участка на сопротивление фюзеляжа при околозвуковых скоростях полета // *Учен. зап. ЦАГИ*, 1985. Т. 16, № 3. С. 110–113.
5. Крайко А. Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // *ПММ*, 1987. Т. 51, № 6. С. 941–950.
6. Вышинский В. В., Кузнецов Е. Н. Исследование носовых частей тел вращения с образующей Рябушинского // *Учен. зап. ЦАГИ*, 1992. Т. 23, № 1. С. 3–8.
7. Баринов В. А., Болсуновский А. Л., Бузоверя Н. П., Кузнецов В. Н., Скоморохов С. И., Чернышев И. Л. Исследование обтекания околозвуковым потоком газа модели самолета с носовой частью фюзеляжа в виде полукаверны Рябушинского // *ДАН*, 2007. Т. 416, № 4. С. 474–476.
8. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. https://doi.org/10.1134/S0032823519030135.
9. Петров А. Г., Юдин М. А. К динамике цилиндра в ограниченном потоке идеальной жидкости с постоянной завихренностью // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 393–402. https://doi.org/10.1134/S0032823519020127.
10. Сизых Г. Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2020. Т. 84, № 3. С. 304–310. https://doi.org/10.31857/S0032823520020071.
11. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам.*

гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.

12. Сизых Г. Б. Дозвуковой принцип максимума для неизоэнтропийных течений // *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*, 2017. Т. 20, № 2. С. 74–82.
13. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176.
14. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results / *Smart Modeling for Engineering Systems*: GCM50 2018. Smart Innovation, Systems and Technologies. vol. 133. Cham: Springer, 2019. pp. 228–235. https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_19.
15. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // *Изв. вузов. ПНД*, 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652.
16. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 519–530
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1856

MSC: 76H05

On the place of sonic points in a critical flow

© *A. I. Besportochny, A. N. Burmistrov*

Moscow Institute of Physics and Technology
(National Research University),
9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russian Federation.

Abstract

Stationary irrotational barotropic gas flows are investigated on the basis of the analysis of three-dimensional Euler equations. Critical flows in the article are those in which the Mach number is everywhere less than or equal to one, and at least at one point the Mach number reaches one. In 1954, D. Gilbarg and M. Shiffman showed that if an internal (not lying on the streamlined surface) sonic point exists in a critical flow, then it lies on a flat sonic surface, which at all its points is perpendicular to the gas velocity vector and cannot end inside the flow (theorem about the sonic point). Using this theorem, D. Gilbarg and M. Shiffman obtained a conclusion that is important for the problems of maximizing the critical Mach number. It consists in the fact that in a critical flow for a wide class of bodies in flow, sonic points can be located only on its surface. This conclusion is essentially used in constructing the shapes of streamlined bodies with the maximum value of the critical Mach number (for given isoperimetric conditions).

In this paper, the question of the curvature of streamlines at the internal sonic points of critical flows is considered. It is shown that this curvature is zero. The result is a new necessary condition for the existence of an interior sonic point (and sonic surface). It consists in the fact that at the point of intersection with the sonic surface, the normal curvature of the streamlined surface in the direction normal to the sonic surface should be equal to zero. Examples of streamlined bodies are given for which the theorem by D. Gilbarg and M. Shiffman (on the sonic point) does not answer the question of the location of the sonic points, at the same time a new necessary condition makes it possible to prove that the existence of internal sonic points in a critical flow around these bodies is impossible.

Keywords: Euler's equations, subsonic maximum principle, critical flow, sonic point, first sonic point, sonic line, sonic plane.

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Besportochny A. I., Burmistrov A. N. On the place of sonic points in a critical flow, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 519–530. https://doi.org/10.14498/vsgtu1856 (In Russian).

Authors' Details:

Aleksandr I. Besportochny https://orcid.org/0000-0002-1677-4604
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: aleksandr787@yandex.ru

Aleksandr N. Burmistrov https://orcid.org/0000-0003-3862-7936
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: a.burmistrov1@gmail.com

Received: 25th March, 2021 / Revised: 7th May, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 30th September, 2021

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. The authors are grateful to the referees for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Petrov K. P. *Aerodinamika elementov letatel'nykh apparatov* [Aerodynamics of Aircraft Components]. Moscow, Mashinostroenie, 1985, 272 pp. (In Russian)
2. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I, *Indiana Univ. Math. J.*, 1954, vol. 3, no. 2, pp. 209–230. https://doi.org/10.1512/iumj.1954.3.53010.
3. Brutyan M. A., Lyapunov S. V. Optimization of the shape of symmetric plane bodies with the aim to increase the critical Mach number, *Uchen. Zap. TsAGI*, 1981, vol. 12, no. 5, pp. 10–22 (In Russian).
4. Vyshinsky V. V. Influence of the elongation of the cylindrical section on the drag of the fuselage at transonic flight speeds, *Uchen. Zap. TsAGI*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 110–113 (In Russian).
5. Kraiko A. N. Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical Mach number, *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 6, pp. 723–730. https://doi.org/10.1016/0021-8928(87)90131-6.
6. Vyshinsky V. V., Kuznetsov E. N. Investigation of bow parts of bodies of revolution with the Ryabushinsky generatrix, *Uchen Zap. TsAGI*, 1992, vol. 23, no. 1, pp. 3–8 (In Russian).
7. Barinov V. A., Bolsunovsky A. L., Buzoverya N. P., Kuznetsov E. N., Skomorokhov S. I., Chernyshev I. L. Study on the model of the near-sonic aircraft with the Ryabushinsky nose part of the fuselage, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 4, pp. 553–555. https://doi.org/10.1134/S1028335807100102.
8. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, pp. 907–911. https://doi.org/10.1134/S0015462819070139.
9. Petrov A. G., Yudin M. A. On cylinder dynamics in bounded ideal fluid flow with constant vorticity, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 898–906. https://doi.org/10.1134/S0015462819070127.
10. Sizykh G. B. System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave, *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903. https://doi.org/10.1134/S0015462820070095.
11. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.
12. Sizykh G. B. Maximum principle for subsonic flow with variable entropy, *Civil Aviation High Technologies*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 74–82 (In Russian).
13. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proc. of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian).

14. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results, In: *Smart Modeling for Engineering Systems*, GCM50 2018. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 133. Cham, Springer, 2019, pp. 228–235. https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_19.
15. Markov V. V., Sizykh G. B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652 (In Russian). https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652.
16. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the Basics of Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Studies, 2003, 336 pp. (In Russian)