Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1859

УДК 517.953

Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка

© ***А. И. Кожанов***[1], ***А. В. Дюжева***[2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Изучается разрешимость некоторых нелокальных аналогов второй начально-краевой задачи для многомерных гиперболических и параболического уравнений второго порядка. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все суммируемые с квадратом обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. Приводятся также некоторые обобщения и усиления полученных результатов.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, параболические уравнения, граничные условия интегрального вида, нелокальные задачи, интегральные условия, регулярные решения, единственность, существование.

Получение: 26 марта 2021 г. / Исправление: 20 мая 2021 г. /
Принятие: 25 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 7 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Кожанов А. И., Дюжева А. В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434. https://doi.org/10.14498/vsgtu1859.

Сведения об авторах
Александр Иванович Кожанов https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. дифференциальных и разностных уравнений; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Александра Владимировна Дюжева https://orcid.org/0000-0002-3284-5302
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: aduzheva@rambler.ru

Введение

Целью настоящей работы является получение новых результатов исследований разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с условиями интегрального вида для гиперболических и параболических уравнений второго порядка.

Направление в теории дифференциальных уравнений, связанное с исследованием разрешимости нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида, берет свое начало, по-видимому, с работ [1, 2], опубликованных в 1963 и 1964 годах соответственно. Важную роль в развитии данного направления сыграла работа [3], опубликованная в 1977 году. Среди последующих работ (в целом весьма многочисленных) выделим наиболее близкие к методам настоящей статьи [4–16, 18].

Заметим, что большинство работ, посвященных исследованию разрешимости краевых задач с граничными условиями интегрального вида, относится к одномерному по пространственным переменным случаю.

В работе [10] был предложен новый подход к многомерным задачам с граничными условиями интегрального вида, позволивший изучить разрешимость нелокальных краевых задач для различных классов интегральных дифференциальных уравнений (см. также работы [11, 15]). Этот подход связывал разрешимость той или иной нелокальной задачи со взаимной однозначностью некоторого оператора Фредгольма второго рода, построенного по изучаемой задаче. А в работе [17] было показано, что для нелокального аналога второй начально-краевой задачи для многомерных параболических уравнений второго порядка с граничным смещением интегрального вида условие взаимной однозначности не требуется, но при этом возникают условия финитности начальной функции и свободного члена.

В настоящей работе показано, что и в случае многомерных гиперболических уравнений второго порядка для разрешимости нелокальных аналогов второй начально-краевой задачи с граничным смещением интегрального вида условие взаимной однозначности соответствующего оператора Фредгольма не потребуется. Кроме того, показано, что как в гиперболическом случае, так и в параболическом, условия финитности начальных функций и свободного члена не требуются. Приводятся примеры других уравнений, для которых разрешимость некоторых нелокальных аналогов второй начально-краевой задачи может быть установлена без соответствующего условия взаимной однозначности.

Уточним, что метод настоящей работы существенно отличается от метода работы [17]. Кроме этого, сделаем еще два замечания:

- в работе [19] приведено обоснование использования понятия нелокальности в изучении физических, химических и т. п. процессов; именно эффекты нелокальности и приводят к задачам математического моделирования с граничными условиями интегрального вида;
- все построения и рассуждения в настоящей работе проводятся на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l; свойства функций из этих пространств можно найти в монографиях [20–22].

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $c(x,t)$, $f(x,t)$ и $N(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$; L_1 и L_2 — дифференциальные операторы, действия которых определяются равенствами

$$L_1 v = v_{tt} - \Delta v + c(x,t)v, \quad L_2 v = v_t - \Delta v + c(x,t)v$$

(Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, ..., x_n).

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_1 u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - \int_\Omega N(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_2 u = f(x,t) \tag{5}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

В изучаемых задачах условие (2) является нелокальным аналогом граничного условия второй начально-краевой задачи для гиперболических или параболических уравнений. Именно это условие и определяет интегральный оператор Фредгольма, использованный в работе [10].

2. Разрешимость нелокальных задач I и II

Определим функцию $N_1(x,y)$ как решение задачи

$$\Delta_x N_1(x,y) - N_1(x,y) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial \nu} = N(x,y) \quad \text{при } x \in \Gamma,\ y \in \Omega$$

(переменная y в этой задаче является параметром).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad N(x,y) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$ такое, что

$$u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)),$$

$$u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)).$$

Доказательство. Пусть M — оператор, определенный на пространстве $L_2(\Omega)$ и ставящий в соответствие функции $v(x)$ функцию $(Mv)(x)$:

$$(Mv)(x) = \int_\Omega N_1(x,y)v(y)dy.$$

Возможны два случая:

1) число 1 не является собственным числом оператора M;

2) число 1 является собственным числом оператора M.

В первом случае оператор $I-M$ будет непрерывно обратимым оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, и тем самым для нелокальной задачи I будут выполняться все условия работы [10]. Следовательно, эта задача будет иметь решение, принадлежащее требуемому в теореме классу.

Пусть теперь имеет место второй случай.

Как известно [23, гл. VI, § 24], спектр оператора M состоит из не более чем счетного множества собственных чисел, причем это множество может иметь своей предельной точкой лишь число 0. Следовательно, существует число ε_0 такое, что $\varepsilon_0 \in (0,1)$, и на интервале $(1-\varepsilon_0, 1)$ нет собственных чисел оператора M.

Для числа ε из интервала $(1-\varepsilon_0, 1)$ рассмотрим следующую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (3) *и* (4), *а также условие*

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu} - \int_\Omega N(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S} = 0. \tag{7}$$

Этой задаче соответствует оператор $(1-\varepsilon)I - M$ (см. [10]). Поскольку число $1-\varepsilon$ не является собственным числом оператора M, согласно [10], нелокальная задача (1), (3), (4), (7) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что $u^\varepsilon \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t^\varepsilon \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеют место априорные оценки, достаточные для осуществления процедуры предельного перехода.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega L_1 u^\varepsilon u_\tau^\varepsilon dx d\tau = \int_0^t\int_\Omega f u_\tau^\varepsilon dx d\tau.$$

С помощью интегрирования по частям и использования условий (3), (4), (7) данное равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [u_t^\varepsilon(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega [u_{x_i}^\varepsilon(x,t)]^2 dx =$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon}\int_0^t\int_\Gamma \left(\int_\Omega N(x,y)u_\tau^\varepsilon(y,\tau)dy\right)u^\varepsilon(x,\tau)ds d\tau -$$
$$- \frac{1}{1-\varepsilon}\int_\Gamma \left(\int_\Omega N(x,y)u^\varepsilon(y,t)dy\right)u^\varepsilon(x,t)ds -$$

$$-\int_0^t\int_\Omega cu^\varepsilon u^\varepsilon_\tau dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega fu^\varepsilon_\tau dxd\tau. \quad (8)$$

Для функции $u^\varepsilon(x,t)$ имеют место неравенства

$$\int_\Gamma[u^\varepsilon(x,t)]^2ds\leqslant\delta\sum_{i=1}^n\int_\Omega[u^\varepsilon_{x_i}(x,t)]^2dx+c(\delta)\int_\Omega[u^\varepsilon(x,t)]^2dx, \quad (9)$$

$$\int_\Omega[u^\varepsilon(x,t)]^2ds\leqslant T\int_0^t\int_\Omega[u^\varepsilon_\tau(x,\tau)]^2dxd\tau. \quad (10)$$

В первом из этих неравенств δ — произвольное положительное число; само по себе это неравенство является следствием теоремы вложения [21, гл. II, § 2]. Второе неравенство элементарно доказывается с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

Используя неравенства (9) и (10), подбирая число δ малым, применяя неравенство Юнга и, наконец, используя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (8) будет априорная оценка

$$\int_\Omega[u^\varepsilon_t(x,t)]^2dx+\sum_{i=0}^n\int_\Omega[u^\varepsilon_{x_i}(x,t)]^2dx\leqslant R_1\int_Q f^2dxdt, \quad (11)$$

постоянная R_1 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$ и $N(x,y)$, а также числом T и областью Ω.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega(L_1u^\varepsilon)_\tau u^\varepsilon_{\tau\tau}dxdt=\int_0^t\int_\Omega f_\tau u^\varepsilon_{\tau\tau}dxd\tau.$$

Фактически повторяя предыдущие рассуждения, но при этом используя оценку (11) и учитывая, что имеет место равенство $u^\varepsilon_{tt}(x,0)=f(x,0)$, получим, что для функций $u^\varepsilon(x,t)$ имеет место вторая априорная оценка

$$\int_\Omega[u^\varepsilon_{tt}(x,t)]^2dx+\sum_{i=2}^n\int_\Omega[u^\varepsilon_{x_it}(x,t)]^2dx\leqslant R_2\int_Q(f^2+f_t^2)dxdt, \quad (12)$$

с постоянной R_2, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$ и $N(x,t)$, а также числом T и областью Ω.

С помощью неравенств (11) и (12) нетрудно показать, что для функции $u^\varepsilon(x,t)$ имеет место третья априорная оценка

$$\int_\Omega[\Delta u^\varepsilon(x,t)]^2dx\leqslant R_3\int_Q(f^2+f_t^2)dxdt, \quad (13)$$

постоянная R_3 в которой вновь определяется лишь функциями $c(x,t)$ и $N(x,t)$, числом T и областью Ω.

Определим функцию

$$w^\varepsilon(x,t)=(1-\varepsilon)u^\varepsilon(x,t)-\int_\Omega N_1(x,y)u^\varepsilon(y,t)dy.$$

Имеют место равенства

$$L_1 w^\varepsilon(x,t) = (1-\varepsilon)f - \int_\Omega N(x,y)u^\varepsilon_{tt}(y,t)dy + \\ + \int_\Omega [\Delta_x N(x,y) - c(x,t)N(x,y)]u^\varepsilon(y,t)dy,$$

$$\frac{\partial w^\varepsilon(x,t)}{\partial\nu}\Big|_{(x,t)\in S} = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на функцию $w^\varepsilon_t(x,t) - \Delta w^\varepsilon_t(x,t)$, интегрируя по цилиндру с переменной высотой (переменным верхним пределом), используя второе равенство и неравенства (11)–(13), получим, что для функций $w^\varepsilon(x,t)$ имеют место оценки, аналогичные полученным выше оценкам для функций $u^\varepsilon(x,t)$, но с другими постоянными R_1', R_2', R_3' в правой части.

Из доказанных оценок для функции $w^\varepsilon(x,t)$, а также из обращения производной $\frac{\partial w^\varepsilon(x,t)}{\partial\nu}$ в нуль на границе S и второго основного неравенства для эллиптических операторов [21, гл. III, § 8] следует, что для функции $w^\varepsilon(x,t)$ выполняются включения

$$w^\varepsilon(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad w^\varepsilon_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)),$$

$$w^\varepsilon_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$

причем нормы функций $w^\varepsilon(x,t)$, $w^\varepsilon_t(x,t)$, $w^\varepsilon_{tt}(x,t)$ в соответствующих пространствах будут ограничены равномерно по ε. Но тогда и для функций $u^\varepsilon(x,t)$, $u^\varepsilon_t(x,t)$, $u^\varepsilon_{tt}(x,t)$ будут выполняться те же включения, и нормы этих функций в пространствах $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ будут ограничены равномерно по ε.

Установленные оценки и включения позволяют осуществить стандартную процедуру предельного перехода.

Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ так, чтобы $\varepsilon_m \in (1-\varepsilon_0, 1)$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m\to\infty$. Пусть $u_m(x,t)$ — решение задачи (1), (3), (4), (7) в случае $\varepsilon = \varepsilon_m$. Семейства $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$, $\{u_{mt}(x,t)\}_{m=1}^\infty$, $\{u_{mtt}(x,t)\}_{m=1}^\infty$ ограничены равномерно по m в пространствах $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ соответственно. Из этих оценок и теорем вложения [20–22] следует, что существуют последовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ натуральных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $k\to\infty$ имеют место сходимости

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{слабо в пространстве } W_2^2(Q),$$

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{сильно в пространстве } W_2^1(Q),$$

$$u_{m_k x_i}(x,t) \to u_{x_i}(x,t) \quad \text{сильно в пространстве } L_2(S),\ i=1,\dots,n,$$

$$\varepsilon_{m_k}\frac{\partial u_{m_k}(x,t)}{\partial\nu} \to 0 \quad \text{сильно в пространстве } L_2(S).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением из пространства $W_2^2(Q)$ нелокальной задачи I. Более того, для функции $u(x,t)$ сохранятся оценки (11)–(13), а также оценки производных $u_{x_ix_j}(x,t)$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. А это означает, что функция $u(x,t)$ будет решением нелокальной задачи I из требуемого класса. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad N(x,y) \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, *нелокальная задача II имеет решение* $u(x,t)$ *такое, что*

$$u(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad u_t(x,t) \in L_2(Q).$$

Доказательство. Вновь обратимся к оператору M. Если число 1 не является собственным значением оператора M, то нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее требуемому классу. Это нетрудно доказать, используя методы работы [10]. Если же число 1 является собственным значением оператора M, то можно вновь воспользоваться методом регуляризации. Необходимые для осуществления процедуры предельного перехода априорные оценки нетрудно получить, анализируя последовательно равенства

$$\int_0^t \int_\Omega L_2 u^\varepsilon u^\varepsilon dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u^\varepsilon dx d\tau,$$
$$\int_0^t \int_\Omega L_2 u^\varepsilon u_\tau^\varepsilon dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau^\varepsilon dx d\tau$$

($u^\varepsilon(x,t)$ — решение уравнения (5) при выполнении регуляризованного уловия (6)), а также условия (3). Теоремы вложения позволяют с помощью полученных оценок выбрать последовательность из семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$, сходящуюся к решению нелокальной задачи II. □

3. Замечания и дополнения

1. Для решения нелокальных задач I и II при выполнении условий теоремы 1 и 2 имеет место свойство единственности. Это свойство нетрудно доказать, анализируя равенства

$$\int_0^t \int_\Omega L_1 u u_\tau dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau^\varepsilon dx d\tau,$$

$$\int_0^t \int_\Omega L_2 u u dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u^\varepsilon dx d\tau$$

($u(x,t)$ — решение нелокальных задач I или II из указанных в теоремах существования классов). Заметим, что обратимость или необратимость оператора M здесь не играет никакой роли.

2. В нелокальных задачах I и II оператор Лапласа можно заменить более общим линейным эллиптическим оператором второго порядка, а граничные условия (2) нелокальных задач I и II можно заменить условием третьей краевой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(x) u(x,t) - \int_\Omega N(x,y) u(y,t) dy \Big|_{(x,t) \in S} = 0.$$

3. Комбинируя метод настоящей работы и работы [10], можно получить новые условия разрешимости интегральных аналогов второй или третьей краевых задач для некоторых других классов дифференциальных уравнений, например, для уравнения

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} - \beta \Delta u_t - \Delta u = f,$$

моделирующего звуковые волны высокой плотности [24] (здесь α и β — положительные постоянные).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778–2020–0005.

Библиографический список

1. Cannon J. R. The solution of heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. vol. 21, no. 2. pp. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437.
2. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
4. Bouziani A., Benouar N.-E. Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation // *Kobe J. Math.*, 1998. vol. 15, no. 1. pp. 47–58.
5. Bouziani A. On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition // *Bull. Cl. Sci., Acad. R. Belg.*, 1999. vol. 10, no. 1. pp. 61–77. https://doi.org/10.3406/barb.1999.27977.
6. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
7. Ионкин Н. И., Морозова В. А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // *Диффер. уравн.*, 2000. Т. 36, № 7. С. 884–888.
8. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.
9. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564.
10. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
11. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 5. С. 3–12.
12. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений // *Нелинейные граничные задачи*, 2010. Т. 20. С. 54–76. http://iamm.su/upload/iblock/e5f/54_76.pdf.
13. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // *Математический журнал (Алматы)*, 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.

14. Кожанов А. И. О разрешимости пространственно-нелокальных задач с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 8. С. 1048–1055. https://doi.org/10.1134/S0374064115080087.
15. Попов Н. С. Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 3. С. 359–372. https://doi.org/10.1134/S0374064115030073.
16. Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // *Математические заметки СВФУ*, 2016. Т. 23, № 1. С. 79–86.
17. Данилюк И. М., Данилюк А. О. Задача Неймана с интегро-дифференциальным оператором в краевом условии // *Матем. заметки*, 2016. Т. 100, № 5. С. 701–709. https://doi.org/10.4213/mzm11013.
18. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions // *Electron. J. Differential Equations*, 2020. vol. 2020, no. 28. pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html.
19. Bažant Z. P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress // *J. Eng. Mech.*, 2002. vol. 128, no. 1. pp. 1119–1149. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
20. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988. 334 с.
21. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 736 с.
22. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* / North-Holland Mathematical Library. vol. 18. Amsterdam: North-Holland, 1978. 528 pp. https://doi.org/10.1016/s0924-6509(09)x7004-2
23. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980. 495 с.
24. Liu S., Triggiani R. An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement // *J. Inv. Ill-posed Problems*, 2013. no. 6. pp. 825–869. https://doi.org/10.1515/jip-2012-0096.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1859

MSC: 35M13

The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations

© ***A. I. Kozhanov***[1]**,** ***A. V. Dyuzheva***[2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4, Acad. Koptyug pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we study the solvability of some non-local analogs of the second initial-boundary value problem for multidimensional hyperbolic and parabolic equations of the second order. We prove the existence and uniqueness theorems of regular solutions (which have all Sobolev generalized derivatives that are summable with a square and are included in the equation). Some generalization and amplification of the obtained results are also given.

Keywords: hyperbolic equations, parabolic equations, integral boundary conditions, nonlocal problems, integral conditions, regular solutions, uniqueness, existence.

Received: 26$^{\text{th}}$ March, 2021 / Revised: 20$^{\text{th}}$ May, 2021 /
Accepted: 25$^{\text{th}}$ August, 2021 / First online: 7$^{\text{th}}$ September, 2021

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of state task no. 0778–2020–0005.

Research Article

Please cite this article in press as:
Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434. https://doi.org/10.14498/vsgtu1859 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander I. Kozhanov https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Differential and Difference Equations; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Alexandra V. Dyuzheva https://orcid.org/0000-0002-3284-5302
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: aduzheva@rambler.ru

References

1. Cannon J. R. The solution of heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437.
2. Kamynin L. I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 33–59. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1.
3. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 (In Russian).
4. Bouziani A., Benouar N.-E. Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation, *Kobe J. Math.*, 1998, vol. 15, no. 1, pp. 47–58.
5. Bouziani A. On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition, *Bull. Cl. Sci., Acad. R. Belg.*, 1999, vol. 10, no. 1, pp. 61–77. https://doi.org/10.3406/barb.1999.27977.
6. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (In Russian).
7. Ionkin N. I., Morozova V. A. The two-dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 982–987. https://doi.org/10.1007/BF02754498.
8. Pul'kina L. S. A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 947–953. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16.
9. Ivanchov N. I. Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 4, pp. 591–609. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44.
10. Kozhanov A. I., Pul'kina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. https://doi.org/10.1134/S0012266106090023.
11. Abdrakhmanov A. M., Kozhanov A. I. A problem with a nonlocal boundary condition for one class of odd-order equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 5, pp. 1–10. https://doi.org/10.3103/S1066369X07050015.
12. Kozhanov A. I. On the solvability of boundary value problems with nonlocal and integral conditions for parabolic equations, *Nonlinear Boundary-Value Problems*, 2010, vol. 20, pp. 54–76 (In Russian). http://iamm.su/upload/iblock/e5f/54_76.pdf.
13. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. On the solvability of some boundary value problems with a shift for linear hyperbolic equations, *Mathematical Journal (Almaty)*, 2009, vol. 9, no. 2, pp. 78–92 (In Russian).
14. Kozhanov A. I. On the solvability of spatially nonlocal problems with conditions of integral form for some classes of nonstationary equations, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1043–1050. https://doi.org/10.1134/S001226611508008X.
15. Popov N. S. Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 362–375. https://doi.org/10.1134/S0012266115030076.
16. Popov N. S. On the solvability of boundary value problems for multidimensional parabolic equations of fourth order with nonlocal boundary condition of integral form, *Mathematical notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 79–86 (In Russian).
17. Danyliuk I. M., Danyliuk A. O. Neumann problem with the integro-differential operator in the boundary condition, *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 5, pp. 687–694. https://doi.org/10.1134/S0001434616110055.
18. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions, *Electron. J. Differential Equations*, 2020, vol. 2020, no. 28, pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html.

19. Bažant Z. P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress, *J. Eng. Mech.*, 2002, vol. 128, no. 1, pp. 1119–1149. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
20. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1988, 334 pp. (In Russian)
21. Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973, 736 pp. (In Russian)
22. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 18. Amsterdam, North-Holland, 1978, 528 pp. https://doi.org/10.1016/s0924-6509(09)x7004-2
23. Trinogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 495 pp. (In Russian)
24. Liu S., Triggiani R. An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement, *J. Inv. Ill-posed Problems*, 2013, no. 6, pp. 825–869. https://doi.org/10.1515/jip-2012-0096.