

УДК 532.516

Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками

*Г. Б. Сизых*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

В рамках уравнений Навье–Стокса рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости между неподвижными параллельными проницаемыми стенками, на которых выставляется условие равенства нулю только продольной компоненты скорости. Ищутся решения, в которых поперечная к плоскости пластин компонента скорости постоянна. Получены как стационарные, так и нестационарные решения, среди которых есть нетривиальное решение с постоянным давлением и экспоненциально затухающей со временем продольной скоростью. Устанавливается, что для стационарных течений вынос погранслоя в глубь течения от одной пластины при одновременном всасывании погранслоя на другой пластине приводит к росту сопротивления по сравнению с классическим течением Пуазейля. В случае непроницаемых стенок получено точное нестационарное решение, профиль скорости которого в фиксированные моменты времени отличается от профиля в классическом течении Пуазейля и в пределе (при стремлении времени к бесконечности) соответствует покою.

Ключевые слова: точные решения, уравнения Навье–Стокса, течение Пуазейля, проницаемые стенки.

Получение: 19 января 2022 г. / Исправление: 13 февраля 2022 г. /
Принятие: 28 февраля 2022 г. / Публикация онлайн: 15 марта 2022 г.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 190–201. EDN: JGEZYS. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1900>.

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики; e-mail: ol2o3@yandex.ru

Введение. Около полувека назад появилась проблема верификации численных программ расчета течений. Сравнение численного и точного решений является одним из таких методов верификации. При использовании этого метода условия на любой границе берутся исходя из точного решения, а техническая сторона реализации этих условий в натурном эксперименте перестала иметь значение. Поэтому любые точные решения в настоящее время имеют практическое значение для верификации. Кроме верификации, точные решения используются для отладки программ. Для этого необходимо иметь набор различных точных решений, среди которых должны быть и достаточно простые, например двумерные, которые используются на начальной стадии отладки. Если в программе используется метод установления, то для начальной стадии ее отладки будут полезны двумерные стационарные точные решения (и даже одномерные, например, равномерный поток). Кроме того, как замечено в [1], на точных решениях «... апробируются подходы к обоснованию приближенных моделей...». Очевидно, что и в этом случае целесообразно начинать с простых точных решений. В научных публикациях последних двух десятилетий рассмотрены различные обобщения течения Пуазейля [1–6], описывающие слоистые и сдвиговые потоки, в которых нет протекания жидкости через проницаемые границы (нет вдува или отсоса жидкости). Обобщений для течений с протеканием мало, так как они очень сложны и труднообозримы. Например, в [7] представлено существенно трехмерное нестационарное точное решение, выраженное через интеграл Дюамеля. Автору настоящей статьи известно только одно относительно простое точное решение — течение вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами с проницаемыми стенками [8]. Таким образом, имеет место недостаток «простых» точных решений с проницаемыми стенками, которые можно было бы применять как для отладки программ, так и для качественного анализа влияния вдува или отсоса погранслоя на картину течения (т.е. для качественного анализа физических процессов на основе точных решений). Поэтому в данной статье предпринята попытка найти точное решение для двумерного течения между проницаемым стенками.

Эффективным методом получения точных решений является задание вида зависимости компонент скорости или функции тока от координат и времени [9–20]. Однако при этом может оказаться, что попытка найти решение будет безуспешной, как в [21], или что удастся доказать, что решения при выбранном виде зависимости не существует [22]. Поэтому выбор зависимости, приводящий в итоге к новым решениям, является ключевым моментом исследования. В данной статье также предложен новый вид зависимости (формула (2)) для описания течения пуазейлевского типа между проницаемыми пластинами, в котором из-за протекания жидкости через пластины скорость имеет ненулевые как продольную, так и поперечную к пластинам компоненты. В результате удалось получить ряд новых точных решений. Эти решения относятся к классу задач с уравнениями Навье—Стокса в области между двумя параллельными (плоскими) границами, на которых заданы ненулевые значения скорости. Однако найденные ниже решения имеют одну специфическую особенность на границах течения. В отличие от общего случая упомянутых задач, ниже рассматриваются только такие, в которых на границе продольная к границе компонента скорости равна нулю, а поперечная — от-

лична от нуля. Такие условия соответствуют неподвижным горизонтальным проницаемым пластинам. Трение на неподвижных проницаемых пластинах обеспечивает нулевые значения горизонтальной компоненты скорости на этих стенках, а проницаемость — отличие от нуля поперечной компоненты скорости. Поэтому представляется естественным назвать рассматриваемые течения «течениями между горизонтальными проницаемыми пластинами (или стенками)».

1. Уравнения движения и общий вид решения. В безразмерных переменных система уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости представляется следующим образом:

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \text{rot } \boldsymbol{\Omega} / \text{Re} = -\nabla [p + \mathbf{V}^2 / 2], \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{V} и p — безразмерные скорость и давление, отнесенные к плотности, соответственно; $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$; Re — число Рейнольдса.

Рассмотрим плоское течение между двумя неподвижными горизонтальными пластинами с протеканием жидкости через пластины, в котором поперечная компонента скорости постоянна во времени и пространстве. При обезразмеривании системы (1) в качестве характерной длины возьмем расстояние между пластинами, а в качестве характерной скорости — поперечную компоненту скорости. Тогда в безразмерных переменных расстояние между пластинами и поперечная компонента скорости будут равны единице. Начало декартовой прямоугольной системы координат Oxy расположим на нижней пластине, а ось Ox — горизонтально. Пусть \mathbf{i} и \mathbf{j} — базисные векторы этой системы координат. Будем искать скорость решения (1) в виде

$$\mathbf{V} = (TY) \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (2)$$

где $T = T(t)$, $Y = Y(y)$ (последнее уравнение (1) выполняется «автоматически»).

При протекании жидкости через пластины условие прилипания заменяется на условие равенства нулю горизонтальной скорости, т.е. $Y(0) = Y(1) = 0$. Получим выражение для левой части первого уравнения (1). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= T'Y \mathbf{i}, \\ \boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V} &= -TY' \mathbf{k}, \quad \text{где } \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}, \\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= TY' \mathbf{i} - Y'T^2Y \mathbf{j}, \\ \text{rot } \boldsymbol{\Omega} / \text{Re} &= -TY'' \mathbf{i} / \text{Re}. \end{aligned}$$

Поэтому левая часть первого уравнения (1) принимает вид

$$[T'Y + TY' - TY'' / \text{Re}] \mathbf{i} + [-Y'T^2Y] \mathbf{j}. \quad (3)$$

Для существования решения (1) необходимо и достаточно, чтобы выражение (3) представляло собой градиент некоторой функции, что для односвязной области (каковой является пространство между пластинами) равносильно условию

$$\frac{\partial}{\partial y} [T'Y + TY' - TY'' / \text{Re}] = \frac{\partial}{\partial x} [-Y'T^2Y].$$

Поскольку правая часть равна нулю, это условие окажется выполненным, если и левая часть будет равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial y}[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}] = 0 \quad (4)$$

или

$$[T'Y' + TY'' - TY'''/\text{Re}] = 0.$$

Отбрасывая тривиальные случаи $T = 0$ и $Y' = 0$, получаем

$$\text{Re } T'/T = Y'''/Y' - \text{Re } Y''/Y' = \beta = \text{const.}$$

Поэтому

$$T = T(t) = \exp(\beta t/\text{Re}), \quad (5)$$

а функция $Y = Y(y)$ определяется как решение однопараметрической (параметр β при фиксированном числе Re) задачи

$$Y''' - \text{Re } Y'' - \beta Y' = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0. \quad (6)$$

(Случаю $\beta = 0$ соответствует стационарное течение $T(t) \equiv 1$.)

Итак, для функций $T = T(t)$, $Y = Y(y)$, определяемых по формулам (5) и (6), скорость (2) обеспечивает равенство левой части первого уравнения (1) градиенту некоторой функции (функции Бернулли $p + \mathbf{V}^2/2$). Чтобы получить выражение для давления, найдем сначала эту функцию. Из уравнения (4) следует, что величина $[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}]$ не зависит от y . Поэтому искомая функция с точностью до аддитивной константы есть

$$p + \mathbf{V}^2/2 = -[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}]x + T^2Y^2/2.$$

Отсюда, поскольку $\mathbf{V}^2/2 = T^2Y^2/2 + 1/2$, получаем

$$p = -[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}]x + p_0. \quad (7)$$

Формулы (5)–(7) задают общий вид решения, в котором скорость имеет вид (2).

Заметим, что, как и в классическом течении Пуазейля, давление не зависит от поперечной координаты и линейно меняется вдоль горизонтальной координаты.

2. Случай нулевого градиента давления. С учетом (5) из (7) следует, что давление не будет зависеть от x только для одного частного случая задачи (6). Это случай, когда $Y'' - \text{Re } Y' - \beta Y = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Если исключить решение $Y(y) \equiv 0$, такая задача (с такими краевыми условиями) имеет решения только при $\text{Re}^2 + 4\beta = -(2\pi k)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При заданном натуральном k имеем $Y(y) = \exp(\text{Re } y/2) \sin k\pi y$, а горизонтальная скорость стационарного течения определяется с точностью произвольного постоянного множителя $C_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(-((2\pi k)^2 + \text{Re}^2)t/(4\text{Re}) + \text{Re } y/2) \sin(k\pi y) \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad p = p_0.$$

Поскольку в выражении для скорости множитель $\exp(-((2\pi k)^2 + \text{Re}^2)t/(4\text{Re}))$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, с ростом времени течение устанавливается и скорость стремится к предельному значению $\mathbf{V} = \mathbf{j}$.

3. Стационарное течение. Стационарное течение имеет место при $\beta = 0$. Задача (6) принимает вид $Y''' - \text{Re} Y'' = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Она имеет решение при любом значении Re . При $\beta = 0$ горизонтальная скорость стационарного течения (1) определяется с точностью до произвольного постоянного множителя $C_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{V} = C_0 [\exp(\text{Re} y) - (\exp(\text{Re}) - 1)y - 1] \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad p = C_0(\exp(\text{Re}) - 1)x + p_0. \quad (8)$$

При очень малых значениях числа Рейнольдса ($\text{Re} \leq 1$) профиль горизонтальной скорости «похож» на симметричный квадратичный профиль классического течения Пуазейля. С ростом числа Рейнольдса профиль становится несимметричным и почти прямолинейным всюду, кроме тонкого пограничного слоя вблизи верхней пластины (рис. 1). (Для удобства сравнения формы профилей с помощью рис. 1 произвольная константа C_0 при различных числах Рейнольдса подбиралась так, чтобы максимальное значение горизонтальной скорости было одинаково на всех профилях, изображенных на рис. 1.)

Сравним горизонтальные расходы жидкости в этом течении и в классическом (стационарном) течении Пуазейля (здесь его приводить не будем). Непосредственной проверкой (интегрированием горизонтальной компоненты скорости по y от 0 до 1) можно убедиться, что при одинаковом (горизонтальном) градиенте давления суммарные расходы Q и Q_P жидкости через поперечное сечение между пластинами (т.е. расход в горизонтальном направлении) для течения (8) и для классического решения Пуазейля соответственно связаны соотношением

$$Q/Q_P = 12[0.5\text{Re}^{-1} + \text{Re}^{-1}(\exp(\text{Re}) - 1)^{-1} - \text{Re}^{-2}]. \quad (9)$$

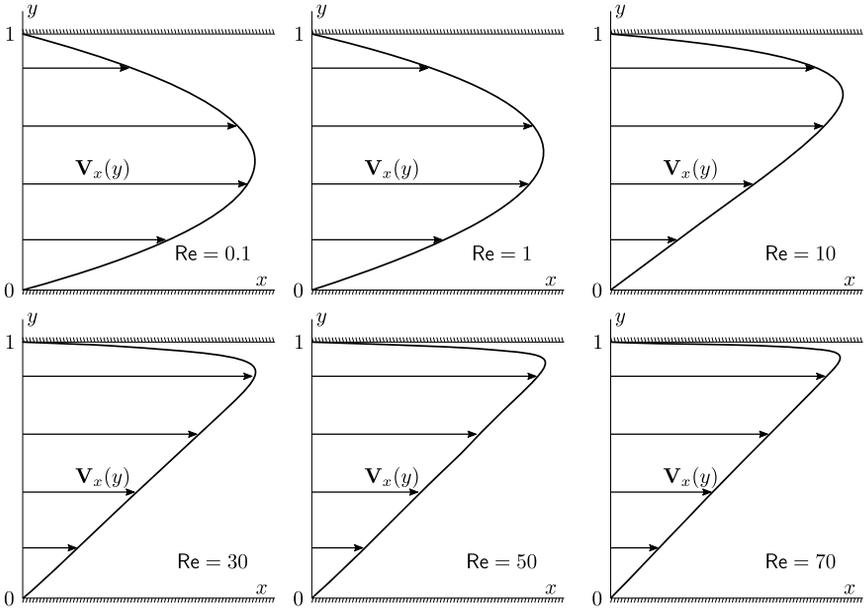


Рис. 1. Профиль горизонтальной скорости в стационарном течении Пуазейля с проницаемыми стенками для различных чисел Рейнольдса [Figure 1. Horizontal velocity profile for a stationary Poiseuille flow with permeable walls for various Reynolds numbers]

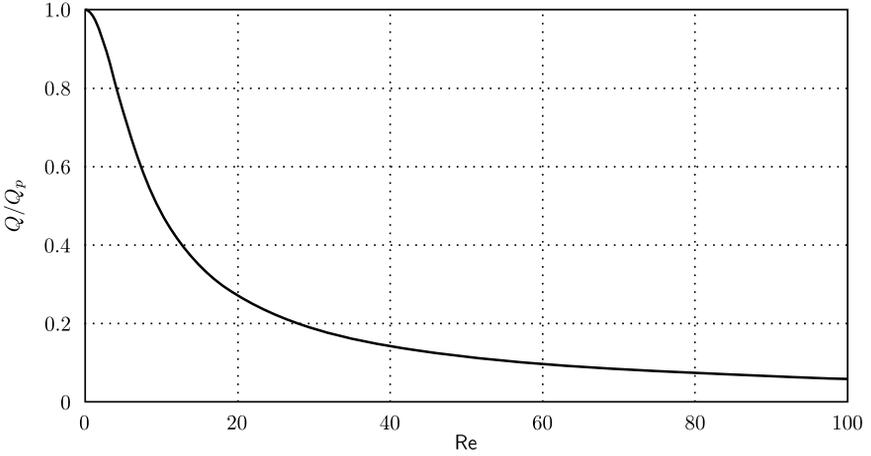


Рис. 2. График зависимости (9) [Figure 2. The graph of dependence (9)]

График зависимости (9) изображен на рис. 2. Отношение Q/Q_P стремится к единице при $Re \rightarrow 0$ и, убывая, стремится к нулю с ростом Re .

Отсюда следует вывод, что вынос погранслоя в глубь течения от одной пластины при одновременном всасывании погранслоя на другой пластине приводит к росту сопротивления потоку в горизонтальном направлении.

4. Нестационарное течение с ненулевым (горизонтальным) градиентом давления. В этом случае $Re^2 + 4\beta \neq -(2\pi k)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Если величина $Re^2 + 4\beta < 0$, то выражения для скорости и давления имеют вид

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(\beta t/Re) \left[\exp(Re y/2) \left(\frac{\cos \gamma - \exp(-Re/2)}{\sin \gamma} \sin(\gamma y) - \cos(\gamma y) \right) + 1 \right] \mathbf{i} + \mathbf{j},$$

где $\gamma = \sqrt{|Re^2 + 4\beta|/2}$; $p = -C_0 \beta \exp(\beta t/Re) x/Re + p_0$, $C_0 = \text{const}$.

Если же $Re^2 + 4\beta > 0$, то

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(\beta t/Re) [A \exp(\nu_1 y) + B \exp(\nu_2 y) + 1] \mathbf{i} + \mathbf{j},$$

$$p = -C_0 \beta \exp(\beta t/Re) x/Re + p_0,$$

где

$$A = (1 - \exp(\nu_2)) / (\exp(\nu_2) - \exp(\nu_1)),$$

$$B = (\exp(\nu_1) - 1) / (\exp(\nu_2) - \exp(\nu_1)),$$

$$\nu_1 = \left(Re - \sqrt{Re^2 + 4\beta} \right) / 2, \quad \nu_2 = \left(Re + \sqrt{Re^2 + 4\beta} \right) / 2, \quad C_0 = \text{const}.$$

5. Нестационарное течение Пуазейля (непроницаемые пластины). В таком течении будем искать скорость не в виде (2), а в виде $\mathbf{V} = (TY) \mathbf{i}$. Повторяя выкладки первого раздела, получим $Y''' - \beta Y' = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Ограничимся случаем $\beta = -4k^2 \pi^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Решение имеет вид

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(-4k^2 \pi^2 t/Re) [1 - \cos(2k\pi y)] \mathbf{i},$$

$$p = C_0 4k^2 \pi^2 \exp(-4k^2 \pi^2 t / \text{Re}) x / \text{Re} + p_0, \quad C_0 = \text{const.}$$

Интересно, что профиль нестационарного течения Пуазейля отличается от (квадратичного) профиля стационарного течения.

6. Течение Куэтта. Для течения Куэтта ограничимся стационарным случаем. Как видно из (5), в стационарном течении $\beta = 0$. В течении Куэтта верхняя пластина движется в горизонтальном направлении. Поэтому в задаче (6) нужно изменить второе краевое условие, и она примет вид

$$Y''' - \text{Re} Y'' = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(1) = 1. \quad (10)$$

Такая задача имеет решение при любом значении Re . Однако могут получаться решения, в которых давление не постоянно, а меняется в горизонтальном направлении. Потребуем, чтобы давление было постоянно. Из формулы (7) для стационарного случая ($T \equiv 1$) получаем условие постоянства давления $Y' \text{Re} - Y'' = 0$. Это условие будет выполнено для следующего решения задачи (10), которое определяется с точностью до произвольного постоянного множителя $C_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{V} = C_0 [\exp(\text{Re} y) - 1] \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad p = p_0 = \text{const.}$$

Эта простая формула позволяет проиллюстрировать влияние выноса погранслоя в глубь течения от одной пластины и при одновременном всасывании погранслоя на другой пластине. В частности, видно (см. рис. 3), что вертикальный градиент скорости больше на верхней пластине (где происходит всасывание), и поэтому сила, которая требуется для движения верхней

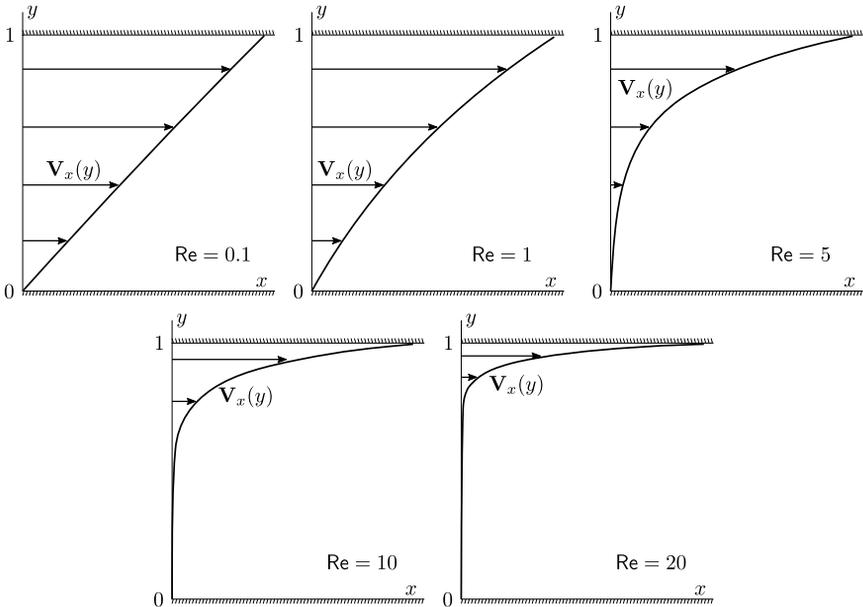


Рис. 3. Профиль горизонтальной скорости в стационарном течении Куэтта с проницаемыми стенками для различных чисел Рейнольдса [Figure 3. Horizontal velocity profile in a stationary Couette flow with permeable walls for various Reynolds numbers]

пластины, больше силы, которая требуется для удержания на месте нижней пластины (в классическом течении Куэтта эти силы равны по величине). Интересно также отметить, что при стремлении числа Рейнольдса к нулю профиль горизонтальной скорости приближается к линейному профилю классического течения Куэтта. А при числах Рейнольдса $Re \geq 20$ горизонтальная скорость почти везде равна нулю, кроме узкого пограничного слоя вблизи верхней пластины.

Заключение. В результате предположения о специальном виде зависимости (2) компонент скорости от координат получено новое семейство точных решений, описывающих плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными проницаемыми пластинами (течение пуазейлевского типа). При отсутствии протекания через пластины получено точное решение для нестационарного течения Пуазейля. Полученное однопараметрическое семейство решений включает в себя классическое решение Пуазейля и потому обобщает его. Для стационарных течений показано, что протекание приводит к росту сопротивления по сравнению с классическим течением Пуазейля.

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*, 2006. № 6. С. 3–76.
2. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // *Nonlinear Dynamics*, 2004. vol. 36, no. 1. pp. 47–68. <https://doi.org/10.1023/B:NDY.0000034646.18621.73>.
3. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Тр. Института математики и механики УрО РАН*, 2020. Т. 26, № 2. С. 79–87. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.
4. Prosviryakov E. Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid // *CEUR Workshop Proceedings*, 2016. vol. 1825. pp. 164–172.
5. Князев Д. В., Колшаков И. Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом // *Нелинейная динам.*, 2015. Т. 11, № 1. С. 89–97.
6. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // *Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика*. Т. 32. С. 33–48. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33>.
7. Гурченков А. А. Неустановившиеся пограничные слои на пористых пластинах вращающейся щели при наличии вдува (отсоса) среды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001. Т. 41, № 3. С. 443–449.

8. Башкин В. А., Егоров И. В. *Семинары по теоретической гидродинамике. 1.* М.: МФТИ, 2003. 194 с.
9. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations. A Classification of Flows and Exact Solutions* / London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 334. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. x+196 pp. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526459>.
10. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. xiv+470 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09781139226516>.
11. Shtern V. *Cellular Flows. Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. xiv+574 pp. <https://doi.org/10.1017/9781108290579>.
12. Bogoyavlenskij O. I. Exact solutions to the Navier–Stokes equations // *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 2002. vol. 24, no. 4. pp. 138–143.
13. Bogoyavlenskij O. I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations // *Mosc. Math. J.*, 2003. vol. 3, no. 2. pp. 263–272. <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2003-3-2-263-272>.
14. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // *Теор. основы хим. технол.*, 2006. Т. 43, № 5. С. 547–566.
15. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*, 2016. Т. 51, № 2. С. 25–31. <https://doi.org/10.7868/S0568528116020055>.
16. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Волны Стокса в завихренной жидкости // *Нелинейная динам.*, 2014. Т. 10, № 3. С. 309–318.
17. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667. <https://doi.org/10.31857/S003282350002271-8>.
18. Сизых Г. Б. Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 790–798. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802>.
19. Хорин А. Н., Конохова А. А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
20. Барановский Е. С., Домнич А. А. О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 3. С. 317–327. <https://doi.org/10.1134/S0374064120030036>.
21. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // *Изв. вузов. ПНД*, 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
22. Сизых Г. Б. Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 2. С. 49–56. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-49-56>.

MSC: 76D05, 35G20

Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls

*G. B. Sizykh*Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

In the framework of the Navier–Stokes equations, the flow of a viscous incompressible fluid between immovable parallel permeable walls is considered, on which only the longitudinal velocity component is equal to zero. Solutions are sought in which the velocity component transverse to the plane of the plates is constant. Both stationary and non-stationary solutions are obtained, among which there is a non-trivial solution with a constant pressure and a longitudinal velocity exponentially decaying with time. These solutions show the influence on the profile of the horizontal velocity component of the removal of the boundary layer into the depth of the flow from one plate with simultaneous suction of the boundary layer on the other plate. It is established that for stationary flows the removal of the boundary layer into the depth of the flow from one plate and, with simultaneous suction of the boundary layer on the other plate, leads to an increase in the drag compared to the classical Poiseuille flow. In the case of impermeable walls, an exact non-stationary solution is obtained, the velocity profile of which at fixed times differs from the profile in the classical Poiseuille flow and, in the limit (as time tends to infinity), corresponds to rest.

Keywords: exact solutions, Navier–Stokes equations, Poiseuille flow, permeable walls.

Received: 19th January, 2022 / Revised: 13th February, 2022 /Accepted: 28th February, 2022 / First online: 15th March, 2022

Competing interests. There are no financial or non-financial competing interests in the publication of the paper.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Sizykh G. B. Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 190–201. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1900> (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Pukhnachev V. V. Symmetries in Navier–Stokes equations, *Uspehi Mehaniki*, 2006, no. 6, pp. 3–76 (In Russian).
2. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 36, no. 1, pp. 47–68. <https://doi.org/10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73>.
3. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87 (In Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.
4. Prosviryakov E. Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid, *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1825, pp. 164–172.
5. Knyazev D. V., Kolpakov I. Yu. The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 89–97 (In Russian).
6. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 32, pp. 33–48 (In Russian). <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33>.
7. Gurchenkov A. A. Unsteady boundary layers on the porous plates in a rotating slot with injection and suction, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 3, pp. 413–419.
8. Bashkin V. A., Egorov I. V. *Seminary po teoreticheskoi gidrodinamike. 1* [Seminars on Theoretical Hydrodynamics. Part 1]. Moscow, MIPT, 2003, 194 pp. (In Russian)
9. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations. A Classification of Flows and Exact Solutions*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 334. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, x+196 pp. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526459>.
10. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2012, xiv+470 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09781139226516>.
11. Shtern V. *Cellular Flows. Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2018, xiv+574 pp. <https://doi.org/10.1017/9781108290579>.
12. Bogoyavlenskij O. I. Exact solutions to the Navier–Stokes equations, *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 2002, vol. 24, no. 4, pp. 138–143.
13. Bogoyavlenskij O. I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations, *Mosc. Math. J.*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 263–272. <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2003-3-2-263-272>.
14. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2006, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. <https://doi.org/10.1134/S0015462816020034>.
16. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Stokes waves in vortical fluid, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 309–318 (In Russian).
17. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Viscous gas flow between vertical walls, *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 11–18. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060046>.
18. Sizykh G. B. A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 790–798 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802>.

19. Khorin A. N., Konyukhova A. A. Couette flow of hot viscous gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
20. Baranovskii E. S., Domnich A. A. Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 304–314. <https://doi.org/10.1134/S0012266120030039>.
21. Markov V. V., Sizykh G. B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652 (In Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
22. Sizykh G. B. Axisymmetric helical flows of viscous fluid, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 44–50. <https://doi.org/10.3103/S1066369X19020063>.