

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 29, № 1 – 2025

**Вестник
Самарского
государственного
технического
университета**

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Апрель — 2025

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 29, № 1/78 – 2025)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. Э. Келлер — д.ф.-м.н., доц. (Пермь, Россия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвирыков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 29, № 1/78 – 2025)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору

в сфере связи информационных

технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 17 апреля 2025 г.

Дата выхода в свет 17 июня 2025 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 41/25.

Заказ № 152.

Отпечатано в типографии

Самарского государственного

технического университета

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
April — 2025

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2025, vol. 29, no. 1

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- I. E. Keller (Perm', Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radaev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Дурдиев Д. К., Элмурадова Х. Б., Рахмонов А. А.* “Обратная задача определения ядра для класса псевдопараболических интегро-дифференциальных уравнений” 19
- Дурдиев Д. К., Жумаев Ж. Ж.* “Разрешимость задачи восстановления коэффициентов в дробно-временном уравнении диффузии с периодическими граничными и переопределенными условиями” 35
- Загитов Р. Р., Юлмухаметова Ю. В.* “Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей” 37

Механика деформируемого твёрдого тела

- Бочкарёв С. А.* “Устойчивость слоистых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью” 55

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Гапеев М. И., Маранулец Ю. В., Солодчук А. А.* “Моделирование пространственного распределения областей повышенных предсейсмических деформаций” 77
- Майков Д. Н., Исупов С. В., Макаров С. С.* “Расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин” 91
- Назаров Р. Р., Коваленко А. В., Бостанов Р. А., Уртенев М. Х.* “Математическое моделирование влияния зависимости константы скорости диссоциации/рекомбинации на перенос ионов соли в диффузионном слое у ионообменной мембраны” 109
- Нефедов В. Н., Свойкин Ф. В., Гарибян Б. А., Ряпухин А. В., Королько Н. С.* “Методы аппроксимации двумерных множеств конечными множествами и их приложение к некоторым геометрическим задачам оптимизации” . 129
- Смольков М. И.* “Описание трижды периодических поверхностей с помощью оператора Лапласа–Бельтрами и статистической модели машинного обучения” 158

Краткие сообщения

- Массалов К. Ю., Мощенская Е. Ю.* “Построение модели для прогнозирования двух- и трехкомпонентных неорганических систем в водных растворах спектральным анализом” 174
- Нечаев А. С., Зубиков Д. В., Гречухина М. С., Давыдов А. Н.* “Математическое моделирование процесса формирования искрового разряда и связь его характеристик с критическими условиями воспламенения пылевоздушной взвеси энергетических веществ” 187

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

- Durdiev D. K., Elmuradova H. B., Rahmonov A. A.* “Inverse kernel determination problem for a class of pseudo-parabolic integro-differential equations” . . . 19
- Durdiev D. K., Jumaev J. J.* “Solvability of a coefficient recovery problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and overdetermination conditions” 35
- Zagotov R. R., Yulmukhametova Y. V.* “Hydrodynamics of an ideal incompressible fluid with a linear velocity field” 37

Mechanics of Solids

- Bochkarev S. A.* “Stability of layered cylindrical shells filled with fluid” 55

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Gapeev M. I., Marapulets Yu. V., Solodchuk A. A.* “Modeling of the spatial distribution of increased pre-seismic deformation areas” 77
- Maykov D. N., Isupov S. V., Makarov S. S.* “A computational model of a vertical well with waterflooding fracturing for pressure transient analysis” 91
- Nazarov R. R., Kovalenko A. V., Bostanov R. A., Urtenov M. Kh.* “Mathematical modeling of the influence of dissociation/recombination rate constant dependence on salt ion transport in the diffusion layer near an ion-exchange membrane” . 109
- Nefedov V. N., Svoikin F. V., Garibyan B. A., Ryapukhin A. V., Korolko N. S.* “Finite approximation methods for two-dimensional sets and their application to geometric optimization problems” 129
- Smolkov M. I.* “Triply periodic surface description using Laplace–Beltrami operator and a statistical machine learning model” 158

Short Communications

- Massalov K. Y., Moshchenskaya E. Y.* “Development of a predictive model for two- and three-component inorganic systems in aqueous solutions using spectral analysis” 174
- Nechaev A. S., Zubikov D. V., Grechukhina M. S., Davydov A. N.* “Mathematical modeling of the spark discharge formation process and the correlation between its parameters and ignition threshold conditions for energetic material dust clouds” 187

MSC: 35R30, 35K70, 45K05, 47H10

Inverse kernel determination problem for a class of pseudo-parabolic integro-differential equations

D. K. Durdiev^{1,2}, H. B. Elmuradova², A. A. Rahmonov^{1,2}¹ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,

11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

² Bukhara State University,

11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

This study investigates an inverse problem involving the determination of the kernel function in a multidimensional integrodifferential pseudo-parabolic equation of the third order. The study begins with an analysis of the direct problem, where we examine an initial-boundary value problem with homogeneous boundary conditions for a known kernel. Employing the Fourier method, we construct the solution as a series expansion in terms of eigenfunctions of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions. A crucial component of our analysis involves deriving a priori estimates for the series coefficients in terms of the kernel function norm, which play a fundamental role in our subsequent treatment of the inverse problem.

For the inverse problem, we introduce an overdetermination condition specifying the solution value at a fixed spatial point (pointwise measurement). This formulation leads to a Volterra-type integral equation of the second kind. By applying the Banach fixed-point principle within the framework of continuous functions equipped with an exponentially weighted norm, we establish the global existence and uniqueness of solutions to the inverse problem. Our results demonstrate the well-posedness of the problem under consideration.

Differential Equations and Mathematical Physics
Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Durdiev D. K., Elmuradova H. B., Rahmonov A. A. Inverse kernel determination problem for a class of pseudo-parabolic integro-differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 7–20. EDN: WGZAMY. DOI: 10.14498/vsgtu2095.

Authors' Details:

Durdimurod K. Durdiev <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Branch¹; Professor, Dept. of Differential Equations²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uzHilola B. Elmuradova <https://orcid.org/0000-0003-4306-2589>Teacher; PhD Student; Dept. of Differential Equations²; e-mail: helmuradova@mail.ruAskar A. Rahmonov <https://orcid.org/0000-0002-7641-9698>Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher¹; Associate Professor, Dept. of Differential Equations²; e-mail: araxmonov@mail.ru

Keywords: pseudo-parabolic equation, integro-differential equation, inverse problem, kernel determination, Fourier method, Banach fixed-point principle, a priori estimates.

Received: 18th May, 2024 / Revised: 23rd October, 2024 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 27th March, 2025

Introduction. There are numerous cases where practical applications lead to challenges in determining the coefficients, the right-hand side of the differential equation, and the kernel of integrodifferential equations. Such problems are referred to as inverse problems of mathematical physics.

Inverse problems currently represent a rapidly developing branch of modern mathematics. Various inverse problems for second-order hyperbolic and parabolic equations, as well as first-order systems, are discussed in the monographs [1–5] (see also the extensive bibliographies therein). The recently published monograph [6] investigates a new class of inverse problems involving the determination of the convolution kernel in second-order hyperbolic integrodifferential equations.

Water filtration in double-porosity media, moisture transfer in soil, and similar natural phenomena often lead to boundary value problems involving pseudo-parabolic equations (see, e.g., [7, 8]). When such processes occur in viscoelastic media, Volterra operators — representing the convolution of a time-dependent viscosity function with a solution operator (typically elliptic) — are incorporated into the right-hand side of the pseudo-differential equations.

The study of inverse problems for pseudo-parabolic equations began in the 1980s. The first significant result, obtained in [9], addressed the inverse identification of an unknown source function. Among recent works, we highlight [10], where the author examined an inverse problem of recovering a space-dependent source coefficient in a third-order pseudo-parabolic equation under a final overdetermination condition (see also references therein).

To the best of our knowledge, the problem of determining the convolution kernel in an integrodifferential pseudo-parabolic equation remains unexplored. However, a series of works [11–20] has investigated inverse problems involving convolution kernel determination for linear parabolic integrodifferential equations. These studies established local existence and global uniqueness theorems, as well as stability estimates for the solutions.

In this study, we employ the Fourier method, integral inequalities, and the fixed-point principle to prove the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of determining the kernel of a multidimensional third-order integrodifferential pseudo-parabolic equation. The problem is supplemented with an additional condition specified at a fixed point for the solution of the first boundary value problem.

Consider the following nonhomogeneous pseudo-parabolic integrodifferential equation:

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = (k * \Delta u)(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

where $D = \Omega \times (0, T]$, $T > 0$, and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$. Here, Δ denotes the Laplacian, $k(t)$ is the convolution

kernel representing the “memory effect” (or viscosity function), $f(x, t)$ is a source function, and $(k * \Delta u)(x, t)$ denotes the Laplace convolution:

$$(k * u)(x, t) := \int_0^t k(t - s)u(x, s) ds.$$

In the domain D , we study the following problem for Eq. (1): *Find a function $u(x, t)$ satisfying (1) with the initial condition*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

and the boundary condition

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, T), \tag{3}$$

where $f(x, t)$ and $\varphi(x)$ are given functions. This problem is commonly referred to as the direct (forward) problem.

A function $u(x, t)$ is called a *classical solution* to problem (1)–(3) if it satisfies the following conditions:

- 1) $u(x, t)$ is continuous in \bar{D} along with all derivatives appearing in Eq. (1);
- 2) all given conditions are satisfied in the classical sense.

Based on this direct problem, we now consider the following inverse problem.

INVERSE PROBLEM. *Determine the kernel $k(t)$, $t > 0$, appearing in equation (1), given that the solution of the direct problem satisfies the additional condition*

$$u(x_0, t) = h(t), \quad x_0 \in \Omega, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

where $x_0 \in \Omega$ is a fixed point and $h(t)$ is a given sufficiently smooth function.

1. Investigation of the Direct Problem. This section studies problem (1)–(3). We prove the existence and uniqueness of a classical solution to problem (1)–(3).

1.1. Uniqueness of the Solution. The following uniqueness result holds for (1)–(3).

THEOREM 1. *If problem (1)–(3) has a solution, then this solution is unique.*

Proof. Applying the method of separation of variables, we seek a solution to (1)–(3) in the form

$$u(x, t) = U(t)X(x). \tag{5}$$

Substituting (5) into (1) with

$$\int_0^t k(t - \tau)\Delta u(x, \tau)d\tau + f(x, t) = 0,$$

we require that $X(x) \not\equiv 0$ satisfies the spectral problem

$$\begin{cases} \Delta X + \lambda X = 0, & \text{in } \Omega, \\ X = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

It is well-known that the operator $-\Delta$ has only positive real and simple eigenvalues λ_m , which when properly ordered satisfy $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = +\infty$. We denote by X_m the eigenfunction corresponding to λ_m , normalized such that $\|X_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = (X_m, X_m) = 1$, where (\cdot, \cdot) denotes the inner scalar product in the Hilbert space $L^2(\Omega)$.

Let $u(x, t)$ be a solution to problem (1)–(3). Consider the scalar product

$$u_m(t) = (u(\cdot, t), X_m)_{L^2(\Omega)}. \quad (6)$$

From (6) and using equation (1), we obtain

$$u'_m(t) + \lambda_m u'_m(t) + \lambda_m u_m(t) = -\lambda_m (k * u_m)(t) + f_m(t), \quad (7)$$

where $f_m(t) = (f, X_m)$, $m = 1, 2, \dots$. The initial condition (2) yields

$$\varphi_m := u_m(0) = (\varphi, X_m)_{L^2(\Omega)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

One can verify that problem (7), (8) has a unique solution $u_m(t) \in C^1[0, T]$ given by

$$u_m(t) = \chi_m(t) \varphi_m + \frac{1}{1 + \lambda_m} (\chi_m * f_m)(t) - \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} (\chi_m * (k * u_m))(t), \quad (9)$$

where $\chi_m(t) = \exp\left\{-\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} t\right\}$.

This implies the uniqueness of the solution to problem (1)–(3), since for $\varphi(x) \equiv 0$ and $f(x, t) \equiv 0$, we obtain $\varphi_m \equiv 0$ and $f_m(t) \equiv 0$. From (9) it follows that $u_m(t) \equiv 0$. By (6), this is equivalent to

$$(u(\cdot, t), X_m)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Since the system $\{X_m\}$ is complete in $L^2(\Omega)$, we have $u(x, t) = 0$ almost everywhere in $\bar{\Omega}$ for all $t \in [0, T]$. As $u(x, t)$ is continuous on \bar{D} , we conclude that $u(x, t) \equiv 0$ on \bar{D} . This completes the proof of uniqueness for problem (1)–(3). \square

1.2. Existence of the Classical Solution. This subsection establishes the existence of a solution to problem (1)–(3).

Under appropriate conditions on the functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$, we prove that the function

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) X_m(x) \quad (10)$$

represents a solution to problem (1)–(3).

LEMMA 1. *The following estimates hold for all $m = 1, 2, \dots$:*

$$|u_m(t)| \leq \max\{1, T\} [|\varphi_m| + \|f_m\|_0] e^{\|k\|_0 T^2/2}, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

$$|u'_m(t)| \leq \|f_m\|_0 + \max\{1, T\} (1 + \|k\|_0 T) [|\varphi_m| + \|f_m\|_0] e^{\|k\|_0 T^2/2}, \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

where $\|k\|_0 = \max_{t \in [0, T]} |k(t)|$.

Proof. From (9), we estimate $u_m(t)$ as follows:

$$|u_m(t)| \leq |\varphi_m| + t|f_m(t)| + \|k\|_0 \int_0^t (t-s)|u_m(s)| ds.$$

Applying Gronwall's lemma for all $t \in [0, T]$, we obtain (11). Furthermore, from (7) and (11), we derive (12). This completes the proof of the lemma. \square

Assume the following regularity conditions:

$$\begin{cases} \varphi(x) \in H^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega), & f(x, t) \in C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}]+3}(\Omega)), \\ \varphi = \Delta\varphi = \dots = \Delta^{[\frac{n+2}{4}]} \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ f(\cdot, t) = \Delta f(\cdot, t) = \dots = \Delta^{[\frac{n+2}{4}]} f(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

By the Cauchy–Schwarz inequality and Lemma 1 in [17], the series (10) converges uniformly on \bar{D} in view of (11):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m(t)X_m(x)| &\leq C_1 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m^2(x)}{\lambda_m^{[\frac{n}{2}]+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^2 \lambda_m^{[\frac{n}{2}]+1} \right)^{1/2} + \\ &+ C_2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_m^2(x)}{\lambda_m^{[\frac{n}{2}]+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_0^2 \lambda_m^{[\frac{n}{2}]+1} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \tilde{C}_1 \int_{\Omega} (\Delta^{[\frac{n}{2}]+1} \varphi)^2 dx + \tilde{C}_2 \int_{\Omega} (\Delta^{[\frac{n}{2}]+1} \|f(x, \cdot)\|)^2 dx. \end{aligned}$$

Differentiating the series in (10) term-wise, we obtain:

$$u_t = \sum_{m=1}^{\infty} u'_m(t)X_m(x), \quad (13)$$

$$u_{x_i x_i} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

$$u_{x_i x_i t} = \sum_{m=1}^{\infty} u'_m(t) \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Obviously, that if either series (14) or (15) converges uniformly, then series (13) also converges uniformly.

For series (14), using (11) and (A1), and applying the Cauchy–Schwarz inequality for $(x, t) \in D$ and $i = 1, 2, \dots, n$, we have:

$$\left| \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x_i^2} \right| \leq C_3 \left[\int_{\Omega} (\Delta^{[\frac{n}{2}]+3} \varphi)^2 dx + \int_{\Omega} (\Delta^{[\frac{n}{2}]+3} \|f(x, \cdot)\|)^2 dx \right].$$

Consequently, the series (14), as well as (13) and (15), converge uniformly in \bar{D} .

These results lead to the following theorem.

THEOREM 2. *Let $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ satisfy condition (A1), and let $k(t) \in C[0, T]$. Then problem (1)–(3) admits a classical solution $u \in C(\overline{D}) \cap C_{x,t}^{2,1}(D)$ defined by the series (10).*

1.3. A Priori Estimates. This subsection establishes estimates for the solution and its first derivative in the direct problem (1)–(3). In the following section, we will prove that problem (1)–(4) has a unique solution for any $T > 0$. For this purpose, we employ weighted norms: for each $\sigma \geq 0$, we define the Bielecki norm

$$\|k\|_\sigma = \max_{t \in [0, T]} (e^{-\sigma t} |k(t)|).$$

REMARK. The weighted norm eliminates restrictions on the maximum value of T . In contrast, using the standard supremum norm would require T to be smaller than some finite quantity depending on the problem's data.

The space $C_\sigma[0, T] := (C[0, T], \|\cdot\|_\sigma)$ forms a Banach space, and the norms $\|\cdot\|_\sigma$ and $\|\cdot\|_0$ are equivalent. Moreover, the convolution operator is both commutative and invariant under multiplication by $e^{-\sigma t}$:

$$(f * g)(t) = (g * f)(t), \quad \text{and} \quad e^{-\sigma t}(f * g)(t) = (e^{-\sigma t}f(t)) * (e^{-\sigma t}g(t)).$$

Additionally, we have the estimate

$$\|f * g\|_\sigma \leq \frac{1}{\sigma} \|f\|_0 \|g\|_\sigma, \quad \sigma > 0 \tag{16}$$

(see [16]).

Let \tilde{u}_m denote the solution of (7), (8) with coefficients $\tilde{\varphi}_m$, \tilde{f}_m , and \tilde{k} . From (9), we estimate the difference $u_m - \tilde{u}_m$ in the Bielecki norm:

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t} |u_m(t) - \tilde{u}_m(t)| &\leq |\varphi_m - \tilde{\varphi}_m| + t \|f_m - \tilde{f}_m\|_0 + \\ &+ t^2 \|u_m\|_0 \|k - \tilde{k}\|_\sigma + t \|\tilde{k}\|_\sigma \int_0^t e^{-\sigma s} |u_m - \tilde{u}_m|(s) ds. \end{aligned}$$

Applying Gronwall's lemma for all $t \in [0, T]$ and $m \in \mathbb{N}$ yields:

$$\|u_m - \tilde{u}_m\|_\sigma \leq (|\varphi_m - \tilde{\varphi}_m| + T \|f_m - \tilde{f}_m\|_0 + T^2 \|k - \tilde{k}\|_\sigma \|u_m\|_0) e^{T^2 \|\tilde{k}\|_\sigma}. \tag{17}$$

Theorem 2 established that problem (1)–(3) possesses a unique classical solution in \overline{D} . Consequently, for all $t \geq 0$, u_t belongs to $C(\overline{D})$, and the difference of its Fourier coefficients satisfies:

$$\begin{aligned} \|u'_m - \tilde{u}'_m\|_\sigma &\leq \|u_m - \tilde{u}_m\|_\sigma + T \|u_m\|_0 \|k - \tilde{k}\|_\sigma + \\ &+ T \|\tilde{k}\|_\sigma \|u_m - \tilde{u}_m\|_\sigma + \|f_m - \tilde{f}_m\|_0. \end{aligned} \tag{18}$$

2. The Existence and Uniqueness Theorem for the Inverse Problem.

This section investigates the inverse problem of determining the functions $u(x, t)$

and $k(t)$ from relations (1)–(4). We employ the contraction mapping principle to solve this problem.

Let

$$\mu = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \varphi_m X_m(x_0) \right)^{-1} \neq 0. \quad (\text{A2})$$

Under condition (A1), the numerical series

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \varphi_m X_m(x_0)$$

converges.

Substituting $x = x_0$ into (10) and using (4), we obtain

$$h(t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) X_m(x_0), \quad t \in [0, T]. \quad (19)$$

Replacing $u_m(t)$ in (19) with the right-hand side of (9) and differentiating twice yields the integral equation for $k(t)$:

$$\begin{aligned} k(t) = k_0(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^2 (k * u_m)(t) X_m(x_0) - \\ - \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^3 (\chi_m * (k * u_m)(\tau))(t) X_m(x_0) - \\ - \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} (k * u'_m)(t) X_m(x_0), \quad (20) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} k_0(t) = -\mu h''(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^2 \chi_m(t) \varphi_m X_m(x_0) - \\ - \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{(1 + \lambda_m)^2} f_m(t) X_m(x_0) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda_m} f'_m(t) X_m(x_0) + \\ + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{(1 + \lambda_m)^3} (\chi_m * f_m)(t) X_m(x_0). \end{aligned}$$

Assume the following regularity conditions:

$$\begin{cases} h \in C^2[0, T], & f \in C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{[\frac{n}{2}] - 1}(\Omega)), \\ \varphi(x_0) = h(0), \\ f(\cdot, t) = \Delta f(\cdot, t) = \dots = \Delta^{[\frac{n+4}{4}]} f(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega), \quad t \in [0, T]. \end{cases} \quad (\text{A3})$$

Equation (20) can be expressed as the fixed-point equation

$$k = Ak \quad (21)$$

for the operator A defined by

$$\begin{aligned}
 Ak(t) = & k_0(t) + \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^2 (k * u_m)(t) X_m(x_0) - \\
 & - \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^3 (\chi_m * (k * u_m)(\tau))(t) X_m(x_0) - \\
 & - \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} (k * u'_m)(t) X_m(x_0).
 \end{aligned}$$

To establish that A has a fixed point, we first demonstrate that A maps a closed convex set into itself in the space $C[0, T]$ equipped with the Bielecki norm.

LEMMA 2. *Under conditions (A1)–(A3), there exists $\sigma_0 > 0$ such that for all $\sigma \geq \sigma_0$, there exists $R > 0$ for which the closed convex ball*

$$K = \{k \in C[0, T] : \|Ak - k_0\|_{\sigma} \leq R\}$$

is invariant under A , i.e., $A(K) \subset K$.

Proof. For any $k \in C[0, T]$, $t \in [0, T]$, and $\sigma > 0$, estimate (16) yields:

$$\begin{aligned}
 \|Ak - k_0\|_{\sigma} \leq & \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^2 e^{-\sigma t} (k * u_m)(t) X_m(x_0) \right| + \\
 & + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^3 e^{-\sigma t} (\chi_m * (k * u_m)(\tau))(t) X_m(x_0) \right| + \\
 & + \max_{t \in [0, T]} \left| \mu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} e^{-\sigma t} (k * u'_m)(t) X_m(x_0) \right| \leq \\
 \leq & \frac{\|k\|_{\sigma}}{\sigma} |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_0 |X_m(x_0)| + \frac{\|k\|_{\sigma}}{\sigma} |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} \|\chi_m * u'_m\|_0 |X_m(x_0)| \\
 & + \frac{\|k\|_{\sigma}}{\sigma} |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} \|u'_m\|_0 |X_m(x_0)| := I_1 + I_2 + I_3. \quad (22)
 \end{aligned}$$

For $k \in K$, we have

$$\|k\|_{\sigma} \leq \|k_0\|_0 + R := R_0, \quad (23)$$

since $\|\cdot\|_{\sigma} \leq \|\cdot\|_0$.

Applying Lemma 1 and (A1) to I_1 with (23) gives:

$$\begin{aligned}
 I_1 \leq & \frac{R_0}{\sigma} \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} (|\varphi_m| + \|f_m\|_0) |X_m(x_0)| \leq \\
 \leq & \frac{R_0}{\sigma} \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} |\mu| \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega))} \right) := \frac{\tilde{\sigma}_1}{\sigma}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Similarly, for I_2 :

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq \frac{R_0}{\sigma} T |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} \|u'_m\|_0 |X_m(x_0)| \leq \frac{R_0}{\sigma} T |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_0 |X_m(x_0)| + \\
 &+ \frac{R_0}{\sigma} \max\{1, T\} (1 + R_0 T) T e^{\|k\|_0 T^2/2} |\mu| \sum_{m=1}^{\infty} (\|\varphi_m\| + \|f_m\|_0) |X_m(x_0)| \leq \\
 &\leq \frac{R_0}{\sigma} T |\mu| \|f\|_{C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega))} + \frac{R_0}{\sigma} \max\{1, T\} (1 + R_0 T) \times \\
 &\quad \times T e^{\|k\|_0 T^2/2} |\mu| \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega))} \right) := \frac{\tilde{\sigma}_2}{\sigma}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

For I_3 , we obtain:

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq \frac{R_0}{\sigma} |\mu| \|f\|_{C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega))} + \frac{R_0}{\sigma} \max\{1, T\} (1 + R_0 T) \times \\
 &\quad \times e^{\|k\|_0 T^2/2} |\mu| \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0, T]; H^{[\frac{n}{2}] + 1}(\Omega))} \right) := \frac{\tilde{\sigma}_3}{\sigma}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Combining (24)–(26) for (22) yields

$$\|Ak - k_0\|_{\sigma} \leq \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma},$$

where $\tilde{\sigma}_0 := \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3$. Choosing $\sigma \geq \sigma_0 := (1/R)\tilde{\sigma}_0$ ensures $A(K) \subset K$. \square

LEMMA 3. *Under the same conditions as in Lemma 2, the family $(A(k))_{k \in K}$ is contractive, i.e., there exists $q \in [0, 1)$ such that*

$$\|Ak - A\tilde{k}\|_{\sigma} \leq q \|k - \tilde{k}\|_{\sigma}$$

for all $k, \tilde{k} \in K$.

Proof. From the commutative and invariant properties of the convolution operator, we have

$$e^{-\sigma t} v_1 * v_2(t) - e^{-\sigma t} \tilde{v}_1 * \tilde{v}_2(t) = e^{-\sigma t} (v_1 - \tilde{v}_1) * v_2(t) + e^{-\sigma t} \tilde{v}_1 * (v_2 - \tilde{v}_2)(t)$$

and

$$\|v_1 * v_2(t) - \tilde{v}_1 * \tilde{v}_2(t)\|_{\sigma} \leq \frac{1}{\sigma} (\|v_1 - \tilde{v}_1\|_{\sigma} \|v_2\|_0 + \|\tilde{v}_1\|_0 \|v_2 - \tilde{v}_2\|_{\sigma}).$$

For any $k, \tilde{k} \in K$, we estimate

$$\begin{aligned}
 \|Ak - A\tilde{k}\|_{\sigma} &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^2 (\|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \|u_m\|_0 + \|\tilde{k}\|_0 \|u_m - \tilde{u}_m\|_{\sigma}) |X_m(x_0)| + \\
 &+ \frac{|\mu|}{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} \right)^3 (\|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \|\chi_m * u_m\|_0 + \|\tilde{k}\|_0 \|\chi_m * (u_m - \tilde{u}_m)\|_{\sigma}) |X_m(x_0)| +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{|\mu|}{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{1 + \lambda_m} (\|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \|u'_m\|_0 + \|\tilde{k}\|_0 \|u'_m - \tilde{u}'_m\|_{\sigma}) |X_m(x_0)| := \hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3. \quad (27)$$

We now estimate each term in (27). Using Lemma 1, (A1), and (17) for \hat{I}_1 , we obtain

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} (1 + T^2 e^{T^2 R_0} \|\tilde{k}\|_0) \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_0 |X_m(x_0)| \leq \\ &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} (1 + T^2 e^{T^2 R_0} \|\tilde{k}\|_0) \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} (|\varphi_m| + \|f_m\|_0) |X_m(x_0)| \leq \\ &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} (1 + T^2 e^{T^2 R_0} \|\tilde{k}\|_0) \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \times \\ &\quad \times \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0,T];H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega))} \right) := \frac{\hat{\sigma}_1}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma}. \end{aligned}$$

For \hat{I}_2 , we have

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} \left(T + T^2 e^{T^2 R_0} \frac{\|\tilde{k}\|_0}{\sigma} \right) \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_0 |X_m(x_0)| \leq \\ &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} \left(T + T^2 e^{T^2 R_0} \frac{\|\tilde{k}\|_0}{\sigma} \right) \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \times \\ &\quad \times \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0,T];H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega))} \right) := \frac{\hat{\sigma}_2}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma}. \end{aligned}$$

Similarly, for \hat{I}_3 , Lemma 1 yields

$$\begin{aligned} \hat{I}_3 &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \|u'_m\|_0 |X_m(x_0)| + \\ &\quad + \frac{|\mu|}{\sigma} (T + T^2 e^{T^2 R_0} + T^3 e^{T^2 R_0}) \|\tilde{k}\|_0 \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \|u_m\|_0 |X_m(x_0)| \leq \\ &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_0 |X_m(x_0)| + \\ &\quad + \frac{|\mu|}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \max\{1, T\} (1 + \|k\|_0 T) e^{\|k\|_0 T^2/2} \sum_{m=1}^{\infty} (|\varphi_m| + \|f_m\|_0) |X_m(x_0)| + \\ &\quad + \frac{|\mu|}{\sigma} (T + T^2 e^{T^2 R_0} + T^3 e^{T^2 R_0}) \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} \|\tilde{k}\|_0 \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} \times \\ &\quad \quad \quad \times \sum_{m=1}^{\infty} (|\varphi_m| + \|f_m\|_0) |X_m(x_0)| \leq \\ &\leq \frac{|\mu|}{\sigma} \|f\|_{C([0,T];H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega))} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} + \frac{|\mu|}{\sigma} \max\{1, T\} (1 + \|k\|_0 T) e^{\|k\|_0 T^2/2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0,T];H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega))} \right) \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} + \\ & + \frac{|\mu|}{\sigma} \left(T + T^2 e^{T^2 R_0} + T^3 e^{T^2 R_0} \right) \max\{1, T\} e^{\|k\|_0 T^2/2} \|\tilde{k}\|_0 \times \\ & \times \left(\|\varphi\|_{H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega)} + \|f\|_{C([0,T];H^{[\frac{n}{2}]+1}(\Omega))} \right) \|k - \tilde{k}\|_{\sigma} := \frac{\hat{\sigma}_3}{\sigma} \|k - \tilde{k}\|_{\sigma}. \end{aligned}$$

Choosing $q := \hat{\sigma}_0/\sigma < 1$, where $\hat{\sigma}_0 := \max\{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3\}$, establishes that A is a contraction on K , completing the proof. \square

By the Banach fixed-point theorem, equation (21) has a unique solution for any $T > 0$, yielding:

THEOREM 3. *Under assumptions (A1)–(A3), for any $T > 0$, problem (1)–(4) admits a unique solution.*

Conclusion. This study has established the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem of determining the kernel of a multidimensional third-order integrodifferential pseudo-parabolic equation. Our approach combines the Fourier method, integral inequalities, and the fixed-point principle, with the solution specified by an additional condition at a fixed point for the first boundary value problem.

All results presented in this article remain valid when the Laplacian operator Δ in (1) is replaced by a more general self-adjoint differential operator L defined in the domain Ω . This operator takes the form:

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - c(x),$$

where the coefficients satisfy:

- symmetry: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ for all i, j ;
- uniform ellipticity: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ with $\alpha = \text{const} > 0$;
- non-negativity: $c(x) \geq 0$ in Ω .

We additionally assume the coefficients $a_{ij}(x)$ and $c(x)$ satisfy appropriate smoothness conditions (see [17] for details).

Competing interests. The authors declare no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without external funding.

References

1. Romanov V. G. *Investigation Methods for Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht, VSP, 2002, xii+280 pp.
2. Denisov A. M. *Elements of the Theory of Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht, VSP, 1999, iv+272 pp.
3. Hasanov Hasanoglu A., Romanov V. G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*. Cham, Springer, 2017, xiii+261 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62797-7>.

4. Safarov J. Sh. Inverse problem for an integro-differential equation of hyperbolic type with additional information of a special form in a bounded domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 29–44 (In Russian). EDN: WSCTDR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1997>.
5. Lesnic D. *Inverse Problems with Applications in Science and Engineering*. New York, CRC Press, 2022, xv+342 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780429400629>.
6. Durdiev D. K., Totieva Z. D. *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations*, Infosys Science Foundation Series. Singapore, Springer Nature, 2023, xxvi+368 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4>.
7. Chudnovskii A. F. *Thermophysics of Soils*. Moscow, Nauka, 1976, 352 pp. (In Russian)
8. Barenblatt G. I., Zhelton Yu. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage homogeneous liquids in fissured rocks (strata), *J. Appl. Math. Mech.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6).
9. Rundell W. Colton D. L Determination of an unknown non-homogeneous term in a linear partial differential equation from overspecified boundary data, *Appl. Anal.*, 1980, vol. 10, no. 3, pp. 231–242. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036818008839304>.
10. Huntul M. J. Recovering a source term in the higher-order pseudo-parabolic equation via cubic spline functions, *Phys. Scr.*, 2022, vol. 97, no. 3, 035004. DOI: <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac54d0>.
11. Colombo F., Guidetti D. Identification of the memory kernel in the strongly damped wave equation by a flux condition, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2009, vol. 8, no. 2, pp. 601–620. DOI: <https://doi.org/10.3934/cpaa.2009.8.601>.
12. Lorenzi A., Rossa E. Identification of two memory kernels in a fully hyperbolic phase-field system, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2008, vol. 16, pp. 147–174. DOI: <https://doi.org/10.1515/JIIP.2008.010>.
13. Lorenzi A., Messina F. An identification problem with evolution on the boundary of parabolic type, *Adv. Diff. Equ.*, 2008, vol. 13, no. 11–12, pp. 1075–1108. DOI: <https://doi.org/10.57262/ade/1355867287>.
14. Durdiev D. K., Nuriddinov Z. Z. Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 117–127. EDN: RMPPXU. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-117-127>.
15. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2022, vol. 45, no. 14, pp. 8374–8388. EDN: AWTYYE. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7133>.
16. Janno J., Von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1987, vol. 20, no. 4, pp. 291–314. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1476\(19970310\)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970310)20:4<291::AID-MMA860>3.0.CO;2-W).
17. Il'in V. A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, *Russian Math. Surveys*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1960v015n02ABEH004217>.
18. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. On determination of the coefficient and kernel in an integro-differential equation of parabolic type, *Euras. J. Math. Comp. Appl.*, 2023, vol. 11, no. 1, pp. 49–65. EDN: HFYBVP. DOI: <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2023-11-1-49-65>.
19. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh., Atoev D. D. Inverse problem on determining two kernels in integro-differential equation of heat flow, *Ufa Math. J.*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 119–134. EDN: SBHNJU. DOI: <https://doi.org/10.13108/2023-15-2-119>.
20. Durdiev D. K., Boltaev A. A. Global solvability of an inverse problem for a Moore–Gibson–Thompson equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions, *Euras. J. Math. Comp. Appl.*, 2024, vol. 12, no. 2, pp. 35–49. EDN: GGMWBQ. DOI: <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2024-12-2-35-49>.

УДК 517.968.7 + 517.983

Обратная задача определения ядра для класса псевдопараболических интегро-дифференциальных уравнений

Д. К. Дурдиев^{1,2}, Х. Б. Элмурадова², А. А. Рахмонов^{1,2}

¹ Бухарское отделение Института математики Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.

² Бухарский государственный университет, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.

Аннотация

Данная работа посвящена исследованию обратной задачи определения ядра в многомерном интегро-дифференциальном псевдопараболическом уравнении третьего порядка. Исследование начинается с анализа прямой задачи с известной функцией ядра при рассмотрении начально-краевой задачи с однородными граничными условиями. Методом Фурье строится решение в виде ряда по собственным функциям задачи Дирихле для оператора Лапласа. Важной частью анализа является получение априорных оценок коэффициентов ряда через норму функции ядра, которые играют ключевую роль при изучении обратной задачи.

Для обратной задачи вводится условие переопределения, задающее значение решения в фиксированной точке пространственной области (точечное измерение). Эта формулировка сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Путем применения принципа сжимающих отображений Банаха в классе непрерывных функций с экспоненциально взвешенной нормой устанавливаются глобальное существование и единственность решения обратной задачи. Полученные результаты демонстрируют корректную разрешимость рассматриваемой проблемы.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

📄 ©️📄 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Durdiev D. K., Elmuradova H. B., Rahmonov A. A. Inverse kernel determination problem for a class of pseudo-parabolic integro-differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 7–20. EDN: WGZAMY. DOI: 10.14498/vsgtu2095.

Сведения об авторах

Дурдимурод Каландарович Дурдиев  <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделением¹; профессор, каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

Хилола Ботировна Элмурадова  <https://orcid.org/0000-0003-4306-2589>
преподаватель; базовый докторант; каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: helmuradova@mail.ru

Аскар Ахмадович Рахмонов  <https://orcid.org/0000-0002-7641-9698>
кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник¹; доцент, каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: arahmonov@mail.ru

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, определение ядра, метод Фурье, принцип сжимающих отображений, априорные оценки.

Получение: 18 мая 2024 г. / Исправление: 23 октября 2024 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 27 марта 2025 г.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

MSC: 35R11, 35R30, 26A33

Solvability of a coefficient recovery problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and overdetermination conditions



D. K. Durdiev^{1,2}, *J. J. Jumaev*^{1,2}

¹ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

² Bukhara State University,
11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

This article investigates the inverse problem for time-fractional diffusion equations with periodic boundary conditions and integral overdetermination conditions on a rectangular domain. First, the definition of a classical solution to the problem is introduced. Using the Fourier method, the direct problem is reduced to an equivalent integral equation. The existence and uniqueness of the solution to the direct problem are established by employing estimates for the Mittag-Leffler function and generalized singular Gronwall inequalities.

In the second part of the work, the inverse problem is examined. This problem is reformulated as an equivalent integral equation, which is then solved using the contraction mapping principle. Local existence and global uniqueness of the solution are rigorously proven. Furthermore, a stability estimate for the solution is derived.

The study contributes to the theory of inverse problems for fractional differential equations by providing a framework for analyzing problems with periodic boundary conditions and integral overdetermination. The methods developed in this work can be applied to a wide range of problems in mathematical physics and engineering, where time-fractional diffusion models are increasingly used to describe complex phenomena.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Durdiev D. K., Jumaev J. J. Solvability of a coefficient recovery problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and overdetermination conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 21–36. EDN: YZQBWZ. DOI: 10.14498/vsgtu2083.

Authors' Details:

Durdimurod K. Durdiev <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Branch¹; Professor, Dept. of Differential Equations²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

Jonibek J. Jumaev <https://orcid.org/0000-0001-8496-1092>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher¹; Associate Professor, Dept. of Differential Equations²; e-mail: jonibekjj@mail.ru

Keywords: time-fractional diffusion equation, periodic boundary conditions, inverse problem, integral equation.

Received: 15th February, 2024 / Revised: 19th November, 2024 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 14th March, 2025

1. Introduction. Periodic boundary conditions (PBCs) are a set of boundary conditions often chosen to approximate a large (infinite) system by using a small part called a unit cell. PBCs are widely used in computer simulations and mathematical models. The topology of two-dimensional PBCs is analogous to that of a world map in some video games; the geometry of the unit cell satisfies perfect two-dimensional tiling, and when an object passes through one side of the unit cell, it reappears on the opposite side with the same velocity (see [1–3]).

PBCs arise in many important applications in heat transfer and life sciences [4–8]. In these studies, the existence, uniqueness, and continuous dependence of the solution on the data were proven, and numerical solutions to the diffusion problem with periodic boundary conditions were developed.

Various formulations of inverse problems for determining thermal coefficients in the one-dimensional heat equation have been studied in [8–11]. It is important to note that in [8, 9], the time-dependent thermal coefficient is determined from a nonlocal overdetermination condition. Additionally, in [12–14], the coefficients of the heat equation are determined for cases involving nonlocal boundary conditions.

The studies [15–19] investigated the inverse problem of finding diffusion coefficients in one- and multi-dimensional time-fractional equations. Under certain assumptions about the data, the existence, uniqueness, and continuous dependence of the solution on the data were established.

The problem of determining the kernel $k(t)$ of the integral term in an integro-differential heat equation has been extensively studied in numerous publications [20–28]. These studies address both one- and multidimensional inverse problems with classical initial and initial-boundary conditions. Theorems on the existence and uniqueness of solutions to these inverse problems have been proven.

In the present study, the determination of the coefficient in the time-fractional diffusion equation is considered under initial and periodic boundary conditions. The existence and uniqueness of a classical solution to the problem (1)–(4) are established using the fixed-point principle via the Fourier method.

2. Formulation of the Problem. We consider the following initial-periodic boundary value problem for the fractional diffusion equation:

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + a(t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad \varphi(0) = \varphi(l), \quad \varphi'(0) = \varphi'(l), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

where ∂_t^α is the Caputo fractional derivative of order $0 < \alpha \leq 1$ in the time variable (see Definition 2), $a(t)$, $t > 0$, is the source control term, $f(x, t)$ is the known source term, $\varphi(x)$ is the initial temperature, T is an arbitrary positive number, and $D_T := \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$.

The problem of determining a function $u(x, t)$, $(x, t) \in D_T$, that satisfies (1)–(3) with given functions $a(t)$, $f(x, t)$, and $\varphi(x)$ will be called the direct problem.

In the inverse problem, it is required to determine the coefficient $a(t)$, $t > 0$, in (1) using overdetermination conditions about the solution of the direct problem (1)–(3):

$$u_x(0, t) = h(t), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

where $h(t)$ is a given function.

Let $u(x, t)$ be a classical solution to the problem (1)–(3), and let f , φ , and h be sufficiently smooth functions.

We perform the following transformation of the inverse problem (1)–(4). For this purpose, denote the second derivative of $u(x, t)$ with respect to x by $\vartheta(x, t)$, i.e., $\vartheta(x, t) := u_{xx}(x, t)$. Differentiating (1) and (2) twice with respect to x , we obtain

$$\partial_t^\alpha \vartheta - \vartheta_{xx} + a(t)\vartheta(x, t) = f_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (5)$$

and

$$\vartheta(x, 0) = \varphi''(x), \quad x \in [0, l]. \quad (6)$$

To obtain boundary conditions for the new function $\vartheta(x, t)$, we note that the second term in (1) is $\vartheta(x, t)$. Assume that $f(0, t) = f(l, t)$ and $f'(0, t) = f'(l, t)$. Then we have the following boundary conditions:

$$\vartheta(0, t) = \vartheta(l, t), \quad \vartheta_x(0, t) = \vartheta_x(l, t). \quad (7)$$

To obtain an additional condition for the function $\vartheta(x, t)$, we differentiate equation (1) with respect to x and, using the equality $u_{xx}(x, t) = \vartheta(x, t)$ together with condition (4), we obtain

$$\vartheta_x(0, t) = a(t)h(t) + \partial_t^\alpha h(t) - f_x(0, t). \quad (8)$$

Under the matching condition $\varphi'(0) = h(0)$, it is straightforward to deduce from (5)–(8) the equations (1)–(4).

We introduce the spaces

$$C^{2,\alpha}(D_T) := \{v(x, t) : v, v_x, v_{xx}, \partial_t^\alpha v \in C(D_T)\}$$

and

$$C^{1,0}(\overline{D_T}) := \{v(x, t) : v, v_x \in C(\overline{D_T})\}.$$

DEFINITION 1. The functions $\{u(x, t), a(t)\}$ from the class $C^{2,\alpha}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T}) \times C[0, T]$ are said to be a classical solution of problem (1)–(4) if the functions $u(x, t)$ and $a(t)$ satisfy the following conditions:

- (1) The function $u(x, t)$ and its derivatives $\partial_t^\alpha u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ are continuous in the domain D_T ;
- (2) The function $a(t)$ is continuous on the interval $[0, T]$;
- (3) Equation (1) and conditions (2)–(4) are satisfied in the classical sense.

Throughout this article, the functions φ , f , and h are assumed to satisfy the following conditions:

- (A1) $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$; $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, l)$; $\varphi(0) = \varphi(l)$; $\varphi'(0) = \varphi'(l)$;
 $\varphi''(0) = \varphi''(l)$; $\varphi^{(3)}(0) = \varphi^{(3)}(l)$; $\varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l)$;

- (A2) $f(x, t) \in C_{x,t}^{4,1}(\overline{D_T})$; $f_{xxxxx}^{(5)}(x, t) \in L_2(0, l)$; $f(0, t) = f(l, t)$; $f'_x(0, t) = f'_x(l, t)$; $f''_{xx}(0, t) = f''_{xx}(l, t)$; $f^{(3)}_{xxx}(0, t) = f^{(3)}_{xxx}(l, t)$; $f^{(4)}_{xxxx}(0, t) = f^{(4)}_{xxxx}(l, t)$;
 (A3) $h(t) \in C[0, T]$ and $|h(t)| \geq h_0 = \text{const} > 0$, where h_0 is a given number, and $\varphi'(0) = h(0)$.

In the next section, we recall basic definitions and notations from fractional calculus, which will be used in the subsequent analysis.

3. Preliminaries. Let us introduce the definition of the fractional derivative of Caputo.

DEFINITION 2 [29, pp. 90–94]. The Caputo time fractional derivative of order $0 < \alpha < 1$ of the integrable function u is defined by

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\partial_t^1 u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

where $\Gamma(\cdot)$ is Euler's Gamma function.

3.1. Two-Parameter Mittag–Leffler Function [29, pp. 40–42]. The two-parameter Mittag–Leffler function $E_{\alpha, \beta}(z)$ is defined by the following series:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

where $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ with $\Re(\alpha) > 0$, and $\Re(\alpha)$ denotes the real part of the complex number α .

Several important properties of the Mittag–Leffler function, which will be utilized in subsequent sections, are presented below.

PROPOSITION 1 [29, pp. 40–45]. Let $0 < \alpha < 2$ and $\beta \in \mathbb{R}$ be arbitrary. Suppose that κ is such that $\pi\alpha/2 < \kappa < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Then, there exists a constant $C = C(\alpha, \beta, \kappa) > 0$ such that

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{C}{1 + |z|}, \quad \kappa \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

PROPOSITION 2 [29, pp. 42–45]. For $0 < \alpha < 1$ and $\eta > 0$, we have

$$0 \leq E_{\alpha, \alpha}(-\eta) \leq \Gamma^{-1}(\alpha).$$

Moreover, $E_{\alpha, \alpha}(-\eta)$ is a monotonic decreasing function for $\eta > 0$.

We also require the following auxiliary results.

LEMMA 1 [30], [31, pp. 188–210]. Let $m(t) \in C[t_0, T]$ ($t_0 \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $T \leq +\infty$) and suppose that

$$m(t) \leq m_0 + \frac{L}{\Gamma(\gamma)} \int_{t_0}^t (t - s)^{\gamma-1} m(s) ds, \quad t \in [t_0, T].$$

Then, we have

$$m(t) \leq m_0 E_{\gamma,1}(L(t-t_0)^\gamma), \quad t \in [t_0, T],$$

where m_0 and L are nonnegative constants, and $\gamma \in (0, 1)$.

THEOREM 1 [29, pp. 135–144]. *The solution $T(t) \in AC[0, T]$ of the linear nonhomogeneous fractional problem*

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha T(t) + \lambda T(t) &= f(t), \quad \alpha \in (0, 1], \quad t \in (0, T], \quad \lambda > 0, \\ T(0) &= c, \end{aligned}$$

where $f \in L^1[0, T]$, is given by the integral expression

$$T(t) = c E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau.$$

These results will be employed throughout the article.

4. Direct Problem. The use of the Fourier method for solving problem (1)–(3) leads to the spectral problem for the operator given by the differential expression and boundary conditions

$$\begin{aligned} X_n''(x) + \lambda^2 X_n(x) &= 0, \quad x \in (0, l), \\ X_n(0) = X_n(l), \quad X_n'(0) = X_n'(l), \quad n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{9}$$

It is known [32] that the system of eigenfunctions

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \cos \lambda_2 x, \sin \lambda_2 x, \dots, \cos \lambda_n x, \sin \lambda_n x, \dots$$

where $\lambda_n = 2\pi n/l$, $n = 0, 1, \dots$, is the solution to the spectral problem (9) and forms an orthogonal basis of $L_2(0, l)$. Therefore, we shall seek the classical solution $u(x, t)$ of the problem (5)–(7) in the form

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_{1n}(t) \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_{2n}(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{2\pi n}{l}, \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned} \vartheta_{10}(t) &= \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l \vartheta(x, t) dx, \quad \vartheta_{1n}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \vartheta(x, t) \cos \lambda_n x dx, \\ \vartheta_{2n}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \vartheta(x, t) \sin \lambda_n x dx. \end{aligned}$$

Then, applying the formal scheme of the Fourier method for determining the unknown coefficients $\vartheta_{10}(t)$ and $\vartheta_{in}(t)$ ($i = 1, 2; n = 1, 2, \dots$) of the function $\vartheta(x, t)$ from (5) and (6), we obtain

$$\partial^\alpha \vartheta_{10}(t) = -a(t) \vartheta_{10}(t) + f_{10}(t), \tag{11}$$

$$\vartheta_{10}(t)|_{t=0} = \varphi_{10}, \tag{12}$$

$$\partial^\alpha \vartheta_{in}(t) + \lambda_n^2 \vartheta_{in}(t) = -a(t) \vartheta_{in}(t) + f_{in}(t), \tag{13}$$

$$\vartheta_{in}(t)|_{t=0} = \varphi_{in}, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

where

$$f_{10}(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^1 f''_{xx}(x, t) dx, \quad f_{1n}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f''_{xx}(x, t) \cos \lambda_n x dx,$$

$$f_{2n}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f''_{xx}(x, t) \sin \lambda_n x dx,$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^l \varphi''(x) dx, \quad \varphi_{1n} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi''(x) \cos \lambda_n x dx,$$

$$\varphi_{2n} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi''(x) \sin \lambda_n x dx.$$

According to Theorem 1, the solutions of problems (11), (12) and (13), (14) satisfy the following integral equations:

$$\vartheta_{10}(t) = \varphi_{10} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (f_{10}(\tau) - a(\tau)\vartheta_{10}(\tau)) d\tau, \quad (15)$$

and

$$\begin{aligned} \vartheta_{in}(t) &= \varphi_{in} E_{\alpha}(-\lambda^2 t^{\alpha}) + \\ &+ \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^2 (t - \tau)^{\alpha}) (f_{in}(\tau) - a(\tau)\vartheta_{in}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

These equations yield that

$$|\vartheta_{10}(t)| \leq |\varphi_{10}| + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| + \frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |\vartheta_{10}(\tau)| (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

$$|\vartheta_{in}(t)| \leq |\varphi_{in}| + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| + \frac{\|a\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda^2 (t - \tau)^{\alpha}) |\vartheta_{in}(\tau)| d\tau,$$

where $\|a\| = \max_{t \in [0, T]} |a(t)|$. Applying Gronwall's type inequality from Lemma 1 to the last relations leads to the following estimates:

$$|\vartheta_{10}(t)| \leq \left(|\varphi_{10}| + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| \right) E_{\alpha}(\|a\| t^{\alpha}), \quad (17)$$

$$|\vartheta_{in}(t)| \leq \left(|\varphi_{in}| + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| \right) E_{\alpha}(\|a\| t^{\alpha}). \quad (18)$$

Using equalities (11), (13) and (17), (18), we obtain estimates for $\partial^{\alpha} \vartheta_{10}(t)$ and $\partial^{\alpha} \vartheta_{in}(t)$:

$$|\partial^{\alpha} \vartheta_{10}(t)| \leq \|a\| \left(|\varphi_{10}| + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| \right) E_{\alpha}(\|a\| t^{\alpha}) + \|f_{10}\|,$$

$$|\partial^\alpha \vartheta_{in}(t)| \leq (\lambda^2 + \|a\|) \left(|\varphi_{in}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| \right) E_\alpha(\|a\|t^\alpha) + \|f_{in}\|.$$

Thus, we have proved the following lemma:

LEMMA 2. *For any $t \in [0, T]$, the following estimates are valid:*

$$|\vartheta_{10}(t)| \leq \left(|\varphi_{10}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| \right) E_\alpha(\|a\|t^\alpha),$$

$$|\vartheta_{in}(t)| \leq \left(|\varphi_{in}| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| \right) E_\alpha(\|a\|T^\alpha),$$

$$|\partial^\alpha \vartheta_{10}(t)| \leq \|a\| \left(|\varphi_{10}| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| \right) E_\alpha(\|a\|T^\alpha) + \|f_{10}\|,$$

$$|\partial^\alpha \vartheta_{in}(t)| \leq (\lambda^2 + \|a\|) \left(|\varphi_{in}| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| \right) E_\alpha(\|a\|T^\alpha) + \|f_{in}\|.$$

Formally, from (10) by term-by-term differentiation, we compose the series

$$\partial_{t,0+}^\alpha \vartheta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_{0+}^\alpha \vartheta_{1n}(t) \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \partial_{0+}^\alpha \vartheta_{2n}(t) \sin \lambda_n x, \quad (19)$$

$$\vartheta_{xx}(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 \vartheta_{1n}(t) \cos \lambda_n x - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \vartheta_{2n}(t) \sin \lambda_n x. \quad (20)$$

In view of Lemma 2, if the following series converges, then the series (10), (19), and (20) will converge for any $(x, t) \in D_T$:

$$C_4 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^2 |\varphi_{in}| + \lambda_n^2 \|f_{in}\|), \quad (21)$$

where the constant C_4 depends only on T , α , and $\|a\|$.

We now state the following auxiliary lemma:

LEMMA 3. *If conditions (A1) and (A2) are valid, then the following equalities hold:*

$$\varphi_{in} = \frac{1}{\lambda_n^3} \varphi_{in}^{(3)}, \quad f_{in}(t) = \frac{1}{\lambda_n^3} f_{in}^{(3)}, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

where

$$\varphi_{1n}^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx, \quad \varphi_{2n}^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(5)}(x) \cos \lambda_n x dx,$$

$$f_{1n}^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxxxx}^{(5)}(x, t) \sin \lambda_n x dx, \quad f_{2n}^{(3)}(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxxxx}^{(5)}(x, t) \cos \lambda_n x dx,$$

with the following estimate:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{in}^{(3)}|^2 \leq \|\varphi^{(3)}\|_{L_2(0,l)}^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |f_{in}^{(3)}(t)|^2 \leq \|f_{xxx}^{(3)}\|_{L_2(0,l) \times C[0,T]}^2, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

If the functions $\varphi(x)$ and $f(x, t)$ satisfy the conditions of Lemma 3, then due to representations (22) and (23), the series (10), (19), and (20) converge uniformly in the rectangle D_T . Therefore, the function $\vartheta(x, t)$ satisfies relations (5)-(7).

Using the above results, we obtain the following assertion:

LEMMA 4. *Let $a(t) \in C[0, T]$, and suppose that conditions (A1) and (A2) are satisfied. Then, there exists a unique solution to the direct problem (5)–(7) such that $\vartheta(x, t) \in C^{2,\alpha}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D}_T)$.*

Let us derive an estimate for the norm of the difference between the solution of the original integral equations (15), (16) and the solution of these equations with perturbed functions \tilde{a} , $\tilde{\varphi}_{in}$, and \tilde{f}_{in} . Let $\tilde{\vartheta}_{in}(t)$ ($i = 0, 1, 2$) be solutions of the integral equation (15), (16) corresponding to the functions \tilde{a} , $\tilde{\varphi}_{in}$, and \tilde{f}_{in} ; i.e.,

$$\tilde{\vartheta}_{10}(t) = \tilde{\varphi}_{10} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tilde{f}_{10}(\tau) - \tilde{a}(\tau)\tilde{\vartheta}_{10}(\tau)) d\tau, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta}_{in}(t) = & \tilde{\varphi}_{in} E_{\alpha}(-\lambda^2 t^{\alpha}) + \\ & + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2(t - \tau)^{\alpha}) (\tilde{a}(\tau)\tilde{\vartheta}_{in}(\tau) + \tilde{f}_{in}(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Composing the difference $\vartheta_{in} - \tilde{\vartheta}_{in}$ with the help of equations (15), (24), (16), and (25), and introducing the notations $\vartheta_{in} - \tilde{\vartheta}_{in} = \bar{\vartheta}_{in}$, $a - \tilde{a} = \bar{a}$, and $f_{in} - \tilde{f}_{in} = \bar{f}_{in}$, we obtain the integral equation

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{10}(t) = & \bar{\varphi}_{10} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \bar{f}_{10}(\tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\bar{a}(\tau)\vartheta_{10}(\tau) + \tilde{a}(\tau)\bar{\vartheta}_{10}(\tau)) d\tau; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{in}(t) = & \bar{\varphi}_{in} E_{\alpha,1}(-\lambda_n^2 t^{\alpha}) + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t - \tau)^{\alpha}) \bar{f}_{in}(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t - \tau)^{\alpha}) \bar{a}(\tau)\vartheta_{in}(\tau) d\tau - \\ & - \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n^2(t - \tau)^{\alpha}) \tilde{a}(\tau)\bar{\vartheta}_{in}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

From these, we derive the following linear integral inequalities for $|\bar{\vartheta}_{10}(t)|$ and $|\bar{\vartheta}_{in}(t)|$:

$$\begin{aligned} |\bar{\vartheta}_{10}(t)| \leq & |\bar{\varphi}_{10}| + \frac{t^{\alpha} \|\bar{f}_{10}\|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\|\bar{a}\| t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(|\varphi_{10}| + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| \right) E_{\alpha}(\|a\| t^{\alpha}) + \\ & + \frac{\|\tilde{a}\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |\bar{\vartheta}_{10}(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

$$|\bar{\vartheta}_{in}(t)| \leq |\bar{\varphi}_{in}| + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_{in}\|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\|\bar{a}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(|\varphi_{in}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| \right) E_\alpha(\|a\| t^\alpha) + \frac{\|\tilde{a}\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} |\bar{\vartheta}_{in}(\tau)| d\tau.$$

Using Lemma 1 from the last inequalities, we arrive at the following estimates:

$$|\bar{\vartheta}_{10}(t)| \leq \left\{ |\bar{\varphi}_{10}| + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_{10}\|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\|\bar{a}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(|\varphi_{10}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{10}\| \right) E_\alpha(\|a\| t^\alpha) \right\} E_\alpha(\|\tilde{a}\| t^\alpha), \quad (26)$$

$$|\bar{\vartheta}_{in}(t)| \leq \left\{ |\bar{\varphi}_{in}| + \frac{t^\alpha \|\bar{f}_{in}\|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\|\bar{a}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(|\varphi_{in}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{in}\| \right) E_\alpha(\|a\| t^\alpha) \right\} E_\alpha(\|\tilde{a}\| t^\alpha). \quad (27)$$

In the next section, we study the inverse problem, which involves determining the function $a(t)$ from relations (5)–(8) using the contraction mapping principle.

5. Solvability of the Inverse Problem. First, by differentiating (10) with respect to x , we obtain the following equality:

$$\vartheta_x(x, t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \vartheta_{1n}(t) \sin \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vartheta_{2n}(t) \cos \lambda_n x. \quad (28)$$

Setting $x = 0$ in (28) and using the additional condition (8), after straightforward manipulations, we obtain the following integral equation for determining $a(t)$:

$$a(t) = a_0(t) + \frac{1}{h(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vartheta_{2n}(t; a), \quad (29)$$

where

$$a_0(t) = \frac{1}{h(t)} (f_x(0, t) - \partial^\alpha h(t)),$$

and $\vartheta_{2n}(t; a)$ denotes that the solution of the integral equation (16) depends on $a(t)$.

The main result of this study is presented as follows:

THEOREM 2. *Let conditions (A1)–(A3) be satisfied. Then, there exists a number $T^* \in (0, T)$ such that the inverse problem (5)–(8) has a unique solution $a(t)$.*

Proof. We consider the operator equation

$$g = \Lambda[g], \quad (30)$$

where $g := a(t)$ is the unknown function, and Λ is defined by the right-hand side of (29):

$$\Lambda[g](t) = g_{01}(t) - \frac{1}{h(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} \vartheta_{2n}(t; g), \quad (31)$$

where

$$g_{01}(t) = \frac{1}{h(t)}(f_x(0, t) - \partial^\alpha h(t)).$$

Consider the functional space of vector functions $g \in C[0, T]$ with the norm given by

$$\|g\| = \max_{t \in [0, T]} |g(t)|.$$

Fix a number $\rho > 0$ and consider the ball

$$\Phi^T(g_0, \rho) := \{g : \|g - g_0\|_{C[0, T]} \leq \rho\}.$$

We will prove that for sufficiently small $T > 0$, the operator Λ maps the ball $\Phi^T(g_0, \rho)$ into itself. Using the estimates (17) and (18) for ϑ_{1n} and ϑ_{2n} , we obtain the following estimates:

$$\begin{aligned} \|\Lambda[g](t) - g_{01}(t)\| &\leq \frac{1}{h_0} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \vartheta_{2n}(T; g_1) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{h_0} E_\alpha(\|g\| T^\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(|\varphi_{2n}| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{2n}\| \right). \end{aligned}$$

According to Lemmas 1 and 2, the above series is convergent. Note that the functions occurring on the right-hand side of these inequalities are monotonically increasing with respect to T , and the fact that the function $g(t)$ belongs to the ball $\Phi^T(g_0, \rho)$ implies the inequality

$$\|g\| \leq \rho + \|g_0\|. \quad (32)$$

Therefore, we only strengthen the inequality if we replace $\|g\|$ in these inequalities with $\rho + \|g_0\|$. Performing these replacements, we obtain the estimate

$$\|\Lambda_1[g](t) - g_{01}(t)\| \leq \frac{1}{h_0} E_\alpha((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(|\varphi_{2n}| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{2n}\| \right).$$

Let T_1 be a positive root of the equation

$$m_1(T) = \frac{1}{h_0} E_{\alpha, 1}((\rho + \|g_0\|) T^\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(|\varphi_{2n}| + \frac{T^\alpha \|f_{2n}\|}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) = \rho.$$

Then, for $T \in [0, T_1]$, we have $\Lambda[g](t) \in \Phi^T(g_0, \rho)$.

Now consider two functions $g(t)$ and $\tilde{g}(t)$ belonging to $\Phi^T(g_0, \rho)$ and estimate the distance between their images $\Lambda[g](t)$ and $\Lambda[\tilde{g}](t)$ in the space $C[0, T]$. The function $\tilde{\vartheta}_{in}(t)$ corresponding to $\tilde{g}(t)$ satisfies the integral equation (24), (25) with the functions $\varphi_{2n} = \tilde{\varphi}_{2n}$ and $f_{2n} = \tilde{f}_{2n}$. Composing the difference $\Lambda[g](t) - \Lambda[\tilde{g}](t)$ with the help of equations (15), (16), (24), and (25), and then estimating its norm, we obtain

$$\begin{aligned} \|\Lambda[g](t) - \Lambda[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{1}{h_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \|\tilde{\vartheta}_{2n}(T; g)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{h_0} E_\alpha(\|\tilde{g}\| t^\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left\{ |\tilde{\varphi}_{2n}| + \frac{t^\alpha \|\tilde{f}_{2n}\|}{\Gamma(\alpha + 1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\|\tilde{g}\| t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(|\varphi_{2n}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f_{2n}\| \right) E_\alpha(\|g\| t^\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Using inequalities (17), (18), and the estimate (26) with $\varphi_{2n} = \tilde{\varphi}_{2n}$ and $f_n = \tilde{f}_n$, we continue the previous inequality as follows:

$$\begin{aligned} \|\Lambda[g](t) - \Lambda[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{1}{h_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \|\bar{\vartheta}_{2n}(T; g)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{h_0} E_\alpha(\|\tilde{g}\|t^\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{\|\tilde{g}\|t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_{2n}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_{2n}\| \right) E_\alpha(\|g\|t^\alpha). \end{aligned}$$

Since $g(t)$ and $\tilde{g}(t)$ belong to the ball $\Phi^T(g_0, \rho)$, the inequality (32) holds for these functions. Note that the functions on the right-hand side of inequality (30) are monotonically increasing with respect to $\|g\|$, $\|\tilde{g}\|$, and T . Consequently, replacing $\|g\|$ and $\|\tilde{g}\|$ in inequality (30) with $\rho + \|g_0\|$ will only strengthen the inequality. Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \|\Lambda[g](t) - \Lambda[\tilde{g}](t)\| &\leq \frac{1}{h_0} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \|\bar{\vartheta}_{2n}(T; g)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{h_0} (E_\alpha((\rho + \|g_0\|)t^\alpha))^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_{2n}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_{2n}\| \right) \|\tilde{g}\| \leq \\ &\leq m_2(T) \|\tilde{g}\|. \end{aligned}$$

Let T_2 be a positive root of the equation

$$\frac{1}{h_0} (E_\alpha((\rho + \|g_0\|)t^\alpha))^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(|\varphi_{2n}| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f_{2n}\| \right) = 1.$$

Then, for $T \in [0, T_2)$, the operator Λ contracts the distance between the elements $g(t)$ and $\tilde{g}(t) \in \Phi^T(g_0, \rho)$. Consequently, if we choose $T^* < \min(T_1, T_2)$, then the operator Λ is a contraction in the ball $\Phi^T(g_0, \rho)$. According to the Banach fixed-point theorem (see [33, p. 87–97]), the operator Λ has a unique fixed point in the ball $\Phi^T(g_0, \rho)$; that is, there exists a unique solution to equation (31). \square

Let T, l be fixed positive numbers. Consider the set $\Omega(\chi_0)$ (where $\chi_0 > 0$ is a fixed number) of given functions (φ, f, h) for which all conditions (A1)–(A3) are fulfilled, and

$$\max \left\{ \|\varphi\|_{C^4[0, T]}, \|h\|_{C^1[0, T]}, \|h^{-1}\|_{C[0, T]}, \|f\|_{C^{4,1}(\bar{D}_T)} \right\} \leq \chi_0.$$

We denote by $Q(\chi_1)$ the set of functions $a(t)$ that, for some $T > 0$ and $l > 0$, satisfy the following condition:

$$\|a\|_{C[0, T]} \leq \chi_1, \quad \chi_1 > 0.$$

THEOREM 3. *Let $(\varphi, f, h) \in \Omega(\chi_0)$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{h}) \in \Omega(\chi_0)$, and $a \in Q(\chi_1)$, $\tilde{a} \in Q(\chi_1)$. Then, for the solution of the inverse problem (1)–(4), the following stability estimate holds:*

$$\|a - \tilde{a}\|_{C[0, T]} \leq d(\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^4[0, l]} + \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,1}(\bar{D}_T)} + \|h - \tilde{h}\|_{C^1[0, T]}), \quad (33)$$

where the constant d depends only on T, l, χ_0, χ_1 .

Proof. To prove this theorem, using (29), we write down the equations for $\tilde{a}(t)$ and compose the difference $\bar{a}(t) = a(t) - \tilde{a}(t)$. Then, after evaluating this expression and using estimates (18) and (27), we obtain the following estimate:

$$\|a(t) - \tilde{a}(t)\| \leq d_0(\|\tilde{f}\| + \|\tilde{\varphi}\| + \|\tilde{h}\|) + d_1 \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} \|a(\tau) - \tilde{a}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [0, T],$$

where d_0 and d_1 depend only on $\chi_0, \chi_1, T, \alpha, \Gamma(\alpha)$. From (21), using Lemma 1, we obtain the estimate

$$\|a(t) - \tilde{a}(t)\| \leq d_0(\|\tilde{f}\| + \|\tilde{\varphi}\| + \|\tilde{h}\|)E_{\alpha,1}(d_1\Gamma(\alpha)t^\alpha), \quad t \in [0, T].$$

This inequality implies the estimate (33) if we set $d = d_0E_{\alpha,1}(d_1\Gamma(\alpha)t^\alpha)$. \square

Theorem 3 also implies the following assertion on the uniqueness of the solution to the inverse problem.

THEOREM 4. *Let the functions φ, f, h and $\tilde{\varphi}, \tilde{f}, \tilde{h}$ have the same meaning as in Theorem 3, and let conditions (A1)–(A3) be satisfied. Moreover, if $\varphi = \tilde{\varphi}, f = \tilde{f}$, and $h = \tilde{h}$ for $t \in [0, T]$, then $a(t) = \tilde{a}(t)$ for $t \in [0, T]$.*

Competing interests. The authors declare no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without external funding.

References

1. Agarwal R., Sharma U. P., Agarwal R. P. Bicomplex Mittag–Leffler function and associated properties, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 2022, vol. 15, no. 1, pp. 48–60, arXiv:2103.10324 [math.CV]. DOI: <https://doi.org/10.22436/jnsa.015.01.04>.
2. Haddouchi F., Guendouz C., Benaïcha S. Existence and multiplicity of positive solutions to a fourth-order multi-point boundary value problem, *Matemat. Vesn.*, 2021, vol. 73, no. 1, pp. 25–36, arXiv:1908.08598 [math.CA].
3. Sharma S. *Molecular Dynamics Simulation of Nanocomposites Using BIOVIA Materials Studio, Lammmps and Gromacs*. Amsterdam, Netherlands, Elsevier, 2019, xvi+349 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2017-0-04396-3>.
4. Baglan I. Determination of a coefficient in a quasilinear parabolic equation with periodic boundary condition, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2015, vol. 23, no. 5, pp. 884–900. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2014.947479>.
5. Kanca F. Inverse coefficient problem of the parabolic equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, no. 5, 659804. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/659804>.
6. Kanca F., Baglan I. An inverse coefficient problem for a quasilinear parabolic equation with nonlocal boundary conditions., *Bound. Value Probl.*, 2013, vol. 2013, 213. DOI: <https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-213>.
7. Kanca F. The inverse problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions, *J. Inequal. Appl.*, 2013, vol. 2013, 108. DOI: <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-108>.
8. Ivanchov N. I. Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition, *Ukr. Math. J.*, 1993, vol. 45, no. 8, pp. 1186–1192. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01070965>.
9. Ivanchov M. I., Pabyrivska N. Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions, *Ukr. Math. J.*, 2001, vol. 53, no. 5, pp. 674–684. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012570031242>.
10. Liao W., Dehghan M., Mohebbi A. Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, vol. 232, no. 2, pp. 351–360. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.06.017>.

11. Oussaeif T. E., Abdelfatah B. An inverse coefficient problem for a parabolic equation under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions, *Int. J. Part. Dif. Equ. Appl.*, 2014, vol. 2, no. 3, pp. 38–43. DOI: <https://doi.org/10.12691/ijpdea-2-3-1>.
12. Cannon J. R., Lin Y., Wang S. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation, *J. Aust. Math. Soc., Ser. B*, 1991, vol. 33, no. 2, pp. 149–163. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0334270000006962>.
13. Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B. Inverse time-dependent source problems for the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 346, pp. 800–815. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.10.059>.
14. Huzyk N. Nonlocal inverse problem for a parabolic equation with degeneration, *Ukr. Math. J.*, 2013, vol. 65, no. 6, pp. 847–863. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0822-6>.
15. Durdiev D. K., Jumaev J. J. Inverse coefficient problem for a time-fractional diffusion equation in the bounded domain, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 2, pp. 548–557. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223020130>.
16. Durdiev D. K., Rahmonov A. A., Bozorov Z. R. A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, vol. 44, no. 13, pp. 10753–10761. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7442>.
17. Ionkin N. I. Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Equ.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 204–211.
18. Subhonova Z. A., Rahmonov A. A. Problem of determining the time dependent coefficient in the fractional diffusion-wave equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 15, pp. 3747–3760. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222030209>.
19. Sultanov M. A., Durdiev D. K., Rahmonov A. A. Construction of an explicit solution of a time-fractional multidimensional differential equation, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 17, 2052. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9172052>.
20. Colombo F. An inverse problem for a parabolic integrodifferential model in the theory of combustion, *Phys. D*, 2007, vol. 236, no. 2, pp. 81–89. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.07.012>.
21. Durdiev D. K., Nuriddinov J. Z. Determination of a multidimensional kernel in some parabolic integro-differential equation, *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 117–127. EDN: RMPXU. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-1-117-127>.
22. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2022, vol. 45, no. 14, pp. 8374–8388. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7133>.
23. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of the integro-differential heat equation in a bounded domain, *Ukr. Math. J.*, 2022, vol. 73, no. 11, pp. 1723–1740. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02026-0>.
24. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Problem of determining a multidimensional thermal memory in a heat conductivity equation, *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 219–226.
25. Durdiev D. K., Zhumaev Zh. Zh. Problem of determining the thermal memory of a conducting medium, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 785–796. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120060117>.
26. Dyatlov G. V. Determination for the memory kernel from boundary measurements on a finite time interval, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2003, vol. 11, no. 1, pp. 59–66. DOI: <https://doi.org/10.1515/156939403322004937>.
27. Janno J., Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow, *Ill-Posed Probl.*, 1996, vol. 4, no. 1, pp. 39–66. DOI: <https://doi.org/10.1515/jiip.1996.4.1.39>.
28. Lorenzi A., Paparoni E. Direct and inverse problems in the theory of materials with memory, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1992, vol. 87, pp. 105–138.

29. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5).
30. Kang B., Koo N. A note on generalized singular Gronwall inequalities, *J. Chungcheong Math. Soc.*, 2018, vol. 31, no. 1, pp. 161–167. DOI: <https://doi.org/10.14403/jcms.2018.31.1.161>.
31. Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara Devi J. *Theory of Fractional Dynamic Systems*. Cambridge, Cambridge Scientific Publ., 2009, vi+170 pp.
32. Budak B. M., Samarskii A. A., Tikhonov A. N. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* [A collection of Problems on Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1979, 685 pp. (In Russian)
33. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1972, 496 pp. (In Russian)

УДК 517.968.7

Разрешимость задачи восстановления коэффициентов в дробно-временном уравнении диффузии с периодическими граничными и переопределенными условиями

Д. К. Дурдиев^{1,2}, Ж. Ж. Жумаев¹

¹ Бухарское отделение Института математики Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.

² Бухарский государственный университет, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. М. Икбол, 11.

Аннотация

Исследуется обратная задача для уравнений дробно-временной диффузии с периодическими граничными условиями и интегральными условиями переопределения на прямоугольной области. Сначала вводится определение классического решения задачи. Затем с использованием метода Фурье прямая задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Существование и единственность решения прямой задачи устанавливаются с помощью оценок для функции Миттаг–Леффлера и обобщенных сингулярных неравенств Гронвалля.

Во второй части работы рассматривается обратная задача, которая переформулируется в виде эквивалентного интегрального уравнения, а затем решается с использованием принципа сжимающих отображений. Строго доказываются локальное существование и глобальная единственность решения. Кроме того, получена оценка устойчивости решения.

Данное исследование вносит вклад в теорию обратных задач для дробных дифференциальных уравнений, предоставляя основу для анализа задач с периодическими граничными условиями и интегральными

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

©  Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Durdiev D. K., Jumayev J. J. Solvability of a coefficient recovery problem for a time-fractional diffusion equation with periodic boundary and overdetermination conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 21–36. EDN: YZQBWZ. DOI: 10.14498/vsgtu2083.

Сведения об авторах

Дурдимурод Каландарович Дурдиев  <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделением¹; профессор, каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

Жонибек Жамолович Жумаев  <https://orcid.org/0000-0001-8496-1092>

кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник¹; доцент, каф. дифференциальных уравнений²; e-mail: jonibekjj@mail.ru

условиями переопределения. Разработанные методы могут быть применены к широкому кругу задач в математической физике и инженерии, где дробно-временные модели диффузии все чаще используются для описания сложных явлений.

Ключевые слова: уравнение дробно-временной диффузии, периодические граничные условия, обратная задача, интегральное уравнение.

Получение: 15 февраля 2024 г. / Исправление: 19 ноября 2024 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 14 марта 2025 г.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.



УДК 517.958:531.32

Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей

Р. Р. Загитов, Ю. В. Юлмухаметова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова —
обособленное структурное подразделение УФИЦ РАН,
Россия, 450054, Уфа, проспект Октября, 71.

Аннотация

Предложена трехмерная газодинамическая модель идеальной несжимаемой жидкости, в которой решение ищется в виде линейного поля скоростей с неоднородной деформацией. Постановка задачи дана как в эйлеровых, так и в лагранжевых переменных. Найдены точные решения для специальной матрицы линейности, обобщающие известные ранее решения. Получены уравнения мировых линий для этих решений, построены траектории движения частиц жидкости и исследована эволюция начального сферического объема частиц. Приведены уравнения поверхностей постоянного давления и проанализирована их динамика во времени. Основное внимание уделено анализу движения частиц идеальной несжимаемой жидкости и получению новых, более общих решений.

Ключевые слова: линейное поле скоростей, газовая динамика, несжимаемая жидкость, неоднородная деформация, мировые линии, траектория.

Получение: 24 июля 2024 г. / Исправление: 6 ноября 2024 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 26 марта 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

📄 © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Загитов Р. Р., Юлмухаметова Ю. В. Гидродинамика идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 37–54. EDN: JTFDKW. DOI: 10.14498/vsgtu2104.

Сведения об авторах

Руслан Ринатович Загитов ✉ <https://orcid.org/0009-0003-5480-9366>
инженер-исследователь; лаб. дифференциальных уравнений механики;
e-mail: rr.zagitov.02@gmail.com

Юлия Валерьевна Юлмухаметова <https://orcid.org/0000-0002-5127-4584>
кандидат физико-математических наук, доцент; научный сотрудник; лаб. дифференциальных уравнений механики; e-mail: yulmuhametova.yuv@ugatu.su

Введение. Исследование газовой динамики частиц, скорости которых являются линейными функциями пространственных координат, тесно связано с изучением динамики жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов. Актуальность данной проблематики обусловлена ее значением для космогонии и астрофизики, в частности, важностью полученных результатов для теории фигур небесных тел. Эти исследования основываются на длительной истории изучения статических фигур равновесия, восходящей к «Началам» Ньютона и связанной с научным интересом к форме Земли. Существенный вклад в развитие теории эллипсоидальных фигур [1] как с физической, так и с математической точки зрения внесли Маклорен, Якоби, Дирихле [2, 3], Р. Дедекинд [4] и Б. Риман [5].

Значительный вклад в развитие этой теории внесли Л. В. Овсянников [6] и Ф. Дайсон [7]. Л. В. Овсянников исследовал частное решение уравнений газовой динамики, описывающее движение идеального политропного газа без учета гравитации с полем скоростей, линейно зависящим от координат частиц газа. Им были получены уравнения движения, указан ряд возможных случаев существования данного решения, а для двух случаев приведен неполный набор интегралов. Независимо от Л. В. Овсянникова Ф. Дайсон получил уравнения, описывающие движение облака идеального газа в случае изотермического течения. Кроме того, Ф. Дайсон установил связь полученного решения с задачей Дирихле и записал уравнения движения газового эллипсоида в римановой форме. Было получено специальное точное решение для диагональной матрицы линейности, описывающее свободное адиабатическое расширение эллипсоидального газового облака с фиксированной ориентацией. На основе асимптотических оценок показано, что облако, имеющее форму сигары, будет расширяться до диска.

Используя модель Ф. Дайсона [7], С. И. Анисимов и Ю. И. Лысиков [8] нашли три точных решения. Первое решение, полученное для диагональной матрицы линейности при совпадении двух ее элементов, полностью подтвердило выводы, сделанные в [7]. Остальные решения описывают двумерный разлет бесконечного вращающегося эллиптического цилиндра и разлет кругового цилиндра.

Точное решение в двумерном случае было рассмотрено В. В. Пухначевым [9]. Им получено решение, описывающее вращение жидкого круга вокруг центра с постоянной угловой скоростью. Показано, что малейшая начальная деформация поля скоростей приводит к разрушению полученного точного решения.

Интерес к проблематике, связанной с изучением движения самогравитирующего газа, сохраняется на протяжении длительного времени. В работе [10] исследованы сжимаемые и несжимаемые идеальные жидкости в трехмерном пространстве. Рассмотрено уравнение Эйлера со свободной границей в виде вакуума и аффинными начальными условиями, которые были приведены к гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений с глобальным решением. Изучена эволюция массы жидкости, описываемой семейством эллипсоидов, диаметры которых растут пропорционально времени. В статье [11] построен класс решений трехмерной системы Эйлера—Пуассона, глобальных по времени, без предположения о наличии каких-либо симметрий. В работе [12] исследуются двумерные уравнения течения сжимаемой

невязкой жидкости в осесимметричных координатах с уравнением состояния идеального газа при предположении линейной зависимости скорости от координат. Получено бесконечномерное семейство решений, описывающих эллиптические и гиперболические, равномерно расширяющиеся и сжимающиеся «газовые облака».

Решение с однородной деформацией появилось в статье [13] при исследовании динамики звезд. В работе [14] при рассмотрении инвариантных решений на четырехмерных подалгебрах, содержащих проективный оператор, были получены решения с линейным полем скоростей. Все эти решения, за исключением одного, характеризуются переменной энтропией. Движение частиц газа в целом построено для изоэнтропийного решения. Полученные решения имеют особенность плотности на постоянной или движущейся плоскости, которая является границей с вакуумом или стеной. Показано, что решение с линейным полем скоростей применимо при исследовании расширения в вакууме шара, заполненного двухфазной жидкостью. В предположении, что динамика протекает в обычном режиме, скорости фаз являются линейными функциями пространственных координат и первая фаза распространяется в пустоту быстрее второй, получено решение уравнений двухфазной гидродинамики, описывающее расширение шара в вакууме [15].

В настоящей работе исследуются неустановившиеся движения идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей при условии, что движение возникает из заданного начального состояния, а часть границы движущейся массы является «свободной», то есть не представляет собой твердую непроницаемую стенку, а определяется некоторым законом контактного взаимодействия с окружающей средой [16]. К задачам такого типа обращались Л. В. Овсянников [17], В. К. Андреев [18], В. И. Налимов [19, 20], В. В. Пухначев [9] и другие исследователи.

Настоящее исследование основывается на работе Л. В. Овсянникова [21], в которой дано компактное описание класса решений уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости с линейным полем скоростей и постоянным давлением на границе. Это решение интерпретируется как неустановившееся движение массы жидкости, ограниченной поверхностью второго порядка, возникающее под действием распределенного импульса. Л. В. Овсянниковым рассмотрены конкретные примеры движения данного класса.

Аналогичная задача рассмотрена в работе О. М. Лаврентьевой [22], однако с допущением, что поверхность постоянного давления содержит только квадратичные слагаемые. Это существенно отличает указанную работу от настоящего исследования, в котором показано влияние исключенных линейных слагаемых как на форму поверхности постоянного давления, так и на характер движения.

В данной работе рассматриваются более общие случаи нахождения точных решений уравнений газовой динамики для несжимаемой жидкости. Исследуются поведение свободной границы в различные моменты времени и эволюция движения выделенного объема частиц жидкости.

1. Постановка задачи и основные формулы. Рассматриваются уравнения движения идеальной несжимаемой жидкости ($\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$) [23], ограниченной областью $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p, \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями на границе $\Gamma(t)$ области $\Omega(t)$ [24]:

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_\Gamma = D_n, \quad \text{при } \vec{x} \in \Gamma(t), \quad (2)$$

$$p = p_0, \quad \text{при } \vec{x} \in \Gamma(t) \quad (3)$$

и начальным условием при $t = 0$:

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{v}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Область Ω и вектор-функция $\vec{v}_0(\vec{x})$ считаются заданными, причем Ω предполагается ограниченной.

Здесь $\vec{x} = (x, y, z)$ — координаты частицы в декартовой системе координат, $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ_0 — постоянная плотность жидкости, p — давление, t — время, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ — оператор градиента. В условии (2) D_n обозначает скорость перемещения поверхности $\Gamma(t)$ в направлении внешней нормали $\vec{n}_{\Gamma(t)}$.

Условие (2) означает, что поверхность $\Gamma(t)$ ограничивает жидкий объем $\Omega(t)$, а условие (3) указывает на отсутствие внешних поверхностных сил на границе, то есть ее свободный характер.

Решение системы (1) ищем в виде линейного поля скоростей:

$$\vec{u} = \vec{x}'_0 + M' M^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (5)$$

где $M(t)$ — невырожденная 3×3 -матрица ($\det M \neq 0$); M^{-1} — обратная матрица; M' — производная матрицы по времени; $\vec{x}_0(t) = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ — вектор-функция. При $\vec{x}_0 = 0$ получаем решение с однородной деформацией [10, 11], а при $\vec{x}_0 \neq 0$ — решение с неоднородной деформацией [25, 26].

Для определения области $\Omega(t)$ перейдем к лагранжевым координатам $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, в которых область фиксирована. Траектория частицы задается соотношением

$$\vec{x} = M(t)\vec{\xi} + \vec{x}_0(t), \quad (6)$$

где матрица M играет роль матрицы Якоби перехода к лагранжевым координатам.

В лагранжевых координатах система (1)–(4) принимает вид

$$M^\top \vec{x}_{tt} + \nabla_{\vec{\xi}} p = 0, \quad \det M = 1, \quad (7)$$

$$p = p_0, \quad \text{при } \vec{\xi} \in \Gamma, \quad (8)$$

$$\vec{x} = \vec{\xi}, \quad \vec{x}_t = \vec{v}_0(\vec{\xi}), \quad \text{при } t = 0, \quad (9)$$

где M^\top — транспонированная матрица, $\nabla_{\vec{\xi}}$ — градиент по лагранжевым переменным, p_0 — постоянная.

Из уравнений (7)–(9) получаем систему для матрицы M и вектора \vec{x}_0 [21]:

$$M'' = \varphi(t)(M^\top)^{-1}L, \quad (10)$$

$$\vec{x}_0''(t) = \varphi(t)(M^\top)^{-1}\vec{l}' \quad (11)$$

с начальными условиями

$$M(0) = E, \quad M'(0) = M'_0, \quad (12)$$

$$\vec{x}_0(0) = 0, \quad \vec{x}_0'(0) = \vec{a}, \quad (13)$$

где E — единичная матрица, L — постоянная матрица, \vec{l}' — постоянный вектор, M'_0 — постоянная матрица с $\text{tr } M'_0 = 0$, \vec{a} — постоянный вектор, а функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\text{tr}(M'M^{-1})^2}{\text{tr}(M^\top)^{-1}LM^{-1}}.$$

Давление в лагранжевых переменных выражается как

$$p = p_0 - \frac{\rho_0}{2}\varphi(t)(\vec{\xi} \cdot L\vec{\xi} + 2\vec{l}' \cdot \vec{\xi} + c),$$

а свободная поверхность Γ описывается уравнением

$$\vec{\xi} \cdot L\vec{\xi} + 2\vec{l}' \cdot \vec{\xi} + c = 0. \quad (14)$$

В эйлеровых координатах поверхность $\Gamma(t)$, ограничивающая $\Omega(t)$, принимает вид

$$\Gamma(t) : (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (M^\top)^{-1}LM^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_0) + 2\vec{l}' \cdot M^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_0) + c = 0, \quad (15)$$

а давление определяется выражением

$$p = p_0 - \frac{\rho_0}{2}\varphi(t)[(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot (M^\top)^{-1}LM^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_0) + 2\vec{l}' \cdot M^{-1}(\vec{x} - \vec{x}_0) + c].$$

В отличие от [21], в данной работе рассматриваются решения с ненулевыми начальными параметрами: $\vec{l}' = (l_1, l_2, l_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где $l_i, a_j \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$, а матрицы M и M'_0 заданы в виде

$$M = \begin{pmatrix} m(t) & 0 & 0 \\ 0 & m^{-1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M'_0 = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $b = \text{const}$. Заметим, что матрица M симметрична ($M^\top = M$).

Классификация решений проводится по виду свободной поверхности (14) при различных видах постоянной матрицы L .

2. Поверхность постоянного давления — параболический цилиндр.

Рассмотрим случай, когда матрица L имеет специальный вид

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

При таком выборе матрицы L уравнение свободной поверхности Γ в лагранжевых координатах принимает вид

$$\Gamma: (\eta + l_2)^2 = -2(l_1\xi + l_3\zeta + \tilde{C}),$$

что является поверхностью параболического цилиндра относительно плоскости Π :

$$\Pi: l_1\xi + l_3\zeta + \tilde{C} = 0,$$

где $\tilde{C} = -l_2/2 - R^2/2$.

Матричное дифференциальное уравнение (10) с матрицами (16) и (17) сводится к простому уравнению второго порядка $m''(t) = 0$, общее решение которого имеет вид $m(t) = bt + 1$.

Решение уравнения (11) с начальными условиями (13) дает вектор-функцию $\vec{x}_0(t)$:

$$\begin{cases} x_0(t) = \frac{l_1}{6(bt+1)^3} + \left(a_1 + \frac{bl_1}{2}\right)t - \frac{l_1}{6}, \\ y_0(t) = \frac{l_2}{bt+1} + (a_2 + bl_2)t - l_2, \\ z_0(t) = \frac{l_3}{3(bt+1)^2} + \left(a_3 + \frac{2bl_3}{3}\right)t - \frac{l_3}{3}. \end{cases}$$

Подставляя полученное выражение для $\vec{x}_0(t)$ в формулу (5), получаем компоненты вектора скорости жидкости:

$$\begin{cases} u = \frac{bx}{bt+1} - \frac{2bl_1}{3(bt+1)^4} - \left(a_1 + \frac{bl_1}{2}\right)\frac{bt}{bt+1} + \frac{bl_1}{6(bt+1)} + \left(a_1 + \frac{bl_1}{2}\right), \\ v = -\frac{by}{bt+1} + (a_2 + bl_2)\frac{bt}{bt+1} - \frac{bl_2}{bt+1} + (a_2 + bl_2), \\ w = -\frac{2bl_3}{3(bt+1)^3} + \left(a_3 + \frac{2bl_3}{3}\right). \end{cases} \quad (18)$$

Заметим, что при $\vec{l} = \vec{a} = 0$ решение (18) полностью согласуется с результатами, полученными в работе [21].

Учитывая инвариантность уравнений (1) относительно преобразований Галилея [23], мы можем упростить решение, выбрав систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью

$$\vec{C}^* = \left(a_1 + \frac{bl_1}{2}, a_2 + bl_2, a_3 + \frac{2bl_3}{3}\right).$$

В этой системе координат решение принимает более компактный вид:

$$\begin{cases} u = \frac{bx}{bt+1} - \frac{2bl_1}{3(bt+1)^4} + \frac{bl_1}{6(bt+1)}, \\ v = -\frac{by}{bt+1} - \frac{bl_2}{bt+1}, \\ w = -\frac{2bl_3}{3(bt+1)^3}. \end{cases} \quad (19)$$

2.1. Траектории частиц жидкости. Для определения траекторий отдельных частиц жидкости решим задачу Коши:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}, \quad \vec{x}|_{t=0} = \vec{\xi},$$

где $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ — лагранжевы координаты частицы. Решение этой задачи имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{l_1}{6(bt+1)^3} - \frac{l_1}{6} + \xi(bt+1), \\ y = -\frac{bl_2t}{bt+1} + \frac{\eta}{bt+1}, \\ z = \frac{l_3}{3(bt+1)^2} - \frac{l_3}{3} + \zeta. \end{cases}$$

Якобиан преобразования от лагранжевых к эйлеровым координатам равен определителю матрицы M :

$$J = \det M = \begin{vmatrix} bt+1 & 0 & 0 \\ 0 & (bt+1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

что гарантирует отсутствие особенностей в течении.

2.2. Анализ движения частиц. Изучим траектории движения частиц жидкости. На рис. 1 представлены три траектории движения частиц жидкости для различных значений лагранжевой координаты η . Видно, что все траектории частиц имеют гиперболический характер.

На рис. 2 изображены три траектории, наложенные друг на друга, однако одни траектории длиннее других ввиду разных значений параметра b . Это обусловлено тем, что скорость изменения функции $m(t)$ равна b , а значит, скорость изменения эйлеровых координат \vec{x} от лагранжевых $\vec{\xi}$ зависит от значения параметра b .

2.3. Эволюция поверхности постоянного давления. Проведем детальный анализ эволюции поверхности постоянного давления в различные моменты времени t .

Для рассматриваемого решения (19) поверхность постоянного давления, определяемая уравнением (15), принимает конкретный вид:

$$\Gamma(t): \left(y - \frac{l_2}{bt+1}\right)^2 = -\frac{2}{(bt+1)^2} \left(\frac{l_1x}{bt+1} + l_3z + \tilde{C}(t)\right). \quad (20)$$

Данное уравнение описывает параболический цилиндр, ориентация которого определяется сопряженной плоскостью $\Pi(t)$:

$$\Pi(t): \frac{l_1x}{bt+1} + l_3z + \tilde{C}(t) = 0,$$

где

$$\tilde{C}(t) = -\frac{l_1^2}{6(bt+1)^4} + \frac{l_1^2}{6(bt+1)} - \frac{l_3^2}{3(bt+1)^2} + \frac{l_3^2}{3} - \frac{l_2}{2} - \frac{R^2}{2}.$$

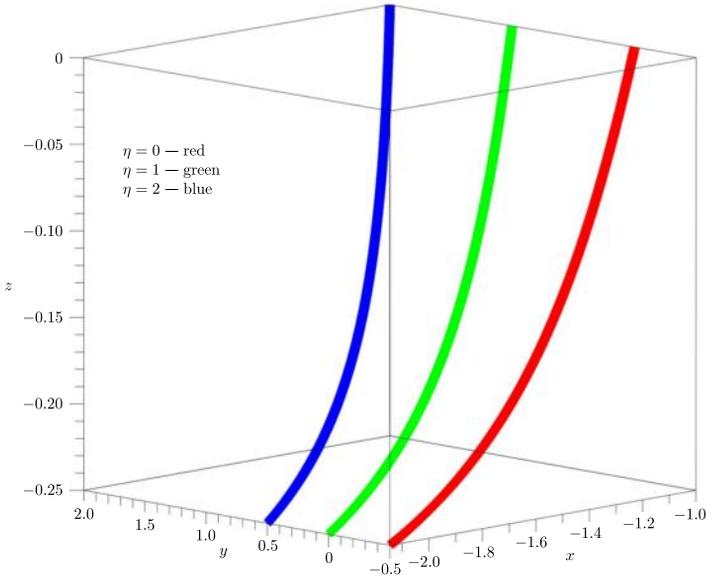


Рис. 1. Траектории частиц жидкости при различных значениях η ; $\xi = -1, \zeta = 0, b = 1, \vec{l} = (1, 1, 1)$ — фиксированные параметры
 [Figure 1. Fluid particle trajectories for various values of η with fixed parameters $\xi = -1, \zeta = 0, b = 1, \text{ and } \vec{l} = (1, 1, 1)$]

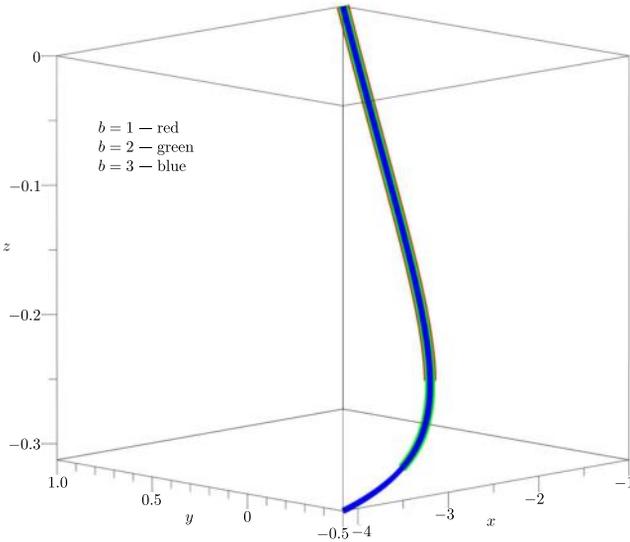


Рис. 2. Траектории частиц жидкости при различных значениях b ; $\vec{\xi} = (-1, 0, 1), \vec{l} = (1, 1, 1)$ — фиксированные параметры
 [Figure 2. Fluid particle trajectories for various values of b with fixed parameters $\vec{\xi} = (-1, 0, 1), \text{ and } \vec{l} = (1, 1, 1)$]

Рассмотрим вспомогательную плоскость, ортогональную $\Pi(t)$. В сечении с параболическим цилиндром (20) эта плоскость образует параболу с фокальным параметром $-(bt + 1)^{-2}$. Асимптотический анализ показывает, что при $t \rightarrow \infty$ фокальный параметр стремится к нулю, что соответствует сужению параболы вдоль оси Oy . При этом опорная плоскость $\Pi(t)$, задающая направление движения жидкой массы, асимптотически приближается к фиксированной плоскости:

$$2l_3 z = R^2 + l_2 - \frac{2l_3^2}{3}.$$

Эволюция поверхности постоянного давления для исследуемого решения в характерные моменты времени $t = 0; 2.5; 5$ представлена на рис. 3

2.4. Эволюция выделенного объема жидкости. Исследуем движение материального объема, состоящего из фиксированных частиц и первоначально ограниченного сферой радиуса R с центром в точке (x_{01}, y_{01}, z_{01}) при $t = 0$, задаваемой уравнением

$$F_0(x, y, z) = (x - x_{01})^2 + (y - y_{01})^2 + (z - z_{01})^2 - R^2 = 0.$$

Эволюция материальной поверхности описывается дифференциальным уравнением в частных производных [23]:

$$F_t + uF_x + vF_y + wF_z = 0, \quad F|_{t=0} = F_0,$$

где компоненты скорости u, v, w определяются соотношениями (19). Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F\left(\frac{x}{bt+1} - \frac{l_1}{6(bt+1)^4} + \frac{l_1}{6(bt+1)}, y(bt+1) + bl_2 t, z - \frac{l_3}{3(bt+1)^2} + \frac{l_3}{3}\right) = 0.$$

Учитывая начальное условие $F(\xi, \eta, \zeta) = F_0$, получаем, что материальный объем в произвольный момент времени t ограничен эллипсоидом:

$$\frac{(x - x_C(t))^2}{R^2(bt+1)^2} + \frac{(y - y_C(t))^2}{R^2/(bt+1)^2} + \frac{(z - z_C(t))^2}{R^2} = 1,$$

где координаты центра эллипсоида эволюционируют по закону

$$\begin{aligned} x_C(t) &= \frac{l_1}{6(bt+1)^3} - \frac{l_1}{6} + x_1(bt+1), \\ y_C(t) &= -\frac{bl_2 t}{bt+1} + \frac{y_1}{bt+1}, \\ z_C(t) &= \frac{l_3}{3(bt+1)^2} - \frac{l_3}{3} + z_1. \end{aligned}$$

Полуоси эллипсоида имеют значения $r_1 = R(bt+1)$, $r_2 = R/(bt+1)$, $r_3 = R$, демонстрируя анизотропное изменение геометрии объема. В начальный момент времени ($t = 0$) траектории частиц образуют сферу радиуса R с центром в точке (x_1, y_1, z_1) . Как видно из рис. 4, при $t > 0$ исходно сферический объем претерпевает существенную деформацию: происходит его «растекание»

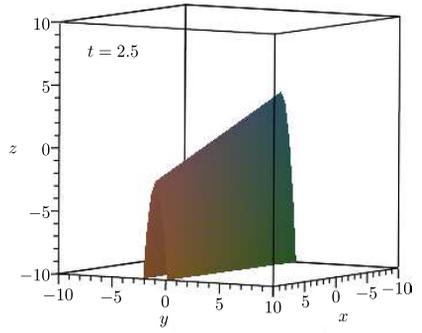
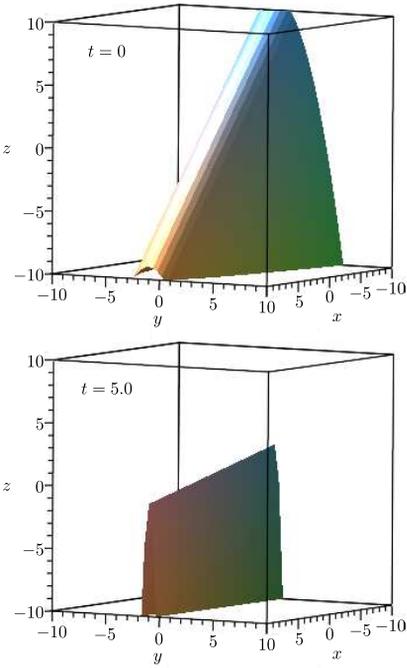


Рис. 3. Эволюция поверхности постоянно-го давления для исследуемого решения в характерные моменты времени $t = 0; 2.5; 5$

[Figure. 3. Temporal evolution of the constant-pressure surface for the investigated solution at representative time points $t = 0; 2.5; 5$]

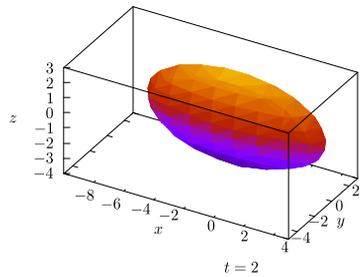
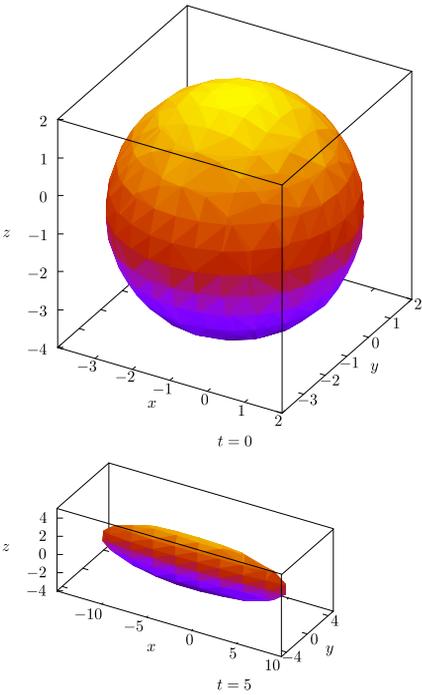


Рис. 4. Эволюция выделенного объема жидкости в характерные моменты времени $t = 0; 2; 5$

[Figure 4. Evolution of the selected fluid volume at representative time points $t = 0; 2; 5$]

вдоль оси Ox и одновременное сжатие по оси Oy , что приводит к формированию «блинообразной» конфигурации. Этот эффект обусловлен противоположным поведением полуосей: $r_2 \rightarrow 0$ и $r_1 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Важно отметить, что несмотря на сильную деформацию, конфигурация сохраняет свой первоначальный объем.

3. Поверхность постоянного давления — эллиптический параболоид. Рассмотрим матрицы M и M'_0 вида (16), а также матрицу L вида

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком выборе матриц свободная поверхность Γ описывается уравнением эллиптического параболоида:

$$(\xi + l_1)^2 + (\eta + l_2)^2 + 2l_3\zeta = R^2 + l_1 + l_2.$$

Для указанного набора матриц M , M'_0 и L система уравнений (10) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$m(m^4 + 1)m'' = 2m'^2. \quad (21)$$

С учетом начальных условий (12) данное уравнение допускает частное решение $m = 1$. Это означает, что рассматриваемое решение существует только при нулевом значении параметра $b = 0$. В этом случае матрица M принимает вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1. Траектории частиц жидкости. Для полученной матрицы M решение векторного дифференциального уравнения (11) с начальными условиями (13) имеет вид $\vec{x}_0 = \vec{a}t$. Подстановка $\vec{x}_0(t)$ в выражение (5) показывает, что вектор скорости остается постоянным:

$$\vec{u} = \vec{a}.$$

Уравнения мировых линий движения частиц жидкости в этом случае записываются так:

$$\vec{x} = t\vec{a} + \vec{\xi}.$$

Таким образом, траектории частиц жидкости представляют собой прямые линии в пространстве \mathbb{R}^3 .

3.2. Анализ движения частиц. Поверхность постоянного давления (15) для данного решения имеет вид

$$\Gamma(t): \frac{(x - ta_1 + l_1)^2}{R_1^2} + \frac{(y - ta_2 + l_2)^2}{R_1^2} + \frac{2l_3(z - ta_3)}{R_1^2} = 1,$$

где $R_1 = \sqrt{R^2 + l_1 + l_2}$ — радиус эллипса в сечении плоскостью $z - ta_3 = 0$.

Перейдем к анализу общего решения дифференциального уравнения (21). Функция $m(t)$ в этом случае задается неявным соотношением:

$$b\sqrt{2}t = \int_1^m \frac{\sqrt{s^4 + 1}}{s^2} ds. \quad (22)$$

Компоненты вектора скорости определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} u = l_1 m' + (a_1 - bl_1) + \frac{m'}{m}(x - x_0(t)), \\ v = -\frac{l_2 m'}{m} + (a_2 + bl_2) - \frac{m'}{m}(y - y_0(t)), \\ w = l_3 m m' - l_3 \int \frac{m^2}{\sqrt{m^4 + 1}} dm + C_1, \end{cases}$$

где функции $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} x_0(t) &= l_1 m + (a_1 - bl_1)t - l_1, \\ y_0(t) &= \frac{l_2}{m} + (a_2 + bl_2)t - l_2, \\ z_0(t) &= \frac{l_3 m^2}{2} - l_3 \iint \frac{m^2}{\sqrt{m^4 + 1}} dm dt + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Исследуем уравнения мировых линий движения частиц для данного решения. Уравнения (6) принимают вид

$$\begin{cases} x(t) = m\xi + x_0(t), \\ y(t) = \frac{\eta}{m} + y_0(t), \\ z(t) = \zeta + z_0(t). \end{cases} \quad (23)$$

Анализ траекторий частиц при $b > 0$ показывает, что из соотношения (22) следует $m(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, компонента $y(t)$ асимптотически приближается к $y_0(t)$, которая линейно зависит от времени.

Как видно из рис. 5, частицы начинают движение из точки с координатами $\vec{\xi}$, однако при $t \rightarrow \infty$ они асимптотически сближаются, не пересекаясь, что обусловлено условием $\det M \neq 0$.

3.3. Эволюция поверхности постоянного давления. Исследуем поведение поверхности постоянного давления в эйлеровых координатах. Для рассматриваемого решения поверхность $\Gamma(t)$ представляет собой эллиптический параболоид, вытянутый вдоль оси Oz :

$$\Gamma(t) : \frac{(x - x_0 + l_1 m)^2}{R_1^2 m^2} + \frac{(y - y_0 + l_2/m)^2}{R_1^2/m^2} + \frac{2l_3(z - z_0)}{R_1^2} = 1, \quad (24)$$

где $R_1 = \sqrt{R^2 + l_1 + l_2}$ — радиус эллипса в сечении плоскостью $z - z_0(t) = 0$, а полуоси эллипса имеют значения $r_1 = Rm$, $r_2 = R/m$.

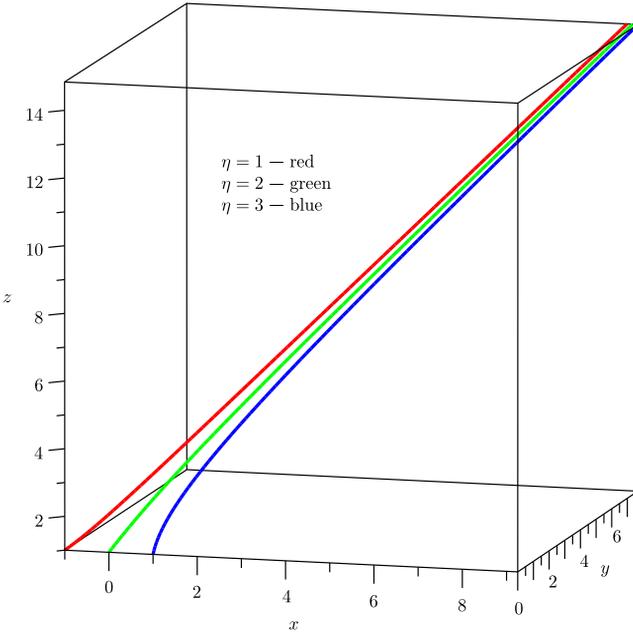


Рис. 5. Траектории движения частиц жидкости для системы (23) при различных значениях параметра η . Параметры $b = 1$, $\vec{l} = (1, 1, 1)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\xi = \zeta = 1$ фиксированы, временной интервал $t \in [0, 5]$
 [Figure 5. Fluid particle trajectories for the system (23) at varying parameter η . Fixed parameters: $b = 1$, $\vec{l} = (1, 1, 1)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\xi = \zeta = 1$, time interval $t \in [0, 5]$

Поскольку $m(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, полюсь r_1 стремится к бесконечности, а полюсь r_2 — к нулю. Это означает, что жидкость, ограниченная поверхностью (24), сжимается вдоль оси Oy и расширяется вдоль оси Ox .

3.4. Эволюция выделенного объема жидкости. Проанализируем эволюцию выделенного объема жидкости. Как показывают расчеты, материальный объем ограничен эллипсоидом:

$$\frac{(x - x_C(t))^2}{R^2 m^2} + \frac{(y - y_C(t))^2}{R^2 / m^2} + \frac{(z - z_C(t))^2}{R^2} = 1,$$

где координаты центра эллипсоида $x_C(t)$, $y_C(t)$, $z_C(t)$ в момент времени t определяются выражениями

$$\begin{aligned} x_C(t) &= l_1 m + (a_1 - b l_1) t - l_1 + x_1 m, \\ y_C(t) &= \frac{l_1}{m} + (a_2 + b l_2) t - l_2 + \frac{y_1}{m}, \\ z_C(t) &= z_0(t) + z_1, \end{aligned}$$

а точка (x_1, y_1, z_1) задает центр сферы в начальный момент времени. Полуоси эллипсоида имеют значения $r_1 = Rm$, $r_2 = R/m$, $r_3 = R$.

При $m(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) поведение полуосей эллипсоида полностью аналогично случаю параболического цилиндра в качестве поверхности постоянного давления (см. рис. 4).

Выводы. Проведенное исследование позволило получить следующие основные результаты.

1. Найдены и детально исследованы точные решения уравнений идеальной газовой динамики для несжимаемой жидкости, описывающие течение с линейным полем скоростей.
2. Для каждого класса решений:
 - получен явный вид поверхности постоянного давления;
 - выведены уравнения мировых линий движения частиц жидкости;
 - построены и проанализированы траектории частиц;
 - исследована эволюция выделенного объема жидкости во времени.
3. Установлены следующие факты:
 - поверхность постоянного давления может иметь форму как параболического цилиндра, так и эллиптического параболоида в зависимости от выбора параметров;
 - характер движения частиц существенно зависит от вида матрицы линейности;
 - выделенный объем жидкости претерпевает анизотропную деформацию с сохранением общего объема.

Полученные результаты могут быть использованы для верификации численных алгоритмов и дальнейшего развития теории точных решений в гидродинамике.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равнозначный вклад на всех этапах подготовки публикации: разработка концепции исследования; проведение расчетов и анализ результатов; подготовка и редактирование текста рукописи; утверждение окончательной версии статьи. Авторы несут совместную ответственность за содержание работы.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (номер проекта: 124030400064-2; FMRS-2024-0001).

Благодарность. Авторы выражают искреннюю признательность анонимным рецензентам за внимательное прочтение рукописи и конструктивные замечания, которые способствовали существенному улучшению качества публикации.

Библиографический список

1. Chandrasekhar S. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. New Haven, London: Yale Univ. Press, 1969. ix+252 pp.
2. Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik // *Nachrichten von der G. A. Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1857. vol. 14. pp. 205–207.
3. Dirichlet. G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik // *J. Reine Angew. Math.*, 1861. vol. 58. pp. 181–216. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1861.58.181>.
4. Dedekind R. Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung // *J. Reine Angew. Math.*, 1861. vol. 58. pp. 217–228. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1861.58.217>.
5. Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides // *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1861. vol. 9. pp. 3–36. <http://eudml.org/doc/135728>.

6. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики // *Докл. АН СССР*, 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
7. Dyson F. J. Dynamics of a spinning gas cloud // *J. Math. Mech.*, 1968. vol. 18. pp. 91–101.
8. Анисимов С. И., Лысыков Ю. И. О расширении газового облака в вакуум // *ПММ*, 1970. Т. 34, № 5. С. 926–929.
9. Пухначев В. В. О движении жидкого эллипса // *Динамика сплошной среды*, 1978. № 33. С. 68–75. EDN: ZESVMD.
10. Sideris T. C. Global existence and asymptotic behavior of affine motion of 3D ideal fluids surrounded by vacuum // *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 2017. vol. 225. pp. 141–176. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-017-1106-3>.
11. Hadžić M., Jang J. J. A class of global solutions to the Euler–Poisson system // *Commun. Math. Phys.*, 2019. vol. 370. pp. 475–505. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-019-03525-1>.
12. Giron J. F. Ramsey S. D. Baty R. S. Nemchinov–Dyson solutions of the two-dimensional axisymmetric inviscid compressible flow equations // *Phys. Fluids*, 2020. vol. 32, no. 12, 127116. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0032170>.
13. Hadžić M. Star dynamics: Collapse vs. expansion // *Quart. Appl. Math.*, 2023. vol. 81, no. 2. pp. 329–365. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/1638>.
14. Никонорова Р. Ф. Простые инвариантные решения уравнений динамики одноатомного газа // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2023. Т. 29, № 2. С. 115–132. EDN: NPCUMD. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-115-132>.
15. Panov A. V About regular expansion of a two-phase ball // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2023. vol. 166, 104824. EDN: IVDJLH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104824>.
16. Луговцов Б. А., Овсянников Л. В. Развитие гидромеханики в Сибирском отделении АН СССР // *ПМТФ*, 1987. Т. 28, № 4. С. 3–22. EDN: ZXDXTV.
17. Овсянников Л. В. Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами / *Динамика сплошной среды*: сб. науч. тр. Т. 338. Новосибирск, 1971. С. 22–26.
18. Андреев В. К. Вихревые возмущения неустановившегося движения жидкости со свободной границей // *ПМТФ*, 1975. Т. 16, № 5. С. 58–68.
19. Налимов В. И., Пухначев В. В. *Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей*. Новосибирск: НГУ, 1975. 173 с.
20. Налимов В. И. Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши–Пуассона // *Докл. АН СССР*, 1969. Т. 189, № 1. С. 45–48.
21. Овсянников Л. В. Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости / *Ученый совет по народнохозяйственному использованию взрыва Сибирского отделения Академии наук*: труды 5-й сессии. Фрунзе: Илим, 1965. С. 34–42.
22. Лаврентьева О. М. Об одном классе движений жидкого эллипсоида // *ПМТФ*, 1984. Т. 25, № 4. С. 148–153.
23. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М., Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 336 с. EDN: QJPLMV.
24. Андреев В. К., Пухначев В. В. О движении конечной массы жидкости // *ПМТФ*, 1979. Т. 20, № 2. С. 25–43. EDN: ZRGGDR.
25. Гумеров И. И., Каташова А. А., Юлмухаметова Ю. В. Коллапсирующие движения двухатомного газа, плотность которого зависит только от времени // *Многофазные системы*, 2023. Т. 18, № 1. С. 9–16. EDN: CEHSLW. DOI: <https://doi.org/10.21662/mfs2023.1.002>.
26. Уразбахтина Л. З., Юлмухаметова Ю. В. Плоский коллапс газа с линейным полем скоростей // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2023. Т. 29, № 2. С. 207–216. EDN: DYBGCR. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-207-216>.

MSC: 76B99, 76A02, 37N10

Hydrodynamics of an ideal incompressible fluid with a linear velocity field

R. R. Zagitov, Y. V. Yulmukhametova

Mavlyutov Institute of Mechanics,
Ufa Centre of the Russian Academy of Sciences,
71, Oktabrya pr., Ufa, 450054, Russian Federation.

Abstract

In this study, a three-dimensional gas-dynamic model of an ideal incompressible fluid is proposed, where the solution is sought in the form of a linear velocity field with inhomogeneous deformation. The problem is formulated in both Eulerian and Lagrangian variables. Exact solutions are obtained for a special linearity matrix, generalizing previously known solutions. The equations of world lines for these solutions are derived, the trajectories of fluid particle motion are constructed, and the evolution of the initial spherical particle volume is investigated. The equations of constant pressure surfaces are presented and their time dynamics is analyzed. Special attention is paid to the analysis of particle motion in an ideal incompressible fluid and to obtaining new, more general solutions.

Keywords: linear velocity field, gas dynamics, incompressible fluid, inhomogeneous deformation, world lines, trajectory.

Received: 24th July, 2024 / Revised: 6th November, 2024 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 26th March, 2025

Competing interests. The authors declare no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to all stages of this publication: research conceptualization; calculations and results analysis; manuscript preparation and editing; final version approval. The authors share collective responsibility for the work content.

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zagitov R. R., Yulmukhametova Y. V. Hydrodynamics of an ideal incompressible fluid with a linear velocity field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 37–54. EDN: JTFDKW. DOI: 10.14498/vsgtu2104 (In Russian).

Authors' Details:

Ruslan R. Zagitov  <https://orcid.org/0009-0003-5480-9366>

Research Engineer; Lab. of Differential Equations of Mechanics;

e-mail: rr.zagitov.02@gmail.com

Yulia V. Yulmukhametova  <https://orcid.org/0000-0002-5127-4584>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Researcher; Lab. of Differential Equations of Mechanics; e-mail: yulmuhametova.yuv@ugatu.su

Funding. This research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment no. 124030400064-2; FMRS-2024-0001).

Acknowledgments. The authors sincerely appreciate the anonymous reviewers for their thorough reading of the manuscript and constructive comments that significantly improved the publication quality.

References

1. Chandrasekhar S. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. New Haven, London, Yale Univ. Press, 1969, ix+252 pp.
2. Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, *Nachrichten von der G. A. Universität und der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1857, vol. 14, pp. 205–207.
3. Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, *J. Reine Angew. Math.*, 1861, vol. 58, pp. 181–216. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1861.58.181>.
4. Dedekind R. Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung, *J. Reine Angew. Math.*, 1861, vol. 58, pp. 217–228. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1861.58.217>.
5. Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1861, vol. 9, pp. 3–36. <http://eudml.org/doc/135728>.
6. Ovsyannikov L. V. A new solution of the hydrodynamic equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol. 111, no. 1, pp. 47–49 (In Russian).
7. Dyson F. J. Dynamics of a spinning gas cloud, *J. Math. Mech.*, 1968, vol. 18, pp. 91–101.
8. Anisimov S. I., Lysikov Yu. I. Expansion of a gas cloud in vacuum, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 5, pp. 882–885. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90070-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90070-5).
9. Pukhnachev V. V. On the motion of a liquid ellipse, *Dinamika Sploshnoi Sredy*, 1978, no. 33, pp. 68–75 (In Russian). EDN: ZESVMD.
10. Sideris T. C. Global existence and asymptotic behavior of affine motion of 3D ideal fluids surrounded by vacuum, *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 2017, vol. 225, pp. 141–176. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-017-1106-3>.
11. Hadžić M., Jang J. J. A class of global solutions to the Euler–Poisson system, *Commun. Math. Phys.*, 2019, vol. 370, pp. 475–505. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-019-03525-1>.
12. Giron J. F., Ramsey S. D., Baty R. S. Nemchinov–Dyson solutions of the two-dimensional axisymmetric inviscid compressible flow equations, *Phys. Fluids*, 2020, vol. 32, no. 12, 127116. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0032170>.
13. Hadžić M. Star dynamics: Collapse vs. expansion, *Quart. Appl. Math.*, 2023, vol. 81, no. 2, pp. 329–365. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/1638>.
14. Nikonorova R. F. Simple invariant solutions of the dynamic equation for a monatomic gas, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321 (suppl. 1), pp. S186–S203. EDN: DTG0IQ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543823030161>.
15. Panov A. V. About regular expansion of a two-phase ball, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2023, vol. 166, 104824. EDN: IVDJLH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104824>.
16. Lugovtsov B. A., Ovsyannikov L. V. Development of hydrodynamics at the Siberian Branch, Academy of Sciences of the USSR, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1987, vol. 28, no. 4, pp. 473–491. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00916730>.
17. Ovsyannikov L. V. The plane problem of unsteady fluid motion with free boundaries, In: *Dinamika sploshnoi sredy* [Dynamics of Continuous Medium], Collection of Scientific Papers, vol. 338. Novosibirsk, 1971, pp. 22–26 (In Russian).
18. Andreev V. K. Vortex perturbations of the nonstationary motion of a liquid with a free boundary, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 713–723. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00854081>.

19. Nalimov V. I., Pukhnachev V. V. *Neustanovivshiesia dvizheniia ideal'noi zhidkosti so svobodnoi granitsei* [Unsteady Motions of Ideal Fluid with Free Boundary]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1975, 173 pp. (In Russian)
20. Nalimov V. I. A priori estimates of solutions of elliptic equations in the class of analytic functions, and their applications to the Cauchy–Poisson problem, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1969, vol. 189, no. 1, pp. 45–48 (In Russian).
21. Ovsyannikov L. V. On a class of unsteady motions of an incompressible fluid, In: *Scientific Council on National Economic Applications of Explosion, Siberian Branch of the Academy of Sciences*, Proceedings of the 5th Session. Frunze, Ilim, 1965, pp. 34–42 (In Russian).
22. Lavrent'eva O. M. One class of motions of a fluid ellipsoid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1984, vol. 25, no. 4, pp. 642–648. EDN: JJZCBW. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00910007>.
23. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on Basic Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Studies, 2003, 336 pp. (In Russian). EDN: QJPLMV.
24. Andreev V. K., Pukhnachev V. V. Motion of a finite mass of fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1979, vol. 20, no. 2, pp. 144–157. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00910013>.
25. Gumerov I. I., Katashova A. A., Yulmukhametova Yu. V. Collapsing motions of a diatomic gas whose density depends only on time, *Multiphase Systems*, 2023, vol. 18, no. 1, pp. 9–16 (In Russian). EDN: CEHSLW. DOI: <https://doi.org/10.21662/mfs2023.1.002>.
26. Urazbakhitina L. Z., Yulmukhametova Yu. V. A planar collapse of a gas with a linear velocity field, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 207–216 (In Russian). EDN: DYBGCR. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-207-216>.



УДК 517.958:539.3

Устойчивость слоистых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью

С. А. Бочкарёв

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614068, Пермь, ул. Акад. Королева, 1.

Аннотация

Представлены результаты исследования устойчивости круговых вертикальных слоистых цилиндрических оболочек, полностью заполненных неподвижной сжимаемой жидкостью, под воздействием гидростатической и внешней статической нагрузок. Поведение упругой конструкции и жидкой среды описано в рамках классической теории оболочек и уравнений Эйлера. Линеаризованные уравнения движения оболочки совместно с соответствующими геометрическими и физическими соотношениями сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Акустическое волновое уравнение преобразовано к системе дифференциальных уравнений с использованием метода обобщенных дифференциальных квадратур. Решение сформулированной краевой задачи выполнено методом ортогональной прогонки Годунова и сведено к вычислению собственных частот колебаний. Для этой цели использовано сочетание пошаговой процедуры с последующим уточнением методом Мюллера. Достоверность полученных результатов подтверждена сравнением с известными численными решениями. Детально проанализированы зависимости критического внешнего давления от угла армирования для свободно опертых, жестко закрепленных и консольных двухслойных и трехслойных цилиндрических оболочек. Оценено влияние комбинированного статического давления на оптимальные углы армирования, обеспечивающие повышение границ устойчивости.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, сжимаемая жидкость, слоистый материал, гидростатическое давление, предварительное нагружение, метод ортогональной прогонки Годунова, метод обобщенных дифференциальных квадратур, устойчивость.

Получение: 1 октября 2024 г. / Исправление: 16 декабря 2024 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 4 марта 2025 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

📄 ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бочкарёв С. А. Устойчивость слоистых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 55–76. EDN: SEUNGG. DOI: 10.14498/vsgtu2117.

Сведения об авторе

Сергей Аркадьевич Бочкарёв <https://orcid.org/0000-0002-9722-1269>
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаборатория механики функциональных материалов; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Введение. Элементы конструкций на основе пластин и оболочек, в том числе содержащих жидкость или погруженных в нее, эксплуатируются в условиях интенсивных внешних воздействий различной природы. Механические, температурные и центробежные нагрузки, а также статические составляющие аэро- и гидродинамического давления оказывают существенное влияние на поведение упругих тел, изменяя их динамические характеристики; чрезмерные значения некоторых из них могут инициировать статическую потерю устойчивости тонкостенного тела. Известно [1, 2], что применение современных материалов, в том числе слоистых композитов, позволяет повысить порог устойчивости конструкций. Корректное математическое описание воздействия внешних усилий требует привлечения геометрически нелинейных соотношений, учитывающих изменение исходных параметров в результате нагружения. Решение таких задач связано с известными трудностями, но может быть сведено к линеаризованной постановке, если изучение особенностей протекающих нелинейных процессов не является целью исследования. Полученные в этом случае уравнения, сформулированные в окрестности исходного состояния, позволяют учитывать начальное напряженное (в общем случае напряженно-деформированное) состояние, определяемое из решения линейной статической задачи или из аналитических формул.

Аналізу тонкостенных конструкций, полностью или частично заполненных жидкостью и выполненных из слоистых композиционных материалов, посвящено незначительное количество публикаций. Из процитированных в библиографических обзорах [3, 4] работ следует, что в этих исследованиях с привлечением различных численных или численно-аналитических методов изучено влияние угла армирования на динамическое поведение поперечно и перекрестно армированных многослойных оболочек, имеющих различные граничные условия.

Количество публикаций, направленных на изучение предварительно нагруженных круговых оболочек, содержащих неподвижную или текущую жидкость, также незначительно [5–19]. В этих работах, выполненных в линеаризованной постановке, проанализировано влияние механических (гидростатическое давление, осевая сила) или температурных нагрузок на частотный спектр или критические параметры потери устойчивости одиночных (цилиндрических, эллиптических) оболочек. Исследование влияния осевого сжимающего усилия и внешнего давления на частоты колебаний и скорости потери устойчивости изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек на основе метода конечных элементов представлено в работах [5–7]. Воздействие температуры на частоты и скорости потока жидкости, текущей внутри жестко закрепленной однослойной оболочки, оценено в [8] при различных углах намотки с помощью метода конечных элементов (МКЭ). В работе [9] в рамках МКЭ проанализирован вклад гидростатического давления в изменение критических скоростей дивергенции и флаттера для оболочек с разными граничными условиями. Изменение динамического отклика функционально-градиентной (ФГ) оболочки с текущей жидкостью при различных значениях осевой силы и тепловой нагрузки изучено в работе [10] с использованием методов модальной суперпозиции и Ньюмарка. Новые аналитические методы, основанные на методах распространяющихся волн или передаточных матриц, предложены в статьях [11, 12] для предсказания критического гидростатиче-

ского давления, действующего на погруженные в жидкость цилиндрические или эллиптические стальные оболочки с различными комбинациями граничных условий. Зависимости минимальных частот колебаний эллиптической оболочки от величины внешнего статического давления изучены в [13] с учетом гидростатического давления на смоченной поверхности при различных параметрах эллиптичности и уровнях неподвижной жидкости в рамках трехмерной реализации МКЭ. Влияние температуры на динамическое поведение цилиндрических оболочек, выполненных из ФГ материала, взаимодействующих с неподвижной или текущей жидкостью, исследовано в [14] с помощью полуаналитического варианта МКЭ. На основе метода распространяющихся волн в [15, 16] предложен направленный на повышение устойчивости эффективный метод анализа погруженных в жидкость ФГ оболочек, нагруженных внешним гидростатическим давлением. В работе [17] представлены экспериментальные и численные (3D МКЭ) исследования гибких трубок, которые нагружены осевой силой с целью предотвращения биения при внутреннем течении жидкости. Изучение собственных колебаний перекрестно армированных оболочек, частично заполненных жидкостью и учитывающих влияние гидростатического давления, обусловленного гравитационными силами, осуществлено в [18] методом ортогональной прогонки Годунова. С помощью метода распространяющихся волн виброакустические характеристики собственных и вынужденных колебаний поперечно и перекрестно армированных оболочек, полностью заполненных жидкостью, исследованы в [19] с учетом внешнего гидростатического давления.

Если в некоторых из перечисленных исследований, учитывающих предварительное нагружение, не акцентируется внимание на вклад, приносимый жидкостью в изменение границ устойчивости, то в других отмечается, что предельные значения статических нагрузок строго соответствуют тем значениям, которые получены для пустых оболочек. Влияние столба жидкости на критические параметры устойчивости может быть учтено за счет изменения напряженно-деформированного состояния смоченной поверхности упругого тела благодаря воздействию гидростатического давления, инициированного гравитационными силами. Такой подход наряду с учетом эффектов на свободной поверхности жидкости используется, как правило, при анализе частично заполненных оболочек [20–30]. Среди указанных публикаций имеются такие, в которых исследования осуществлены в рамках предложенной в работе [20] постановки, суть которой состоит в том, что работа гидростатического давления, совершаемая на смоченной поверхности, должна учитывать и деформацию этой поверхности, происходящую вследствие ее колебаний. Для большинства конфигураций благодаря линейным размерам или физико-механическим свойствам материала принятие гидростатической нагрузки в виде «следящей», как и учет эффектов волнообразования на свободной поверхности, приносит незначительные изменения в частоты колебаний или критические параметры внешней нагрузки и может быть исключено из рассмотрения [18, 21, 31].

Среди вышеупомянутых публикаций только в статьях [18, 19] представлены результаты исследований предварительно нагруженных слоистых оболочек, полностью или частично заполненных жидкостью. В этих работах изучено изменение собственных частот колебаний при учете либо внешней стати-

ческой нагрузки, либо гидростатического давления, обусловленного гравитационными силами и действующего на смоченной поверхности. Учет одновременного воздействия статической нагрузки различной природы на критические параметры устойчивости композитных оболочек с разными вариантами укладки и углами армирования в литературе не представлен. Выполнение такого анализа является целью настоящей работы.

Численное решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова [32]. При его использовании для конструкций, взаимодействующих с жидкостью, наиболее универсальным является подход, в котором системы обыкновенных дифференциальных уравнений для упругого тела и жидкости решаются совместно. Преобразование дифференциальных уравнений, описывающих поведение идеальной сжимаемой жидкости, к нормальному виду Коши может осуществляться различными методами [33–37], среди которых метод обобщенных дифференциальных квадратур [38] обеспечивает более высокую вычислительную эффективность и поэтому будет использован в настоящей работе.

1. Постановка задачи. Рассматривается вертикально ориентированная упругая слоистая цилиндрическая оболочка вращения (рис. 1) длиной L , радиусом R и толщиной h , полностью заполненная идеальной сжимаемой жидкостью. Тонкостенное тело, изготовленное из однонаправленного материала, слои которого ориентированы под углами $-\alpha$ и $+\alpha$ относительно меридиональной координаты, подвергается воздействию внешнего равномерного статического давления P , положительное направление которого совпадает с нормалью к внешней поверхности. Рассматриваются пакеты, состоящие из двух $[\alpha/-\alpha]$ или трех $[\alpha/0^\circ/-\alpha]$ слоев. На смоченной поверхности учитывается изменение напряженно-деформированного состояния тела, обусловленное воздействием гидростатических сил p_g , инициированных гравитацией. Необходимо проанализировать влияние угла армирования α для двух вариантов укладки слоистого композиционного материала на критические значения внешнего давления P при различных комбинациях граничных условий, задаваемых на краях упругого тела.

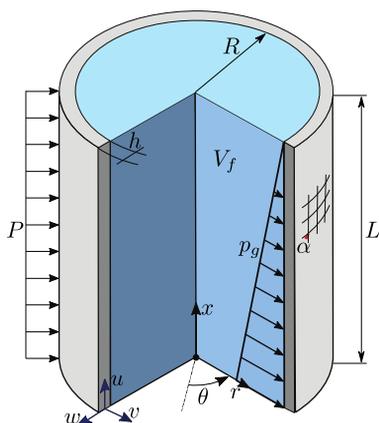


Рис. 1. Расчетная схема нагруженной композитной цилиндрической оболочки с жидкостью

[Figure 1. Computational scheme of the loaded composite cylindrical shell with fluid]

2. Основные соотношения и метод решения. В процитированных выше публикациях описание слоистого упругого тела строится с использованием классической теории тонких оболочек или различных вариантов уточненных теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига. Последние используют, как правило, при моделировании толстостенных оболочек или в случае высокой степени ортотропии однонаправленного материала. В настоящей работе будут рассмотрены тонкостенные ($R/h > 800$) оболочки, выполненные из трансверсально-изотропного материала, поведение которых описывается в рамках классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява. В рамках этой теории компоненты тензора деформаций E_{ij} записываются в криволинейной системе координат (s, θ, z) в виде [39]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial s}, & \kappa_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta}, & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \right), \\ \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s}, & \theta_2 &= \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v и w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки; θ_i — углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^\top$ и вектором обобщенных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^\top$, в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей \mathbf{D} , определяются по формулам

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij}(\alpha) dz, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

а компоненты матрицы $\bar{Q}_{ij}(\alpha)$ вычисляются известным способом [40] в результате изменения свойств однонаправленного материала при повороте системы координат на угол α .

Нелинейные уравнения движения оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(Q_{22} + \frac{\partial H}{\partial s} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p &= 0, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} - Q_{11} - T_{11} \theta_1 - S \theta_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - Q_{22} - T_{22}\theta_1 - S\theta_1 = 0,$$

где Q_{ii} — поперечные силы; $\rho_0 = \int_h \rho dz$; ρ — плотность материала; p — гидродинамическое давление, которое в области V_f описывается акустическим волновым уравнением [41]:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Здесь c — скорость звука в жидкости. На смоченной ($r = R$) поверхности, оси вращения оболочки ($r = 0$), нижнем ($x = 0$) и верхнем ($x = L$) краях давление p удовлетворяет следующим условиям:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=R} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=0} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{n} — единичные внешние нормали к области жидкости V_f ; ρ_f — плотность жидкости. Равенство нулю градиента давления в условии (7) характеризует взаимодействие жидкости с жесткой поверхностью.

Раскладывая все компоненты уравнений (1), (2), (4) в ряды Фурье по окружной координате θ :

$$X(x, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j(x) \cos j\theta, \quad Y(x, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(x) \sin j\theta,$$

$$X = \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\}, \\ Y = \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}\},$$

сведем геометрические (1) и физические (2) соотношения, а также уравнения движения (3) к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных [39]:

$$y_1 = T_{11}, \quad y_2 = S + 2H/R, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + \bar{j}H, \\ y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1.$$

Здесь j — номер гармоники при разложении в ряд Фурье, $\bar{j} = j/R$. С учетом этого и принимая во внимание $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$, получим искомую линеаризованную систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}). \quad (8)$$

Здесь ω — частота колебаний, $i^2 = -1$. Компоненты вектора \mathbf{f} определяются следующим образом:

$$f_1 = \bar{j}(2H/R - y_2) - \omega^2 \rho_0 y_5, \quad f_2 = \bar{j}T_{22} - Q_{22}/R - \omega^2 \rho_0 y_6,$$

$$\begin{aligned} f_3 &= y_4 - 2\bar{j}H + T_{11}^0 y_8 - y_1 \theta_1^0, & f_4 &= T_{22}/R - \bar{j}Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_7 - p, \\ f_5 &= \varepsilon_{11} - \theta_1^0 y_8, & f_6 &= \varepsilon_{12} + \bar{j}y_5 - \theta_1^0 \theta_2, & f_7 &= -y_8, & f_8 &= \kappa_{11}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \bar{j}y_6 + y_7/R, & \kappa_{22} &= \bar{j}\theta_2, & \theta_2 &= y_6/R - \bar{j}y_7, & \varpi &= a_{11}c_{11} - b_{11}^2, \\ M_{12} &= b_{33}\varepsilon_{12} + 2c_{33}\kappa_{12}, & Q_{22} &= -\bar{j}M_{22} + T_{22}^0 \theta_2 - \theta_1^0(y_2 - 2M_{12}/R), \\ \kappa_{11} &= [a_{11}(y_3 - b_{12}\varepsilon_{22} - c_{12}\kappa_{22}) - b_{11}(y_1 - a_{12}\varepsilon_{22} - b_{12}\kappa_{22})]/\varpi, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{y_1 - a_{12}\varepsilon_{22} - b_{11}\kappa_{11} - b_{12}\kappa_{22}}{a_{11}}, & \kappa_{12} &= \frac{\varepsilon_{12} + \bar{j}y_5 - \theta_1^0 \theta_2}{R} - \bar{j}y_8, \\ T_{22} &= a_{12}\varepsilon_{11} + a_{22}\varepsilon_{22} + b_{12}\kappa_{11} + b_{22}\kappa_{22}, \\ M_{22} &= b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22} + c_{12}\kappa_{11} + c_{22}\kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y_2 - 2(b_{33} + 2c_{33}/R)(\bar{j}(y_5/R + y_8) - \theta_1^0 \theta_2/R)}{a_{33} + 4(b_{33} + c_{33}/R)/R}. \end{aligned}$$

Входящие в выражения (9) величины T_{11}^0 , T_{22}^0 и θ_1^0 характеризуют основное напряженно-деформированное состояние и определяются из решения осесимметричной статической задачи

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{y}}}{\partial s} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}, \quad b_3 = P + p_g, \quad p_g = \rho_f g(L - x). \quad (10)$$

Здесь $\bar{\mathbf{y}} = \{T_{11}, Q_{11}, M_{11}, u, w, \theta_1\}^\top$; g — ускорение свободного падения; $\bar{\mathbf{f}}$ — вектор, компоненты которого для значений $\bar{\mathbf{y}}$ получены из \mathbf{f} при условиях $j = 0$ и $\omega = 0$.

Уравнение (4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом обобщенных дифференциальных квадратур [38]. Для этого область жидкости по радиусу r делится на n точек. Тогда производные l -го порядка от функции $p(x, r)$ в любой точке r_i определяются как

$$\frac{\partial^l p(x, r_i)}{\partial r^l} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} p(x, r_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}, \quad (11)$$

где $m = n - 1$, а весовые коэффициенты $c_{ik}^{(l)}$ вычисляются по известным рекуррентным формулам [38].

С учетом (11) и граничных условий (5), (6) вместо (4) может быть получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений [42]:

$$\begin{aligned} y_{7+2(n-1)} &= p_{n-1}(x), & y'_{7+2(n-1)} &= y_{8+2(n-1)}, \\ y'_{8+2(n-1)} &= -p_{n-1}^{(2)}(x) + y_{7+2(n-1)} \left(\frac{j^2}{r_{n-1}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) - \frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{r_{n-1}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$p_{n-1}^{(1)}(x) = c_{n-11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(1)} p_n(x),$$

$$p_{n-1}^{(2)}(x) = c_{n-11}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(2)} \gamma_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(2)} p_n(x),$$

$$p_n(x) = \left(c_{n1}^{(1)} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{c_{1k}^{(1)} p_k(x)}{c_{11}^{(1)}} - \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) - \rho f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) / \left(\frac{c_{nm}^{(1)} - c_{n1}^{(1)} c_{n1}^{(1)}}{c_{11}^{(1)}} \right),$$

$$p_1(x) = - \left(\sum_{k=2}^{n-1} -k = 2^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x) \right) / c_{11}^{(1)}.$$

С учетом того, что в соотношениях (9) $p = p_n$, совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (8) и (12), составляет $N = 8 + 2m$.

Объединенные системы уравнений (8), (12) решаются методом ортогональной прогонки Годунова [32]. Численное интегрирование дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями, задаваемыми на краях оболочки и слоя жидкости соотношениями

$$y_i \Big|_{s=0} \delta_i + y_{i+M} \Big|_{s=0} (1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad (13)$$

$$y_i \Big|_{s=L} \delta_{i+M} + y_{i+M} \Big|_{s=L} (1 - \delta_{i+M}) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \quad (14)$$

$$y_i \Big|_{x=0} = 0, \quad i = 10, 12, \dots, N/2, \quad (15)$$

$$y_i \Big|_{x=L} = 0, \quad i = 10, 12, \dots, N/2, \quad (16)$$

осуществляется методом Рунге—Кутты четвертого порядка точности. В условиях (13) и (14) параметр δ_i равен нулю или единице в зависимости от заданных кинематических или статических граничных условий соответственно, а параметр M принимает значение, равное трем при решении статической задачи или четырем — в случае динамической.

Общее решение систем представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{N/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где C_k — некоторые константы, а \mathbf{y}_k — совокупность линейно независимых решений объединенных систем, удовлетворяющих граничным условиям (13), (15). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничным условиям (14), (16) получаем следующую алгебраическую систему для определения постоянных:

$$\sum_{k=1}^{N/2} C_k f_{ik} = 0, \quad i = 1, N/2. \quad (17)$$

Искомая задача сводится к определению таких значений, при которых существует нетривиальное решение системы (17). Необходимым условием этого является равенство нулю определителя матрицы $|f_{ik}(\omega)| = 0$. Для вычисления частот ω , удовлетворяющих данному условию, используется сочетание двух техник. С помощью пошаговой процедуры определяется диапазон, в котором определитель матрицы $|f_{ij}(\omega)|$ меняет знак. Далее приближенное

значение частоты вычисляется с заданной точностью в полученном интервале посредством итерационной процедуры, основанной на методе Мюллера [43, 44]. Для классической теории оболочек статическая задача (10) сводится к решению системы уравнений, имеющих размерность 3×3 . В этом случае более эффективным является использование метода Крамера с вычислением определителя по методу треугольников [45]. Оценка устойчивости гидроупругой системы основывается на анализе частоты ω , получаемой при последовательно возрастающем значении внешнего давления P .

3. Численные результаты. В численных примерах рассматриваются двухслойные и трехслойные свободно опертые ($v = w = T_{11} = M_{11} = 0$, SS), жестко закрепленные ($u = v = w = \theta_1 = 0$, CC) на обоих краях или консольные ($T_{11} = 0$, $S + 2r_2H = 0$, $M_{11} = 0$, $Q_{11} + \bar{j}H = 0$, CF) цилиндрические оболочки ($L = 30$ м, $R = 25$ м, $h = 0.03$ м), заполненные сжимаемой жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1500$ м/с) и изготовленные из бор-эпоксидной смолы (AVCO 5505), физико-механические характеристики для которой взяты из статьи [46]. Для представления результатов расчетов вводится безразмерный параметр внешнего статического давления

$$\xi = \frac{PL^3}{c_{11}} \cdot 10^{-4}.$$

Верификация результатов, получаемых с помощью описанного выше алгоритма, для различных конфигураций осуществлена в работах [4, 18, 37, 42]. В частности установлено, что для метода обобщенных дифференциальных квадратур приемлемая точность вычислений достигается при разбиении области решения в радиальном направлении на 15 точек.

Оценка достоверности результатов в случае нагруженной конструкции осуществлена на задаче о собственных частотах колебаний ω (Гц) жестко закрепленной на обоих краях (CC) пустой изотропной цилиндрической оболочки (модуль упругости $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$, $\rho_s = 7916$ кг/м³, $h = 1.524 \cdot 10^{-4}$ м, $R/h = 666.67$, $L = 0.6096$ м), подверженной воздействию внутреннего статического давления P . Сравнение как с экспериментальными [47], так и с численными данными, полученными с помощью двумерной (2D) [7] и трехмерной (3D) [13] конечно-элементных постановок, приведено на рис. 2 для четырех окружных гармоник j . Из представленных результатов следует, что имеет место хорошее согласование с известными решениями.

На рис. 3, 4 для различных углов армирования α приведены графики изменения низших собственных частот колебаний ω (Гц) в зависимости от безразмерного параметра ξ внешнего гидростатического давления P , полученные для пустых и полностью заполненных жидкостью оболочек с разными граничными условиями и схемами укладки. Здесь символами отображены точки смены окружной гармоники, соответствующей минимальной частоте. Известно [3, 48], что как для пустых оболочек, так и для оболочек с жидкостью, с ростом угла армирования номер окружной гармоники постепенно снижается благодаря изменению жесткости в окружном направлении. С увеличением давления ξ частота снижается до тех пор, пока при значении ξ_{cr} , называемом критическим, она не становится равной нулю. Такое состояние соответствует статической потере устойчивости или дивергенции.

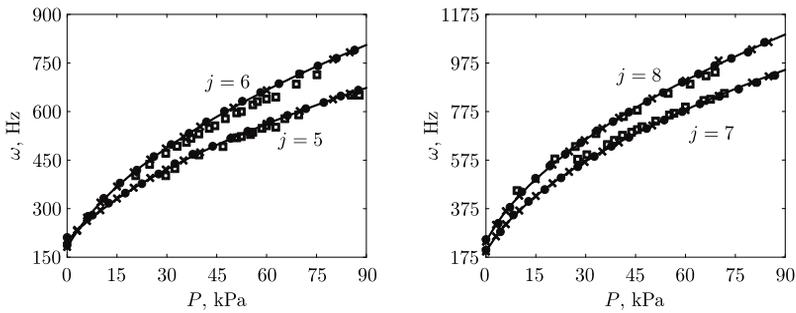


Рис. 2. Сравнение собственных частот колебаний ω нагруженной внутренним давлением P жестко закрепленной пустой оболочки (CC): \square — [47] (эксперимент); \bullet — [7] (МКЭ, 2D); \times — [13] (МКЭ, 3D); сплошная линия — расчет

[Figure 2. Comparison of natural frequencies of vibrations ω of the rigidly fixed empty shell (CC) subjected to internal pressure P : \square — [47] (experiment); \bullet — [7] (FEM, 2D); \times — [13] (FEM, 3D); solid line — calculation]

Слоистый материал при различных углах армирования изменяет жесткостные характеристики в осевом и окружном направлениях, определяя различную степень восприимчивости к внешней нагрузке. Столб жидкости, оказывая давление на деформируемую поверхность тела, с одной стороны, повышает уровень сопротивления конструкции к внешнему воздействию, а с другой стороны, может изменять оптимальную комбинацию жесткостных свойств, как это наблюдается для жестко закрепленных оболочек (рис. 4). Для этой комбинации граничных условий угол армирования, обеспечивающий высокие показатели критического внешнего давления, смещается в область более низких значений по сравнению с пустой оболочкой.

В присутствии жидкости плавное изменение фундаментальной частоты, сопровождающееся последовательным повышением окружной моды с минимальной частотой, сменяется на ее резкое падение и скачкообразный переход к новой окружной гармонике. Например, в случае консольного закрепления (рис. 3) при $\alpha = 60^\circ$ наблюдаются следующие последовательности смены окружных мод для пустых и заполненных оболочек: $9 \rightarrow 10$; $4 \rightarrow 19 \rightarrow 20$. Резкое снижение частоты обусловлено приближением к предельным значениям статической нагрузки, которая в данном случае определяется значениями ее внутренней и внешней составляющих.

Для анализируемой в настоящей работе системы с целью преодоления стабилизирующего влияния внутреннего гидростатического давления требуется значительное воздействие со стороны внешнего давления. В случае других конфигураций вклад внутреннего давления, инициированного гравитационными силами, в состояние устойчивости может быть минимальным или вообще отсутствовать. Отметим также, что при наличии жидкости и $p_g = 0$ зависимости частот от давления будут отличаться от полученных для пустых оболочек, но значения давлений, при которых происходит потеря устойчивости, останутся неизменными.

На рис. 3, 4 продемонстрировано, что с учетом сил гравитации на смоченной поверхности тела критическое значение внешней нагрузки значительно возрастает. При этом также увеличивается номер окружной гармоники j , на которой происходит потеря устойчивости. Более наглядная картина рас-

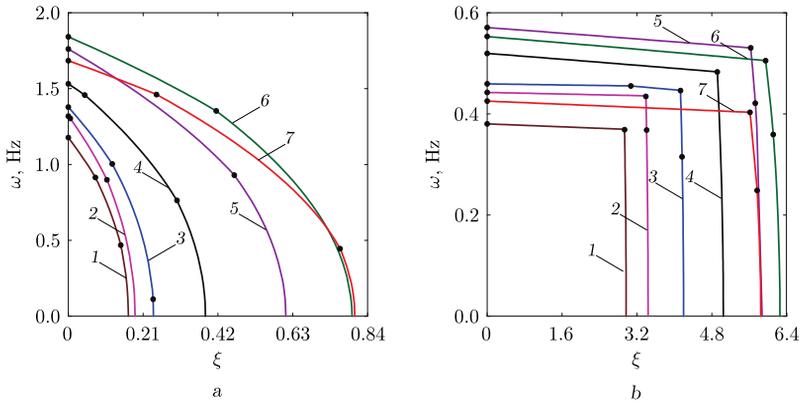


Рис. 3. Зависимости низших собственных частот колебаний ω от параметра давления ξ , полученные для пустой (a) и полностью заполненной жидкостью (b) трехслойной консольно закрепленной (CF) оболочки при различных значениях угла армирования α : 1 – $\alpha = 0^\circ$, 2 – $\alpha = 15^\circ$, 3 – $\alpha = 30^\circ$, 4 – $\alpha = 45^\circ$, 5 – $\alpha = 60^\circ$, 6 – $\alpha = 75^\circ$, 7 – $\alpha = 90^\circ$

[Figure 3. Dependences of the lowest natural frequencies of vibration ω on the pressure parameter ξ obtained for empty (a) and completely filled (b) three-layer cantilevered (CF) shells at different values of the ply angle α : 1 – $\alpha = 0^\circ$, 2 – $\alpha = 15^\circ$, 3 – $\alpha = 30^\circ$, 4 – $\alpha = 45^\circ$, 5 – $\alpha = 60^\circ$, 6 – $\alpha = 75^\circ$, 7 – $\alpha = 90^\circ$]

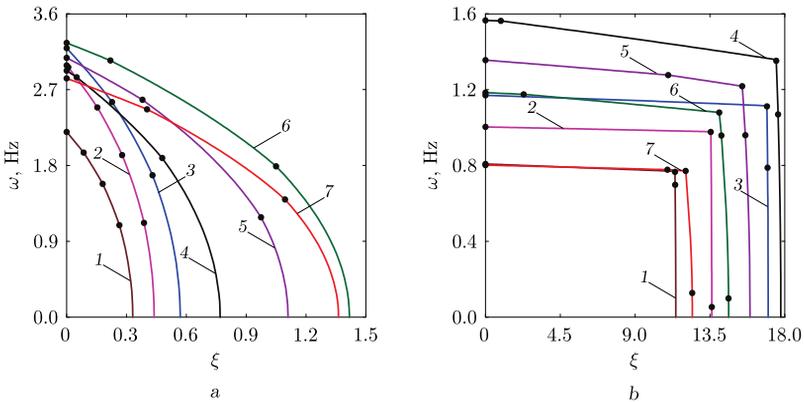


Рис. 4. Зависимости низших собственных частот колебаний ω от параметра давления ξ , полученные для пустой (a) и полностью заполненной жидкостью (b) двухслойной жестко закрепленной (CC) оболочки при различных значениях угла армирования α : 1 – $\alpha = 0^\circ$, 2 – $\alpha = 15^\circ$, 3 – $\alpha = 30^\circ$, 4 – $\alpha = 45^\circ$, 5 – $\alpha = 60^\circ$, 6 – $\alpha = 75^\circ$, 7 – $\alpha = 90^\circ$

[Figure 4. Dependences of the lowest natural frequencies of vibration ω on the pressure parameter ξ obtained for empty (a) and completely filled (b) two-layer rigidly clamped (CC) shells at different values of the ply angle α : 1 – $\alpha = 0^\circ$, 2 – $\alpha = 15^\circ$, 3 – $\alpha = 30^\circ$, 4 – $\alpha = 45^\circ$, 5 – $\alpha = 60^\circ$, 6 – $\alpha = 75^\circ$, 7 – $\alpha = 90^\circ$]

предела критического статического давления по окружным гармоникам j представлена на рис. 5. Здесь показаны изоповерхности параметра давления ξ как функции окружной моды j и угла армирования α , полученные для заполненных жидкостью двухслойных и трехслойных оболочек с различными граничными условиями.

Если для оболочек с симметричными граничными условиями (SS, CC) области локальных минимумов давления связаны с углами армирования 0° и 90° , то в случае консольного закрепления максимальные значения давления достигаются в области высоких углов намотки. Из представленных данных видно, что окружные гармоники, которым соответствуют критические давления, достигают значительных величин. Например, для жестко закрепленных оболочек при некоторых углах армирования $j_{cr} > 50$. Этот факт может отражать модельный характер задачи, геометрические параметры которой были подобраны таким образом, что частоты колебаний, соответствующие плескательным модам, сопоставимы по величине с частотами колебаний конструкции в целом [49].

Очевидно, что для такой конфигурации влияние гравитационных сил весьма значительно. Необходимо отметить, что данная особенность предъявляет дополнительные требования к используемому методу решения, так как при высоких значениях j для обеспечения сходимости необходима как более тщательная дискретизация области жидкости ($n = 21$), так и увеличение количества точек (узлов) интегрирования в меридиональном направлении.

Зависимости критических значений внешнего давления ξ_{cr} от угла армирования α , полученные для пустых двухслойных и трехслойных оболочек с различными граничными условиями, приведены на рис. 6. Здесь символами отображены точки смены критической моды. Как и в случае собственных частот, с ростом угла армирования номер окружной гармоники, соответствующий минимальному критическому давлению, после небольшого увеличения при малых углах α постепенно снижается. Номер критической моды также возрастает с увеличением ограничений на краях конструкции.

Оптимальные углы армирования, обеспечивающие наибольшую устойчивость пустых оболочек, несколько отличаются для разных граничных условий и составляют следующие значения (двухслойные/трехслойные):

CC: $80.6^\circ/74.3^\circ$; SS: $85^\circ/80.1^\circ$; CF: $90^\circ/81.4^\circ$.

Качественно зависимости для двух пакетов совпадают, но трехслойные оболочки обеспечивают более высокие значения критического давления, которое для свободно опертых и консольных оболочек выше на 22 %.

На рис. 7 приведены аналогичные зависимости, построенные для оболочек, заполненных жидкостью. Символами на кривых по-прежнему показаны точки смены критической окружной гармоники. Как было отмечено выше, заполняющая внутренний объем жидкость благодаря гидростатическому давлению на смоченной поверхности оказывает значительное стабилизирующее влияние.

Характерной особенностью является активное формоизменение, особенно в случае жесткого закрепления (CC). Причиной этого является как комбинированный характер статического давления, так и изменение жесткости самой оболочки, обусловленное текущим углом армирования.

Другой особенностью воздействия комбинированного статического давле-

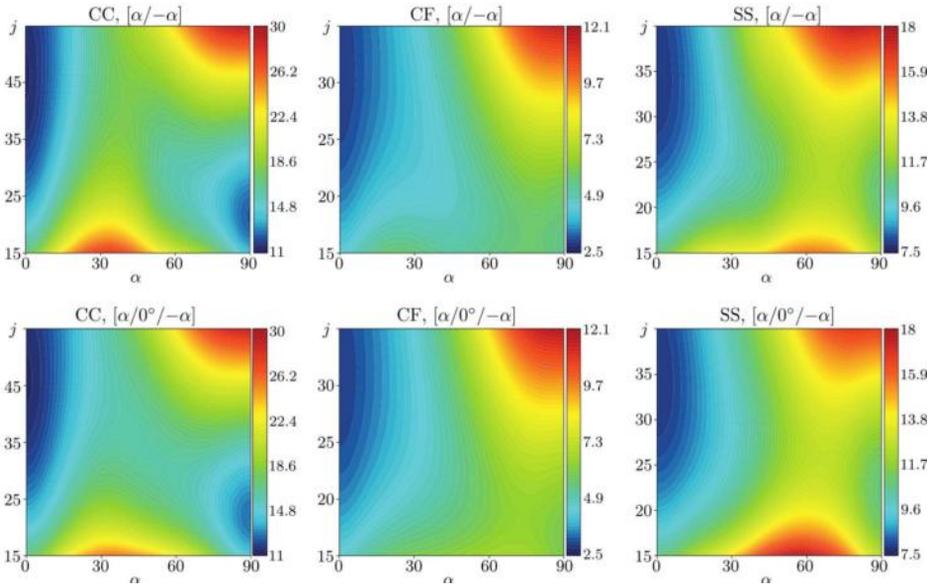


Рис. 5. Исоповерхности критических значений внешнего статического давления ξ как функции окружной моды j и угла армирования α , полученные для двухслойных и трехслойных оболочек, полностью заполненных жидкостью, с различными граничными условиями

[Figure 5. Isosurfaces of critical values of the external static pressure ξ as the functions of circumferential mode j and ply angle α obtained for two-layer and three-layer shells completely filled with fluid under different boundary conditions]

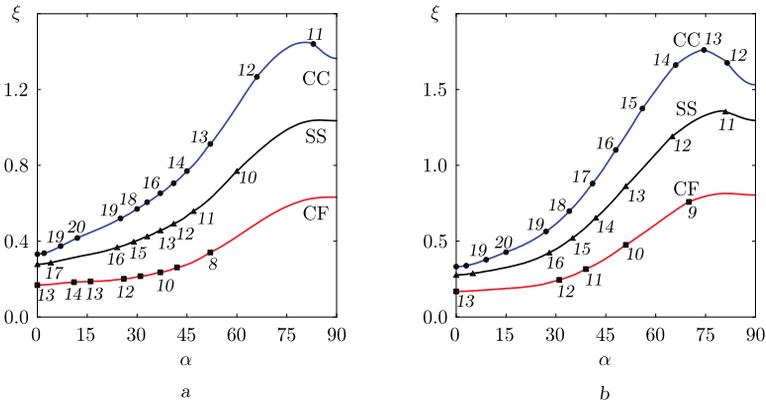


Рис. 6. Зависимости параметра давления ξ от угла армирования α , полученные для пустых двухслойных (a) и трехслойных (b) оболочек с различными граничными условиями

[Figure 6. Dependences of the pressure parameter ξ on the ply angle α obtained for empty two-layer (a) and three-layer (b) shells under different boundary conditions]

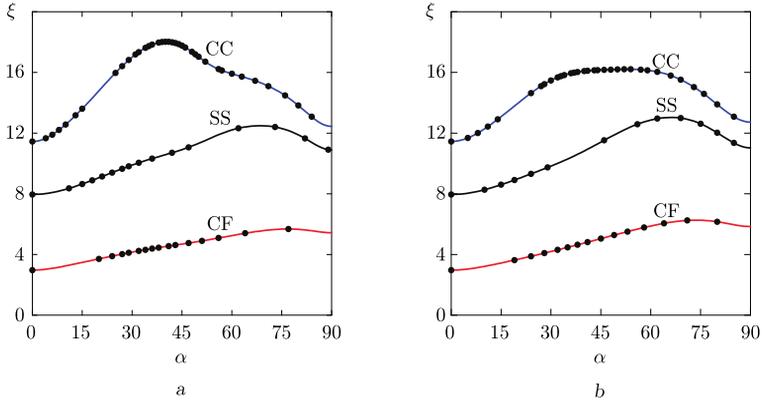


Рис. 7. Зависимости параметра давления ξ от угла армирования α , полученные для полностью заполненных жидкостью двухслойных (а) и трехслойных (б) оболочек при различных вариантах граничных условий

[Figure 7. Dependences of the pressure parameter ξ on the ply angle α obtained for completely filled two-layer (a) and three-layer (b) shells under different variants of boundary conditions]

ния на слоистую оболочку с жидкостью является смещение оптимальных углов армирования α в область более низких значений по сравнению с пустой оболочкой. Эти углы принимают следующие значения (двухслойные/трехслойные):

CC: $40.4^\circ/53.6^\circ$; SS: $68.6^\circ/66.3^\circ$; CF: $76.5^\circ/73.5^\circ$.

Для жестко закрепленных оболочек зависимость критического давления от угла намотки приобретает существенные отличия по сравнению с другими граничными условиями. В частности, для этого варианта закрепления критические параметры давления ξ для однослойного и поперечно армированного ($[90^\circ/-90^\circ]$ или $[90^\circ/0/-90^\circ]$) материала имеют близкие значения. Для других граничных условий поперечное армирование обеспечивает повышенные эксплуатационные характеристики в сравнении с однослойным материалом, но уступает перекрестному армированию.

Кроме этого, жестко закрепленная двухслойная оболочка с жидкостью при оптимальном угле армирования способна выдержать нагрузку, более чем на 10 % превышающую критическое давление для трехслойной оболочки. При отсутствии жидкости, как было отмечено выше, наблюдается противоположная зависимость: трехслойная оболочка устойчивее более чем на 16 %.

Из представленных данных следует, что для любой комбинации граничных условий и схем укладки существует достаточно широкий диапазон углов армирования, при которых композитная оболочка, как пустая, так и содержащая жидкость, будет обладать более высокой несущей способностью по сравнению с конструкцией, изготовленной из однонаправленного материала. Наибольшая максимизация критического внешнего давления наблюдается при отсутствии жидкости. Для анализируемого вида нагружения преимущество двухслойной схемы укладки слоистого композита над трехслойной или наоборот отсутствует, поскольку для разных вариантов закрепления, уровней жидкости и углов намотки можно подобрать такой пакет, который в большей

степени будет удовлетворять эксплуатационным требованиям к конструкции. С другой стороны, в абсолютных цифрах для большинства из рассмотренных конфигураций трехслойный композит обеспечивает более высокие параметры устойчивости.

Заключение. Представлены результаты численного исследования границ устойчивости вертикальных круговых композитных цилиндрических оболочек, полностью заполненных идеальной неподвижной жидкостью и нагруженных внешним статическим давлением. Принято во внимание изменение напряженно-деформированного состояния смоченной поверхности упругого тела, подвергающегося воздействию гидростатического давления как функции гравитационных сил. Проанализировано влияние различных схем укладки слоистого композита на критические значения внешнего давления оболочек, имеющих разнообразные граничные условия при различных значениях угла армирования.

В результате вычислительных экспериментов установлено, что для рассмотренных конфигураций гидростатическое давление оказывает значительное стабилизирующее воздействие, а оптимальные углы армирования, обеспечивающие более высокие критические значения внешнего статического давления, смещаются в область более низких значений по сравнению с пустой оболочкой. Продемонстрировано, что для нагруженных комбинированным статическим давлением оболочек повышение границ устойчивости для соответствующей комбинации краевых условий достигается в большей степени выбором подходящего угла армирования, а не схемой укладки.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Библиографический список

1. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андришин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с. EDN: UGLCQJ.
2. *Stability and Vibrations of Thin-Walled Composite Structures* / ed. H. Abramovich. Haifa: Woodhead Publ., 2017. xi+757 pp.
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells // *Struct. Eng. Mech.*, 2022. vol. 81, no. 6. pp. 769–780. EDN: KDSYKY. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.6.769>.
4. Бочкарёв С. А. Исследование собственных колебаний композитных цилиндрических оболочек с жидкостью, лежащих на упругом основании // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2023. Т. 29. С. 149–166. EDN: BFJANF. DOI: <https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.02.01>.
5. Zhang Y. L., Gorman D. G., Reese J. M. A finite element method for modelling the vibration of initially tensioned thin-walled orthotropic cylindrical tubes conveying fluid // *J. Sound Vibration*, 2001. vol. 245, no. 1. pp. 93–112. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3554>.
6. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. Initially tensioned orthotropic cylindrical shells

- conveying fluid: A vibration analysis // *J. Fluids Struct.*, 2002. vol. 16, no. 1. pp. 53–70. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0409>.
7. Zhang Y. L., Gorman D. G., Reese J. M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // *Thin-Walled Struct.*, 2003. vol. 41, no. 12. pp. 1103–1127. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(03\)00108-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(03)00108-3).
 8. Kadoli R., Ganesan N. Free vibration and buckling analysis of composite cylindrical shells conveying hot fluid // *Compos. Struct.*, 2003. vol. 60, no. 1. pp. 19–32. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00313-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00313-6).
 9. Бочкарёв С. А., Матвеевко В. П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // *ПМТФ*, 2008. Т. 49. С. 185–195. EDN: JVHEFX.
 10. Sheng G. G., Wang X. Dynamic characteristics of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads // *Compos. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. pp. 162–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.004>.
 11. Zhu X., Ye W. B., Lin T. Y., Chen C. The elastic critical pressure prediction of submerged cylindrical shell using wave propagation method // *Ocean Eng.*, 2013. vol. 58. pp. 22–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2012.09.008>.
 12. Li T. Y., Xiong L., Zhu X., et al. The prediction of the elastic critical load of submerged elliptical cylindrical shell based on the vibro-acoustic model // *Thin-Walled Struct.*, 2014. vol. 84. pp. 255–262. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.013>.
 13. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid // *Thin-Walled Struct.*, 2015. vol. 90. pp. 12–22. EDN: UENHRN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>.
 14. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеевко В. П. Гидротермоупругая устойчивость функционально-градиентных круговых цилиндрических оболочек, содержащих жидкость // *Мех. композ. матер.*, 2016. Т. 52, № 4. С. 717–736.
 15. Li R., Liu L., Liang B., Yang M. An efficient method to improve the stability of submerged functionally graded cylindrical shell // *J. Mech. Sci. Technol.*, 2019. vol. 33. pp. 2527–2536. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0502-z>.
 16. Liu X. M., Yang M., Li R., Liang B. Research on prediction of critical pressure of FGM cylindrical shells under hydrostatic pressure based on homogenization transformation method // *AIP Advances*, 2023. vol. 13, no. 18, 085306. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0157600>.
 17. Krishna R. K., Kochupillai J. A new formulation for fluid–structure interaction in pipes conveying fluids using Mindlin shell element and 3-D acoustic fluid element // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2020. vol. 42, 388. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02477-1>.
 18. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеевко В. П. Собственные колебания композитных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // *Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*, 2023. Т. 10, № 4. С. 616–631. EDN: AHIXQA. DOI: <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.403>.
 19. Wu J. H., Liu R. J., Duan Y., Sun Y. D. Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure // *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 2023. vol. 202, 104925. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2023.104925>.
 20. Григолюк Э. И., Шклярчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью // *ПММ*, 1970. Т. 34, № 3. С. 401–411.
 21. Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н. *Аэрогидроупругость конструкций*. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
 22. Schotté J. S., Ohayon R. Incompressible hydroelastic vibrations: Finite element modelling of the elastogravity operator // *Comput. Struct.*, 2005. vol. 83, no. 2–3. pp. 209–219. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.03.084>.
 23. Григорьев В. Г., Григорьева Е. В. Контактное взаимодействие ограниченного объема жидкости с деформируемым твердым телом под влиянием гравитационных сил // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 2. С. 147–159. EDN: LYWYAU.

24. Schotté J. S., Ohayon R. Linearized formulation for fluid-structure interaction: Application to the linear dynamic response of a pressurized elastic structure containing a fluid with a free surface // *J. Sound Vibration*, 2013. vol. 332, no. 10. pp. 2396–2414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.07.036>.
25. Бочкарёв С. А., Лekomтцев С. В. Собственные колебания частично заполненных жидкостью некруговых цилиндрических оболочек с учетом плескания свободной поверхности // *Вычисл. мех. сплошных сред*, 2014. Т. 7, № 4. С. 471–480. EDN: RFBIFJ. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45>.
26. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Dynamic analysis of partially filled non-circular cylindrical shells with liquid sloshing // *Int. J. Appl. Mech.*, 2016. vol. 8, no. 3, 1650027. EDN: FBXNAG. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1758825116500277>.
27. Ohayon R., Schotté J. S. Modal analysis of liquid-structure interaction / *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*; eds. Y. Bazilevs, K. Takizawa. Cham: Birkhäuser, 2016. pp. 423–438. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-40827-9_33.
28. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects // *Thin-Walled Struct.*, 2021. vol. 164, 107867. EDN: FYCGJP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107867>.
29. Hoareau C., Deü J. F., Ohayon R. Hydroelastic linearized vibrations taking into account prestressed effects due to internal liquid weight: Numerical vs. experimental results // *J. Fluids Struct.*, 2022. vol. 112, 103596. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2022.103596>.
30. Hoareau C., Deü J. F., Ohayon R. Construction of reduced order operators for hydroelastic vibrations of prestressed liquid–structure systems using separated parameters decomposition // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2022. vol. 402, 115406. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115406>.
31. Amabili M., Païdoussis M. P., Lakis A. A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom // *J. Sound Vibration*, 1998. vol. 213, no. 2. pp. 259–299. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1481>.
32. Годунов С. К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*. Т. 1: Краевые задачи. Новосибирск: НГУ, 1994. 264 с.
33. Юдин А. С., Амбалова Н. М. Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью // *Прикл. мех.*, 1989. Т. 25, № 12. С. 63–68. EDN: DWXHXU.
34. Юдин А. С., Сафроненко В. Г. *Виброакустика структурно-неоднородных оболочек*. Ростов н/Д: ЮФУ, 2013. 424 с.
35. Bochkarev S. A. Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with Fluid Partly Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022. vol. 22. pp. 2250071. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455422500717>.
36. Бочкарёв С. А. Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // *Вычисл. технол.*, 2022. Т. 27, № 4. С. 15–32. EDN: DDEGTR. DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.4.003>.
37. Бочкарёв С. А., Лekomтцев С. В., Матвеев В. П. Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость // *ПММ*, 2022. Т. 86, № 4. С. 505–526. EDN: MTQJMJ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823522040038>.
38. Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. London: Springer, 2000. xvi+340 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0>.
39. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. *Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций*. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
40. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов В. Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.

41. Авербух А. З., Вецман Р. И., Генкин М. Д. *Колебания элементов конструкции в жидкости*. М.: Наука, 1987. 158 с.
42. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки переменной толщины, частично заполненной жидкостью // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2023. Т. 29, № 2. С. 27–40. EDN: FUGORM. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-27-40>.
43. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer // *Math. Comput.*, 1956. vol. 10, no. 56. pp. 208–215. DOI: <https://doi.org/10.2307/2001916>.
44. Wu X. Improved Muller method and bisection method with global and asymptotic super-linear convergence of both point and interval for solving nonlinear equations // *Appl. Math. Comput.*, 2005. vol. 166, no. 2. pp. 299–311. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.04.120>.
45. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Е. З. *Численные методы анализа*. М.: Наука, 1967. 368 с.
46. Sheinman I., Greif S. Dynamic analysis of laminated shells of revolution // *J. Compos. Mater.*, 1984. vol. 18, no. 3. pp. 200–215. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199838401800301>.
47. Miserentino R., Volsteen L. F. *Vibration Tests of Pressurized Thin-Walled Cylindrical Shells*: NASA TN D-3066. Hampton, Va: Langley Research Center, 1965. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19650026237/downloads/19650026237.pdf>.
48. Narita Y., Ohta Y., Yamada G., Kobayashi Y. Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges // *AIAA Journal*, 1992. vol. 30, no. 3. pp. 790–796. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.10986>.
49. Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface // *J. Sound Vibration*, 2000. vol. 231, no. 1. pp. 79–97. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2678>.

MSC: 74F10, 74H15

Stability of layered cylindrical shells filled with fluid

S. A. Bochkarev

Institute of Continuous Media Mechanics,
Ural Branch Russian Academy of Sciences,
1, Acad. Korolev st., Perm, 614068, Russian Federation.

Abstract

The paper investigates the stability of circular vertical layered cylindrical shells completely filled with a quiescent compressible fluid subjected to hydrostatic and external static loads. The behavior of the elastic structure and the fluid medium is described within the framework of classical shell theory and Euler equations. The linearized equations of motion of the shell and the corresponding geometrical and physical relations are reduced to a system of ordinary differential equations with respect to new unknowns. An acoustic wave equation is transformed to a system of differential equations using the method of generalized differential quadrature. The solution of the formulated boundary value problem is reduced to the calculation of natural vibration frequency in terms of Godunov's orthogonal sweep method. For this purpose, a stepwise procedure is applied in combination with a subsequent refinement by the Muller method. The reliability of the obtained results is verified through a comparison with known numerical solutions. The dependence of critical external pressure on the ply angle of simply supported, rigidly fixed and cantilevered two-layer and three-layer cylindrical shells is analyzed in detail. The influence of the combined static pressure on the optimal ply angle providing an increase of the stability boundary is evaluated.

Keywords: classical shell theory, compressible fluid, layered material, hydrostatic pressure, preloading, Godunov's orthogonal sweep method, generalized differential quadrature method, stability.

Received: 1st October, 2024 / Revised: 16th December, 2024 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 4th March, 2025

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Bochkarev S. A. Stability of layered cylindrical shells filled with fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 55–76. EDN: SEUHGG. DOI: 10.14498/vsgtu2117 (In Russian).

Author's Details:

Sergey A. Bochkarev  <https://orcid.org/0000-0002-9722-1269>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Functional Materials Mechanics;

e-mail: bochkarev@icmm.ru

Competing interests. The author declares no competing interests.

Author's Responsibilities. The author takes full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by the author.

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment, registration number of the topic 124020700047-3.

References

1. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp. (In Russian). EDN: UGLCQJ.
2. *Stability and Vibrations of Thin-Walled Composite Structures*, ed. H. Abramovich. Haifa, Woodhead Publ., 2017, xi+757 pp.
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells, *Struct. Eng. Mech.*, 2022, vol. 81, no. 6, pp. 769–780. EDN: KDSYKY. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.6.769>.
4. Bochkarev S. A. Study of natural vibrations of fluid-containing composite cylindrical shells resting on elastic foundation, *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 2023, vol. 29, pp. 149–166 (In Russian). EDN: BFJANF. DOI: <https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.02.01>.
5. Zhang Y. L., Gorman D. G., Reese J. M. A finite element method for modelling the vibration of initially tensioned thin-walled orthotropic cylindrical tubes conveying fluid, *J. Sound Vibration*, 2001, vol. 245, no. 1, pp. 93–112. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3554>.
6. Zhang Y. L., Reese J. M., Gorman D. G. Initially tensioned orthotropic cylindrical shells conveying fluid: A vibration analysis, *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 1, pp. 53–70. DOI: <https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0409>.
7. Zhang Y. L., Gorman D. G., Reese J. M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid, *Thin-Walled Struct.*, 2003, vol. 41, no. 12, pp. 1103–1127. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(03\)00108-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(03)00108-3).
8. Kadoli R., Ganesan N. Free vibration and buckling analysis of composite cylindrical shells conveying hot fluid, *Compos. Struct.*, 2003, vol. 60, no. 1, pp. 19–32. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00313-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00313-6).
9. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 313–322. EDN: LLAQVZ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0043-1>.
10. Sheng G. G., Wang X. Dynamic characteristics of fluid-conveying functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads, *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 162–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.004>.
11. Zhu X., Ye W. B., Lin T. Y., Chen C. The elastic critical pressure prediction of submerged cylindrical shell using wave propagation method, *Ocean Eng.*, 2013, vol. 58, pp. 22–26. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2012.09.008>.
12. Li T. Y., Xiong L., Zhu X., et al. The prediction of the elastic critical load of submerged elliptical cylindrical shell based on the vibro-acoustic model, *Thin-Walled Struct.*, 2014, vol. 84, pp. 255–262. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2014.06.013>.
13. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid, *Thin-Walled Struct.*, 2015, vol. 90, pp. 12–22. EDN: UENHRN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>.
14. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Hydrothermoelastic stability of functionally graded circular cylindrical shells containing a fluid, *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 4, pp. 507–520. EDN: YVHKIT. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9601-4>.

15. Li R., Liu L., Liang B., Yang M. An efficient method to improve the stability of submerged functionally graded cylindrical shell, *J. Mech. Sci. Technol.*, 2019, vol. 33, pp. 2527–2536. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0502-z>.
16. Liu X. M., Yang M., Li R., Liang B. Research on prediction of critical pressure of FGM cylindrical shells under hydrostatic pressure based on homogenization transformation method, *AIP Advances*, 2023, vol. 13, no. 18, 085306. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0157600>.
17. Krishna R. K., Kochupillai J. A new formulation for fluid–structure interaction in pipes conveying fluids using Mindlin shell element and 3-D acoustic fluid element, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2020, vol. 42, 388. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02477-1>.
18. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of composite cylindrical shells partially filled with fluid, *Vestnik St. Petersburg Univ., Math.*, 2023, vol. 56, no. 4, pp. 435–445. EDN: AEYLPX. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1063454123040052>.
19. Wu J. H., Liu R. J., Duan Y., Sun Y. D. Free and forced vibration of fluid-filled laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure, *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 2023, vol. 202, 104925. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2023.104925>.
20. Grigoliuk E. I., Shkliarchuk F. N. Equations of perturbed motion of a body with a thin-walled elastic shell partially filled with a liquid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 3, pp. 379–389. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90084-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90084-5).
21. Gorshkov A. G., Morozov V. I., Ponomarev V. I., Shklyarchuk F. N. *Aerogidrouprugost' konstruksii* [Aeroelasticity of Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2000, 592 pp. (In Russian)
22. Schotté J. S., Ohayon R. Incompressible hydroelastic vibrations: Finite element modelling of the elastogravity operator, *Comput. Struct.*, 2005, vol. 83, no. 2–3, pp. 209–219. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.084>.
23. Grigor'ev V. G., Grigor'eva E. V. Contact interaction of a bounded liquid volume with a solid under the action of gravity forces, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 280–290. EDN: OHZDXH. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411020178>.
24. Schotté J. S., Ohayon R. Linearized formulation for fluid-structure interaction: Application to the linear dynamic response of a pressurized elastic structure containing a fluid with a free surface, *J. Sound Vibration*, 2013, vol. 332, no. 10, pp. 2396–2414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.07.036>.
25. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Natural vibrations of non-circular cylindrical shells partially filled with fluid with sloshing of free surface, *Comput. Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 471–480 (In Russian). EDN: RFBIFJ. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.45>.
26. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Dynamic analysis of partially filled non-circular cylindrical shells with liquid sloshing, *Int. J. Appl. Mech.*, 2016, vol. 8, no. 3, 1650027. EDN: FBXNAG. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1758825116500277>.
27. Ohayon R., Schotté J. S. Modal analysis of liquid-structure interaction, In: *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*; eds. Y. Bazilevs, K. Takizawa. Cham, Birkhäuser, 2016, pp. 423–438. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-40827-9_33.
28. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects, *Thin-Walled Struct.*, 2021, vol. 164, 107867. EDN: FYCGJP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107867>.
29. Hoareau C., Deü J. F., Ohayon R. Hydroelastic linearized vibrations taking into account prestressed effects due to internal liquid weight: Numerical vs. experimental results, *J. Fluids Struct.*, 2022, vol. 112, 103596. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2022.103596>.
30. Hoareau C., Deü J. F., Ohayon R. Construction of reduced order operators for hydroelastic vibrations of prestressed liquid–structure systems using separated parameters decomposition, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2022, vol. 402, 115406. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115406>.

31. Amabili M., Païdoussis M. P., Lakis A. A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom, *J. Sound Vibration*, 1998, vol. 213, no. 2, pp. 259–299. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1481>.
32. Godunov S. K. *Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 169. Providence, American Mathematical Society, 1997, ix + 282 pp. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/169>.
33. Yudin A. S., Ambalova N. M. Forced vibrations of coaxial reinforced cylindrical shells during interaction with a fluid, *Soviet Appl. Mech.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 1222–1227. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00887148>.
34. Yudin A. S., Safronenko V. G. *Vibroakustika strukturno-neodnorodnykh obolochek* [Vibroacoustics of Structurally Inhomogeneous Shells]. Rostov-on-Don, Southern Federal Univ., 2013, 424 pp. (In Russian)
35. Bochkarev S. A. Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with Fluid Partly Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2022, vol. 22, pp. 2250071. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455422500717>.
36. Bochkarev S. A. Numerical simulation of natural vibrations of a cylindrical shell partially filled with fluid and embedded in an elastic foundation, *Comput. Technol.*, 2022, vol. 27, no. 4, pp. 15–32 (In Russian). EDN: DDEGTR. DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.4.003>.
37. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenkov V. P. Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 8, pp. 1971–1986. EDN: ZAH SPL. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422080064>.
38. Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. London, Springer, 2000, xvi + 340 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0>.
39. Karmishin A. V., Lyaskovets V. A., Myachenkov V. I., Frolov A. N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksii* [Statics and Dynamics of Thin-Walled Shell Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 376 pp. (In Russian)
40. Alfutov N. A., Zinov'ev P. A., Popov B. G. *Raschet mnogosloinykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of Multilayer Plates and Shells of Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 264 pp. (In Russian)
41. Averbukh A. Z., Veitsman R. I., Genkin M. D. *Kolebaniia elementov konstruksii v zhidkosti* [Vibration of Structural Elements in Fluid]. Moscow, Nauka, 1987, 158 pp. (In Russian)
42. Bochkarev S. A., Matveenkov V. P. Free vibration analysis of a cylindrical shell of variable thickness partially filled with fluid, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2023, vol. 321, no. S1, pp. S20–S32. EDN: JVKDVU. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543823030045>.
43. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer, *Math. Comput.*, 1956, vol. 10, no. 56, pp. 208–215. DOI: <https://doi.org/10.2307/2001916>.
44. Wu X. Improved Muller method and bisection method with global and asymptotic super-linear convergence of both point and interval for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.*, 2005, vol. 166, no. 2, pp. 299–311. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.04.120>.
45. Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z. *Chislennyye metody analiza* [Numerical Methods of Analysis]. Moscow, Nauka, 1967, 368 pp. (In Russian)
46. Sheinman I., Greif S. Dynamic analysis of laminated shells of revolution, *J. Compos. Mater.*, 1984, vol. 18, no. 3, pp. 200–215. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199838401800301>.
47. Miserentino R., Volsteeen L. F. *Vibration Tests of Pressurized Thin-Walled Cylindrical Shells*, NASA TN D-3066. Hampton, Va, Langley Research Center, 1965. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19650026237/downloads/19650026237.pdf>.
48. Narita Y., Ohta Y., Yamada G., Kobayashi Y. Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges, *AIAA Journal*, 1992, vol. 30, no. 3, pp. 790–796. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.10986>.
49. Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface, *J. Sound Vibration*, 2000, vol. 231, no. 1, pp. 79–97. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2678>.



УДК 550.34:539.3:519.6

Моделирование пространственного распределения областей повышенных предсейсмических деформаций

М. И. Гапеев, Ю. В. Марапулец, А. А. Солодчук

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7.

Аннотация

В рамках линейной теории упругости предложен новый подход к моделированию пространственного распределения областей повышенных деформаций земной коры, возникающих при подготовке землетрясений. Модель основана на системе дифференциальных уравнений Ламе, где источник землетрясения представлен в виде сосредоточенной системы сил, приложенных к точке упругого полупространства. Соответствующая прямая краевая задача решается с использованием функций Грина. В рамках модели для каждой точки поверхности земной коры вычисляются предсейсмические деформации, после чего определяется частота случаев, когда эти деформации превышают фоновые приливные.

Предложенный метод апробирован на данных каталога “*The Global Centroid-Moment-Tensor Catalog*” для Камчатки — одного из самых сейсмически активных регионов планеты. Проведено моделирование пространственного распределения повышенных предсейсмических деформаций за период 1976–2020 гг. Установлено, что области повышенных деформаций преимущественно локализируются вдоль линии основного разлома у побережья Камчатки. Максимумы относительных частот возникновения таких деформаций граничат с районами высокой плотности населения. Анализ временной динамики выявил значительную вариативность: наблюдаются периоды как с высокими частотами повышенных деформаций (0.6–0.8), так и с низкими (0.1–0.2).

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Гапеев М. И., Марапулец Ю. В., Солодчук А. А. Моделирование пространственного распределения областей повышенных предсейсмических деформаций // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 77–90. EDN: OFDPNU. DOI: 10.14498/vsgtu2100.

Сведения об авторах

Максим Игоревич Гапеев  <https://orcid.org/0000-0001-5798-7166>
младший научный сотрудник; лаб. акустических исследований;
e-mail: gapееv.sci@yandex.ru

Юрий Валентинович Марапулец  <https://orcid.org/0000-0002-3030-9944>
доктор физико-математических наук, доцент; директор; e-mail: marpl@ikir.ru

Александра Андреевна Солодчук  <https://orcid.org/0000-0002-6761-8978>
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. акустических исследований; e-mail: aleksandra@ikir.ru

Разработанный подход позволяет исследовать области повышенных деформаций земной коры, возникающие при подготовке сильных землетрясений, и может быть использован для изучения предсейсмических аномалий в различных геофизических полях.

Ключевые слова: моделирование предсейсмических деформаций, функция Грина, теория упругости, сейсмичность Камчатки, тектоническое напряжение.

Получение: 20 июня 2024 г. / Исправление: 25 октября 2024 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 25 марта 2025 г.

Введение. Землетрясения возникают в результате механических процессов в литосфере. При подготовке сейсмического события вокруг его очага формируется поле напряжений, вызывающее деформацию горных пород земной коры. Эти деформации могут непосредственно или опосредованно приводить к аномалиям в различных геофизических полях, которые рассматриваются как предвестники землетрясений. Анализ зон проявления предвестников показывает их распространение на расстояния до нескольких сотен километров от эпицентров. Можно предположить, что причиной таких аномалий служат усиленные деформации, превышающие уровень земных приливов, обусловленных гравитационным воздействием Солнца и Луны. Однако для уверенной идентификации геофизических аномалий как предвестников необходимо установить их связь с деформационными процессами в сейсмоактивном регионе.

В настоящее время разработано множество моделей подготовки землетрясений: дилатантно-диффузная [1], лавинно-неустойчивого трещинообразования [2], консолидации и деструкции [3], неустойчивого скольжения [4], фазовых превращений [5], каскадного подъема и прогрессивной локализации [6], энергетическая модель [7] и другие. Хотя эти модели в различной степени объясняют природу геофизических аномалий, большинство из них носит феноменологический характер. Отсутствие развитого математического аппарата ограничивает их применение для моделирования напряженного состояния земной коры вокруг очагов реальных землетрясений. Наиболее разработанными в математическом отношении являются энергетическая модель, а также модели консолидации и деструкции.

Значительный вклад в развитие моделей консолидации и деструкции внесли работы И. П. Добровольского [3,8]. В его модели деформации земной коры рассматриваются в приближении упругого однородного изотропного полупространства, где очаг формирующегося землетрясения представлен неоднородным сферическим включением с отличающимся модулем сдвига, на границах которого задано давление. Применение теории малых возмущений позволило свести решение к объемному интегралу от функций Грина для системы фиктивных сил внутри включения. Напряженно-деформированное состояние получено как разность состояний среды с включением и без него.

Дальнейшее развитие этот подход получил в работах Ю. Л. Ребецкого и А. С. Лермонтовой [9,10], где учтена неоднородность строения земной коры с областями, проявляющими пластические и квазипластические свойства. Авторы представили очаг в виде неоднородного цилиндрического включения и

решили задачу для плоского напряженного состояния в упругом и упруго-пластическом случаях. Показано, что в областях с аномальными включениями затухание деформационных возмущений происходит медленнее по сравнению с упруго-однородной средой.

Различные модификации энергетической модели представлены в работах А. С. Пережогина, Б. М. Шевцова, В. А. Салтыкова, Ю. А. Кугаенко. Авторы использовали различные силовые эквиваленты дислокационных процессов: точечные источники (единичная и двойная силы) для моделирования выступов в зоне субдукции [11, 12], комбинацию двойных пар сил с моментами [13], распределенные силовые источники, соответствующие классической дислокационной модели [14, 15]. Результаты моделирования сопоставлялись с данными наблюдений высокочастотного сейсмического шума, акустической эмиссии, поверхностных смещений и деформаций осадочных пород.

В перечисленных исследованиях основное внимание уделялось сопоставлению предсейсмических аномалий с деформациями перед отдельными землетрясениями, тогда как анализ общих закономерностей формирования областей повышенных деформаций в сейсмоактивных регионах не проводился. Выявление зон, наиболее подверженных влиянию предсейсмических деформаций, может повысить эффективность обнаружения предвестников.

В данной работе предложен новый подход к идентификации областей с повышенной частотой возникновения предсейсмических деформаций. Метод апробирован на землетрясениях в районе Камчатского полуострова за 1976–2020 гг. Выбор региона обусловлен его высокой сейсмической активностью и расположением в Тихоокеанском огненном кольце. Камчатка давно служит естественным полигоном для изучения сеймотектонических процессов, связанных с накоплением и релаксацией напряжений при взаимодействии литосферных плит.

1. Физическая постановка задачи. Очаг тектонического землетрясения представляет собой разрыв сплошности материала Земли, возникающий под действием упругих сдвиговых напряжений, накопленных в процессе длительной тектонической деформации. В момент землетрясения происходит полное или частичное снятие накопленных напряжений в его очаговой области. Согласно классическому определению Б. В. Кострова, основанному на теории упругой отдачи Г. Ф. Рейда, тектоническое землетрясение представляет собой разрыв скольжения, при котором взаимное перемещение его берегов в направлении, перпендикулярном поверхности разрыва, равно нулю. При этом процесс землетрясения сопровождается преобразованием части накопленной упругой потенциальной энергии в кинетическую энергию сейсмических волн.

Деформационные процессы, сопровождающие подготовку землетрясения, обусловлены приращением потенциальной энергии упругих деформаций ΔW в очаговой области. Важно отметить, что высвободившаяся при землетрясении сейсмическая энергия E составляет лишь часть этой накопленной энергии. Отношение этих величин, называемое сейсмическим КПД η , является важной характеристикой эффективности процесса снятия напряжений:

$$\eta = E/\Delta W.$$

В рамках механики сплошных сред при изучении процессов потери устой-

чивости традиционно рассматривают случай неизменных свойств материала и сохранения его сплошности. В этом приближении очаг землетрясения может быть описан эквивалентной системой сил, распределенных по поверхности разрыва, что непосредственно следует из теоремы взаимности Бетти [16]. Для наиболее общего случая произвольно ориентированного разрыва смещений в изотропной упругой среде используется система, состоящая из девяти пар двойных сил с моментами [17]. Данная система, схематически изображенная на рис. 1, представляет собой минимально необходимую систему для построения адекватного силового эквивалента очага в общем случае.

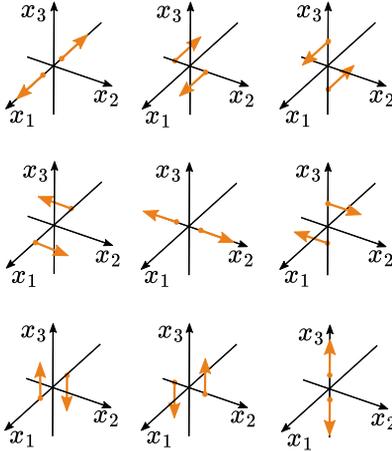


Рис. 1. Схематическое изображение девяти пар сил, необходимых для построения силового эквивалента произвольно ориентированного разрыва смещений в сплошной среде

[Figure 1. Schematic representation of nine force couples required to construct a force equivalent for an arbitrarily oriented displacement discontinuity in a continuum medium]

При анализе деформационных процессов в земной коре важно учитывать, что фоновый уровень деформаций, обусловленный преимущественно приливными воздействиями Луны и Солнца, характеризуется величинами относительных деформаций порядка 10^{-8} . В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только те деформации, которые превышают указанный фоновый уровень. Такие деформации будем называть повышенными. Большинство известных предвестников выявляются в сигналах, источники которых расположены на глубине много меньшей, чем соответствующий размер земной коры. Поэтому особое внимание в работе уделяется анализу деформационных процессов, происходящих в непосредственной близости от дневной поверхности Земли.

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим упрощенную геометрическую модель земной коры в виде упругого изотропного полупространства. Деформационные процессы в такой системе описываются системой дифференциальных уравнений Ламе:

$$\mu u_{i jj} + (\lambda + \mu) u_{j j i} + X_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где u_i — компоненты вектора перемещений; λ, μ — коэффициенты Ламе; X_i — компоненты вектора массовых сил; индексами после запятой обозначено дифференцирование по соответствующим пространственным координатам.

Примем, что упругое полупространство занимает область $x_3 \leq 0$, а поверхность Земли соответствует плоскости $x_3 = 0$. На этой поверхности выполняются условия отсутствия напряжений в направлении оси x_3 :

$$\sigma_{31}|_{x_3=0} = \sigma_{32}|_{x_3=0} = \sigma_{33}|_{x_3=0} = 0. \quad (2)$$

Дополнительно потребуем, чтобы напряжения, создаваемые очагом формирующегося землетрясения, затухали на бесконечности:

$$\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{ij} = \lim_{x_2 \rightarrow \pm\infty} \sigma_{ij} = \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \sigma_{ij} = 0. \quad (3)$$

Для описания силового воздействия, соответствующего системе сил, показанной на рис. 1, введем плотность распределения массовых сил \mathbf{X} . Будем считать, что все силы приложены в точке с координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) внутри упругого полупространства. В случае сосредоточенной силы, направленной вдоль оси j с интенсивностью p , вектор массовых сил принимает вид

$$\mathbf{X}^j = p\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_j, \quad (4)$$

где $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3)$ — трехмерная дельта-функция Дирака, \mathbf{e}_j — единичный базисный вектор.

На основании соотношения (4) построим выражения для двойных сил. Рассмотрим сначала двойную силу, направленную вдоль оси x_1 с интенсивностью p_{11} . Как показано на рис. 2, а, такая система может быть представлена как комбинация двух сосредоточенных сил \mathbf{X}_1^1 и \mathbf{X}_2^1 , приложенных в точках $(\xi_1 + \Delta\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $(\xi_1 - \Delta\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ соответственно, при $\Delta\xi_1 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^1 &= p_{11}\delta(x_1 - (\xi_1 + \Delta\xi_1), x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3)\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{X}_2^1 &= p_{11}\delta(x_1 - (\xi_1 - \Delta\xi_1), x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3)\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{X} &= \lim_{\Delta\xi_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}_1^1 - \mathbf{X}_2^1}{2\Delta\xi_1} = p_{11} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_1} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, для двойной силы вдоль оси x_1 с моментом относительно оси x_3 интенсивности p_{12} (рис. 2, б) используем комбинацию сил \mathbf{X}_1^1 и \mathbf{X}_2^2 , приложенных в точках $(\xi_1, \xi_2 + \Delta\xi_2, \xi_3)$ и $(\xi_1, \xi_2 - \Delta\xi_2, \xi_3)$, при $\Delta\xi_2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1^1 &= p_{12}\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - (\xi_2 + \Delta\xi_2), x_3 - \xi_3)\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{X}_2^2 &= p_{12}\delta(x_1 - \xi_1, x_2 - (\xi_2 - \Delta\xi_2), x_3 - \xi_3)\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{X} &= \lim_{\Delta\xi_2 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{X}_1^1 - \mathbf{X}_2^2}{2\Delta\xi_2} = p_{12} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_2} \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

По аналогичной схеме могут быть получены все остальные компоненты системы сил, необходимые для описания силового эквивалента произвольно ориентированного разрыва в сплошной среде. В общем случае компоненты вектора массовых сил \mathbf{X} выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} X_1 &= p_{11} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_1} + p_{12} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_2} + p_{13} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_3}, \\ X_2 &= p_{21} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_1} + p_{22} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_2} + p_{23} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_3}, \\ X_3 &= p_{31} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_1} + p_{32} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_2} + p_{33} \frac{\partial\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_3}. \end{aligned}$$

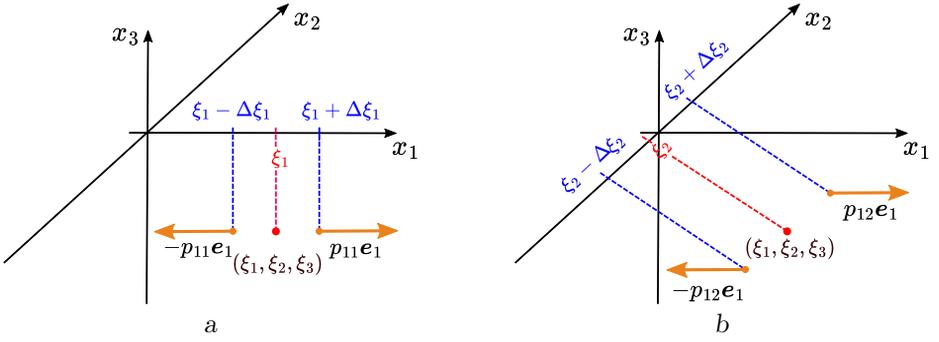


Рис. 2. Схематическое изображение комбинации сосредоточенных сил, необходимой для получения двойной силы вдоль оси x_1 (а) и двойной силы вдоль той же оси, но с моментом относительно оси x_3 (б)

[Figure 2. Schematic representation of a combination of concentrated forces to obtain a double force along the x_1 axis (a) and a double force along the same axis, but with a moment relative to the x_3 axis (b)]

Полученные выражения могут быть записаны в более компактной форме:

$$X_i = p_{ij} \frac{\partial \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где p_{ij} характеризует интенсивность соответствующей пары сил.

3. Аналитические решения. Для задачи (1) с граничными условиями (2) и (3) существуют точные решения в виде функций Грина, впервые полученные Р. Миндлином. Рассмотрим подробно вид этих функций для различных ориентаций точечных сил.

3.1. Функции Грина для полупространства. Для единичной силы, приложенной в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) упругого полупространства и направленной вдоль оси x_3 , компоненты функции Грина $\mathbf{g}^3(\mathbf{x})$ имеют следующий вид:

$$g_1^3 = \frac{(x_1 - \xi_1)}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(x_3 - \xi_3)}{r_1^3} + \frac{(3-4\nu)(x_3 - \xi_3)}{r_2^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{r_2(r_2 - x_3 - \xi_3)} + \frac{6x_3\xi_3}{r_2^5} \right],$$

$$g_2^3 = \frac{(x_2 - \xi_2)}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(x_3 - \xi_3)}{r_1^3} + \frac{(3-4\nu)(x_3 - \xi_3)}{r_2^3} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{r_2(r_2 - x_3 - \xi_3)} + \frac{6x_3\xi_3(x_3 + \xi_3)}{r_2^5} \right],$$

$$g_3^3 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(3-4\nu)}{r_1} + \frac{5-12\nu+8\nu^2}{r_2} + \frac{(x_3 - \xi_3)^2}{r_1^3} + \frac{(3-4\nu)(x_3 + \xi_3)^2 - 2x_3\xi_3}{r_2^3} \right],$$

где ν — коэффициент Пуассона среды, а величины r_1 и r_2 определяются так:

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + \xi_3)^2}.$$

Для случая единичной силы, направленной вдоль оси x_1 , компоненты функции Грина $\mathbf{g}^1(\mathbf{x})$ выражаются более сложными соотношениями:

$$\begin{aligned} g_1^1 &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{3-4\nu}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{(x_1-\xi_1)^2}{r_2^3} + \frac{(3-4\nu)(x_1-\xi_1)}{r_2^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)[r_2^2 - (x_1-\xi_1)^2 - r_2(x_3+\xi_3)]}{r_2(r_2-x_3-\xi_3)^2} \right\}, \\ g_2^1 &= \frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{(3-4\nu)}{r_2^3} - \frac{6x_3\xi_3}{r_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{r_2(r_2-x_3-\xi_3)^2} \right], \\ g_3^1 &= \frac{(x_1-\xi_1)}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{(x_3-\xi_3)}{r_1^3} + \frac{(3-4\nu)(x_3-\xi_3)}{r_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{r_2(r_2-x_3-\xi_3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{6x_3\xi_3(x_3+\xi_3)}{r_2^5} \right]. \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи функция Грина $\mathbf{g}^2(\mathbf{x})$ для силы вдоль оси x_2 может быть получена из $\mathbf{g}^1(\mathbf{x})$ простой заменой индексов 1 и 2.

3.2. Решение для системы двойных сил. Функции Грина, соответствующие действию двойных сил, могут быть получены дифференцированием основных решений $\mathbf{g}^i(\mathbf{x})$ по пространственным координатам, то есть в виде $\partial \mathbf{g}^i(\mathbf{x}) / \partial x_j$ [18]. При этом:

- при $i = j$ получаем решение для пары двойных сил, направленных вдоль соответствующей оси;
- при $i \neq j$ – решение для пары двойных сил с моментом относительно оси, отличной от i и j .

3.3. Общее решение через формулу Вольтерра. В общем случае поле смещений в упругом полупространстве может быть выражено через интегральное представление Вольтерра [16]:

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} s_i(\boldsymbol{\xi}) \sigma_{ij}^k(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) n_j d\Sigma,$$

где $s_i(\boldsymbol{\xi})$ – вектор смещения на поверхности разрыва Σ , n_j – компоненты единичной нормали к поверхности Σ .

С учетом закона Гука для однородной изотропной среды формула Вольтерра принимает вид

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} [\mu(s_p n_q + s_q n_p) + \lambda s_k n_k \delta_{pq}] \frac{\partial g_k^p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_q} d\Sigma = \int_{\Sigma} m_{pq} \frac{\partial g_k^p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_q} d\Sigma,$$

где $m_{pq} = \mu(s_p n_q + s_q n_p) + \lambda s_k n_k \delta_{pq}$ – тензор плотности сейсмического момента [17], полностью характеризующий механику очага землетрясения.

Для случая точечного источника решение задачи принимает особенно простой вид:

$$u_k(\mathbf{x}) = M_{pq} \frac{\partial g_k^p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_q},$$

где M_{pq} – тензор сейсмического момента. Данное выражение будет использовано в дальнейшем в качестве основы для численного моделирования.

3.4. Оценка коэффициента усиления деформаций. С учетом квадратичной зависимости между компонентами тензора деформаций ε_{ij} и плотностью потенциальной энергии упругих деформаций коэффициент усиления напряженно-деформированного состояния при подготовке землетрясения принимается равным $\eta^{-0.5}$. Практическая формула для оценки этого коэффициента, предложенная И. П. Добровольским [3], имеет вид

$$\eta = 10^{0.26M_W - 3.93},$$

где M_W — моментная магнитуда землетрясения.

4. Результаты численного моделирования. Для численного моделирования использовались данные из каталога “*The Global Centroid-Moment-Tensor Catalog*” (<https://www.globalcmt.org/>), содержащего информацию о механизмах очагов землетрясений. Из каталога отобраны все сейсмические события, зарегистрированные вблизи Камчатского полуострова в период с 1976 по 2020 год. В анализ включены следующие параметры:

- дата и время события;
- координаты эпицентра (широта, долгота);
- глубина гипоцентра;
- магнитуда землетрясения;
- тензор сейсмического момента;
- скалярный сейсмический момент.

Географические координаты эпицентров находились в диапазоне от 49° до 60° с. ш. и от 149.0° до 170.0° в. д. Общий объем выборки составил $N = 877$ землетрясений.

4.1. Методика расчетов. Моделирование деформационных процессов выполнялось для поверхности земной коры ($x_3 = 0$). Расчетная область покрывала географические координаты $[48^\circ\text{--}60^\circ$ с. ш.] и $[151^\circ\text{--}170^\circ$ в. д.] с шагом сетки 0.5° . Параметры упругой среды приняты следующими:

- коэффициенты Ламе $\mu = \lambda = 3.675 \cdot 10^{10}$ Н/м²;
- коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$.

Для каждого землетрясения в узлах расчетной сетки вычислялись предсейсмические деформации по формуле

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{\max},$$

где $\sigma_{\max} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\}$ — максимальное касательное напряжение; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные значения тензора напряжений.

Для каждого узла сетки (i, j) определялось количество случаев n_{ij} , когда деформации превышали фоновый уровень 10^{-8} , после чего вычислялись относительные частоты $\omega_{ij} = n_{ij}/N$.

4.2. Анализ результатов. Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4. На рис. 3 показано пространственное распределение относительных частот повышенных деформаций за весь исследуемый период (1976–2020 гг.). Наблюдаются следующие закономерности:

- неравномерное распределение частот с максимумами вдоль линии основного разлома у побережья Камчатки;

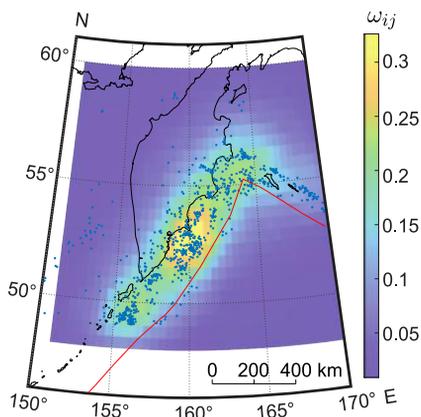


Рис. 3. Распределение относительных частот повышенных деформаций (1976–2020 гг.): точки — эпицентры землетрясений; красная линия — основной разлом

[Figure 3. Distribution of relative frequencies of increased deformations (1976–2020). Dots show earthquake epicenters, red line indicates the main fault]

- наибольшие значения частот в центральной части расчетной области;
- соседство зон максимальных деформаций с районами плотной населенности.

На рис. 4 представлены результаты моделирования для отдельных годов анализируемого периода. Из рисунка видно, что в 2013 г. (рис. 4, b) и 2016 г. (рис. 4, c) наблюдается увеличение относительных частот повышенных деформаций до 0.6–0.8 в областях с наибольшей концентрацией землетрясений. Суммарная накопленная потенциальная энергия упругих деформаций составила 1.6×10^{17} Дж (63 землетрясения) в 2013 г. и 4.6×10^{15} Дж (23 землетрясения) в 2016 г.

В 2005 г. (рис. 4, a) и 2020 г. (рис. 4, d) значения относительных частот оказались существенно ниже. По нашему мнению, это обусловлено большей пространственной разреженностью землетрясений и меньшей суммарной энергией деформаций, которая составила 1.3×10^{14} Дж (22 землетрясения) и 5.8×10^{14} Дж (27 землетрясений) соответственно.

Заключение. В рамках линейной теории упругости предложен новый подход к моделированию пространственного распределения областей повышенных деформаций, возникающих при подготовке землетрясений. Для каждой точки исследуемой поверхности земной коры выполняется моделирование предсейсмических деформаций с последующим подсчетом случаев превышения порогового значения 10^{-8} . На основе полученных данных рассчитываются относительные частоты возникновения таких деформаций.

Предложенный метод апробирован на данных каталога “*The Global Centroid-Moment-Tensor Catalog*” для Камчатки — одного из самых сейсмически активных регионов планеты. Установлено, что наиболее часто аномальные деформации возникают вдоль линии основного разлома у побережья Камчатки, причем максимумы относительных частот граничат с густонаселенными районами.

Детальный анализ по годам выявил значительную вариативность: наблюдаются периоды как с высокими частотами аномальных деформаций (0.6–0.8), так и с низкими (0.1–0.2).

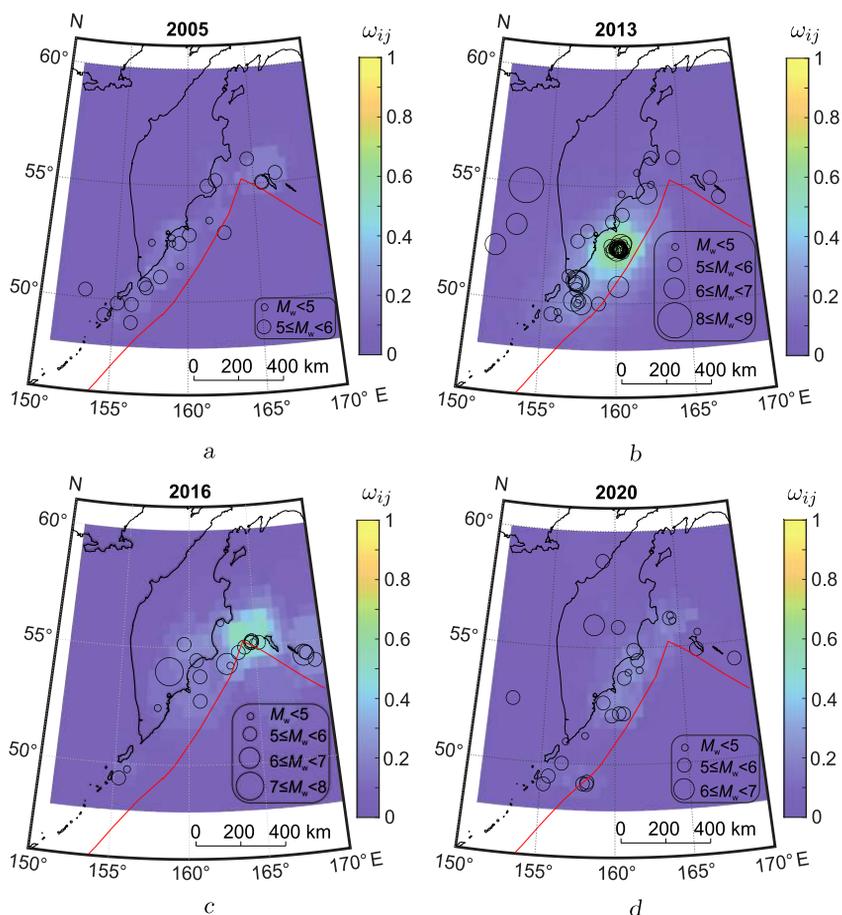


Рис. 4. Распределение относительных частот по годам: 2005 (a), 2013 (b), 2016 (c), 2020 (d): размер кружков соответствует магнитуде M_W ; красная линия — основной разлом

[Figure 4. Distribution of relative frequencies by year: 2005 (a), 2013 (b), 2016 (c), 2020 (d): circle size corresponds to moment magnitude M_W ; red line indicates the main fault]

Таким образом, разработан подход для оценки зон повышенных деформаций при подготовке сильных землетрясений, что представляет значительный интерес для исследования предсейсмических аномалий различной природы.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Государственного задания Института космических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИКИР ДВО РАН), регистрационный номер темы исследования 124012300245-2.

Библиографический список

1. Sholz C. *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. xix+493 pp.
2. Мячкин В. И., Костров Б. В., Соболев Г. А., Шамина О. Г. Основы физики очага и предвестники землетрясений // *Физика очага землетрясений*; ред. М. А. Садовский. М.: Наука, 1975. С. 6–29.
3. Добровольский И. П. *Математическая теория прогноза и подготовки тектонического землетрясения*. М.: Физматлит, 2009. 240 с.
4. Brace W. F., Byerlee J. D. Stick-slip as a mechanism for earthquakes // *Science*, 1966. vol. 153, no. 3739. pp. 990–992. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.153.3739.990>.
5. Калинин В. А., Родкин М. В., Томашевская И. С. *Геодинамические эффекты физико-химических превращений в твердой среде*. М.: Наука, 1989. 157 с.
6. Martínez-Garzón P., Poli P. Cascade and pre-slip models oversimplify the complexity of earthquake preparation in nature // *Commun. Earth Environ.*, 2024. vol. 5, 120. DOI: <https://doi.org/10.1038/s43247-024-01285-y>.
7. Семенов Р. М., Кашковский В. В., Лопатин М. Н. Модель подготовки и реализации тектонического землетрясения и его предвестников в условиях растяжения земной коры // *Геодинамика и тектонофизика*, 2018. Т. 9, № 1. С. 165–175. EDN: XVEWTR. DOI: <https://doi.org/10.5800/GT-2018-9-1-0343>.
8. Добровольский И. П. Распределение деформаций и напряжений при подготовке тектонического землетрясения // *Физика земли*, 2003. № 10. С. 33–40. EDN: OOHLPX.
9. Ребецкий Ю. Л., Лермонтова А. С. Учет закритического состояния геосреды и проблема дальнедействующего влияния очагов землетрясений // *Вестник КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле*, 2016. № 4. С. 115–123.
10. Ребецкий Ю. Л., Лермонтова А. С. О проблеме дальнедействующего влияния очагов землетрясений // *Вулканол. и сейсмол.*, 2018. № 5. С. 53–66. EDN: OMSOWB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0203030618050061>.
11. Пережогин А. С., Шевцов Б. М. Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями // *Вычисл. технол.*, 2009. Т. 14, № 3. С. 48–57. EDN: JXMWHA.
12. Пережогин А. С. *Моделирование зон геоакустической эмиссии в условиях деформационных возмущений*. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2013. 92 с.
13. Назарова Л. А., Назаров Л. А., Козлова М. П. Роль дилатансии в формировании и эволюции зон дезинтеграции в окрестности неоднородностей в породном массиве // *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*, 2009. № 5. С. 3–12. EDN: KXZMTZ.
14. Салтыков В. А., Кугаенко Ю. А. Развитие приповерхностных зон дилатансии как возможная причина аномалий в параметрах сейсмической эмиссии перед сильными землетрясениями // *Тихоокеан. геолог.*, 2012. Т. 31, № 1. С. 96–106. EDN: OXSTWD.
15. Gareev M., Marapulets Yu. Modeling locations with enhanced Earth's crust deformation during earthquake preparation near the Kamchatka Peninsula // *Appl. Sci.*, 2022. vol. 13, no. 1, 290. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13010290>.
16. Segall P. *Earthquake and Volcano Deformation*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2010. xxiii+432 pp.
17. Aki K., Richards P. G. *Quantitative Seismology*. Sausalito, California: University Science Books, 2002. 704 pp.
18. Лурье А. И. *Теория упругости*. М.: Наука, 1970. 940 с.

MSC: 74B05, 86A15, 35Q74

Modeling of the spatial distribution of increased pre-seismic deformation areas

*M. I. Gapeev, Yu. V. Marapulets, A. A. Solodchuk*Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
7, Mirnaya st., Paratunka, Kamchatksy krai, 684034, Russian Federation.

Abstract

We present a novel approach within linear elasticity theory for modeling the spatial distribution of enhanced crustal deformations during earthquake preparation. Our model utilizes the Lamé differential equation system, representing the seismic source as a concentrated force system acting at a point within an elastic half-space. The associated boundary value problem is solved analytically using Green's functions. The framework computes anomalous pre-seismic deformations at each surface point and quantifies their occurrence frequency relative to background tidal deformation thresholds.

The method was validated using the *Global Centroid-Moment-Tensor Catalog* for the Kamchatka Peninsula seismic zone. Simulations of deformation patterns preceding earthquakes (1976–2020) reveal:

- Deformation anomalies predominantly align with the primary coastal fault system;
- Peak occurrence frequencies (0.6–0.8) correlate with densely populated regions;
- Distinct temporal variability, with high-activity phases (0.6–0.8) interspersed with low-activity intervals (0.1–0.2).

This approach provides a robust tool for investigating pre-seismic deformation patterns and identifying multidisciplinary precursor phenomena in active tectonic regions.

Keywords: modeling of pre-seismic deformations, Green's function, theory of elasticity, Kamchatka seismicity, tectonic stress.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Gapeev M. I., Marapulets Yu. V., Solodchuk A. A. Modeling of the spatial distribution of increased pre-seismic deformation areas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 77–90. EDN: 0FDPNU. DOI: 10.14498/vsgtu2100 (In Russian).

Authors' Details:

Maxim I. Gapeev  <https://orcid.org/0000-0001-5798-7166>Junior Researcher; Lab. of Acoustic Research; e-mail: gapeev.sci@yandex.ru*Yury V. Marapulets*  <https://orcid.org/0000-0002-3030-9944>Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Director; e-mail: marpl@ikir.ru*Alexandra A. Solodchuk*  <https://orcid.org/0000-0002-6761-8978>Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Acoustic Research;
e-mail: aleksandra@ikir.ru

Received: 20th June, 2024 / Revised: 25th October, 2024 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 25th March, 2025

Competing interests. The authors declare no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This study was supported by the State Assignment of the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (IKIR FEB RAS), research project registration no. 124012300245-2.

References

1. Sholz C. *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2019, xix+493 pp.
2. Myachkin V. I., Kostrov B. V., Sobolev G. A., Shamina O. G. Fundamentals of earthquake source physics and earthquake precursors, In: *Fizika ochaga zemletriasenii* [Earthquake Source Physics]; ed. M. A. Sadovsky. Moscow, Nauka, 1975, pp. 6–29 (In Russian).
3. Dobrovolskiy I. P. *Matematicheskaya teoriya prognoza i podgotovki tektonicheskogo zemletriaseniya* [Mathematical Theory of Prediction and Preparation of a Tectonic Earthquake]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 240 pp. (In Russian)
4. Brace W. F., Byerlee J. D. Stick-slip as a mechanism for earthquakes, *Science*, 1966, vol. 153, no. 3739, pp. 990–992. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.153.3739.990>.
5. Kalinin V. A., Rodkin M. V., Tomashevskaya I. S. *Geodinamicheskie efekty fiziko-khimicheskikh prevrashchenii v tverdoi srede* [Geodynamic Effects of Physical and Chemical Transformations in a Solid Medium]. Moscow, Nauka, 157 pp. (in Russian)
6. Martínez-Garzón P., Poli P. Cascade and pre-slip models oversimplify the complexity of earthquake preparation in nature, *Commun. Earth Environ.*, 2024, vol. 5, 120. DOI: <https://doi.org/10.1038/s43247-024-01285-y>.
7. Semenov R. M., Kashkovsky V. V., Lopatin M. N. Model of tectonic earthquake preparation and occurrence and its precursors in conditions of crustal stretching, *Geodynamics Tectonophysics*, 2018, vol. 9, no. 1, pp. 165–175 (In Russian). EDN: XVEWTR. DOI: <https://doi.org/10.5800/GT-2018-9-1-0343>.
8. Dobrovolskiy I. P. Strain and stress distribution associated with the preparation of a tectonic earthquake, *Izv. Phys. Solid Earth*, 2003, vol. 39, no. 10, pp. 812–819. EDN: GUJETV.
9. Rebetsky Yu. L., Lermontova A. S. Registration of supercritical conditions of geologic environment and challenges in earthquake source remote sensing, *Vestnik KRAUNTs, Nauki o Zemle*, 2016, no. 4, pp. 115–123 (In Russian).
10. Rebetsky Yu. L., Lermontova A. S. On the long-range influence of earthquake rupture zones, *J. Volcanolog. Seismol.*, 2018, vol. 12, no. 5, pp. 341–352. EDN: UFEBWZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0742046318050068>.
11. Perezhogin A. S., Shevtsov B. M. Models of an intense-deformed condition of rocks before earthquakes and their correlation with geo-acoustic emission, *Vychisl. Tekhnol.*, 2009, vol. 14, no. 3, pp. 48–57 (In Russian). EDN: JXMWHA.
12. Perezhogin A. S. *Modelirovanie zon geoakusticheskoi emissii v usloviakh deformatsionnykh vozmushchenii* [Modeling of Geoacoustic Emission Zones under Conditions of Deformation Disturbances]. Petropavlovsk-Kamchatsky, Vitis Bering Kamchatka State Univ., 2013, 92 pp. (In Russian)

13. Nazarova L. A., Nazarov L. A. Dilatancy and the formation and evolution of disintegration zones in the vicinity of heterogeneities in a rock mass, *J. Min. Sci.*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 411–419. EDN: MWYMUJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10913-009-0052-3>.
14. Saltykov V. A., Kugaenko Yu. A. Development of near-surface dilatancy zones as a possible cause for seismic emission anomalies before strong earthquakes, *Russ. J. Pac. Geol.*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 86–95. EDN: PDKQFF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1819714012010113>.
15. Gapeev M., Marapulets Yu. Modeling locations with enhanced Earth's crust deformation during earthquake preparation near the Kamchatka Peninsula, *Appl. Sci.*, 2022, vol. 13, no. 1, 290. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13010290>.
16. Segall P. *Earthquake and Volcano Deformation*. Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 2010, xxiii+432 pp.
17. Aki K., Richards P. G. *Quantitative Seismology*. Sausalito, California, University Science Books, 2002, 704 pp.
18. Lur'e A. I. *Teoriia uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 940 pp. (In Russian)



УДК 622.276.1:519.6:532.5

Расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин

Д. Н. Майков^{1,2}, С. В. Исупов¹, С. С. Макаров²

¹ ООО «Сиама Мастер», Россия, 634003, Томск, ул. Белая, 3.

² Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

Аннотация

Представлена новая расчетная модель вертикальной скважины с трещиной гидравлического разрыва пласта, позволяющая учитывать изменение полудлины трещины при интерпретации данных гидродинамических исследований скважин (ГДИС). Основу модели составляет численный алгоритм, основанный на аналитическом решении с использованием оригинальной зависимости изменения полудлины трещины от времени и ее геометрических параметров. Данная зависимость получена на основе анализа промысловых данных ГДИС.

Модель реализована с использованием уравнения трещины бесконечной проводимости и принципа суперпозиции для описания изменения геометрии трещины. Принцип суперпозиции применен через последовательность запусков и остановок фиктивных скважин с различными полудлинами трещин, где каждая скважина активируется на определенный временной интервал, после чего останавливается.

Установлено, что изменение полудлины трещины на этапе ее закрытия описывается функциональной зависимостью от начальной и конечной полудлины трещины, а также от времени работы скважины. Результаты расчетов по предложенной модели, учитывающей зависимость полудлины трещины при определении давления в вертикальной скважине с трещиной гидравлического разрыва пласта, демонстрируют хорошее согласование с экспериментальными данными. На основе разработанного численного алгоритма проведен параметрический анализ модели

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Майков Д. Н., Исупов С. В., Макаров С. С. Расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 91–108. EDN: AMYRIA. DOI: 10.14498/vsgtu2080.

Сведения об авторах

Дмитрий Николаевич Майков <https://orcid.org/0000-0002-6526-4870>
ведущий специалист¹, младший научный сотрудник²; e-mail: dmaykov@integra.ru

Сергей Вадимович Исупов <https://orcid.org/0009-0006-5599-4366>
начальник отдела автоматизации¹; e-mail: svisupov@integra.ru

Сергей Сергеевич Макаров <https://orcid.org/0000-0003-1500-6950>
доктор технических наук; ведущий научный сотрудник²; e-mail: ssmak15@mail.ru

вертикальной скважины с трещиной гидравлического разрыва пласта. Выявлено влияние конечной полудлины трещины и длительности ее закрытия на изменение давления и производную давления в скважине.

Результаты численного анализа подтверждают обоснованность использования предложенной зависимости изменения полудлины трещины при расчете эксплуатационных режимов. Применение данной модели позволяет более точно интерпретировать данные ГДИС с учетом изменяющейся длины трещины.

Ключевые слова: скважина, трещина, автоматический гидроразрыв, аналитическое решение, принцип суперпозиции, функции зависимости полудлины трещины, параметрический анализ.

Получение: 31 января 2024 г. / Исправление: 7 февраля 2025 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 11 марта 2025 г.

Введение. При эксплуатации нагнетательных скважин происходит автоматический гидроразрыв пласта (автоГРП), вызванный высоким давлением закачки флюида. Геометрия трещин, образующихся в результате автоГРП, в частности, их длина, напрямую зависит от давления на забое скважины. В процессе дальнейшей эксплуатации скважин геометрия трещин может изменяться, что негативно влияет на разработку месторождений из-за незапланированных изменений в системе «скважина–пласт». Наличие изменений геометрии трещин можно отследить с помощью гидродинамических исследований скважин (ГДИС).

В связи с этим разработка новых модельных решений, описывающих работу скважины с учетом изменяющейся геометрии трещины автоГРП во времени, является актуальной задачей. Полученные результаты позволят повысить достоверность оценки эксплуатационных параметров скважин при разработке месторождений углеводородов.

Во многих работах, например [1–7], рассматривается процесс фильтрации флюида к скважине с трещиной гидроразрыва для моделей равномерного потока, конечной и бесконечной проводимости, постоянного размера, заполненной пропантом. В меньшей степени в литературе приведены результаты исследований процесса формирования трещины при автоГРП и фильтрации флюида к скважине с трещиной автоГРП.

Так, в работе [8] исследован процесс фильтрации в нагнетательной скважине с трещиной ГРП на раннем временном этапе методом падения давления. В работе [9] с использованием метода свертки и учета закрытия трещины получено решение уравнения пьезопроводности, приведенного в работе [8]. В работе [11], основанной на исследованиях [8–10], представлено полуаналитическое решение уравнения пьезопроводности для модели скважины с трещиной автоГРП. Решение получено при разделении влияния ствола скважины на ствол и трещину с допущением, что полудлина и высота трещины остаются постоянными при снижении давления. В работе [12] описано геомеханическое моделирование направления и траектории развития трещин гидроразрыва пласта при разработке низкопроницаемых коллекторов. В работе [13] представлены результаты численного моделирования закачки ньютоновской жидкости в скважину с образованием трещины гидравлического

разрыва в продуктивном пласте, а также рассмотрено влияние проницаемости пласта и эффекта ствола скважины на развитие техногенной трещины, давление в скважине и расход жидкости на ее забое. В работе [14] предложен упрощенный подход к моделированию самопроизвольного развития трещины при закачке ньютоновской жидкости в однородный изотропный пласт, а в [15] представлена модель фильтрации двухфазного потока в трехмерных пластах с учетом механических свойств пород, оценки пластовых напряжений и динамического роста трещин, вызванных нагнетанием. В работе [16] описана модель роста трещины при закачке полимера. В работах [17, 18] предложен метод оценки длины техногенной трещины в зависимости от забойного давления нагнетания, а также рассмотрены техногенные и петрологические факторы, влияющие на процессы инициации, распространения и деградации трещин автоГРП. В работе [19] представлена модель для расчета напряженного состояния пласта в присутствии произвольно ориентированных трещин и неоднородного поля давления, основанная на континуальной теории фильтрации [20], дополненной критерием максимальных растягивающих напряжений для расчета траектории растущих трещин. В работе [21] использована сопряженная гидрогеомеханическая модель сектора разработки, учитывающая развитие автоГРП в нагнетательных скважинах рядной системы разработки.

Настоящая работа посвящена разработке расчетной модели вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта для интерпретации параметров при гидродинамических исследованиях скважин.

1. Постановка задачи. Рассмотрим вертикальную скважину с трещиной, схема которой представлена на рис. 1.

Анализ диагностических графиков исследований скважин, в которых наблюдался эффект закрытия трещины автоГРП, позволил выделить характерные участки, на которых происходит изменение производной функции давления (см. рис. 2). Первый участок (I) соответствует линейному режиму течения к трещине с исходной геометрией. На втором участке (II) наблюдается закрытие трещины, что сопровождается характерным изгибом производной.

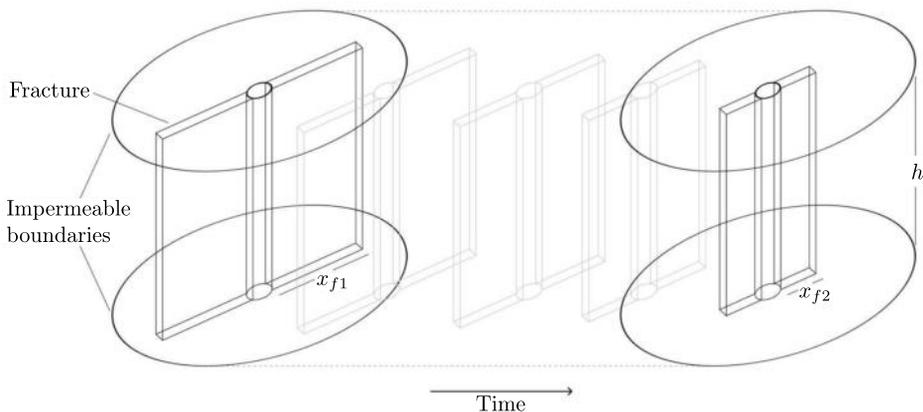


Рис. 1. Схема вертикальной скважины с изменяющейся трещиной
 [Figure 1. Scheme of a vertical well with a changing fracture]

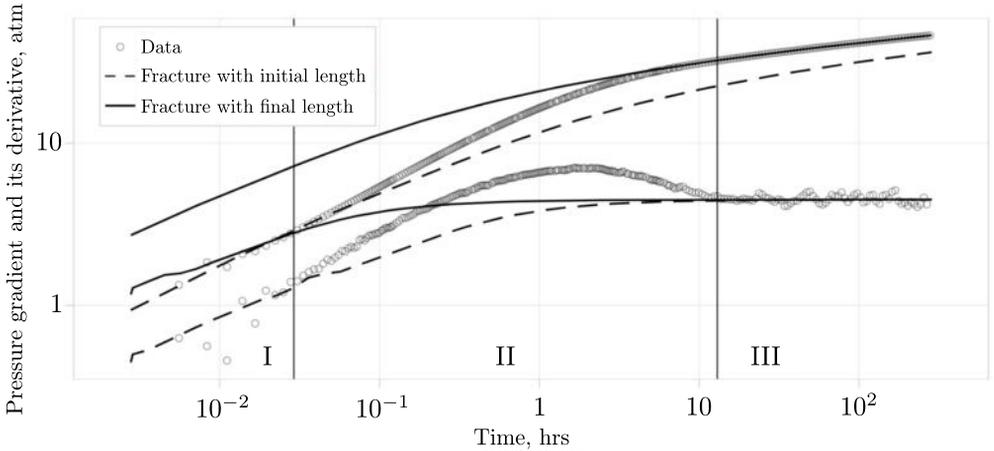


Рис. 2. Пример диагностического графика с трещиной автоГРП
[Figure 2. Example of log-log plot with waterflooding fracturing]

Третий участок (III) диагностического графика описывает радиальный режим течения к трещине со стабильной измененной геометрией.

При разработке модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП предполагается, что при постоянном давлении трещина имеет постоянную длину, а при переменном давлении ее размер функционально зависит от изменения давления. Основой описания процесса изменения геометрии трещины является уравнение трещины бесконечной проводимости [5–7], а также принцип суперпозиции [23, 24]. Влияние соседних скважин и влияние ствола скважины (ВСС) не учитывается.

Кроме того, приняты следующие допущения:

- 1) коллектор представляет собой бесконечный горизонтальный пласт с заданной постоянной толщиной, с однородной структурой и физическими свойствами;
- 2) кровля и подошва пласта являются непроницаемыми границами;
- 3) скважина является вертикальной и вскрывает пласт на всю толщину;
- 4) скважина обладает трещиной, которая вскрывает пласт по всей толщине, имеет однородную структуру и симметрична относительно вертикального ствола скважины;
- 5) фильтрация флюида является однофазной и изотермической.

2. Численный алгоритм. За основу построения модели взято выражение для расчета безразмерного давления в вертикальной скважине с трещиной равномерного потока, вскрывающей пласт по всей толщине [6, 7]:

$$\bar{p}_d(x_d, y_d, s) = \frac{1}{2x_{fd}s} \int_{-x_{fd}}^{x_{fd}} K_0(\sqrt{s} \sqrt{(x_d - x)^2 + y_d^2}) dx, \quad x_{fd} = \frac{x_f}{r_w}, \quad (1)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка; x_d – безразмерная координата x ; y_d – безразмерная координата y ; x_f – полудлина трещины; r_w – радиус скважины; x_{fd} – безразмерная полудлина трещины; \bar{p}_d – безразмерное давление; s – переменная преобразования Лапласа.

При расчете безразмерного давления \bar{p}_d в скважине по модели трещины равномерного потока величины x_d и y_d принимаются равными нулю. В работе [5] показано, что при $x_d = 0.732$ расчет безразмерного давления \bar{p}_d по уравнению (1) совпадает с расчетом для модели трещины бесконечной проводимости. В данной работе используется модель трещины бесконечной проводимости, поэтому принимается $x_d = 0.732$ и $y_d = 0$. Обратное преобразование Лапласа выполняется с использованием алгоритма Стефеста [22].

Процесс изменения геометрии полудлины трещины описывается с помощью принципа суперпозиции [23, 24]. Изменение длины трещины моделируется путем последовательного запуска и остановки фиктивных (модельных) скважин с различными полудлинами трещины, где каждая скважина активируется на определенный интервал времени, а затем останавливается. Соответственно, поведение давления в вертикальной скважине с автоГРП описывается уравнением

$$p(t) = p_i + \sum_{j=1}^{N-1} [\Delta p(x_{fj}, t - t_{j-1}) - \Delta p(x_{fj}, t - t_j)] + \Delta p(x_{fN}, t - t_{N-1}), \quad (2)$$

где t — время; $p(t)$ — расчетное давление в момент времени t ; p_i — начальное давление; Δp — функция перепада давления модели трещины; N — общее количество изменяющихся по времени полудлин трещины; x_{fj} — рассматриваемая полудлина трещины; t_j — время запуска рассматриваемой фиктивной скважины.

В уравнении (2) индекс $j = 1$ соответствует трещине с исходной полудлиной, а $j = N$ — трещине с конечной полудлиной. Полудлина трещины для промежуточных элементов имеет функциональную зависимость от давления.

Результаты тестовых расчетов по уравнению (2) показали, что точность результатов зависит от количества разбиений полудлин трещины на этапе ее закрытия. С увеличением количества разбиений погрешность уменьшается. Сложность расчета, согласно принципу суперпозиции, для каждого последующего шага растет линейно, а расчет всей функции в целом имеет квадратичную сложность.

Изменение полудлины трещины \bar{x}_f на этапе закрытия трещины описывается функциональной зависимостью от начальной x_{f1} и конечной x_{fN} полудлин трещины, а также от расчетного давления. Поскольку давление также зависит от полудлины трещины x_f согласно уравнению (1), возникает циклическая зависимость. Для упрощения дальнейших исследований зависимость полудлины трещины определяется не от давления, а от времени, что не искажает физический смысл, так как давление также является функцией времени:

$$\bar{x}_f = f(t, x_{f1}, x_{fN}).$$

3. Определение функциональной зависимости полудлины трещины. Для определения функциональной зависимости использовались реальные данные ГДИС, в которых наблюдался эффект закрытия трещины автоГРП. Данные были предоставлены ООО «Сиама Мастер» на основе информации, полученной от заказчика с различных объектов. В рамках текущей работы было отобрано 10 исследований ГДИС, где явно наблюдался данный эффект.

Для анализа функции закрытия трещины определялись начальные параметры модели: начальная полудлина трещины x_{fs} , конечная полудлина трещины x_{fe} , время начала закрытия трещины t_s и время окончания закрытия трещины t_e . Алгоритм определения этих параметров представлен ниже (см. рис. 3):

- 1) определение проницаемости по участку радиального режима течения;
- 2) определение начальной полудлины трещины по линейному режиму течения с использованием полученной проницаемости;
- 3) определение конечной полудлины трещины, описывающей давление на поздних временах, с использованием полученной проницаемости;
- 4) визуальное определение времени начала и окончания процесса закрытия трещины на диагностическом графике Бурде [26].

Для построения диагностического графика использовалась упрощенная история работы скважины, включающая единственный продолжительный период закачки, что соответствует реальным условиям эксплуатации скважин согласно отчетам по закачке флюида.

После определения временного интервала, в течение которого происходило закрытие трещины, а также начальных и конечных полудлин трещины моделировался процесс закрытия с использованием функции суперпозиции (2). Временной интервал был разбит на логарифмические шаги с дискретностью 20 точек на \log -цикл. В каждом временном интервале определялось значение полудлины трещины x_{fi} , обеспечивающее соответствие модели исходным данным исследования по давлению.

Поиск значений полудлины трещины осуществлялся с помощью алгоритма оптимизации Левенберга—Марквардта [25]. Целевая функция поиска имела вид

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N [f_i(\bar{x}_f) - g_i],$$

где индекс i соответствует определенному моменту времени измерения; N — общее число моментов измерения; f и g — векторы вычисленных и измерен-

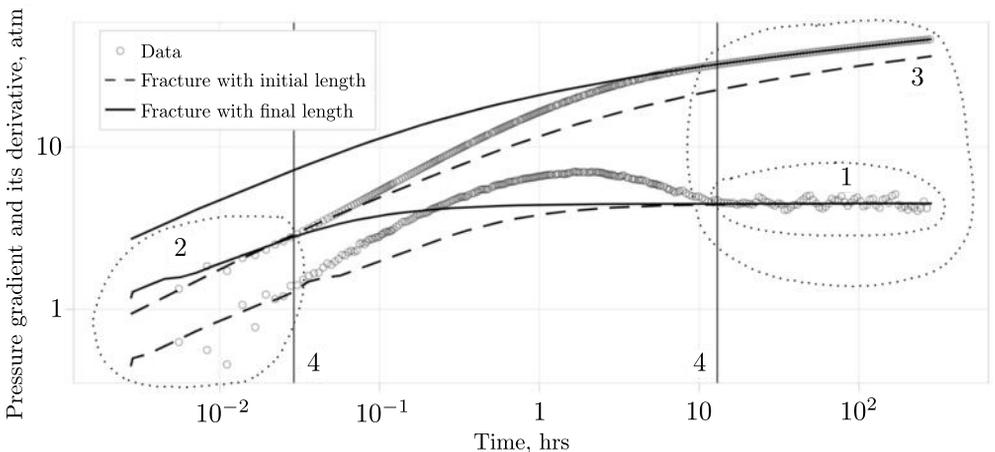


Рис. 3. Алгоритм определения начальных параметров модели автоГРП
 [Figure 3. Algorithm for determining initial parameters of the waterflooding fracturing model]

ных значений давления; \bar{x}_f — вектор искомых полудлин трещины. Вектор вычисленных значений рассчитывался по уравнению (2).

Для унификации всех экспериментальных данных в одном диапазоне они были приведены к безразмерному виду. Значения времени и полудлины трещины были логарифмированы по основанию 10, а затем нормализованы в диапазон от 0 до 1 по линейной зависимости, где $\log_{10}(x_{fs}) \rightarrow 1$, $\log_{10}(x_{fe}) \rightarrow 0$, $\log_{10}(t_s) \rightarrow 0$, $\log_{10}(t_e) \rightarrow 1$.

Результат поиска полудлин трещин с учетом преобразования показан на рис. 4, где видна схожесть распределения зависимости для экспериментальных данных с функцией $\cos(x)$. Итоговая функция полудлины трещины с учетом обратного преобразования из безразмерных величин имеет вид

$$\begin{aligned} x_f(t) &= 10g[v(t), \log_{10}(x_{fe}), \log_{10}(x_{fs})], \\ v(t) &= 0.5 + 0.5 \cos(\pi u[\log_{10}(t), \log_{10}(t_s), \log_{10}(t_e)]), \end{aligned} \quad (3)$$

$$u(x, x_{\min}, x_{\max}) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \quad g(x_n, x_{\min}, x_{\max}) = x_{\min} + x_n(x_{\max} - x_{\min}).$$

Здесь x_{fs} — начальная полудлина трещины; x_{fe} — конечная полудлина трещины; t_s — время начала закрытия трещины; t_e — время окончания закрытия трещины; $v(t)$ — промежуточная функция, зависящая от времени t ; $u(x, x_{\min}, x_{\max})$ — промежуточная функция, аргументами которой являются параметры x , x_{\min} и x_{\max} ; $g(x_n, x_{\min}, x_{\max})$ — промежуточная функция, аргументами которой являются параметры x_n , x_{\min} и x_{\max} .

Следует отметить, что существуют различные функции, способные описать полученные экспериментальные данные. В данной работе выбор функции обоснован ее простотой и соответствием эмпирическим наблюдениям.

На рис. 4 приведена зависимость изменения длины трещины, описываемая уравнением (3), в сравнении с экспериментальными результатами. Полученная зависимость изменения полудлины трещины от времени (см. рис. 4) хорошо описывает экспериментальные данные на всем временном интервале.

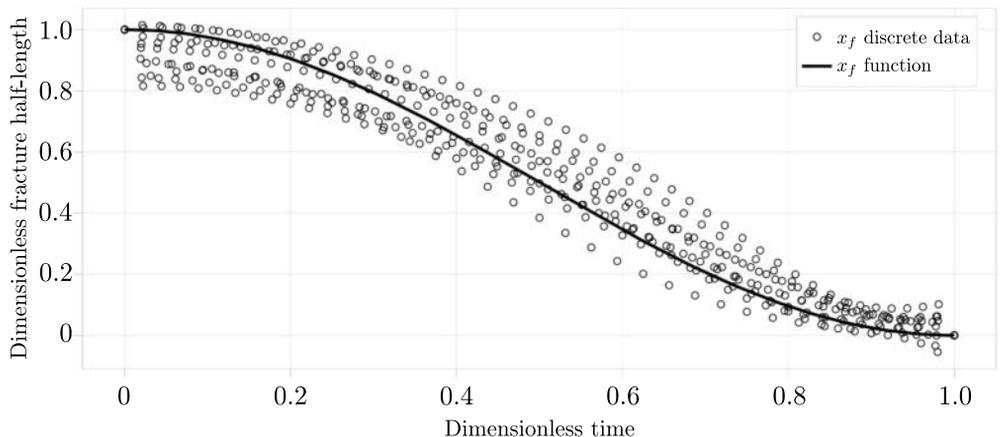


Рис. 4. Зависимость полудлины трещины от времени
[Figure 4. Fracture half-length dependence on time]

Среднеквадратичное отклонение расчетных значений полудлины трещины от экспериментальных данных ГДИС составило 4.31 %.

4. Верификация зависимости по расчету полудлины трещины.

Верификация полученной зависимости (3) для расчета полудлины трещины проводилась на основе данных трех исследований ГДИС, в которых также наблюдался эффект автоГРП. Сопоставление результатов, полученных по разработанной модели, с промысловыми данными для этих случаев представлено на диагностических графиках Бурде (см. рис. 5). Параметры моделей приведены в табл. 1. Для построения диагностического графика использовалась упрощенная история работы скважины, включающая единственный продолжительный период закачки.

На диагностических графиках (рис. 5) видно, что рассчитанное давление по модели с использованием предложенной зависимости (3) изменения полудлины трещины хорошо согласуется с результатами исследований ГДИС реальных скважин.

Таблица 1

Основные параметры модели [The main model parameters]

Parameters	Values		
	Fig. 5, a	Fig. 5, b	Fig. 5, c
Layer height, h (m)	16.2	10.7	15
Layer permeability, k (mD)	15.367	16.3909	1.6911
Total compressibility, ct (atm ⁻¹)	$5.021 \cdot 10^{-5}$	$8.604 \cdot 10^{-5}$	$4.878 \cdot 10^{-5}$
Porosity, ϕ	0.15	0.16	0.17
Fluid volume factor, B (m ³ /st.m ³)	1	1	1.045
Fluid viscosity, μ (cp)	1.21	1.03	0.35
Rate, q (m ³ /day)	88	109	56
Initial fracture half-length, x_{fs} (m)	18.704	8.8887	4.9078
Final fracture half-length, x_{fe} (m)	4.2315	3.0296	2.384
Fracture closure start time, t_s (hour)	0.0316	0.07943	0.07943
Fracture closure end time, t_e (hour)	14.1254	6.3096	3.9811

5. Численный анализ параметров модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП.

Численный анализ проводился для модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП на основе уравнений (2) и (3). Исходные данные, используемые для расчета по предлагаемой модели, приведены в табл. 2. Для расчетов использовалась модель трещины бесконечной проводимости (уравнение (1)).

Результаты расчета давления для заданных модельных условий представлены на рис. 6, на котором выделяются три этапа изменения трещины автоГРП: начальный этап, этап закрытия трещины и конечный этап. Начальный этап (в интервале времени 10^{-5} –0.01 ч) соответствует расчету по модели трещины бесконечной проводимости с начальной полудлиной трещины $x_{fs} = 200$ м. Этап закрытия трещины (0.01–1 ч) соответствует изменению полудлины трещины от начальной x_{fs} до конечной x_{fe} . Конечный этап (1– 10^5 ч) соответствует расчету давления по модели трещины бесконечной проводимости с конечной полудлиной $x_{fe} = 50$ м. Полное соответствие расчета модели трещины бесконечной проводимости при $x_{fe} = 50$ м наблюдается с 10 ч, что связано с применением принципа суперпозиции.

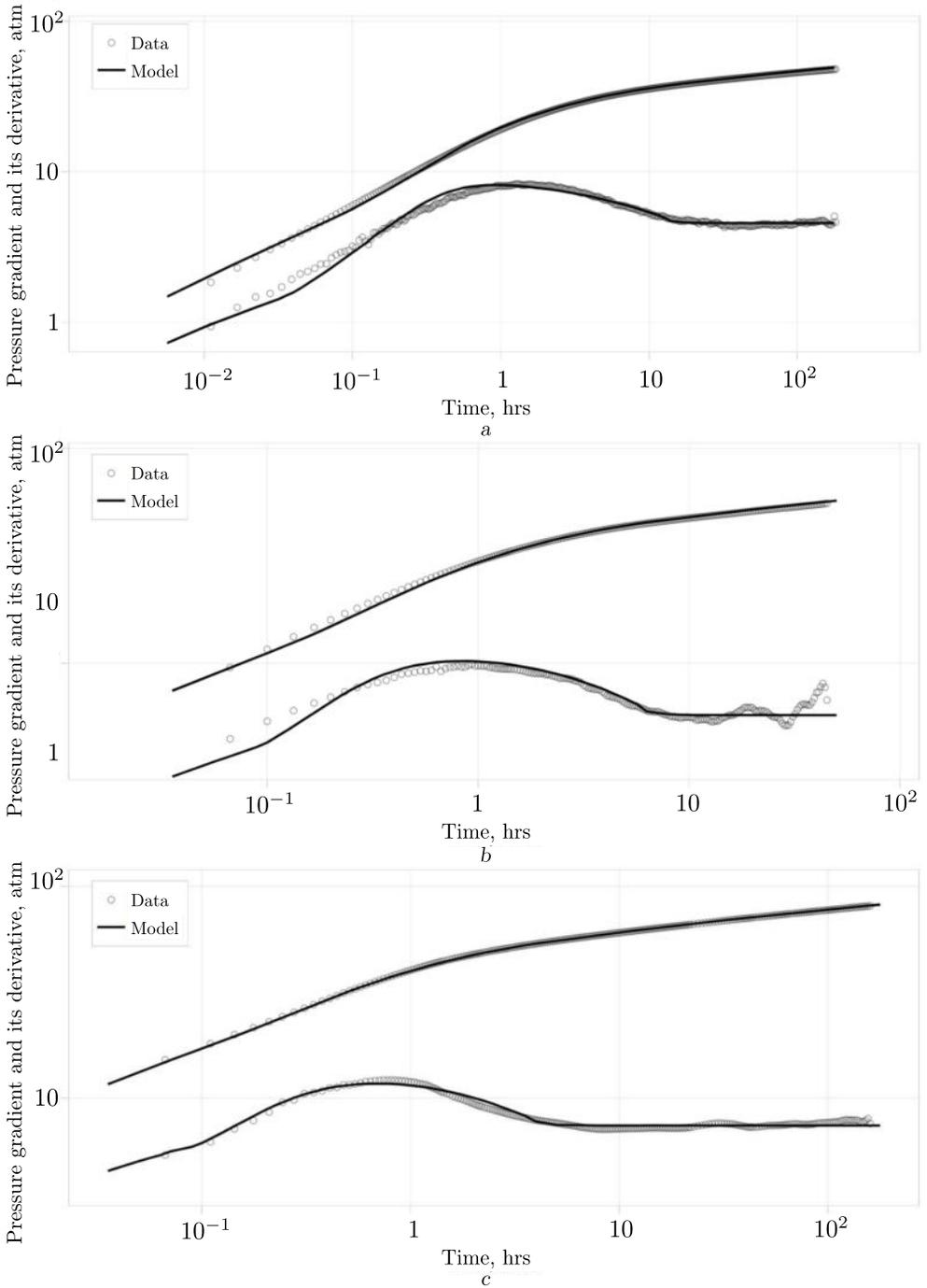


Рис. 5. Сравнение расчетных данных модели с результатами гидродинамических исследований скважин для параметров, приведенных в табл. 1: а – столбец 1; б – столбец 2; с – столбец 3

[Figure 5. Comparison of the model calculations with the well test analysis data for parameters listed in Table 1: a – column 1; b – column 2; c – column 3]

На рис. 7 показано влияние длительности закрытия трещины на изменение давления в скважине. Из рис. 7 видно, что при увеличении времени завершения закрытия трещины t_e увеличивается длительность процесса закрытия, а при уменьшении t_e возрастает изменение давления в интервале времени закрытия трещины. При малых значениях t_e (менее 10^{-2} ч) на производной может наблюдаться пик. Чем больше время закрытия трещины, тем плавнее происходит изменение перепада давления. С момента начала процесса и до 0.01 ч, а также после 10 ч расчетные значения перепада давления для всех случаев идентичны.

На рис. 8 показано влияние конечной полудлины трещины на изменение давления в скважине. Из рис. 8 видно, что с уменьшением конечной полудлины трещины x_{fe} увеличивается изменение давления с момента начала закрытия трещины (0.01 ч). При уменьшении x_{fe} в 2 раза (с 200 до 100 м) изменение давления в скважине на последней расчетной точке 10^5 ч увеличивается в 1.145 раза (с 44.672 до 51.132 атм). При уменьшении x_{fe} в 4 раза (с 200 до 50 м) изменение давления увеличивается в 1.288 раза (с 44.672 до

Таблица 2

Основные параметры модели [The main model parameters]

Parameter	Value
Layer height, h	10 m
Layer permeability, k	100 mD
Total compressibility, c_t	0.00005 atm^{-1}
Porosity, ϕ	0.2
Fluid volume factor, B	$1 \text{ m}^3/\text{st.m}^3$
Fluid viscosity, μ	5 cp
Rate, q	$100 \text{ m}^3/\text{day}$
Initial fracture half-length, x_{fs}	200 m
Final fracture half-length, x_{fe}	50 m
Changing stage start time, t_s	0.01 hour
Changing stage end time, t_e	1 hour

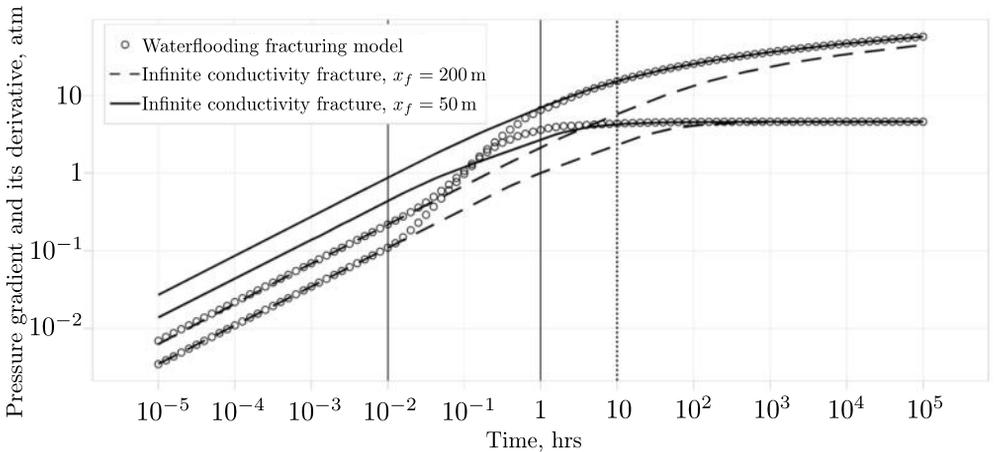


Рис. 6. Расчетное давление по модели трещины автоГРП для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 6. Calculated pressure according to the waterflooding fracturing model for parameters listed in Table 2]

57.516 атм). Производная изменения давления в интервале времени закрытия трещины (0.01–1 ч) возрастает с уменьшением x_{fe} . После 500 ч производная изменения давления для всех случаев идентична. При $x_{fe} = 200$ м модель вертикальной скважины с трещиной автоГРП полностью соответствует модели трещины бесконечной проводимости с полудлиной $x_f = 200$ м. Начальный этап (до 0.01 ч) для всех случаев также идентичен.

На рис. 9 показано влияние проницаемости пласта k на изменение давления в скважине. Из рис. 9 видно, что с уменьшением проницаемости пласта k увеличивается изменение давления и его производная на всем временном интервале. При уменьшении k в 10 раз (с 1000 до 100 мД) изменение давления в скважине на последней расчетной точке 10^5 ч увеличивается в 8.443

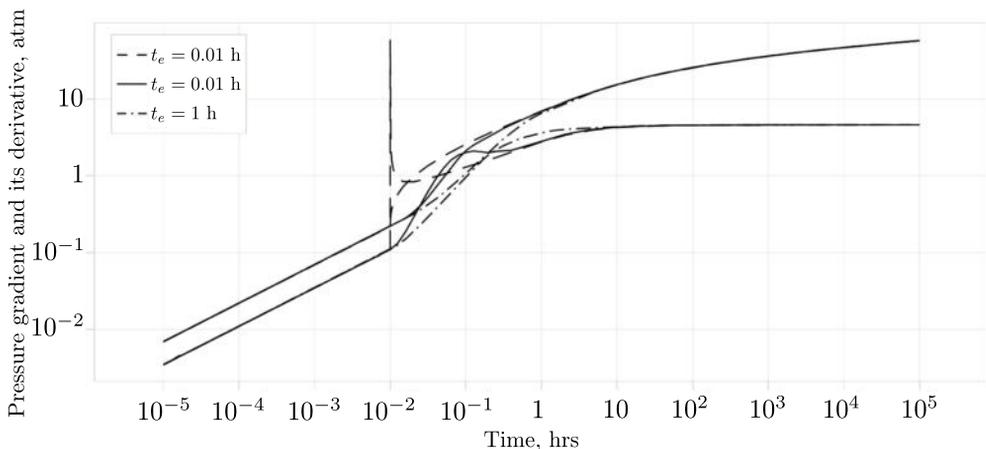


Рис. 7. Влияние длительности закрытия трещины на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 7. Influence of the fracture closure duration on pressure change for parameters listed in Table 2]

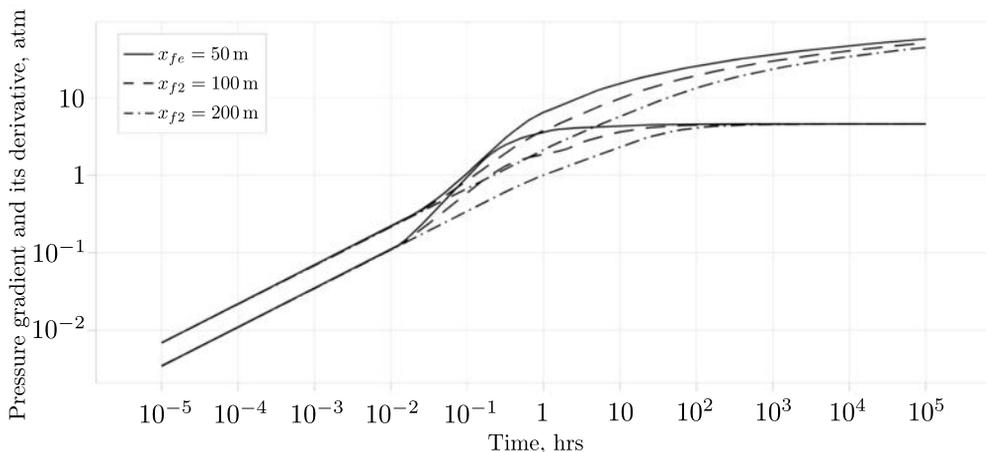


Рис. 8. Влияние конечной полудлины трещины на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 8. Influence of the final fracture half-length on pressure change for parameters listed in Table 2]

раза (с 6.812 до 57.516 атм). При уменьшении k в 100 раз (с 1000 до 10 мД) изменение давления увеличивается в 68.865 раза (с 6.812 до 469.119 атм).

На рис. 10 показано влияние скин-фактора S на изменение давления в скважине. Для учета скин-фактора S в уравнении (1) использованы положения, изложенные в работе [27]. Из рис. 10 видно, что с увеличением скин-фактора S увеличивается изменение давления на всем временном интервале. При увеличении S от 0 до 0.5 изменение давления в скважине на последней расчетной точке 10^5 ч увеличивается в 1.08 раза (с 57.516 до 62.122 атм). При увеличении S от 0 до 1 изменение давления увеличивается в 1.16 раза (с 57.516 до 66.727 атм). Производная изменения давления для всех случаев идентична на всем временном интервале.

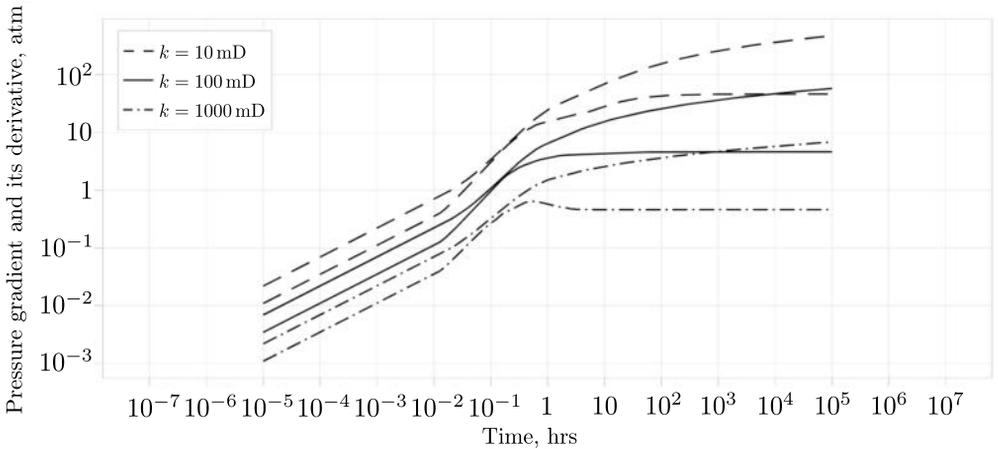


Рис. 9. Влияние проницаемости пласта на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 9. Influence of the layer permeability on pressure change for parameters listed in Table 2]

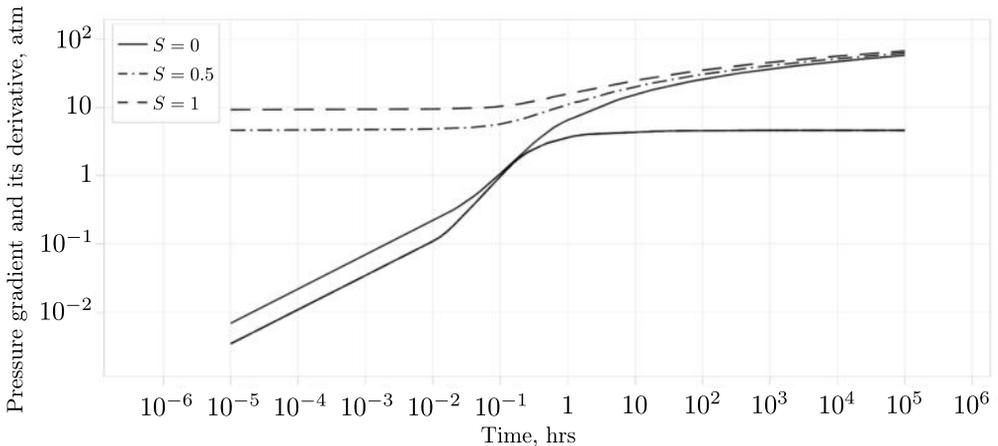


Рис. 10. Влияние скин-фактора на изменение давления для параметров, приведенных в табл. 2

[Figure 10. Influence of skin on pressure change for parameters listed in Table 2]

Выводы. В статье представлена новая расчетная модель вертикальной скважины с трещиной автоматического гидравлического разрыва пласта, позволяющая учитывать изменение полудлины трещины во времени при интерпретации параметров ГДИС. Модель основана на уравнении трещины бесконечной проводимости и принципе суперпозиции для описания изменения параметров трещины во времени.

Предложена функциональная зависимость изменения полудлины трещины, полученная на основе промысловых данных ГДИС, где наблюдался эффект автоГРП. Результаты расчетов по предлагаемой модели с использованием функции изменения полудлины трещины хорошо согласуются с экспериментальными данными по давлению. Функция описывает дискретные данные полудлин трещины на всем расчетном интервале, при этом максимальное среднеквадратичное отклонение между модельными и экспериментальными значениями составило 4.31 %.

В результате численного анализа параметров модели вертикальной скважины с трещиной автоГРП показано, что использование предложенной зависимости изменения полудлины трещины при расчете эксплуатационных режимов является обоснованным.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции статьи и написание рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное прочтение статьи, а также за ценные предложения и комментарии, которые способствовали улучшению работы.

Библиографический список

1. Nolte K. G. Determination of proppant and fluid schedules from fracturing-pressure decline // *SPE Prod. Eng.*, 1986. vol. 1, no. 4. pp. 255–265, SPE-13278-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13278-PA>.
2. Cinco-Ley H., Samaniego F., Dominguez N. Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture // *SPE J.*, 1978. vol. 18, no. 4. pp. 253–264, SPE-6014-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/6014-PA>.
3. Cinco-Ley H., Samaniego F. Transient pressure analysis for fractured wells // *J. Pet. Technol.*, 1981. vol. 33, no. 9. pp. 1749–1766, SPE-7490-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/7490-PA>.
4. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H. Application of the pressure derivative function in the pressure-transient testing of fractured wells // *SPE Form. Eval.*, 1986. vol. 1, no. 5. pp. 470–480, SPE-13056-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13056-PA>.
5. Gringarten A. C., Ramey H. J., Raghavan R. Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture // *SPE J.*, 1974. vol. 14, no. 4. pp. 347–360, SPE-4051-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/4051-PA>.
6. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 1 – Analytical considerations // *SPE Form. Eval.*, 1991. vol. 6, no. 3. pp. 359–368, SPE-18615-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18615-PA>.

7. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 – Computational considerations and applications // *SPE Form. Eval.*, 1991. vol. 6, no. 3. pp. 369–378, SPE-18616-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18616-PA>.
8. Hagoort J. *Waterflood-induced hydraulic fracturing*: PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1981. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:93b1fede-e03e-48d7-99c9-1c709d69397c>.
9. Koning E. J. L. *Waterflooding under fracturing conditions*: PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1988. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:c0bd1703-8cc5-46e0-a724-142a879298bd>.
10. Larsen L., Bratvold R. B. Effects of propagating fractures on pressure-transient injection and fall-off data // *SPE Form. Eval.*, 1994. vol. 9, no. 2. pp. 105–114, SPE-20580-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/20580-PA>.
11. van den Hoek P. J. Pressure transient analysis in fractured produced water injection wells // *SPE Asia Pacific Oil Gas Conf. Exhib.*, 2002, SPE-77946-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/77946-MS>.
12. Давлетова А. Р., Бикбулатова Г. Р., Федоров А. И., Давлетбаев А. Я. Геомеханическое моделирование направления и траектории развития трещин гидроразрыва пласта при разработке низкопроницаемых коллекторов // *Научно-технический вестник ОАО “НК “Роснефть”*, 2014. № 1. С. 40–43. EDN: RZSVCV.
13. Давлетбаев А. Я., Мухаметова З. С. Моделирование закачки жидкости в скважину с развитием трещины гидравлического разрыва пласта // *Инж.-физ. ж.*, 2019. Т. 92, № 4. С. 1074–1082. EDN: WDYTNQ.
14. Губайдуллин М. Р., Давлетбаев А. Я., Штинов В. А. [и др.] Численное исследование самопроизвольного развития трещины автоГРП в нагнетательной скважине // *Вестн. Акад. наук Республики Башкортостан*, 2022. Т. 45, № 4. С. 47–59. EDN: ECSMZY. DOI: https://doi.org/10.24412/1728-5283_2022_4_47_59.
15. Bhardwaj P., Hwang J., Manchanda R., Sharma M. Injection induced fracture propagation and stress reorientation in waterflooded reservoirs // *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2016, SPE-181883-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/181883-MS>.
16. Lee K., Huh C., Sharma M. Impact of fracture growth on well injectivity and reservoir sweep during waterflood and chemical EOR processes // *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2011, SPE-146778-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/146778-MS>.
17. Сюндюков А. В., Сагитов Д. К. Факторы влияния на развитие трещин авто-ГРП // *Изв. вузов. Нефть и газ*, 2023. № 1. С. 73–84. EDN: YWOMBX. DOI: <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2023-1-73-84>.
18. Сюндюков А. В., Сагитов Д. К. Метод оценки длины техногенной трещины в зависимости от забойного давления нагнетания // *Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов*, 2023. № 2. С. 40–51. EDN: XVZVPR. DOI: <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2023-2-40-51>.
19. Федоров А. И., Давлетова А. Р. Симулятор напряженного состояния пласта для определения направления развития трещин // *Геофизические исследования*, 2014. Т. 15, № 1. С. 15–26. EDN: RXQWXN.
20. Блохин А. М., Доровский В. Н. *Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума*. Новосибирск: ОИГГМ СО РАН, 1994. 184 с.
21. Копейкин Р. Р., Абдуллин Р. Ф., Калинин С. А. [и др.] Моделирование гидродинамических исследований скважин с учетом автоГРП в рядной системе разработки // *Нефтяное хозяйство*, 2023. № 12. С. 30–35. EDN: EVTWCW. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2023-12-30-35>.
22. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5] // *Comm. ACM*, 1970. vol. 13, no. 1. pp. 47–49. DOI: <https://doi.org/10.1145/361953.361969>.
23. Stewart G. *Well Test Design and Analysis*. Nashville, Tennessee: PennWell, 2011.
24. Майков Д. Н., Исупов С. В., Макаров С. С., Аниканов А. С. Метод ускорения расчета давления при изменяющихся дебитах по истории эксплуатации скважины // *Нефтяное хозяйство*, 2021. № 9. С. 105–107. EDN: MVQWDU. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-9-105-107>.

25. Майков Д. Н., Макаров С. С. Численное исследование алгоритмов оптимизации при адаптации гидродинамической модели по результатам исследований скважин // *Матем. моделирование*, 2022. Т. 34, № 9. С. 71–82. EDN: GBKCDW. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2022-09-05>.
26. Bourdet D. A new set of type curves simplifies well test analysis // *World Oil*, 1983. vol. 196, no. 6. pp. 95–106.
27. Hegeman P. S., Halford D. L., Joseph J. A. Well-test analysis with changing wellbore storage // *SPE Form. Eval.*, 1993. vol. 8, no. 03. pp. 201–207, SPE-21829-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/21829-PA>.

MSC: 76S05, 65C20, 86A60

A computational model of a vertical well with waterflooding fracturing for pressure transient analysis

D. N. Maykov^{1,2}, *S. V. Isupov*¹, *S. S. Makarov*²¹ SIAM MASTER Ltd, 3, Belaya st., Tomsk, 634003, Russian Federation.² Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34, T. Baramzina st., Izhevsk, 426067, Russian Federation.

Abstract

A new computational model for a vertical well with waterflooding fracturing is presented, which accounts for changes in the fracture half-length during the interpretation of pressure transient analysis (PTA) parameters. The model is based on a numerical algorithm derived from an analytical solution, utilizing a proposed relationship between the fracture half-length, process time, and its geometric dimensions. This functional dependence is developed using available PTA data.

The model employs the infinite-conductivity fracture equation and the superposition principle to describe changes in fracture geometry. The superposition principle is implemented through a series of activations and deactivations of fictitious wells with varying fracture half-lengths, where each well operates for a specific time interval before being shut down.

It is demonstrated that the change in fracture half-length during the closure stage follows a functional dependence on the initial and final fracture half-lengths, as well as the well operation time. The results obtained from the proposed model, incorporating the fracture half-length dependence function, show good agreement with experimental data when calculating pressure in a well with waterflooding fracturing.

A numerical analysis of the vertical well model with waterflooding fracturing is conducted using the developed algorithm. The influence of the final fracture half-length and the duration of fracture closure on pressure changes and the pressure derivative in the well is established. The use of the proposed fracture half-length dependence in calculating well operating conditions is

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Maykov D. N., Isupov S. V., Makarov S. S. A computational model of a vertical well with waterflooding fracturing for pressure transient analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 91–108. EDN: AMYRIA. DOI: 10.14498/vsgtu2080 (In Russian).

Authors' Details:

Dmitriy N. Maykov  <https://orcid.org/0000-0002-6526-4870>Leading Specialist¹, Junior Researcher²; e-mail: dmaykov@integra.ru*Sergey V. Isupov*  <https://orcid.org/0009-0006-5599-4366>Head of the Automation Dept.¹; e-mail: svisupov@integra.ru*Sergey S. Makarov*  <https://orcid.org/0000-0003-1500-6950>Doctor of Engineering Science; Senior Researcher²; e-mail: ssmak15@mail.ru

shown to be justified. The application of this model allows for a more accurate description of parameter changes during PTA interpretation in wells with fractures of variable length.

Keywords: well, fracture, waterflooding fracturing, analytical solution, superposition principle, fracture half-length dependence functions, numerical analysis.

Received: 31st January, 2024 / Revised: 7th February, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 11th March, 2025

Competing interests. The authors declare no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to the development of the article's concept and the writing of the manuscript. The authors take full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript is approved by all authors.

Funding. The research is conducted without external funding.

Acknowledgments. The authors would like to thank the reviewers for their careful reading of the manuscript and for their valuable suggestions and comments, which helped improve the quality of the manuscript.

References

1. Nolte K. G. Determination of proppant and fluid schedules from fracturing-pressure decline, *SPE Prod. Eng.*, 1986, vol. 1, no. 4, pp. 255–265, SPE-13278-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13278-PA>.
2. Cinco-Ley H., Samaniego F., Dominguez N. Transient pressure behavior for a well with a finite-conductivity vertical fracture, *SPE J.*, 1978, vol. 18, no. 4, pp. 253–264, SPE-6014-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/6014-PA>.
3. Cinco-Ley H., Samaniego F. Transient pressure analysis for fractured wells, *J. Pet. Technol.*, 1981, vol. 33, no. 9, pp. 1749–1766, SPE-7490-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/7490-PA>.
4. Wong D. W., Harrington A. G., Cinco-Ley H. Application of the pressure derivative function in the pressure-transient testing of fractured wells, *SPE Form. Eval.*, 1986, vol. 1, no. 5, pp. 470–480, SPE-13056-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/13056-PA>.
5. Gringarten A. C., Ramey H. J., Raghavan R. Unsteady-state pressure distributions created by a well with a single infinite-conductivity vertical fracture, *SPE J.*, 1974, vol. 14, no. 4, pp. 347–360, SPE-4051-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/4051-PA>.
6. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 1 – Analytical considerations, *SPE Form. Eval.*, 1991, vol. 6, no. 3, pp. 359–368, SPE-18615-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18615-PA>.
7. Ozkan E., Raghavan R. New solutions for well-test-analysis problems: Part 2 – Computational considerations and applications, *SPE Form. Eval.*, 1991, vol. 6, no. 3, pp. 369–378, SPE-18616-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/18616-PA>.
8. Hagoort J. *Waterflood-induced hydraulic fracturing*, PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1981. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:93b1fede-e03e-48d7-99c9-1c709d69397c>.
9. Koning E. J. L. *Waterflooding under fracturing conditions*, PhD Thesis. Delft Techn. Univ., 1988. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:c0bd1703-8cc5-46e0-a724-142a879298bd>.
10. Larsen L., Bratvold R. B. Effects of propagating fractures on pressure-transient injection and fall-off data, *SPE Form. Eval.*, 1994, vol. 9, no. 2, pp. 105–114, SPE-20580-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/20580-PA>.

11. van den Hoek P. J. Pressure transient analysis in fractured produced water injection wells, *SPE Asia Pacific Oil Gas Conf. Exhib.*, 2002, SPE-77946-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/77946-MS>.
12. Davletova A. R., Bikbulatova G. R., Fedorov A. I., Davletbaev A. Y. Geomechanical simulation of hydraulic fractures growth direction and trajectory in the low permeability reservoirs development, *Nauchno-Tekhnich. Vestn. Rosneft*, 2014, no. 1, pp. 40–43 (In Russian). EDN: RZSVCV.
13. Davletbaev A. Y., Mukhametova Z. S. Simulation of the injection of a liquid into a well in a payout bed with hydraulic fracturing, *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2019, vol. 92, no. 4, pp. 1041–1049. EDN: KSWBYY. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02018-1>.
14. Gubaidullin M. R., Davletbaev A. Ya., Shtinov V. A., et al. Numerical study of spontaneous development of autohf crack in injection well, *Herald of the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan*, 2022, vol. 45, no. 4, pp. 47–59 (In Russian). EDN: ECSMZU. DOI: https://doi.org/10.24412/1728-5283_2022_4_47_59.
15. Bhardwaj P., Hwang J., Manchanda R., Sharma M. Injection induced fracture propagation and stress reorientation in waterflooded reservoirs, *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2016, SPE-181883-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/181883-MS>.
16. Lee K., Huh C., Sharma M. Impact of fracture growth on well injectivity and reservoir sweep during waterflood and chemical EOR processes, *SPE Annual Techn. Conf. Exhib.*, 2011, SPE-146778-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/146778-MS>.
17. Syundyukov A. V., Sagitov D. K. Factors of influence on the development of self-induced hydraulic fracturing cracks, *Oil and Gas Studies*, 2023, no. 1, pp. 73–84 (In Russian). EDN: YWOMBX. DOI: <https://doi.org/10.31660/0445-0108-2023-1-73-84>.
18. Syundyukov A. V., Sagitov D. K. Method for estimating the length of man-caused fracture depending on bottomhole injection pressure, *Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2023, no. 2, pp. 40–51 (In Russian). EDN: XVZVPR. DOI: <https://doi.org/10.17122/ntj-oil-2023-2-40-51>.
19. Fedorov A. I., Davletova A. R. Reservoir stress state simulator for determining of fracture growth direction, *Geophysical Research*, 2014, vol. 15, no. 1, pp. 15–26 (In Russian). EDN: RXQWXN.
20. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. *Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum*. NY, Nova Science, 1995, 192 pp. (In Russian)
21. Kopeykin R. R., Abdullin R. F., Kalinin S. A., et al. Well test simulation accounting induced fracture in a linear development system, *Oil Industry*, 2023, no. 12, pp. 30–35 (In Russian). EDN: EVTWCW. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2023-12-30-35>.
22. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5], *Comm. ACM*, 1970, vol. 13, no. 1, pp. 47–49. DOI: <https://doi.org/10.1145/361953.361969>.
23. Stewart G. *Well Test Design and Analysis*. Nashville, Tennessee, PennWell, 2011.
24. Maykov D. N., Isupov S. V., Makarov S. S., Anikanov A. S. The efficient method for pressure calculation at variable rate, *Oil Industry*, 2021, no. 9, pp. 105–107 (In Russian). EDN: MVQWDU. DOI: <https://doi.org/10.24887/0028-2448-2021-9-105-107>.
25. Maykov D. N., Makarov S. S. Numerical investigation of optimization algorithms for adapting the hydrodynamic model based on the results of well tests, *Math. Models Comput. Simul.*, 2023, vol. 15, no. 2, pp. 289–296. EDN: SAFGZB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048223020126>.
26. Bourdet D. A new set of type curves simplifies well test analysis, *World Oil*, 1983, vol. 196, no. 6, pp. 95–106.
27. Hegeman P. S., Halford D. L., Joseph J. A. Well-test analysis with changing wellbore storage, *SPE Form. Eval.*, 1993, vol. 8, no. 03, pp. 201–207, SPE-21829-PA. DOI: <https://doi.org/10.2118/21829-PA>.



УДК 517.958:544.654.4

Математическое моделирование влияния зависимости константы скорости диссоциации/рекомбинации на перенос ионов соли в диффузионном слое у ионообменной мембраны

Р. Р. Назаров¹, А. В. Коваленко¹,
Р. А. Бостанов², М. Х. Уртенев¹

¹ Кубанский государственный университет,
Россия, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

² Карачаево-Черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева,
Россия, 369202, Карачаевск, ул. Ленина, 29.

Аннотация

Представлена новая теоретическая модель стационарного переноса ионных компонентов соли через катионообменную мембранную систему. В отличие от существующих теоретических подходов, в предложенной модели модификация константы равновесия обусловлена не только градиентом электрического потенциала, но и пространственным распределением заряда. Анализ уравнения Пуассона подтверждает существенную зависимость кинетики диссоциации ионов от локальной плотности пространственного заряда в мембранной структуре.

Разработанная математическая модель, учитывающая указанную зависимость, позволяет достичь более точного описания диффузионно-миграционных процессов в катионообменных мембранах. Полученные результаты обеспечивают более корректное описание поведения ионных компонентов в стационарных условиях переноса, что имеет существенное значение для разработки перспективных мембранных материалов и технологических процессов. Предлагаемая модель может быть применена в различных технологических областях, использующих ионообмен-

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Назаров Р. Р., Коваленко А. В., Бостанов Р. А., Уртенев М. Х. Математическое моделирование влияния зависимости константы скорости диссоциации/рекомбинации на перенос ионов соли в диффузионном слое у ионообменной мембраны // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 109–128. EDN: AZCCRJ. DOI: 10.14498/vsgtu2101.

Сведения об авторах

Роман Равшанович Назаров <https://orcid.org/0009-0001-7280-0563>
аспирант; каф. анализа данных и искусственного интеллекта¹;
e-mail: r.nazarov1998@mail.ru

Анна Владимировна Коваленко <https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>
доктор технических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. анализа данных и искусственного интеллекта¹; e-mail: savanna-05@mail.ru

ные мембранные системы, включая процессы водоочистки и энергетические преобразователи.

Важным преимуществом предложенной модели является возможность комплексного учета ключевых параметров ионного транспорта, включая ионную силу раствора, температурные условия и структурно-функциональные характеристики мембраны. Это обеспечивает более точное прогнозирование эксплуатационных характеристик мембранных систем в реальных технологических процессах.

В частности, применение данной модели в системах мембранной очистки воды позволяет оптимизировать процессы деминерализации, что способствует повышению эффективности очистки водных сред и снижению энергетических затрат технологического цикла.

Таким образом, разработанная модель предоставляет новые возможности для фундаментального исследования и практической оптимизации процессов массопереноса в системах с ионообменными мембранами.

Ключевые слова: диссоциация, рекомбинация, скорость диссоциации, сильные электрические поля, изменение константы диссоциации, пространственный заряд, диффузионный слой, уравнение Пуассона, неравновесная кинетика, перенос ионов, мембранный транспорт.

Получение: 1 июля 2024 г. / Исправление: 3 октября 2024 г. /

Принятие: 16 октября 2024 г. / Публикация онлайн: 17 марта 2025 г.

Введение. Несмотря на существование точных решений уравнений термодиффузии для стационарных сдвиговых течений бинарной несжимаемой жидкости, которые применяются при моделировании различных процессов (включая течение в тонких слоях жидкости и процессы в аппаратах химической технологии [1, 2]), остаются актуальными задачи, связанные с анализом сопряженных конвективных и диффузионных эффектов [3–5].

Построение точных и численных решений уравнений массопереноса и гидродинамики с учетом реакций диссоциации и рекомбинации молекул воды представляет собой сложную и актуальную задачу. Диссоциация воды на межфазных границах и изменение константы скорости реакции крайне важны для понимания процессов переноса вещества через селективные ионообменные мембраны. Известно, что изменение константы скорости диссоциации молекул воды на границах раздела фаз (мембрана/раствор или мембрана/мембрана) может быть обусловлено несколькими факторами, как отмечается в работах [6, 7]. В данной работе исследуется влияние электрического поля на константу равновесия реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды.

В настоящее время установлено, что скорость этой реакции экспоненциально зависит от приложенного напряжения [8–11] в системах с биполярными мембранами, что объясняется следующими причинами:

Рамазан Алиевич Бостанов  <https://orcid.org/0000-0002-8502-7653>
кандидат физико-математических наук, доцент; каф. математического анализа²;
e-mail: bost-rasul@yandex.ru

Махамет Хусеевич Уртенов  <https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>
доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. прикладной математики¹; e-mail: urtenovmax@mail.ru

- 1) ослаблением связи Н–ОН в молекуле воды под действием электрического поля;
- 2) кооперативным переносом протона через цепочку благоприятно ориентированных молекул воды.

Согласно представлениям, разработанным С. Ф. Тимашевым, Н. В. Шельдешовым и др. [8, 10, 11] для биполярных мембран, плотность тока ионов H^+/OH^- , генерируемых в мембранной системе, определяется эмпирической формулой [11]

$$i_{\text{H}^+, \text{OH}^-} = k_{\Sigma} \frac{\varepsilon_r}{\beta} [e^{\beta E_m} - e^{\beta E_0}], \quad (1)$$

где k_{Σ} — суммарная эффективная константа скорости псевдомономолекулярной реакции диссоциации воды в тонкой пограничной области толщиной 2–4 нм в отсутствие электрического поля; E_m — напряженность электрического поля в некоторой точке реакционной зоны вблизи границы раздела фаз, зависящая от внешнего приложенного напряжения; E_0 — напряженность электрического поля в этой точке при нулевом токе в мембранной системе; β — слабо изменяющийся с температурой (энтропийный) фактор [10] (подгоночный параметр); ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; ε — относительная диэлектрическая проницаемость раствора; $\varepsilon_r = \varepsilon \varepsilon_0$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость раствора; $i_{\text{H}^+, \text{OH}^-}$ — парциальные токи по H^+ и OH^- соответственно.

Как видно из формулы (1), константа равновесия зависит не от конкретного значения экспоненты от напряженности электрического поля, а от разности значений экспонент при заданном и нулевом токах.

Изучению этой зависимости в электродиализных системах с монополярными мембранами посвящено ограниченное число работ (см., например, [7]). В работе [7] аналог формулы (1) представлен в следующем виде:

$$i_{\text{H}^+, \text{OH}^-} = A e^{\beta E_0} (e^{\beta(E_m - E_0)} - 1), \quad (2)$$

где A — коэффициент, определяемый константой скорости диссоциации воды, структурой границы раздела мембрана/раствор и температурой T .

В отличие от работ С. Ф. Тимашева и Н. В. Шельдешова, в формуле (2) величину E_0 предлагается относить не к нулевому току, а к некоторому критическому току i_{cr} , при котором начинается заметная диссоциация молекул воды. В [12–14] показано, что этот ток достаточно близок к предельному электродиффузионному току.

1. Зависимость константы равновесия от пространственного заряда. Ряд соображений позволяет предположить, что в отличие от рассмотренных выше работ, изменение константы равновесия следует связывать не просто с величиной напряженности электрического поля, а с величиной пространственного заряда.

Действительно, как следует из уравнения Пуассона

$$\varepsilon_r \frac{dE}{dx} = \rho(x),$$

если напряженность E велика, но постоянна (т.е. электрическое поле однородно), то выполняется условие локальной электронейтральности $\rho(x) \equiv 0$.

Это означает, что в области электронейтральности не следует ожидать увеличения константы скорости диссоциации, так как она должна оставаться неизменной. С другой стороны, из уравнения Пуассона следует, что в области пространственного заряда, особенно в ее квазиравновесной части, электрическое поле становится неоднородным, а его напряженность — значительной.

В формуле (2) разность $E_m - E_0$ определяется приростом плотности пространственного заряда при увеличении тока от i_{cr} до заданного значения i [7]. Однако эту разность можно интерпретировать иначе — как разность напряженностей электрического поля E_m на поверхности мембраны и в некоторой точке объема E_0 . Если в формуле (2) показатель экспоненты умножить и разделить на величину h_0 , соответствующую разности абсцисс значений E_0 и E_m , то получим

$$i_{H^+, OH^-} = A e^{\beta E_0} \left(e^{\beta h_0 \frac{E_m - E_0}{h_0}} - 1 \right) \approx A e^{\beta E_0} \left(e^{\beta h_0 \frac{dE}{dx}} - 1 \right).$$

Поскольку из уравнения Пуассона следует, что $\frac{dE}{dx} = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho$, где ρ — плотность пространственного заряда, изменение i_{H^+, OH^-} должно зависеть от величины пространственного заряда.¹ Следовательно, константа равновесия K_w должна зависеть от ρ , т.е. $K_w = K_w(\rho)$.

Дополнительным аргументом в пользу этого предположения служит анализ размерности уравнений реакции:

$$\frac{j_{H^+}}{dx} = \frac{j_{OH^-}}{dx} = K_r (K_w - C_{H^+} C_{OH^-}),$$

где $K_w = (k_d/k_r) C_{H_2O}$ — константа равновесия; k_d и k_r — коэффициенты диссоциации и рекомбинации соответственно; C_{H_2O} , C_{H^+} , C_{OH^-} — концентрации воды и ионов H^+ и OH^- . Из формулы для K_w следует, что k_d/k_r имеет размерность концентрации: $[k_d/k_r] = [C_{H_2O}]$, как и плотность пространственного заряда, нормированная на число Фарадея: ρ/F .

Разлагая $K_w(\rho)$ (или, что то же самое, $k_d(\rho)/k_r(\rho) = (k_d/k_r)(\rho)$) в ряд Тейлора по ρ в окрестности $\rho = 0$ и ограничиваясь первым приближением, получаем эмпирическую формулу

$$\frac{k_d}{k_r}(\rho) = \frac{k_d(0)}{k_r(0)} + b\rho,$$

где b — константа, определяемая экспериментально. Умножив на C_{H_2O} , получим

$$K_w(\rho) = \frac{k_d}{k_r}(\rho) C_{H_2O} = \left(\frac{k_d(0)}{k_r(0)} + b\rho \right) C_{H_2O}$$

или

$$K_w(\rho) = \frac{k_d(0)}{k_r(0)} C_{H_2O} + b\rho C_{H_2O}.$$

Вводя обозначения

$$K_{w_0} = \frac{k_d(0)}{k_r(0)} C_{H_2O} \quad \text{и} \quad b_0 = b F C_{H_2O} = \lambda C_{H_2O},$$

¹ Впервые о зависимости потоков ионов от величины пространственного заряда упомянуто в работе В. В. Никоненко и др. [7].

где $\lambda = bF$ — безразмерная величина, и учитывая, что

$$\rho = \sum_{i=1}^n z_i C_i,$$

где z_i — зарядовые числа, C_i — концентрации ионов, получим

$$K_w(\rho) = K_{w_0} + b_0 \sum_{i=1}^n z_i C_i. \quad (3)$$

Таким образом, мы получаем всего один безразмерный подгоночный параметр λ , физический смысл которого заключается во влиянии величины пространственного заряда на скорость диссоциации молекул воды. Функция $K_w(\rho)$ линейно зависит от концентраций ионов, что позволяет исследовать ее изменение в разных частях диффузионного слоя (см. рис. 1). Например, в области электронейтральности эта функция постоянна ($K_w(\rho) = K_{w_0}$), а в квазиравновесной области пространственного заряда для 1:1 электролита, где концентрация катионов C_1 значительно превышает концентрации других ионов, формула упрощается до вида

$$K_w(\rho) = K_{w_0} + b_0 C_1.$$

Этот результат согласуется с экспоненциальной зависимостью константы равновесия от напряженности поля, так как в квазиравновесной области согласно приближению Дебая—Больцмана

$$\frac{dC_1}{dx} = -C_1 \frac{d\varphi}{dx},$$

где φ — потенциал. Интегрируя от точки x_0 до x , получим

$$C_1 = C_{1x_0} e^{-h_0 \frac{\varphi - \varphi_0}{h_0}} = C_{1x_0} e^{-h_0 \frac{d\varphi}{dx}} = C_{1x_0} e^{h_0 E},$$

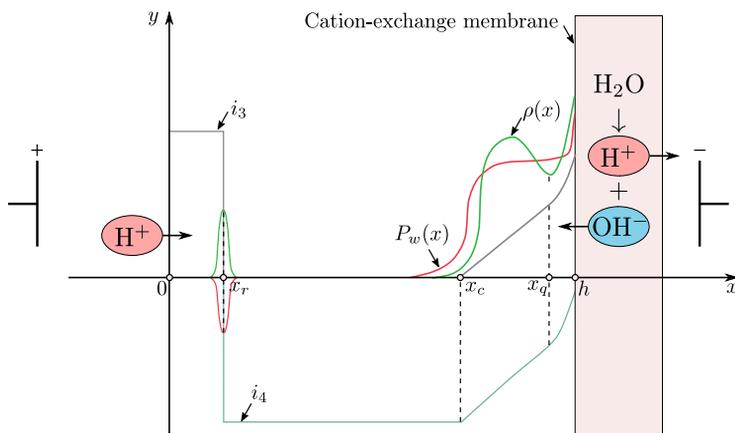


Рис. 1. Схема диффузионного слоя для постановки краевой задачи. Масштаб не соблюден из соображений наглядности

[Figure 1. Schematic of the diffusion layer for the boundary value problem formulation. Scale is not preserved for clarity]

что дает экспоненциальную зависимость константы равновесия от напряженности поля:

$$K_w(\rho) = K_{w_0} + b_0 C_{1x_0} e^{h_0 E}. \quad (4)$$

Следует отметить, что данные работы [15, рис. 5] демонстрируют практически одинаковый характер изменения напряженности электрического поля E и модуля пространственного заряда ρ вблизи биполярной границы. Это наблюдение позволяет рассматривать зависимость от модуля пространственного заряда ρ вместо зависимости от напряженности поля E .

Таким образом, формула (3) представляет собой обобщение экспоненциальной зависимости константы равновесия от напряженности. Из формулы (4) также следует экспериментально установленная в работе [7] закономерность: в сверхпредельных токовых режимах числа переноса продуктов диссоциации воды при заданных скачках потенциала $\Delta\varphi$ растут с уменьшением концентрации соли.

Действительно, используя асимптотическое решение упрощенной модели [12, 13], можно показать, что при уменьшении концентрации соли и фиксированном $\Delta\varphi$ величина C_{1x_0} уменьшается как степенная функция, а E увеличивается экспоненциально. Поскольку экспонента растет быстрее любой степени, произведение $C_{1x_0} e^{h_0 E}$ и, следовательно, константа равновесия $K_w(\rho) = K_{w_0} + b_0 C_{1x_0} e^{h_0 E}$ увеличиваются. Эту же закономерность подтверждают проведенные численные исследования.

2. Математическая модель. Рассмотрим диффузионный слой, где координата $x = 0$ соответствует границе с объемом раствора (с известными заданными концентрациями), а $x = h$ — границе раздела раствор/катионообменная мембрана. Концентрации и потоки ионов 1:1 электролита (например, K^+ и Cl^-) обозначим через C_i, j_i ($i = 1, 2$), а для ионов H^+ и OH^- — через C_i, j_i ($i = 3, 4$) соответственно [16, 17].

2.1. Система уравнений. Используя выражение для константы равновесия $K_w(\rho) = K_{w_0} + b_0(C_1 - C_2 + C_3 - C_4)$, предложим следующую математическую модель стационарного переноса ионов 1:1 электролита в диффузионном слое у катионообменной мембраны с учетом пространственного заряда и реакции диссоциации/рекомбинации [18]:

$$-\frac{dj_i}{dx} + R_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (5)$$

$$j_i = -z_i \frac{F}{RT} D_i C_i \frac{d\varphi}{dx} - D_i \frac{dC_i}{dx}, \quad i = 1, \dots, 4; \quad (6)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = 0, \\ R_3 &= R_4 = k_d(\rho) C_{H_2O} - k_r C_3 C_4 = k_r (K_w(\rho) - C_3 C_4), \\ z_1 &= 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = -1; \end{aligned} \quad (8)$$

$$I = F \sum_{i=1}^4 z_i j_i. \quad (9)$$

Математическая модель включает следующую систему уравнений:

- уравнения материального баланса для каждого ионного компонента (5), выражающие закон сохранения массы в стационарных условиях;
- уравнения переноса Нернста–Планка (6), описывающие потоки ионов под действием градиентов концентрации и электрического потенциала;
- уравнение Пуассона (7), связывающее распределение электрического потенциала с пространственным зарядом системы;
- кинетические уравнения (8) для реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды, учитывающие зависимость скорости диссоциации от локальной плотности заряда;
- уравнение для плотности полного тока (9), представляющее сумму фарадеевских вкладов всех ионных потоков (током заряжения двойного электрического слоя пренебрегаем).

Параметры модели включают в себя следующие физические величины и константы:

- ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость раствора;
- $R = 8.314$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная;
- $\varphi(x)$ — распределение электрического потенциала в диффузионном слое;
- $E(x) = -d\varphi/dx$ — напряженность электрического поля;
- $C_i(x)$ — объемная концентрация i -го иона, моль/м³;
- $j_i(x)$ — плотность потока i -го иона, моль/(м² · с);
- D_i — коэффициент диффузии i -го иона, м²/с;
- $k_r = 1.1 \cdot 10^8$ м³/(с · моль) — константа скорости рекомбинации ионов [19];
- $K_{w_0} = k_d C_{H_2O} / k_r = 1.0 \cdot 10^{-8}$ моль²/м⁶ — ионное произведение воды в объеме раствора;
- $k_d = 2.0 \cdot 10^{-5}$ с⁻¹ — константа скорости диссоциации воды [20–22];
- $C_{H_2O} \approx 55.5 \cdot 10^3$ моль/м³ — концентрация воды.

2.2. Краевые условия. Наблюдается существенная асимметрия в генерации ионов H^+ и OH^- на анионо- и катионообменных мембранах. На анионообменных мембранах (например, МА-40, МА-41) генерация протекает интенсивнее: ионы OH^- переносятся через мембрану и далее не участвуют в процессах переноса, а ионы H^+ движутся в сторону катионообменной мембраны. Модификация анионообменных мембран позволяет снизить интенсивность генерации H^+/OH^- , приводя к подкислению раствора во всем объеме канала обессоливания, тогда как подщелачивание наблюдается только вблизи катионообменной мембраны. Эта асимметрия требует различных подходов к математическому моделированию процессов переноса в диффузионных слоях у разных мембран, что отражается в краевых условиях. В данной работе рассматривается перенос в диффузионном слое у катионообменной мембраны, что позволяет исследовать влияние электрического поля на скорость некаталитической диссоциации воды и рекомбинации ионов H^+/OH^- .

Граничные условия при $x = 0$ (объем раствора):

$$C_1(0) = C_{10}, \quad C_2(0) = C_{20}, \quad C_4(0) = \frac{K_{w_0}}{C_{30}}, \quad (10)$$

$$C_3(0) = C_{30}, \quad C_{30} \gg \sqrt{K_{w_0}}, \quad (11)$$

$$\varphi(0) = d. \quad (12)$$

Концентрации C_{10} , C_{20} и C_{30} в (10), (11) задаются как известные пара-

метры модели. Условие $C_{30} \gg \sqrt{K_{w_0}}$ в (11) соответствует сильному подкислению раствора в объеме.² Увеличение потока H^+ за счет изменения константы равновесия в области пространственного заряда (ОПЗ) у анионообменной мембраны незначительно по сравнению с потоком от каталитической диссоциации воды на поверхности анионообменной мембраны и может быть проигнорировано.

Граничные условия на границе раствор/мембрана ($x = h$):

$$C_1(h) = C_{1k}, \quad (13)$$

$$\left[\frac{F}{RT} C_2 D_2 \frac{d\varphi}{dx} - D_2 \frac{dC_2}{dx} \right]_{x=h} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{dC_3}{dx} \right|_{x=h} = 0, \quad (15)$$

$$\left[\frac{F}{RT} C_4 D_4 \frac{d\varphi}{dx} - D_4 \frac{dC_4}{dx} \right]_{x=h} = j_{4k}, \quad (16)$$

$$\varphi(h) = 0. \quad (17)$$

Физическая интерпретация граничных условий при $x = h$:

- условие (13) определяет концентрацию катионов у поверхности мембраны C_{1k} , которая устанавливается равной ее обменной емкости;
- условие (14) отражает свойство идеальной селективности мембраны — нулевой поток анионов через границу (отсутствие проникновения анионов в мембрану);
- условие (15) показывает, что ионы водорода H^+ свободно проникают через мембрану (нулевой градиент концентрации на границе), что связано с их малой концентрацией по сравнению с основными катионами;
- условие (16) задает поток гидроксид-ионов OH^- (j_{4k}), инжектируемых с поверхности мембраны в раствор, что обусловлено менее интенсивной, но все же существующей генерацией H^+/OH^- -пар на катионообменной мембране;
- условие (17) фиксирует нулевое значение электрического потенциала на границе с мембраной.

Следует отметить, что интенсивность генерации H^+/OH^- -пар на катионообменных мембранах существенно ниже, чем на анионообменных, что приводит к асимметрии в распределении этих ионов в системе.

В данной работе при фиксированном скачке потенциала (12), (17) плотность тока определяется по формуле (9) [19–22].

3. Результаты и обсуждение. Реакция диссоциации молекул воды в мембранных системах может протекать двумя принципиально различными путями: каталитическим, обусловленным присутствием функциональных групп мембраны, и некаталитическим (электролитическим), связанным с влиянием пространственного заряда. Следует подчеркнуть, что некаталитическая диссоциация характеризуется максимально достижимой скоростью, лимитируемой фундаментальной константой диссоциации.

В области малых скачков потенциала или при плотностях тока ниже предельных значений (допредельный режим) пространственный заряд локали-

²Концентрация ионов H^+ превышает равновесное значение в десятки и сотни раз.

зован в непосредственной близости от ионообменной мембраны и в первом приближении демонстрирует независимость от величины плотности тока, что соответствует его квазиравновесному состоянию. В данных условиях некаталитическая реакция диссоциации, протекающая исключительно в пределах малой квазиравновесной ОПЗ и характеризующаяся постоянством константы скорости диссоциации, оказывает пренебрежимо малое влияние на процессы переноса ионов соли. Однако при учете зависимости константы скорости диссоциации, а следовательно, и константы равновесия от величины пространственного заряда наблюдается выраженный сверхлинейный рост потоков ионов H^+ и OH^- , что приводит к существенному влиянию некаталитической реакции диссоциации на перенос ионов соли.

При превышении предельных значений скачка потенциала или плотности тока (сверхпредельный режим), согласно данным работ [12, 13], формируется расширенная ОПЗ, размеры которой, оставаясь меньшими, становятся сопоставимыми с толщиной диффузионного слоя, в то время как квазиравновесная ОПЗ сохраняет свои характеристики. В сверхпредельном режиме некаталитическая реакция диссоциации протекает как в квазиравновесной, так и в расширенной ОПЗ, оказывая существенное влияние на перенос ионов соли. Для конкретизации дальнейшего изложения определим значения параметров модели: $C_0 = 1$ моль/м³, $b_0 = 0.1$. Поскольку настоящее исследование сосредоточено на изучении влияния пространственного заряда на константу равновесия некаталитической реакции диссоциации, принято $j_{4k} = 0$.

3.1. Структура диффузионного слоя. Для детального анализа пространственной организации диффузионного слоя введем функцию распределения пространственного заряда:

$$\rho(x) = F(C_1 - C_2 + C_3 - C_4),$$

где F — число Фарадея, C_i — концентрации соответствующих ионов. Важно отметить, что модифицированная константа равновесия диссоциации воды

$$K_w(\rho) = K_{w0} + b_0(C_1 - C_2 + C_3 - C_4)$$

демонстрирует пространственное распределение, аналогичное распределению $\rho(x)$. Ключевую роль в анализе играет функция равновесия

$$P_w(x) = K_w(\rho)C_{\text{H}_2\text{O}} - C_3C_4 = (K_{w0} + b_0\rho/F)C_{\text{H}_2\text{O}} - C_3C_4,$$

которая характеризует баланс между процессами диссоциации и рекомбинации. Физический смысл функции $P_w(x)$ заключается в следующем:

- при $P_w(x) = 0$ система находится в состоянии динамического равновесия;
- при $P_w(x) > 0$ преобладает процесс диссоциации молекул воды;
- при $P_w(x) < 0$ доминирует процесс рекомбинации ионов.

Численное решение краевой задачи математической модели позволило выявить сложную гетерогенную структуру диффузионного слоя, схематически представленную на рис. 1. Установлено, что диффузионный слой включает следующие характерные области:

- область рекомбинации ионов;

- область пространственного заряда (ОПЗ);
- область электронейтральности (ОЭН);
- переходные слои между указанными областями.

На рис. 1 схематически представлены ключевые характеристические точки структуры диффузионного слоя:

- x_r — центр области рекомбинации ионов;
- x_c — центр переходного (промежуточного) слоя между ОЭН и расширенной ОПЗ;
- x_q — левая граница квазиравновесной ОПЗ, примыкающей к поверхности катионообменной мембраны.

Область рекомбинации представляет собой симметричную (с большой степенью точности) окрестность точки x_r размером $(x_r - \delta_1, x_r + \delta_1)$. Образование области рекомбинации обусловлено взаимодействием ионов водорода H^+ , генерируемых как в результате каталитической реакции на поверхности анионообменной мембраны, так и за счет некаталитической диссоциации воды в ОПЗ у анионообменной мембраны (см. граничные условия), с гидроксид-ионами OH^- , образующимися при некаталитической диссоциации в ОПЗ у катионообменной мембраны, включая их дополнительное образование, связанное с зависимостью константы равновесия от величины пространственного заряда. Хотя константа скорости рекомбинации имеет высокое значение, ее конечная величина приводит к двум взаимосвязанным эффектам: во-первых, к малому размеру области рекомбинации по сравнению с другими структурными элементами диффузионного слоя, а во-вторых, к возникновению пространственного заряда в данной области вследствие конечного времени рекомбинации. Существенная асимметрия в интенсивности каталитической генерации ионов H^+/OH^- на анионообменной ($j_{H^+} \gg 0$) и катионообменной ($j_{Ak} \approx 0$) мембранах приводит к формированию избыточной концентрации ионов водорода и, как следствие, к появлению положительного пространственного заряда в области рекомбинации (см. рис. 1). Центр области рекомбинации и величина пространственного заряда определяются балансом потоков ионов H^+/OH^- , что демонстрируется на примере увеличения потока гидроксид-ионов при фиксированном значении $b_0 = 0.1$ и неизменном граничном условии (11), приводящего к уменьшению величины положительного пространственного заряда и смещению положения области рекомбинации в направлении катионообменной мембраны.

В интервале $(0, x_r - \delta_1)$ наблюдается значительное смещение кислотно-основного равновесия в сторону подкисления раствора, что обусловлено генерацией ионов H^+ на поверхности анионообменной мембраны (см. граничные условия). В данной области концентрация гидроксид-ионов OH^- пренебрежимо мала по сравнению с концентрацией ионов водорода H^+ . Анализ показывает, что концентрации катионов и анионов сохраняют равенство с высокой точностью даже при искусственном нарушении этого условия в точке $x = 0$ для выполнения требования электронейтральности. В последнем случае возникающий пограничный слой (рис. 1) компенсирует это неравенство. При отсутствии требования строгой электронейтральности в точке $x = 0$ пограничный слой не формируется, и во всей подкисленной области возникает положительный пространственный заряд, величина которого определяется потоком ионов H^+ с анионообменной мембраны. Таким образом, область

$[0, x_r - \delta_1)$ формально представляет собой объемную зону с равномерно распределенным пространственным зарядом (рис. 2), однако в силу его малой величины в первом приближении данную область можно считать практически электронейтральной.

Точка x_c определяет центр узкого переходного слоя $(x_c - \delta_2, x_c + \delta_2)$, разделяющего область электронейтральности $(x_r + \delta_1, x_c - \delta_2)$ и область пространственного заряда $(x_c + \delta_2, h]$. Последняя, в свою очередь, состоит из двух подобластей: расширенной ОПЗ $(x_c + \delta_2, x_q)$ и квазиравновесной ОПЗ $(x_q, h]$. Важно отметить, что в точке x_c наблюдается локальный максимум пространственного заряда, что свидетельствует о переходном характере данной области.

В пределах ОЭН величина пространственного заряда $\rho(x)$, хотя и возрастает, остается настолько незначительной, что в рамках первого приближения можно пренебречь ее влиянием и считать выполненными следующие условия:

- условие локальной электронейтральности ($\rho(x) \approx 0$);
- условие динамического равновесия реакций ($P_w(x) \approx 0$).

Расширенная ОПЗ характеризуется следующими ключевыми особенностями:

- интенсивная некаталитическая диссоциация молекул воды;
- существенная модификация эффективной константы равновесия $K_w(\rho)$;
- увеличение скорости некаталитического процесса диссоциации (см. рис. 3).

Наиболее выраженные эффекты наблюдаются в квазиравновесной ОПЗ:

- экспоненциальный рост модифицированной константы равновесия;
- соответствующий экспоненциальный рост потоков ионов H^+/OH^- ;
- формирование сильного градиента электрического потенциала.

3.2. Влияние вариаций константы равновесия на ионные потоки H^+/OH^- . В области электронейтральности, где устанавливается динамическое равновесие между процессами диссоциации и рекомбинации, наблюдаются следующие особенности ионных потоков:

- поток ионов H^+ (j_3) практически нулевой;
- поток ионов OH^- (j_4) сохраняет постоянное отрицательное значение;
- величина потока OH^- демонстрирует выраженную зависимость от вариаций константы равновесия $K_w(\rho)$.

В пределах внутренней области пространственного заряда ($[0, x_r - \delta_1)$) распределение потоков имеет обратную картину:

- поток OH^- (j_4) стремится к нулю;
- поток H^+ (j_3) сохраняет положительное постоянное значение;
- интенсивность потока H^+ существенно зависит от изменений $K_w(\rho)$.

В расширенной области пространственного заряда (ОПЗ) $[x_c + \delta_2, x_q]$ экспериментальные данные и численное моделирование демонстрируют следующие характерные особенности:

- линейное нарастание величин потоков H^+ (j_3) и OH^- (j_4) по мере приближения к мембране, что обусловлено нарушением баланса между процессами диссоциации и рекомбинации;
- существенное преобладание некаталитической диссоциации молекул воды над процессом рекомбинации ионов, что количественно выражается в положительных значениях функции равновесия $P_w(x) > 0$;
- явно выраженная зависимость ионных потоков от модифицированной

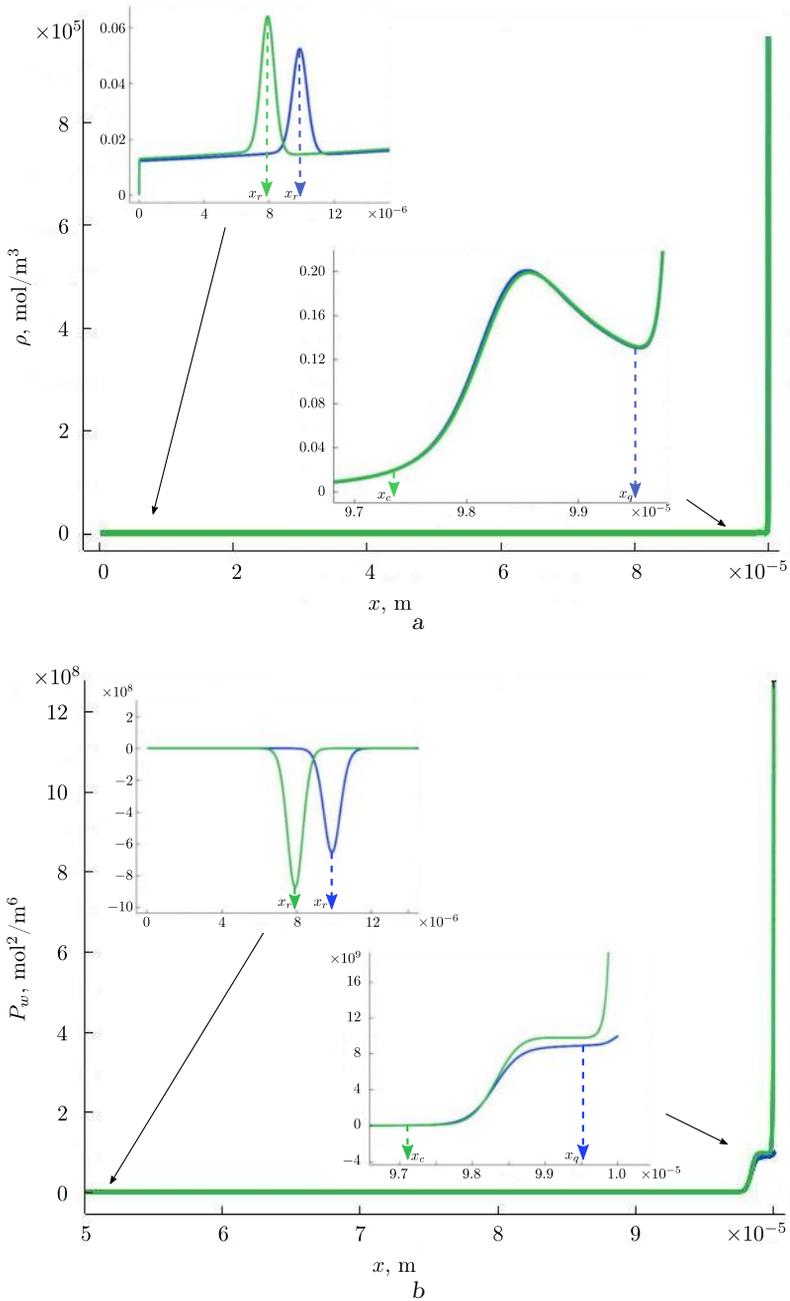


Рис. 2. Пространственное распределение (а) плотности пространственного заряда $\rho(x)$ и (б) функции равновесия $P_w(x)$ в диффузионном слое. Вставки демонстрируют увеличенные участки вблизи граничных областей при $x = 0$ (объем раствора) и $x = h$ (граница мембраны). Синие кривые соответствуют базовой модели ($b = 0$), зеленые кривые отражают модифицированную модель с учетом зависимости константы равновесия от пространственного заряда ($b = 10^{-6}$) (онлайн в цвете)

[Figure 2. (color online) Spatial distributions of (a) space charge density $\rho(x)$ and (b) equilibrium function $P_w(x)$ in the diffusion layer. Insets show magnified regions near the boundary areas at $x = 0$ (solution bulk) and $x = h$ (membrane interface). Blue curves correspond to the base model ($b = 0$), while green curves represent the modified model accounting for the dependence of the equilibrium constant on space charge ($b = 10^{-6}$)]

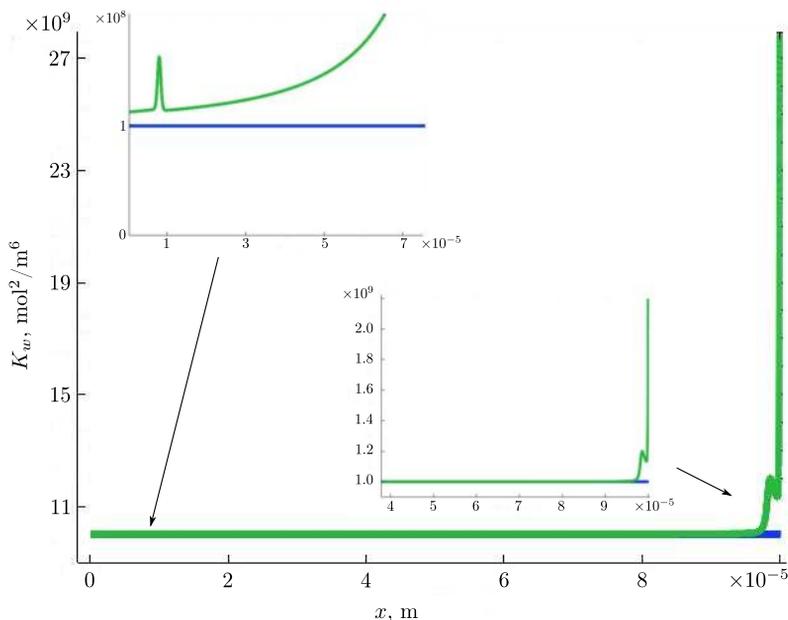


Рис. 3. Пространственное распределение модифицированной константы равновесия $K_w(x) = K_{w_0} + b\rho(x)$ в диффузионном слое, где K_{w_0} — константа равновесия в объеме раствора, а $\rho(x)$ — плотность пространственного заряда. На вставках показаны увеличенные области вблизи границ при $x = 0$ (объем раствора) и $x = h$ (граница мембраны). Синяя кривая — $b = 10^{-6}$ (учет зависимости от пространственного заряда); зеленая кривая — $b = 0$ (базовый случай с постоянной K_w). Зависимость от $\rho(x)$ приводит к значительным изменениям вблизи границы мембраны (онлайн в цвете)

[Figure 3. (color online) Spatial distribution of the modified equilibrium constant $K_w(x) = K_{w_0} + b\rho(x)$ in the diffusion layer, where K_{w_0} is the bulk equilibrium constant and $\rho(x)$ is the space charge density. Insets show magnified regions near the boundaries at $x = 0$ (solution bulk) and $x = h$ (membrane interface). Blue curve — $b = 10^{-6}$ (space-charge-dependent case); green curve — $b = 0$ (reference case with constant K_w). The dependence on $\rho(x)$ leads to significant variations near the membrane interface]

константы равновесия $K_w(\rho)$, проявляющаяся в увеличении их абсолютных значений при $b = 10^{-6}$ по сравнению с базовым случаем ($b = 0$).

Наиболее существенные изменения физико-химических параметров системы наблюдаются в квазиравновесной ОПЗ ($[x_q, h]$), что количественно проявляется в следующих эффектах:

- экспоненциальный рост эффективной константы равновесия $K_w(x) = K_{w_0} + b\rho(x)$, где параметр b отражает степень влияния пространственного заряда на равновесные характеристики;
- согласованный экспоненциальный рост потоков ионов H^+ (j_3) и OH^- (j_4), что подтверждается результатами численного моделирования, представленными на рис. 4;
- формирование значительного по величине пространственного заряда $\rho(x) = F(C_1 - C_2 + C_3 - C_4)$, достигающего максимальных значений в непосредственной близости от поверхности мембраны ($x \rightarrow h$).

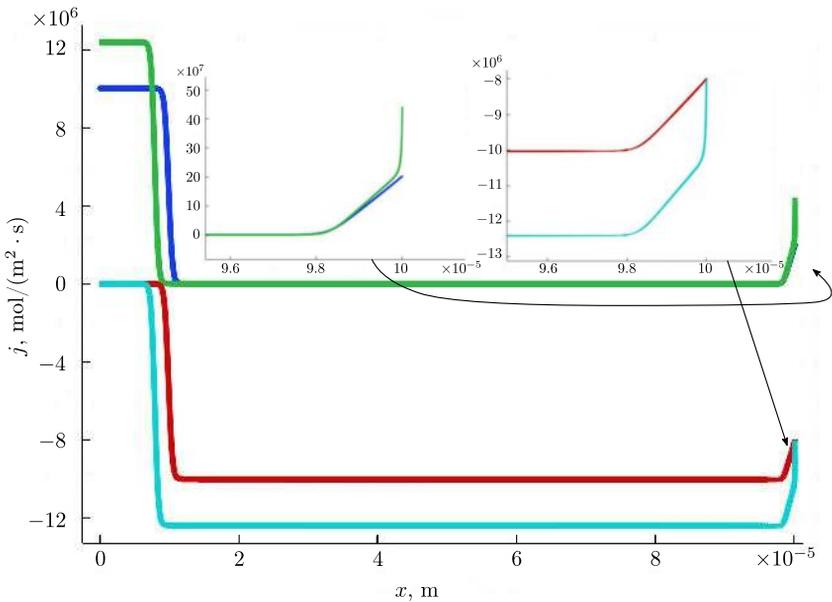


Рис. 4. Пространственное распределение потоков ионов H^+ (j_3) и OH^- (j_4) в диффузионном слое. На вставках показано увеличение областей вблизи границ $x = 0$ (объем раствора) и $x = h$ (граница мембраны). Обозначения: синяя кривая — поток ионов H^+ при $b = 0$; зеленая кривая — поток ионов H^+ при $b = 10^{-6}$; красная кривая — поток ионов OH^- при $b = 0$; голубая кривая — поток ионов OH^- при $b = 10^{-6}$ (онлайн в цвете)

[Figure 4. (color online) Spatial distribution of ion fluxes for H^+ (j_3) and OH^- (j_4) in the diffusion layer. Insets display magnified regions adjacent to the boundaries at $x = 0$ (solution bulk) and $x = h$ (membrane interface). Legend: blue curve — H^+ ion flux at $b = 0$; green curve — H^+ ion flux at $b = 10^{-6}$; red curve — OH^- ion flux at $b = 0$; cyan curve — OH^- ion flux at $b = 10^{-6}$]

Заключение. Предложена новая теоретическая модель, описывающая влияние внешнего электрического поля на константу равновесия K_w реакции диссоциации/рекомбинации молекул воды. В отличие от существующих подходов, в разработанной модели изменение константы равновесия обусловлено не напряженностью электрического поля E , а величиной пространственного заряда ρ , что представляет собой принципиально новое концептуальное решение.

Основные достижения работы:

- разработана математическая модель переноса ионов бинарного электролита в диффузионном слое у поверхности катионообменной мембраны, учитывающая зависимость $K_w(\rho)$;
- установлено, что предложенная модель приводит к значительному (на порядок величины) росту потоков ионов H^+/OH^- ;
- показано, что в квазиравновесном примембранном слое наблюдается увеличение константы равновесия в 5–10 раз, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [7].

Полученные результаты открывают новые возможности для управления ионным транспортом в мембранных системах за счет контроля пространственного заряда.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Р.Р. Назаров — разработка численно-аналитического метода и программы для численных экспериментов; компьютерное и математическое моделирование; интерпретация результатов; подготовка первоначального варианта рукописи; доработка текста. А.В. Коваленко — компьютерное моделирование; обработка и анализ экспериментальных данных; написание первоначального варианта рукописи. Р.А. Бостанов — обработка и анализ экспериментальных данных; интерпретация результатов. М.Х. Уртенов — инициация исследования; математическое моделирование; разработка численно-аналитического метода; интерпретация результатов; подготовка первоначального варианта рукописи; доработка текста. Все авторы участвовали в утверждении окончательной версии рукописи. Авторы несут ответственность за содержание статьи.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-19-00648, <https://rscf.ru/project/24-19-00648/>.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Ershkov S., Burmasheva N. V., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows // *Symmetry*, 2023. vol. 15, no. 9, 1730. EDN: UXUKDI. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15091730>.
2. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect // *Bulletin Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2021. vol. 37. pp. 17–30. EDN: NTSNFJ. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.17>.
3. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение типа Куэтта–Пуазейля для установившихся концентрационных течений // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2022. Т. 164, № 4. С. 285–301. EDN: FXLLHT. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.4.285-301>.
4. Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021. vol. 25, no. 4. pp. 763–775. EDN: AXZUX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1878>.
5. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows // *Dynamics*, 2022. vol. 2, no. 4. pp. 367–379. EDN: NGVOBP. DOI: <https://doi.org/10.3390/dynamics2040021>.
6. Шельдешов Н. В. *Процессы с участием ионов водорода и гидроксила в системах с ионообменными мембранами*: Дис. . . . докт. хим. наук: 02.00.05 — электрохимия. Краснодар: КубГУ, 2002. 405 с. EDN: NNNGQN.
7. Никоненко В. В., Письменская Н. Д., Володина Е. И. Зависимость скорости генерации H^+ - и OH^- -ионов на границе ионообменная мембрана/разбавленный раствор от плотности тока // *Электрохимия*, 2005. Т. 41, № 11. С. 1351–1357. EDN: HSIUHL.
8. Гребень В. П., Пивоваров Н. Я., Коварский Н. Я. [и др.] *Биполярная ионообменная мембрана* : Авторское свидетельство № 745193 А1 СССР, МПК С25В 13/04. № 2665517 : заявл. 18.09.1978 : опубл. 15.04.1990. EDN: VNZYHP.
9. Головина В.А., Капустин А. Ф., Смирнова Н. М. [и др.] *Способ регенерации неорганических кислот* : Авторское свидетельство № 865321 А1 СССР, МПК В01D 13/00. № 2867388 : заявл. 04.01.1980 : опубл. 23.09.1981. EDN: GSAAWG.

10. Смагин В. Н., Чухин В. А., Медведев И. Н., Щекотов П. Д. *Электродиализатор для обессоливания воды* : Авторское свидетельство № 971403 А1 СССР, МПК В01D 13/02. № 3275226 : заявл. 10.04.1981 : опубл. 07.11.1982. EDN: STKKOM.
11. Гребень В. П., Пивоваров Н. Я., Лацков В. Л. [и др.] *Биполярная ионообменная мембрана* : Авторское свидетельство № 1150989 А1 СССР, МПК С25В 13/00, В01D 69/00. № 3634930 : заявл. 22.07.1983 : опубл. 15.11.1990. EDN: UYAFXH.
12. Rubinshtein I., Maletzki F. Electroconvection at an electrically inhomogeneous permselective membrane surface // *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 1991. vol. 87, no. 13. pp. 2079–2087. DOI: <https://doi.org/10.1039/FT9918702079>.
13. Рубинштейн И., Зальцман Б., Прец И., Линдер К. Экспериментальная проверка электроосмотического механизма формирования “запредельного” тока в системе с катионообменной электродиализной мембраной // *Электрохимия*, 2002. Т. 38, № 8. С. 956–967. EDN: RSNSYP.
14. Гребень В. П., Пивоваров Н. Я. Лацков В. Л. [и др.] *Электродиализатор* : Авторское свидетельство № 1237230 СССР, МПК В01D 13/02. № 3736135 : заявл. 04.05.1984 : опубл. 15.06.1986. EDN: LHEPGD.
15. Mareev S. A., Evdochenko E., Wessling M., et al. A comprehensive mathematical model of water splitting in bipolar membranes: Impact of the spatial distribution of fixed charges and catalyst at bipolar junction // *J. Membr. Sci.*, 2020. Т. 603, 118010. EDN: AJNNIW. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2020.118010>.
16. Коваленко А. В., Узденова А. М., Овсянникова А. В. [и др.] Математическое моделирование влияния спейсеров на массоперенос в электромембранных системах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 520–543. EDN: JWREJU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1944>.
17. Казаковцева Е. В., Коваленко А. В., Письменский А. В., Уртенев М. Х. Гибридный численно-аналитический метод решения задач переноса ионов соли в мембранных системах с осевой симметрией // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 1. С. 130–151. EDN: BOXTTX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2043>.
18. Newman J. S. *Electrochemical Systems*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, Inc., 2004. xx+647 pp.
19. Urtenov M. K., Kovalenko A. V., Sukhinov A. I., et al. Model and numerical experiment for calculating the theoretical current-voltage characteristic in electro-membrane systems // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019. vol. 680. pp. 012030. EDN: AUNMRR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/680/1/012030>.
20. Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Chubyr N. O., Urtenov M. Kh. Mathematical modeling of electrodialysis of a dilute solution with accounting for water dissociation-recombination reactions // *Desalination*, 2023. vol. 550, 116398. EDN: UCCTJU. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2023.116398>.
21. Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенев М. Х., Никоненко В. В. Теоретический анализ влияния концентрации ионов в объеме раствора и у поверхности мембраны на массоперенос при сверхпредельных токах // *Электрохимия*, 2017. Т. 53, № 11. С. 1421–1433. EDN: JVMTDS. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0424857017110032>.
22. Kovalenko A. V., Yzdenova A. M., Sukhinov A. I., et al. Simulation of galvanic dynamic mode in membrane hydrocleaning systems taking into account space charge // *AIP Conf. Proc.*, 2019. vol. 2188, 050021. EDN: YHCGZX. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5138448>.

MSC: 76W05, 92E20, 65Z05

Mathematical modeling of the influence of dissociation/recombination rate constant dependence on salt ion transport in the diffusion layer near an ion-exchange membrane

R. R. Nazarov¹, A. V. Kovalenko¹,
R. A. Bostanov², M. Kh. Urtenov¹

¹ Kuban State University,

149, Stavropolskaya st., Krasnodar, 350040, Russian Federation.

² Umar Aliev Karachay–Cherkess State University,

29, Lenina st., Karachayevsk, 369202, Russian Federation.

Abstract

This study presents a novel theoretical model of steady-state ion transport through cation-exchange membrane systems. Unlike existing theoretical approaches, the proposed model relates modifications in the equilibrium constant not only to the electric potential gradient, but also to spatial charge distribution. Analysis of the Poisson equation confirms the significant dependence of ion dissociation kinetics on local space charge density within the membrane structure.

The developed mathematical model, incorporating this dependence, enables a more accurate description of diffusion-migration processes in cation-exchange membranes. The obtained results provide a more precise description of ion behavior under steady-state transport conditions — a crucial factor for developing advanced membrane materials and technological processes. The proposed model can be applied in various technological fields employing ion-exchange membrane systems, including water treatment processes and energy converters.

A key advantage of the proposed model is its capability for comprehensive consideration of critical ion transport parameters: solution ionic strength,

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nazarov R. R., Kovalenko A. V., Bostanov R. A., Urtenov M. Kh. Mathematical modeling of the influence of dissociation/recombination rate constant dependence on salt ion transport in the diffusion layer near an ion-exchange membrane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 109–128. EDN: AZCCRJ. DOI: 10.14498/vsgtu2101 (In Russian).

Authors' Details:

Roman R. Nazarov  <https://orcid.org/0009-0001-7280-0563>

Postgraduate Research Student; Dept. of Data Analysis and Artificial Intelligence¹;

e-mail: r.nazarov1998@mail.ru

Anna V. Kovalenko  <https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>

Dr. Techn. Sci., Associate Professor; Head of Department; Dept. of Data Analysis and Artificial Intelligence¹; e-mail: savanna-05@mail.ru

temperature conditions, and membrane structural-functional characteristics. This enables more accurate prediction of membrane system performance in actual technological processes.

In particular, application of this model in membrane water purification systems allows optimization of demineralization processes, thereby enhancing water treatment efficiency while reducing energy consumption in the technological cycle.

Thus, the developed model offers new opportunities for both fundamental research and practical optimization of mass transfer processes in ion-exchange membrane systems.

Keywords: dissociation, recombination, dissociation rate, strong electric fields, dissociation constant modification, space charge, diffusion layer, Poisson equation, non-equilibrium kinetics, ion transport, membrane transport.

Received: 1st July, 2024 / Revised: 3rd October, 2024 /

Accepted: 16th October, 2024 / First online: 17th March, 2025

Competing interests. We declare that we have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. R.R. Nazarov: Development of the numerical-analytical method and software for numerical experiments; Computer and mathematical modeling; Interpretation of results; Drafting the initial manuscript; Manuscript revision. A.V. Kovalenko: Computer modeling; Processing and analysis of experimental data; Drafting the initial manuscript. R.A. Bostanov: Data processing and analysis; Interpretation of results. M.Kh. Urtenov: Research initiation; Mathematical modeling; Development of the numerical-analytical method; Interpretation of results; Drafting the initial manuscript; Manuscript revision. All authors reviewed and approved the final version of the manuscript. The authors take full responsibility for the content of the article.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 24-19-00648), <https://rscf.ru/en/project/24-19-00648/>.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for the careful reading of the article, valuable suggestions, and comments.

References

1. Ershkov S., Burmasheva N. V., Leshchenko D. D., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows, *Symmetry*, 2023, vol. 15, no. 9, 1730. EDN: UXUKDI. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym15091730>.
2. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect, *Bulletin Irkutsk State Univ., Ser. Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 17–30. EDN: NTNSFJ. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.17>.

Ramazan A. Bostanov  <https://orcid.org/0000-0002-8502-7653>
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept. of Mathematical Analysis²;
e-mail: bost-rasul@yandex.ru

Makhamet Kh. Urtenov  <https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Applied Mathematics¹; e-mail: urtenovmax@mail.ru

3. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution of the Couette–Poiseuille type for steady concentration flows, *Uchen. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiziko-Matem. Nauki*, 2022, vol. 164, no. 4, pp. 285–301 (In Russian). EDN: FXLLHT. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.4.285-301>.
4. Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 763–775. EDN: AXZUX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1878>.
5. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows, *Dynamics*, 2022, vol. 2, no. 4, pp. 367–379. EDN: NGVOBP. DOI: <https://doi.org/10.3390/dynamics2040021>.
6. Shel'deshov N. V. *Processes of Hydrogen and Hydroxyl Ions in Ion-Exchange Membrane Systems*, Doctoral dissertation in Chemical Sciences (Specialty: 02.00.05 — Electrochemistry). Krasnodar, Kuban State Univ., 2002, 405 pp. (In Russian). EDN: NNNQGN.
7. Nikonenko V. V., Pis'menskaya N. D., Volodina E. I. Rate of generation of ions H^+ - and OH^- at the ion-exchange membrane/dilute solution interface as a function of the current density, *Russ. J. Electrochem.*, 2005, vol. 41, no. 11, pp. 1205–1210. EDN: LJAQQR. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11175-005-0203-z>.
8. Grebennikov V. P., Pivovarov N. Ya., Kovarsky N. Ya., et al. *Bipolar Ion-Exchange Membrane*, USSR Patent SU 745193 A1, IPC C25B 13/04. Appl. 2665517, 1978-09-18; publ. 1990-04-15 (In Russian). EDN: VNZYHP.
9. Golovnya V. A., Kapustin A. F., Smirnova N. M., et al. *Process for Inorganic Acid Regeneration*, USSR Patent SU 865321 A1, IPC B01D 13/00. Appl. 2867388, 1980-01-04; publ. 1981-09-23 (In Russian). EDN: GSAAWG.
10. Smagin V. N., Chukhin V. A., Medvedev I. N., Shchekotov P. D. *Water Desalination Electrolyzer*, USSR Patent SU 971403 A1, IPC B01D 13/02. Appl. 3275226, 1981-04-10; publ. 1982-11-07 (In Russian). EDN: STKKOM.
11. Grebennikov V. P., Pivovarov N. Ya., Latskov V. L., et al. *Bipolar Ion-Exchange Membrane*, USSR Patent SU 1150989 A1, IPC C25B 13/00, B01D 69/00. Appl. 3634930, 1983-07-22; publ. 1990-11-15 (In Russian). EDN: UYAFKH.
12. Rubinshtein I., Maletzki F. Electroconvection at an electrically inhomogeneous permselective membrane surface, *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 1991, vol. 87, no. 13, pp. 2079–2087. DOI: <https://doi.org/10.1039/FT9918702079>.
13. Rubinshtein I., Zaltzman B., Pretz J., Linder C. Experimental verification of the electroosmotic mechanism of overlimiting conductance through a cation exchange electro-dialysis membrane, *Rus. J. Electrochem.*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 853–863. EDN: VBRMLJ. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1016861711744>.
14. Grebennikov V. P., Pivovarov N. Ya., Latckov V. L., et al. *Electrodialyzer*, USSR Patent SU 1237230 A1, IPC B01D 13/02. Appl. 3736135, 1984-05-04; publ. 1986-06-15 (In Russian). EDN: LHEPGD.
15. Mareev S. A., Evdochenko E., Wessling M., et al. A comprehensive mathematical model of water splitting in bipolar membranes: Impact of the spatial distribution of fixed charges and catalyst at bipolar junction, *J. Membr. Sci.*, 2020, vol. 603, 118010. EDN: AJNNIW. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2020.118010>.
16. Kovalenko A. V., Uzdenova A. M., Ovsyannikova A. V., et al. Mathematical modeling of the effect of spacers on mass transfer in electromembrane systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 520–543 (In Russian). EDN: JWREJU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1944>.
17. Kazakovtseva E. V., Kovalenko A. V., Pismenskiy A. V., Urtenov M. Kh. Hybrid numerical-analytical method for solving the problems of salt ion transport in membrane systems with axial symmetry, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 1, pp. 130–151 (In Russian). EDN: BOXTTX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2043>.

18. Newman J. S. *Electrochemical Systems*. Hoboken, N.J., John Wiley & Sons, Inc., 2004, xx+647 pp.
19. Urtenov M. K., Kovalenko A. V., Sukhinov A. I., et al. Model and numerical experiment for calculating the theoretical current-voltage characteristic in electro-membrane systems, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 680, pp. 012030. EDN: AUNMRR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/680/1/012030>.
20. Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Chubyr N. O., Urtenov M. Kh. Mathematical modeling of electro dialysis of a dilute solution with accounting for water dissociation-recombination reactions, *Desalination*, 2023, vol. 550, 116398. EDN: UCCTJU. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2023.116398>.
21. Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Urtenov M. K., Nikonenko V. V. Theoretical analysis of the effect of ion concentration in solution bulk and at membrane surface on the mass transfer at overlimiting currents, *Russ. J. Electrochem.*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1254–1265. EDN: XXDDNZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1023193517110179>.
22. Kovalenko A. V., Yzdenova A. M., Sukhinov A. I., et al. Simulation of galvanic dynamic mode in membrane hydrocleaning systems taking into account space charge, *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2188, 050021. EDN: YHCGZX DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5138448>.



УДК 519.6 + 514.177.2

Методы аппроксимации двумерных множеств конечными множествами и их приложение к некоторым геометрическим задачам оптимизации

В. Н. Нефедов¹, Ф. В. Свойкин², Б. А. Гарибян¹,
А. В. Ряпухин¹, Н. С. Королько²

¹ Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

² Санкт-Петербургский государственный лесотехнический
университет имени С. М. Кирова,
Россия, 194021, Санкт-Петербург, Институтский пер., 5.

Аннотация

Исследуется задача аппроксимации замкнутых ограниченных множеств в двумерном вещественном пространстве конечными подмножествами с заданной точностью в метрике Хаусдорфа. Основное внимание уделено разработке эффективного метода аппроксимации для класса множеств, задаваемых ступенчатыми системами неравенств.

Предлагаемый метод основан на построении специальных сеточных структур, позволяющих контролировать точность аппроксимации через параметр $\tau > 0$. Доказаны соответствующие теоретические утверждения о свойствах таких аппроксимаций.

Детально рассмотрена задача поиска оптимального кусочно-линейного маршрута между двумя точками с одним поворотом при ограничениях на угол поворота. Предложенные методы могут найти применение для решения некоторых геометрических задач оптимизации.

Ключевые слова: математическая оптимизация, дискретная аппроксимация замкнутых множеств, топология Хаусдорфа, ограничение углового пути.

Получение: 12 ноября 2024 г. / Исправление: 23 января 2025 г. /

Принятие: 27 января 2025 г. / Публикация онлайн: 25 марта 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

📄 ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Нефедов В. Н., Свойкин Ф. В., Гарибян Б. А., Ряпухин А. В., Королько Н. С. Методы аппроксимации двумерных множеств конечными множествами и их приложение к некоторым геометрическим задачам оптимизации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 129–157. EDN: DMJLWE. DOI: 10.14498/vsgtu2131.

Сведения об авторах

Виктор Николаевич Нефедов <https://orcid.org/0000-0001-6053-2066>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. 805 математической кибернетики¹; e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Федор Владимирович Свойкин <https://orcid.org/0000-0002-8507-9584>

кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. технологии лесозаготовительных производств²; e-mail: svoikin_fv@mail.ru

Введение. При решении многих практических задач возникает задача оптимизации (для определенности — минимизации) некоторой целевой непрерывной функции $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, на замкнутом ограниченном множестве $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$. В случае если требуется найти глобальный минимум, использование известных методов поиска локального минимума (см., например, [1]) оказывается малоэффективным.

Одним из возможных методов, применимых для нахождения именно глобального минимума, является использование конечного (аппроксимирующего) множества \mathbf{X}^τ , которое является подмножеством \mathbf{X} и для заданного $\tau > 0$ имеет для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ «представителя» $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}^\tau$ такого, что $\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \tau$, где $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. Такая аппроксимация практически реализуема лишь при небольших n , например $n = 2, 3, 4$. Однако и такие задачи нередко возникают на практике (см. раздел 2).

Имея метод построения аппроксимирующего множества \mathbf{X}^τ (для заданного $\tau > 0$), в случае липшицевой вещественнозначной функции $f(\mathbf{x})$ можно решать задачу глобальной минимизации этой функции на \mathbf{X} с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Пусть для некоторого числа $L > 0$ выполняется

$$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X} \quad |f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})| \leq L\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|. \quad (1)$$

Тогда для точки $\tilde{\mathbf{x}}^\tau \in \mathbf{X}^\tau$ такой, что $f(\tilde{\mathbf{x}}^\tau) = \tilde{f}^\tau = \min f(\mathbf{X}^\tau)$, при $\tau \leq \varepsilon/L$ выполняется

$$f^* \leq f(\tilde{\mathbf{x}}^\tau) = \tilde{f}^\tau \leq f^* + \varepsilon, \quad (2)$$

где $f^* = \min f(\mathbf{X})$. Соответственно, при выбранном $\tau > 0$ оценки (2) справедливы для $L\tau \leq \varepsilon$. Отметим, что для выполнения (2) условие (1) можно при любом фиксированном $\tau > 0$ ослабить, заменив на

$$\forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{X} \quad \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \tau \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})| \leq L\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|. \quad (3)$$

Для оценки эффективности предлагаемых в работе методов воспользуемся работой [2], в которой на простом примере глобальной оптимизации функции $f(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию (1) на n -мерном кубе

$$B_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

(т.е. при $\mathbf{X} = B_n$), показано, что вычислительная сложность (т.е. количество вычислений значений функции $f(\mathbf{x})$) метода определения глобального минимума $\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B_n\}$ с точностью $\varepsilon > 0$ с помощью равномерного перебора (т.е. на прямом произведении равномерных сеток по каждой из координат с шагом $1/p$, где $p = \lfloor L/(2\varepsilon) \rfloor + 1$, $\lfloor a \rfloor$ — целая часть числа a) не превосходит

Борис Александрович Гарибян  <https://orcid.org/0000-0001-8309-3086>
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. 805 математической кибернетики¹; e-mail: bagarib@yandex.ru

Анатолий Вячеславович Ряпухин   <https://orcid.org/0000-0002-2208-6875>
старший преподаватель; каф. 101 проектирования и сертификации авиационной техники¹; e-mail: anatoliiruarupkhin@yandex.ru

Николай Сергеевич Королько  <https://orcid.org/0009-0009-6289-2984>
аспирант; каф. технологии лесозаготовительных производств²; e-mail: kns89lta@mail.ru

$(\lfloor L/(2\varepsilon) \rfloor + 1)^n$. При этом также показано, что нижняя оценка сложности для этой же задачи есть величина $(\lfloor L/(2\varepsilon) \rfloor)^n$ (т. е. при любом используемом методе глобальной оптимизации при числе вычислений значений функции $f(\mathbf{x})$, не превышающем $(\lfloor L/(2\varepsilon) \rfloor)^n$, мы не можем гарантировать, что достигнутая точность будет меньше, чем заданное число $\varepsilon > 0$). Таким образом, при решении рассматриваемой задачи нижние и верхние оценки сложности совпадают с точностью до мультипликативной абсолютной константы. Это означает, что метод равномерного перебора является асимптотически *оптимальным* методом на классе функций, удовлетворяющих (1). В связи с этим представляется разумным использовать методы оптимизации, по возможности «близкие» к равномерному перебору (в предлагаемых ниже методах равномерность будет нарушаться только вблизи границы множества \mathbf{X}). Интуитивно понятно, что такая равномерность приводит к уменьшению необходимого числа вычислений значений функции $f(\mathbf{x})$ с учетом возможности даже самого «худшего» случая.

При решении практических задач значение константы L , удовлетворяющей (1), редко бывает известным. Тем не менее вычисление \tilde{f}^τ уже дает некоторую оценку сверху для f^* , которая становится все более точной с уменьшением τ . Кроме того, для достижения требуемой точности $\varepsilon > 0$ достаточно, чтобы условие (1) (или (2)) выполнялось не на всем множестве \mathbf{X} , а в окрестности хотя бы одной точки из $\text{Arg min } f(\mathbf{X}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid f(\mathbf{x}) = f^*\}$. Действительно, если найдлись две точки $\mathbf{x}^* \in \mathbf{X}$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}^\tau$: $f(\mathbf{x}^*) = f^*$, $\|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \tau$, и $|f(\mathbf{x}^*) - f(\tilde{\mathbf{x}})| \leq L_* \|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}\|$, где L_* — константа Липшица в τ -окрестности точки \mathbf{x}^* (а не на всем множестве \mathbf{X}), то

$$\min f(\mathbf{X}^\tau) \leq f(\tilde{\mathbf{x}}) \leq f(\mathbf{x}^*) + L_* \|\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}\| \leq \min f(\mathbf{X}) + L_* \tau.$$

Отметим в этой связи, что при обосновании сходимости методов оптимизации (даже локальной) часто ограничиваются доказательством утверждения о стремлении значения целевой функции у минимизирующей последовательности к минимуму, а иногда даже о стремлении градиента к нулю (см., например, [1, теоремы 1, 2, стр. 265, 266]). В рассматриваемом случае независимо от того, известна константа Липшица или нет, имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \min f(\mathbf{X}^\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0+} f(\tilde{\mathbf{x}}^\tau) = \min f(\mathbf{X}),$$

т.е. сходимость метода в классическом его понимании выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассмотрим вопрос о существовании константы Липшица L , удовлетворяющей (3) для некоторого $\tau = \tau_0 > 0$ (и тогда (3) выполняется для любого $\tau \in (0, \tau_0]$). Для этого достаточно существование непрерывных частных производных у функции $f(\mathbf{x})$ на некотором открытом множестве $\tilde{\mathbf{X}} \supset \mathbf{X}$ таком, что $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\forall \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \tau_0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{X}}$. Во многих задачах это условие естественным образом выполняется. Для существования константы Липшица L , удовлетворяющей (1), достаточно существование непрерывных частных производных у функции $f(\mathbf{x})$ на некотором открытом множестве $\tilde{\mathbf{X}} \supset \text{co } \mathbf{X}$, где $\text{co } \mathbf{X}$ — выпуклая оболочка множества \mathbf{X} (см., например, [1]). В некоторых случаях константы Липшица не существует, но тем не менее удастся доказать выполнение $\lim_{\tau \rightarrow 0+} \min f(\mathbf{X}^\tau) = \min f(\mathbf{X})$ (такой случай описывается в разделе 2).

При решении некоторых задач вычислительный процесс можно организовать таким образом, что одновременно с вычислением $\tilde{f}^\tau = \min f(\mathbf{X}^\tau)$ вычисляется верхняя оценка \tilde{L} для константы L в окрестности текущей рассматриваемой точки из \mathbf{X}^τ (см., например, [3]), и тогда для выполнения (2) используем условие $\tilde{L}\tau \leq \varepsilon$ вместо $L\tau \leq \varepsilon$. Следует, однако, отметить, что метод вычисления константы \tilde{L} из [3] не дает гарантированного значения константы Липшица, т.е. является эвристическим, а поэтому и использование \tilde{L} вместо L не всегда приводит к верному результату. Кроме того, эвристический метод вычисления константы \tilde{L} из [3] может быть реализован лишь в случае, когда \mathbf{X} — координатный параллелепипед, а также в случае специально организованного процесса вычислений значений функции $f(\mathbf{x})$. Такие ограничительные предположения в рассматриваемом ниже подходе отсутствуют.

Может оказаться, что значение $\tilde{f}^\tau = \min f(\mathbf{X}^\tau)$ при выбранном $\tau > 0$ является приемлемым. В противном случае последовательно уменьшаем τ , например, полагая $\tau := \tau/2$, до получения приемлемого значения \tilde{f}^τ .

В книге [1] приводится обзор некоторых методов глобальной оптимизации (см. [1, гл. 5, § 12]), которые можно объединить общим термином «методы покрытий». В большинстве случаев в этих методах предполагается, что множество X является n -мерным координатным параллелепипедом. Кроме того, эти методы основываются на точном знании константы Липшица L , удовлетворяющей условию (1), и в случае отсутствия такой информации либо становятся неприменимыми, либо могут использоваться как эвристические методы. Один из таких методов описан в [1, стр. 355].

Таким образом, методы покрытий (см. некоторые варианты применения метода покрытий в [3–10]) имеют достаточно узкую область применимости, а в предлагаемом подходе на множество \mathbf{X} не накладываются такие жесткие ограничения и знание константы Липшица не является обязательным.

Разработка и описание методов аппроксимации некоторых классов множеств, возникающих в практически значимых задачах, конечными множествами представляются важными и актуальными. Некоторые методы аппроксимации приводятся в разделе 1. В разделе 2 эти методы применяются к одной из геометрических задач оптимизации.

В связи с возникающими (и порой неразрешимыми) трудностями, связанными с решением задач глобальной оптимизации, авторы сделали упор на малую размерность решаемой задачи, а именно на двумерный случай. При такой размерности построение конечного множества $\mathbf{X}^\tau \subset \mathbf{X}$, аппроксимирующего множество возможных решений \mathbf{X} с заданной точностью $\tau > 0$, является практически реализуемым при разумных ограничениях на величину τ . Соответственно, нахождение минимального значения целевой функции на \mathbf{X}^τ в этом случае также вполне реализуемо.

Авторы видят новизну предлагаемого подхода в использовании в разделе 1 «ступенчатой» структуры ограничений, задающих множество \mathbf{X} . Этот подход показал свою эффективность именно для двумерного случая (к сожалению, для трехмерного он уже «не работает»). Именно в двумерном случае достаточно просто можно выделить участки монотонности в одномерных функциях, задающих ограничения в \mathbf{X} .

В работе [10], на которую также указывается в [1], описан метод аппроксимации множества \mathbf{X} произвольной размерности, описываемого системой

ограничений вида неравенств. Однако его описание и алгоритмическая реализация являются гораздо более сложными, и при этом используются весьма существенные ограничения на функции в неравенствах.

Чтобы продемонстрировать существенное отличие предлагаемого подхода от метода, описанного в [10] (и аналогичных ему), рассмотрим следующие рассуждения, связанные с построением для множества \mathbf{X} сетки \mathbf{X}^τ , где $\tau > 0$, такой, что

$$\mathbf{X}^\tau \subset \mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad \exists \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}^\tau : \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \tau. \quad (4)$$

Если покрыть множество \mathbf{X} кубиками Q_i с длиной ребра 2τ (оставим в стороне вопрос об алгоритме построения множества таких кубиков), где τ — шаг сетки, то возможны два случая: центр кубика $\mathbf{c}(Q_i) \in \mathbf{X}$ и $\mathbf{c}(Q_i) \notin \mathbf{X}$. В первом случае добавляем точку $\mathbf{c}(Q_i)$ в сетку \mathbf{X}^τ , а во втором — возникает вопрос о выполнении условия

$$Q_i \cap \mathbf{X} \neq \emptyset. \quad (5)$$

Если условие (5) выполняется, то для обеспечения выполнения (4) необходимо включить в сетку \mathbf{X}^τ какого-либо «представителя» $\mathbf{x}^{(i)} \in Q_i \cap \mathbf{X}$. При этом для некоторых точек $\mathbf{x} \in Q_i \cap \mathbf{X}$ может выполняться $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\| > \tau$ (вплоть до $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}\| = 2\tau$), т.е. в этом случае для обеспечения выполнения (4) потребуется дополнительное дробление кубика Q_i на 2^n кубиков Q_{ij} , получаемых из Q_i делением его ребер пополам, и тогда для каждого из них также проверяем условие вида (5). При этом, если для каждого случая $Q_{ij} \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$ любой представитель $\mathbf{x}^{(ij)} \in Q_{ij} \cap \mathbf{X}$ (хотя бы один) включается в сетку \mathbf{X}^τ , то заведомо выполняется (4). Однако это легко сделать только в случае, когда задачи нахождения $\mathbf{x}^{(i)} \in Q_i \cap \mathbf{X}$, $\mathbf{x}^{(ij)} \in Q_{ij} \cap \mathbf{X}$ или подтверждения выполнения условий $Q_i \cap \mathbf{X} = \emptyset$, $Q_{ij} \cap \mathbf{X} = \emptyset$ решаются достаточно просто. Пусть $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_1(\mathbf{x}) \leq 0, \dots, g_r(\mathbf{x}) \leq 0\}$. Тогда проверка выполнения условия $Q_i \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$ (для кубика Q_i такого, что не выполняется $g_j(\mathbf{c}(Q_i)) \leq 0$, $j = 1, \dots, r$) требует решения задачи *глобальной* оптимизации:

$$g(\mathbf{x}) = \max\{g_1(\mathbf{x}), \dots, g_r(\mathbf{x})\} \rightarrow \min(= \mu_i), \quad \mathbf{x} \in Q_i. \quad (6)$$

Если $\mu_i > 0$, то $Q_i \cap \mathbf{X} = \emptyset$, и переходим к рассмотрению очередного кубика Q_i . Если $\mu_i \leq 0$, то $Q_i \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$, и тогда дробим Q_i на 2^n кубиков Q_{ij} , для каждого из которых в свою очередь решаем задачу глобальной оптимизации

$$g(\mathbf{x}) = \max\{g_1(\mathbf{x}), \dots, g_r(\mathbf{x})\} \rightarrow \min(= \mu_{ij}), \quad \mathbf{x} \in Q_{ij}. \quad (7)$$

При этом, если $\mu_{ij} > 0$, то $Q_{ij} \cap \mathbf{X} = \emptyset$, а если $\mu_{ij} \leq 0$, то $Q_i \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$, и тогда включаем в \mathbf{X}^τ любое решение задачи (7). Только решив все указанные задачи глобальной оптимизации вида (6), (7), мы соберем множество элементов сетки \mathbf{X}^τ . Но даже в случае, когда множество \mathbf{X} задается совокупностью линейных ограничений, для получения решения перечисленных задач потребуется достаточно большая вычислительная работа (решение огромного количества задач линейного программирования). А если функция $g(\mathbf{x})$ достаточно сложная (нелинейная, возможно, невыпуклая, многоэкстремальная)?

В этой связи следует отметить, что предлагаемая авторами методика существенно отличается от описанной выше процедуры нахождения элементов

сетки \mathbf{X}^τ с помощью решения многочисленных задач глобальной оптимизации вида (6), (7). В методе, предлагаемом авторами, не требуется решения указанных задач глобальной оптимизации. Вместо решения каждой из таких задач достаточно вычислить значение функции лишь в *одной* специально выбранной точке!

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В численных методах решения некоторых математических задач (например, при численном решении дифференциальных уравнений в частных производных) также используются сеточные аппроксимации двумерных множеств для построения разностных схем. Однако при построении подобных сеток достигаются цели, отличные от рассматриваемых в задачах глобальной оптимизации. В частности, при построении таких сеток не ставится условие равномерности расположения её узлов. Например, часто используемым подходом является метод триангуляции, основанный на разбиении плоскости на треугольники (см., например, [11]), тогда как для равномерного расположения узлов приходим к разбиению плоскости на квадраты.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аппроксимация замкнутого ограниченного множества $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ конечным множеством $\mathbf{X}^\tau \subset \mathbf{X}$ таким, что $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \exists \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}^\tau: \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \tau$, используется не только в задачах глобальной оптимизации. Аппроксимирующее множество \mathbf{X}^τ используется также в задачах векторной оптимизации, например, для аппроксимации конечными множествами множеств Парето-оптимальных оценок и решений (см., например, [12, 13]).

1. Построение конечного аппроксимирующего множества для двумерных множеств, заданных «ступенчатой» системой неравенств. Будем говорить, что некоторое множество $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ описывается «ступенчатой» системой неравенств, если для заданных чисел $\alpha_{\mathbf{S}}, \beta_{\mathbf{S}}$, где $\alpha_{\mathbf{S}} < \beta_{\mathbf{S}}$, и двух заданных функций $g_{\mathbf{S}}(x), \bar{g}_{\mathbf{S}}(x)$ выполняется

$$\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_{\mathbf{S}} \leq x \leq \beta_{\mathbf{S}}, g_{\mathbf{S}}(x) \leq y \leq \bar{g}_{\mathbf{S}}(x)\}. \quad (8)$$

Такой способ описания множества \mathbf{S} является удобным для реализации численных методов аппроксимации этого множества конечным множеством, имеющим сколь угодно малое расстояние (в метрике Хаусдорфа [14, 15]) от \mathbf{S} . Это, в свою очередь, позволяет описывать численные методы оптимизации некоторой целевой функции на множестве \mathbf{S} .

1.1. Расстояния между множествами. Будем использовать следующую норму для $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$. Помимо этого будем использовать скалярное произведение векторов $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$: $\langle (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \rangle = x\bar{x} + y\bar{y}$, а также длину вектора $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|(x, y)| = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Заметим, что

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(x, y)\| \leq |(x, y)| \leq \sqrt{2}\|(x, y)\|.$$

Для любого вектора $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ и любых множеств $\mathbf{S}, \mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ введем расстояния:

$$\begin{aligned} \rho_e(A, \mathbf{S}) &= \inf\{|A - U| \mid U \in \mathbf{S}\}, & \rho_m(A, \mathbf{S}) &= \inf\{\|A - U\| \mid U \in \mathbf{S}\}, \\ \alpha_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}) &= \sup\{\rho_e(A, \mathbf{S}) \mid A \in \mathbf{P}\}, & \alpha_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}) &= \sup\{\rho_m(A, \mathbf{S}) \mid A \in \mathbf{P}\}, \\ h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}) &= h_e(\mathbf{S}, \mathbf{P}) = \max\{\alpha_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \alpha_e(\mathbf{S}, \mathbf{P})\}, \end{aligned}$$

$$h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}) = h_m(\mathbf{S}, \mathbf{P}) = \max\{\alpha_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \alpha_m(\mathbf{S}, \mathbf{P})\}.$$

Здесь $h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S})$, $h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S})$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами \mathbf{S} и \mathbf{P} (см., например, [14, 15]).

Очевидно, что для любых множеств $\mathbf{S}, \mathbf{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ выполняется

$$h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}) \leq \sqrt{2}h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \quad h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}) \leq h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}),$$

а в случае $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{S}$ справедливо

$$h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}) = \alpha_e(\mathbf{S}, \mathbf{P}), \quad h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}) = \alpha_m(\mathbf{S}, \mathbf{P}).$$

Кроме того, если W — ортогональная матрица порядка 2 (т.е. её вектор-строки, а также вектор-столбцы образуют ортонормированный базис в \mathbb{R}^2), E — единичная матрица порядка 2, то для любых векторов $A, B \in \mathbb{R}^2$, множеств $\mathbf{P}, \mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ и числа $\alpha > 0$ справедливы следующие соотношения:

$$WW^\top = W^\top W = E,$$

$$|WA| = \langle WA, WA \rangle^{1/2} = \langle W^\top WA, A \rangle^{1/2} = \langle A, A \rangle^{1/2} = |A|,$$

$$|WA - WB| = |W(A - B)| = |A - B|,$$

$$h_e(W\mathbf{P}, W\mathbf{S}) = h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}),$$

$$h_m(W\mathbf{P}, W\mathbf{S}) \leq h_e(W\mathbf{P}, W\mathbf{S}) = h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}) \leq \sqrt{2}h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \quad (9)$$

$$h_m(\mathbf{P} + A, \mathbf{S} + A) = h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \quad h_e(\mathbf{P} + A, \mathbf{S} + A) = h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \quad (10)$$

$$h_m(\mathbf{S} + A, \mathbf{S}) \leq \|A\|, \quad h_e(\mathbf{S} + A, \mathbf{S}) \leq |A|,$$

$$h_m(\alpha\mathbf{P}, \alpha\mathbf{S}) = \alpha h_m(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \quad h_e(\alpha\mathbf{P}, \alpha\mathbf{S}) = \alpha h_e(\mathbf{P}, \mathbf{S}), \quad (11)$$

где $\mathbf{S} + A = \{U + A \mid U \in \mathbf{S}\}$, $\alpha\mathbf{S} = \{\alpha U \mid U \in \mathbf{S}\}$.

Для любого непустого множества $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ и числа $\tau > 0$ обозначим

$$\text{diam}_m(\mathbf{S}) = \sup\{\|U - V\| \mid U, V \in \mathbf{S}\}, \quad \text{diam}_e(\mathbf{S}) = \sup\{\|U - V\| \mid U, V \in \mathbf{S}\},$$

$$O_m^\tau(\mathbf{S}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{S} : \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| \leq \tau\},$$

$$O_e^\tau(\mathbf{S}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{S} : |(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})| \leq \tau\}.$$

В случае $\mathbf{S} = \{U\}$ кратко пишем $O_m^\tau(U)$, $O_e^\tau(U)$ вместо $O_m^\tau(\{U\})$, $O_e^\tau(\{U\})$.

1.2. Вспомогательные утверждения об аппроксимации множества конечным множеством (сеткой) с заданной точностью. Рассмотрим задачу аппроксимации некоторого ограниченного множества $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^2$ конечным множеством $\mathbf{S}^\tau \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющим для заданного $\tau > 0$ условиям

$$\mathbf{S}^\tau \subseteq \mathbf{S}, \quad h_m(\mathbf{S}^\tau, \mathbf{S}) = \alpha_m(\mathbf{S}, \mathbf{S}^\tau) \leq \tau.$$

Примеры аппроксимации некоторых сложных множеств конечными можно найти, например, в [12, 13].

Нам понадобятся следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha_1 \leq x \leq \beta_1, \alpha_2 \leq y \leq \beta_2\}$ (где $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$) — координатный прямоугольник, $g(x)$ — функция, определенная и монотонно невозрастающая (неубывающая) на $[\alpha_1, \beta_1]$, $Q_g = \{(x, y) \in Q \mid y \leq g(x)\}$. Тогда $Q_g \neq \emptyset \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \in Q_g$ ($Q_g \neq \emptyset \Leftrightarrow (\beta_1, \alpha_2) \in Q_g$).

Доказательство. Рассмотрим случай монотонного невозрастания функции $g(x)$ (т.е. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$). Пусть $Q_g \neq \emptyset$. Тогда $\exists (x_0, y_0) \in Q$: $y_0 \leq g(x_0)$, откуда $\alpha_2 \leq y_0$, $\alpha_1 \leq x_0$, и, используя монотонное невозрастание функции $g(x)$, получаем: $g(\alpha_1) \geq g(x_0) \geq y_0 \geq \alpha_2$, т.е. $(\alpha_1, \alpha_2) \in Q_g$. В обратную сторону рассуждения очевидны. Рассмотрим теперь случай монотонного неубывания $g(x)$. Пусть $Q_g \neq \emptyset$. Тогда $\exists (x_0, y_0) \in Q$: $y_0 \leq g(x_0)$, откуда $\alpha_2 \leq y_0$, $x_0 \leq \beta_1$, и, используя монотонное неубывание $g(x)$, получаем: $g(\beta_1) \geq g(x_0) \geq y_0 \geq \alpha_2$, т.е. $(\beta_1, \alpha_2) \in Q_g$. В обратную сторону рассуждения очевидны. \square

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть S — некоторое непустое множество из \mathbb{R}^2 ,

$$S \subseteq [\bigcup_{i=1}^{r_1} Q_{\tau,i}] \cup [\bigcup_{i=1}^{r_2} \tilde{Q}_{\tau,i}],$$

где $Q_{\tau,i}, \tilde{Q}_{\tau,i}$ — множества из \mathbb{R}^2 такие, что

$$\exists C_{\tau,i} \in Q_{\tau,i} \cap S : \forall U \in Q_{\tau,i} \quad \|U - C_{\tau,i}\| \leq \tau, \quad (12)$$

$$\text{diam}_m(\tilde{Q}_{\tau,i}) \leq \tau, \quad \exists \tilde{C}_{\tau,i} \in \tilde{Q}_{\tau,i} \cap S. \quad (13)$$

Тогда для множества $S^\tau = [\bigcup_{i=1}^{r_1} C_{\tau,i}] \cup [\bigcup_{i=1}^{r_2} \tilde{C}_{\tau,i}]$ выполняется $S^\tau \subseteq S$, $h_m(S, S^\tau) \leq \tau$.

Доказательство. Из условий доказываемого утверждения следует, что $S^\tau \subseteq S$. В силу того, что $S^\tau \subseteq S$, остается доказать, что

$$\alpha_m(S, S^\tau) = \sup\{\rho_m(U, S^\tau) \mid U \in S\} \leq \tau.$$

Пусть $U \in S$. Покажем, что $\rho_m(U, S^\tau) \leq \tau$. Рассмотрим два возможных случая:

- (а) $U \in \bigcup_{i=1}^{r_1} Q_{\tau,i}$. Тогда, например, $U \in Q_{\tau,1}$ и в силу (12) для $C_{\tau,1} \in S^\tau$ выполняется $\|U - C_{\tau,1}\| \leq \tau$, т.е. $\rho_m(U, S^\tau) \leq \|U - C_{\tau,1}\| \leq \tau$;
- (б) $U \in \bigcup_{i=1}^{r_2} \tilde{Q}_{\tau,i}$. Тогда, например, $U \in \tilde{Q}_{\tau,1}$ и в силу (13) для $\tilde{C}_{\tau,1} \in \tilde{Q}_{\tau,1} \cap S^\tau$ выполняется $\|U - \tilde{C}_{\tau,1}\| \leq \text{diam}_m(\tilde{Q}_{\tau,1}) \leq \tau$, т.е. $\rho_m(U, S^\tau) \leq \|U - \tilde{C}_{\tau,1}\| \leq \tau$. \square

1.3. Построение конечного множества (сетки) S^τ , удовлетворяющего заданным условиям. Построим сетку S^τ , удовлетворяющую для заданного $\tau > 0$ условиям

$$S^\tau \subseteq S, \quad h_m(S^\tau, S) = \alpha_m(S, S^\tau) \leq \tau, \quad (14)$$

где S — множество, удовлетворяющее (8).

Рассмотрим сначала простой случай, когда $g_S(x) \equiv 0$, и при этом для простоты обозначений вместо $\tilde{g}_S(x)$, α_S , β_S используем $g(x)$, α , β соответственно, т.е. теперь

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq y \leq g(x)\}, \quad \alpha < \beta. \quad (15)$$

Кроме того, считаем, что функция $g(x)$ является неотрицательной и невозрастающей на $[\alpha, \beta]$ (т.е. $\forall x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$).

Построим вспомогательную сетку по оси Ox . Обозначим

$$T^\tau = \{x_i^\tau \triangleq \alpha + \tau + 2i\tau, i = 0, 1, \dots, i_{\max}\},$$

где i_{\max} — максимальное целое число $i \geq 0$, при котором $\alpha + 2i\tau < \beta$ (при этом может оказаться, что $\alpha + 2(i_{\max} + 1)\tau = \beta$). В особом случае, когда $\alpha + \tau \geq \beta$, полагаем $T^\tau = \{\beta\}$. Кроме того, если оказалось, что $x_{i_{\max}}^\tau > \beta$, то полагаем $x_{i_{\max}}^\tau = \beta$. При этом, очевидно, справедливо

$$T^\tau \subseteq [\alpha, \beta], \quad h_m(T^\tau, [\alpha, \beta]) = \alpha_m([\alpha, \beta], T^\tau) \leq \tau.$$

Пусть теперь для некоторого $i_0 \in \{0, 1, \dots, i_{\max} - 1\}$ выполняется условие (см. рис. 1)

$$\alpha + 2i_0\tau \leq x \leq \alpha + 2(i_0 + 1)\tau, \quad (16)$$

(соответственно, в случае $i_0 = i_{\max}$ справедливо $\alpha + 2i_0\tau \leq x \leq \beta$, а в случае $T^\tau = \{\beta\}$ выполняется $\alpha \leq x \leq \beta$; для определенности рассмотрим случай (16), другие случаи рассматриваются аналогично). Обозначим $\bar{y} = g(\alpha + 2i_0\tau) = \max\{g(x) \mid \alpha + 2i_0\tau \leq x \leq \alpha + 2(i_0 + 1)\tau\}$ (см. рис. 1). Будем рассматривать нетривиальный случай, когда $\bar{y} > 0$. Пусть j_0 — максимальное число среди чисел $j \in \{0, 1, \dots\}$, для которых $2j\tau < \bar{y}$. Далее рассматриваем для случая (16) $j_0 + 1$ горизонтальных слоев, для которых выполняется

$$2j\tau \leq y \leq 2(j + 1)\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0,$$

и при этом $2j_0\tau < \bar{y}$, $2(j_0 + 1)\tau \geq \bar{y}$. Пусть далее (см. рис. 1)

$$\check{y} = g(\alpha + \tau + 2i_0\tau) = \max\{g(x) \mid \alpha + \tau + 2i_0\tau \leq x \leq \alpha + 2(i_0 + 1)\tau\}$$

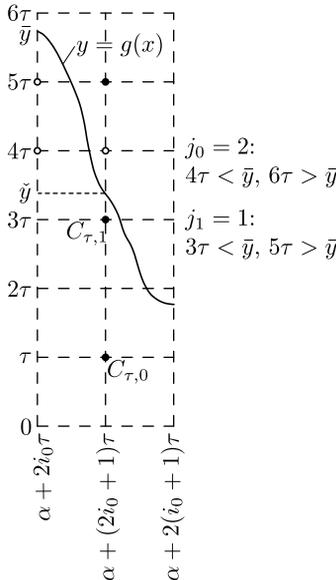


Рис. 1. Выбор элементов, принадлежащих S^τ
 [Figure 1. Selection of elements belonging to S^τ]

и j_1 — максимальное число среди целых чисел $j \geq 0$, для которых $2j\tau + \tau \leq \check{y}$. Возможен также случай, когда $\check{y} < \tau$, при котором такого числа j_1 нет.

Тогда при $\check{y} \geq \tau$ для каждого номера $j \in \{0, 1, \dots, j_1\}$ выполняется

$$2j\tau + \tau \leq \check{y} = g(\alpha + \tau + 2i_0\tau), \quad (17)$$

откуда

$$C_{\tau,j} = (\alpha + \tau + 2i_0\tau, 2j\tau + \tau) \in \mathbf{S},$$

где \mathbf{S} удовлетворяет (15). При этом $C_{\tau,j}$ является центром квадрата (с длинами сторон, равными 2τ)

$$Q_{\tau,j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha + 2i_0\tau \leq x \leq \alpha + 2(i_0 + 1)\tau, 2j\tau \leq y \leq 2(j + 1)\tau\},$$

и поэтому

$$\forall (x, y) \in Q_{\tau,j}, j \in \{0, 1, \dots, j_1\}, \quad \|(x, y) - C_{\tau,j}\| \leq \tau. \quad (18)$$

Включаем в \mathbf{S}^τ все $C_{\tau,j}$, удовлетворяющие (17), где $j \in \{0, 1, \dots, j_1\}$, а тем самым и (18).

Далее рассматриваем квадраты $Q_{\tau,j}$ при $j \in \{j_1 + 1, \dots, j_0\}$ (а в случае $\check{y} < \tau$ — при $j \in \{0, \dots, j_0\}$). Каждый из них разбиваем на 4 квадрата, длины сторон которых равны τ . Согласно утверждению 1, чтобы определить, имеются ли в любом из них точки, принадлежащие \mathbf{S} , достаточно проверить принадлежность \mathbf{S} левой нижней вершины каждого из них. Это условие заведомо не выполняется для верхнего правого квадрата (поскольку при $j \in \{j_1 + 1, \dots, j_0\}$ справедливо $2j\tau + \tau > \check{y} = g(\alpha + \tau + 2i_0\tau)$, а левой нижней вершиной этого квадрата является $(\alpha + \tau + 2i_0\tau, 2j\tau + \tau)$). Для проверки выполнения этого условия для остальных трех квадратов потребуются только уже вычисленные значения $\bar{y} = g(\alpha + 2i_0\tau)$ и $\check{y} = g(\alpha + \tau + 2i_0\tau)$. Если для некоторого из трех квадратов условие принадлежности \mathbf{S} выполняется, то включаем в \mathbf{S}^τ соответствующую левую нижнюю вершину квадрата, принадлежащую \mathbf{S} . Такими вершинами для каждого $j \in \{j_1 + 1, \dots, j_0\}$ могут оказаться любые из трех точек:

$$(\alpha + 2i_0\tau, 2j\tau), \quad (\alpha + 2i_0\tau, 2j\tau + \tau), \quad (\alpha + 2i_0\tau + \tau, 2j\tau).$$

При этом для левой нижней вершины \tilde{C} каждого из рассматриваемых квадратов \tilde{Q} выполняется

$$\forall (x, y) \in \tilde{Q} \quad \|(x, y) - \tilde{C}\| \leq \text{diam}_m(\tilde{Q}) \leq \tau.$$

Действуя таким образом для всех $i_0 \in \{0, 1, \dots, i_{\max}\}$ (в случае $i_0 = i_{\max}$ действуем аналогично, но в случае $\beta < \alpha + \tau + 2i_0\tau$ всюду вместо $\alpha + \tau + 2i_0\tau$ используем β и, в частности, вместо $\check{y} = g(\alpha + \tau + 2i_0\tau)$ полагаем $\check{y} = g(\beta)$), в силу утверждения 2 получаем требуемое множество \mathbf{S}^τ , удовлетворяющее (14). Действительно, выполнение условий вида (12) для $C_{\tau,j}$ и $Q_{\tau,j}$ следует из (18), а условий вида (13) — из приведенных выше неравенств для \tilde{C} и \tilde{Q} .

Таким образом, рассмотрен случай, когда выполняется (15) (т.е. $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, 0 \leq y \leq g(x)\}$), и функция $g(x)$ является неотрицательной и монотонно невозрастающей на $[\alpha, \beta]$. Очевидно, что условие

$0 \leq y$ (взятое для простоты) можно заменить на более общее $\gamma \leq y$, где γ — произвольное число, в предположении, что $\gamma \leq g(x)$ при $x \in [\alpha, \beta]$. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда при выполнении (15) функция $g(x)$ является неотрицательной и монотонно неубывающей на $[\alpha, \beta]$. Кроме того, подобный подход применяется для случаев, когда при задании \mathbf{S} по схеме (15) вместо условия $0 \leq y \leq g(x)$ используется альтернативное условие $g(x) \leq y \leq 0$, где функция $g(x)$ является неположительной и монотонно неубывающей либо, напротив, монотонно невозрастающей (а также более общие условия: $\gamma \leq y \leq g(x)$ или $g(x) \leq y \leq \gamma$ соответственно). В более общих случаях разбиваем $[\alpha, \beta]$ сначала на участки $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, где $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$, такие, что для каждого из них найдется число $\bar{\gamma}$, для которого выполняется

$$\forall x \in [\bar{\alpha}, \bar{\beta}] \quad g_{\mathbf{S}}(x) \leq \bar{\gamma} \leq \bar{g}_{\mathbf{S}}(x)$$

(тогда $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{\alpha} \leq x \leq \bar{\beta}, g_{\mathbf{S}}(x) \leq y \leq \bar{g}_{\mathbf{S}}(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{\alpha} \leq x \leq \bar{\beta}, g_{\mathbf{S}}(x) \leq y \leq \bar{\gamma}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{\alpha} \leq x \leq \bar{\beta}, \bar{\gamma} \leq y \leq \bar{g}_{\mathbf{S}}(x)\}$), а затем каждый такой участок $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ — на участки монотонности относительно функции $g_{\mathbf{S}}(x)$ (при рассмотрении случая $g_{\mathbf{S}}(x) \leq y \leq \bar{\gamma}$) или относительно функции $\bar{g}_{\mathbf{S}}(x)$ (при рассмотрении случая $\bar{\gamma} \leq y \leq \bar{g}_{\mathbf{S}}(x)$). Тогда объединение сеток по всем этим участкам даст искомую сетку для всего множества \mathbf{S} .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Множество \mathbf{S}^{τ} , удовлетворяющее (14), можно использовать в случае решения задачи глобальной оптимизации некоторой целевой функции $f(x, y)$ на замкнутом ограниченном множестве $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^2$, т.е. задачи вида

$$f(x, y) \rightarrow \min(= f^*); \quad (x, y) \in \mathbf{S}.$$

Действительно, для получения приближенного решения этой задачи можно найти для достаточно малого $\tau > 0$ значение

$$\tilde{f}^{(\tau)} = \min\{f(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{S}^{\tau}\}.$$

Тогда в случае, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица на \mathbf{S} , т.е. существует константа $L_f > 0$ такая, что

$$\forall (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{S} \quad |f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq L_f \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|, \quad (19)$$

то для $\tilde{f}^{(\tau)}$ выполняется

$$f^* \leq \tilde{f}^{(\tau)} \leq f^* + L_f \tau. \quad (20)$$

Заметим, что условие (19) можно ослабить и вместо него при выбранном $\tau > 0$ использовать условие

$$\forall (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{S} \quad \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| \leq \tau \Rightarrow |f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq L_f \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\|, \quad (21)$$

при выполнении которого также будет справедливо (20). Более того, вместо величины L_f в (20) можно использовать величину \tilde{L}_f , удовлетворяющую еще более слабому условию (чем (21)). Пусть $\text{Arg min } f(\mathbf{S}) = \{(x, y) \in \mathbf{S} \mid f(x, y) = f^*\}$ и величина \tilde{L}_f удовлетворяет условию

$$\exists (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{Arg min } f(\mathbf{S}) : \forall (x, y) \in \mathbf{S} \cap O_m^{\tau}((\tilde{x}, \tilde{y})) \quad f(x, y) \leq f^* + \tilde{L}_f \|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|.$$

Тогда (20) очевидным образом выполняется при замене L_f на \tilde{L}_f .

2. Об одной геометрической задаче, в описании которой используется множество, описываемое «ступенчатой» системой неравенств.

2.1. Задача поиска кусочно-линейного маршрута, соединяющего две заданные точки $A, B \in \mathbb{R}^2$, с возможностью совершения одного поворота в промежуточной точке $C \in \mathbb{R}^2$. Предполагается, что угол поворота φ в точке C имеет ограничение вида $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, где φ_0 — заданный предельный угол поворота, $\varphi_0 \in (0, \pi)$. Обозначим множество возможных значений для точки C через $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$. В этом разделе будут получены формулы для описания этого множества, а также приведен алгоритм построения конечного множества $\mathbf{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0)$, аппроксимирующего $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ с заданной точностью $\tau > 0$, основанный на методе, полученном в разделе 1. Кроме того, будут описаны задача поиска оптимального маршрута и метод ее решения, использующий $\mathbf{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0)$.

2.2. Угол между векторами. Для произвольных ненулевых векторов $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ угол между этими векторами (предполагаем, что эти векторы имеют начало в одной точке $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$) будем обозначать через $\angle(A, B)$. При этом будем учитывать направление угла от вектора A в сторону вектора B , так что $\angle(A, B) = -\angle(B, A)$. Положительным считаем направление по часовой стрелке. Значения углов находятся в промежутке $(-\pi, \pi]$ (для угла между противоположно направленными векторами выбираем значение π). Кроме того, для большей общности рассуждений в случае нулевого вектора A или B полагаем $\angle(A, B) = 0$. Нетрудно показать, что

$$\angle(A, B) > 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} < 0$$

(в силу того, что векторное произведение векторов $(a_1, a_2, 0)$, $(b_1, b_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ образует правую тройку).

ПРИМЕР 1.

а) Для $A = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $B = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ выполняется

$$\angle(A, B) = \pi/2 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

б) Для $A = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$, $B = (-5, 2) \in \mathbb{R}^2$ выполняется

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = -2 + 15 = 13 > 0 \Rightarrow \angle(A, B) < 0.$$

Для точек $A, B \in \mathbb{R}^2$ через $[A, B] = \{(x, y) = \alpha A + (1-\alpha)B \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \in [0, 1]\}$ обозначим отрезок прямой, соединяющий точки A и B .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для попарно различных точек $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, не лежащих на одной прямой, можно аналитически определить, где находится точка C относительно прямой, проходящей через точки A и B и направленной от A к B . Тогда в случае, если точка C не принадлежит этой прямой, находим знак угла (вычисляя значение соответствующего определителя) $\alpha = \angle(B - A, C - (A + B)/2)$ (вместо $(A + B)/2$ можно взять любую точку этой прямой). Если $\alpha > 0$, то точка C находится справа от этой прямой, а если $\alpha < 0$, то слева.

Вернемся к исходной задаче поиска кусочно-линейного маршрута, соединяющего две заданные точки $A, B \in \mathbb{R}^2$, с возможностью совершения одного поворота в промежуточной точке $C \in \mathbb{R}^2$. Теперь мы можем описать введенное ранее множество $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$. Действительно, при выборе точки C для осуществления допустимого поворота имеем следующее (геометрическое) условие: $\angle(B - C, C - A) \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, т.е.

$$\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \angle(B - C, C - A) \in [-\varphi_0, \varphi_0]\}$$

(в случае $\angle(B - C, C - A) = 0$ точка C принадлежит $[A, B]$). Кроме того, обозначим

$$\check{\mathbf{S}}^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \angle(B - C, C - A) \leq \varphi_0\},$$

$$\hat{\mathbf{S}}^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid -\varphi_0 \leq \angle(B - C, C - A) \leq 0\}.$$

Далее, чтобы получить аналитическое описание множества $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, воспользуемся вспомогательной задачей, получающейся из исходной (т.е. общей) благодаря удобному выбору фиксированных точек A и B , расположенных симметрично относительно начальной точки $O(0, 0)$.

2.3. Вспомогательная задача. Опишем множество $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ при следующих специально выбранных точках: $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$. Соответственно обозначим $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)}((0, -1), (1, 0), \varphi_0)$, где $\varphi_0 \in (0, \pi)$. Опишем $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ с помощью простой «ступенчатой» системы неравенств. Множество $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ состоит из двух симметричных частей (долей): левой

$$\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid -\varphi_0 \leq \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) \leq 0\}$$

и правой

$$\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) \leq \varphi_0\}$$

так, что $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} = \hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \cup \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$. Очевидно, что для $C = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ выполняется

$$\begin{aligned} \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) &= \angle((-c_1, 1 - c_2), (c_1, c_2 + 1)), \\ \angle((0, 1) - (-C), -C - (0, -1)) &= \angle((c_1, c_2 + 1), (-c_1, 1 - c_2)) = \\ &= -\angle((0, 1) - C, C - (0, -1)), \end{aligned}$$

т.е.

$$0 \leq \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) \leq \varphi_0 \Leftrightarrow -\varphi_0 \leq \angle((0, 1) - (-C), -C - (0, -1)) \leq 0,$$

откуда $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$. Следовательно, достаточно описать множество $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, поскольку множество $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ описывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из условий $\hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\mathcal{S}_{\varphi_0}^{(1)} = \hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \cup \check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ следует, что $\mathcal{S}_{\varphi_0}^{(1)} = -\mathcal{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, т.е. точка $O(0, 0)$ является центром антисимметрии для множества $\mathcal{S}_{\varphi_0}^{(1)}$. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$C = (c_1, c_2) \in \check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \Leftrightarrow (c_1, -c_2) \in \check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}, \quad C = (c_1, c_2) \in \hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \Leftrightarrow (c_1, -c_2) \in \hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)},$$

откуда в силу $\hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ получаем

$$C = (c_1, c_2) \in \check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \Leftrightarrow (-c_1, c_2) \in \hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}.$$

Таким образом, ось Ox является осью симметрии для множеств $\check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\hat{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, а Oy — осью симметрии для $\mathcal{S}_{\varphi_0}^{(1)}$.

Таким образом, $\check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ — множество всех точек $C \in \mathbb{R}^2$, находящихся справа от оси Oy , и таких, что, двигаясь по ломаной $[(0, -1), C] \cup [C, (0, 1)]$, мы осуществляем в точке C допустимый поворот, т.е. не превышающий по модулю заданный угол $\varphi_0 \in (0, \pi)$.

Отметим некоторые простые геометрические свойства множества $\check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$. Если для некоторого $\varphi \in (0, \varphi_0]$ выполняется $0 \leq \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) = \varphi$, т.е. $C \in \check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, то $[(0, -1), C] \subseteq \check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, поскольку $\forall \alpha \in (0, 1]$ для $C_\alpha = (0, -1) + \alpha(C - (0, -1))$ справедливо

$$\angle((0, 1) - C_\alpha, C_\alpha - (0, -1)) \leq \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) = \varphi$$

(см. рис. 2), и при $\alpha \in (0, 1)$ это неравенство является строгим. Кроме того, если $\angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) = \varphi \in (0, \varphi_0)$, то найдется $\alpha_0 > 1$ такое, что $\angle((0, 1) - C_{\alpha_0}, C_{\alpha_0} - (0, -1)) = \varphi_0$ (см. рис. 2).

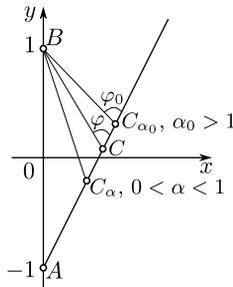


Рис. 2. Взаимное расположение точек C , C_α и C_{α_0}
 [Figure 2. Relative positions of the points C , C_α , and C_{α_0}]

Используя эти простые свойства, нетрудно показать, что

$$\check{\mathcal{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = \bigcup_{C \in \check{\Gamma}_\varphi} [(0, -1), C], \quad (22)$$

где $\forall \varphi \in (0, \pi)$ $\check{\Gamma}_\varphi = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \angle((0, 1) - C, C - (0, -1)) = \varphi\}$.

Заметим, что $\check{\Gamma}_\varphi$ является геометрическим местом точек $C(x, y)$, лежащих правее оси Oy , и таких, что $\angle((0, -1) - C, (0, 1) - C) = \pi - \varphi$, т.е. является

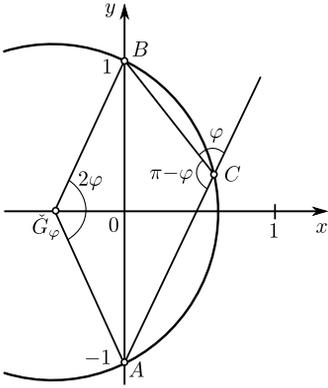


Рис. 3. Точка $C \in \check{\Gamma}_\varphi$
 [Figure 3. The point $C \in \check{\Gamma}_\varphi$]

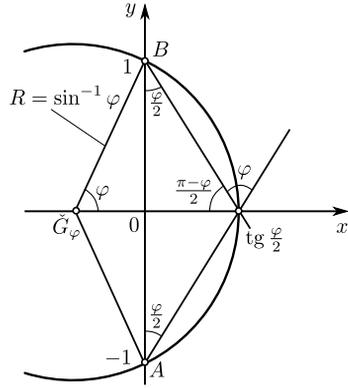


Рис. 4. Точка $C(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, 0) \in \check{\Gamma}_\varphi$
 [Figure 4. The point $C(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, 0) \in \check{\Gamma}_\varphi$]

дугой окружности радиуса $R_\varphi = \sin^{-1} \varphi$ (см. рис. 3, 4) с центром в точке $\check{G}_\varphi = (-\operatorname{ctg} \varphi, 0)$, длина которой равна $2\varphi R_\varphi$. Множество точек $C(x, y)$, принадлежащих этой кривой, удовлетворяет условиям

$$(x + R_\varphi - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})^2 + y^2 = R_\varphi^2 = \sin^{-2} \varphi, \quad 0 \leq x \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (23)$$

Например, при $x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ из (23) имеем $R_\varphi^2 + y^2 = R_\varphi^2$, откуда $y = 0$, а при $x = 0$ имеем

$$\begin{aligned} y^2 &= \sin^{-2} \varphi - (\sin^{-1} \varphi - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})^2 = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sin^2 \varphi} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sin \varphi} - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, указанная кривая и представляет собой множество $\check{\Gamma}_\varphi$, и с учетом (22) $\check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ — часть круга радиуса $R_{\varphi_0} = \sin^{-1} \varphi_0$ с центром в точке $\check{G}_{\varphi_0} = (-R_{\varphi_0} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, 0) = (-\operatorname{ctg} \varphi_0, 0)$, ограниченная слева хордой AB :

$$\check{S}_{\varphi_0}^{(1)} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, -\sqrt{R_{\varphi_0}^2 - (x + R_{\varphi_0} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2})^2} \leq y \leq \sqrt{R_{\varphi_0}^2 - (x + R_{\varphi_0} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2})^2} \right\}. \quad (24)$$

2.4. Построение конечной τ -сети для вспомогательной задачи.

Из сопоставления (24) и (8) видим, что описание множества $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ в виде (24) является ступенчатым, где в соответствии с (8)

$$\alpha_S = 0, \quad \beta_S = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, \quad g_S(x) = \sqrt{R_{\varphi_0}^2 - (x + R_{\varphi_0} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2})^2},$$

$$\bar{g}_S(x) = -\sqrt{R_{\varphi_0}^2 - (x + R_{\varphi_0} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2})^2}. \quad (25)$$

Кроме того, в случае $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ функция $g_S(x)$ из (25) является монотонно убывающей на $[\alpha_S, \beta_S] = [0, \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}]$, а функция $\bar{g}_S(x)$ — монотонно возрастающей. Заметим далее, что в случае $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ точка $\check{G}_{\varphi_0} = (-\operatorname{ctg} \varphi_0, 0)$ лежит правее точки $(0, 0)$ и при этом на отрезке $[0, -\operatorname{ctg} \varphi_0]$ функция $g_S(x)$ ($\bar{g}_S(x)$) из (25) является монотонно возрастающей (убывающей), а на отрезке $[-\operatorname{ctg} \varphi_0, \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}]$ монотонно убывающей (возрастающей), т.е. к множеству $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ применим метод, описанный в разделе 1 и позволяющий строить для любого заданного $\tau > 0$ конечное множество $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$, удовлетворяющее условиям

$$\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)} \subseteq \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}, \quad h_m(\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}, \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}) = \alpha_m(\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}, \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}) \leq \tau. \quad (26)$$

Используя $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} = \hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \cup \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, получаем, что по множеству $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$ можно построить аппроксимирующее множество $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$ и для всего множества $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ (например, положив $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)} = -\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$, $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)} = \hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)} \cup \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$), т.е. удовлетворяющее условиям

$$\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)} \subseteq \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}, \quad h_m(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}, \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}) = \alpha_m(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}, \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}) \leq \tau. \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. На точку поворота $C(x, y)$, а тем самым и на элементы множеств $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$ могут быть наложены некоторые дополнительные условия, например, условие вида (ограничение на максимальную длину прямолинейного участка маршрута):

$$|C - (0, 1)| \leq \sigma, \quad |C - (0, -1)| \leq \sigma, \quad (28)$$

где $\sigma \geq 1$ (при $\sigma < 1$ условия (28) становятся несовместными). Из (28) получаем

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq \sigma^2, \quad x^2 + (y + 1)^2 \leq \sigma^2,$$

откуда

$$-\sigma \leq x \leq \sigma, \quad -\sqrt{\sigma^2 - x^2} + 1 \leq y \leq \sqrt{\sigma^2 - x^2} + 1,$$

$$-\sqrt{\sigma^2 - x^2} - 1 \leq y \leq \sqrt{\sigma^2 - x^2} - 1,$$

что равносильно условиям

$$-\sigma \leq x \leq \sigma, \quad -\sqrt{\sigma^2 - x^2} + 1 \leq y \leq \sqrt{\sigma^2 - x^2} - 1. \quad (29)$$

С учетом условий (29) β_S , $g_S(x)$, $\bar{g}_S(x)$ в (25) поменяются на

$$\beta_S = \min\{\operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, \sigma\},$$

$$g_S(x) = \min \left\{ \sqrt{R_{\varphi_0}^2 - (x + R_{\varphi_0} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2})^2}, \sqrt{\sigma^2 - x^2 - 1} \right\},$$

$$\bar{g}_S(x) = \max \left\{ -\sqrt{R_{\varphi_0}^2 - (x + R_{\varphi_0} - \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2})^2}, -\sqrt{\sigma^2 - x^2 + 1} \right\}.$$

При этом промежутки монотонности выделяются у новых функций столь же очевидным образом, а условия вида $\hat{S}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, $S_{\varphi_0}^{(1)} = \hat{S}_{\varphi_0}^{(1)} \cup \check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ сохраняются. Таким образом, аппроксимирующие множества, удовлетворяющие (27), могут быть получены и при дополнительном условии (28).

Помимо (28) на точку поворота $C(x, y)$ могут быть наложены и некоторые другие условия, например,

$$\|C - (0, 1)\| \geq s, \quad \|C - (0, -1)\| \geq s, \quad (30)$$

где $s \in (0, 1)$ (ограничение на возможность поворота рядом с начальной и конечной точками маршрута). Эти условия также легко учесть, модифицируя соответствующим образом β_S , $g_S(x)$, $\bar{g}_S(x)$ в (26). Например, в случае отсутствия ограничений (28) с учетом только условий (30) $g_S(x)$, $\bar{g}_S(x)$ в (25) поменяются на $\tilde{g}_S(x)$, $\check{g}_S(x)$ соответственно, где

$$\tilde{g}_S(x) = \begin{cases} \min\{g_S(x), 1 - s\}, & x \in [0, s], \\ g_S(x), & x \in (s, \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}], \end{cases}$$

$$\check{g}_S(x) = \begin{cases} \max\{\bar{g}_S(x), -1 + s\}, & x \in [0, s], \\ \bar{g}_S(x), & x \in (s, \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}]. \end{cases}$$

Участки монотонности у функций $\tilde{g}_S(x)$, $\check{g}_S(x)$ выделяются очевидным образом. Нетрудно также учесть одновременное выполнение условий (28), (30). Условия типа (30) (по ограничению возможности поворота рядом с начальной и конечной точками маршрута) могут иметь несколько иной вид:

$$|C - (0, 1)| \geq s, \quad |C - (0, -1)| \geq s, \quad (31)$$

Эти условия также достаточно легко учесть, модифицируя соответствующим образом β_S , $g_S(x)$, $\bar{g}_S(x)$ в (25).

2.5. Формула перехода от вспомогательной задачи к общей. Приведем формулу, позволяющую выразить множество

$$S^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \angle(B - C, C - A) \in [-\varphi_0, \varphi_0]\}$$

через $S_{\varphi_0}^{(1)} = S^{(1)}((0, -1), (1, 0), \varphi_0)$ с помощью простого линейного преобразования. Положим

$$E^{(2)} = (e_1^{(2)}, e_2^{(2)}) = (B - A)/|B - A|, \quad E^{(1)} = (e_1^{(1)}, e_2^{(1)}) = (e_2^{(2)}, -e_1^{(2)}). \quad (32)$$

Тогда, очевидно, выполняется

$$|E^{(1)}| = |E^{(2)}| = 1, \quad \langle E^{(1)}, E^{(2)} \rangle = 0,$$

т.е. $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — ортонормированный базис в \mathbb{R}^2 , матрица

$$W = \begin{bmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(2)} \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (33)$$

— ортогональная и, следовательно,

$$\forall U, V \in \mathbb{R}^2 \quad \langle WU, WV \rangle = \langle W^\top WU, V \rangle = \langle U, V \rangle.$$

Нетрудно показать (используя равенства $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} = \hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \cup \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$), что

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{S}}^{(1)}(A, B, \varphi_0) &= \frac{|B-A|}{2} W \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} + (A+B)/2, \\ \hat{\mathbf{S}}^{(1)}(A, B, \varphi_0) &= \frac{|B-A|}{2} W \hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} + (A+B)/2, \\ \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0) &= \frac{|B-A|}{2} W \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} + (A+B)/2, \end{aligned} \quad (34)$$

Например,

$$\begin{aligned} \frac{|B-A|}{2} W \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} &= -\frac{|B-A|}{2} \begin{bmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} = \\ &= -\frac{|B-A|}{2} \frac{B-A}{|B-A|} + \frac{A+B}{2} = -\frac{B-A}{2} + \frac{A+B}{2} = A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|B-A|}{2} W \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} &= \frac{|B-A|}{2} \begin{bmatrix} e_1^{(2)} \\ e_2^{(2)} \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} = \\ &= \frac{B-A}{2} + \frac{A+B}{2} = B, \end{aligned}$$

$$\frac{|B-A|}{2} W \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} = \frac{A+B}{2},$$

$$\begin{aligned} \frac{|B-A|}{2} W \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} &= \frac{|B-A|}{2} \begin{bmatrix} e_2^{(2)} \\ -e_1^{(2)} \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2}, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix} \right| = \frac{|B-A|}{2}, \quad \left\langle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_2 - a_2 \\ a_1 - b_1 \end{bmatrix}, \frac{B-A}{2} \right\rangle = 0.$$

При этом точка $(1, 0)$ находится справа от луча, направленного из точки $(0, -1)$ и проходящего через точку $(0, 1)$, поскольку (см. замечание 5)

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 2 = -2 < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\angle \left((0, 1) - (0, -1), (1, 0) - \frac{(0,1)+(0,-1)}{2} \right) = \angle \left((0, 2), (1, 0) \right) > 0.$$

Покажем, что также и точка $C = \frac{|B-A|}{2}W \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{A+B}{2}$ находится справа от луча, направленного из точки A и проходящего через точку B . Действительно,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} B-A \\ C - \frac{A+B}{2} \end{bmatrix} &= \det \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ b_2 - a_2 & a_1 - b_1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (-(b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \angle(B-A, C - \frac{A+B}{2}) > 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично доказывается, что $\forall C \in \check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ для $\tilde{C} = \frac{|B-A|}{2}WC + \frac{A+B}{2}$ выполняется $\angle(B-A, \tilde{C} - \frac{A+B}{2}) > 0$.

2.6. Построение конечной τ -сети для исходной задачи. Опишем теперь метод нахождения конечной сетки, аппроксимирующей с заданной точностью $\tau > 0$ множество

$$\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \angle(B-C, C-A) \in [-\varphi_0, \varphi_0]\}.$$

Будем аппроксимировать правую долю (левая аппроксимируется аналогично), т.е. множество

$$\check{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \angle(B-C, C-A) \in [0, \varphi_0]\}.$$

Будем строить конечное множество $\check{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0)$, удовлетворяющее условиям

$$\check{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0) \subseteq \check{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0), \quad h_m(\check{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0), \check{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)) \leq \tau. \quad (35)$$

Но тогда в силу (34), (26), а также (9), (10), (11) получаем, что при $\bar{\tau} > 0$ для множества

$$\bar{S}^{\bar{\tau}}(A, B, \varphi_0) = \frac{|B-A|}{2}W\check{S}_{\varphi_0}^{(\bar{\tau},1)} + (A+B)/2 \quad (36)$$

справедливо

$$\bar{S}^{\bar{\tau}}(A, B, \varphi_0) \subseteq \check{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0), \quad h_m(\bar{S}^{\bar{\tau}}(A, B, \varphi_0), \check{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)) \leq \sqrt{2} \frac{|B-A|}{2} \bar{\tau}.$$

Таким образом, если при $\bar{\tau} > 0$ задавать конечное множество $\bar{S}^{\bar{\tau}}(A, B, \varphi_0)$ по формуле (36), то в качестве множества $\check{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0)$, удовлетворяющего (35) для заданного $\tau > 0$, достаточно положить $\check{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0) = \bar{S}^{\bar{\tau}}(A, B, \varphi_0)$ при любом $\bar{\tau} \in (0, \frac{\sqrt{2}}{|B-A|}\tau]$. Поскольку аппроксимация левой доли производится аналогично (в силу $\hat{S}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$; см. раздел 2.1), будем считать, что полностью описан метод построения для заданного $\tau > 0$ конечного аппроксимирующего множества $\mathbf{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0)$, удовлетворяющего условиям

$$\mathbf{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0) \subseteq \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0), \quad h_m(\mathbf{S}^{(\tau,1)}(A, B, \varphi_0), \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)) \leq \tau.$$

2.7. Задача поиска оптимального кусочно-линейного маршрута, соединяющего две заданные точки $A, B \in \mathbb{R}^2$, с возможностью совершения одного поворота в промежуточной точке $C \in \mathbb{R}^2$. Вернемся к рассматриваемой в настоящем разделе задаче и сформулируем соответствующую задачу оптимизации. Ранее была получена формула (34) для описания

$$\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0) = \{C \in \mathbb{R}^2 \mid \angle(B - C, C - A) \in [-\varphi_0, \varphi_0]\}$$

— множества возможных значений для промежуточной точки C , каждое из которых дает одно из возможных решений исследуемой задачи. Опишем соответствующую ей задачу оптимизации. Пусть $f_0(C)$ — функция, определенная при $C = (c_1, c_2) \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, такая, что для некоторого числа $L_0 > 0$ выполняется (см. также замечание 8)

$$\forall C, D \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0) \quad |f_0(C) - f_0(D)| \leq L_0 \|C - D\|. \quad (37)$$

Пусть значение функции $f_0(C)$ характеризует суммарные затраты (штраф) на строительство маршрута, состоящего из двух прямолинейных участков: одного из них, соединяющего точки A, C , а второго — соединяющего точки C и B .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В случае $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ множество $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, являющееся объединением двух выпуклых множеств (долей) $\check{\mathbf{S}}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, само является выпуклым и в этом случае условие (37) будет следствием аналогичных условий, выполненных для каждого из этих его подмножеств. В случае $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ множество $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ уже не будет выпуклым, хотя обе его доли остаются выпуклыми. Вследствие этого выполнение условий вида (37) для каждой из его долей не гарантирует выполнения условия (37) для всего множества $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, а лишь с дополнительным коэффициентом (можно показать, что в случае $\varphi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ в условии (37) для всего множества $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ следует использовать $L_0/\sin \varphi_0$ вместо L_0 — константы Липшица для каждой из долей). Тем не менее, поскольку мы обычно ограничиваемся рассмотрением правой доли (вследствие равенства $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$), нас всегда будет интересовать не общая константа L_0 , удовлетворяющая (37), а константа, при которой выполняется условие вида (37) для каждой из долей множества $\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ (т.е. без замены L_0 на $L_0/\sin \varphi_0$).

Пусть далее $h(\varphi)$, где $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, — неотрицательная функция, накладывающая штраф за поворот φ , где $h(0) = 0$. При этом направление поворота не является важным, т.е. функция $h(\varphi)$ является четной: $\forall \varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0] \quad h(-\varphi) = h(\varphi) = h(|\varphi|)$. Будем считать, что функция $h(\varphi)$ также удовлетворяет условию Липшица на множестве $[-\varphi_0, \varphi_0]$ с некоторой константой $L_h > 0$:

$$\forall \alpha, \beta \in [-\varphi_0, \varphi_0] \quad |h(\alpha) - h(\beta)| \leq L_h |\alpha - \beta|.$$

Введем целевую функцию

$$f_1(C) = f_0(C) + h(\Psi(C)), \quad \text{где } \Psi(C) = \angle(B - C, C - A).$$

Теперь мы можем сформулировать следующую задачу оптимизации. Требуется найти точку $C^* \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ такую, что

$$f_1(C^*) = \min\{f_1(C) \mid C \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)\}. \quad (38)$$

Осталось выяснить, удовлетворяет ли условию Липшица функция $\Psi(C) = \angle(B - C, C - A)$. Выясним этот вопрос, а также подберем методы приближенного решения задачи (38) сначала для простейшего случая с $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$, ограничиваясь правой долей $\check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$. В силу $\hat{S}_{\varphi_0}^{(1)} = -\check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, $S_{\varphi_0}^{(1)} = \hat{S}_{\varphi_0}^{(1)} \cup \check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ обобщение этого случая на $S_{\varphi_0}^{(1)}$ не вызывает затруднений. Покажем, что минимальное значение константы Липшица $L(\bar{C})$ для функции $\Psi(C)$ в окрестности любой точки $\bar{C} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2) \in \check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, где $\bar{c}_1 > 0$, $\bar{c}_2 \in [1, -1]$, удовлетворяет неравенству $L(\bar{C}) \geq \frac{\Psi(\bar{C})}{\bar{c}_1}$. Действительно, используя очевидное равенство $\Psi(0, \bar{c}_2) = 0$ ($\Psi(C) = \angle(B - C, C - A) = 0$ при $C \in [A, B]$), имеем

$$|\Psi(\bar{C}) - \Psi(0, \bar{c}_2)| = \frac{\Psi(\bar{C})}{\bar{c}_1} \bar{c}_1 = \frac{\Psi(\bar{C})}{\bar{c}_1} \|\bar{C} - (0, \bar{c}_2)\|.$$

При этом, если $\varphi_1 \in (0, \min\{\varphi_0, \frac{\pi}{2}\})$, $\bar{C} \in \check{\Gamma}_{\varphi_1} = \{C \in \check{S}_{\varphi_0}^{(1)} \mid \Psi(C) = \varphi_1\}$, то $\bar{c}_2 \in [1, -1]$, $L(\bar{C}) \geq \frac{\Psi(\bar{C})}{\bar{c}_1} = \frac{\varphi_1}{\bar{c}_1}$, и если точка \bar{C} близка к любой из точек $A = (0, -1)$ или $B = (1, 0)$, то число \bar{c}_1 может быть сколь угодно малым. Таким образом, константа Липшица для $\Psi(C)$ может принимать сколь угодно большие значения, а следовательно, и для функции $h(\Psi(C))$, и для целевой функции $f_1(C)$ константа Липшица может также принимать сколь угодно большие значения.

Между тем большие значения константы Липшица у функции $\Psi(C)$ возникают лишь в малых окрестностях точек A и B . При рассмотрении практических задач (например, проектирование канатной дороги) ситуация, когда единственный поворот планируется совершить вблизи начальной точки A или конечной точки B , является невозможной. Учитывая это, можно в соответствии с замечанием 7 наложить на C дополнительные условия, которые при сведении общей задачи к вспомогательной приведут к условиям вида (30) или (31). Что касается точек $C \in \check{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, не находящихся вблизи точек $A = (0, -1)$ или $B = (1, 0)$, то $\Psi(C) = \angle(B - C, C - A) \in (0, \varphi_0]$ — угол, определяемый по формуле

$$\Psi(C) = \angle(B - C, C - A) = \arccos \frac{\langle B - C, C - A \rangle}{|B - C| \cdot |C - A|} = \arccos u(C)$$

или по формуле

$$\Psi(C) = \begin{cases} \arcsin v(C), & \Psi(C) \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \pi - \arcsin v(C), & \Psi(C) \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \end{cases}$$

где

$$u(C) = \frac{1 - c_1^2 - c_2^2}{\sqrt{c_1^2 + (1 - c_2)^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + (1 + c_2)^2}},$$

$$v(C) = \sqrt{1 - u^2(C)} = \frac{2c_1}{\sqrt{c_1^2 + (1 - c_2)^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + (1 + c_2)^2}}.$$

При этом всегда можно выбрать формулу, соответствующую случаю, когда $\min\{|u(C)|, v(C)\} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (функции $\arccos u$, $\arcsin u$ являются бесконечно гладкими с ограниченной производной при $|u| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$). Используя обе эти формулы, нетрудно доказать, что функция $\Psi(C)$ является бесконечно гладкой на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\}$. Можно также наложить дополнительные ограничения (30) (или (31)), где $s > 0$ — некоторое выбранное число, и тогда можно определить (точно или приближенно) значение константы Липшица L_s для функции $\Psi(C)$ на компакте $\text{Co}\{C \in \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \mid \|(0, 1) - C\| \geq s, \|(0, -1) - C\| \geq s\}$ (или, соответственно, на $\text{Co}\{C \in \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \mid \|(0, 1) - C\| \geq s, |(0, -1) - C| \geq s\}$), на котором эта функция имеет ограниченные частные производные $\Psi_{c_1}(C)$, $\Psi_{c_2}(C)$. Учитывая, что оптимизационная задача для определения числа L_s имеет размерность 2, эту задачу можно решить достаточно точно (с небольшой погрешностью).

Нетрудно доказать, что несмотря на то, что функция $f_1(C)$ не удовлетворяет на $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ условию Липшица, тем не менее справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\tau_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min f_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau_n, 1)}) = \min f_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}).$$

Покажем теперь, как можно при этом использовать дополнительное ограничение вида (30), т.е. отбраковывать «лишние решения» $C \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$, не удовлетворяющие (30). Величина s может определяться из практических (технических) соображений, а также вычисляться исходя из предположения о том, чтобы обязательное выполнение (30) для $C \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$ не меняло итогового значения $\min f_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)})$. Обозначим $\bar{f}_0 = f_0(B) = f_1(B)$ — значение целевой функции в случае выбора $C \in [A, B]$, т.е. выбираем прямой маршрут из A в B без использования поворота, поскольку $\forall C \in [A, B] \Psi(C) = 0$, $h(\Psi(C)) = 0$, $f_1(C) = f_1(B) = f_0(B) = \bar{f}_0$.

Рассмотрим нетривиальный случай, когда это простейшее решение не является оптимальным. Пусть мы нашли некоторое рекордное значение \tilde{b} , перебирая значения $f_1(C)$ при различных $C \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$. Например, $\tilde{b} = f_1^{(\tau_0)} = \min f_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau_0, 1)})$, где $\tau_0 > 0$ — начальная («грубая») величина для τ . Пусть при этом $\tilde{b} < \bar{f}_0$ и $\theta = \bar{f}_0 - \tilde{b} > 0$. Тогда можно положить в (30) $s = \theta/L_0$, поскольку

$$\begin{aligned} \|(0, 1) - C\| < \theta/L_0 &\Rightarrow f_1(C) = f_0(C) + h(\Psi(C)) \geq f_0(C) \geq \\ &\geq f_0(B) - L_0\|B - C\| > f_0(B) - \theta = \tilde{b} \end{aligned}$$

(аналогично для точки $(0, -1)$), т.е. в s -окрестности точек $A = (0, -1)$, $B = (0, 1)$ улучшение значения \tilde{b} невозможно. При этом вместо величины L_0 , удовлетворяющей (37), достаточно использовать константу Липшица функции $f_0(C)$ на $O_m^s([A, B]) \cap \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, где $s = \theta/L_0$. Подчеркнем, что при таком подходе требуется знание величины L_0 , что не всегда выполняется. Аналогичные рассуждения с незначительными изменениями переносятся и на случай, когда используется дополнительное ограничение (31).

Применение модификации варианта метода с использованием дополнительного условия (30) (или (31)) также имеет свой смысл, поскольку при этом происходит сокращение объема вычислений (отбрасываются точки из $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1,\tau)}$, не удовлетворяющие (30) (или (31)). При этом с каждым новым $\tau = \tau_n$ величина $s = s(\tau_n)$ уточняется (может значительно увеличиваться).

Опираясь на приведенные рассуждения, опишем метод приближенного решения основной задачи (38) с произвольными $A, B \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим уравнение относительно неизвестного $\bar{C} \in \mathbb{R}^2$:

$$C = \omega(\bar{C}) = \frac{|B-A|}{2} W\bar{C} + (A+B)/2, \quad (39)$$

где $C \in S^{(1)}(A, B, \varphi_0)$, W — ортогональная матрица, удовлетворяющая условиям (32), (33). Как было показано в разделе 2.5, для этой матрицы выполняется (34). Из (39) однозначно получаем

$$\bar{C} = \xi(C) = \frac{2}{|B-A|} W^T (C - \frac{A+B}{2}), \quad (40)$$

т.е. по формуле (40) любой точке $C \in S^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ можно поставить в соответствие точку $\xi(C) \in S_{\varphi_0}^{(1)}$, и при этом $\xi(A) = (0, -1)$, $\xi(B) = (0, 1)$. Более того, используя (34), получаем

$$\omega(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}) = \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0), \quad \xi(\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)) = \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}.$$

Обозначим $\bar{\Psi}(\bar{C}) = \angle((0, 1) - \bar{C}, \bar{C} - (0, -1))$, где $\bar{C} \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$. Заметим, что в силу ортогональности матрицы W для любых $\bar{C} \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$ выполняется

$$\bar{\Psi}(\bar{C}) = \angle(B - \omega(\bar{C}), \omega(\bar{C}) - A) = \Psi(\omega(\bar{C})),$$

откуда $\forall \bar{C} \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} \quad h(\bar{\Psi}(\bar{C})) = h(\Psi(\omega(\bar{C})))$. Обозначим

$$\begin{aligned} \forall \bar{C} \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)} \quad \tilde{f}_0(\bar{C}) &= f_0(\omega(\bar{C})), \quad \tilde{h}(\Psi(\bar{C})) = h(\Psi(\omega(\bar{C}))) = h(\bar{\Psi}(\bar{C})), \\ \tilde{f}_1(\bar{C}) &= f_1(\omega(\bar{C})) = \tilde{f}_0(\bar{C}) + \tilde{h}(\Psi(\bar{C})) = \tilde{f}_0(\bar{C}) + h(\bar{\Psi}(\bar{C})). \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда $\tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}) = f_1(\omega(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)})) = f_1(\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0))$, откуда

$$\min \tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}) = \min f_1(\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)),$$

где $\tilde{f}_1(\bar{C})$ удовлетворяет (41). Но тогда в качестве приближенного значения для $\min f_1(\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0))$ можно взять $\min \tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau,1)})$ при достаточно малом $\tau > 0$, поскольку в силу утверждения 3 имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \min \tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau,1)}) = \min \tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}) = \min f_1(\mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)).$$

Заметим далее, что в силу (37) выполняется

$$\begin{aligned} \forall \bar{C}, \bar{D} \in \check{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)} \quad & |\tilde{f}_0(\bar{C}) - \tilde{f}_0(\bar{D})| \leq L_0 \|\omega(\bar{C}) - \omega(\bar{D})\| \leq \\ & \leq \frac{|B-A|}{2} L_0 \|W(\bar{C} - \bar{D})\| \leq \frac{|B-A|}{2} L_0 |W(\bar{C} - \bar{D})| = \frac{|B-A|}{2} L_0 |\bar{C} - \bar{D}| \leq \\ & \leq \frac{|B-A|}{\sqrt{2}} L_0 \|\bar{C} - \bar{D}\|. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае, если величина L_0 известна (аналогично для доли $\hat{\mathbf{S}}_{\varphi_0}^{(1)}$; см. замечание 8), то при вычислении величины $\min \tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)})$ можем воспользоваться описанным выше методом подбора подходящей величины s такой, что при вычислении $\min \tilde{f}_1(\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)})$ можно не учитывать значения $\tilde{f}_1(C)$ для $C \in \mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, не удовлетворяющих (30) (или (31)).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Заметим, что $\forall C, \tilde{C} \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$

$$|\xi(C) - \xi(\tilde{C})| = \frac{2}{|B-A|} |W^B(C - \tilde{C})| = \frac{2}{|B-A|} |C - \tilde{C}|,$$

откуда $\forall C \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$

$$|\xi(C) - (0, -1)| = \frac{2}{|B-A|} |C - A|, \quad |\xi(C) - (0, 1)| = \frac{2}{|B-A|} |C - B|. \quad (42)$$

Используя (42), получаем, что если на точку $C \in \mathbf{S}^{(1)}(A, B, \varphi_0)$ накладывается дополнительное ограничение вида

$$|C - A| \leq \sigma |B - A|/2, \quad |C - B| \leq \sigma |B - A|/2,$$

то в соответствии с замечанием 7 используем в описанном методе модифицированные множества $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$ с учетом выполнения условия (28). Соответственно, если на точку $C \in \mathbf{S}(A, B, \varphi_0)$ накладывается дополнительное ограничение вида

$$|C - A| \geq s |B - A|/2, \quad |C - B| \geq s |B - A|/2,$$

то в соответствии с замечанием 7 используем в описанном методе модифицированные множества $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(1)}$, $\mathbf{S}_{\varphi_0}^{(\tau, 1)}$, с учетом выполнения условия (31). Можно одновременно учитывать условия (28), (31).

Заключение. Перечислим основные результаты работы.

1. Введено понятие множества, описываемого ступенчатой системой неравенств вида (8).
2. Получены вспомогательные утверждения об аппроксимации ограниченного множества $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^2$ конечной сеткой с точностью $\tau > 0$. На их основе предложен метод построения аппроксимирующего множества \mathbf{S}^τ для множества $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^2$, задаваемого системой неравенств вида (8).
3. Исследована задача поиска кусочно-линейного маршрута между точками $A, B \in \mathbb{R}^2$ с одним поворотом в промежуточной точке $C \in \mathbb{R}^2$ при ограничении на угол поворота. Сформулирована простейшая вспомогательная задача, удобная для исследований. С помощью простых формул описано множество возможных точек для осуществления одного поворота во вспомогательной задаче (т.е. получено аналитическое выражение для описания этого множества), из которого с помощью простого линейного преобразования вида (34) может быть получено множество возможных решений для исходной задачи. Показано,

что множество возможных решений в простейшей задаче описывается «ступенчатой» системой неравенств вида (8), а следовательно, для аппроксимации этого множества применимы методы из раздела 1. Соответственно, конечное аппроксимирующее множество для множества допустимых решений во вспомогательной задаче с помощью простого линейного преобразования вида (34) преобразуется в конечное аппроксимирующее множество для множества допустимых решений в исходной задаче.

4. Разработан приближенный метод решения задачи поиска оптимального кусочно-линейного маршрута, соединяющего две заданные точки $A, B \in \mathbb{R}^2$, с возможностью совершения одного поворота в промежуточной точке $C \in \mathbb{R}^2$, основанный на использовании конечного аппроксимирующего множества для множества возможных решений рассматриваемой задачи оптимизации.

Полученные результаты можно рассматривать как первоначальные или даже вспомогательные для решения более сложных геометрических задач (в частности с двумя, тремя, произвольным числом поворотов, а также при некоторых дополнительных условиях).

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. В.Н. Нефедов — общая концепция статьи; разработка комплексной математической модели, включая метод аппроксимации замкнутых ограниченных множеств в \mathbb{R}^2 конечными подмножествами с заданной точностью (в метрике Хаусдорфа) для класса множеств, задаваемых ступенчатыми системами неравенств; подготовка первоначального варианта рукописи; доработка рукописи. Ф.В. Свойкин — инициация исследования; постановка задачи оптимизации кусочно-линейных маршрутов; формулировка цели и задач работы. Б.А. Гарибян — разработка математической и геометрической моделей; подготовка первоначального варианта рукописи; доработка рукописи. А.В. Ряпухин — постановка геометрической задачи оптимизации на замкнутых множествах; разработка математической модели; доработка рукописи. Н.С. Королько — формулировка практических требований к модели; построение геометрической модели на основе оригинальной технической разработки поворотного механизма канатно-трелевочной установки.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное прочтение статьи, а также за ценные предложения и комментарии, которые способствовали улучшению работы.

Библиографический список

1. Васильев Ф. П. *Численные методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1988. 550 с. EDN: UTKWUO.
2. Нестеров Ю. Е. *Введение в выпуклую оптимизацию*. М.: МЦНМО, 2010. 280 с. EDN: SDSFYV.
3. Нефедов В. Н. Некоторые вопросы решения липшицевых задач глобальной оптимизации с использованием метода ветвей и границ // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1992. Т. 32, № 4. С. 512–529.
4. Евтушенко Ю. Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор

- на неравномерной сетке) // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1971. Т. 11, № 6. С. 1390–1403.
5. Леонов В. В. Метод покрытий для отыскания глобального максимума функций от многих переменных / *Исследования по кибернетике*. М.: Сов. радио, 1970. С. 41–52.
 6. Пиявский С. А. Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функций // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1972. Т. 12, № 4. С. 888–896.
 7. Потапов М. А. *Методы неравномерных покрытий и их применение для решения задач глобальной оптимизации в диалоговом режиме*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Москва, 1984. 104 с. EDN: NPAFWT.
 8. Нефедов В. Н. *Об одном методе глобальной максимизации функции нескольких переменных на параллелепипеде*: Деп. в ВИНТИ 1.06.85, № 377–85 ДЕП. М., 1985.
 9. Евтушенко Ю. Г., Ратькин В. А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных // *Изв. АН СССР. Техн. киберн.*, 1987. № 1. С. 119–127.
 10. Нефедов В. Н. Отыскание глобального максимума функции нескольких переменных на множестве, заданном ограничениями типа неравенств // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987. Т. 27, № 1. С. 35–51.
 11. Ищенко А. В., Киреев И. В. Алгоритм построения двумерных вложенных сеток // *Журн. СВУ. Сер. Матем. и физ.*, 2009. Т. 2, № 1. С. 83–90. EDN: JWKGRP.
 12. Нефедов В. Н. Об аппроксимации множества Парето // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1984. Т. 24, № 7. С. 993–1007.
 13. Нефедов В. Н. Об аппроксимации множества оптимальных по Парето решений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986. Т. 26, № 2. С. 163–176.
 14. Hausdorff F. *Set Theory*. New York: Dover Publ., 1944. 307 pp.
 15. Скворцов В. А. *Примеры метрических пространств* / Библиотека «Математическое просвещение». Т. 16. М.: МЦНМО, 2012. 27 с. EDN: QJZGML.

MSC: 52A10, 52A27, 68U05

Finite approximation methods for two-dimensional sets and their application to geometric optimization problems

V. N. Nefedov¹, F. V. Svoykin², B. A. Garibyan¹,
A. V. Ryapukhin¹, N. S. Korolko²

¹ Moscow Aviation Institute (National Research University),

4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

² Saint Petersburg State Forest Technical University under name of S. M. Kirov

5, Institutskiy per., Saint Petersburg, 194021, Russian Federation.

Abstract

This study investigates the problem of approximating closed bounded sets in two-dimensional real space by finite subsets with a given accuracy in the Hausdorff metric. The main focus is on developing an effective approximation method for the class of sets defined by stepwise systems of inequalities.

The proposed method is based on constructing special grid structures that allow controlling the approximation accuracy through a parameter $\tau > 0$. Corresponding theoretical statements about the properties of such approximations are proved.

The problem of finding an optimal piecewise-linear path between two points with a single turn under angle constraints is examined in detail. The developed methods are applicable for solving various geometric optimization problems.

Keywords: mathematical optimization, discrete approximation of closed sets, Hausdorff topology, angular path constraint.

Received: 12th November, 2024 / Revised: 23rd January, 2025 /

Accepted: 27th January, 2025 / First online: 25th March, 2025

Competing interests. The authors declare no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nefedov V. N., Svoykin F. V., Garibyan B. A., Ryapukhin A. V., Korolko N. S. Finite approximation methods for two-dimensional sets and their application to geometric optimization problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 129–157. EDN: DMJLWE. DOI: 10.14498/vsgtu2131 (In Russian).

Authors' Details:

Victor N. Nefedov  <https://orcid.org/0000-0001-6053-2066>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematical Cybernetics¹; e-mail: nefedovvn54@yandex.ru

Fedor V. Svoykin  <https://orcid.org/0000-0002-8507-9584>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Forestry Technology²; e-mail: svoykin_fv@mail.ru

Authors' contributions and responsibilities. V.N. Nefedov: Conceptualization of the study; Development of a comprehensive mathematical model, including an approximation method for closed bounded sets in \mathbb{R}^2 using finite subsets with a specified accuracy (in Hausdorff metric) for sets defined by stepwise inequality systems; Drafting the initial manuscript; Manuscript revision. F.V. Svoikin: Research initiation; Formulation of the piecewise-linear route optimization problem; Conceptualization of research goals and objectives. B.A. Garibyan: Development of mathematical and geometric models; Drafting the initial manuscript; Manuscript revision. A.V. Ryapukhin: Formulation of the geometric optimization problem on closed sets; Development of the mathematical model; Manuscript revision. N.S. Korolko: Specification of practical requirements for the model; Construction of the geometric model based on an original technical design of a cable-logging cart's rotary mechanism. All authors reviewed and approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was conducted without external funding.

Acknowledgments. The authors would like to thank the reviewers for their careful reading of the manuscript and for their valuable suggestions and comments, which helped improve the quality of the manuscript.

References

1. Vasil'ev F. P. *Chislennyye metody resheniia ekstremal'nykh zadach* [Numerical Methods for Solving of Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1988, 550 pp. (In Russian). EDN: UTKWUO.
2. Nesterov Yu. E. *Vvedenie v vypukliuu optimizatsiiu* [Introduction to Convex Optimization]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2010, 280 pp. (In Russian). EDN: SDSFYV.
3. Nefedov V. N. Some problems of solving Lipschitzian global optimization problems using the branch and bound method, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 4, pp. 433–445. EDN: XKQMEC.
4. Evtushenko Yu. G. Numerical methods for finding global extrema (Case of a non-uniform mesh), *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no. 6, pp. 38–54. EDN: XOYJSF. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90065-6).
5. Leonov V. V. The method of coverings for seeking a global maximum of a function of several variables, In: *Issledovanie po kibernetike* [Research in Cybernetics]. Moscow, Sov. Radio, 1970, pp. 41–52 (In Russian).
6. Piyavskii S. A. An algorithm for finding the absolute extremum of a function, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1972, vol. 12, no. 4, pp. 57–67. EDN: TTTJWV. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(72\)90115-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(72)90115-2).
7. Potapov M. A. *Methods of non-uniform coverings and their application for solving problems of global optimization in a dialogue mode*, Diss. Cand. Phys. Math. Sci. Moscow, 1984, 104 pp. (In Russian). EDN: NPAFWT.
8. Nefedov V. N. *On a method of global maximization of a function of several variables on a rectangular prism*, Dep. in VINITI, 1.06.85, no. 377-85 DEP. Moscow, 1985 (In Russian).

Boris A. Garibyan  <https://orcid.org/0000-0001-8309-3086>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematical Cybernetics¹; e-mail: bagarib@yandex.ru

Anatolii V. Ryapukhin  <https://orcid.org/0000-0002-2208-6875>

Senior Lecturer; Dept. of Design and Certification of Aviation Equipment¹; e-mail: anatoliirupukhin@yandex.ru

Nikolay S. Korolko  <https://orcid.org/0009-0009-6289-2984>

Postgraduate Research Student; Dept. of Forestry Technology²; e-mail: kns891ta@mail.ru

9. Evtushenko Yu. G., Rat'kin V. A. The method of half-divisions for global optimization of a function of many variables, *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1987, vol. 25, no. 5, pp. 75–84.
10. Nefedov V. N. The search for a global maximum of a function of several variables in a set specified by constraints of the inequality type, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 23–32. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(87\)90114-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(87)90114-5).
11. Ishenko A. V., Kireev I. V. The algorithm for generation of two-dimensional embedded grids, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2009, vol. 2, no. 1, pp. 83–90 (In Russian). EDN: JWKGRP.
12. Nefedov V. N. Approximation of a Pareto set, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, vol. 24, no. 4, pp. 19–28. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(84\)90225-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(84)90225-8).
13. Nefedov V. N. Approximation of a set of Pareto-optimal solutions, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 1, pp. 99–107. DOI: [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0041-5553\(86\)90192-8](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0041-5553(86)90192-8).
14. Hausdorff F. *Set Theory*. New York, Dover Publ., 1944, 307 pp.
15. Skvortsov V. A. *Primery metrisheskikh prostranstv* [Examples of Metric Spaces], *Matematicheskoe Prosveshchenie*, vol. 16. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2012, 27 pp. (In Russian). EDN: QJZGML.



УДК 517.9+514.7+519.6

Описание трижды периодических поверхностей с помощью оператора Лапласа–Бельтрами и статистической модели машинного обучения

М. И. Смольков

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Трижды периодические поверхности (ТПП) и их минимальные аналоги (ТПМП) в настоящее время активно применяются в различных областях, таких как механика, биомеханика, аэродинамика, гидродинамика и радиофизика. В связи с этим возникает задача установления корреляций между тополого-геометрическими свойствами поверхностей и их физическими характеристиками. Для решения данной задачи необходимо ввести меру сходства между поверхностями, обладающими различными тополого-геометрическими свойствами. Настоящая работа посвящена описанию ТПП и ТПМП в терминах метрического пространства дескрипторов. Решение задачи осуществляется с использованием математического аппарата теории распознавания изображений. Построен дескриптор на основе совокупности собственных векторов и собственных значений оператора Бельтрами–Лапласа, а также совместной байесовской модели. В пространстве дескрипторов введена метрика, основанная на вероятностной мере сходства поверхностей. Работоспособность разработанного метода проверена на 51 поверхности класса P . Точность предсказания типа поверхности составила 92.8%. Разработанная модель машинного обучения позволяет определить принадлежность произвольной поверхности к классу P -поверхностей.

Ключевые слова: топологическая структура, дискретный аналог уравнения Лапласа–Бельтрами, собственные векторы, собственные значения, байесовские вероятности, вероятностная мера сходства.

Получение: 24 июля 2024 г. / Исправление: 19 февраля 2025 г. /

Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 10 марта 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Смольков М. И. Описание трижды периодических поверхностей с помощью оператора Лапласа–Бельтрами и статистической модели машинного обучения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 158–173. EDN: ENXAZE. DOI: 10.14498/vsgtu2105.

Сведения об авторе

Михаил Игоревич Смольков  <https://orcid.org/0000-0001-5573-662X>

аспирант; младший научный сотрудник; международный научно-исследовательский центр по теоретическому материаловедению; e-mail: m.smolkov97@gmail.com

Введение. В последнее десятилетие трижды периодические поверхности (ТПП) и их минимальные аналоги (ТПМП) стали объектом интенсивных исследований в различных областях науки и техники. ТПП разбивают трехмерное пространство на системы непересекающихся пор, а ТПМП помимо этого обладают в каждой точке нулевой средней кривизной, то есть характеризуются минимальной энергией поверхностного натяжения. Благодаря этому на основе ТПП и ТПМП, например, методами аддитивных технологий могут быть изготовлены пористые структуры, которые находят широкое применение благодаря своим нетривиальным физическим свойствам: механическим [1–4], виброакустическим [5], теплопроводным [4]. Такие структуры могут служить основой для создания композиционных материалов [6, 7], а также метаматериалов [4, 8]. Особый интерес представляют процессы дифракции электромагнитных волн на подобных структурах, изготовленных из различных материалов [9, 10].

В предыдущей работе [11] с участием автора была предложена программная реализация нового способа генерации ТПП на основе анализа топологии и геометрии атомных каркасов природных соединений — цеолитов [12]. В работе [13] были построены новые ТПМП, а также численно и экспериментально исследованы механические свойства образцов новых пористых структур, основанных на этих ТПМП. Образцы для экспериментального изучения изготавливались методами 3D-печати. В работе показана сильная зависимость механических свойств структур от тополого-геометрических характеристик поверхностей. Таким образом, в работе [13] была подтверждена необходимость установления корреляций между тополого-геометрическими и физическими свойствами пористых структур.

При построении поверхностей в работах [11, 12] они характеризовались следующим набором признаков: тип тайлинга, то есть разбиение сеточного пространства, построенного на кристаллической решетке цеолита, на элементарные строительные единицы; род поверхности (genus); типы колец — все несимметричные кольца периодической сетки (фасеты натурального тайлинга) в ТПП; пространственная группа — группа симметрии повторяющегося тайлинга в пространстве, совпадающая с пространственной группой кристаллической решетки; топология HRN — топология сетки Хопфа [14]; топология лабиринтных сеток согласно общепринятым номенклатурам [15]; сбалансированность — свойство изоморфности системы двух пор, на которые тайлинг разбивает пространство. В ходе исследования было выявлено, что набор перечисленных признаков пористых структур не является независимым и полным, а физические, в частности механические, свойства пористых структур зависят от неочевидных комбинаций указанных выше признаков. Отметим, что эти признаки влияют на механические свойства (модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и др.) неявным образом с некоторым неизвестным весом. Таким образом, возникает задача введения более тонких дескрипторов, которые бы более полно интегрировали тополого-геометрические признаки поверхностей и позволяли отличать поверхности друг от друга по некоторому расстоянию в пространстве этих дескрипторов.

Заметим, что аналогичная задача возникает при обработке изображений, например, при идентификации фотографии некоторого лица среди большого числа фотографий [16]. Одним из развитых методов обработки изображе-

ный в задачах такого рода является метод вычисления собственных функций и собственных значений оператора Лапласа—Бельтрами (ОЛБ). Данный подход использовался также на двумерном многообразии в трехмерном пространстве [16] с привлечением совместной байесовской модели машинного обучения [16, 17], что позволило ввести вероятностную метрику в пространстве дескрипторов и определять близость поверхностей по расстоянию в этом пространстве. В настоящей работе этот подход развивается для распознавания (сравнения) поверхностей на множестве так называемых Р-поверхностей по А. Шоену [18]: MAPO-39 (ATN), Mg-BCCT (BCT), Brewsterite (BRE), Cobalt-Gallium-Phosphate-5 (CGF), Edingtonite (EDI), Heulandite (HEU), ITQ-12 (ITW), CoAPO-CJ62 (JSW), Laumontite (LAU), Linde Type A (LTA), Merlinoite (MER), Rhodenite (RHO), STA-6 (SAS), Sodalite (SOD), Mu-18 (UEI). Эти поверхности характеризуются различным набором колец и различными пространственными группами, но все являются сбалансированными поверхностями 3-го рода (genus 3) с топологией лабиринтовых сеток — рси и топологией колец Хопфа — нбо.

В качестве примера работы развитого метода был произведен расчет расстояния для всех перечисленных выше поверхностей и двух D-поверхностей по отношению к поверхности LTA.

1. Создание дескриптора ТПП на основе оператора Лапласа—Бельтрами. Предложенный в работе [16] метод расчета собственных векторов и собственных значений оператора ОЛБ позволяет создать дескриптор поверхности. Метод включает в себя следующие шаги:

- 1) построение ОЛБ для каждой поверхности;
- 2) расчет собственных векторов и собственных значений ОЛБ для каждой поверхности;
- 3) уменьшение размерности пространства дескрипторов при помощи разложения по некоторой системе мульти-вейвлетов.

Рассмотрим каждый шаг более подробно на примере используемых в нашем исследовании моделей ТПМП. Для любой действительной функции $f \in C^2$, заданной на римановом многообразии M , ОЛБ Δ_M определяется следующим образом:

$$\Delta_M f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \partial_i(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j f), \quad (1)$$

где g — метрический тензор M [19].

Одной из сложностей для решения задачи на собственные функции и собственные значения для оператора ОЛБ (1) является отсутствие аналитического представления рассматриваемых поверхностей. Например, в разработанном нами подходе [11–13] ТПП и ТПМП задаются набором точек в трехмерном пространстве (рис. 1). Функция f определяется в узлах сетки поверхности, то есть на несвязном многообразии L . Соответствующий дискретный аналог ОЛБ выражается следующей формулой [19]:

$$\Delta f(p_i) = \frac{1}{s_i} \sum_{p_j \in N(i)} w_{ij}(f(p_i) - f(p_j)), \quad (2)$$

где $N(i)$ — однокольцевая окрестность точки $p_i \in L$; w_{ij} — весовые коэффициенты; s_i — коэффициенты нормализации, равные площади полиэдра Воро-

ного, построенного в окрестности точки p_i . Весовые коэффициенты определяются следующей формулой:

$$w_{ij} = \frac{\text{ctg } \alpha_{ij} + \text{ctg } \beta_{ij}}{2},$$

где α_{ij} и β_{ij} — два угла, противоположные ребру между вершинами p_i и p_j , $i \neq j$.

В матричной записи формула (2)

$$\Delta f = S^{-1}Wf, \tag{3}$$

где $S = \text{diag}(s_j)$, $W = \text{diag}(t_i) - (w_{ij})$, $t_i = \sum_k w_{ik}$.

В терминах (3) расчет собственных значений, соответствующих дискретному набору собственных векторов ОЛБ, эквивалентен следующей матричной задаче:

$$W\phi = \lambda S\phi,$$

где λ — собственное значение ОЛБ, а ϕ — собственный вектор ОЛБ.

Для расчета матриц W и S мы использовали алгоритм, представленный в [20]. Идея данного алгоритма заключается в преобразовании несвязного многообразия в связное путем создания двух логических копий каждого входного треугольника и склеивания их по ребрам, чтобы сформировать замкнутую реберно-связную сетку. Полученную сетку называют «опушенным покрытием», поскольку дублированные треугольники все еще разделяют те же самые вершины, подобно двум слоям обитой мебели, соединенным пуговицами (рис. 2).

Процедура решения задачи расчета собственных векторов и собственных значений реализована в пакете SciPy [21]. Для полученных W и S рассчитываются наборы λ и ϕ . По данным наборам может быть построена частотная гистограмма поверхности. Собственные векторы и собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами наследуют его внутреннюю природу, поэтому они улавливают геометрические и топологические свойства поверхностей [22] и остаются инвариантными относительно изометрических деформаций.

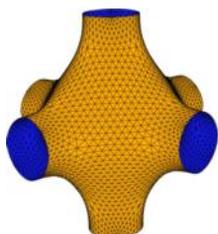


Рис. 1. Пример элементарной ячейки ТПП Р-типа на основе цеолита Linde Type A (LTA)

[Figure 1. Example of P-type TPS unit cell based on Linde Type A (LTA) zeolite]

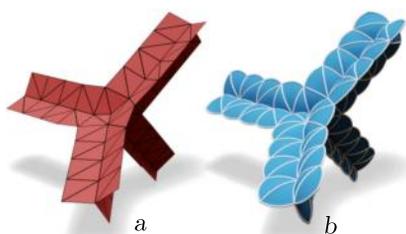


Рис. 2. Пример «опушенного покрытия»: а) поверхность несвязного многообразия; б) «опушенная» поверхность

[Figure 2. Example of “tufted cover”: a) non-manifold surface; b) “tufted” surface]

Опишем процедуру построения частотной гистограммы. Для обеспечения инвариантности собственных векторов к размеру поверхности [23] необходимо нормировать каждый вектор на его собственное значение:

$$\tilde{\phi}_i = \frac{\phi_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

где $\tilde{\phi}_i$ — i -й масштабно-инвариантный собственный вектор, $\dim \tilde{\phi}_i = \dim L$.

Векторы $\tilde{\phi}_i$ являются ключевыми для установления схожестей между ТПП, поэтому гистограмма каждой поверхности должна быть рассчитана на фиксированном для всех поверхностей интервале $[r_{\min}^i, r_{\max}^i]$:

$$r_{\min}^i = \min_{p,l} \{\tilde{\phi}_l^i(p)\}, \quad r_{\max}^i = \max_{p,l} \{\tilde{\phi}_l^i(p)\},$$

где $\tilde{\phi}_l^i(p)$ — значение i -го масштабно-инвариантного собственного вектора поверхности номера l .

В таком случае форму поверхности описывает гистограмма (рис. 3) размерности $N \times N_E$, где N_E — количество собственных векторов ОЛБ, а N — количество интервалов для гистограммы каждого $\tilde{\phi}_i$, $i \in [1, \dots, N_E]$. Значения N , N_E выбираются из соображений оптимизации точности вычислений и затрат машинного времени, в данной работе $N = N_E = 64$. Далее будем

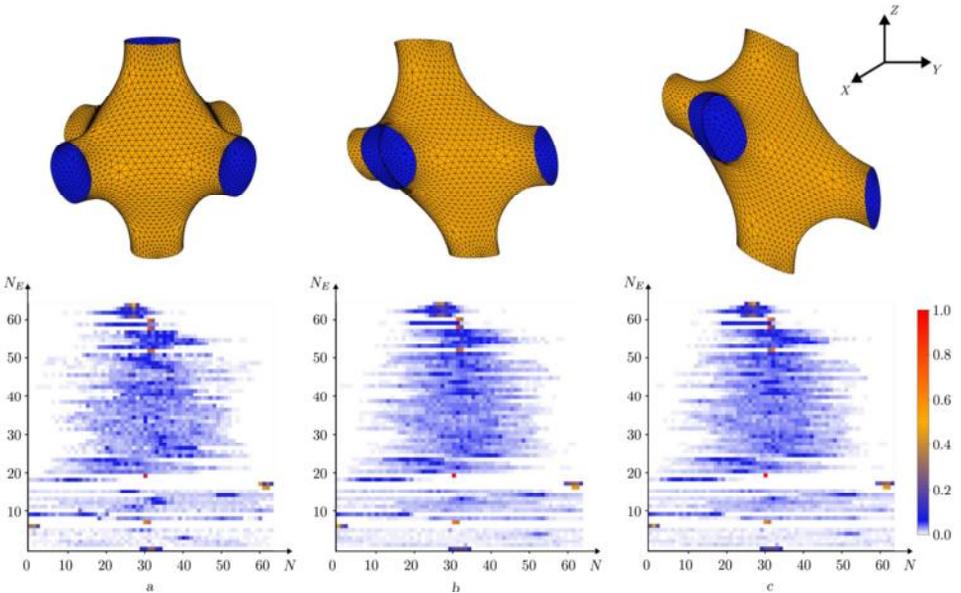


Рис. 3. Пример изображения гистограммы $\Gamma 64 \times 64$ для ТПП Р-типа на основе цеолита Linde Type A (LTA): а) исходная ТПП; б) ТПП, полученная сдвигом по осям X и Y на 40% от длины ребра ограничивающего параллелепипеда; в) ТПП, полученная сдвигом по осям Y и Z на 40% от длины ребра ограничивающего параллелепипеда

[Figure 3. Example of image histogram $\Gamma 64 \times 64$ for P-type TPS based on Linde Type A (LTA) zeolite: a) original TPS; b) TPS obtained by shifting along the X and Y axes by 40% of the length of the edge of the bounding box; c) TPS obtained by shifting along the Y and Z axes by 40% of the length of the edge of the bounding box]

называть данное представление изображением гистограммы Γ . Фактически Γ является матрицей, элементы которой задаются количеством собственных векторов, попадающих в данный элемент гистограммы, нормированным на $[0, 1]$. Изображение гистограммы позволяет учитывать глобальную структуру объекта при сохранении его формы относительно различных преобразований, например, изометрических трансформаций.

Изображение гистограммы может рассматриваться как дескриптор поверхности, однако оно описывается большим объемом данных, представляющим затруднение при сравнении. Для уменьшения размерности дескриптора произведем разложение Γ по некоторому мульти-вейвлетному базису, так называемой V -системе [24]. V -система представляет собой набор ортогональных базисных функций. В данной работе, по аналогии с работой [16], используется V -система третьего порядка. V -система определена на интервале $[0, 1]$ и упорядочена по группам и классам следующим образом:

– первая группа ($n = 1$):

$$\begin{aligned} V_{3,1}^1(x) &= 1, \\ V_{3,1}^2(x) &= \sqrt{3}(1 - 2x), \\ V_{3,1}^3(x) &= \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1), \\ V_{3,1}^4(x) &= \sqrt{7}(-20x^3 + 30x^2 - 12x + 1); \end{aligned}$$

– вторая группа ($n = 2$):

$$\begin{aligned} V_{3,2}^1(x) &= \begin{cases} \sqrt{7}(-64x^3 + 66x^2 - 18x + 1), & 0 \leq x < 1/2, \\ \sqrt{7}[-64(1-x)^3 + 66(1-x)^2 - 18(1-x) + 1], & 1/2 < x \leq 1; \end{cases} \\ V_{3,2}^2(x) &= \begin{cases} \sqrt{5}(-140x^3 + 114x^2 - 24x + 1), & 0 \leq x < 1/2, \\ \sqrt{5}[140(1-x)^3 - 114(1-x)^2 + 24(1-x) - 1], & 1/2 < x \leq 1; \end{cases} \\ V_{3,2}^3(x) &= \begin{cases} \sqrt{3}(-224x^3 + 156x^2 - 28x + 1), & 0 \leq x < 1/2, \\ \sqrt{3}[-224(1-x)^3 + 156(1-x)^2 - 28(1-x) + 1], & 1/2 < x \leq 1; \end{cases} \\ V_{3,2}^4(x) &= \begin{cases} -280x^3 + 180x^2 - 30x + 1, & 0 \leq x < 1/2, \\ 280(1-x)^3 - 180(1-x)^2 + 30(1-x) - 1, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

– остальные группы рассчитываются по формуле ($n > 2$):

$$V_{3,n}^{i,j}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-2}} V_{3,2}^i [2^{n-2}(x - \frac{j-1}{2^{n-2}})], & x \in (\frac{j-1}{2^{n-2}}, \frac{j}{2^{n-2}}), \\ 0, & x \notin (\frac{j-1}{2^{n-2}}, \frac{j}{2^{n-2}}), \end{cases}$$

где x — аргумент ортогональных базисных функций, $x \in \mathbb{R}^1$, $j = i$.

Согласно [25–27], V -система обладает свойством воспроизводимости, которое означает, что как непрерывные, так и дискретные сигналы могут быть достаточно точно восстановлены с использованием конечного числа базисных функций. Используя соотношение ортогональности V -системы, коэффициенты разложения Γ по первым 16 функциям V -базиса (т.е. по четырем группам

функций V-системы, $V_{3,1}^1(x) = V_1, \dots, V_{3,4}^4 = V_{16}$) можно вычислить по формулам

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N_E} \Gamma_{mk} \tilde{V}_i^m \tilde{V}_j^k, \quad (4)$$

$$\Lambda = (a_{11}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{nn}), \quad (5)$$

где a_{ij} — коэффициенты разложения Γ по V-базису; Γ_{mk} — элемент Γ ; $\tilde{V}_i^m = \{V_i(\Gamma_{m1}), \dots, V_i(\Gamma_{mN})\}$; $\tilde{V}_j^k = \{V_j(\Gamma_{1k}), \dots, V_j(\Gamma_{N_E k})\}$; n — квадратный корень от числа функций, использованных для разложения Γ , в нашем случае $n = 4$; Λ — вектор дескрипторов, построенный из коэффициентов a_{ij} разложения Γ .

Именно набор коэффициентов разложения (4), (5) будем рассматривать как дескриптор поверхности. Полученный дескриптор будем называть V-спектром Лапласа—Бельтрами Λ . Полученный вектор является многомерной случайной величиной, вероятностный характер которой определяется изоморфизмом поверхности, триангуляцией поверхности, процедурой сглаживания [12] и т.д. Будем считать, что Λ имеет нормальный закон распределения, максимум этого распределения соответствует набору дескрипторов, описывающих ТПП без изометрических преобразований, то есть в исходном виде. Поэтому естественным представляется введение расстояния как логарифма отношения правдоподобия построенных моделей поверхностей, описываемых байесовскими вероятностями V-спектра.

2. Метод максимального правдоподобия и совместная байесовская модель машинного обучения. Для получения метрики схожести в пространстве дескриптора Λ воспользуемся результатами работы [17]. Для этого перейдем от случайного вектора Λ к вектору с нулевым математическим ожиданием. Для i -й и j -й поверхностей S_i и S_j и соответствующих им дескрипторов D_i и D_j совместная байесовская модель описывает совместное распределение вероятностей D_i и D_j при двух различных гипотезах, а именно, что D_i и D_j принадлежат одному классу или разным классам. Логарифм отношения соответствующих условных вероятностей можно рассматривать как вероятностную меру сходства S_i и S_j в пространстве дескрипторов (5):

$$r(D_i, D_j) = \log \frac{P(D_i, D_j | H_I)}{P(D_i, D_j | H_E)}, \quad (6)$$

где H_I — гипотеза, согласно которой S_i и S_j являются поверхностями одного и того же класса; H_E — гипотеза, согласно которой две поверхности принадлежат к разным классам; $P(D_i, D_j | H_I)$ и $P(D_i, D_j | H_E)$ — условные вероятности.

Расстояние в пространстве дескрипторов определяется как

$$d(D_i, D_j) = -r(D_i, D_j). \quad (7)$$

Далее будем следовать работе [17], в которой дескриптор представлен как сумма двух независимых случайных переменных с нормальным распределением:

$$D = \mu + \varepsilon, \quad (8)$$

где D — дескриптор с нулевым математическим ожиданием; μ представляет собой случайную величину, характеризующую поверхность; ε — величина, отражающая случайные деформации, неизометрические преобразования и шумы триангуляции поверхности. Величины μ и ε подчиняются нормальным распределениям $N(0, S_\mu)$ и $N(0, S_\varepsilon)$, где S_μ и S_ε — две неизвестные матрицы ковариации.

Из изложенного следует, что совместные вероятности $P(D_i, D_j | H_I)$ и $P(D_i, D_j | H_E)$ имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. При гипотезе H_I $\mu_i = \mu_j$, а ε_i и ε_j независимы. При гипотезе H_E как μ_i и μ_j , так и ε_i и ε_j являются независимыми. Тогда их матрицы ковариации выражаются следующим образом:

$$\Sigma_I = \begin{bmatrix} S_\mu + S_\varepsilon & S_\mu \\ S_\mu & S_\mu + S_\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \Sigma_E = \begin{bmatrix} S_\mu + S_\varepsilon & 0 \\ 0 & S_\mu + S_\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Исходя из (6)–(8) логарифм отношения вероятностей может быть записан как

$$r(D_i, D_j) = \log \frac{P(D_i, D_j | H_I)}{P(D_i, D_j | H_E)} = D_i^\top A D_i + D_j^\top A D_j - 2D_i^\top G D_i,$$

где $A = (S_\mu + S_\varepsilon)^{-1} - (F + G)$, $F = S_\varepsilon^{-1}$, $G = -(2S_\mu + S_\varepsilon)^{-1} S_\mu S_\varepsilon^{-1}$, $^\top$ — символ транспонирования матрицы.

Для нахождения матриц ковариации S_μ и S_ε введем совокупность матриц $\Theta = \{S_\mu, S_\varepsilon\}$ и воспользуемся наиболее распространенным статистическим методом оценки параметров моделей — методом максимального правдоподобия (ММП). В его основе лежит идея выбора параметров модели таким образом, чтобы вероятность описания данных, наблюдаемых с их помощью, была максимальной:

$$\max_{S_\mu, S_\varepsilon} \sum_i \log P(\bar{D}_i | S_\mu, S_\varepsilon), \quad (9)$$

где $\bar{D}_i = [D_{i1}; \dots; D_{im_i}] = [\mu_i + \varepsilon_{i1}; \dots; \mu_i + \varepsilon_{im_i}]$, m_i — количество дескрипторов поверхности i -го класса.

Цель ММП заключается в нахождении наиболее вероятной совокупности матриц Θ такой, чтобы дескрипторы соответствовали рассчитанным значениям Λ поверхностей. Для этого воспользуемся так называемым EM-алгоритмом (Expectation–Maximization) [17] оптимизации целевой функции. Этот алгоритм позволяет находить оптимальные параметры модели из условия максимума ожидаемого значения логарифма функции правдоподобия.

На первом шаге (Expectation) для каждой поверхности возьмем случайную переменную $h_i = [\mu_i; \varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{im_i}]$. Пусть Θ_t — совокупность матриц Θ , на которых целевая функция достигает максимума при распределении h_i , удовлетворяющем данным параметрам $Q(h_i) = P(h_i | \bar{D}_i, \Theta_t)$:

$$\sum_i E_{P(h_i, \bar{D}_i | \Theta_t)} \log P(h_i, \bar{D}_i | \Theta). \quad (10)$$

На втором шаге (Maximization) оцениваем h_i как его математическое ожидание согласно апостериорной вероятности, поскольку h_i и D_i — случайные

переменные, подчиняющиеся нормальному закону распределения:

$$E(h_i | \bar{D}_i) = \Sigma_h M^\top \Sigma_{\bar{D}_i}^{-1} \bar{D}_i, \quad (11)$$

где M^\top — матрица, согласовывающая размерность Λ и h_i [10]:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Из (9)–(11) получаем:

$$\mu_i = S_\mu((n+1)G + F) \sum_{t=1}^n \lambda_{it}, \quad \varepsilon_i = S_\varepsilon G \sum_{t=1}^n \lambda_{it} + \lambda_{ij},$$

где n — квадратный корень от числа функций, использованных для разложения Γ , в нашем случае $n = 4$.

Таким образом, мы можем для следующей итерации при возвращении к первому шагу (Expectation) рассчитать Θ следующим образом:

$$\Theta = \{S_\mu = \text{cov}(\mu); S_\varepsilon = \text{cov}(\varepsilon)\}.$$

Алгоритм EM итеративно сходится к наилучшим значениям S_μ и S_ε . Итерационный процесс прекращается на i -м шаге, когда выполняется условие

$$\frac{\|S_{\varepsilon(i)} - S_{\varepsilon(i-1)}\|}{\|S_{\varepsilon(i)}\|} < \epsilon,$$

где ϵ — заданное малое число, которое в данной работе выбиралось равным 10^{-5} , $\|\cdot\|$ обозначает норму матрицы [21].

3. Результаты расчета подобия ТПМП типа Р. Математические алгоритмы, описанные в разделах 1 и 2, реализованы в настоящей работе с помощью языка программирования Python и применены к описанному в разделе 1 набору поверхностей. Набор данных для обучения составил 51 экземпляр ТПМП типа Р; 15 поверхностей из этого числа являются оригиналами поверхностей, полученных в работе [12]; 30 поверхностей представляют собой трансформированные версии этих оригиналов с помощью сдвига по осям X и Y , Y и Z на 40% длины ребра, ограничивающего их объема (рис. 3). В набор входят также построенные аналогичным образом две и четыре поверхности класса D соответственно. В табл. 1 указаны расстояния всех перечисленных поверхностей по отношению к поверхности LTA (или мера сходства с поверхностью LTA).

Стандартное отклонение для поверхностей класса Р составляет 0.622. Из табл. 1 видно, что нулевое расстояние для всех Р-поверхностей содержится в интервале, определяемом одним стандартным отклонением, за исключением поверхностей BRE и UEI. В доверительный интервал с 99% вероятностью попало 13 из 14 поверхностей, в таком случае точность обучения составляет

92.8%. Расстояние между UEI и LTA отклоняется от нулевого фактически на два стандартных отклонения. Поверхность BRE (рис. 4) геометрически сильно отличается от поверхности LTA и в пространстве дескрипторов лежит ближе к PON, то есть является близкой к D-классу. Используемые в работе поверхности представлены на сайте Porous 3D (<https://p3d.topcryst.com/software/>).

Таблица 1

Мера сходства $d(D_{LTA}, D_S)$ поверхности LTA и поверхностей классов P и D
 [A measure of the similarity $d(D_{LTA}, D_S)$ of the LTA surface and P-, D-type surfaces]

Surface name, S	Surface type	$d(D_{LTA}, D_S)$
AWO	D	23.0039
PON	D	2.0651
ATN	P	0.3505
BCT	P	0.2301
BRE	P	2.0758
CGF	P	0.2069
EDI	P	0.3584
HEU	P	0.5163
ITW	P	0.5561
JSW	P	0.0541
LAU	P	0.5518
MER	P	0.1645
RHO	P	0.3159
SAS	P	0.1029
SOD	P	0.0779
UEI	P	1.2686

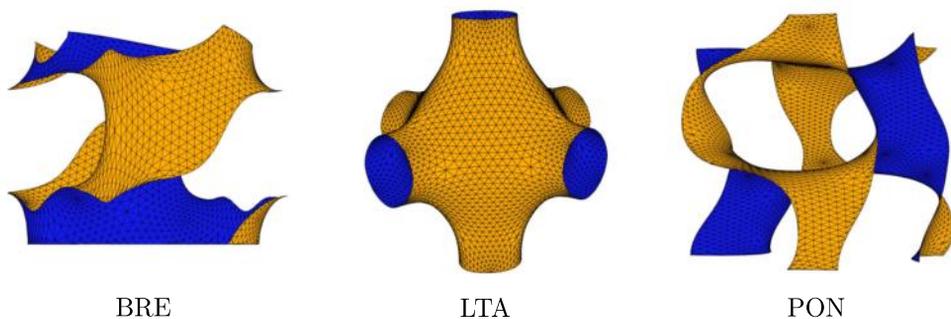


Рис. 4. Визуальное сравнение поверхности LTA с поверхностями BRE и PON
 [Figure 4. Visual comparison of the LTA surface with the BRE and PON surfaces]

Заключение. В работе для описания ТПП построен дескриптор на основе собственных векторов и собственных значений оператора Бельтрами–Лапласа и совместной байесовской модели. В пространстве дескрипторов введена метрика на основе вероятностной меры сходства поверхностей. Построенная метрика позволяет математически сформулировать понятие близости поверхности. Работоспособность данной метрики была проверена на 51 поверхности класса P. Точность предсказания типа поверхности составила 92.8%.

Созданная модель машинного обучения позволяет определить принадлежность изучаемой поверхности неизвестного класса к классу Р-поверхностей. Полученные результаты в совокупности с ранее введенными признаками дают возможность создания системы автоматического определения класса поверхности.

В данной работе на языке программирования Python были реализованы: алгоритм расчета собственных векторов и собственных значений оператора Лапласа—Бельтрами, алгоритм расчета изображения гистограммы поверхности, расчета дескриптора, основанного на мультивейвлетном разложении изображения гистограммы поверхности по базису V-системы; модель машинного обучения, основанная на принципе максимального правдоподобия в совместной байесовской модели.

Построенные и разработанные математические модели позволяют расширить список классов поверхностей для нахождения корреляций между тополого-геометрическими и некоторыми физическими свойствами поверхностей, в частности по отношению к рассеянию электромагнитных волн.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена без финансирования.

Благодарность. Автор благодарит своего научного руководителя А. Ф. Крутова за неоценимую помощь в ходе выполнения данного исследования.

Библиографический список

1. Abueidda D. W., Al-Rub R. K. A., Dalaq A. S., et al. Effective conductivities and elastic moduli of novel foams with triply periodic minimal surfaces // *Mech. Mater.*, 2016. vol. 95. pp. 102–115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.01.004>.
2. Maskery I., Sturm L., Aremu A. O., et al. Insights into the mechanical properties of several triply periodic minimal surface lattice structures made by polymer additive manufacturing // *Polymer*, 2018. vol. 152. pp. 62–71. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2017.11.049>.
3. Montazerian H., Davoodi E., Asadi-Eydivand M., et al. Porous scaffold internal architecture design based on minimal surfaces: a compromise between permeability and elastic properties // *Materials & Design*, 2017. vol. 126. pp. 98–114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.04.009>.
4. Sadeghi F., Baniassadi M., Shahidi A., Baghani M. TPMS metamaterial structures based on shape memory polymers: Mechanical, thermal and thermomechanical assessment // *J. Mater. Res. Techn.*, 2023. vol. 23. pp. 3726–3743. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.02.014>.
5. Yang W., An J., Kai Chua C., Zhou K. Acoustic absorptions of multifunctional polymeric cellular structures based on triply periodic minimal surfaces fabricated by stereolithography // *Virt. Phys. Prot.*, 2020. vol. 15, no. 2. pp. 242–249. DOI: <https://doi.org/10.1080/17452759.2020.1740747>.
6. Wang H., Tan D., Liu Z., et al. On crashworthiness of novel porous structure based on composite TPMS structures // *Eng. Struct.*, 2022. vol. 252, 113640. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113640>.
7. Saleh M., Anwar S., Al-Ahmari A. M., Alfaify A. Compression performance and failure analysis of 3D-printed carbon fiber/PLA composite TPMS lattice structures // *Polymers*, 2022. vol. 14, no. 21, 4595. DOI: <https://doi.org/10.3390/polym14214595>.

8. Al-Ketan O., Abu Al-Rub R. K. Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices // *Adv. Eng. Mater.*, 2019. vol. 21, no. 10, 1900524. DOI: <https://doi.org/10.1002/adem.201900524>.
9. Мальцев В. П., Шагров А. Д. О трехкратном вырождении поверхностных волн в пластине из метаматериала // *Радиотехника и электроника*, 2012. Т. 57, № 2. С. 187–191. EDN: OPTDVH.
10. Mias C., Webb J. P., El-Esber L., Ferrari R. Finite element modelling of electromagnetic waves in doubly and triply periodic structures // *IEE Proc. Optoelectron.*, 2005. vol. 152, no. 5. DOI: <https://doi.org/10.1049/ip-opt:20050007>.
11. Смольков М. И., Крутов А. Ф. Разработка программного обеспечения для реализации модели пористых структур на основе трехпериодических поверхностей // *Физ. волн. проц. радиотехн. сист.*, 2022. Т. 25, № 1. С. 71–79. EDN: НМНСУК. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.71-79>.
12. Smolkov M. I., Blatova O. A., Krutov A. F., Blatov V. A. Generating triply periodic surfaces from crystal structures: the tiling approach and its application to zeolites // *Acta Crystal., Sect. A*, 2022. vol. 78, no. 4. pp. 327–336. EDN: DLGEKT. DOI: <https://doi.org/10.1107/S2053273322004545>.
13. Eremin A. V., Frolov M. A., Krutov A. F., et. al. Mechanical properties of porous materials based on new triply periodic and minimal surfaces // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2024. vol. 31, no. 29. pp. 11320–11336. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2303724>.
14. Alexandrov E. V., Blatov V. A., Proserpio D. M. A topological method for the classification of entanglements in crystal networks // *Acta Crystal., Sect. A*, 2012. vol. 68, no. 4. pp. 484–493. EDN: PDSSYB. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0108767312019034>.
15. Blatov V. A., Alexandrov E. V., Shevchenko A. P. Topology: ToposPro / *Comprehensive Coordination Chemistry III*. vol. 2, Fundamentals: Characterization Methods, Theoretical Analysis, and Case Studies, 2021. pp. 389–412. EDN: FDMWRS. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-409547-2.14576-7>.
16. Wang Z., Lin H. 3D shape retrieval based on Laplace operator and joint Bayesian model // *Visual Informatics*, 2020. vol. 4, no. 3. pp. 69–76. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.visinf.2020.08.002>.
17. Chen D., Cao X., Wang L., et al. Bayesian face revisited: A joint formulation / *Computer Vision—ECCV 2012 / Lecture Notes in Computer Science*, 7574. Springer: Berlin, Heidelberg, 2012. pp. 566–579. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33712-3_41.
18. Schoen A. H. *Infinite Periodic Minimal Surfaces Without Self-Intersections*: NASA Technical Note (TN) D-5541, C-98. Cambridge, MA: NASA Electronics Research Center, 1970. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19700020472>.
19. Reuter M., Wolter F. E., Peinecke N. Laplace–Beltrami spectra as ‘Shape-DNA’ of surfaces and solids // *Computer-Aided Design*, 2006. vol. 38, no. 4. pp. 342–366. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2005.10.011>.
20. Sharp N., Crane K. A laplacian for nonmanifold triangle meshes // *Computer Graphics Forum*, 2020. vol. 39, no. 5. pp. 69–80. DOI: <https://doi.org/10.1111/cgf.14069>.
21. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T. E., et al. SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python // *Nature Methods*, 2020. vol. 17, no. 3. pp. 261–272. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>.
22. Lévy B. Laplace–Beltrami eigenfunctions towards an algorithm that “understands” geometry / *IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications 2006 (SMI'06)*. Matsushima, Japan, 2006. pp. 13–13. DOI: <https://doi.org/10.1109/SMI.2006.21>.
23. Rustamov R. M. Laplace–Beltrami eigenfunctions for deformation invariant shape representation / *SGP07: Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 257, 2007. pp. 225–233. DOI: <https://doi.org/10.2312/SGP/SGP07/225-233>.
24. Song R., Zhao Z., Wang X. The application of V-system in visualization of multidimensional data / *11th IEEE International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics*. Huangshan, China, 2009. pp. 170–173. DOI: <https://doi.org/10.1109/CADCG.2009.5246911>.

25. Ma H., Qi D., Song R., Wang T. The complete orthogonal V-system and its applications // *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2007. vol. 6, no. 3. pp. 853–871. DOI: <https://doi.org/10.3934/cpaa.2007.6.853>.
26. Song R., Wang X., Ou M., Li J. The structure of V-system over triangulated domains / *Advances in Geometric Modeling and Processing* / Lecture Notes in Computer Science, 4975. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. pp. 563–569. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-79246-8_48.
27. Huang C., Yang L. H., Qi D. X. A new class of multi-wavelet bases: V-system // *Acta. Math. Sin., English Ser.*, 2012. vol. 28, no. 1. pp. 105–120. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10114-012-9424-8>.

MSC: 68T05, 58J50, 53A10

Triply periodic surface description using Laplace–Beltrami operator and a statistical machine learning model

*M. I. Smolkov*Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Triply periodic surfaces (TPS) and their minimal analogs (TPMS) are currently widely used in various fields, including mechanics, biomechanics, aerodynamics, hydrodynamics, and radiophysics. In this context, the problem of establishing correlations between the topological and geometric properties of surfaces and their physical characteristics arises. To address this problem, it is necessary to introduce a measure of similarity between surfaces with different topological and geometric features. This work focuses on describing TPS and TPMS in terms of a specific metric space of descriptors. The problem is solved using the mathematical framework of image recognition theory. A descriptor is constructed based on a set of eigenvectors and eigenvalues of the Beltrami–Laplace operator and a joint Bayesian model. A metric based on a probabilistic measure of surface similarity is introduced in the descriptor space. The effectiveness of the method developed in this work has been tested on 51 surfaces of class P. The accuracy of predicting the surface type is 92.8%. The developed machine learning model enables the determination of whether a given surface belongs to the class of P-surfaces.

Keywords: topological structure, discrete analog of the Laplace–Beltrami equation, eigenvectors, eigenvalues, Bayesian probabilities, probabilistic similarity measure.

Received: 24th July, 2024 / Revised: 19th February, 2025 /Accepted: 21st February, 2025 / First online: 10th March, 2025

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Smolkov M. I. Triply periodic surface description using Laplace–Beltrami operator and a statistical machine learning model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 158–173. EDN: ENXAZE. DOI: 10.14498/vsgtu2105 (In Russian).

Author's Details:

Mikhail I. Smolkov  <https://orcid.org/0000-0001-5573-662X>Postgraduate Research Student; Junior Researcher; International Research Center for Theoretical Materials Science; e-mail: m.smolkov97@gmail.com

Competing Interests. The author declares no competing interests.

Author's Responsibility. The author takes full responsibility for submitting the final version of the manuscript for publication. The final version of the manuscript has been approved by the author.

Funding. This work was conducted without any funding.

Acknowledgments. The author expresses gratitude to their scientific advisor, A. F. Krutov, for invaluable assistance during the course of this research.

References

1. Abueidda D. W., Al-Rub R. K. A., Dalaq A. S., et al. Effective conductivities and elastic moduli of novel foams with triply periodic minimal surfaces, *Mech. Mater.*, 2016, vol. 95, pp. 102–115. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2016.01.004>.
2. Maskery I., Sturm L., Aremu A. O., et al. Insights into the mechanical properties of several triply periodic minimal surface lattice structures made by polymer additive manufacturing, *Polymer*, 2018, vol. 152, pp. 62–71. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.polymer.2017.11.049>.
3. Montazerian H., Davoodi E., Asadi-Eyvand M., et al. Porous scaffold internal architecture design based on minimal surfaces: a compromise between permeability and elastic properties, *Materials & Design*, 2017, vol. 126, pp. 98–114. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.04.009>.
4. Sadeghi F., Baniassadi M., Shahidi A., Baghani M. TPMS metamaterial structures based on shape memory polymers: Mechanical, thermal and thermomechanical assessment, *J. Mater. Res. Techn.*, 2023, vol. 23, pp. 3726–3743. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.02.014>.
5. Yang W., An J., Kai Chua C., Zhou K. Acoustic absorptions of multifunctional polymeric cellular structures based on triply periodic minimal surfaces fabricated by stereolithography, *Virt. Phys. Prot.*, 2020, vol. 15, no. 2, pp. 242–249. DOI: <https://doi.org/10.1080/17452759.2020.1740747>.
6. Wang H., Tan D., Liu Z., et al. On crashworthiness of novel porous structure based on composite TPMS structures, *Eng. Struct.*, 2022, vol. 252, 113640. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113640>.
7. Saleh M., Anwar S., Al-Ahmari A. M., Alfaify A. Compression performance and failure analysis of 3D-printed carbon fiber/PLA composite TPMS lattice structures, *Polymers*, 2022, vol. 14, no. 21, 4595. DOI: <https://doi.org/10.3390/polym14214595>.
8. Al-Ketan O., Abu Al-Rub R. K. Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices, *Adv. Eng. Mater.*, 2019, vol. 21, no. 10, 1900524. DOI: <https://doi.org/10.1002/adem.201900524>.
9. Mal'tsev V. P., Shatrov A. D. Triply degenerate surface waves in the metamaterial plate, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2012, vol. 57, no. 2, pp. 170–173. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064226912010111>.
10. Mias C., Webb J. P., El-Esber L., Ferrari R. Finite element modelling of electromagnetic waves in doubly and triply periodic structures, *IEE Proc. Optoelectron.*, 2005, vol. 152, no. 5. DOI: <https://doi.org/10.1049/ip-opt:20050007>.
11. Smolkov M. I., Krutov A. F. Software development for implementing a model of porous structures based on three periodic surfaces, *Phys. Wave Proces. Radio Systems*, 2022, vol. 25, no. 1, pp. 71–79 (In Russian). EDN: NMHCYK. DOI: <https://doi.org/10.18469/1810-3189.2022.25.1.71-79>.
12. Smolkov M. I., Blatova O. A., Krutov A. F., Blatov V. A. Generating triply periodic surfaces from crystal structures: the tiling approach and its application to zeolites, *Acta Crystallogr. Sect. A*, 2022, vol. 78, no. 4, pp. 327–336. EDN: DLGEKT. DOI: <https://doi.org/10.1107/S2053273322004545>.

13. Eremin A. V., Frolov M. A., Krutov A. F., et. al. Mechanical properties of porous materials based on new triply periodic and minimal surfaces, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2024, vol. 31, no. 29, pp. 11320–11336. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2303724>.
14. Alexandrov E. V., Blatov V. A., Proserpio D. M. A topological method for the classification of entanglements in crystal networks, *Acta Crystal., Sect. A*, 2012, vol. 68, no. 4, pp. 484–493. EDN: PDSSYB. DOI: <https://doi.org/10.1107/S0108767312019034>.
15. Blatov V. A., Alexandrov E. V., Shevchenko A. P. Topology: ToposPro, In: *Comprehensive Coordination Chemistry III*, vol. 2, Fundamentals: Characterization Methods, Theoretical Analysis, and Case Studies, 2021, pp. 389–412. EDN: FDMWRS. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-409547-2.14576-7>.
16. Wang Z., Lin H. 3D shape retrieval based on Laplace operator and joint Bayesian model, *Visual Informatics*, 2020, vol. 4, no. 3, pp. 69–76. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.visinf.2020.08.002>.
17. Chen D., Cao X., Wang L., et al. Bayesian face revisited: A joint formulation, In: *Computer Vision–ECCV 2012*, Lecture Notes in Computer Science, 7574. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012, pp. 566–579. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-33712-3_41.
18. Schoen A. H. *Infinite Periodic Minimal Surfaces Without Self-Intersections*, NASA Technical Note (TN) D-5541, C-98. Cambridge, MA, NASA Electronics Research Center, 1970. <https://ntrs.nasa.gov/citations/19700020472>.
19. Reuter M., Wolter F. E., Peinecke N. Laplace–Beltrami spectra as ‘Shape-DNA’ of surfaces and solids, *Computer–Aided Design*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 342–366. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2005.10.011>.
20. Sharp N., Crane K. A laplacian for nonmanifold triangle meshes, *Computer Graphics Forum*, 2020, vol. 39, no. 5, pp. 69–80. DOI: <https://doi.org/10.1111/cgf.14069>.
21. Virtanen P., Gommers R., Oliphant T. E., et al. SciPy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in Python, *Nature Methods*, 2020, vol. 17, no. 3, pp. 261–272. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2>.
22. Lévy B. Laplace–Beltrami eigenfunctions towards an algorithm that “understands” geometry, In: *IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications 2006 (SMI’06)*. Matsushima, Japan, 2006, pp. 13–13. DOI: <https://doi.org/10.1109/SMI.2006.21>.
23. Rustamov R. M. Laplace–Beltrami eigenfunctions for deformation invariant shape representation, In: *SGP07: Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 257, 2007, pp. 225–233. DOI: <https://doi.org/10.2312/SGP/SGP07/225-233>.
24. Song R., Zhao Z., Wang X. The application of V-system in visualization of multidimensional data, In: *11th IEEE International Conference on Computer-Aided Design and Computer Graphics*. Huangshan, China, 2009, pp. 170–173. DOI: <https://doi.org/10.1109/CADCG.2009.5246911>.
25. Ma H., Qi D., Song R., Wang T. The complete orthogonal V-system and its applications, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2007, vol. 6, no. 3, pp. 853–871. DOI: <https://doi.org/10.3934/cpaa.2007.6.853>.
26. Song R., Wang X., Ou M., Li J. The structure of V-system over triangulated domains, In: *Advances in Geometric Modeling and Processing*, Lecture Notes in Computer Science, 4975. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, pp. 563–569. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-79246-8_48.
27. Huang C., Yang L. H., Qi D. X. A new class of multi-wavelet bases: V-system, *Acta. Math. Sin., English Ser.*, 2012, vol. 28, no. 1, pp. 105–120. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10114-012-9424-8>.



УДК 519.24:543.5:544.3

Построение модели для прогнозирования двух- и трехкомпонентных неорганических систем в водных растворах спектральным анализом

К. Ю. Массалов¹, Е. Ю. Мощенская²

¹ Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31.

² Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Представлен алгоритм и разработанная на его основе программа, реализующая методы математического моделирования для анализа спектральных данных, построения прогностической модели и выбора оптимальных спектральных интервалов при проектировании мультисенсорных систем на основе светодиодов. Алгоритм прошел апробацию на реальных смесях водных растворов неорганических солей.

Для обработки экспериментальных данных применялись методы многомерной калибровки, включая PLS-регрессию и множественную линейную регрессию. Информативные длины волн определялись с использованием значений вектора Шепли, после чего методом перебора была найдена оптимальная комбинация спектральных интервалов.

Разработанная модель позволяет прогнозировать состав двух- и трехкомпонентных систем в водных растворах солей металлов с использованием ограниченного спектрального диапазона вместо полного видимого спектра. Проведенная кросс-валидация продемонстрировала сопоставимое качество новой модели по сравнению с полноспектральными аналогами, подтвердив ее адекватность и практическую применимость.

Ключевые слова: многомерная калибровка, PLS-регрессия, выбор спектральных интервалов, количественное определение ионов металлов, значения Шепли, хемометрика.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Массалов К. Ю., Мощенская Е. Ю. Построение модели для прогнозирования двух- и трехкомпонентных неорганических систем в водных растворах спектральным анализом // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 1. С. 174–186. EDN: ZDTCBW. DOI: 10.14498/vsgtu2120.

Сведения об авторах

Кирилл Юрьевич Массалов <https://orcid.org/0009-0003-6214-7470>

магистрант; каф. физика элементарных частиц; институт ядерной физики и технологий¹;
e-mail: kirill.massalov@yandex.ru

Елена Юрьевна Мощенская <https://orcid.org/0000-0002-1070-3151>

кандидат химических наук, доцент; доцент; каф. аналитической и физической химии²;
e-mail: lmos@rambler.ru

Получение: 9 октября 2024 г. / Исправление: 11 февраля 2025 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 11 апреля 2025 г.

Введение. В современном высокотехнологичном мире наблюдается стремительное развитие инструментальных методов аналитической химии. Для сбора, хранения, обработки и интерпретации результатов анализов [1], а также для построения прогностических моделей и оптимизации условий экспериментов [2] требуются обширные информационные ресурсы, эффективные алгоритмы и специализированное программное обеспечение.

Особую актуальность приобретает обработка многомерных массивов данных, получаемых с помощью современных измерительных систем. Такие данные, как правило, представляются в виде матриц или тензоров, что облегчает организацию и анализ больших объемов информации [3].

В области спектроскопии эволюция методов сжатия данных прошла значительный путь: от селекции спектральных переменных до применения современных датчиков и сенсорных систем [4]. Это позволяет существенно повысить эффективность экспериментальных исследований. Видимая и ближняя инфракрасная спектроскопия в настоящее время занимает ведущее положение среди методов промышленного контроля качества [5].

Перспективным направлением является замена универсального спектрального анализа специализированными многомерными сенсорными системами, адаптированными к конкретным аналитическим задачам [6]. Теоретическое моделирование существенно упрощает исследование многокомпонентных систем [7,8], а прогресс в области вычислительных технологий обусловил неизбежность автоматизации научных экспериментов.

В данной работе решаются следующие актуальные задачи:

- анализ экспериментальных данных и построение прогностических моделей;
- разработка эффективных алгоритмов обработки данных;
- программная реализация предложенных методов.

Целью исследования является разработка методов и алгоритмов построения моделей для прогнозирования результатов количественного спектрального анализа.

1. Данные. В исследовании поставлена задача определения спектральных интервалов, оптимальных для прогнозирования количественного состава водных растворов смесей неорганических солей, а также для разработки мультисенсорной аналитической системы.

В качестве исходных данных использованы четыре набора данных (датасета), соответствующих растворам следующих ионов металлов: Ni^{2+} и Co^{2+} ; Ni^{2+} и Cu^{2+} ; Cu^{2+} и Co^{2+} ; Ni^{2+} , Cu^{2+} и Co^{2+} (тройная система). Каждый датасет содержит спектральные данные в диапазоне 360–1100 нм и информацию о концентрациях соответствующих ионов металлов. Для обеспечения качества данных перед моделированием были исключены аномальные наблюдения с использованием метода итеративно взвешенных наименьших квадратов (IRLS) [9].

Метод основан на итеративной адаптации весовых коэффициентов наблюдений, пропорциональных величине соответствующих ошибок прогнозирования.

ния. Формально алгоритм можно описать следующим образом.

Пусть заданы исходные данные: $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ — матрица предикторов (выборка объектов), где n — количество наблюдений, d — количество признаков; $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — вектор откликов (целевых значений), σ_y — стандартное отклонение y ; $N \in \mathbb{N}$ — максимальное допустимое количество итераций; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ — порог сходимости алгоритма.

Введем следующие обозначения: $\Delta w = \|w^t - w^p\|_2$ — изменение весов на текущей итерации, где $w^t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — весовые коэффициенты на текущей итерации, $w^p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — на предыдущей итерации; j — счетчик итераций.

Алгоритм реализует следующую последовательность шагов.

1. Инициализация:

- задание величин N и ε ;
- нормализация откликов: $y \leftarrow y/\sigma_y$;
- присвоение начальных весов: $w_i^t \leftarrow 1 \forall i = \overline{1, n}$;
- установка счетчика итераций: $j \leftarrow 0$;
- задание изменения веса: $\Delta w \leftarrow 1$.

2. Итерационный процесс (пока $\Delta w > \varepsilon$ и $j < N$):

- построение линейной регрессионной модели с весами w^t ;
- вычисление предсказанных значений \hat{y} ;
- обновление весовых коэффициентов:

$$w^p \leftarrow w^t;$$

$$w_i^t \leftarrow \frac{1}{|y_i - \hat{y}_i| + 1} \forall i = \overline{1, n};$$

- вычисление изменения веса: $\Delta w = \|w^t - w^p\|_2$;
- инкрементация счетчика: $j \leftarrow j + 1$.

Наблюдения с окончательными весами $w_i < \delta$ (где δ — заданный порог) классифицируются как промахи и исключаются из дальнейшего анализа.

После обработки методом IRLS датасеты были объединены и структурированы в три группы согласно присутствующим ионам металлов:

- растворы, содержащие ионы никеля Ni^{2+} ;
- растворы, содержащие ионы кобальта Co^{2+} ;
- растворы, содержащие ионы меди Cu^{2+} .

2. Входные данные модели. Для построения модели были исследованы два альтернативных подхода к формированию входных признаков на основе спектральных данных.

Метод усредненных интервалов. Исходный спектр разбивается на n непересекающихся интервалов. Для каждого интервала вычисляется среднее значение интенсивности. В результате формируется n -мерный вектор признаков.

Метод дискретизированных интервалов. Исходный спектр разбивается на n непересекающихся интервалов. В пределах каждого интервала производится дискретизация с шагом 5 нм. Каждое дискретное значение интенсивности используется как отдельный признак. Общее количество признаков составляет $n \cdot [w/5]$, где w — ширина интервала в нанометрах, $[\cdot]$ — операция взятия целой части числа.

Ширина интервалов была установлена равной 60 нм, что соответствует типичной спектральной ширине большинства светодиодов.

3. Выбор и обоснование моделей. В исследовании были использованы два метода регрессионного анализа: классическая линейная регрессия и метод проекции на латентные структуры (PLS). Количество компонент в PLS-регрессии было фиксировано и составляло пять.

Линейная регрессия выбрана на основании закона, устанавливающего линейную зависимость между интенсивностью поглощения и концентрацией вещества в растворе.

PLS-регрессия применена для случаев, когда предикторы демонстрируют высокую степень мультиколлинеарности, что характерно для второго подхода к формированию входных данных (метод дискретизированных интервалов).

Модель линейной регрессии в матричной форме представляется как

$$X\alpha = y,$$

где $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ — матрица объектов-признаков; $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — вектор целевых значений; $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — вектор коэффициентов модели.

Оптимизация параметров модели выполняется методом наименьших квадратов:

$$Q(\alpha) = \|X\alpha - y\|_2^2 \rightarrow \min.$$

Аналитическое решение для данной постановки имеет вид

$$\hat{\alpha} = (X^\top X)^{-1} X^\top y,$$

где $^\top$ — операция транспонирования.

Алгоритм PLS [10] для матрицы предикторов $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ и вектора откликов $y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ реализуется следующей процедурой.

Проводится инициализация: $X_1 = X$, $y_1 = y$. Затем для каждой компоненты $k \in [1, K]$, где K — количество компонент, выполняются следующие шаги:

1) находятся весовые векторы $u_k \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ и $v_k \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ такие, что

$$\text{Cov}(X_k u_k, y_k v_k) \rightarrow \max;$$

2) вычисляются счетные векторы: $\xi_k = X_k u_k$;

3) определяются коэффициенты регрессии:

$$\gamma_k^\top = (\xi_k^\top \xi_k)^{-1} \xi_k^\top X_k, \quad \delta_k^\top = (\xi_k^\top \xi_k)^{-1} \xi_k^\top y_k;$$

4) определяется дефляция матриц:

$$X_{k+1} = X_k - \xi_k \gamma_k^\top, \quad y_{k+1} = y_k - \xi_k \delta_k^\top.$$

Финальные коэффициенты модели вычисляются по формуле

$$\alpha = U(\Gamma^\top U)^{-1} \Delta^\top,$$

где U — матрица весовых векторов u_k ; Γ — матрица коэффициентов γ_k ; Δ — матрица коэффициентов δ_k .

Обе модели были реализованы с использованием библиотеки `scikit-learn` [11] для языка Python.

4. Выбор информативных признаков. Для идентификации наиболее значимых спектральных признаков в работе применялся метод Шепли. Значение Шепли для i -го признака вычисляется по формуле [12]:

$$\Phi(v)_i = \sum_{K \in \mathcal{K}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus i)),$$

где K — некоторое подмножество признаков; k — мощность подмножества K ; n — полное число признаков; $v(K)$ — выход модели при наборе K ; $v(K \setminus i)$ — выход модели при наборе K без признака i .

Значение $\Phi(v)_i$ количественно характеризует средний предельный вклад i -го признака во все возможные комбинации признаков. Признаки с большими абсолютными значениями $\Phi(v)_i$ оказывают наибольшее влияние на целевую переменную. Таким образом, на выборках с широким диапазоном целевой переменной дисперсия значений Шепли для значимых признаков возрастает.

Для практического вычисления значений Шепли использовалась библиотека `SHAP` [12] для Python. В качестве базовой модели применялась PLS-регрессия. Визуализация результатов представлена на рис. 1, где по оси ординат отложено среднеквадратичное отклонение значений Шепли для каждой длины волны.

После определения длин волн с максимальными значениями среднеквадратичного отклонения Шепли методом комбинаторного перебора находились оптимальные спектральные интервалы.

5. Результаты. В табл. 1 представлены максимальные значения коэффициента детерминации R^2 , полученные в ходе кросс-валидации для моделей с различным количеством спектральных интервалов (от 1 до 4). Результаты демонстрируют прогностическую способность моделей в определении концентраций ионов никеля Ni^{2+} , кобальта Co^{2+} и меди Cu^{2+} в многокомпонентных системах. Значения R^2 приведены с указанием стандартного отклонения $\sqrt{D[R^2]}$. Анализ данных, представленных в табл. 1, позволяет провести сравнительную оценку четырех рассматриваемых подходов и выявить наиболее эффективные методы моделирования для каждого типа ионов.

Ионы никеля. Анализ значений Шепли (рис. 1, а) выявил два наиболее информативных спектральных диапазона: 370–410 нм и 590–650 нм. Расчеты показали, что оптимальным вариантом является использование PLS-регрессии без усреднения на двух интервалах — 625–685 нм и 705–765 нм — с полученным значением $R^2 = 0.992 \pm 0.005$ (см. табл. 1).

Следует отметить, что интервал 610–700 нм присутствует в большинстве лучших конфигураций, а использование диапазона 370–410 нм приводит к увеличению дисперсии ($\sqrt{D[R^2]} > 0.07$) по сравнению с оптимальной конфигурацией ($\sqrt{D[R^2]} \approx 0.005$).

Ионы кобальта. По данным анализа значений Шепли (рис. 1, б), наиболее значимым оказался диапазон 440–560 нм. Расчеты показали, что оптимальным вариантом является использование PLS-регрессии без усредне-

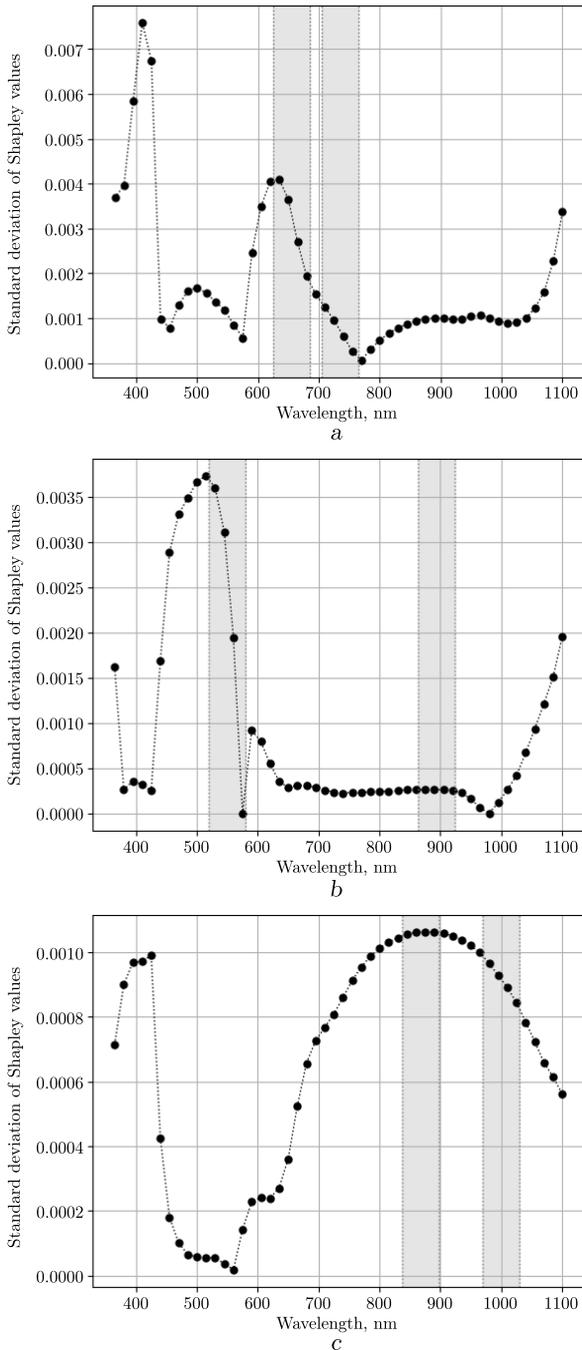


Рис. 1. Аппроксимация среднеквадратического отклонения значений Шепли и оптимальные интервалы для раствора с ионами никеля (а), кобальта (b) и меди (c)
 [Figure 1. Approximation of standard deviation of Shapley values and optimum intervals for solution with nickel (a), cobalt (b), and copper (c) ions]

Таблица 1

Максимальное значение R^2 для разного количества интервалов n [Maximum R^2 value for different number of intervals n]

Me^{z+}	n	R^2			
		Averaged linear regression	Averaged PLS regression	Non-averaged linear regression	Non-averaged PLS regression
Ni^{2+}	1	0.640 ± 0.663	—	0.989 ± 0.016	0.989 ± 0.016
	2	0.978 ± 0.023	0.978 ± 0.023	0.991 ± 0.005	0.992 ± 0.005
	3	0.986 ± 0.016	0.984 ± 0.022	0.989 ± 0.012	0.992 ± 0.006
	4	0.989 ± 0.011	0.961 ± 0.083	0.987 ± 0.010	0.992 ± 0.006
Co^{2+}	1	0.978 ± 0.031	—	0.986 ± 0.017	0.987 ± 0.017
	2	0.978 ± 0.032	0.978 ± 0.032	0.985 ± 0.010	0.989 ± 0.009
	3	0.981 ± 0.026	0.978 ± 0.031	0.983 ± 0.018	0.989 ± 0.011
	4	0.987 ± 0.012	0.978 ± 0.030	0.974 ± 0.045	0.989 ± 0.010
Cu^{2+}	1	0.979 ± 0.029	—	0.986 ± 0.020	0.987 ± 0.015
	2	0.988 ± 0.017	0.988 ± 0.017	0.990 ± 0.010	0.992 ± 0.008
	3	0.988 ± 0.017	0.988 ± 0.017	0.990 ± 0.009	0.989 ± 0.014
	4	0.988 ± 0.018	0.987 ± 0.019	0.984 ± 0.013	0.989 ± 0.013

ния на двух интервалах — 519–579 нм, 864–924 нм — с полученным значением $R^2 = 0.989 \pm 0.009$ (см. табл. 1).

Ионы меди. Анализ значимости признаков (рис. 1, с) показал важность следующих диапазонов: 370–410 нм, 700–1000 нм. Расчеты показали, что оптимальным вариантом является использование PLS-регрессии без усреднения на двух интервалах — 837–897 нм, 970–1030 нм — с полученным значением $R^2 = 0.992 \pm 0.008$ (см. табл. 1).

6. Обсуждение результатов. На рис. 2 представлено сравнение модели на выделенных спектральных интервалах с моделью, использующей весь доступный спектральный диапазон.

Анализ значений средней абсолютной процентной ошибки в процентах (MAPE, [13]) демонстрирует, что для всех исследуемых ионов металлов (Ni^{2+} , Co^{2+} , Cu^{2+}) модель на выделенных интервалах показывает сопоставимое качество с моделью, использующей полный спектр.

Данные, представленные в табл. 1, позволяют сделать следующие выводы:

- оптимальные значения R^2 (выделены жирным) достигаются при использовании двух спектральных интервалов;
- переход от одного к двум интервалам приводит к увеличению качества (рост R^2) и повышению устойчивости модели (снижение $D[R^2]$);
- дальнейшее увеличение количества интервалов не дает существенного улучшения качества.

Проведенный анализ выявил важные закономерности:

- при использовании усреднения внутри интервалов PLS-регрессия уступает по эффективности линейной регрессии, т.к. происходит потеря информативных признаков при уменьшении размерности;
- при работе с неусредненными данными линейная регрессия демонстрирует худшие результаты по сравнению с PLS, т.к. увеличивается число мультиколлинеарных признаков.

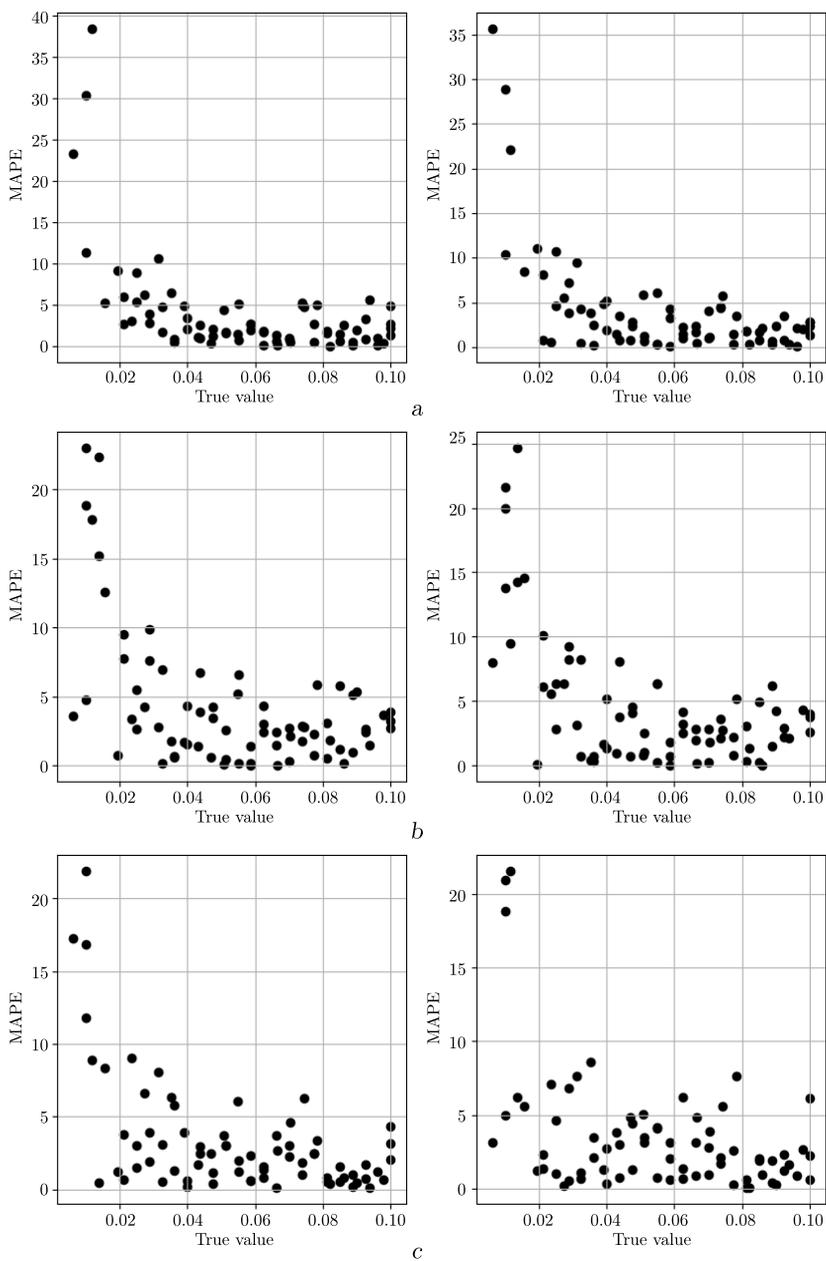


Рис. 2. Средняя абсолютная ошибка в процентах (MAPE) для модели, построенной на выделенных интервалах (слева), и для модели, построенной на всем спектре (справа), для ионов никеля (а), кобальта (b) и меди (c)

[Figure 2. Mean absolute percentage error (MAPE) for the model built using selected spectral intervals (left) and the model utilizing the full spectrum (right) for nickel (a), cobalt (b), and copper (c) ions]

Заключение. Представлена модель, позволяющая прогнозировать двух- и трехкомпонентные системы в водных растворах никеля, меди и кобальта путем спектрального анализа с использованием только части спектра. При помощи кросс-валидации подтверждена адекватность предложенной модели: проведена численная оценка ее качества и сравнение с моделью, использующей полный видимый спектр.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии каких-либо конфликтов интересов, связанных с подготовкой и публикацией данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции исследования, проведение расчетов и анализ данных, подготовку и редактирование текста рукописи. Окончательная версия статьи была одобрена всеми соавторами, которые несут полную ответственность за представленные результаты.

Финансирование. Исследование выполнено без использования внешних источников финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны заведующему кафедрой аналитической и физической химии А.Ю. Богомолу и его аспиранту А.М. Никитиной за предоставленные экспериментальные данные.

Библиографический список

1. Dubrovkin J. *Data Compression in Spectroscopy*. Cambridge Scholars Publ., 2022. 355 pp.
2. Родионова О.Е. Хемометрический подход к исследованию больших массивов химических данных // *Рос. хим. ж.*, 2006. Т. 50, № 2. С. 128–144. EDN: HTUUSZ.
3. Smilde A., Bro R., Geladi P. *Multi-Way Analysis: Applications in the Chemical Sciences*. Chichester: John Wiley & Sons, 2004. xiv+381 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470012110>.
4. Богомол А. Ю. Оптические мультисенсорные системы в аналитической спектроскопии // *Рос. хим. ж.*, 2022. Т. 77, № 3. С. 227–247. EDN: MFSPES. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044450222030033>.
5. Bogomolov A. Multivariate process trajectories: capture, resolution and analysis // *Chemom. Intel. Lab. Syst.*, 2011. vol. 108, no. 1. pp. 49–63. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2011.02.005>.
6. Galyanin V., Melenteva A., Bogomolov A. Selecting optimal wavelength intervals for an optical sensor: A case study of milk fat and total protein analysis in the region 400–1100 nm // *Sens. Actuat. B: Chem.*, 2015. vol. 218. pp. 97–104. EDN: UFYADR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2015.03.101>.
7. Мощенская Е. Ю., Стифатов Б. М. Моделирование диаграмм “состав-свойство” для системы “алюминий-кремний” // *Журн. Суб. федер. ун-та. Химия*, 2023. Т. 16, № 1. С. 107–115. EDN: JWRAGD.
8. Мощенская Е. Ю., Стифатов Б. М. Исследование возможности применения методов теоретического моделирования для определения эвтектического состава бинарных сплавов // *Вестн. Тверск. гос. ун-та. Сер. Химия*, 2021. № 3. С. 105–122. EDN: JDZAEI. DOI: <https://doi.org/10.26456/vtchem2021.3.12>.
9. Holland P. W., Welsch R. E. Robust regression using iteratively reweighted least-squares // *Commun. Stat-Theor. M.*, 1977. vol. 6, no. 9. pp. 813–827. DOI: <https://doi.org/10.1080/03610927708827533>.
10. Wegelin J. A. *A Survey of Partial Least Squares (PLS) Methods, with Emphasis on the Two-Block Case*: Technical Report 371. Washington: Univ. of Washington, 2000. 44 pp. <https://stat.uw.edu/research/tech-reports/survey-partial-least-squares-pls-methods-emphasis-two-block-case>.

11. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., et. al. Scikit-learn: Machine learning in Python // *J. Mach. Learn. Res.*, 2011. vol. 12. pp. 2825–2830.
12. Lundberg S. M., Lee S.-I. A unified approach to interpreting model predictions / *Proc. Intern. Conf. Neural Inform. Proces. Systems*, 2017. pp. 4768–4777, arXiv: 1705.07874 [cs.AI]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.07874>.
13. de Myttenaere A., Golden B., Le Grand B., Rossi F. Mean Absolute Percentage Error for regression models // *Neurocomputing*, 2016. vol. 192. pp. 38-48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.12.114>.

MSC: 65C20, 62P99, 92E20

Development of a predictive model for two- and three-component inorganic systems in aqueous solutions using spectral analysis

K. Y. Massalov¹, E. Y. Moshchenskaya²

¹ National Engineering Physics Institute “MEPhI”,
31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russian Federation.

² Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This study presents an algorithm for analyzing spectral data through mathematical modeling, constructing prognostic models, and selecting optimal wavelength intervals for designing LED-based multisensor systems. The algorithm is implemented in Python and validated using experimental data from aqueous solutions of inorganic salts.

Key methodological aspects include:

- Application of multivariate calibration methods (PLS regression and multiple linear regression);
- Utilization of Shapley values to identify informative spectral wavelengths;
- Systematic enumeration to determine optimal wavelength intervals.

The developed model enables accurate prediction of two- and three-component systems in metal salt solutions using partial spectral data rather than full-spectrum analysis. Cross-validation demonstrates that:

- The model achieves comparable accuracy to full-spectrum approaches;
- The solution remains computationally efficient while maintaining predictive reliability.

The results confirm the model’s adequacy for quantitative spectral analysis, particularly in resource-constrained environments where partial spectral data acquisition is advantageous.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Massalov K. Y., Moshchenskaya E. Y. Development of a predictive model for two- and three-component inorganic systems in aqueous solutions using spectral analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 174–186. EDN: ZDTCEW. DOI: 10.14498/vsgtu2120 (In Russian).

Authors’ Details:

Kirill Y. Massalov  <https://orcid.org/0009-0003-6214-7470>

Master’s Student; Senior Researcher; Dept. of Elementary Particle Physics; Institute of Nuclear Physics and Engineering¹; e-mail: kirill.massalov@yandex.ru

Elena Y. Moshchenskaya  <https://orcid.org/0000-0002-1070-3151>

Cand. Chem. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Analytical and Physical Chemistry²; e-mail: mos@rambler.ru

Keywords: multivariate calibration, PLS regression, spectral interval selection, metal ion quantification, Shapley values, chemometrics.

Received: 9th October, 2024 / Revised: 11th February, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 11th April, 2025

Competing interests. The authors declare no conflicts of interest related to the preparation and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to: the research concept development, calculations and data analysis, manuscript preparation and editing. The final version of the article was approved by all co-authors, who bear full responsibility for the presented results.

Funding. The study was conducted without external funding sources.

Acknowledgments. The authors are grateful to the Head of the Department of Analytical and Physical Chemistry A.Yu. Bogomolov and his graduate student A.M. Nikitina for providing the experimental data.

References

1. Dubrovkin J. *Data Compression in Spectroscopy*. Cambridge Scholars Publ., 2022, 355 pp.
2. Rodionova O. E. Chemometric approaches for analysis of large chemical data arrays, *Ros. Khim. Zh.*, 2006, vol. 50, no. 2, pp. 128–144 (In Russian). EDN: HTUUSZ.
3. Smilde A., Bro R., Geladi P. *Multi-Way Analysis: Applications in the Chemical Sciences*. Chichester, John Wiley & Sons, 2004, xiv+381 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/0470012110>.
4. Bogomolov A. Yu. Optical multisensor systems in analytical spectroscopy, *J. Anal. Chem.*, 2022, vol. 77, no. 3, pp. 277–294. EDN: YORSQC. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1061934822030030>.
5. Bogomolov A. Multivariate process trajectories: capture, resolution and analysis, *Chemom. Intel. Lab. Syst.*, 2011, vol. 108, no. 1, pp. 49–63. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2011.02.005>.
6. Galyanin V., Melenteva A., Bogomolov A. Selecting optimal wavelength intervals for an optical sensor: A case study of milk fat and total protein analysis in the region 400–1100 nm, *Sens. Actuat. B: Chem.*, 2015, vol. 218, pp. 97–104. EDN: UFYADR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.snb.2015.03.101>.
7. Moshchenskaya E. Yu., Stifatov B. M. Modeling “composition-property” diagrams for the “aluminum-silicon” system, *J. Sib. Fed. Univ. Chem.*, 2023, vol. 16, no. 1, pp. 107–115 (In Russian). EDN: JWRAGD.
8. Moshchenskaya E. Yu., Stifatov B. M. Investigation of the possibility of using theoretical modeling methods to determine the eutectic composition of binary alloys, *Vestn. Tversk. Gos. Univ., Ser. Khimiia*, 2021, no. 3, pp. 105–122 (In Russian). EDN: JDZAEI. DOI: <https://doi.org/10.26456/vtchem2021.3.12>.
9. Holland P. W., Welsch R. E. Robust regression using iteratively reweighted least-squares, *Commun. Stat-Theor. M.*, 1977, vol. 6, no. 9, pp. 813–827. DOI: <https://doi.org/10.1080/03610927708827533>.
10. Wegelin J. A. *A Survey of Partial Least Squares (PLS) Methods, with Emphasis on the Two-Block Case*, Technical Report 371. Washington, Univ. of Washington, 2000, 44 pp. <https://stat.uw.edu/research/tech-reports/survey-partial-least-squares-pls-methods-emphasis-two-block-case>.
11. Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., et. al. Scikit-learn: Machine learning in Python, *J. Mach. Learn. Res.*, 2011, vol. 12, pp. 2825–2830.

12. Lundberg S. M., Lee S.-I. A unified approach to interpreting model predictions, In: *Proc. Intern. Conf. Neural Inform. Proces. Systems*, 2017, pp. 4768–4777, arXiv: 1705.07874 [cs.AI]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1705.07874>.
13. de Myttenaere A., Golden B., Le Grand B., Rossi F. Mean Absolute Percentage Error for regression models, *Neurocomputing*, 2016, vol. 192, pp. 38-48. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.12.114>.



УДК 517.958:537.52

Математическое моделирование процесса формирования искрового разряда и связи его характеристик с критическими условиями воспламенения пылевоздушной взвеси энергетических веществ

*А. С. Нечаев, Д. В. Зубиков,
М. С. Гречухина, А. Н. Давыдов*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассмотрены вопросы математического моделирования процесса формирования искрового разряда в экспериментальной установке, в ходе которого установлена зависимость энергии разряда и временного профиля энерговыделения от параметров разрядной цепи. Исследовано влияние основных теплофизических характеристик пылевоздушной взвеси, полидисперсного состава частиц, длительности разрядного процесса на коэффициент преобразования электрической энергии в тепловую (получено аналитическое выражение для расчета тепловой составляющей энергии разряда). Разработана расчетная методика определения оптимальных параметров разрядной цепи и напряжения заряда, обеспечивающих воспламенение пылевоздушной взвеси при вариациях ее теплофизических и дисперсных характеристик в серии экспериментов.

Ключевые слова: искровой разряд, минимальная энергия воспламенения, пылевоздушная смесь, энергетические материалы, электрический пробой, теплопередача, параметры разряда.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Нечаев А. С., Зубиков Д. В., Гречухина М. С., Давыдов А. Н. Математическое моделирование процесса формирования искрового разряда и связь его характеристик с критическими условиями воспламенения пылевоздушной взвеси энергетических веществ // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 1. С. 187–202. EDN: WNVSJF. DOI: 10.14498/vsgtu2137.

Сведения об авторах

Александр Сергеевич Нечаев <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>
кандидат технических наук; доцент; каф. радиотехнических устройств;
e-mail: nechaev-as@mail.ru

Дмитрий Валерьевич Зубиков <https://orcid.org/0000-0002-1408-6381>
аспирант; каф. радиотехнических устройств; e-mail: zubikov_ekran@mail.ru

Мария Сергеевна Гречухина <https://orcid.org/0000-0001-7797-3802>
кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. цифровых двойников материалов и технологических процессов их обработки; e-mail: mariya_grechukhina@mail.ru

Андрей Николаевич Давыдов <https://orcid.org/0000-0002-7061-5460>
кандидат технических наук; доцент; каф. механики; e-mail: davydov.an@samgtu.ru

Получение: 18 ноября 2024 г. / Исправление: 17 февраля 2025 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 9 апреля 2024 г.

Исследования чувствительности порошков и взвесей энергетических веществ (ЭВ) и ее зависимости как от параметров самих порошков и пылей, так и от условий окружающей среды, ведущиеся уже более ста лет, остаются актуальной задачей и в настоящее время. Причиной этого является тот факт, что несмотря на повсеместную разработку и внедрение еще в 60–80-х гг. XX в. систем нормативных документов, устанавливающих правила пожаро-взрывобезопасного обращения с горючими порошками и их пылевоздушными взвесями (ПВВ), согласно имеющейся статистике “Combustible Dust Incident Report”¹, в мире ежегодно происходит около 60 крупных пылевых взрывов и 210 пожаров.

Основной причиной возникновения аварийных ситуаций при производстве или использовании порошков энергетических веществ является несоблюдение требований техники безопасности. Однако в подавляющем большинстве случаев такое несоблюдение связано не с прямым игнорированием установленных правил и инструкций, а с их некорректной адаптацией при изменении режимов или условий выполнения технологических операций при изготовлении или обращении с ЭВ. Иными словами, при модификации технологического процесса часто происходит ошибочная оценка изменений параметров вещества, определяющих его пожаровзрывобезопасность.

Согласно [1], к таким параметрам для пылевоздушных взвесей энергетических веществ относятся:

- нижний концентрационный предел распространения пламени (воспламенения);
- минимальная энергия зажигания (воспламенения);
- максимальное давление взрыва;
- скорость нарастания давления при взрыве;
- минимальное взрывоопасное содержание кислорода.

Среди указанных параметров ключевым, определяющим чувствительность ПВВ ЭВ к внешним воздействиям, является минимальная энергия воспламенения (МЭВ). Следовательно, именно этот параметр требует первоочередной оценки при изменении режимов или условий обращения с ЭВ.

Актуальность задачи определения чувствительности ПВВ ЭВ к электрическим разрядам обусловлена двумя основными факторами:

- 1) значительная доля технологических операций, осуществляемых при производстве или обращении с энергетическими веществами в различных отраслях промышленности (прежде всего в оборонной — при снаряжении боеприпасов — и горнодобывающей — при пневмотранспортировании ЭВ, пневмозарядании шпуров и скважин [2]), требует перевода веществ в состояние ПВВ либо приводит к их образованию в качестве побочного продукта;
- 2) широкий спектр ЭВ (от взрывчатых веществ до зерна и муки) при переводе в состояние ПВВ приобретает, с одной стороны, склонность

¹См., например, <https://dss1.s3.us-east-2.amazonaws.com/external/2020MYIR/2020-Mid-Year-Combustible-Dust-Incident-Report-v5.pdf>.

к накоплению электростатических зарядов, с другой стороны — высокую чувствительность к электростатическим разрядам.

Определение минимальной энергии зажигания ПВВ осуществляется преимущественно путем подачи искрового разряда заданной энергии в камеру известного объема, содержащую исследуемую взвесь [3, 4].

Методики определения энергии искрового разряда, достаточной для воспламенения ПВВ, регламентированные нормативно-техническими документами [4–6], предусматривают двухэтапную процедуру эксперимента.

1. Подбор оптимальных параметров:

- показатели распыления пыли (частота и амплитуда вибраций сита, расстояние между ситом и осью электродов для виброситовых установок; давление распыляющих струй сжатого воздуха и временная задержка для пневматических систем);
- межэлектродного расстояния, обеспечивающих условия максимальной воспламеняемости взвеси.

2. Проведение серии экспериментов с фиксированными оптимальными параметрами и последовательным уменьшением энергии разряда путем регулирования электрической емкости конденсатора и/или напряжения зарядки конденсатора до достижения заданного уровня вероятности воспламенения.

В настоящем исследовании решается задача установления взаимосвязи между параметрами разрядной цепи и напряжением разряда, теплофизическими и дисперсными характеристиками исследуемых ПВВ энергетических веществ.

Актуальность работы обусловлена возможностью разработки математического инструмента для предварительной оценки минимальной энергии воспламенения (с учетом погрешности моделирования) и оптимальных параметров разрядной цепи и напряжения заряда, что позволяет существенно сократить объем экспериментальных исследований.

Исходными данными для решения поставленной задачи являются критическое значение вероятности воспламенения, при достижении которого энергия воспламенения фиксируется в качестве минимальной, и электрические схемы экспериментальных установок для исследования энергетических веществ на чувствительность к электрическому разряду.

В качестве нормативной базы использованы ГОСТ Р 31610.20-2-2017 [4] и ГОСТ Р МЭК 61241-2-3-99 [6] как соответствующие действующим международным стандартам по определению минимальной энергии зажигания пылевоздушных смесей.

Согласно указанным стандартам, диапазон значений минимальной энергии зажигания E_{\min} определяется следующим образом:

- нижняя граница E_1 — энергия, при которой воспламенение не наблюдается в 20 последовательных экспериментах; при этом небольшое превышение E_1 должно приводить к воспламенению хотя бы в одном случае из 20 испытаний;
- верхняя граница E_2 — энергия, гарантирующая воспламенение во всех 20 испытаниях; незначительное уменьшение E_2 должно приводить к отсутствию воспламенения хотя бы в одном случае.

Таким образом, минимальная энергия зажигания удовлетворяет условию

$$E_1 < E_{\min} < E_2.$$

Схемы установок для испытания энергетических веществ на чувствительность к электрическому разряду, приведенные в указанных стандартах, обладают следующими особенностями:

- возможностью контроля энергии искры путем изменения межэлектродного промежутка или напряжения зарядной цепи;
- наличием единой полной электрической схемы, представленной на рис. 1.

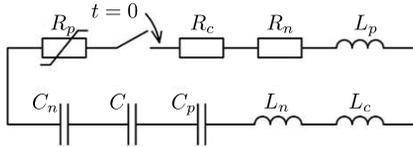


Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема разрядных цепей стандартизованных установок для определения воспламеняющей энергии искрового разряда

[Figure 1. Equivalent electrical circuit of discharge circuits in standardized setups for determining spark discharge ignition energy]

Эквивалентная схема включает следующие элементы:

- ключ, замыкаемый при $t = 0$ для инициации разряда;
- активное сопротивление разрядного промежутка R_p (переменное);
- активное сопротивление электронных компонентов цепи R_c ;
- активное сопротивление проводников R_n ;
- индуктивность разрядного промежутка L_p ;
- индуктивность электронных компонентов L_c ;
- индуктивность проводников L_n ;
- емкость рабочего конденсатора C ;
- емкость разрядного промежутка до момента его пробоя C_p ;
- совокупность паразитных емкостей составных частей цепи C_n .

Для определения энергии искрового разряда, выделяемой на разрядном промежутке, проведем анализ процессов в данной цепи. Энергия в промежутке определяется выражением

$$E(t) = \int_0^t i^2(t) R_p dt, \quad (1)$$

где $E(t)$ — выделяемая энергия в разрядном промежутке, Дж; $i(t)$ — ток разряда, А; R_p — активное сопротивление разрядного промежутка, Ом.

Ток разряда аппроксимируется решением для затухающего колебательного контура:

$$i(t) = A_i e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (2)$$

где A_i — постоянная составляющая амплитуды тока в затухающем колебательном искровом разряде, А; α — коэффициент затухания в газоразрядном промежутке, с^{-1} ; ω — угловая частота, рад/с.

Параметры A_i и ω определяются соотношениями

$$A_i = (U_H - U_O) \sqrt{C_\Sigma / L_\Sigma}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2},$$

где U_H — напряжение заряда конденсатора, В; U_O — остаточное напряжение на конденсаторе после завершения разряда, В; C_Σ — суммарная емкость разрядной цепи, Ф; L_Σ — суммарная индуктивность разрядной цепи, Гн ω_0 — резонансная частота разрядной цепи (RLC-контур), рад/с. Резонансная частота вычисляется по формуле $\omega_0 = 1/\sqrt{L_\Sigma C_\Sigma}$.

Аналитическое определение коэффициента затухания α возможно по формуле

$$\alpha = \frac{R_\Sigma + R_p}{2L_\Sigma},$$

однако, как показано в [6], сравнение экспериментальных данных с расчетами по (2) с таким коэффициентом α выявило возрастающее расхождение между реальной кривой тока в цепи и аппроксимированной кривой, особенно заметное с четвертого периода разряда.

В связи с этим в [7] предложен экспериментальный метод определения α , включающий следующие этапы:

- 1) проведение серии разрядов в исследуемой цепи с фиксацией мгновенных значений тока и временных характеристик для нескольких начальных периодов;
- 2) построение усредненной экспериментальной кривой тока;
- 3) итерационный подбор α для достижения наилучшего соответствия между теоретической кривой по (2) и экспериментальными данными.

После определения всех параметров в (2) подстановка в (1) дает, согласно [8], выражение для энергии на разрядном промежутке:

$$E(t) = \frac{A_i^2 R_p \omega}{4(\alpha^2 + \omega^2)} \left[\frac{\omega}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) - e^{-2\alpha t} \left(\frac{2\alpha}{\omega} \sin^2 \omega t + \sin 2\omega t \right) \right]. \quad (3)$$

Согласно приведенному выражению, энергия искрового разряда в схеме определяется напряжением заряда конденсатора (через параметр A_i), сопротивлением разрядного промежутка R_p , угловой частотой и коэффициентом затухания контура. При этом ключевое влияние оказывают активное сопротивление контура и его индуктивность.

Важно отметить, что частота колебаний разрядного тока существенно влияет на процессы в искровом промежутке и порог пробоя [9]. Это свидетельствует о значительном влиянии параметров контура на характер протекания разряда и минимальную энергию зажигания ПВВ.

Однако детальное исследование данного влияния и разработка его аналитического описания выходят за рамки настоящей работы и могут стать предметом отдельного исследования. В данной статье мы сосредоточимся на определении сопротивления разрядного промежутка R_p — последнего неопределенного параметра в выражении для расчета энергии разряда.

Основной вопрос: можно ли считать R_p постоянной величиной или оно изменяется в процессе разряда: $R_p = R_p(t)$?

Согласно исследованиям [8, 10], сопротивление разрядного промежутка R_p изменяется незначительно и может быть аппроксимировано постоянным значением, равным среднему сопротивлению за первые периоды разряда. Методика определения R_p включает в себя следующие этапы:

- 1) определение α для цепи с нагрузкой;

- 2) определение α_* для короткозамкнутой цепи;
- 3) расчет R_p по формуле [11]

$$R_p = 2L(\alpha - \alpha_*). \quad (4)$$

Однако, как показано в [7], такое предположение приводит к расхождению экспериментальных и расчетных кривых тока, а также заметным погрешностям начиная с 4-го периода. Это ставит под сомнение постоянство коэффициента α и постоянство сопротивления R_p .

К дополнительным аргументам против постоянства R_p можно отнести следующие [7, 12, 13]:

- линейность ВАХ разрядного канала;
- противоречие экспериментальным данным;
- убывающий характер ВАХ для различных типов разрядов.

Таким образом, использование формулы (4) для определения R_p позволяет получить лишь приближенное значение энергии разряда в выражении (3).

Применим временную дискретизацию. Все время существования искрового разряда разделим на N интервалов $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Для учета непостоянства сопротивления R_p предлагается использовать анализ переходного процесса в цепи (рис. 1) на основе закона Кирхгофа:

$$u_p(t) + R_c(t)i_p(t) + L(t)\frac{di_p(t)}{dt} + \frac{1}{C(t)}\int_{t_n}^{t_{n+1}} i_p(t)dt = 0, \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (5)$$

где $u_p(t)$, $i_p(t)$ — значения напряжения и тока в разрядном промежутке; $R_c(t)$, $L(t)$, $C(t)$ — сопротивление, индуктивность и емкость цепи (изменяющиеся параметры), учет которых в явном виде затруднен.

На каждом интервале $t \in [t_n, t_{n+1}]$ изменяющиеся параметры будем считать постоянными: $R_c(t) = R_c(t_n)$, $L(t) = L(t_n)$, $C(t) = C(t_n)$.

Выражая из (5) $u_p(t)$ и используя закон Ома, получаем выражение для $R_p(t)$:

$$R_p(t) = -\frac{u_p(t)}{i_p(t)} = \frac{1}{i_p(t)} \left(R_c(t_n)i_p(t) + L(t_n)\frac{di_p(t)}{dt} + \frac{1}{C(t_n)}\int_{t_n}^{t_{n+1}} i_p(t)dt \right), \quad t \in [t_n, t_{n+1}], \quad (6)$$

где знак минус обеспечивает положительность $R_p(t)$ при отрицательном $u_p(t)$.

Для практических расчетов рекомендуется выбирать интервалы $[t_n, t_{n+1}]$ на основе частоты ω , чтобы весь промежуток искрового разряда разбить на конечное число отрезков N . На каждом интервале $t \in [t_n, t_{n+1}]$ будем считать $R_p(t)$ постоянным: $R_p(t) = R_p(t_n)$. Такой подход позволяет учесть непостоянство сопротивления разрядного промежутка при определении энергии разряда и на основании (3) получить значение энергии разряда на всем разрядном промежутке:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{A_i^2 R_p(t_n) \omega}{4(\alpha^2 + \omega^2)} \left[\frac{\omega}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) - e^{-2\alpha t} \left(\frac{2\alpha}{\omega} \sin^2 \omega t + \sin 2\omega t \right) \right] dt. \quad (7)$$

В рамках данной статьи задача установления связи между параметрами разрядной цепи и напряжением разряда с теплофизическими и дисперсными характеристиками ПВВ ЭВ решена частично. Получена зависимость энергии разряда E от параметров разрядной цепи и характеристик разрядного тока.

Для учета влияния теплофизических и дисперсных свойств ПВВ вводится оператор M , характеризующий долю тепловой энергии в полной энергии искры [14]:

$$M = \frac{AE_g}{4\pi\lambda_g\tilde{t}R\tilde{T}^2}, \quad (8)$$

где A — линейная плотность тепловыделения от искры, Дж/(м·К); E_g — энергия в газовой фазе, Дж; λ_g — коэффициент теплопроводности газа, Вт/(м·К); $R = 8.314$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; \tilde{t} — характерное время реакции окисления (горения), с; \tilde{T} — масштабная температура, К, меньшая адиабатической температуры сгорания газовзвеси.

Масштабная температура \tilde{T} выбирается в пределах Семеновских интервалов:

$$\tilde{T} = R\tilde{T}_0^2/E_a,$$

где \tilde{T}_0 — температура среды или температура на границе сред газ/пыль; E_a — энергия активации, являющаяся эмпирическим значением и показывающая зависимость протекания реакции от температуры.

В работе [14] сделаны существенные допущения, не позволяющие использовать выражение для оператора M в виде (8):

- однородность распределения частиц в газе;
- сферическая форма частиц и их одинаковый размер;
- использование закона Ньютона для теплообмена между газом и частицами;
- пренебрежение термическим расширением газа;
- моделирование искры мгновенным нитевидным источником тепловыделения.

Эти допущения противоречат реальным условиям, так как технологические порошки всегда полидисперсны, а процесс искрообразования — не мгновенный процесс.

Экспериментальные данные [14] показывают, что мелкие частицы снижают энергию воспламенения, увеличивают полноту сгорания, имеют лучшее соотношение площадь/объем, а крупные частицы требуют больше энергии для нагрева, обладают тепловой инерционностью, имеют ограниченное влияние за пределом критического размера.

Для аналитического описания влияния полидисперсности частиц и протяженности искрового разряда во времени на МЭВ рассмотрим схему процесса (рис. 2).

На рис. 2 штриховой кривой обозначена траектория сформировавшегося искрового разряда, а кривыми 3 обозначены некоторые возможные траектории формирования разряда.

Согласно исследованиям, представленным в работе [14], формирование искрового разряда в газовой среде обусловлено развитием электронных лавин (стримеров). При наличии в межэлектродном промежутке твердых диэлектрических частиц наблюдается существенная модификация траектории

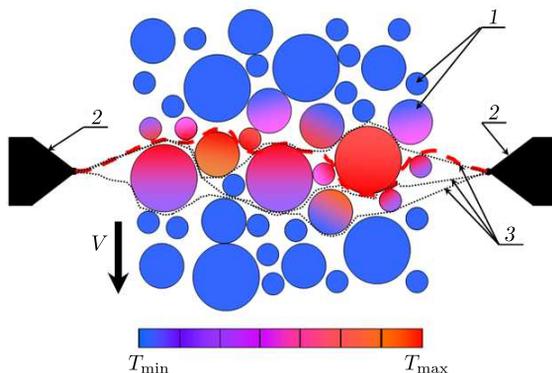


Рис. 2. Схематическое представление процесса нагрева частиц вещества искровым разрядом: 1 — частицы вещества; 2 — электроды; 3 — траектории искрового разряда; V — средняя скорость потока частиц; T_{\min} — начальная температура частиц; T_{\max} — максимальная температура нагрева материала частиц от искрового разряда

[Figure 2. Schematic representation of particle heating process by spark discharge: 1 — particles; 2 — electrodes; 3 — spark discharge trajectories; V — average particle flow velocity; T_{\min} — initial particle temperature; T_{\max} — maximum heating temperature of particle material from spark discharge]

разрядного канала, который преимущественно развивается в межчастичных промежутках.

Как следует из стримерной теории [15], в случае присутствия диэлектрических частиц в разрядном промежутке процесс следует рассматривать как поверхностный (скользящий) разряд, распространяющийся вдоль границы раздела газовой среды и твердых частиц. Тепловая энергия, выделяющаяся в проводящем канале разряда, передается контактирующим с ним частицам, причем эффективность теплопередачи определяется соотношением коэффициентов теплопроводности материала частиц и окружающей газовой смеси.

Следует подчеркнуть, что поскольку теплопроводность твердых диэлектриков, как правило, на порядок превышает аналогичный параметр газовой фазы, основная часть тепловой энергии скользящего разряда поглощается именно частицами вещества.

Анализ рис. 2 позволяет выявить характер распределения теплового воздействия искрового разряда на частицы вещества в зависимости от их размерных характеристик и площади контакта с каналом искрового разряда. Видно, что частицам малого размера для повышения их внутренней энергии достаточно более короткого контакта с разрядом, чем частицам крупного размера. В свою очередь, частицы малого размера при сгорании от полученной энергии могут положить начало детонации более крупных частиц, которые не реагировали при контакте с разрядным каналом.

Скорость распространения стримеров V_c составляет 10^7 – 10^8 см/с [15], что на несколько порядков превышает характерную скорость потока частиц V . Это позволяет рассматривать процесс нагрева частиц искровым разрядом в приближении неподвижных частиц во время электрического пробоя среды.

Представленная на рис. 2 схема процесса нагрева частиц позволяет сделать вывод о линейной зависимости плотности тепловыделения A , характеризующей количество тепла, выделяемого в единицу времени на единицу

длины разрядного промежутка. В данном случае безразмерный оператор M , описывающий долю тепловой энергии в общем энергетическом балансе искры, может рассматриваться как аналог коэффициента полезного действия теплопередачи от разряда к ПВВ. Такое приближение остается справедливым и для нашей модели при учете полидисперсного состава частиц и конечного времени существования разряда.

Согласно стримерной теории [15], при формировании искрового разряда в пылевоздушной взвеси, содержащей твердые диэлектрические частицы, разряд может развиваться исключительно вдоль поверхностей раздела газ/частица и через межчастичные промежутки. Данное обстоятельство приводит к существенной зависимости длины искрового канала l_p от размерных характеристик частиц: увеличение линейных размеров частиц вызывает пропорциональное удлинение траектории разряда.

Из общеизвестного соотношения $R_p = \rho_p l_p / S_p$, где ρ_p — удельное сопротивление канала, S_p — площадь его поперечного сечения, следует, что рост длины канала l_p при постоянных ρ_p и S_p приводит к линейному увеличению сопротивления разрядного промежутка R_p .

При дискретном рассмотрении процесса формирования канала, разбитого на N_f элементарных отрезков Δl , на прохождение каждого из которых заряду требуется интервал времени $[t_n, t_{n+1}]$, при постоянной скорости распространения стримера V_c , общая длина канала $l_p = N_f \Delta l = V_c t_f$, где t_f — полное время формирования разрядного канала.

Рассмотрим вопрос учета временных характеристик разряда через анализ сопротивления канала. В течение периода существования сформированного канала t_c его сопротивление определяет интенсивность теплопотерь, связанных с передачей энергии частицам. При этом наблюдается монотонная зависимость: с увеличением времени существования канала возрастают суммарные тепловые потери, что эквивалентно росту интегрального сопротивления.

Для количественного описания данного эффекта предлагается следующий подход:

- временной интервал от 0 до t_c разбивается на N_c отрезков $t \in [t_n, t_{n+1}]$;
- в пределах каждого отрезка сопротивление канала $R_p(t)$ принимается постоянным: $R_p(t) = R_p(t_n)$;
- суммарное сопротивление вычисляется по формуле

$$R_p = \sum_{n=0}^{N_c-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} R_p(t_n) dt.$$

Такой подход позволяет корректно учесть влияние временной продолжительности разряда на интегральные характеристики канала через введение параметра N_c , ограничивающего время существования разряда.

Для установления взаимосвязи между параметрами разрядной цепи, напряжением разряда и характеристиками пылевоздушной взвеси в выражение (7) вводится безразмерный оператор M , определяемый соотношением (8). Учет влияния полидисперсности частиц и конечного времени существования разряда на минимальную энергию воспламенения осуществляется путем дискретизации процесса:

$$N = N_f + N_c,$$

где N_f — количество временных интервалов формирования канала; N_c — количество интервалов существования сформированного канала.

В итоге выражение для определения полной энергии искры E может быть преобразовано в выражение для определения тепловой энергии искры E_t с учетом полидисперсности частиц и длительности искры:

$$E_t = ME = \sum_{n=0}^{N_f+N_c-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{AE_g}{4\pi\lambda_g\tilde{t}R\tilde{T}^2} \cdot \frac{A_i^2 R_p(t_n)\omega}{4(\alpha^2 + \omega^2)} \times \\ \times \left[\frac{\omega}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) - e^{-2\alpha t} \left(\frac{2\alpha}{\omega} \sin^2 \omega t + \sin 2\omega t \right) \right] dt. \quad (9)$$

Таким образом, получено выражение, устанавливающее взаимосвязь между параметрами искрового разряда и критическими условиями воспламенения пылевоздушных взвесей энергетических веществ. Совместное использование данного выражения с соотношением (2), выражениями для A_i и ω , а также методикой определения коэффициента α позволяет существенно оптимизировать экспериментальное определение параметров разрядной цепи.

Последовательность экспериментальных и расчетных операций включает следующие этапы.

1. Проведение серии разрядных экспериментов с регистрацией осциллограмм тока для построения усредненной характеристики разрядного процесса в пределах нескольких первых периодов разряда.
2. Построение экспериментальной кривой разрядного тока.
3. Определение коэффициента затухания α путем подбора теоретической кривой согласно выражению (2), удовлетворяющей экспериментальной кривой, полученной на этапе 2.
4. Дискретизация времени существования искрового разряда и выбор интервалов $t \in [t_n, t_{n+1}]$, определяемых параметром ω и обеспечивающих выполнение условия $R_p(t) \approx \text{const}$ на этих интервалах.
5. Расчет массива значений сопротивлений разрядного промежутка $R_p(t) = R_p(t_n)$ для $t \in [t_n, t_{n+1}]$ по формуле (6).
6. Определение полной энергии разряда на всем разрядном промежутке E с использованием соотношения (7).
7. Вычисление тепловой составляющей энергии E_t по модифицированной формуле (9) с учетом параметра N_f , характеризующего дисперсность частиц, и параметра длительности разряда N_c .

Энергия E_t , определяемая на данном этапе расчетов для условий успешного воспламенения, представляет собой не просто тепловую составляющую энергии искрового разряда, но характеризует минимальное количество тепловой энергии, необходимое для инициирования процесса воспламенения пылевоздушной взвеси (ПВВ) конкретного вещества. Следовательно, при вариации коэффициента M , вызванной изменением теплофизических и дисперсных характеристик взвеси при сохранении химической природы вещества, требуется соответствующая коррекция полной энергии разряда E с целью сохранения постоянства значения E_t в соответствии с выражением (9).

Физический смысл данного подхода заключается в следующем: энергия E_t , установленная в ходе первоначальной серии экспериментов с успеш-

ным воспламенением, рассматривается как эталонное значение минимальной тепловой энергии воспламенения для данного вещества. При этом наблюдаемые изменения оператора M в различных экспериментальных сериях отражают вариации коэффициента полезного действия теплопередачи от разрядного канала к взвеси, что требует компенсаторного изменения полной энергии разряда E путем соответствующей регулировки параметров разрядной цепи (емкости, индуктивности, напряжения заряда).

8. Расчет изменения безразмерного оператора M при заданном изменении теплофизических и дисперсных характеристик ПВВ осуществляется на основании выражения (8).
9. Определение величины полной энергии искрового разряда E , обеспечивающей сохранение постоянного значения тепловой энергии воспламенения E_t при вариации оператора M , на основе выражения (9).
10. Вычисление необходимых параметров разрядной цепи и напряжения заряда на основании соотношений (1) и (2) для определения амплитуды тока A_i и угловой частоты ω ; при этом сопротивление разрядного промежутка R_p предполагается постоянным при изменении характеристик ПВВ.
11. Повторение шагов 1–5 методики для измененной разрядной цепи.
12. Уточненный расчет величины полной энергии искрового разряда E на основании соотношения (7).
13. Итерационное повторение процедур, соответствующих шагам 10–12 методики, выполняется до достижения на этапе 12 расчетного значения полной энергии E , совпадающего с требуемым значением, определенным на шаге 9, что соответствует получению оптимальных параметров разрядной цепи.

Этапы 9 и 10 представленной методики обеспечивают существенное сокращение области экспериментального поиска оптимальных параметров разрядной цепи, необходимых для эффективного воспламенения ПВВ при вариации ее теплофизических и дисперсных характеристик.

Заключение. В работе построена математическая модель, описывающая процессы искрового разряда в экспериментальной установке, используемой для оценки чувствительности энергетических веществ к воздействию электрического разряда. Основной акцент в моделировании был сделан на исследовании влияния параметров электрической цепи как на интегральную энергию разряда, так и на временную зависимость процесса выделения энергии.

Важным аспектом разработанной модели является учет комплексного влияния теплофизических характеристик пылевоздушной смеси, дисперсного состава частиц и временной продолжительности разрядного процесса на эффективность преобразования электрической энергии искры в тепловую энергию, передаваемую смеси (с соответствующим математическим выражением для количественной оценки данного процесса).

На основании полученных теоретических результатов предложена методика расчета оптимальных параметров электрической цепи и напряжения заряда, обеспечивающих воспламенение пылевоздушной смеси при вариации

ее теплофизических и дисперсных характеристик в различных экспериментальных условиях.

Перспективным направлением дальнейших исследований является экспериментальная верификация модели, включающая в себя уточнение параметров процессов тепловыделения в разрядном промежутке, исследование механизмов поглощения тепловой энергии пылегазовой взвесью, применение модели для расчета минимальной энергии воспламенения взвесей энергонасыщенных материалов.

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. А.С. Нецаев — концептуализация исследования; интерпретация новых фактов в рамках предложенной теоретической модели; постановка исследовательских задач; анализ влияния распределения частиц по размерам на линейную плотность тепловыделения искрового разряда; подготовка первоначального варианта рукописи. Д.В. Зубиков — характеристика процесса формирования искрового разряда в эксперименте; разработка методики определения энергии разряда; редактирование и доработка рукописи. М.С. Гречухина — анализ динамики нагрева частиц искровым разрядом; редактирование и доработка рукописи. А.Н. Давыдов — анализ разрядных процессов в рамках эквивалентной схемы; подготовка черного варианта рукописи. Все авторы ознакомились и одобрили окончательную версию рукописи, представленную для публикации. Авторы несут полную ответственность за опубликованные материалы.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (тема № АААА-А12-2110800012-0).

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. ГОСТ 12.1.041-83. Система стандартов безопасности труда. Пожаровзрывобезопасность горючих пылей. Общие требования. Введ. 1984-07-01. Минск: Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации. М.: Изд-во стандартов, 1984. 11 с.
2. Таубкин И. Г. Об опасности электризации графитов при пневмозаряжении шпуров и скважин / *Взрывное дело*. Т. 80/37. М.: Недра, 1978. С. 221–228.
3. Раско С. Л., Овчаренко А. Г. *Эксплуатационная безопасность конденсированных взрывчатых веществ*. Барнаул: Алт. гос. тех. ун-т, 2006. 147 с. EDN: QNEBPZ.
4. ГОСТ Р 31610.20-2-2017/ISO/IEC 80079-20-2:2016. Взрывоопасные среды. Часть 20-2. Характеристики материалов. Методы испытаний горючей пыли. Введ. 2019-06-01. М.: Стандартинформ, 2018. 50 с.
5. ГОСТ 12.1.044-2018. Пожаровзрывоопасность веществ и материалов. Номенклатура показателей и методы их определения. Взамен 12.1.044-89; введ. 2019-05-01. Минск: Межгос. совет по стандартизации, метрологии и сертификации. М.: Стандартинформ, 2018. 206 с.
6. ГОСТ Р МЭК 61241-2-3-99. Электрооборудование, применяемое в зонах, опасных по воспламенению горючей пыли. Часть 2. Методы испытаний. Раздел 3. Метод определения минимальной энергии зажигания пылевоздушных смесей. Введ. 2001-01-01. М.: Изд-во стандартов, 2004. 11 с.
7. Корытченко К. В., Галак О. В. Усовершенствованный метод расчета динамики ввода энергии в искровой канал по кривой разрядного тока // *Прикладн. радиоэлектр.*, 2011. Т. 10, № 1. С. 51–59.

8. Knystautas R., Lee J. H. On the effective energy for direct initiation of gaseous detonations // *Combust. Flame*, 1976. vol.27. pp. 221–228. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(76\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0010-2180(76)90025-0).
9. Воробьев Г. А., Похолков Ю. П., Королев Ю. Д., Меркулов В. И. *Физика диэлектриков (область сильных полей)*. Томск: Томск. политехн. ун-т, 2011. 243 с. EDN: FYFZXL.
10. Zhang B., Dick Ng H., Lee J.H.S Measurement and relationship between critical tube diameter and critical energy for direct blast initiation of gaseous detonations // *J. Loss. Prevent. Process Industry*, 2013. vol.26, no.6. pp. 1293–1299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2013.07.011>.
11. Matsui H., Lee J. H. Influence of electrode geometry and spacing on the critical energy for direct initiation of spherical gaseous detonations // *Combust. Flame*, 1976. vol. 27. pp. 217–220. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(76\)90024-9](https://doi.org/10.1016/0010-2180(76)90024-9).
12. Абрамсон И. С., Гегечкори Н. М. Осциллографическое исследование искрового разряда // *ЖЭТФ*, 1951. Т. 21, № 4. С. 484–492.
13. Райзер Ю. П. *Физика газового разряда*. М.: Наука, 1987. 592 с. EDN: TTDTSL.
14. Крайнов А. Ю. *Моделирование самовоспламенения, зажигания, горения и взрыва газовозвесей и процессов в сети горных выработок угольных шахт* : Диссерт. . . уч. ст. д.ф.-м.н.: 01.04.14 — Теплофизика и теоретическая теплотехника. Томск: Томск. гос. ун-т, 2003. 354 с.
15. Бортник И. М., Верещагин И. П., Вершинин Ю. Н. [и др.] *Электрофизические основы техники высоких напряжений*. М.: Энергоатомиздат, 1993. 543 с. EDN: SU00GH.

MSC: 80A25, 65Z05

Mathematical modeling of the spark discharge formation process and the correlation between its parameters and ignition threshold conditions for energetic material dust clouds

A. S. Nechaev, D. V. Zubikov,
M. S. Grechukhina, A. N. Davydov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This study presents a mathematical modeling study of spark discharge formation in an experimental setup, establishing the dependence of discharge energy and temporal energy release profile on discharge circuit parameters. The research investigates the influence of key thermophysical properties of dust-air suspensions, particle size distribution, and discharge duration on the electrical-to-thermal energy conversion efficiency (an analytical expression for calculating the thermal component of discharge energy has been derived). A computational methodology has been developed to determine optimal discharge circuit parameters and charging voltage that ensure ignition of dust-air mixtures under variations of their thermophysical and dispersity characteristics across experimental series.

Keywords: spark discharge, minimum ignition energy, dust-air mixture, energetic materials, electrical breakdown, thermal energy transfer, discharge parameters.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nechaev A. S., Zubikov D. V., Grechukhina M. S., Davydov A. N. Mathematical modeling of the spark discharge formation process and the correlation between its parameters and ignition threshold conditions for energetic material dust clouds, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 1, pp. 187–202. EDN: WNVSJF. DOI: 10.14498/vsgtu2137 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander S. Nechaev  <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Radio Engineering Devices;
e-mail: nechaev-as@mail.ru

Dmitry V. Zubikov  <https://orcid.org/0000-0002-1408-6381>

Postgraduate Research Student; Dept. of Radio Engineering Devices;
e-mail: zubikov_ekran@mail.ru

Maria S. Grechukhina  <https://orcid.org/0000-0001-7797-3802>

Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Digital Doubles of Materials and Technological Processes of their Processing; e-mail: mariya_grechukhina@mail.ru

Andrey N. Davydov  <https://orcid.org/0000-0002-7061-5460>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanics; e-mail: davydov.an@samgtu.ru

Received: 18th November, 2024 / Revised: 17th February, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 9th April, 2024

Competing interests. The authors declare no competing financial or non-financial interests regarding this publication.

Authorship contribution and responsibility. A.S. Nechaev: Research conceptualization; Interpretation of new facts within the proposed theoretical framework; Research problem formulation; Analysis of particle size distribution effects on linear heat release density from spark discharge; Initial manuscript drafting. D.V. Zubikov: Experimental spark discharge formation process characterization; Development of researcher workflow for discharge energy determination; Manuscript revision and editing. M.S. Grechukhina: Analysis of particle heating dynamics by spark discharge; Manuscript revision and editing. A.N. Davydov: Discharge process analysis in equivalent circuit representation; Manuscript draft preparation. All authors have reviewed and approved the final manuscript version submitted for publication. The authors assume full responsibility for the published content.

Funding. The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task (theme no. AAAA12-2110800012-0).

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for the careful reading of the article, valuable suggestions, and comments.

References

1. GOST 12.1.041-83. Occupational Safety Standards System. Fire and Explosion Safety of Combustible Dusts. General Requirements. Introduced 1984-07-01. Minsk, Interstate Council for Standardization, Metrology and Certification; Moscow, Standards Publishing House, 1984, 11 pp. (In Russian)
2. Taubkin I. G. On the hazard of grammonite electrification during pneumatic charging of boreholes and wells, In: *Blasting Engineering*, vol. 80/37. Moscow, Nedra, 1978, pp. 221–228 (In Russian).
3. Rasko S. L., Ovcharenko A. G. *Ekspluatatsionnaya bezopasnost' kondensirovannykh vzryvchatykh veshchestv* [Operational Safety of Condensed Explosive Substances]. Barnaul, Altay State Techn. Univ., 2006, 147 pp. (In Russian). EDN: QNEBPZ.
4. GOST R 31610.20-2-2017/ISO/IEC 80079-20-2:2016. Explosive Atmospheres. Part 20-2. Material Characteristics. Test Methods for Combustible Dust. Introduced 2019-06-01. Moscow, Standartinform, 2018, 50 pp. (In Russian)
5. GOST 12.1.044-2018. Fire and Explosion Hazard of Substances and Materials. Index System and Test Methods. Replaces GOST 12.1.044-89; introduced 2019-05-01. Minsk, Interstate Council for Standardization, Metrology and Certification; Moscow, Standartinform, 2018, 206 pp. (In Russian)
6. GOST R IEC 61241-2-3-99. Electrical Apparatus for Use in the Presence of Combustible Dust. Part 2. Test Methods. Section 3. Method for Determining the Minimum Ignition Energy of Dust-Air Mixtures. Introduced 2001-01-01. Moscow, Standards Publishing House, 2004, 11 pp. (In Russian)
7. Korytchenko K. V., Galak O. V. Improved method for calculating energy input dynamics into spark channel from discharge current curve, *Prikladn. Radioelektr.*, 2011, vol. 10, no. 1, pp. 51–59 (In Russian).
8. Knystautas R., Lee J. H. On the effective energy for direct initiation of gaseous detonations, *Combust. Flame*, 1976, vol. 27, pp. 221–228. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(76\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0010-2180(76)90025-0).

9. Vorob'ev G. A., Pokholkov Yu. P., Korolev Yu. D., Merkulov V. I. *Fizika dielektrikov (oblast' sil'nykh polei)* [Physics of Dielectrics (Strong Field Region)]. Tomsk, Tomsk Polytechnic Univ., 2011, 243 pp. (In Russian). EDN: FYFZXL.
10. Zhang B., Dick Ng H., Lee J.H.S Measurement and relationship between critical tube diameter and critical energy for direct blast initiation of gaseous detonations, *J. Loss. Prevent. Process Industry*, 2013, vol. 26, no. 6, pp. 1293–1299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jlp.2013.07.011>.
11. Matsui H., Lee J. H. Influence of electrode geometry and spacing on the critical energy for direct initiation of spherical gaseous detonations, *Combust. Flame*, 1976, vol. 27, pp. 217–220. DOI: [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(76\)90024-9](https://doi.org/10.1016/0010-2180(76)90024-9).
12. Abramson I. S., Gegechkori N. M. Oscillographic study of spark discharge, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1951, vol. 21, no. 4, pp. 484–492 (In Russian).
13. Raizer Yu. P. *Gas Discharge Physics*. Berlin, Springer, 1991, xi+449 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61247-3>.
14. Krainov A. Yu. *Modeling of Spontaneous Ignition, Ignition, Combustion and Explosion of Gas Suspensions and Processes in Mine Workings of Coal Mines*, Doctoral dissertation in Physical and Mathematical Sciences (Specialty: 01.04.14 — Thermal Physics and Theoretical Heat Engineering). Tomsk, Tomsk State Univ., 2003, 354 pp. (In Russian)
15. Bortnik I. M., Vereshchagin I. P., Vershinin Yu. N., et al. *Elektrofizicheskie osnovy tekhniki vysokikh napriazhenii* [Electrophysical Foundations of High Voltage Engineering]. Moscow, Energoatomizdat, 1993, 543 pp. (In Russian). EDN: SU00GH.

Подписной индекс 18108

ISSN 1991-8615 (print)



9 771991 861253



Цена свободная