

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 29, № 2 – 2025

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Июнь — 2025

Серия
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 29, № 2/79 – 2025)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. Э. Келлер — д.ф.-м.н., доц. (Пермь, Россия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвирыков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 29, № 2/79 – 2025)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен

на кафедре прикладной математики

и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 30 июня 2025 г.

Дата выхода в свет 21 июля 2025 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 131/25.

Заказ № 183.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,

ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
June — 2025

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2025, vol. 29, no. 2

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- I. E. Keller (Perm', Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Khalouta A.* “Решение систем линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра дробного порядка с производной Капуто методом интегрального преобразования Халаута” 207
- Бештоков М. Х.* “Разностные схемы повышенного порядка точности для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода” 220
- Марданов М. Дж., Шарифов Я. А.* “Существование и единственность решений системы Гурса–Дарбу с интегральными граничными условиями” 241
- Хачатрян Х. А., Мурадян А. Г.* “О конструктивной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра на всей числовой прямой” . . . 256

Механика деформируемого твёрдого тела

- Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* “О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела” 274

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Голованов О. А., Тырсин А. Н.* “Итерационное выпуклое оценивание линейных регрессионных моделей в условиях стохастической неоднородности данных” 294
- Казakov Е. А., Водинчар Г. М.* “Определение динамических режимов в эредитарной двумодовой модели динамо” 319
- Романов Д. В., Романов К. В., Романов В. А., Степанов Е. А., Лебедев А. А., Маскаев В. А.* “Математическое моделирование формирования предвспышечного сигнала в условиях солнечной атмосферы” 334
- Русанов М. С.* “Аналитическая формула и численный расчет второй гармоники динамической восприимчивости концентрированной феррожидкости” . . . 347
- Филиппов Г. А.* “О скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерного кинетического уравнения Бродвелла” . . . 363

Краткие сообщения

- Зинченко А. С., Романенков А. М.* “Асимптотика сумм с гауссовым ядром и мультипликативными коэффициентами” 381
- Сараев Л. А., Южасова А. В.* “Стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта и производственных ресурсов региона” 390

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Khalouta A. “Solution of systems of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations using the Khalouta integral transform method” 207

Beshtokov M. Kh. “Higher-order difference schemes for the loaded heat conduction equations with boundary conditions of the first kind” 220

Mardanov M. J., Sharifov Ya. A. “Existence and uniqueness of solutions to the Goursat–Darboux system with integral boundary conditions” 241

Khachatryan Kh. A., Muradyan A. H. “On the constructive solvability of a nonlinear Volterra integral equation on the entire real line” 256

Mechanics of Solids

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. “On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid” 274

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Golovanov O. A., Tyrsin A. N. “Iterative convex estimation of linear regression models under data stochastic heterogeneity” 294

Kazakov E. A., Vodinchar G. M. “Determination of dynamic modes in a two-mode hereditary dynamo system” 319

Romanov D. V., Romanov K. V., Romanov V. A., Stepanov E. A., Lebedev A. A., Maskaev V. A. “Mathematical modeling of pre-flare signal formation in the solar atmosphere” 334

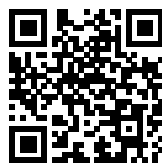
Rusanov M. S. “Analytical formula and numerical calculation of the second harmonic of dynamic susceptibility in concentrated ferrofluids” 347

Filippov G. A. “On the stabilization rate of periodic perturbations of equilibrium states for the one-dimensional Broadwell kinetic equation” 363

Short Communications

Zinchenko A. S., Romanenkov A. M. “Asymptotics of sums with Gaussian kernel and multiplicative coefficients” 381

Saraev L. A., Yuklasova L. A. “Stochastic model for forecasting the dynamics of gross regional product and regional production resources” 390



MSC: 45J05, 47G20, 35A22, 34A30

Solution of systems of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations using the Khalouta integral transform method

A. Khalouta

Université Ferhat Abbas de Sétif 1, Sétif, 19000, Algeria.

Abstract

The Khalouta integral transform is a powerful method for solving various types of equations, including integro-differential equations and integral equations. It can also be applied to initial and boundary value problems associated with ordinary differential equations and partial differential equations with constant coefficients. The main objective of this paper is to derive solutions to systems of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations using the Khalouta integral transform.

To solve such systems using this technique, it is essential to establish and define several key properties of the Khalouta integral transform, which are crucial for deriving the transformation of the Caputo fractional derivative appearing in the systems. Several numerical examples are presented and solved by using the Khalouta integral transform method to demonstrate the applicability of the proposed approach. The results obtained from these numerical examples confirm that the proposed method is highly efficient and provides exact solutions for systems of linear fractional Volterra integro-differential equations in a straightforward manner.

Keywords: Khalouta integral transform, Volterra integro-differential equations, Caputo fractional derivative, exact solution.

Received: 6th January, 2025 / Revised: 9th June, 2025 /Accepted: 18th June, 2025 / First online: 20th June, 2025

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khalouta A. Solution of systems of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations using the Khalouta integral transform method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 207–219. EDN: YHPHPY. DOI: 10.14498/vsgtu2141.

Author's Details:

Ali Khalouta <https://orcid.org/0000-0003-1370-3189>

Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences;
e-mail: ali.khalouta@univ-setif.dz

1. Introduction. Fractional integro-differential equations have wide applications in numerous fields of physics and applied mathematics, including continuum mechanics, geophysics, potential theory, electromagnetism, optimization, renewal theory, kinetic theory, quantum mechanics, radiation, optimal control systems, mathematical economics, communication theory, queuing theory, radiative equilibrium, acoustics, steady-state heat conduction, fluid mechanics, and fracture mechanics. Among these, fractional Volterra integro-differential equations are particularly significant due to their prevalence in approximation theory, computational mathematics, and physical mathematics.

Recent research has explored various methods to analyze fractional integro-differential equations for accurate and reliable solutions. Integral transforms stand out as a prominent approach for solving such mathematical problems. Several integral transforms have proven effective for handling different types of fractional integro-differential equations. For instance:

- In [1], an exact solution for Volterra-type fractional integro-differential equations was proposed using the Elzaki integral transform.
- The Aboodh integral transform was applied in [2] to study analytical solutions of linear and nonlinear dynamical systems of fractional integro-differential equations.
- The Mohand integral transform was employed in [3] to analyze fractional integro-differential equations.
- The Ramadan group integral transform was used in [4] to solve fractional Fredholm-Volterra integro-differential equations.
- The Laplace integral transform facilitated solutions to fourth-order fractional partial integro-differential equations in [5].
- In [6], the Laplace integral transform yielded analytical solutions for a system of Volterra-type integro-fractional differential equations with variable coefficients and multi-time delay.

The objective of this paper is to investigate the efficacy of a novel integral transform method, the Khalouta integral transform, for solving systems of linear fractional Volterra integro-differential equations. The system under consideration is given by:

$$\begin{cases} D^\alpha X_1(t) = f_1(t) + \sum_{j=1}^n \int_0^t K_{1j}(t-s)X_j(s)ds, \\ D^\alpha X_2(t) = f_2(t) + \sum_{j=1}^n \int_0^t K_{2j}(t-s)X_j(s)ds, \\ \vdots \\ D^\alpha X_n(t) = f_n(t) + \sum_{j=1}^n \int_0^t K_{nj}(t-s)X_j(s)ds, \end{cases} \quad (1)$$

subject to the initial conditions

$$X_1^{(k)}(0) = C_{1k}, \quad X_2^{(k)}(0) = C_{2k}, \quad \dots, \quad X_n^{(k)}(0) = C_{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

where $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ are unknown functions to be determined, $K_{ij}(t, s) = K_{ij}(t-s)$ are difference kernels for $i, j = 1, 2, \dots, n$, $f_i(t)$ are real-valued functions

for $i = 1, 2, \dots, n$, and D^α denotes the Caputo fractional derivative of order α with $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \geq 1$.

The Khalouta integral transform is a novel integral transform recently introduced by the author, generalizing several well-known integral transforms including the Laplace transform [7], Sumudu transform [8], ZZ transform [9], ZMA transform [10], Elzaki transform [11], Aboodh transform [12], natural transform [13], and Shehu transform [14]. The Khalouta integral transform offers several key advantages:

- Unit Preservation: It enables direct problem-solving without frequency-domain conversion, particularly valuable in physical sciences where dimensional consistency is crucial;
- Linear Operator Properties: As a linear operator preserving linear functions, it maintains units and dimensions without modification;
- Handling of Initial Conditions and Singularities: The transform is specifically designed to address initial conditions and singularities commonly encountered in practical engineering models;
- Simplified Inversion: The inverse Khalouta transform avoids complex contour integration, offering a more straightforward solution methodology.

This paper is organized as follows. Section 1 presents the introduction. Section 2 provides essential definitions, properties, theorems, and foundational results on fractional calculus and the Khalouta integral transform, which are utilized throughout subsequent sections. Section 3 develops the solution methodology for systems of linear fractional Volterra integro-differential equations (1) with initial conditions (2) using the Khalouta transform. Section 4 demonstrates numerical applications, and Section 5 concludes the paper.

2. Fundamental Definitions and Theorems. This section presents the essential definitions and theorems of fractional calculus and the Khalouta transform, along with their key properties.

DEFINITION 1 [15]. Let $X(t)$ be a continuous function on the interval $[0, T]$, where $T > 0$. The Riemann–Liouville fractional integral operator of order $\alpha \geq 0$ is defined as

$$I^\alpha X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} X(\xi) d\xi, & \alpha > 0, \\ X(t), & \alpha = 0, \end{cases}$$

where $\Gamma(\cdot)$ denotes the Gamma function.

DEFINITION 2 [15]. Let $X(t)$ be a continuous function on $[0, T]$, $T > 0$. The Caputo fractional derivative operator of order $\alpha > 0$ is defined as

$$D^\alpha X(t) = \begin{cases} I^{m-\alpha} X^{(m)}(t), & m - 1 < \alpha < m, \\ X^{(m)}(t), & \alpha = m, \end{cases}$$

where $m = [\alpha] \in \mathbb{N}$.

An important relationship between these operators is given by:

$$I^\alpha D^\alpha X(t) = X(t) - \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0.$$

DEFINITION 3 [16]. Let $X(t)$ be a continuous function of exponential order on $[0, T]$, $T > 0$. The Khalouta integral transform of $X(t)$ is defined as

$$\mathbb{KH}[X(t)] = \mathcal{K}(s, \gamma, \eta) = \frac{s}{\gamma\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{st}{\gamma\eta}\right) X(t) dt,$$

where $s, \gamma, \eta > 0$ are real or complex parameters independent of t .

The inverse Khalouta transform is given by:

$$X(t) = \mathbb{KH}^{-1}[\mathcal{K}(s, \eta, \gamma)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi-i\infty}^{\varphi+i\infty} \frac{1}{s} \exp\left(\frac{st}{\gamma\eta}\right) \mathcal{K}(s, \eta, \gamma) ds, \quad (3)$$

where φ is a real constant and the integral in (3) is evaluated along $s = \varphi$ in the complex plane $s = x + iy$.

The Khalouta integral transform possesses the following fundamental properties.

1. LINEARITY PROPERTY:

$$\mathbb{KH}[\lambda X(t) \pm \mu Y(t)] = \lambda \mathbb{KH}[X(t)] \pm \mu \mathbb{KH}[Y(t)],$$

where λ and μ are nonzero constants.

2. DIFFERENTIATION PROPERTY:

$$\mathbb{KH}[X^{(m)}(t)] = \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^m \mathbb{KH}[X(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{m-k} X^{(k)}(0),$$

where $X^{(m)}(t)$ denotes the m -th derivative of $X(t)$ with respect to t for $m = 0, 1, 2, \dots$

3. CONVOLUTION PROPERTY:

$$\mathbb{KH}[(X * Y)(t)] = \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X(t)] \mathbb{KH}[Y(t)].$$

4. INVERSE TRANSFORM OF ELEMENTARY FUNCTIONS:

$$\begin{aligned} \mathbb{KH}^{-1}[1] &= 1, \\ \mathbb{KH}^{-1}\left[\frac{\gamma\eta}{s}\right] &= t, \\ \mathbb{KH}^{-1}\left[\left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^n\right] &= \frac{t^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbb{KH}^{-1}\left[\left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^\alpha\right] &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad \alpha > -1, \\ \mathbb{KH}^{-1}\left[\frac{s}{s - a\gamma\eta}\right] &= \exp(at), \\ \mathbb{KH}^{-1}\left[\frac{as\gamma\eta}{s^2 + a^2\gamma^2\eta^2}\right] &= \sin(at), \\ \mathbb{KH}^{-1}\left[\frac{s^2}{s^2 + a^2\gamma^2\eta^2}\right] &= \cos(at), \end{aligned}$$

where a is a constant.

THEOREM 1 [17]. The Khalouta integral transform of the Caputo fractional derivative is given by:

$$\mathbb{KH}[D^\alpha X(t)] = \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha \mathbb{KH}[X(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} X^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha \leq m.$$

REMARK 1. The Khalouta integral transform generalizes several well-known integral transforms through appropriate parameter choices:

- 1) For $\gamma = \eta = 1$, we recover the Laplace–Carson transform of the Caputo fractional derivative [18]:

$$\mathbb{LC}[D^\alpha X(t)] = s^\alpha \mathbb{LC}[X(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k} X^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha \leq m;$$

- 2) For $s = \gamma = 1$, we obtain the Sumudu transform of the Caputo fractional derivative [19]:

$$\mathbb{S}[D^\alpha X(t)] = \frac{1}{\eta^\alpha} \mathbb{S}[X(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\eta^{\alpha-k}} X^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha \leq m;$$

- 3) For $\gamma = 1$, we derive the ZZ transform of the Caputo fractional derivative [20]:

$$\mathbb{Z}[D^\alpha X(t)] = \left(\frac{s}{\eta}\right)^\alpha \mathbb{Z}[X(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\eta}\right)^{\alpha-k} X^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha \leq m;$$

- 4) For $s = 1$, we obtain the ZMA transform of the Caputo fractional derivative [10]:

$$\mathbb{Z}_{MA}[D^\alpha X(t)] = \frac{1}{(\gamma\eta)^\alpha} \mathbb{Z}_{MA}[X(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma\eta)^{\alpha-k}} X^{(k)}(0), \quad m-1 < \alpha \leq m.$$

3. Procedure of Khalouta Integral Transform Method. This section presents the methodology for solving systems of linear fractional Volterra integro-differential equations using the Khalouta integral transform.

Consider the general system of linear fractional Volterra integro-differential equations (1), subject to the initial conditions (2).

Applying the Khalouta integral transform to system (1) and using the convolution property yields:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{KH}[D^\alpha X_1(t)] = \mathbb{KH}[f_1(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{1j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)], \\ \mathbb{KH}[D^\alpha X_2(t)] = \mathbb{KH}[f_2(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{2j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)], \\ \vdots \\ \mathbb{KH}[D^\alpha X_n(t)] = \mathbb{KH}[f_n(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{nj}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)]. \end{array} \right. \quad (4)$$

Applying Theorem 1 to the first term of system (4) yields:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha \mathbb{KH}[X_1(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} X_1^{(k)}(0) = \\ \quad = \mathbb{KH}[f_1(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{1j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)], \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha \mathbb{KH}[X_2(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} X_2^{(k)}(0) = \\ \quad = \mathbb{KH}[f_2(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{2j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)], \\ \vdots \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha \mathbb{KH}[X_n(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} X_n^{(k)}(0) = \\ \quad = \mathbb{KH}[f_n(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{nj}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)]. \end{array} \right. \quad (5)$$

Substituting the initial conditions (2) into system (5) gives:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha \mathbb{KH}[X_1(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-k} C_{1k} &= \\ &= \mathbb{KH}[f_1(t)] + \frac{\gamma\eta}{s} \sum_{j=1}^n \mathbb{KH}[K_{1j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)], \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha \mathbb{KH}[X_2(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-k} C_{2k} &= \\ &= \mathbb{KH}[f_2(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{2j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)], \\ &\vdots \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha \mathbb{KH}[X_n(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-k} C_{nk} &= \\ &= \mathbb{KH}[f_n(t)] + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{nj}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)]. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Simplifying system (6) results in:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha - \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{11}(t)] \right) \mathbb{KH}[X_1(t)] - \sum_{j=2}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{1j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)] &= \\ &= \mathbb{KH}[f_1(t)] + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-k} C_{1k}, \\ \left(\left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha - \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{22}(t)] \right) \mathbb{KH}[X_2(t)] - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{2j}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)] &= \\ &= \mathbb{KH}[f_2(t)] + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-k} C_{2k}, \\ &\vdots \\ \left(\left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha - \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{nn}(t)] \right) \mathbb{KH}[X_n(t)] - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{nj}(t)] \mathbb{KH}[X_j(t)] &= \\ &= \mathbb{KH}[f_n(t)] + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-k} C_{nk}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

The solution of system (7) is obtained through Cramer's rule as follows:

$$\mathbb{KH}[X_i(t)] = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

where Δ is the determinant of the coefficient matrix:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

with matrix elements

$$a_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha - \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{ii}(t)], & i = j, \\ -\frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[K_{ij}(t)], & i \neq j, \end{cases}$$

and Δ_i are the determinants formed by replacing the i -th column of Δ with the column vector

$$\begin{pmatrix} \mathbb{KH}[f_1(t)] + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} C_{1k} \\ \mathbb{KH}[f_2(t)] + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} C_{2k} \\ \vdots \\ \mathbb{KH}[f_n(t)] + \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^{\alpha-k} C_{nk} \end{pmatrix}.$$

Applying the inverse Khalouta transform to $\mathbb{KH}[X_i(t)]$ yields the final solution for each $X_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Numerical Applications. This section demonstrates the Khalouta integral transform method through a concrete example of fractional integro-differential equations.

EXAMPLE 1. Consider the system of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations:

$$\begin{cases} D^\alpha X_1(t) = 2t^2 + \int_0^t (t-s)X_1(s)ds + \int_0^t (t-s)X_2(s)ds, \\ D^\alpha X_2(t) = -3t^2 - \frac{1}{10}t^5 + \int_0^t (t-s)X_1(s)ds - \int_0^t (t-s)X_2(s)ds, \end{cases} \quad (8)$$

where $0 < \alpha \leq 1$, with initial conditions

$$X_1(0) = 1, \quad X_2(0) = 1.$$

Applying the Khalouta transform yields:

$$\begin{cases} \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha \mathbb{KH}[X_1(t)] - \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha = 4\left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^2 + \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^2 \mathbb{KH}[X_1(t)] + \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^2 \mathbb{KH}[X_2(t)], \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha \mathbb{KH}[X_2(t)] - \left(\frac{s}{\gamma\eta}\right)^\alpha = \\ \quad = -6\left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^2 - 12\left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^5 + \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^2 \mathbb{KH}[X_1(t)] - \left(\frac{\gamma\eta}{s}\right)^2 \mathbb{KH}[X_2(t)]. \end{cases}$$

Solving the last system gives:

$$X_1(t) = 1 + 6 \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}, \quad X_2(t) = 1 - 6 \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}.$$

For the integer case ($\alpha = 1$), we recover the exact solution:

$$X_1(t) = 1 + t^3, \quad X_2(t) = 1 - t^3,$$

which agrees with known results obtained via Laplace transform methods [21].

EXAMPLE 2. Consider the following system of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations:

$$\begin{cases} D^\alpha X_1(t) = -t^3 - t^4 + 3 \int_0^t X_2(s)ds + 4 \int_0^t X_3(s)ds, \\ D^\alpha X_2(t) = 2 + t^2 - t^4 - 2 \int_0^t X_1(s)ds + 4 \int_0^t X_3(s)ds, \\ D^\alpha X_3(t) = 6t - t^2 + t^3 + 2 \int_0^t X_1(s)ds - 3 \int_0^t X_2(s)ds, \end{cases} \quad (9)$$

where $1 < \alpha \leq 2$, subject to the initial conditions

$$X_1(0) = 0, \quad X_1'(0) = 1; \quad X_2(0) = X_2'(0) = 0; \quad X_3(0) = X_3'(0) = 0.$$

Applying the Khalouta integral transform to system (9) yields:

$$\begin{cases} \mathbb{KH}[D^\alpha X_1(t)] = \mathbb{KH}[-t^3 - t^4] + \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[3] \mathbb{KH}[X_2(t)] + \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[4] \mathbb{KH}[X_3(t)], \\ \mathbb{KH}[D^\alpha X_2(t)] = \mathbb{KH}[2 + t^2 - t^4] - \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[2] \mathbb{KH}[X_1(t)] + \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[4] \mathbb{KH}[X_3(t)], \\ \mathbb{KH}[D^\alpha X_3(t)] = \mathbb{KH}[6t - t^2 + t^3] + \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[2] \mathbb{KH}[X_1(t)] - \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[3] \mathbb{KH}[X_2(t)]. \end{cases} \quad (10)$$

Using Theorem 1, we transform system (10) to

$$\begin{cases} \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha \mathbb{KH}[X_1(t)] - \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^{\alpha-1} = \\ \quad = -6 \left(\frac{\gamma\eta}{s} \right)^3 - 12 \left(\frac{\gamma\eta}{s} \right)^4 + 3 \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X_2(t)] + 4 \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X_3(t)], \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha \mathbb{KH}[X_2(t)] = \\ \quad = 2 + 2 \left(\frac{\gamma\eta}{s} \right)^2 - 12 \left(\frac{\gamma\eta}{s} \right)^4 - 2 \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X_1(t)] + 4 \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X_3(t)], \\ \left(\frac{s}{\gamma\eta} \right)^\alpha \mathbb{KH}[X_3(t)] = \\ \quad = 6 \frac{\gamma\eta}{s} - 2 \left(\frac{\gamma\eta}{s} \right)^2 + 6 \left(\frac{\gamma\eta}{s} \right)^3 + 2 \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X_1(t)] - 3 \frac{\gamma\eta}{s} \mathbb{KH}[X_2(t)]. \end{cases}$$

Solving the last system gives:

$$X_1(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad X_2(t) = 2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad X_3(t) = 6 \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

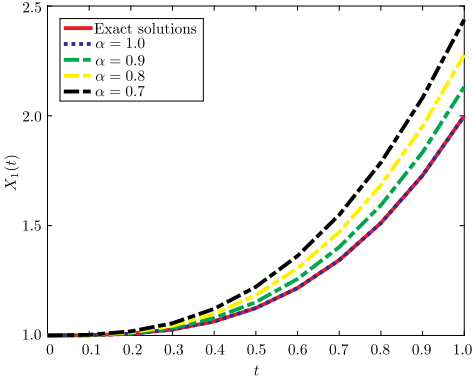


Figure 1. Behavior of $X_1(t)$ for different fractional orders α compared to the exact solution ($\alpha = 1$)

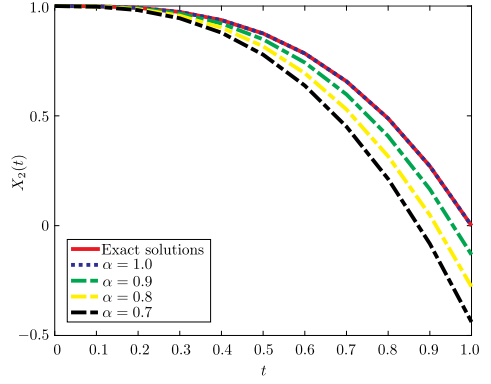


Figure 2. Behavior of $X_2(t)$ for different fractional orders α compared to the exact solution ($\alpha = 1$)

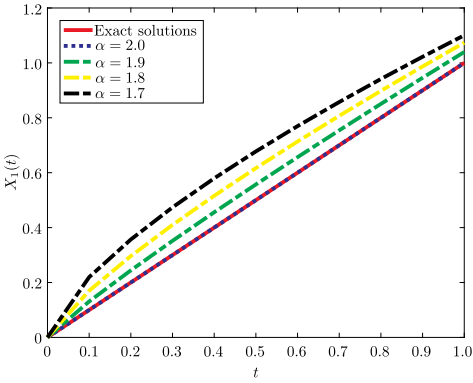


Figure 3. Behavior of $X_1(t)$ for different fractional orders α compared to the exact solution ($\alpha = 2$)

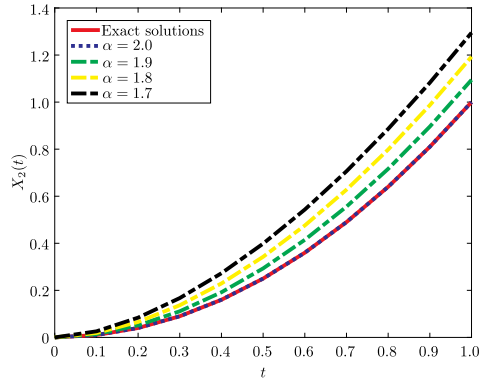


Figure 4. Behavior of $X_2(t)$ for different fractional orders α compared to the exact solution ($\alpha = 2$)

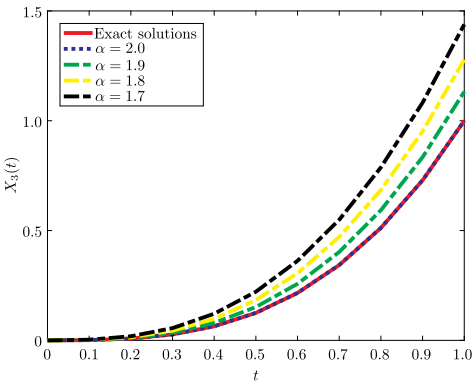


Figure 5. Behavior of $X_3(t)$ for different fractional orders α compared to the exact solution ($\alpha = 2$)

For $\alpha = 2$, we obtain the exact solution:

$$X_1(t) = t, \quad X_2(t) = t^2, \quad X_3(t) = t^3,$$

which matches the known solution obtained via Laplace transform methods [21].

REMARK 2. Figures 1–5 demonstrate the behavior of the obtained solutions for different values of the fractional order α , comparing them with exact solutions in two applications of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equation systems solved via the Khalouta integral transform method. Numerical simulations confirm that the fractional solutions converge precisely to the exact solutions when α approaches 1 for system (8) and 2 for system (9). All computations were performed using MATLAB R2016a for symbolic computation.

5. Conclusion. This study has demonstrated the successful application of the Khalouta integral transform method for solving systems of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations. The numerical applications and accompanying graphical representations have validated both the accuracy and effectiveness of the proposed approach. Our results establish the Khalouta transform as a powerful tool for obtaining solutions to systems of linear fractional integro-differential equations, making a significant contribution to this field of research.

The presented findings not only advance current theoretical understanding but also create new opportunities for applications across various scientific and mathematical disciplines. Future research directions will focus on extending this methodology to nonlinear Caputo–Volterra–Fredholm integro-differential equations with complex kernels, potentially combining the Khalouta integral transform with established techniques such as the Adomian decomposition method, the homotopy perturbation method, the variational iteration method, or the differential transform method to develop more robust solution frameworks for these challenging problems.

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authors' contributions. The author is solely responsible for the content and preparation of this manuscript. The final version has been reviewed and approved by the author.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Singh Y., Gill V., Singh J., et al. On the Volterra-type fractional integro-differential equations pertaining to special functions, *Fractal Fract.*, 2020, vol. 4, no. 3, 33. DOI: <https://doi.org/10.3390/fractalfract4030033>.
2. Khan Q., Suen A., Khan H. Application of an efficient analytical technique based on Aboodh transformation to solve linear and non-linear dynamical systems of integro-differential equations, *Part. Differ. Equ. Appl. Math.*, 2024, vol. 11, 100848. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100848>.
3. Gunasekar T., Raghavendran P. The Mohand transform approach to fractional integro-differential equations, *J. Comput. Anal. Appl.*, 2024, vol. 33, no. 1, pp. 358–371. <https://eudoxuspress.com/index.php/pub/article/view/29>.
4. Matoog R. T., Ramadan M. A., Arafa H. M. A hybrid numerical technique for solving fractional Fredholm–Volterra integro-differential equations using Ramadan group integral transform and Hermite polynomials, *Alexandria Eng. J.*, 2024, vol. 108, pp. 889–896. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aej.2024.09.025>.

5. Dhunde R. R. 3712–3718, *Indian J. Sci. Technol.*, 2024, vol. 17, no. 36. DOI: <https://doi.org/10.17485/IJST/v17i36.2005>.
6. Amin M. B. M., Ahmad S. S. Laplace transform for solving system of integro-fractional differential equations of Volterra type with variable coefficients and multi-time delay, *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 5, 984. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym14050984>.
7. Donolato D. Analytical and numerical inversion of the Laplace–Carson transform by a differential method, *Comput. Phys. Commun.*, 2002, vol. 145, no. 2, pp. 298–309. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0010-4655\(02\)00281-3](https://doi.org/10.1016/S0010-4655(02)00281-3).
8. Belgacem F. B. M., Karaballi A. A. Sumudu transform fundamental properties, investigations and applications, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 2006, vol. 2006, 91083. DOI: <https://doi.org/10.1155/JAMSA/2006/91083>.
9. Zafar Z. U. A. ZZ transform method, *Int. J. Adv. Eng. Glob. Technol.*, 2016, vol. 4, no. 1, pp. 1605–1611.
10. Alwan Z. M. (ZMA)-transform method, *J. Interdiscip. Math.*, 2021, vol. 24, no. 7, pp. 1841–1849. DOI: <https://doi.org/10.1080/09720502.2021.1963520>.
11. Elzaki T. M. The new integral transform “Elzaki Transform”, *Glob. J. Pure Appl. Math.*, 2011, vol. 7, no. 1, pp. 57–64.
12. Aboodh K. S. The new integral transform “Aboodh Transform”, *Glob. J. Pure Appl. Math.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 35–43.
13. Belgacem F. B. M., Silambarasan R. Theory of natural transform, *Math. Eng. Sci. Aerosp.*, 2012, vol. 3, no. 1, pp. 99–124.
14. Maitama S., Zhao W. New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations, *Int. J. Anal. Appl.*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 167–190, arXiv:1904.11370 [math.GM]. DOI: <https://doi.org/10.28924/2291-8639-17-2019-167>.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. EDN: YZECAT. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5).
16. Khalouta A. A new exponential type kernel integral transform: Khalouta transform and its applications, *Math. Montisnigri*, 2023, vol. 57, pp. 5–23. DOI: <https://doi.org/10.20948/mathmontis-2023-57-1>.
17. Khalouta A. Khalouta transform via different fractional derivative operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 3, pp. 407–425. EDN: QNZQSC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2082>.
18. Kumar P., Qureshi S. Laplace-Carson integral transform for exact solutions of non-integer order initial value problems with Caputo operator, *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, 2020, vol. 19, no. 1, pp. 57–66. DOI: <https://doi.org/10.17512/jamcm.2020.1.05>.
19. Aibinu M. O., Mahomed F. M., Jorgensen P. E. Solutions of fractional differential models by using Sumudu transform method and its hybrid, *Part. Differ. Equ. Appl. Math.*, 2024, vol. 11, 100872. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100872>.
20. Zafar Z. U. A. Application of ZZ transform method on some fractional differential equations, *Int. J. Adv. Eng. Glob. Technol.*, 2016, vol. 4, no. 1, pp. 1355–1363.
21. Wazwaz A. M. *Linear and Nonlinear Integral Equations. Methods and Applications*. Berlin, Springer, 2011, xviii+639 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3>.

УДК 519.642.2

Решение систем линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра дробного порядка с производной Капуто методом интегрального преобразования Халута

A. Khalouta

Université Ferhat Abbas de Sétif 1, Sétif, 19000, Algeria.

Аннотация

Интегральное преобразование Халуты представляет собой мощный метод решения различных типов уравнений, включая интегро-дифференциальные уравнения и интегральные уравнения. Оно также может быть применено к начальным и краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Основная цель данной работы — получение решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра дробного порядка с производной Капуто с использованием интегрального преобразования Халуты.

Для решения таких систем данным методом необходимо установить и определить ключевые свойства интегрального преобразования Халуты, которые играют важнейшую роль при выводе преобразования для дробной производной Капуто, входящей в системы. В работе представлены и решены несколько численных примеров с применением метода интегрального преобразования Халуты, демонстрирующие применимость предложенного подхода. Полученные результаты подтверждают, что данный метод обладает высокой эффективностью и позволяет находить точные решения систем линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра дробного порядка прямым способом.

Ключевые слова: интегральное преобразование Халуты, интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, дробная производная Капуто, точное решение.

Получение: 6 января 2025 г. / Исправление: 9 июня 2025 г. /

Принятие: 18 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 20 июня 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Khalouta A. Solution of systems of linear Caputo fractional Volterra integro-differential equations using the Khalouta integral transform method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 207–219. EDN: YNHPY. DOI: 10.14498/vsgtu2141.

Сведения об авторе

Ali Khalouta  <https://orcid.org/0000-0003-1370-3189>

Lab. of Fundamental Mathematics and Numerical; Dept. of Mathematics; Faculty of Sciences;
e-mail: ali.khalouta@univ-setif.dz



УДК 519.642.2

Разностные схемы повышенного порядка точности для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода

М. Х. Бештоков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Исследуются начально-краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода. Для численного решения рассматриваемых задач построены разностные схемы высокого порядка точности. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в разностной форме. Из установленных оценок следует единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$. Проведены численные эксперименты для тестовых примеров, подтверждающие теоретические результаты работы.

Ключевые слова: параболическое уравнение, первая начально-краевая задача, нагруженное уравнение, интегральное уравнение, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость.

Получение: 6 января 2025 г. / Исправление: 12 апреля 2025 г. /
Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 24 июня 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бештоков М. Х. Разностные схемы повышенного порядка точности для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 220–240. EDN: EORDFG. DOI: 10.14498/vsgtu2142.

Сведения об авторе

Мурат Хамидбиевич Бештоков <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; отд. вычислительных методов; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Введение. Многие важные задачи математической физики и биологии [1], включая задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод [2], моделирования процессов переноса частиц [3], тепломассопереноса с сосредоточенными источниками (стоками) переносимой субстанции, фильтрации жидкости в пористых средах [4], исследования обратных задач [5], а также решения задач оптимального управления агроэкосистемами [6], приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений в частных производных.

Термин «нагруженное уравнение» был впервые введен в работе [7]. Современное общепринятое определение нагруженных уравнений было предложено А. М. Нахушевым в [8], где дано наиболее общее определение и подробная классификация различных типов нагруженных уравнений: дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных, а также рассмотрены их многочисленные приложения.

Исследованию краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений соболевского типа посвящены работы [9–11]. В исследованиях [12–14] изучены математические модели, учитывающие эффекты памяти в диффузионных процессах, возникающие при моделировании вязкоупругих свойств неньютоновских жидкостей [12, 13] и являющиеся следствием модифицированного закона Фурье для анизотропных неоднородных сред [14]. В работе [15] рассмотрены диффузионные модели с интегральными членами в граничных потоках.

Численным методам решения краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных посвящены исследования [16–20]. Разработке разностных схем повышенного порядка точности посвящены работы [21–24].

Настоящая работа посвящена разностным методам решения начально-краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями первого рода. Для рассматриваемых задач на равномерной сетке построены разностные схемы повышенного порядка точности. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки решений разностных задач, из которых следуют единственность решения и его непрерывная зависимость от входных данных, а также сходимость решений разностной задачи к решениям исходной дифференциальной задачи со скоростью $O(h^4 + \tau^2)$ в сеточной норме $W_2^1(\omega_h)$. Проведены численные эксперименты для тестовых примеров, подтверждающие теоретические результаты исследования. Данная работа развивает исследования автора в данном направлении [15, 20, 24, 25], посвященные разностным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности и Аллера.

1. Постановка задачи А. В прямоугольной области

$$\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности с интегральным слагаемым вольтерровского типа:

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \int_0^t \rho(x, t, \xi) u(x, \xi) d\xi + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} 0 < c_0 \leq k(x, t), \quad \frac{1}{k(x, t)} \leq c_1, \quad \left| \left(\frac{1}{k(x, t)} \right)_x \right|, |\rho(x, t, t)|, |\rho_x| \leq c_2; \\ u(x, t) \in C^{6,3}(\overline{D}), \quad k(x, t) \in C^{5,1}(\overline{D}), \quad \rho(x, t, t), f(x, t) \in C^{4,1}(\overline{D}). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для численного решения задачи (1)–(3) применяется метод конечных разностей. Введем равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = l/N\}, \\ \bar{\omega}_\tau &= \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, j_0}, \quad \tau = T/j_0\}. \end{aligned}$$

Дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему с порядком аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$ [21, 26]:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^\sigma)_x + \sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2, s} y_i^s \bar{\tau} + \varphi, \quad (5)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau, \quad (6)$$

$$y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_i^j &= a(x_i, t_j) = \frac{1}{\frac{1}{6}p_{i-1} + \frac{2}{3}p_{i-1/2} + \frac{1}{6}p_i}, \\ p &= p(x, t) = k^{-1}(x, t), \quad x_{i-1/2} = x_i - h/2, \\ y &= y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}), \quad y_{i\pm 1}^j = y(x_i \pm h, t_j), \\ y_{\bar{x}} &= \frac{y - y_{i-1}}{h}, \quad y_x = \frac{y_{i+1} - y}{h}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y^j}{\tau}, \\ \bar{\rho}y &= \rho y + \frac{h^2}{12} \Lambda p \rho y = \left(\rho y + \frac{h^2}{12} (a(p \rho y)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+1/2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2 p}{12 \tau}, \\ \varphi_i^j &= \left(f + \frac{h^2}{12} (a(p f)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+1/2}, \quad y^{(1/2)} = \frac{1}{2} Y, \quad Y = (y^{j+1} + y^j), \\ \sum_{s=0}^{j+1/2} y^s \bar{\tau} &= \sum_{s=1}^{j-1} y^s \tau + 0.5 \tau (y^0 + y^j + y^{j+1/2}) = \sum_{s=1}^j y^s \tau + 0.5 \tau y^0, \end{aligned}$$

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \tau/2, & s = 0, j, j+1/2, \\ \tau, & s \neq 0, j, j+1/2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \bar{\tau} = \begin{cases} \tau/2, & s = 0, \\ \tau, & s \neq 0, \end{cases}$$

где j_0 — количество узлов сетки на отрезке $[0, T]$, N — количество узлов сетки на отрезке $[0, l]$.

Для получения априорной оценки применим метод энергетических неравенств. Введем скалярные произведения и норму:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v) = \sum_{i=1}^N u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u(\cdot, t)\|_0^2 = \|u\|_0^2.$$

Справедлива следующая лемма [26, р. 120].

ЛЕММА. Для произвольной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$$

и удовлетворяющей граничным условиям $y(0) = y(l) = 0$, выполняются следующие оценки:

$$\frac{h^2}{4} \|y_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y\|^2 \leq \frac{l^2}{8} \|y_{\bar{x}}\|^2.$$

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Перепишем уравнение (5) в виде

$$y_t = \frac{1}{2} (aY_{\bar{x}})_x - \frac{h^2}{12} (a(py_t)_{\bar{x}})_x + \sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} + \varphi. \quad (8)$$

Умножим уравнение (8) скалярно на $Y = y^j + y^{j+1}$:

$$(y_t, Y) = \frac{1}{2} ((aY_{\bar{x}})_x, Y) - \frac{h^2}{12} ((a(py_t)_{\bar{x}})_x, Y) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) + (\varphi, Y). \quad (9)$$

Преобразуем слагаемые в (9), используя разностную формулу Грина, лемму и неравенство Коши с параметром ε :

$$(y_t, Y) = (y_t, y^{j+1} + y^j) = \frac{1}{\tau} (y^{j+1} - y^j, y^{j+1} + y^j) = (\|y^j\|_0^2)_t;$$

$$\left(\frac{1}{2} (aY_{\bar{x}})_x, Y \right) = -\frac{1}{2} (aY_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}}) \geq -\frac{c_0}{2} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2;$$

$$\begin{aligned} -\frac{h^2}{12} ((a(py_t)_{\bar{x}})_x, Y) &= \frac{h^2}{12} (a(py_t)_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}}) = \frac{h^2}{12} (a[p_{\bar{x}} y_t + p^{(-1)} y_{t\bar{x}}], Y_{\bar{x}}) = \\ &= \frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}} y_t, Y_{\bar{x}}) + \frac{h^2}{12} (ap^{(-1)} y_{t\bar{x}}, Y_{\bar{x}}) \leq \\ &\leq \|y_t\|_0^2 + \frac{h^4}{144} M_1 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{h^2}{12} M_2 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \\ &\leq \|y_t\|_0^2 + \frac{h^2}{36} M_1 \|Y\|_0^2 + \frac{h^2}{12} M_2 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) = \\
 & = \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) + \left(\frac{h^2}{12} \left(a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}} \right)_x, Y \right) = \\
 & = \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) - \left(\frac{h^2}{12} a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\
 & \leq \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y \right) - \left(\frac{h^2}{12} a p_{\bar{x}} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, Y_{\bar{x}} \right) - \\
 & - \left(\frac{h^2}{12} a p^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_i^{j+1/2,s})_{\bar{x}} y_i^s \bar{\tau}, Y_{\bar{x}} \right) - \left(\frac{h^2}{12} a p^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau}, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\
 & \leq \left(\frac{1}{2}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \left(1, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{\bar{x}}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \\
 & + \left(\frac{h^2}{4}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \|Y\|_0^2 + M_3 \frac{h^2}{4} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \\
 & \leq M_4 \|Y\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_i^{j+1/2,s})^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+1/2} y^2 \bar{\tau} \right) + \\
 & + \left(1, \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_{\bar{x}}^{j+1/2,s})^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+1/2} y^2 \bar{\tau} \right) + \left(\frac{h^2}{4}, \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_{i-1}^{j+1/2,s})^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+1/2} y_{\bar{x}}^2 \bar{\tau} \right) \leq \\
 & \leq M_4 \|Y\|_0^2 + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} (1, y^2) \bar{\tau} + M_6 \sum_{s=0}^{j+1/2} \left(\frac{h^2}{4}, y_{\bar{x}}^2 \right) \bar{\tau} \leq M_4 \|Y\|_0^2 + \\
 & + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_6 \frac{h^2}{4} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} \leq M_4 \|Y\|_0^2 + M_7 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau}; \\
 & (\varphi, Y) \leq \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2} \|Y\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Здесь и далее через M_i ($i = 1, 2, \dots$) обозначены положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи.

Учитывая полученные выше преобразования, из (9) получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & (\|y^j\|_0^2)_t - \frac{h^2}{12} M_2 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \frac{c_0}{2} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \\
 & \leq \|y_t\|_0^2 + M_8 \|Y\|_0^2 + M_7 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (10). Для этого умножим (1) скалярно на y_t :

$$(y_t, y_t) = \frac{1}{2}((aY_{\bar{x}})_x, y_t) - \frac{h^2}{12}((a(py_t)_{\bar{x}})_x, y_t) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) + (\varphi, y_t). \quad (11)$$

Оценим суммы, входящие в тождество (11):

$$(y_t, y_t) = \|y_t\|_0^2;$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}(aY_{\bar{x}})_x, y_t \right) &= -\frac{1}{2}(aY_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}) = \\ &= -\frac{1}{2\tau}(a, (y_{\bar{x}}^{j+1} + y_{\bar{x}}^j)(y_{\bar{x}}^{j+1} - y_{\bar{x}}^j)) \geq -\frac{c_0}{2}(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{h^2}{12}((a(py_t)_{\bar{x}})_x, y_t) &= \frac{h^2}{12}(a(py_t)_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t}) = \frac{h^2}{12}(a[p_{\bar{x}}y_{t,i-1} + py_{t\bar{x}}], y_{\bar{x}t}) = \\ &= \frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1}y_{\bar{x}t}) + \frac{h^2}{12}(1, y_{\bar{x}t}^2) \leq \frac{h^2}{12}(ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1}y_{\bar{x}t}) + \frac{1}{3}\|y_t\|_0^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) &= \\ &= \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) + \left(\frac{h^2}{12} \left(a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}} \right)_x, y_t \right) = \\ &= \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) - \left(\frac{h^2}{12} a \left(p \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)_{\bar{x}}, y_{\bar{x}t} \right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_t \right) - \left(\frac{h^2}{12} ap_{\bar{x}} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau}, y_{\bar{x}t} \right) - \\ &- \left(\frac{h^2}{12} ap^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} (\rho_i^{j+1/2,s})_{\bar{x}} y_i^s \bar{\tau}, y_{\bar{x}t} \right) - \left(\frac{h^2}{12} ap^{(-1)} \sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau}, y_{\bar{x}t} \right) \leq \\ &\leq \left(M_9^\varepsilon, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_i^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \left(M_{10}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{\bar{x}}^{j+1/2,s} y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \\ &+ \left(\frac{h^2}{12} M_{11}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} \rho_{i-1}^{j+1/2,s} y_{\bar{x}}^s \bar{\tau} \right)^2 \right) + \varepsilon \|y_t\|_0^2 + \frac{h^2}{12} \|y_{\bar{x}t}\|_0^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right) \|y_t\|_0^2 + M_{12}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} (1, y^2) \bar{\tau} + M_{13} \sum_{s=0}^{j+1/2} \left(\frac{h^2}{12}, y_{\bar{x}}^2\right) \bar{\tau} \leq \\
 &\leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right) \|y_t\|_0^2 + M_{12}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{13} \frac{h^2}{4} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} \leq \\
 &\leq \left(\varepsilon + \frac{1}{3}\right) \|y_t\|_0^2 + M_{14}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau}; \\
 &(\varphi, y_t) \leq \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{6} \|y_t\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Учитывая полученные преобразования, из (11) находим

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{1}{6} - \varepsilon\right) \|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \\
 &\leq \frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1} y_{\bar{x}t}) + M_{14}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (12). В этих целях рассмотрим отдельно неравенство

$$-(y_i - y_{i-1})^2 \leq 0,$$

которое можно переписать в виде

$$-y_i^2 + 2y_i y_{i-1} - y_{i-1}^2 \leq 0. \quad (13)$$

Из (13) получаем оценку

$$hy_{i-1} y_{\bar{x}} \leq \frac{1}{2} y_i^2.$$

Следовательно, для первого слагаемого в (12) имеем

$$\frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}}, y_{t,i-1} y_{\bar{x}t}) \leq \frac{h}{12} M_{15} \|y_t\|_0^2. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), получаем

$$\left(\frac{1}{6} - \varepsilon - \frac{h}{12} M_{15}\right) \|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq M_{14}^\varepsilon \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{3}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (15)$$

Выбирая параметры $\varepsilon = 1/12$ и $h \leq h_1 = 1/(2M_{15})$, из (15) находим

$$\|y_t\|_0^2 + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq M_{15} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{16} \|\varphi\|_0^2. \quad (16)$$

Используя оценку (16) в неравенстве (10), получаем

$$\begin{aligned}
 (\|y\|_0^2)_t + \left(1 - \frac{h^2}{12}M_2\right)(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \frac{c_0}{4}\|Y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\
 &\leq M_{17}\|Y\|_0^2 + M_{18} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{19}\|\varphi\|_0^2. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (17) следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{j+1/2} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} = \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \tau + 0.5\tau \|y^j\|_0^2 \leq 2 \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \tau. \quad (18)$$

Принимая $h^2 \leq h_2^2 = 1/M_2$ и подставляя (18) в (17), окончательно получаем

$$(\|y\|_0^2)_t + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{20}\|Y\|_0^2 + M_{21} \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \tau + M_{22}\|\varphi\|_0^2. \quad (19)$$

Умножим обе части (19) на τ и просуммируем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned}
 \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq M_{20} \sum_{j'=0}^j \|Y^{j'}\|_0^2 \tau + \\
 + M_{21} \sum_{j'=0}^j \sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2 \tau + M_{22} &\left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (20). Используя неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{j'=0}^j \|Y\|_0^2 \tau &= \sum_{j'=0}^j \|y^{j'+1} + y^{j'}\|_0^2 \tau \leq 2 \sum_{j'=0}^j (\|y^{j'+1}\|_0^2 + \|y^{j'}\|_0^2) \tau = \\
 &= 2 \sum_{j'=0}^j \|y^{j'+1}\|_0^2 \tau + 2 \sum_{j'=0}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau = 2 \sum_{j'=1}^{j+1} \|y^{j'}\|_0^2 \tau + 2 \sum_{j'=0}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau = \\
 &= 2\|y^{j+1}\|_0^2 + 2\|y^0\|_0^2 + 4 \sum_{j'=1}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Для двойной суммы имеем оценку

$$\sum_{j'=0}^j \sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2 \tau \leq T \sum_{j'=0}^j \|y^{j'}\|_0^2 \tau. \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (20), получаем

$$(1 - 2M_{20}\tau)\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq \\ \leq 4M_{20} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{23} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \quad (23)$$

Выбирая шаг $\tau \leq \tau_0 = 1/(4M_{20})$, из (23) находим

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq \\ \leq M_{24} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{25} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \quad (24)$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла [27, лемма 4, с. 171] к (24), получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_{26} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right).$$

Учитывая последнее, из (24) получаем окончательную априорную оценку:

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq \\ \leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right), \quad (25)$$

где $M(T) = \text{const} > 0$ не зависит от параметров сетки h и τ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия гладкости (4). Тогда существуют $\tau_0 > 0$ и $h_0 > 0$, зависящие от констант c_0, c_1, c_2 , такие что при $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$, $h \leq h_0(c_0, c_1, c_2) = \min\{h_1, h_2\}$ разностная схема (5)–(7) устойчива по правой части и начальным данным. При этом для решения задачи справедлива априорная оценка (25) на каждом временном слое в смысле нормы $\|y\|_1^2 = \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$.

Из априорной оценки (25) следует единственность решения разностной задачи (5)–(7) и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи.

Введем следующие обозначения: $u(x, t)$ — решение исходной дифференциальной задачи (1)–(3); $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (5)–(7).

Для оценки точности разностной схемы (5)–(7) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Подстановка $y = z + u$ в разностные соотношения (5)–(7) приводит к задаче для погрешности аппроксимации:

$$z_t = (az_{\bar{x}}^\sigma)_x + \sum_{s=0}^{j+1/2} \bar{\rho}_{i,s}^j z_i^s \bar{\tau} + \Psi, \quad (26)$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z(x_i, 0) = 0, \quad (27)$$

где величина $\Psi = O(h^4 + \tau^2)$ характеризует погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (5)–(7) в классе решений $u(x, t)$ исходной задачи.

Применение априорной оценки (25) к задаче (26), (27) дает следующую оценку погрешности:

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=0}^j \|\Psi^{j'}\|_0^2 \tau, \quad (28)$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от h и τ .

С учетом (28) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия, при которых $\|\Psi\| = O(h^4 + \tau^2)$, и условия ограниченности (4). Тогда разностная схема (5)–(7) при независимом стремлении h и τ к нулю сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) в смысле нормы

$$\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$$

на каждом слое так, что при достаточно малых h и τ имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(h^4 + \tau^2), \quad \tau \leq \tau_0, \quad h \leq h_0 = \min\{h_1, h_2\},$$

где константа $M > 0$ не зависит от выбора сетки.

3. Постановка задачи Б. В прямоугольной области

$$\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

рассмотрим нагруженное уравнение теплопроводности, заменяющее уравнение (1):

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \sum_{s=1}^m q_s(x, t) u(x_s, t) + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (29)$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям

$$|q_s(x, t)|, |q_{s,x}(x, t)| \leq c_2, \quad s = 1, 2, \dots, m; \quad q_s(x, t) \in C^{4,1}(\bar{D}), \quad (30)$$

а x_s ($s = 1, 2, \dots, m$) представляют собой произвольные фиксированные точки интервала $(0, l)$.

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы. На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (2), (3), (29) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$:

$$y_t = (ay_{\bar{x}}^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s + \varphi, \quad (31)$$

$$y_0 = y_N = 0, \quad t_j \in \bar{\omega}_\tau, \quad (32)$$

$$y(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (33)$$

где

$$x_{i_s} \leq x_s \leq x_{i_{s+1}}, \quad \bar{d}_{s,i}^j y = \left(d_s y + \frac{h^2}{12} (a(p d_s y)_{\bar{x}})_x \right)_i^{j+1/2}, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} p,$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_s = & \frac{(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_{s+1}})(x_s - x_{i_{s+2}})}{-6h^3} y_{i_{s-1}} + \\ & + \frac{(x_s - x_{i_{s-1}})(x_s - x_{i_{s+1}})(x_s - x_{i_{s+2}})}{2h^3} y_{i_s} + \\ & + \frac{(x_s - x_{i_{s-1}})(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_{s+2}})}{-2h^3} y_{i_{s+1}} + \\ & + \frac{(x_s - x_{i_{s-1}})(x_s - x_{i_s})(x_s - x_{i_{s+1}})}{6h^3} y_{i_{s+2}}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем считать, что $h < \min\{x_1, l - x_m\}$.

Найдем априорную оценку, используя метод энергетических неравенств.

Перепишем (31) в виде

$$y_t = \frac{1}{2} (a Y_{\bar{x}})_x - \frac{h^2}{12} (a(p y_t)_{\bar{x}})_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s + \varphi. \quad (34)$$

Умножая (34) скалярно на $Y = y^j + y^{j+1}$, получим

$$(y_t, Y) = \frac{1}{2} ((a Y_{\bar{x}})_x, Y) - \frac{h^2}{12} ((a(p y_t)_{\bar{x}})_x, Y) - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, Y \right) + (\varphi, Y). \quad (35)$$

После подробных преобразований (аналогичных (9), (10)) с учетом (32) и оценки

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, Y \right) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m d_s \bar{Y}_s, Y \right) - \left(\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m (a(p d_s \bar{Y}_s)_{\bar{x}})_x, Y \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s (d_s, Y) + \left(\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m a(p d_s)_{\bar{x}} \bar{Y}_s, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^m \left(\frac{1}{4} (\bar{Y}_s)^2 + \frac{c_2^2}{4} (1, Y)^2 \right) + \left(\frac{h^2}{24} M_1 \sum_{s=1}^m Y_s, Y_{\bar{x}} \right) \leq \\ &\leq M_2 \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s^2 + \frac{m l c_2^2}{4} (1, Y^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_1^2, \left(\sum_{s=1}^m Y_s \right)^2 \right) + \left(\frac{h^2}{48}, Y_{\bar{x}}^2 \right) \leq \\ &\leq M_3 \left(\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|Y\|_0^2 \right) + \frac{m l c_2^2}{4} (1, Y^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_4, \sum_{s=1}^m Y_s^2 \right) + \frac{h^2}{48} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon M_5 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{h^2}{48} M_6 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_7^\varepsilon \|Y\|_0^2 \leq \varepsilon M_5 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_8^\varepsilon \|Y\|_0^2$$

из (35) получаем

$$\begin{aligned} (\|y^j\|_0^2)_t - \frac{h^2}{12} M_9 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \left(\frac{c_0}{2} - \varepsilon M_5\right) \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\ &\leq \|y_t\|_0^2 + M_8^\varepsilon \|Y\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Выбирая $\varepsilon = c_0/(4M_5)$, из (36) получаем

$$(\|y\|_0^2)_t - \frac{h^2}{12} M_9 (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \frac{c_0}{4} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \|y_t\|_0^2 + M_{10} \|Y\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (37)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (37). Для этого умножим (31) скалярно на y_t :

$$(y_t, y_t) = \frac{1}{2} ((aY_{\bar{x}})_x, y_t) - \frac{h^2}{12} ((a(py_t)_{\bar{x}})_x, y_t) - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, y_t \right) + (\varphi, y_t). \quad (38)$$

После подробных преобразований (аналогичных (11), (12)) с учетом оценки

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Y}_s, y_t \right) &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^m d_s \bar{Y}_s, y_t \right) - \left(\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m (a(pd_s \bar{Y}_s)_{\bar{x}})_x, y_t \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s (d_s, y_t) + \left[\frac{h^2}{24} \sum_{s=1}^m a(pd_s)_{\bar{x}} \bar{Y}_s, y_{\bar{x}t} \right] \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^m \left(\frac{1}{8\varepsilon} (\bar{Y}_s)^2 + \varepsilon c_2^2 (1, y_t^2) \right) + \left(\frac{h^2}{24} M_{11} \sum_{s=1}^m Y_s, y_{\bar{x}t} \right) \leq \\ &\leq M_{12}^\varepsilon \sum_{s=1}^m \bar{Y}_s^2 + \varepsilon m l c_2^2 (1, y_t^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_{11}^{\varepsilon_1}, \left(\sum_{s=1}^m Y_s \right)^2 \right) + \left(\frac{h^2}{48}, \varepsilon_1 y_{\bar{x}t}^2 \right) \leq \\ &\leq M_{13}^\varepsilon \left(\varepsilon_2 \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2} \|Y\|_0^2 \right) + \varepsilon m l c_2^2 (1, y_t^2) + \left(\frac{h^2}{48} M_{14}^{\varepsilon_1}, \sum_{s=1}^m Y_s^2 \right) + \varepsilon_1 \frac{h^2}{48} \|y_{\bar{x}t}\|_0^2 \leq \\ &\leq (\varepsilon + \varepsilon_1) M_{15} \|y_t\|_0^2 + \varepsilon_2 M_{13}^\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{16}^{\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \|Y\|_0^2 \end{aligned}$$

из (38) находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - (\varepsilon + \varepsilon_1) M_{15} \right) \|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2} (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t &\leq \frac{h^2}{12} (ap_{\bar{x}}, y_{t, i-1} y_{\bar{x}t}) + \\ &+ \varepsilon_2 M_{13}^\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{16}^{\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + \frac{3}{4} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (39)$$

С учетом преобразования (14) из (39) имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3} - (\varepsilon + \varepsilon_1)M_{15} - \frac{h}{12}M_{17}\right)\|y_t\|_0^2 + \frac{c_0}{2}(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t &\leq \\ &\leq \varepsilon_2 M_{13}^\varepsilon \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{16}^{\varepsilon, \varepsilon_1 \varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + \frac{3}{4}\|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1/(12M_{15})$, $h \leq h_1 = 1/M_{17}$, из (40) находим

$$\|y_t\|_0^2 + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t \leq \varepsilon_2 M_{18} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{19}^{\varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + M_{20} \|\varphi\|_0^2. \quad (41)$$

С учетом (41) из (37) получим

$$\begin{aligned} (\|y\|_0^2)_t + \left(1 - \frac{h^2}{12}M_9\right)(\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \left(\frac{c_0}{4} - \varepsilon_2 M_{18}\right)\|Y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_{21}^{\varepsilon_2} \|Y\|_0^2 + M_{22} \|\varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Выбирая $h^2 \leq h_2^2 = 1/M_9$, $\varepsilon_2 = c_0/(8M_{18})$, из (42) находим

$$(\|y\|_0^2)_t + (\|y_{\bar{x}}\|_0^2)_t + \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{23} \|Y\|_0^2 + M_{24} \|\varphi\|_0^2. \quad (43)$$

Умножим обе части (43) на τ и просуммируем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\ &\leq M_{23} \sum_{j'=0}^j \|Y^{j'}\|_0^2 \tau + M_{25} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Учитывая (21), из (44) находим

$$\begin{aligned} (1 - 2M_{23}\tau)\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\ &\leq 4M_{23} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{26} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = 1/(4M_{23})$, из (45) находим

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau &\leq \\ &\leq M_{27} \sum_{j'=0}^j \|y\|_0^2 \tau + M_{28} \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right). \end{aligned}$$

Применяя к последнему неравенству разностный аналог леммы Гронуолла [27, лемма 4, с. 171], находим оценку

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M(T) \left(\sum_{j'=0}^j \|\varphi^{j'}\|_0^2 \tau + \|y^0\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 \right), \quad (46)$$

где $M(T) = \text{const} > 0$ не зависит от параметров сетки h и τ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (4), (30). Тогда существуют $\tau_0 > 0$ и $h_0 > 0$, зависящие от констант c_0, c_1, c_2 , такие что при $\tau \leq \tau_0(c_0, c_1, c_2)$, $h \leq h_0(c_0, c_1, c_2) = \min\{h_1, h_2\}$ разностная схема (31)–(33) устойчива по правой части и начальным данным. При этом для решения задачи справедлива априорная оценка (46) на каждом временном слое в смысле нормы

$$\|y\|_1 = \left(\|y^{j+1}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \right)^{1/2}.$$

Из априорной оценки (46) следуют единственность решения разностной задачи (31)–(33) и непрерывная зависимость решения от входных данных задачи.

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (29), (2), (3); $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (31)–(33).

Для оценки точности разностной схемы (31)–(33) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Подстановка $y = z + u$ разностные соотношения (31)–(33) приводит к задаче для функции z :

$$z_t = (az_{\bar{x}}^\sigma)_x - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \bar{d}_s \bar{Z}_s + \Psi, \quad (47)$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z(x_i, 0) = 0, \quad (48)$$

где $\Psi = O(h^4 + \tau^2)$ характеризует погрешность аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (31)–(33) в классе решений $u = u(x, t)$ задачи (29), (2), (3).

Применение априорной оценки (46) к задаче (47), (48) дает следующую оценку погрешности:

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=0}^j \|\Psi^{j'}\|_0^2 \tau, \quad (49)$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от h и τ .

С учетом (49) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия, при которых $\|\Psi\| = O(h^4 + \tau^2)$, и условия ограниченности (4), (30). Тогда разностная схема (31)–(33) при независимом стремлении h и τ к нулю сходится к решению дифференциальной задачи (29), (2), (3) в смысле нормы

$$\|z^{j+1}\|_1^2 = \|z^{j+1}\|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|Z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$$

на каждом слое так, что при достаточно малых h и τ имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(h^4 + \tau^2), \quad \tau \leq \tau_0, \quad h \leq h_0 = \min\{h_1, h_2\},$$

где константа $M > 0$ не зависит от выбора сетки.

5. Тестовые задачи и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничные условия дифференциальных задач (1)–(3) и (29), (2), (3) подбираются таким образом, чтобы функция

$$u(x, t) = t^3(x^6 - lx^5)$$

являлась точным решением каждой из рассматриваемых задач.

Для приведения разностных схем (5)–(6) и (31)–(33) к расчетному виду был применен метод параметрической прогонки [28, с. 131].

В табл. 1–4 представлены максимальные значения погрешности $z = y - u$ и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости СО (Convergence Order) при последовательном уменьшении шагов сетки. Исследование проводилось в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$:

$$\|z\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})} = \left(\tau h \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{j_0} |z_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{\omega}_{h\tau}} |z_{ij}|,$$

где $z_{ij} = z(x_i, t_j)$. Наблюдаемое уменьшение погрешности соответствует теоретическому порядку аппроксимации $O(h^4 + \tau^2)$.

Вычислительный порядок сходимости определялся по формуле

$$\text{CO} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где z_1 и z_2 — погрешности, полученные при шагах сетки $0.5\bar{h}$ и $\bar{h}$ соответственно.

Заключение. Основным результатом исследования является построение и обоснование разностных схем повышенного порядка точности $O(h^4 + \tau^2)$ для решения начально-краевых задач для нагруженных уравнений теплопроводности с граничными условиями Дирихле. На основе метода энергетических неравенств получены априорные оценки решений разностных задач в сеточных нормах, из которых следует единственность решения разностной задачи, устойчивость по начальным данным и правой части, сходимость к решению исходной дифференциальной задачи в классе достаточно гладких функций. Проведенные численные эксперименты для тестовых задач подтверждают теоретические оценки порядка точности и демонстрируют эффективность предложенного метода.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено без финансовой поддержки.

Таблица 1

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3) при согласованных параметрах сетки $h^2 = \tau$ ($t = 1$) [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (1)–(3) with matched grid parameters $h^2 = \tau$ ($t = 1$)]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$2.83363 \cdot 10^{-6}$	—	$5.02040 \cdot 10^{-6}$	—
1/20	$1.77302 \cdot 10^{-7}$	3.998368	$3.13703 \cdot 10^{-7}$	4.000327
1/40	$1.10820 \cdot 10^{-8}$	3.999922	$1.96055 \cdot 10^{-8}$	4.000070
1/80	$6.92625 \cdot 10^{-10}$	4.000002	$1.22533 \cdot 10^{-9}$	4.000017
1/160	$4.32890 \cdot 10^{-11}$	4.000002	$7.65853 \cdot 10^{-11}$	3.999959

Таблица 2

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3) при фиксированном $h = 1/200$ и уменьшении τ ($t = 1$) [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (1)–(3) with fixed $h = 1/200$ and decreasing τ ($t = 1$)]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$4.70018 \cdot 10^{-4}$	—	$7.88143 \cdot 10^{-4}$	—
1/20	$1.17493 \cdot 10^{-4}$	2.000134	$1.96990 \cdot 10^{-4}$	2.000328
1/40	$2.93737 \cdot 10^{-5}$	1.999983	$4.92488 \cdot 10^{-5}$	1.999968
1/80	$7.34346 \cdot 10^{-6}$	1.999995	$1.23122 \cdot 10^{-5}$	1.999989
1/160	$1.83584 \cdot 10^{-6}$	2.000014	$3.07808 \cdot 10^{-6}$	1.999996

Таблица 3

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (29), (2), (3) при $h^2 = \tau$ ($t = 1$) и различных значениях $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$ [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (29), (2), (3) with $h^2 = \tau$ ($t = 1$), evaluated at different points $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$2.99353 \cdot 10^{-6}$	—	$5.47023 \cdot 10^{-6}$	—
1/20	$1.87282 \cdot 10^{-7}$	3.998557	$3.41829 \cdot 10^{-7}$	4.000256
1/40	$1.17056 \cdot 10^{-8}$	3.999945	$2.13634 \cdot 10^{-8}$	4.000057
1/80	$7.31599 \cdot 10^{-10}$	4.000006	$1.33520 \cdot 10^{-9}$	4.000014
1/160	$4.57248 \cdot 10^{-11}$	4.000004	$8.34805 \cdot 10^{-11}$	3.999477

Таблица 4

Погрешность и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ для задачи (29), (2), (3) при $h = 1/200$ и уменьшении τ ($t = 1$) и различных значениях $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$ [Error and convergence order (CO) in $\|\cdot\|_{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$ and $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ norms for problem (29), (2), (3) with fixed spatial step $h = 1/200$ and decreasing temporal step τ ($t = 1$), evaluated at different points $x_1 = 0.11$, $x_2 = 0.51$, $x_3 = 0.91$]

h	$\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$4.67888 \cdot 10^{-4}$	—	$7.85270 \cdot 10^{-4}$	—
1/20	$1.16954 \cdot 10^{-4}$	2.000222	$1.96263 \cdot 10^{-4}$	2.000398
1/40	$2.92384 \cdot 10^{-5}$	2.000004	$4.90663 \cdot 10^{-5}$	1.999986
1/80	$7.30961 \cdot 10^{-6}$	2.000000	$1.22666 \cdot 10^{-5}$	1.999993
1/160	$1.82738 \cdot 10^{-6}$	2.000003	$3.06667 \cdot 10^{-6}$	1.999996

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
2. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
3. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995. vol. 18, no. 2. pp. 209–228. DOI: <https://doi.org/10.1155/s0161171295000275>.
4. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
5. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // *Матем. заметки*, 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm156>.
6. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений*. Алматы: Гылым, 2010. 335 с.
7. Kneser A. Belastete integralgleichungen // *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1914. vol. 37. pp. 169–197. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014816>.
8. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения*. М.: Наука, 2012. 231 с.
9. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integro-differential Sobolev type equation with integral conditions // *Appl. Math. Comput.*, 2012. vol. 218, no. 9. pp. 4695–4702. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077>.
10. Luo Z. D. Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation // *Appl. Math. Comput.*, 2018. vol. 329. pp. 374–383. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.022>.
11. Бештоков М. Х. Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019. Т. 59, № 2. С. 185–202. EDN: YXCFFN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919020054>.
12. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory // *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006. vol. 15, no. 4. pp. 1079–1088. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079>.
13. Olmstead W. E., Davis S. H., Rosenblat S., Kath W. L. Bifurcation with memory // *SIAM J. Appl. Math.*, 1986. vol. 46, no. 2. pp. 171–188. DOI: <https://doi.org/10.1137/0146013>.
14. Yong J., Zhang X. Heat equations with memory // *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 2005. vol. 63, no. 5–7. pp. e99–e108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.033>.
15. Бештоков М. Х., Водахова В. А. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2019. Т. 29, № 4. С. 459–482. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.20537/vm190401>.
16. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, № 9. С. 1585–1595. EDN: LVCBIL.
17. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Численное решение задач оптимального управления нагруженными сосредоточенными системами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2006. Т. 46, № 9. С. 1566–1581. EDN: HUZTVH.
18. Абдуллаев В. М., Айда-заде К. Р. Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016. Т. 56, № 1. С. 99–112. EDN: VIPLHR. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466916010038>.
19. Алиханов А. А., Березгов А. М., Шхануков-Лафишев М. Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их

- численной реализации // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628. EDN: JKCTQD.
20. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>.
21. Самарский А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963. Т. 3, № 5. С. 812–840.
22. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution // *J. Comput. Phys.*, 1992. vol. 103, no. 1. pp. 16–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90324-R](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90324-R).
23. Матус П. П., Утебаев Б. Д. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // *Матем. моделирование*, 2021. Т. 33, № 4. С. 60–78. DOI: <https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04>.
24. Alikhanov A., Beshtokov M., Mehra M. The Crank–Nicolson type compact difference schemes for a loaded time-fractional Hallaire equation // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2021. vol. 24, no. 4. pp. 1231–1256. DOI: <https://doi.org/10.1515/fca-2021-0053>.
25. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2020. Т. 30, № 2. С. 158–175. DOI: <https://doi.org/10.35634/vm200202>.
26. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977. 656 с.
27. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: УРСС, 2005. 384 с. EDN: QJOCSP.
28. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. *Численные методы расчета одномерных систем*. Новосибирск: Наука, 1981. 208 с.

MSC: 65M06, 65N12, 35R09

Higher-order difference schemes for the loaded heat conduction equations with boundary conditions of the first kind

M. Kh. Beshtokov

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

This paper investigates initial-boundary value problems for loaded heat equations with boundary conditions of the first kind. High-accuracy difference schemes are constructed for numerical solution of these problems. A priori estimates in discrete form are obtained through energy inequalities. The derived estimates establish solution uniqueness and stability with respect to both initial data and right-hand side terms, while proving convergence of the discrete solution to the original differential problem at $O(h^4 + \tau^2)$ rate (under sufficient smoothness assumptions). Numerical experiments with test cases validate all theoretical findings.

Keywords: parabolic equation, first initial-boundary value problem, loaded equation, integral equation, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence.

Received: 6th January, 2025 / Revised: 12th April, 2025 /

Accepted: 28th April, 2025 / First online: 24th June, 2025

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authors' contributions. The author is solely responsible for the content and preparation of this manuscript. The final version has been reviewed and approved by the author.

Funding. This research received no external funding.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beshtokov M. Kh. Higher-order difference schemes for the loaded heat conduction equations with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 220–240. EDN: EORDFG. DOI: 10.14498/vsgtu2142 (In Russian).

Author's Details:

Murat Kh. Beshtokov  <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Dept. of Computational Methods; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

References

1. Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: PDBBNB.
2. Nakhushev A. M., Borisov V. N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to the prediction of ground water level, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 105–110 (In Russian).
3. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995, vol. 18, no. 2, pp. 209–228. DOI: <https://doi.org/10.1155/s0161171295000275>.
4. Shkhanukov M. Kh. On some boundary value problems for an equation of third order arising from simulation of filtration of a fluid in porous media, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (In Russian).
5. Kozhanov A. I. A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem, *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 6, pp. 784–795. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049678.16540.a5>.
6. Dzhenaliyev M. T., Ramazanov M. I. *Nagruzhennyye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations]. Almaty, Gylim, 2010, 335 pp. (In Russian)
7. Kneser A. Belastete integralgleichungen, *Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1914, vol. 37, pp. 169–197. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03014816>.
8. Nakhushev A. M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniya* [Loaded Equations and Their Applications]. Moscow, Nauka, 2012, 231 pp. (In Russian)
9. Guezane-Lakoud A., Belakroum D. Time-discretization schema for an integro-differential Sobolev type equation with integral conditions, *Appl. Math. Comput.*, 2012, vol. 218, no. 9, pp. 4695–4702. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.077>.
10. Luo Z. D. Teng F. A reduced-order extrapolated finite difference iterative scheme based on POD method for 2D Sobolev equation, *Appl. Math. Comput.*, 2018, vol. 329, pp. 374–383. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.02.022>.
11. Beshtokov M. Kh. Numerical analysis of initial-boundary value problem for a Sobolev-type equation with a fractional-order time derivative, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 2, pp. 175–192. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542519020052>.
12. Grasselli M., Pata V. A reaction-diffusion equation with memory, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2006, vol. 15, no. 4, pp. 1079–1088. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2006.15.1079>.
13. Olmstead W. E., Davis S. H., Rosenblat S., Kath W. L. Bifurcation with memory, *SIAM J. Appl. Math.*, 1986, vol. 46, no. 2, pp. 171–188. DOI: <https://doi.org/10.1137/0146013>.
14. Yong J., Zhang X. Heat equations with memory, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 2005, vol. 63, no. 5–7, pp. e99–e108. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2005.02.033>.
15. Beshtokov M. Kh., Vodahova V. A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (In Russian). DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.20537/vm190401>.
16. Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 9, pp. 1505–1515. EDN: XLKZWN.
17. Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. Numerical solution of optimal control problems for loaded lumped parameter systems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 9, pp. 1487–1502. EDN: XLLQVH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554250609003X>.
18. Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 93–105 (In Russian). EDN: WUXIWJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542516010036>.
19. Alikhanov A. A., Berezgov A. M., Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference

- methods, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 9, pp. 1581–1590. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554250809008X>.
20. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>.
 21. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6).
 22. Lele S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.*, 1992, vol. 103, no. 1, pp. 16–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(92\)90324-R](https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90324-R).
 23. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations, *Math. Models Comput. Simul.*, 2021, vol. 13, no. 6, pp. 1038–1048. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048221060132>.
 24. Alikhanov A., Beshtokov M., Mehra M. The Crank–Nicolson type compact difference schemes for a loaded time-fractional Hallaire equation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2021, vol. 24, no. 4, pp. 1231–1256. DOI: <https://doi.org/10.1515/fca-2021-0053>.
 25. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for a loaded modified fractional-order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 2, pp. 158–175 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.35634/vm200202>.
 26. Samarskiy A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
 27. Samarskiy A. A., Gulin A. V. *Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, URSS, 2005, 384 pp. (In Russian)
 28. Voevodin A. F., Shugrin S. M. *Chislennyye metody rascheta odnomernykh sistem* [Numerical Methods for Calculating One-Dimensional Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1981, 208 pp. (In Russian)



УДК 517.956

Существование и единственность решений системы Гурса–Дарбу с интегральными граничными условиями

М. Дж. Марданов^{1,2}, Я. А. Шарифов^{1,2,3}

¹ Институт математики и механики НАН Азербайджана, Азербайджан, AZ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

² Бакинский государственный университет, Азербайджан, AZ1148, Баку, ул. З. Халилова, 33.

³ Азербайджанский технический университет, Азербайджан, AZ1073, Баку, пр. Гусейн Джавида, 25.

Аннотация

В настоящее время локальные краевые задачи для дифференциальных уравнений гиперболического типа изучены достаточно подробно. Однако математическое моделирование ряда реальных процессов приводит к нелокальным краевым задачам для нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа, которые остаются слабо исследованными. В данной работе рассматривается интегральная граничная задача общего вида в характеристическом прямоугольнике для уравнений гиперболического типа. При естественных условиях на исходные данные задачи построена функция Грина и установлены критерии однозначной разрешимости. Доказательство основных результатов демонстрируют существенность наложенных условий: их нарушение приводит к невозможности построения функции Грина и утрате требуемых свойств разрешимости задачи. В частном случае, с применением метода сжимающих отображений Банаха, получены достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи. В качестве иллюстрации приведен конкретный пример.

Ключевые слова: системы Гурса–Дарбу, гиперболические уравнения, нелокальные краевые задачи, интегральные граничные условия, функ-

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Марданов М. Дж., Шарифов Я. А. Существование и единственность решений системы Гурса–Дарбу с интегральными граничными условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 241–255. EDN: ESOZQG. DOI: 10.14498/vsgtu2147.

Сведения об авторах

Мисир Джумаил Марданов ✉ <https://orcid.org/0000-0003-3901-0719>

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАНА; директор института¹; профессор; каф. высшей математики²; e-mail: misirmardanov@yahoo.com

Ягуб Амияр Шарифов <https://orcid.org/0000-0001-5273-6384>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; отд. оптимального управления¹; профессор; каф. инженерной математики и искусственного интеллекта²; профессор; каф. прикладной математики³; e-mail: sharifov22@rambler.ru

ция Грина, условия разрешимости, метод сжимающих отображений, единственность решения.

Получение: 9 января 2025 г. / Исправление: 12 апреля 2025 г. /

Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 28 мая 2025 г.

Введение. В последние десятилетия наблюдается интенсивное исследование нелокальных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [1–4]. Следует отметить, что краевая задача называется нелокальной, если краевые условия задаются в виде комбинаций значений искомого решения и/или его производных в различных граничных или внутренних точках области [4]. Важно подчеркнуть, что задачи с нелокальными краевыми условиями возникают при математическом моделировании физических и химических процессов, демографических исследований и в других прикладных областях.

При моделировании процессов, в которых непосредственное измерение основных параметров невозможно, а известны лишь их средние значения по области, возникают интегральные условия. Исследованию задач для уравнений гиперболического типа с интегральными условиями посвящены многочисленные работы [5–18]. В указанных работах преимущественно изучены вопросы разрешимости краевых задач как в классическом, так и в обобщенном смысле.

1. Постановка задачи. Рассмотрим функцию $y = y(t, x)$, определяемую как решение уравнения

$$y_{tx} = f(t, x, y(t, x), y_t(t, x), y_x(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

с интегральными ограничениями вида

$$\begin{aligned} \int_0^T n(t)y(t, x)dt &= \varphi(x), \quad x \in [0, l], \\ \int_0^l m(x)y(t, x)dx &= \psi(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2)$$

где $Q = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$ — характеристический прямоугольник; $T, l > 0$ — заданные константы; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор состояния; $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ — вектор-функции; $n(t)$ и $m(x)$ — заданные матричные функции размерности $n \times n$. Все векторы рассматриваются как вектор-столбцы даже при строковой записи.

Задача (1), (2) была впервые исследована С. В. Жестковым в работе [6], где классическим методом последовательных приближений были доказаны теоремы существования и единственности решения. В дальнейшем Б. Панеяхом и П. Панеяхом [7] при минимальных ограничениях на исходные данные были получены более детальные условия однозначной разрешимости данной задачи. Следует отметить, что в работах [6, 7] исследование существования и единственности классического решения задачи (1), (2) проводилось для одномерного случая.

В дальнейшем будем предполагать выполнение следующих условий:

- а) вектор-функция $f : Q \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна по совокупности переменных;
 б) матричные функции $n(t) \in L_\infty[0, T]$, $m(x) \in L_\infty[0, l]$ являются перестановочными, то есть удовлетворяют соотношениям

$$n(t)m(x) = m(x)n(t) \quad \text{при} \quad (t, x) \in Q,$$

причем

$$\det \left[\int_0^T n(t) dt \right] \neq 0, \quad \det \left[\int_0^l m(x) dx \right] \neq 0;$$

- в) функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы на отрезках $[0, l]$ и $[0, T]$ соответственно, и дополнительно выполняется условие согласования

$$\int_0^l m(x)\varphi(x)dx = \int_0^T n(t)\psi(t)dt = A = \text{const.}$$

Следует подчеркнуть, что условия б) и в) представляют собой необходимые условия разрешимости задачи (1), (2).

Обозначим через $C(Q, \mathbb{R}^n)$ пространство непрерывных на Q вектор-функций $y : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $y(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n)$, обладающую частными производными

$$y_t(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n), \quad y_x(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n), \quad y_{tx}(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n),$$

удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2). Такие решения принято называть классическими.

2. Приведение задачи (1), (2) к интегральным уравнениям. Для упрощения рассмотрим модельную задачу

$$y_{tx}(t, x) = z(t, x), \quad (t, x) \in Q, \quad (3)$$

с интегральными ограничениями (2), где $z(t, x) \in C(Q, \mathbb{R}^n)$ — заданная непрерывная вектор-функция.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (3), (2) представимо в виде*

$$y(t, x) = m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A + \\ + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)z(\tau, s) d\tau ds, \quad (4)$$

где функция Грина $G(t, x, \tau, s)$ определяется следующим образом:

$$G(t, x, \tau, s) = \begin{cases} m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq s \leq x, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq s \leq x, t < \tau \leq T, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_\tau^l m(r)dr, & 0 \leq \tau \leq t, x < s \leq l, \\ m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^s n(\alpha)d\alpha, & x < s \leq l, t < \tau \leq T, \end{cases}$$

причем

$$m^{-1}(l) = \left[\int_0^l m(x) dx \right]^{-1}, \quad n^{-1}(T) = \left[\int_0^T n(t) dt \right]^{-1}.$$

Доказательство. Решение задачи (3), (2) будем искать в виде

$$y(t, x) = a(t) + b(x) + \int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds, \quad (t, x) \in Q, \quad (5)$$

где $a(t) \in C^1[0, T]$, $b(x) \in C^1[0, l]$ — неизвестные непрерывно дифференцируемые функции.

Подстановка (5) в условия (2) дает систему:

$$\begin{aligned} \int_0^T n(t) a(t) dt + \int_0^T n(t) b(x) dt + \\ + \int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt = \varphi(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l m(x) a(t) dx + \int_0^l m(x) b(x) dx + \\ + \int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx = \psi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Без ограничения общности предположим, что

$$\int_0^T n(t) a(t) dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_0^l m(x) b(x) dx = 0.$$

Выберем первое условие $\int_0^T n(t) a(t) dt = 0$. Тогда из (6) следует

$$b(x) = n^{-1}(T) \varphi(x) - n^{-1}(T) \int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt, \quad x \in [0, l]. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем выражение для $a(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) = -m^{-1}(l) \psi(t) + \\ + n^{-1}(T) m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l n(t) m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx - \\ - m^{-1}(l) \int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx - A, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Учитывая выражения для функций $a(t)$ и $b(x)$ в равенстве (5), получаем следующее представление для решения:

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A - \\
 & - m^{-1}(l) \int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx - \\
 & - n^{-1}(T) \int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt + \\
 & + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^T \int_0^l m(x)n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx + \\
 & + \int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds, \quad (t, x) \in Q. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Применяя интегральные преобразования

$$\int_0^l m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dx = \int_0^l \int_0^t \left(\int_x^l m(s) ds \right) z(\tau, x) d\tau dx,$$

$$\int_0^T n(t) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt = \int_0^T \int_0^x \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \right) z(t, s) dt ds,$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_0^l n(t)m(x) \left(\int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx = \\
 = \int_0^T \int_0^l \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \int_x^l m(s) ds \right) z(t, x) dt dx,
 \end{aligned}$$

к (9), получаем

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A - \\
 & - m^{-1}(l) \int_0^l \int_0^t \left(\int_x^l m(s) ds \right) z(\tau, x) d\tau dx - \\
 & - n^{-1}(T) \int_0^T \int_0^x \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \right) z(\tau, s) dt ds + \\
 & + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^T \int_0^l \left(\int_t^T n(\tau) d\tau \int_x^l m(s) ds \right) z(t, x) dt dx + \\
 & + \int_0^t \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds, \quad (t, x) \in Q. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Далее, объединяя слагаемые в (10), приходим к окончательному представлению:

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A + \\
 & + \int_0^t \int_0^x \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r) dr \int_\tau^T n(t) dt + E - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -m^{-1}(l) \int_s^l m(s)ds - n^{-1}(T) \int_\tau^T n(t)dt \Big] z(\tau, s) d\tau ds + \\
 & + \int_0^t \int_x^l \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \right. \\
 & \quad \left. - m^{-1}(l) \int_s^l m(s)ds \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\
 & + \int_t^T \int_0^x \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \right. \\
 & \quad \left. - n^{-1}(T) \int_\tau^T n(a)da \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\
 & + \int_t^T \int_x^l \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da \right] z(\tau, s) d\tau ds, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где E — единичная матрица размерности $n \times n$, а $(t, x) \in Q$.

В равенстве (11) проведем некоторые упрощения:

$$\begin{aligned}
 & E + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \\
 & \quad - m^{-1}(l) \int_s^l m(r)dr - n^{-1}(T) \int_\tau^T n(a)da = \\
 & = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[m(l)m(T) + \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \right. \\
 & \quad \left. - n(T) \int_s^l m(r)dr - m(l) \int_\tau^T n(a)da \right] = \\
 & = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[\left(\int_0^s m(r)ds + \int_s^l m(r)dr \right) \left(\int_0^\tau n(a)da + \int_\tau^T n(a)da \right) + \right. \\
 & \quad + \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(a)da - \left(\int_0^\tau n(a)da + \int_\tau^T n(a)da \right) \int_s^l m(r)dr - \\
 & \quad \left. - \left(\int_0^s m(r)ds + \int_s^l m(r)dr \right) \int_\tau^T n(a)da \right] = \\
 & \quad = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(a)da; \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha - n^{-1}(T) \int_t^T n(\alpha)d\alpha = \\
 & = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[\int_0^s m(r)ds \int_t^T n(\alpha)d\alpha - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\int_0^s m(r)ds + \int_s^l m(r)dr \right) \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right] =
 \end{aligned}$$

$$= -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha - m^{-1}(l) \int_s^l m(r)dr = \\ = m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left[\int_s^l m(r)ds \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha - \right. \\ \left. - \left(\int_\tau^T n(\alpha)d\alpha + \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right) \int_s^l m(r)dr \right] = \\ = -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_s^l m(r)dr. \quad (14) \end{aligned}$$

Учитывая равенства (12), (13) и (14) в (10), получаем следующее представление решения:

$$\begin{aligned} y(t, x) = m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\ + \int_0^t \int_0^x \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\ + \int_0^t \int_x^l \left[-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\ + \int_t^T \int_0^x \left[-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_s^l m(r)dr \right] z(\tau, s) d\tau ds + \\ + \int_t^T \int_x^l \left[m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right] z(\tau, s) d\tau ds. \quad (15) \end{aligned}$$

Введем матричную функцию Грина:

$$G(t, x, \tau, s) = \begin{cases} m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq \tau \leq t, 0 \leq s \leq x, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & 0 \leq s \leq x, t < \tau \leq T, \\ -m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_\tau^l m(r)dr, & 0 \leq \tau \leq t, x < s \leq l, \\ m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha, & x < s \leq l, t < \tau \leq T. \end{cases}$$

Тогда равенство (15) можно компактно записать в виде

$$\begin{aligned} y(t, x) = m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\ + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s) z(\tau, s) d\tau ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость равенства (4).

Пусть функция $y(t, x)$ определяется равенством (15). Докажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (3) и краевым условиям (2).

Вычислим смешанную производную функции $y(t, x)$:

$$\begin{aligned}
 y_{tx}(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)z(\tau, s)d\tau ds \right] = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_0^t \int_0^x m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left(\int_0^s m(r)dr \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_0^t \int_x^l \left(-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^s m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_t^T \int_0^x \left(-m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^\tau n(\alpha)d\alpha \int_s^l m(r)dr \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] + \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\int_t^T \int_x^l m^{-1}(l)n^{-1}(T) \left(\int_s^l m(r)dr \int_\tau^T n(\alpha)d\alpha \right) z(\tau, s)d\tau ds \right] = \\
 &= m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^x m(r)ds \int_0^T n(\alpha)d\alpha z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^x m(r)ds \int_t^T n(\alpha)d\alpha z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^T n(\alpha)d\alpha \int_0^x m(r)dr z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_x^l m(r)ds \int_t^T n(\alpha)d\alpha z(t, x) = \\
 &= m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_0^x m(r)ds n(T)z(t, x) + \\
 &\quad + m^{-1}(l)n^{-1}(T) \int_x^l n(\alpha)d\alpha n(T)z(t, x) = \\
 &= m^{-1}(l) \int_0^x m(r)dr z(t, x) + m^{-1}(l) \int_x^l m(r)dr z(t, x) = z(t, x).
 \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение краевых условий (2). Так как представления (4) и (10) эквивалентны, умножим представление для $y(t, x)$ на $n(t)$ и проинтегрируем по $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^T n(t)y(t, x)dt &= \int_0^T n(t) \left[m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - n^{-1}(T)m^{-1}(l)A - \right. \\
 &\quad - m^{-1}(l) \int_0^l m(x) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s)d\tau ds \right) dx - \\
 &\quad \left. - n^{-1}(T) \int_0^T n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s)d\tau ds \right) dt + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n^{-1}(T)m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l m(x)n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx + \\
 & \quad + \int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \Big] dt = \\
 & = m^{-1}(l) \int_0^T n(t)\psi(t)dt + \varphi(x) - m^{-1}(l) \int_0^T n(t)\psi(t)dt - \\
 & \quad - m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l n(t)m(x) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx - \\
 & \quad - \int_0^T n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt + \\
 & \quad + m^{-1}(l) \int_0^T \int_0^l n(t)m(x) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt dx + \\
 & \quad + \int_0^T n(t) \left(\int_0^T \int_0^x z(\tau, s) d\tau ds \right) dt = \varphi(x).
 \end{aligned}$$

При выводе последнего равенства учитывалась перестановочность матриц $n(t)$, $m(x)$ и их обратных $n^{-1}(T)$, $m^{-1}(l)$.

Аналогичным образом проверяется выполнение второго условия:

$$\int_0^l m(x)y(t, x)dx = \psi(t).$$

Таким образом, функция $y(t, x)$, заданная в виде (4), действительно является решением задачи (3), (2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 1 показывает, что задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 y(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\
 & + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)f(\tau, s, y(\tau, s), y_t(\tau, s), y_s(\tau, s))d\tau ds. \quad (16)
 \end{aligned}$$

3. Доказательство существования и единственности. Для доказательства существования и единственности решения задачи (1), (2) будем предполагать, что функция f зависит только от t , x и y :

$$f(t, x, y, y_t, y_x) \equiv f(t, x, y).$$

Определим оператор $P : C(Q; \mathbb{R}^n) \rightarrow C(Q; \mathbb{R}^n)$ равенством

$$\begin{aligned}
 (Pz)(t, x) = & m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A + \\
 & + \int_0^T \int_0^l G(t, x, \tau, s)f(\tau, s, y(\tau, s))d\tau ds,
 \end{aligned}$$

где $G(t, x, \tau, s)$ — функция Грина, введенная ранее.

Заметим, что разрешимость задачи (1), (2) или интегрального уравнения (16) эквивалентна существованию неподвижной точки оператора P . Таким образом, задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда оператор P имеет неподвижную точку в пространстве $C(Q; \mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$|f(t, x, z_2) - f(t, x, z_1)| \leq M|z_2 - z_1| \quad (17)$$

для всех $(t, x) \in Q$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, где $M \geq 0$, и

$$L = lTSM < 1, \quad (18)$$

где

$$S = \max_{Q \times Q} \|G(t, x, \tau, s)\|.$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначения:

$$N = \max_Q |m^{-1}(l)\psi(t) + n^{-1}(T)\varphi(x) - m^{-1}(l)n^{-1}(T)A|, \quad M_f = \max_Q |f(t, x, 0)|.$$

Выберем $r \geq (N + M_f TS)/(1 - L)$, где $S = \max_{Q \times Q} \|G(t, x, \tau, s)\|$, и рассмотрим шар

$$B_r = \{z \in C(Q; \mathbb{R}^n) : \|z\| \leq r\}.$$

Для произвольного $z \in B_r$ оценим норму оператора P :

$$\begin{aligned} \|(Pz)(t, x)\| &\leq N + \int_0^T \int_0^l |G(t, x, \tau, s)| \cdot |f(\tau, s, z(\tau, s)) - f(\tau, s, 0)| d\tau ds + \\ &\quad + \int_0^T \int_0^l |G(t, x, \tau, s)| \cdot |f(\tau, s, 0)| d\tau ds \leq \\ &\leq N + S \int_0^T \int_0^l (M|z(\tau, s)| + M_f) d\tau ds \leq N + SMrTl + M_fTlS \leq \\ &\leq \frac{N + M_fTlS}{1 - L} \leq r. \end{aligned}$$

Для любых $z_1, z_2 \in B_r$ из условия Липшица (17) следует:

$$\begin{aligned} |(Pz_2)(t, x) - (Pz_1)(t, x)| &\leq \\ &\leq \int_0^T \int_0^l |G(t, x, \tau, s)| \cdot |f(\tau, s, z_2(\tau, s)) - f(\tau, s, z_1(\tau, s))| d\tau ds \leq \\ &\leq SM \int_0^T \int_0^l |z_2(\tau, s) - z_1(\tau, s)| d\tau ds \leq \\ &\leq SMTl \max_Q |z_2(t, x) - z_1(t, x)| \leq L\|z_2 - z_1\|. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор P является сжимающим на B_r , и по принципу сжимающих отображений задача (1), (2) имеет единственное решение. $\square$

4. Пример применения результатов. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим систему гиперболических уравнений

$$\begin{cases} y_{1tx} = 0.1 \sin y_2, \\ y_{2tx} = \frac{|y_1|}{(e + e^{tx})(1 + |y_1|)}, \end{cases} \quad (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (19)$$

с интегральными условиями следующего вида:

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Непосредственной проверкой устанавливается выполнение условия согласования. Функция Грина для данной задачи имеет вид

$$G(t, x, \tau, s) = \begin{cases} E \cdot s\tau, & 0 \leq s \leq x, 0 \leq \tau \leq t, \\ -E \cdot s(1 - \tau), & 0 \leq s \leq x, t \leq \tau \leq 1, \\ -E \cdot (1 - s)t, & x < s \leq 1, 0 \leq \tau \leq t, \\ E \cdot (1 - s)(1 - \tau), & t \leq \tau \leq 1, x < s \leq 1, \end{cases}$$

где E — единичная матрица.

Оценим параметры задачи:

- норма функции Грина: $\max |G(t, x, \tau, s)| \leq 1$;
- константа Липшица: $M = 0.1$;
- параметр сжатия: $L = \|G\|MTl \leq 1 \cdot 0.1 \cdot 1 \cdot 1 = 0.1 < 1$.

Таким образом, все условия теоремы 2 выполнены, и задача (19), (20) имеет единственное решение.

Заключение. В данной работе исследована нелокальная краевая задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений. Основные результаты включают:

- построение функции Грина для рассматриваемого класса задач;
- установление условий однозначной разрешимости в терминах исходных данных;
- доказательство теоремы существования и единственности решения на основе принципа сжимающих отображений;
- демонстрацию полученных результатов на конкретном примере.

Как показано в работе, введенные ограничения на исходные данные (включая условие Липшица (17) и ограничение на норму функции Грина (18)) являются существенными для обеспечения однозначной разрешимости задачи. Приведенный пример демонстрирует эффективность предложенного подхода для нелинейных систем гиперболического типа.

Полученные результаты расширяют существующие методы исследования нелокальных краевых задач и могут быть применены к более широкому классу уравнений математической физики.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Диффер. уравн.*, 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
2. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с. EDN: PDBUIH.
3. Пташник Б. И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными*. Наукова думка: Киев, 1984. 264 с.
4. Пулькина Л. С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений*. Самарский университет: Самара, 2012. 194 с.
5. Byszewski L. Existence and uniqueness of solution of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$ // *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 1990. vol. 3, no. 3. pp. 163–168. <http://eudml.org/doc/46588>.
6. Жестков С. В. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // *Укр. мат. журн.*, 1990. Т. 42, № 1. С. 132–135.
7. Панеях Б., Панеях П. Некорректные задачи в теории гиперболических дифференциальных уравнений // *Тр. ММО*, 2009. Т. 70. С. 183–234.
8. Асанова А. Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 5. С. 11–25. EDN: YHMJEX.
9. Assanova A. T. A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications // *Hacet. J. Math. Stat.*, 2023. vol. 52, no. 6. pp. 1513–1532. EDN: OFOULD. DOI: <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.
10. Bouziani A. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques // *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1997. vol. 8, no. 1–6. pp. 53–70. https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1997_num_8_1_27797.
11. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179. EDN: HVLJON.
12. Assanova A. T., Dzhumabaev D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // *J. Math. Anal. Appl.*, 2013. vol. 402, no. 1. pp. 167–178. EDN: XKUPFV. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012>.
13. Assanova A. T. On the solvability of a nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition // *Georgian Math. J.*, 2021. vol. 28, no. 1. pp. 49–57. EDN: QHOEWV. DOI: <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.
14. Асанова А. Т. О нелокальной задаче с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 2. С. 202–214. EDN: QLHNEX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118020073>.
15. Голубева Н. Д., Пулькина Л. С. Об одной нелокальной задаче с интегральными условиями // *Матем. заметки*, 1996. Т. 59, № 3. С. 456–458. EDN: JAOCYB. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1736>.
16. Пулькина Л. С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. EDN: VOKDVA.
17. Oussaeif T. E., Bouziani A. Solvability of nonlinear Goursat type problem for hyperbolic equation with integral condition // *Khayyam J. Math.*, 2018. vol. 4, no. 2. pp. 198–213. DOI: <https://doi.org/10.22034/kjm.2018.65161>.
18. Mardanov M. J., Sharifo Y. A. An optimal control problem for the systems with integral boundary conditions // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023. no. 1. pp. 110–123. EDN: PFRKML. DOI: <https://doi.org/10.31489/2023M1/110-123>.

MSC: 35G35, 35G46, 35L53, 35L57

Existence and uniqueness of solutions to the Goursat–Darboux system with integral boundary conditions

M. J. Mardanov^{1,2}, *Ya. A. Sharifov*^{1,2,3}

¹ Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
9, Bakhtiyar Vahabzade st., Baku, AZ1141, Azerbaijan.

² Baku State University,
33, Z. Khalilov st., Baku, AZ1148, Azerbaijan.

³ Azerbaijan Technical University,
25, Hussein Javid prosp., Baku, AZ1073, Azerbaijan.

Abstract

Currently, local boundary value problems for hyperbolic-type differential equations have been studied in considerable details. However, mathematical modeling of various real-world processes leads to nonlocal boundary value problems for nonlinear hyperbolic differential equations, which remain insufficiently investigated. This paper is devoted to a general integral boundary value problem in a characteristic rectangle for hyperbolic equations. Under natural conditions on the input data, we construct the Green's function and establish uniqueness criteria for the solution. The proofs of the main results demonstrate the essential nature of the imposed conditions: their violation makes it impossible to construct the Green's function and leads to the loss of required solvability properties. For a special case, by using Banach's contraction mapping principle, we obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of the boundary value problem solution. A specific example is provided to illustrate the obtained results.

Keywords: Goursat–Darboux systems, hyperbolic equations, nonlocal boundary value problems, integral boundary conditions, Green's function, solvability conditions, contraction mapping method, solution uniqueness.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Mardanov M. J., Sharifov Ya. A. Existence and uniqueness of solutions to the Goursat–Darboux system with integral boundary conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 241–255. EDN: ES0ZQG. DOI: 10.14498/vsgtu2147 (In Russian).

Authors' Details:

Misir J. Mardanov  <https://orcid.org/0000-0003-3901-0719>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor, Corresponding Member of ANAS; Director of Institute¹; Professor; Dept. of Higher Mathematics²; e-mail: misirmardanov@yahoo.com

Yagub A. Sharifov  <https://orcid.org/0000-0001-5273-6384>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Optimal Control¹; Professor; Dept. of Engineering Mathematics and Artificial Intelligence²; Professor; Dept. of Applied Mathematics³; e-mail: sharifov22@rambler.ru

Received: 9th January, 2025 / Revised: 12th April, 2025 /
Accepted: 28th April, 2025 / First online: 28th May, 2025

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the conceptualization of the study and manuscript preparation. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Samarskii A. A. Some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Boundary Value Problems with Shift for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian). EDN: PDBUIH.
3. Ptashnik B. I. *Nekorrektnye granichnye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi* [Ill-Posed Boundary Value Problems for Partial Differential Equations]. Naukova Dumka, Kiev, 1984, 264 pp. (In Russian)
4. Pul'kina L. S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations]. Samara University, Samara, 2012, 194 pp. (In Russian)
5. Byszewski L. Existence and uniqueness of solution of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 1990, vol. 3, no. 3, pp. 163–168. <http://eudml.org/doc/46588>.
6. Zhestkov S. V. The Goursat problem with integral boundary conditions, *Ukr. Math. J.*, 1990, vol. 42, no. 1, pp. 119–122. EDN: XLTFER. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01066375>.
7. Paneah B., Paneah P. Nonlocal problems in the theory of hyperbolic differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2009, vol. 70, pp. 135–170. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0077-1554-09-00179-4>.
8. Assanova A. T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–20. EDN: XNIJGX. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X17050024>.
9. Assanova A. T. A generalized integral problem for a system of hyperbolic equations and its applications, *Hacet. J. Math. Stat.*, 2023, vol. 52, no. 6, pp. 1513–1532. EDN: OFOULD. DOI: <https://doi.org/10.15672/hujms.1094454>.
10. Bouziani A. Solution forte d'un problème mixte avec conditions non locales pour une classe d'équations hyperboliques, *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1997, vol. 8, no. 1–6, pp. 53–70. https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1997_num_8_1_27797.
11. Kozhanov A. I., Pul'kina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. EDN: KDUGPW. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266106090023>.
12. Assanova A. T., Dzhumabaev D. S. Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 402, no. 1, pp. 167–178. EDN: XKUPFV. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.012>.
13. Assanova A. T. On the solvability of a nonlocal problem for the system of Sobolev-type differential equations with integral condition, *Georgian Math. J.*, 2021, vol. 28, no. 1, pp. 49–57. EDN: QHOEWV. DOI: <https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2011>.

14. Assanova A. T. On a nonlocal problem with integral conditions for the system of hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 201–214. EDN: YBZFKX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118020076>.
15. Golubeva N. D., Pul'kina L. S. A nonlocal problem with integral conditions, *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 3, pp. 326–328. EDN: OKGZPD. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02308548>.
16. Pul'kina L. S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 316–318. EDN: LFVPFH. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02754219>.
17. Oussaeif T. E., Bouziani A. Solvability of nonlinear Goursat type problem for hyperbolic equation with integral condition, *Khayyam J. Math.*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 198–213. DOI: <https://doi.org/10.22034/kjm.2018.65161>.
18. Mardanov M. J., Sharifo Y. A. An optimal control problem for the systems with integral boundary conditions, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023, no. 1, pp. 110–123. EDN: PFRKML. DOI: <https://doi.org/10.31489/2023M1/110-123>.



УДК 517.968.22

О конструктивной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра на всей числовой прямой

Х. А. Хачатрян¹, А. Г. Мурадян²

¹ Ереванский государственный университет, Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.

² Армянский государственный экономический университет, Армения, 0025, Ереван, ул. Налбандяна 128.

Аннотация

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна-Вольтерра на всей числовой оси. Доказывается конструктивная теорема существования неотрицательного ограниченного и непрерывного решения. Более того, доказывается равномерная сходимость соответствующих последовательных приближений к решению со скоростью убывающей геометрической прогрессии. Далее исследуется интегральная асимптотика построенного решения. Кроме того, доказывается единственность построенного решения в определенном подклассе ограниченных и неотрицательных функций. В конце приводятся конкретные примеры соответствующего ядра и нелинейности, удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

Ключевые слова: вогнутость, равномерная сходимость, итерации, монотонность, ограниченное решение, предел решения.

Получение: 24 января 2025 г. / Исправление: 8 апреля 2025 г. /
Принятие: 19 мая 2025 г. / Публикация онлайн: 27 июня 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хачатрян Х. А., Мурадян А. Г. О конструктивной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра на всей числовой прямой // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 256–273. EDN: FBMSFM. DOI: 10.14498/vsgtu2150.

Сведения об авторах

Хачатур Агавардович Хачатрян <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>
доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Арам Грачович Мурадян <https://orcid.org/0009-0007-3529-9283>
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики; e-mail: muradyan.aram@asue.am

Введение. Рассмотрим класс нелинейных интегральных уравнений на всей числовой прямой

$$f(x) = \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(f(t)) + w(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

относительно искомой неотрицательной непрерывной и ограниченной на множестве $\mathbb{R}$ функции $f(x)$.

В уравнении (1) множитель перед интегралом $\mu(x)$ обладает следующими основными свойствами:

- I) $\mu(x)$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией и $0 \leq \mu(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$;
- II) существуют $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) = \varepsilon_0 \in (0, 1)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu(x) = 1$.

Ядро V определено на множестве $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ и удовлетворяет следующим основным условиям:

- a) $V(\tau) \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}^+$;
- b) $V \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$,

а функция w , в свою очередь, обладает свойствами:

- 1) $w(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$,
- 2) $w \in B(\mathbb{R})$, где $B(\mathbb{R})$ есть множество всех ограниченных на $\mathbb{R}$ функций;
- 3) существуют $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w(t) < +\infty$.

Нелинейность G определена на множестве $\mathbb{R}^+$ и удовлетворяет следующим ограничениям:

- A) $G(0) = 0$, $G \in C(\mathbb{R}^+)$;
- B) $y = G(u)$ — возрастающая и вогнутая функция на $\mathbb{R}^+$, причем

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{G(u)}{u} = 0;$$

- C) существует непрерывное возрастающее и вогнутое отображение

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

со свойствами $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$ такое, что имеет место неравенство $G(\sigma u) \geq \varphi(\sigma)G(u)$, $\sigma \in (0, 1)$, $u \in (0, \xi)$, где число $\xi > \lambda_1 \lambda_2$ однозначно определяется из характеристического уравнения

$$u = \lambda_1 G(u) + \lambda_1 \lambda_2, \quad (2)$$

а

$$0 < \lambda_1 := \int_0^\infty V(\tau) d\tau < +\infty, \quad 0 \leq \lambda_2 := \sup_{t \in \mathbb{R}} w(t) < +\infty. \quad (3)$$

Следует отметить, что в случае, когда $\lambda_2 = 0$, существование положительного решения ξ для характеристического уравнения (2) предполагается, а в случае $\lambda_2 > 0$ существование решения $\xi > \lambda_1 \lambda_2$ характеристического уравнения (2) не предполагается и сразу следует из условий A) и B).

Вопросы допустимости линеаризации при исследовании устойчивости уравнения типа (1) обсуждены в работе [1] (см. также [2, гл. 2, п. 17]). Отметим

также, что линейный аналог уравнения (1) при $w \equiv 0, \mu \equiv 1$ возникает в демографии, где искомое решение $f(t)$ представляет из себя плотность рождений во времени t , а $V(x)$ — функция плодовитости, т.е. плотность повозрастного распределения рождений у женщин (см. [3, стр. 93]).

Вопросы существования и единственности для соответствующих нелинейных интегральных уравнений с переменным нижним пределом (на положительной полупрямой) обсуждались в работах [4–7].

В случае, когда $w \neq 0$, нелинейные интегральные уравнения с переменным верхним пределом, когда нижний предел — конечное число, изучались в работах [8–10] при различных ограничениях на ядро и на нелинейность.

В настоящей работе мы будем заниматься вопросами существования единственности и асимптотического поведения решения нелинейного уравнения (1). Структура работы следующая. Раздел 1 посвящен конструктивной разрешимости уравнения (1) в пространстве непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций. Доказывается теорема существования нетривиального непрерывного и ограниченного на $\mathbb{R}$ решения уравнения (1), причем устанавливается, что последовательные приближения

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t) (G(f_n(t)) + w(t)) dt, \\ f_0(x) &\equiv \xi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4)$$

равномерно со скоростью некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии сходятся к непрерывному и ограниченному решению (см. теорему 1). В разделе 2 исследуется асимптотическое поведение решения на $\pm\infty$ (см. теорему 2). Раздел 3 посвящен доказательству единственности решения в определенном подклассе неотрицательных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций (см. теорему 2), а также выявлению конкретных примеров функций μ, V и G , удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

1. Существование ограниченного решения уравнения (1). Рассмотрим последовательные приближения (4). Принимая во внимание условия I), а), б), 1), 2), А), В) и обозначение (3), индукцией по n несложно проверить достоверность следующих фактов:

$$f_n(x) \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Действительно, докажем, например, справедливость неравенств (6). Сначала, принимая во внимание тот факт, что число $\xi > \lambda_1 \lambda_2$ является решением характеристического уравнения (2) и учитывая условия I), а), б), 1), 2), а также обозначения (3), из (4) будем иметь

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t) (G(\xi) + w(t)) dt \leq \\ &\leq G(\xi) \int_{-\infty}^x V(x-t) dt + \lambda_2 \int_{-\infty}^x V(x-t) dt = \\ &= G(\xi) \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 = \xi = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Далее, если предположим, что неравенство (6) выполняется при некотором натуральном n , то, используя (5) и условия I), а), A), B), 1) и 2), из (4) получим, что

$$f_{n+2}(x) \leq \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(f_n(t)) + w(t))dt = f_{n+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Используя тот факт, что свертка суммируемой и ограниченной функций представляет собой непрерывную функцию (см. [11]), и учитывая непрерывность функции μ , в силу условий A), B) методом индукции нетрудно доказать, что

$$f_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание условия I), II), можно утверждать, что существует число $r > 0$ такое, что при $|x| > r$ имеет место неравенство

$$\mu(x) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (7)$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию на множестве $\mathbb{R}$:

$$\chi(x) := \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\lambda_1 G(\xi)\mu(t) + g(t)) + w(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

где

$$g(x) := \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)w(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Снова используя непрерывность свертки суммируемых и ограниченных функций, условия I), а), b), 1), 2), а также непрерывность функции μ , из (8) и (9) получаем, что

$$\chi, g \in C(\mathbb{R}), \quad g(x) \geq 0, \quad \chi(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Докажем теперь, что на самом деле существует число $\sigma_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$\chi(x) \geq \sigma_0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Пусть сначала $x \in [-2r, 2r]$, где число $r > 0$ было определено для выполнения неравенства (7). Тогда, если учитывать условия I), а), b), 1), а также неравенства (7) и (10), из (8) для всех $x \in [-2r, 2r]$ будем иметь

$$\begin{aligned} \chi(x) &\geq \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{-2r} V(x-t)(G(\lambda_1 G(\xi)\mu(t) + g(t)) + w(t))dt \geq \\ &\geq \frac{G\left(\frac{\lambda_1 \varepsilon_0}{2} G(\xi)\right)}{\xi} \int_{-\infty}^{-2r} V(x-t)dt = \frac{G\left(\frac{\lambda_1 \varepsilon_0}{2} G(\xi)\right)}{\xi} \int_{x+2r}^{\infty} V(y)dy \geq \\ &\geq \frac{G\left(\frac{\lambda_1 \varepsilon_0}{2} G(\xi)\right)}{\xi} \int_{4r}^{\infty} V(y)dy =: \sigma_1 > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим теперь, что $x > 2r$. Тогда, используя условия I), а), б), 1) и оценки (7), (10), из (8) в случае $x > 2r$ получим

$$\begin{aligned}\chi(x) &\geq \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^x V(x-t) G(\lambda_1 G(\xi) \mu(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} V(y) G(\lambda_1 G(\xi) \mu(x-y)) dy \geq \\ &\geq \frac{1}{\xi} \int_0^r V(y) G(\lambda_1 G(\xi) \mu(x-y)) dy \geq \\ &\geq \frac{G(\frac{\lambda_1 \varepsilon_0}{2} G(\xi))}{\xi} \int_0^r V(y) dy =: \sigma_2 > 0. \quad (13)\end{aligned}$$

Наконец, если $x < -2r$, то снова используя условия I), а), б), 1) и оценки (7), (10), из (8) имеем

$$\begin{aligned}\chi(x) &\geq \frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} V(y) G(\lambda_1 G(\xi) \mu(x-y)) dy \geq \frac{G(\frac{\lambda_1 \varepsilon_0}{2} G(\xi))}{\xi} \int_0^{\infty} V(y) dy = \\ &= \frac{\lambda_1}{\xi} G(\frac{\lambda_1 \varepsilon_0}{2} G(\xi)) =: \sigma_3 > 0, \quad x < -2r. \quad (14)\end{aligned}$$

Из правых частей неравенств (12), (13) и (14) немедленно следует, что $\max(\sigma_1, \sigma_2) < \sigma_3$.

Убедимся теперь, что имеет место неравенство

$$\sigma_3 < 1. \quad (15)$$

Действительно, учитывая равенство $\xi = \lambda_1 G(\xi) + \lambda_1 \lambda_2$, обозначения (3), а также условия А) и В), будем иметь

$$\sigma_3 < \frac{\lambda_1}{\xi} G(\lambda_1 G(\xi)) = \frac{\lambda_1}{\xi} G(\xi - \lambda_1 \lambda_2) \leq \frac{\lambda_1 G(\xi)}{\xi} = \frac{\xi - \lambda_1 \lambda_2}{\xi} \leq 1.$$

Таким образом, в силу (12)–(15) для $\sigma_0 = \min(\sigma_1, \sigma_2) \in (0, 1)$ приходим к неравенству (11).

Заметим теперь, что $\chi(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$. Действительно, принимая во внимание условия I), а), б), 1), 2), А), В) и обозначения (3), из (8) получим

$$\begin{aligned}\chi(x) &\leq \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^x V(x-t) (G(\lambda_1 G(\xi) + g(t)) + w(t)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^x V(x-t) (G(\lambda_1 G(\xi) + \lambda_1 \lambda_2) + w(t)) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\xi} (G(\xi) \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Теперь, используя неравенство (11), убедимся, что имеет место следующая оценка снизу:

$$f_2(x) \geq \sigma_0 f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Действительно, из (4) немедленно следует, что

$$f_1(x) = \lambda_1 \mu(x) G(\xi) + g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) = \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t) (G(\lambda_1 \mu(t) G(\xi) + g(t)) + w(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, принимая во внимание (8)–(11), (2), (6) и неравенство $0 \leq g(x) \leq \lambda_1 \lambda_2$, $x \in \mathbb{R}$, в силу условий I), а), б), 1), А), В) будем иметь

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \mu(x) \xi \cdot \chi(x) = \mu(x) \chi(x) (\lambda_1 G(\xi) + \lambda_1 \lambda_2) \geq \\ &\geq \mu(x) \chi(x) \left(\lambda_1 G(\xi) + \int_{-\infty}^x V(x-t) w(t) dt \right) = \\ &= \chi(x) f_1(x) \geq \sigma_0 f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (6) и (16) приходим к следующему двустороннему неравенству:

$$\sigma_0 f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_1(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Неравенство (17) будет играть важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

Теперь при следующих дополнительных предположениях относительно функций μ и w :

III) $\mu(x)$ не убывает на $\mathbb{R}$;

4) $w(x)$ не убывает на $\mathbb{R}$,

мы докажем, что

$$f_n(x) \text{ не убывают по } x \text{ на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (18)$$

В случае $n = 0$ утверждение (18) сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (4). Предположим, что для некоторого натурального n при всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ из $x_1 > x_2$ следует неравенство $f_n(x_1) \geq f_n(x_2)$. Тогда, записывая итерации (4) в виде

$$f_{n+1}(x) = \mu(x) \int_{\xi}^x V(y) (G(f_n(x-y)) + w(x-y)) dy,$$

$$f_0(x) \equiv \xi, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

и при этом учитывая условия а), 1), I), III), 4), А) и В), согласно индукционному предположению имеем

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_1) &\geq \mu(x_2) \int_0^{\infty} V(y) (G(f_n(x_1-y)) + w(x_1-y)) dy \geq \\ &\geq \mu(x_2) \int_0^{\infty} V(y) (G(f_n(x_2-y)) + w(x_2-y)) dy = f_{n+1}(x_2). \end{aligned}$$

Итак, утверждение (18) доказано.

Вернемся к неравенству (17). Из (17) в силу условий I), а), 1), A) и B) следует, что

$$\mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\sigma_0 f_1(t)) + w(t))dt \leq f_3(x) \leq f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Принимая во внимание условие C) и тот факт, что $\varphi(\sigma_0) \in (0, 1)$, из (19) получаем

$$\varphi(\sigma_0) f_2(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

Снова используя условия I), а), 1), A) и B), из (20) приходим к неравенствам

$$\mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\varphi(\sigma_0) f_2(t)) + w(t))dt \leq f_4(x) \leq f_3(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда с учетом условия C) и включения $\varphi(\varphi(\sigma_0)) \in (0, 1)$ получаем, что

$$\varphi(\varphi(\sigma_0)) f_3(x) \leq f_4(x) \leq f_3(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Продолжая данную процедуру на n -ом шаге, получим следующее двустороннее неравенство:

$$\underbrace{\varphi(\varphi \dots \varphi(\sigma_0))}_n f_{n+1}(x) \leq f_{n+2}(x) \leq f_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Из (21) с учетом (6) и определения нулевого приближения в итерациях (4) приходим к оценке

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \leq \xi(1 - \underbrace{\varphi(\varphi \dots \varphi(\sigma_0))}_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Теперь воспользуемся следующим неравенством из работы [12]:

$$1 - \underbrace{\varphi(\varphi \dots \varphi(\sigma_0))}_n \leq k^n(1 - \sigma_0), \quad k := \frac{1 - \varphi(\sigma_0)}{1 - \sigma_0} \in (0, 1). \quad (23)$$

С учетом (23) из (22) следует, что

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_{n+2}(x) \leq C \cdot k^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

где $C := \xi(1 - \sigma_0) > 0$.

Из (24) следует равномерная сходимость последовательности непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ к непрерывной функции $f(x)$:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad f \in C(\mathbb{R}),$$

при этом в силу (5) имеем, что $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Записывая неравенства (24) для номеров $n + 1, n + 2, \dots, n + p$, затем складывая полученные неравенства и (24), приходим к следующим оценкам:

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_{n+2+p}(x) \leq C(k^n + \dots + k^{n+p}) \leq \frac{C \cdot k^n}{1 - k}, \quad n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}.$$

В последнем неравенстве, устремляя число $p \rightarrow \infty$, получим

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f(x) \leq \frac{C \cdot k^n}{1 - k}, \quad n = 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Из (18) также следует, что $f(x)$ является неубывающей функцией на $\mathbb{R}$. Следовательно, используя непрерывность, неотрицательность и ограниченность решения $f(x)$, можно утверждать, что существуют

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =: \alpha \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =: \beta, \quad (26)$$

причем $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \xi$.

Ниже убедимся, что на самом деле $\alpha > 0$. С этой целью докажем, что имеет место оценка снизу:

$$f_n(x) \geq \tau^* f_1(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где τ^* — положительное решение характеристического уравнения: $\tau = \sigma_0 \varphi(\tau)$. Существование такого решения несложно доказать, например, при выполнении следующего дополнительного условия на функцию φ :

$$\varphi'(+0) = +\infty. \quad (28)$$

Сначала проверим выполнение неравенства (27) для номера $n = 1$. Действительно, неравенство (27) при $n = 1$ сразу получается из следующих соображений: $0 < \tau^* < \varphi(\tau^*)$ (ибо $\sigma_0 \in (0, 1)$), $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(u)/u$ не возрастает на интервале $(0, 1)$. Пусть теперь оценка (27) имеет место при некотором натуральном $n > 1$. Тогда, учитывая условия а), I), A), B) и C), из (4) будем иметь

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &\geq \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\tau^* f_1(t)) + w(t)) dt \geq \\ &\geq \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(\varphi(\tau^*) G(f_1(t)) + w(t)) dt \geq \\ &\geq \varphi(\tau^*) \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(f_1(t)) + w(t)) dt = \\ &= \varphi(\tau^*) f_2(x) = \frac{\tau^*}{\sigma_0} f_2(x) \geq \tau^* f_1(x), x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ибо $f_2(x) \geq \sigma_0 f_1(x)$ (см. (20)) и $\varphi(\tau^*) \in (0, 1)$.

В неравенстве (27), устремляя $n \rightarrow \infty$, получим $f(x) \geq \tau^* f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$. С другой стороны, $f_1(x) \geq \mu(x) G(\xi) \lambda_1$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \geq \tau^* G(\xi) \lambda_1 \lim_{x \rightarrow -\infty} \mu(x) = \tau^* G(\xi) \lambda_1 \varepsilon_0 > 0.$$

Докажем теперь следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x V(x-t) G(f(t)) dt &= \lambda_1 G(\beta), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x V(x-t) G(f(t)) dt &= \lambda_1 G(\alpha). \end{aligned} \quad (29)$$

Сначала докажем первое предельное соотношение в (29). Учитывая обозначения (3), условие а) и монотонность функций f , G , будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_1 G(\beta) - \int_{-\infty}^x V(x-t)G(f(t))dt = \\ &= \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\beta) - G(f(t)))dt = \int_0^\infty V(y)(G(\beta) - G(f(x-y)))dy = \\ &= \int_0^{x/2} V(y)(G(\beta) - G(f(x-y)))dy + \int_{x/2}^\infty V(y)(G(\beta) - G(f(x-y)))dy =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta > 0$, $f(x) \geq \alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $G \in C(\mathbb{R}^+)$, при каждом $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$G(\beta) - G(f(\tau)) < \varepsilon,$$

если только $\tau > \delta_1$.

С другой стороны очевидно, что при всяком $\varepsilon > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\int_\tau^\infty V(y)dy < \varepsilon,$$

если только $\tau > \delta_2$.

Положим $\delta := \max(\delta_1, \delta_2)$ и пусть $x > 2\delta$. Тогда

$$I_1 \leq \varepsilon \int_0^\infty V(y)dy = \lambda_1 \varepsilon, \quad I_2 \leq \varepsilon G(\beta).$$

Следовательно,

$$0 \leq \lambda_1 G(\beta) - \int_{-\infty}^x V(x-t)G(f(t))dt \leq \varepsilon(\lambda_1 + G(\beta)),$$

если только $x > 2\delta$.

Перейдем к доказательству второго предельного соотношения в (29). В этом случае для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$0 \leq G(f(t)) - G(\alpha) < \varepsilon,$$

если только $t > -\delta_0$.

Принимая во внимание обозначения (3), монотонность функции f и условия А), В), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^x V(x-t)G(f(t))dt - G(\alpha)\lambda_1 = \\ &= \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(f(t)) - G(\alpha))dt < \varepsilon \int_{-\infty}^x V(x-t)dt = \varepsilon\lambda_1, \end{aligned}$$

если только $x > -\delta_0$.

Итак, предельные соотношения (29) доказаны.

Аналогичными рассуждениями доказывается справедливость следующих предельных соотношений:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^x V(x-t)w(t)dt = \lambda_1 w_{\pm}, \quad (30)$$

где

$$0 \leq w_{\pm} := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} w(t) < +\infty.$$

Переходя к пределу в обеих частях уравнения (1) при $x \rightarrow \pm\infty$ и учитывая (29), (30), а также условия II), 3), получаем следующие характеристические уравнения относительно β и α :

$$\beta = \lambda_1 G(\beta) + \lambda_1 w_+, \quad (31)$$

$$\alpha = \lambda_1 \varepsilon_0 G(\alpha) + \lambda_1 \varepsilon_0 w_-. \quad (32)$$

Займемся теперь изучением и решением характеристических уравнений (31) и (32). С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную функцию на множестве $[\lambda_1 w_+, +\infty)$:

$$B(u) := \frac{u - \lambda_1 w_+}{G(u)} - \lambda_1, \quad u \in [\lambda_1 w_+, +\infty)$$

при условии, что $w_+ > 0$. Учитывая условия А), В), можно утверждать, что

$$B(\lambda_1 w_+) = -\lambda_1 < 0; \quad B(+\infty) = +\infty; \quad B \in C[\lambda_1 w_+, +\infty);$$

$B(u)$ возрастает на множестве $[\lambda_1 w_+, +\infty)$.

Следовательно, существует единственное число $\beta > \lambda_1 w_+$ такое, что $B(\beta) = 0$, т.е. уравнение (31) при $w_+ > 0$ имеет единственное решение $\beta > \lambda_1 w_+$.

Пусть теперь $w_+ = 0$. В этом случае уравнение (31) сводится к уравнению (2) с $\lambda_2 = 0$, и существование единственного положительного решения было заранее предположено (см. Введение). Аналогичным образом можно исследовать уравнение (32).

Итак, на основе вышеизложенных фактов приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия I), II), а), b), 1)–3), А)–С), (28) и уравнение $G(u) = \frac{u}{\lambda_1 \varepsilon_0}$ имеет положительное решение. Тогда уравнение (1) обладает неотрицательным непрерывным и ограниченным на $\mathbb{R}$ решением $f(x)$. Более того, имеют место неравенства

$$\xi \geq f(x) \geq \tau^*(\lambda_1 \mu(x)G(\xi) + g(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

и (25). Кроме того, если дополнительно выполняются условия III) и 4), то $f(x)$ является неубывающей функцией на $\mathbb{R}$, причем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta,$$

где числа $\alpha, \beta > 0$ однозначно определяются из характеристических уравнений (31) и (32) соответственно.

2. Интегральная асимптотика решения. Перейдем к исследованию интегральной асимптотики полученного решения на $\pm\infty$ при следующих дополнительных ограничениях на функции V, μ и w :

при условиях
 $\Omega_1) \int_0^\infty tV(t)dt < +\infty, 1 - \mu \in L_1(0, +\infty), w_+ - w \in L_1(0, +\infty)$ докажем,
 что

$$\beta - f \in L_1(0, +\infty),$$

а при условиях
 $\Omega_2) \int_0^\infty V(t)dt < +\infty, \mu - \varepsilon_0 \in L_1(-\infty, 0), w - w_+ \in L_1(-\infty, 0)$ аналогично
 доказывается, что

$$f - \alpha \in L_1(-\infty, 0). \quad (33)$$

Используя (31) и (3), во-первых имеем, что

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta - f(x) &= \int_{-\infty}^x V(x-t)[w_+ - w(t)]dt + \\ &+ \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\beta) - \mu(\alpha)G(f(t)))dt, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Используя (26), непрерывность и монотонность функции G , можно утверждать, что существует число $r^* > 0$ такое, что при $t > r^*$ имеет место неравенство

$$G(f(t)) \geq G(\beta/2). \quad (35)$$

Пусть $R > r^*$ — произвольное число. Тогда, принимая во внимание условия а), б) и Ω_1), а также неравенство (35) и условия А), В), из (34) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{r^*}^R (\beta - f(x))dx \leq \int_{r^*}^R \int_{-\infty}^x V(x-t)[w_+ - w(t)]dtdx + \\ &+ \int_{r^*}^R \mu(x) \int_{-\infty}^x V(x-t)(G(\beta) - G(f(t)))dtdx + \\ &+ G(\beta) \int_{r^*}^R (1 - \mu(x)) \int_{-\infty}^x V(x-t)dtdx \leq \\ &\leq \int_{r^*}^R \int_{-\infty}^{r^*} V(x-t)[w_+ - w(t)]dtdx + \int_{r^*}^R \int_{r^*}^x V(x-t)[w_+ - w(t)]dtdx + \\ &+ \lambda_1 G(\beta) \int_{r^*}^\infty (1 - \mu(x))dx + \int_{r^*}^R \int_{-\infty}^{r^*} V(x-t)(G(\beta) - G(f(t)))dtdx + \\ &+ \int_{r^*}^R \int_{r^*}^x V(x-t)(G(\beta) - G(f(t)))dtdx \leq (w_+ + \lambda_2) \int_{r^*}^R \int_{x-r^*}^\infty V(y)dydx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{r^*}^R [w_+ - w(t)] \int_t^R V(x-t) dx dt + \lambda_1 G(\beta) \int_{r^*}^\infty (1 - \mu(x)) dx + \\
 & + G(\beta) \int_{r^*}^R \int_{x-r^*}^\infty V(y) dy dx + \int_{r^*}^R (G(\beta) - G(f(t))) \int_t^R V(x-t) dx dt \leq \\
 & \leq (w_+ + \lambda_2 + G(\beta)) \int_0^\infty \int_t^\infty V(y) dy dx + \lambda_1 \int_{r^*}^\infty [w_+ - w(t)] dt + \\
 & + \lambda_1 G(\beta) \int_{r^*}^\infty (1 - \mu(x)) dx + \lambda_1 \int_{r^*}^R (G(\beta) - G(f(t))) dt = \\
 & = C_0 + \lambda_1 \int_{r^*}^R (G(\beta) - G(f(t))) dt,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_0 := (w_+ + \lambda_2 + G(\beta)) \int_0^\infty y V(y) dy + \lambda_1 G(\beta) \int_{r^*}^\infty (1 - \mu(x)) dx + \\
 + \lambda_1 \int_{r^*}^\infty [w_+ - w(t)] dt < +\infty.
 \end{aligned}$$

Итак, для любого $R > r^*$ мы получим следующую априорную оценку:

$$0 \leq \int_{r^*}^R (\beta - f(x)) dx \leq C_0 + \lambda_1 \int_{r^*}^R (G(\beta) - G(f(x))) dx. \quad (36)$$

Теперь, используя неравенство (35) для $t > r^*$, а также условия А), В) и тот факт, что $f(t) \uparrow \beta$, при $t \rightarrow +\infty$ будем иметь (см. рис. 1)

$$G(\beta) - G(f(x)) \leq \frac{G(\beta) - G(\beta/2)}{\beta/2} (\beta - f(x)), \quad x > r^*. \quad (37)$$

С другой стороны, заметим, что имеет место строгое неравенство (см. рис. 1)

$$\varkappa := \frac{2\lambda_1}{\beta} (G(\beta) - G(\beta/2)) < 1. \quad (38)$$

Действительно, учитывая условия А), В), из (31) будем иметь

$$\frac{2\lambda_1}{\beta} G(\beta/2) > \frac{\lambda_1 G(\beta)}{\beta} = \frac{\beta - \lambda_1 w_+}{\beta},$$

откуда

$$\lambda_1 G(\beta/2) > \frac{1}{2} (\beta - \lambda_1 w_+).$$

Следовательно,

$$\lambda_1 (G(\beta) - G(\beta/2)) < \lambda_1 G(\beta) - \frac{\beta}{2} + \frac{\lambda_1 w_+}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{\lambda_1 w_+}{2} \leq \frac{\beta}{2}.$$

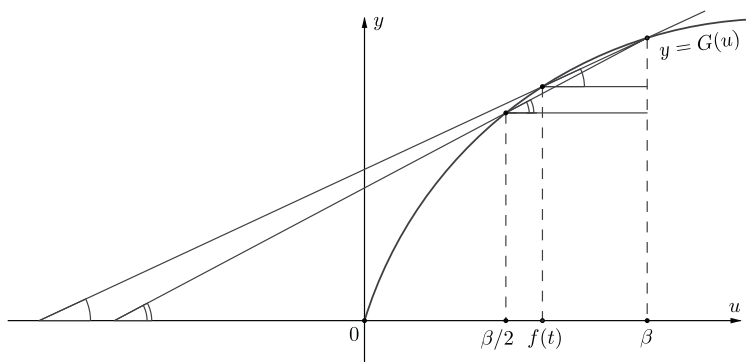


Рис. 1. Пересечение графика функции $y = G(u)$ с прямой проходящей через точки $(\beta, G(\beta))$ и $(\beta/2, G(\beta/2))$

[Figure 1. Intersection of the graph of the function $y = G(u)$ with the line passing through the points $(\beta, G(\beta))$ and $(\beta/2, G(\beta/2))$]

Учитывая (37) и (38) из (36), приходим к следующему неравенству:

$$0 \leq \int_{r^*}^R (\beta - f(x)) dx \leq \frac{C_0}{1 - \kappa}. \quad (39)$$

В (39), устремляя число R к бесконечности, получаем, что

$$0 \leq \int_{r^*}^{\infty} (\beta - f(x)) dx \leq \frac{C_0}{1 - \kappa}.$$

Так как $f \in C(\mathbb{R}^+)$, из доказанного выше следует, что $\beta - f \in L_1(0, +\infty)$. Совершая аналогичные рассуждения, можно доказать, что при условии Ω_2) имеет место также включение (33).

Таким образом, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда, если выполняется дополнительное условие Ω_1), то $\beta - f \in L_1(0, +\infty)$. Если же выполняется условие Ω_2), то $f - \alpha \in L_1(-\infty, 0)$.

3. Единственность решения. Примеры. Перейдем теперь к вопросу единственности решения уравнения (1). Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия I), II), а), б), 1)–3), А)–С), (28) и уравнение $G(u) = \frac{u}{\lambda_1 \varepsilon_0}$ имеет положительное решение. Тогда уравнение (1), кроме решения f , построенного при помощи последовательных приближений (4), в следующем классе функций

$$\mathfrak{M} := \{f \in L_{\infty}(\mathbb{R}) : \text{существует } \varepsilon > 0 \text{ такое, что } f(x) \geq \varepsilon \mu(x), x \in \mathbb{R}\}$$

других решений не имеет.

Доказательство. Сперва для корректности докажем, что построенное нами решение f принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Действительно, из теоремы 1 и условий I), а), 1) немедленно следует, что $f(x) \geq \tau^* G(\xi) \mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) \leq \xi$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f \in \mathfrak{M}$. Пусть теперь уравнение (1), кроме решения f , обладает другим решением $\tilde{f} \in \mathfrak{M}$. Сначала убедимся, что тогда имеет место неравенство

$$\tilde{f}(x) \leq \xi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (40)$$

Обозначим через $\tilde{c} := \sup_{x \in \mathbb{R}} \tilde{f}(x) < +\infty$. Тогда из (1) с учетом условий I), а), b), A), B) и обозначений (3) имеем

$$\tilde{f}(x) \leq \int_0^x V(x-t)(G(\tilde{c}) + \lambda_2)dt = \lambda_1 G(\tilde{c}) + \lambda_1 \lambda_2, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда следует, что

$$\tilde{c} \leq \lambda_1 G(\tilde{c}) + \lambda_1 \lambda_2. \quad (41)$$

Заметим, что $\tilde{c} < \xi$. Действительно, в противном случае в силу того, что функция $G(u)/u$ убывает на $(0, +\infty)$, получим

$$\frac{\lambda_1 G(\tilde{c})}{\tilde{c}} < \frac{\lambda_1 G(\xi)}{\xi}. \quad (42)$$

Однако $\lambda_1 G(\xi) = \xi - \lambda_1 \lambda_2$. Следовательно, из (42) имеем

$$\frac{\lambda_1 G(\tilde{c})}{\tilde{c}} < \frac{\xi - \lambda_1 \lambda_2}{\xi}. \quad (43)$$

С другой стороны, если использовать неравенство (41), то из (43) будем иметь

$$\frac{\tilde{c} - \lambda_1 \lambda_2}{\tilde{c}} < \frac{\xi - \lambda_1 \lambda_2}{\xi}$$

или, что то же самое,

$$(\tilde{c} - \xi)\lambda_1 \lambda_2 < 0.$$

Последнее неравенство невозможно. Следовательно, оценка (40) доказана.

Используя (40) и применяя индукцию по n , легко убедиться в достоверности следующих неравенств:

$$\tilde{f}(x) \leq f_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}. \quad (44)$$

В (44), устремляя число n к бесконечности, приходим к неравенству

$$\tilde{f}(x) \leq f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

Так как $f(x) \leq \xi$, $x \in \mathbb{R}$, из (1) и соотношения $\xi = \lambda_1 G(\xi) + \lambda_1 \lambda_2$ сразу следует, что

$$f(x) \leq \xi \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (46)$$

Поскольку $\tilde{f} \in \mathfrak{M}$, существует число $\tilde{\varepsilon} \in (0, \xi)$ такое, что

$$\tilde{f}(x) \geq \tilde{\varepsilon} \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Полагая $\tilde{\sigma} := \tilde{\varepsilon}/\xi$ и учитывая (46) и (47), получим

$$\tilde{f}(x) \geq \tilde{\sigma}\xi\mu(x) \geq \tilde{\sigma}f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

Итак, в силу (45) и (48) мы получили следующую двустороннюю оценку:

$$\tilde{\sigma}f(x) \leq \tilde{f}(x) \leq f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (49)$$

где $\tilde{\sigma} := \tilde{\varepsilon}/\xi \in (0, 1)$. Далее, совершая рассуждения, как при доказательстве равномерной сходимости последовательных приближений (4), из (49) получаем, что существуют константы $C^* > 0$ и $k_* \in (0, 1)$ такие, что

$$0 \leq f(x) - \tilde{f}(x) \leq C^*k_*^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (50)$$

В (50), устремив $n \rightarrow \infty$, получаем, что $f(x) = \tilde{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Приведем примеры функций μ , V , w и G , удовлетворяющих, всем условиям доказанных теорем. Сперва приведем примеры для функций μ и w :

$$\mu_1) \quad \mu(x) = \frac{1 - \varepsilon_0}{2} \operatorname{th} x + \frac{1 + \varepsilon_0}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon_0 \in (0, 1);$$

$$\mu_2) \quad \mu(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^x, & \text{при } x \in (-\infty, 0), \\ 1 - (1 - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1))e^{-x}, & \text{при } x \in [0, +\infty), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, $\varepsilon_1 \in (\varepsilon_0, 1)$ — произвольные числа;

$$w_1) \quad w(x) = \operatorname{th} x + 2, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$w_2) \quad w(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0), \\ 2 - e^{-x}, & x \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Теперь приведем примеры вида функции V :

$$V_1) \quad V(x) = \int_a^b e^{-xs} dB(s), \quad x \in [0, +\infty), \quad \text{где } B(s) \text{ — возрастающая непрерывная функция на } [a, b], \quad 0 < a < b \leq +\infty, \quad \text{причем}$$

$$\int_a^b \frac{dB(s)}{s} < +\infty;$$

$$V_2) \quad V(x) = de^{-x^2}, \quad x \in [0, +\infty), \quad d > 0 \text{ — числовой параметр.}$$

Наконец, приведем конкретные примеры для нелинейности G :

$$g_1) \quad G(u) = u^\alpha, \quad u \in [0, +\infty), \quad \alpha \in (0, 1) \text{ — числовой параметр;}$$

$$g_2) \quad G(u) = \gamma(1 - e^{-u^\alpha}), \quad u \in [0, +\infty), \quad \gamma > 1, \quad \alpha \in (0, 1) \text{ — числовые параметры.}$$

Следует отметить, что для примеров $g_1)$ и $g_2)$ в качестве отображения φ можно выбрать функцию $\varphi(\sigma) = \sigma^\alpha$, $\sigma \in [0, 1]$, $\alpha \in (0, 1)$.

Заключение. В статье исследовано нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна-Вольтерра на всей прямой. Доказаны теоремы существования и единственности неотрицательного непрерывного и ограниченного решения (см. Теоремы 1 и 3). Установлена равномерная сходимость соответствующих последовательных приближений. Исследована интегральная асимптотика построенного решения (см. Теорему 2) и приведены конкретные примеры ядра

и нелинейности удовлетворяющих всем ограничениям доказанных результатов.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам за полезные замечания.

Библиографический список

1. Неймарк Ю. И. О допустимости линеаризации при исследовании устойчивости // *Докл. АН СССР*, 1959. Т. 127, № 5. С. 961–964.
2. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-Difference Equations* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 6. New York, London: Academic Press, 1963. xvi+462 pp.
3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
4. Хачатрян Х. А., Терджян Ц. Э., Броян М. Ф. Однопараметрическое семейство суммируемых решений одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Вольтерры в закритическом случае // *Диффер. уравн.*, 2016. Т. 52, № 8. С. 1075–1081. EDN: WHVDVP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064116080094>.
5. Хачатрян Х. А., Терджян Ц. Э., Броян М. Ф. О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна–Вольтерра в критическом случае // *Владикавказ. матем. журн.*, 2016. Т. 18, № 4. С. 71–79. EDN: XVSSLD. DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2016.4.5996>.
6. Хачатрян Х. А., Григорян С. А. О нетривиальной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна–Вольтерра // *Владикавказ. матем. журн.*, 2012. Т. 14, № 2. С. 57–66. EDN: OYFBVT. DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2012.14.10964>.
7. Азизян Э. О., Хачатрян Х. А. Однопараметрическое семейство положительных решений для одного класса дискретных нелинейных уравнений Гаммерштейна–Вольтерра // *Уфимск. матем. журн.*, 2016. Т. 8, № 1. С. 15–21. EDN: VOXKQF.
8. Асхабов С. Н. Интегральное уравнение Вольтерра со степенной нелинейностью // *Чебышевский сб.*, 2022. Т. 23, № 5. С. 6–19. EDN: EIGULQ. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19>.
9. Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра произвольного порядка со степенной нелинейностью // *Чебышевский сб.*, 2023. Т. 24, № 4. С. 85–103. EDN: JXSSJW. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-4-85-103>.
10. Асхабов С. Н. Система неоднородных интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью // *Владикавказ. матем. журн.*, 2022. Т. 24, № 1. С. 5–14. EDN: UOCUKL. DOI: <https://doi.org/10.46698/w9450-6663-7209-q>.
11. Rudin W. *Functional Analysis* / International Series in Pure and Applied Mathematics. New York, NY: McGraw-Hill, 1991. xviii+424 pp.
12. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Вопросы существования, отсутствия и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой с оператором типа Гаммерштейна–Стилтьеса // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2024. Т. 30, № 1. С. 249–269. EDN: ECMMEF. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-249-269>.

MSC: 45G10, 47H30

On the constructive solvability of a nonlinear Volterra integral equation on the entire real line

Kh. A. Khachatryan¹, A. H. Muradyan²

¹ Yerevan State University,

1, A. Manukyan str., Yerevan, 0025, Armenia.

² Armenian State University of Economics,

128, Nalbandyan str., Yerevan, 0025, Armenia.

Abstract

A nonlinear integral equation with a Hammerstein–Volterra operator on the entire real line is considered. A constructive existence theorem for a bounded and continuous solution is established. Moreover, the uniform convergence of successive approximations to the solution is proved, with the error decreasing at a geometric rate. The integral asymptotics of the constructed solution are then investigated. Additionally, the uniqueness of the solution is demonstrated within a specific subclass of bounded and continuous functions. Finally, specific examples of equations and nonlinearities satisfying all the conditions of the theorems are provided.

Keywords: concavity, uniform convergence, iterations, monotonicity, bounded solution, limit of solution.

Received: 24th January, 2025 / Revised: 8th April, 2025 /

Accepted: 19th May, 2025 / First online: 27th June, 2025

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khachatryan Kh. A., Muradyan A. H. On the constructive solvability of a nonlinear Volterra integral equation on the entire real line, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 256–273. EDN: FBMSFM. DOI: 10.14498/vsgtu2150 (In Russian).

Authors' Details:

Khachatur A. Khachatryan  <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of the Dept.; Dept. of Theory of Functions and Differential Equations; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Aram H. Muradyan  <https://orcid.org/0009-0007-3529-9283>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept of Higher Mathematics; e-mail: muradyan.aram@asue.am

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research was supported by the Science Committee of the Republic of Armenia, scientific project no. 23RL-1A027.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for their valuable comments and suggestions.

References

1. Neimark Yu. I. On the admissibility of linearization in stability research, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, vol. 127, no. 5, pp. 961–964 (In Russian).
2. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-Difference Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 6. New York, London, Academic Press, 1963, xvi+462 pp.
3. Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: PDBBNB.
4. Khachatryan Kh. A., Terdzyan Ts. E., Broyan M. F. One-parameter family of integrable solutions of a system of nonlinear integral equations of the Hammerstein–Volterra type in the supercritical case, *Differ. Equ.*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 1036–1042. EDN: XNRJXJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266116080097>.
5. Khachatryan Kh. A., Terjyan Ts. E., Broyan M. F. On solvability of a Hammerstein–Volterra type nonlinear system of integral equations in critical case, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 71–79 (In Russian). EDN: XVSSLD. DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2016.4.5996>.
6. Khachatryan Kh. A., Grigoryan S. A. On nontrivial solvability of a nonlinear Hammerstein–Volterra type integral equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2012, vol. 14, no. 2, pp. 57–66 (In Russian). EDN: OYFBBT. DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2012.14.10964>.
7. Azizyan E. O., Khachatryan Kh. A. One-parametric family of positive solutions for a class of nonlinear discrete Hammerstein–Volterra equations, *Ufa Math. J.*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 13–19. EDN: XLIBFL. DOI: <https://doi.org/10.13108/2016-8-1-13>.
8. Askhabov S. N. Volterra integral equation with power nonlinearity, *Chebyshevskii Sb.*, 2022, vol. 23, no. 5, pp. 6–19 (In Russian). EDN: EIGULQ. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-5-6-19>.
9. Askhabov S. N. Volterra integro-differential equation of arbitrary order with power nonlinearity, *Chebyshevskii Sb.*, 2023, vol. 24, no. 4, pp. 85–103 (In Russian). EDN: JXSSJW. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-4-85-103>.
10. Askhabov S. N. A system of inhomogeneous integral equations of convolution type with power nonlinearity, *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 3, pp. 691–698. EDN: EXKOSK. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0037446623030163>.
11. Rudin W. *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics. New York, NY, McGraw-Hill, 1991, xviii+424 pp.
12. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Questions of existence, absence, and uniqueness of a solution to one class of nonlinear integral equations on the whole line with an operator of Hammerstein–Stieltjes type, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 249–269 (In Russian). EDN: ECMMEF. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2024-30-1-249-269>.



УДК 539.3

О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Исследуются вопросы построения кубических ашпроксимаций энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений гемитропных микрополярных упругих тел. Ранее были предложены Н/Е/А-представления для указанных энергетических форм. В частности, А-форма позволяет получить кубическую ашпроксимацию потенциала напряжений в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных гемитропных инвариантов, некоторые из «псевдотензорных прообразов» которых обладают чувствительностью к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

В рамках данного исследования получен полный неприводимый набор индивидуальных и совместных гемитропных целых рациональных алгебраических инвариантов для системы, состоящей из симметричных и антисимметричных частей асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения. Полученный набор инвариантов используется для построения кубической энергетической формы гемитропного тела и определения полного набора из 37 определяющих постоянных. Выведены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие квадратичные поправки и справедливые в произвольной системе криволинейных координат.

Ключевые слова: алгебраический вес, псевдотензор, наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный ал-

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 274–293. EDN: DZUMDJ. DOI: 10.14498/vsgtu2144.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

гебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело.

Получение: 8 января 2025 г. / Исправление: 19 апреля 2025 г. /
Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 5 мая 2025 г.

Введение и вводные замечания. Модели механики упругого поведения микрополярных сред основаны на энергетических формах микрополярных упругих потенциалов силовых и моментных напряжений [1–8]. Представления упругих потенциалов, необходимые для конкретной формулировки определяющих уравнений анизотропных микрополярных сред, в общем случае могут быть найдены исключительно при использовании формализма псевдотензорной алгебры [9–13], поскольку основная кинематическая переменная — вектор спинорных перемещений — обладает нечетным алгебраическим весом.¹ Аналогичное утверждение справедливо для тензора изгиба-кручения, которому естественным образом может быть приписан алгебраический вес ± 1 . Следует выделить три принципиально различных подхода к построению упругих потенциалов, подробно рассмотренных в работах авторов [10, 14–16].

Н-представление [14] наиболее естественно с точки зрения линейной тензорной алгебры и наиболее перспективно для разработки новых моделей анизотропных микрополярных тел. Данное представление наиболее простым образом позволяет осуществить редукцию анизотропного тела к полуизотропному, изотропному, ультрагемитропному или ультраизотропному случаям, а также провести обобщение на более сложные кубические определяющие законы. Ультрагемитропные и ультраизотропные тела объединяются общим термином «ультратропные» тела [17]. Их определяющие тензоры характеризуются постоянными компонентами [11, 18, 19] и могут быть непосредственно выявлены при анализе диаграмм Ная [20–26].

Е-представление энергетической формы [26, 27] основано на разложении асимметричных тензоров деформаций и изгиба-кручения на симметричную и антисимметричную составляющие с последующей заменой антисимметричных частей соответствующими векторами. Данный подход наиболее применим для анализа структур анизотропии с использованием диаграмм Ная [20–22], поскольку позволяет определить количество независимых определяющих постоянных и установить наличие или отсутствие алгебраических связей между ними [23–26].

А-представление [8, 29], в существенной степени основанное на результатах теории алгебраических инвариантов, представляет собой линейную комбинацию индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов. Теоретические основы целых рациональных алгебраических инвариантов подробно изложены в классических монографиях [11, 19].

Настоящее исследование направлено на развитие подходов к построению энергетических форм для потенциалов силовых и моментных напряжений

¹В противном случае в указанных энергетических представлениях теряются члены, содержащие внутреннее произведение тензоров деформаций и изгиба-кручения.

микрополярных упругих тел. В рамках работы получена полная неприводимая система индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных составляющих: асимметричного тензора деформаций, тензора изгиба-кручения и векторов, соответствующих их антисимметричным составляющим. Полученная система инвариантов применяется для построения кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного/изотропного тела и определения соответствующих определяющих постоянных (механических моделей) микрополярной упругости. Следует отметить, что аналогичный подход для изотропного микрополярного тела рассматривался в работе [2], где было предложено шестиконстантное А-представление энергетической формы с последующим выводом основных уравнений микрополярной упругости.

Изложение существенно опирается на терминологию, обозначения, методы и результаты, разработанные в цикле предыдущих исследований [8, 14–16, 26–36].

1. Необходимые сведения из псевдотензорной алгебры и теории целых рациональных алгебраических инвариантов. Приведем необходимые сведения и понятия из современной геометрии и тензорной алгебры [11–13, 37]. В дальнейшем изложении, когда это не очевидно, будем обозначать вес псевдотензора верхним индексом в квадратных скобках, а его ранг — нижним индексом в круглых скобках:

$$\begin{matrix} [g] \\ \mathbf{T} \\ (n) \end{matrix},$$

где g — алгебраический вес, а n — ранг псевдотензора $\mathbf{T}$.

В соответствии с общепринятой практикой нулевой вес абсолютных тензоров и веса фундаментальных псевдотензоров в обозначениях явно не указываются. Кроме того, для упрощения записи ранг тензора/псевдотензора опускается в случаях, когда он однозначно определяется из контекста, что позволяет избежать излишней громоздкости тензорных уравнений.

Последующие рассуждения проводятся в трехмерном евклидовом пространстве. Введем локальный ковариантный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Смешанное произведение векторов базиса [37] определяет фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e и две псевдоскалярные единицы в соответствии с [18]:

$$e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1},$$

что позволяет классифицировать локальные базисные системы на право- и левоориентированные в зависимости от знака псевдотензорной единицы.

Введем скалярную функцию $w.g.t$, ставящую в соответствие псевдотензору его алгебраический вес. Например,

$$w.g.t \left(\begin{matrix} [g] \\ 1 \end{matrix} \right) = g.$$

Псевдотензор $\begin{matrix} [g] \\ \mathbf{T} \\ (n) \end{matrix}$ алгебраического веса g и ранга n может быть преобразован в абсолютный тензор того же ранга с помощью соответствующей степени

псевдоскалярной единицы:

$$\mathbf{T}_{(n)} = \begin{matrix} [-g] & [g] \\ 1 & \mathbf{T}_{(n)} \end{matrix}.$$

В последнем равенстве выполняется правило баланса весов (weights balance rule) [38–40]. Действительно, имеем

$$\text{w.g.t} \left(\mathbf{T}_{(n)} \right) = \text{w.g.t} \left(\begin{matrix} [-g] & [g] \\ 1 & \mathbf{T}_{(n)} \end{matrix} \right) = -g + g = 0.$$

Настоящее исследование существенно опирается на теорию целых рациональных алгебраических инвариантов, фундаментальное изложение которой представлено в монографиях [11, 19, 41, 42]. Рассмотрим основные понятия и положения данной теории.

Определение индивидуального псевдоинварианта алгебраического веса a для псевдотензора приведено в монографии [11]. Отметим, что при $a = 0$ инвариант носит название абсолютного инварианта, при $a \neq 0$ — относительного, или псевдоинварианта.

Аналогичным образом определяется совместный инвариант нескольких тензоров/псевдотензоров.

Как известно, для заданной системы тензоров существует бесконечное множество инвариантов (индивидуальных/совместных). Если среди них имеются нетривиальные (не равные тождественно нулю), то их количество также будет бесконечным. Это следует уже из того, что любая целая рациональная функция с числовыми коэффициентами от нескольких инвариантов системы при определенных условиях сама является инвариантом той же системы. В частности, таким свойством обладает произведение инвариантов.

Указанное обстоятельство приводит к понятию *неприводимого инварианта* системы, т.е. инварианта, который не может быть выражен в виде целой рациональной функции от других инвариантов той же системы. Совокупность всех неприводимых инвариантов системы образует ее *полную систему инвариантов*. Иначе говоря, инварианты системы тензоров образуют ее полную систему инвариантов, если всякий инвариант системы представляет собой целую рациональную функцию инвариантов и если, кроме того, никакой из инвариантов не является целой рациональной функцией остальных (или некоторых из них).

Без дополнительного исследования, разумеется, невозможно утверждать, что для произвольной системы тензоров число неприводимых инвариантов обязательно конечно. Поэтому с принципиальной точки зрения весьма важной является теорема Гильберта, которая устанавливает, что полная система инвариантов любой конечной системы тензоров состоит из конечного числа инвариантов [11].

2. Следы, образующие целый рациональный базис относительно гемитропной группы преобразований. Рассмотрим систему двух симметричных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и двух антисимметричных $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ тензоров второго ранга. Согласно [19], полная система индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов для такой системы включает 86 неприводимых элементов. Для целей настоящего исследования достаточно рассмотреть подмножество из 20

гемитропных инвариантов, имеющих первую, вторую и третью степени относительно компонент указанных тензоров [19]:

$$\begin{aligned}
 & 1) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2]; \quad 6) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^2]; \quad 11) \operatorname{tr}[\mathbf{BA}^2]; \quad 16) \operatorname{tr}[\mathbf{VW}]; \\
 & 2) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2]; \quad 7) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^3]; \quad 12) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}]; \quad 17) \operatorname{tr}[\mathbf{VAB}]; \\
 & 3) \operatorname{tr}[\mathbf{A}]; \quad 8) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^3]; \quad 13) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}]; \quad 18) \operatorname{tr}[\mathbf{WAB}]; \\
 & 4) \operatorname{tr}[\mathbf{B}]; \quad 9) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}]; \quad 14) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]; \quad 19) \operatorname{tr}[\mathbf{VWA}]; \\
 & 5) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^2]; \quad 10) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}^2]; \quad 15) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]; \quad 20) \operatorname{tr}[\mathbf{VWB}].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и далее будем опускать операцию внутреннего произведения тензоров/псевдотензоров. Каждый инвариантный след снабжается уникальным идентификационным номером от 1 до 20.

Вычисление инвариантов (1) в заданной криволинейной координатной системе [11, с. 327] удобно производить в смешанных компонентах:

$$\begin{aligned}
 & 1) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot s}; \quad 6) B_s^{\cdot k} B_k^{\cdot s}; \quad 11) B_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 16) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot s}; \\
 & 2) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot s}; \quad 7) A_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 12) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 17) V_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \\
 & 3) A_k^{\cdot k}; \quad 8) B_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 13) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 18) W_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \\
 & 4) B_k^{\cdot k}; \quad 9) A_s^{\cdot k} B_k^{\cdot s}; \quad 14) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \quad 19) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot s}; \\
 & 5) A_s^{\cdot k} A_k^{\cdot s}; \quad 10) A_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 15) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}; \quad 20) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot s}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что данная форма представления не включает метрический тензор и легко запоминается.

Выберем сначала линейные инварианты из списка (2):

$$3; 4. \tag{3}$$

Следует заметить, что линейные инварианты (3) могут быть заданы альтернативным эквивалентным способом (например, $A_k^{\cdot k}$ и $B_k^{\cdot k}$).

Сформируем набор квадратичных инвариантов, выбрав соответствующие элементы из списка (2):

$$1; 2; 3 \times 3, 3 \times 4; 4 \times 4; 5; 6; 9; 16, \tag{4}$$

где номера соответствуют позициям инвариантов в исходном списке.

Набор (4) включает 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были применены при построении квадратичной энергетической формы в работах [8, 29].

Для построения аппроксимаций высших порядков (кубических, четвертых, пятых и т.д.) энергетических форм необходимо расширить систему рациональных инвариантов, включив инварианты высших степеней (3, 4, 5 и т.д.). Кубические гемитропные инварианты представляют особый интерес, поскольку позволяют получить квадратичные поправки к линейным определяющим уравнениям теории микрополярной упругости.

Построим неприводимую систему кубических инвариантов, образованных совместными произведениями инвариантов из списка (1) общей степени 3.

Полная система из 28 кубических гемитропных инвариантов имеет следующий вид:

$$1 \times 3, 1 \times 4; 2 \times 3, 2 \times 4; 3^3, 3^2 \times 4, 3 \times 4^2, 3 \times 5, 3 \times 6, 3 \times 9, 3 \times 16; 4^3, 4 \times 5, 4 \times 6, 4 \times 9, 4 \times 16; 7; 8; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 17; 18; 19; 20.$$

Объединение данной системы с квадратичным набором (4) позволяет построить кубическую аппроксимацию энергетической формы обобщенного гемитропного микрополярного упругого тела. Для этого необходимо выполнить подстановку, указанную в следующем разделе, вместо тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$.

3. Кубическая аппроксимация энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела. Опираясь на результаты предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба-кручения. Для этого выполним замену:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \quad (5)$$

В смешанных компонентах соотношения (5) примут вид²

$$\begin{aligned} A_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}], & B_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}], \\ V_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}], & W_{s \cdot}^{\cdot k} &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}]. \end{aligned} \quad (6)$$

Смешанные тензорные компоненты в (6) могут быть заданы альтернативным эквивалентным способом (например, $A_{s \cdot}^{\cdot k}$ и $B_{s \cdot}^{\cdot k}$).

Применяя замену (5) и учитывая схему нумерации, принятую в работах [8, 29], преобразуем систему квадратичных гемитропных инвариантов (4) к следующему виду:

$$\begin{aligned} {}^2\text{I}_1 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}]^2, & {}^2\text{I}_2 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}]^2, \\ {}^2\text{I}_3 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\epsilon_{k \cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot s}], & {}^2\text{I}_4 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \\ {}^2\text{I}_5 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\epsilon_{k \cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{\cdot k}^{\cdot s}], & {}^2\text{I}_6 &= \frac{1}{4} [\kappa_{s \cdot}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \\ {}^2\text{I}_7 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] [\kappa_{s \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}], & {}^2\text{I}_8 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \\ {}^2\text{I}_9 &= \frac{1}{4} [\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{k \cdot}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}], \end{aligned} \quad (7)$$

а систему гемитропных кубических инвариантов, полученную в предыдущем

²Отметим, что выражения вида $\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}$ корректно интерпретируются как сумма двух тензоров, поскольку $\epsilon_{s \cdot}^{\cdot k} = \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}$.

разделе статьи, примем в форме

$$\begin{aligned}
{}^3\mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot k}]^3, & {}^3\mathfrak{J}_2 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot k}]^3, \\
{}^3\mathfrak{J}_3 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_4 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_5 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_6 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_7 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_8 &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_9 &= \frac{1}{8} [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}]^2 [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{10} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot k}]^2 [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{11} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{12} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{13} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} + \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{14} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{15} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{16} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} + \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{17} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{18} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{19} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{m\cdot}^{\cdot m}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{20} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{m\cdot}^{\cdot m}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{\cdot l}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{\cdot k}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{21} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}], \\
{}^3\mathfrak{J}_{22} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{\cdot s}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{\cdot l}] [\epsilon_{l\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{l\cdot}^{\cdot s}],
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 {}^3\mathfrak{J}_{23} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{24} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{k\cdot}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot l} - \kappa_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{25} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{s\cdot}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{26} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{s\cdot}^{k\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot s} - \kappa_{l\cdot}^{s\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{27} &= \frac{1}{8} [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{s\cdot}^{m\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{k\cdot}], \\
 {}^3\mathfrak{J}_{28} &= \frac{1}{8} [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{s\cdot}^{m\cdot}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot l} - \epsilon_{k\cdot}^{l\cdot}] [\kappa_{l\cdot}^{\cdot k} - \kappa_{l\cdot}^{k\cdot}].
 \end{aligned}$$

А-представление кубической аппроксимации энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системам квадратичных (7) и кубических (8) инвариантов, может быть представлено в компактной форме следующим образом:

$$\mathcal{U} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^9 {}^2C_{\mathfrak{c}} {}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{28} {}^3C_{\mathfrak{a}} {}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}, \quad (9)$$

где ${}^2\mathfrak{I}_{\mathfrak{c}}$ — квадратичные инварианты; ${}^3\mathfrak{J}_{\mathfrak{a}}$ — кубические инварианты, а для определяющих модулей введены следующие обозначения:

- ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ — модули квадратичного приближения;
- ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ — модули, отвечающие за квадратичные поправки.

Следует особо отметить чувствительность части определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям в трехмерном пространстве. Это свойство обусловлено возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

Таким образом, алгебраическая природа 37 определяющих постоянных ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) и ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) становится очевидной: они представляют собой неопределенные коэффициенты в линейной комбинации неприводимых систем квадратичных (7) и кубических (8) инвариантов.

4. Определяющие уравнения гемитропной микрополярной упругости, включающие квадратичные поправки. Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, соответствующие энергетической форме (9), получены в виде

$$t_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})}, \quad \mu_{\cdot k}^{s\cdot} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})}. \quad (10)$$

Для симметричных и антисимметричных частей силовых и моментных

напряжений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[t_{s\cdot}^{\cdot k} + t_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\ \frac{1}{2}[\mu_{s\cdot}^{\cdot k} + \mu_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\ \frac{1}{2}[t_{s\cdot}^{\cdot k} - t_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\epsilon_{\cdot s}^{k\cdot})}\right], \\ \frac{1}{2}[\mu_{s\cdot}^{\cdot k} - \mu_{\cdot s}^{k\cdot}] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\kappa_{\cdot s}^{k\cdot})}\right].\end{aligned}$$

Подставив выражение для потенциала (9) в уравнения (10), получим

$$\begin{aligned}t_{s\cdot}^{\cdot k} &= \sum_{c=1}^9 {}^2C_c \frac{\partial^2 I_c}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{a=1}^{28} {}^3C_a \frac{\partial^3 \mathfrak{I}_a}{\partial (\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k})}, \\ \mu_{s\cdot}^{\cdot k} &= \sum_{c=1}^9 {}^2C_c \frac{\partial^2 I_c}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})} + \sum_{a=1}^{28} {}^3C_a \frac{\partial^3 \mathfrak{I}_a}{\partial (\kappa_{s\cdot}^{\cdot k})}.\end{aligned}\tag{11}$$

Вычислим частные производные, входящие в уравнения (11). Начнем с вычисления производных от квадратичных инвариантов. Для квадратичных членов получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I_1}{\partial (\epsilon_p^{\cdot q})} &= \frac{\partial 3 \times 3}{\partial (\epsilon_p^{\cdot q})} = \frac{1}{2}[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\epsilon_{s\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial^2 I_2}{\partial (\kappa_p^{\cdot q})} &= \frac{\partial 4 \times 4}{\partial (\kappa_p^{\cdot q})} = \frac{1}{2}[\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = [\kappa_{s\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{k\cdot}] \delta_q^p, \\ \frac{\partial^2 I_3}{\partial (\epsilon_p^{\cdot q})} &= \frac{\partial 5}{\partial (\epsilon_p^{\cdot q})} = \frac{1}{4}[\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial^2 I_4}{\partial (\kappa_p^{\cdot q})} &= \frac{\partial 6}{\partial (\kappa_p^{\cdot q})} = \frac{1}{4}[\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{k\cdot}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{s\cdot}] + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\kappa_{s\cdot}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{q\cdot}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{p\cdot}, \\ \frac{\partial^2 I_5}{\partial (\epsilon_p^{\cdot q})} &= \frac{\partial 1}{\partial (\epsilon_p^{\cdot q})} = \frac{1}{4}[\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\epsilon_{k\cdot}^{\cdot s} - \epsilon_{\cdot k}^{s\cdot}] + \\ &\quad + \frac{1}{4}[\epsilon_{s\cdot}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{k\cdot}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \epsilon_{q\cdot}^{\cdot p} - \epsilon_{\cdot q}^{p\cdot},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I_6}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 2}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] + \\
 &+ \frac{1}{4} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot k} - \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \kappa_{\cdot q}^{\cdot p} - \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}, \\
 \frac{\partial^2 I_7}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 3 \times 4}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p, \\
 \frac{\partial^2 I_7}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 3 \times 4}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] [\delta_l^p \delta_q^l + g_{mq} g^{pm}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p, \\
 \frac{\partial^2 I_8}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 9}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k + g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] = \frac{1}{2} [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}], \\
 \frac{\partial^2 I_8}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 9}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\delta_k^p \delta_q^s + g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}], \\
 \frac{\partial^2 I_9}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 16}{\partial (\epsilon_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\delta_s^p \delta_q^k - g_{sq} g^{pk}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} - \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] = \frac{1}{2} [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} - \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}], \\
 \frac{\partial^2 I_9}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} &= \frac{\partial 16}{\partial (\kappa_{\cdot q}^{\cdot q})} = \frac{1}{4} [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} - \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\delta_k^p \delta_q^s - g_{kq} g^{ps}] = \frac{1}{2} [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} - \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}],
 \end{aligned}$$

Отметим свойства символа Кронекера

$$\delta_{\cdot p}^{\cdot q} = \delta_{\cdot q}^{\cdot p} = \delta_q^p,$$

которые использованы при вычислении производных.

Ввиду чрезмерной громоздкости получаемых выражений опустим явный вид производных от кубических инвариантов.

Вычислив все необходимые производные в соответствии с (11), получим окончательные выражения для тензоров силовых и моментных напряжений:

$$\begin{aligned}
 t_{\cdot q}^{\cdot p} &= {}^2C_1 [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p + {}^2C_3 [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] + {}^2C_5 [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} - \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_7 [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}] \delta_q^p + \\
 &+ \frac{1}{2} {}^2C_8 [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_9 [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} - \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] + \frac{3}{4} {}^3C_1 [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}]^2 \delta_q^p + \\
 &+ \frac{3}{8} {}^3C_3 \left[[\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] + [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot p}] [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot s}] \right] + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_5 \left[[\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] [\epsilon_{\cdot l}^{\cdot l} + \epsilon_{\cdot m}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\epsilon_{\cdot k}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_6 [\epsilon_{\cdot q}^{\cdot p} + \epsilon_{\cdot q}^{\cdot p}] [\kappa_{\cdot l}^{\cdot l} + \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}] + \frac{1}{4} {}^3C_7 [\kappa_{\cdot s}^{\cdot k} + \kappa_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] \delta_q^p + \\
 &+ \frac{1}{2} {}^3C_9 [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot s} + \epsilon_{\cdot k}^{\cdot k}] [\kappa_{\cdot l}^{\cdot l} + \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}] \delta_q^p + \frac{1}{4} {}^3C_{10} [\kappa_{\cdot s}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot k}]^2 \delta_q^p + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_{11} \left[[\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] [\epsilon_{\cdot l}^{\cdot l} + \epsilon_{\cdot m}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\cdot s}^{\cdot k} + \epsilon_{\cdot s}^{\cdot k}] [\kappa_{\cdot k}^{\cdot s} + \kappa_{\cdot k}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 &+ \frac{1}{4} {}^3C_{12} [\kappa_{\cdot q}^{\cdot p} + \kappa_{\cdot q}^{\cdot p}] [\kappa_{\cdot l}^{\cdot l} + \kappa_{\cdot m}^{\cdot m}] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} {}^3C_{13} \left[[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\epsilon^{pl} + \epsilon^{lp}] [\kappa_{lq} + \kappa_{ql}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{14} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot k} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot p}] + [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{15} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{16} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] \right] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_{17} \left[2[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{m}}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k} - \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s} - \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_{18} [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{m}}^{\cdot m}] + \frac{1}{4} {}^3C_{19} [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot k} - \kappa_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{21} \left[[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{22} \left[[\kappa_{\dot{s}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot k} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot p}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{23} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot l} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{25} \left[[\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot l}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{l}}^{\cdot p}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \right. \\
& \quad \left. + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] \right] + \\
& + \frac{1}{8} {}^3C_{26} \left[[\kappa_{\dot{s}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] \right] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_{27} \left[[\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{m}}^{\cdot m}] + [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k} - \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\kappa_{\dot{k}}^{\cdot s} - \kappa_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
& \quad + \frac{1}{4} {}^3C_{28} [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{l}}^{\cdot l} + \kappa_{\dot{m}}^{\cdot m}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{\dot{q}}^{p\cdot} = & {}^2C_2 [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot k}] \delta_q^p + {}^2C_4 [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] + {}^2C_6 [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} - \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_7 [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot s} + \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot k}] \delta_q^p + \\
& + \frac{1}{2} {}^2C_8 [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} + \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] + \frac{1}{2} {}^2C_9 [\epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p} - \epsilon_{\dot{q}}^{\cdot p}] + \frac{3}{4} {}^3C_2 [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{k}}^{\cdot k}]^2 \delta_q^p + \\
& + \frac{3}{8} {}^3C_4 [[\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} + \kappa^{sp}] + [\kappa_{\dot{s}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{s}}^{\cdot p}] [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot s} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot s}]] + \\
& + \frac{1}{4} {}^3C_6 [\epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k} + \epsilon_{\dot{s}}^{\cdot k}] [\epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s} + \epsilon_{\dot{k}}^{\cdot s}] \delta_q^p + \frac{1}{4} {}^3C_7 [\kappa_{\dot{q}}^{\cdot p} + \kappa_{\dot{q}}^{\cdot p}] [\epsilon_{\dot{l}}^{\cdot l} + \epsilon_{\dot{m}}^{\cdot m}] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} {}^3C_8 \left[[\kappa_q^{\cdot p} + \kappa_q^{\cdot p}] [\kappa_l^{\cdot l} + \kappa_m^{\cdot m}] + [\kappa_s^{\cdot k} + \kappa_s^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot s} + \kappa_k^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_9 [\epsilon_s^{\cdot s} + \epsilon_k^{\cdot k}]^2 \delta_p^q + \frac{1}{2} {}^3C_{10} [\epsilon_s^{\cdot s} + \epsilon_l^{\cdot l}] [\kappa_k^{\cdot k} + \kappa_m^{\cdot m}] \delta_p^q + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{11} [\epsilon_q^{\cdot p} + \epsilon_q^{\cdot p}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_s^{\cdot s}] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{12} \left[[\kappa_q^{\cdot p} + \kappa_q^{\cdot p}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_m^{\cdot m}] + [\epsilon_s^{\cdot k} + \epsilon_s^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot s} + \kappa_k^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{13} \left[[\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{\cdot k}] [\epsilon_k^{\cdot p} + \epsilon_k^{\cdot p}] + [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} + \epsilon_{qk}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{14} \left[[\kappa_q^{\cdot l} + \kappa_q^{\cdot l}] [\epsilon_l^{\cdot p} + \epsilon_l^{\cdot p}] + [\kappa^{pl} + \kappa^{lp}] [\epsilon_{lq} + \epsilon_{ql}] + \right. \\
 & + [\kappa_s^{\cdot p} + \kappa_s^{\cdot p}] [\epsilon_q^{\cdot s} + \epsilon_q^{\cdot s}] + [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\epsilon^{ps} + \epsilon^{sp}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{15} \left[[\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\epsilon^{ps} - \epsilon^{sp}] + [\epsilon_s^{\cdot p} + \epsilon_s^{\cdot p}] [\epsilon_q^{\cdot s} - \epsilon_q^{\cdot s}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{16} \left[[\epsilon_q^{\cdot p} + \epsilon_q^{\cdot p}] [\kappa_q^{\cdot s} - \kappa_q^{\cdot s}] + [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \right. \\
 & + [\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot p} + \kappa_k^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} + \kappa_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{18} [\epsilon_s^{\cdot k} - \epsilon_s^{\cdot k}] [\epsilon_k^{\cdot s} - \epsilon_k^{\cdot s}] \delta_q^p + \frac{1}{4} {}^3C_{19} [\kappa_q^{\cdot p} - \kappa_q^{\cdot p}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_m^{\cdot m}] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{20} \left[2[\kappa_q^{\cdot p} - \kappa_q^{\cdot p}] [\kappa_l^{\cdot l} + \kappa_m^{\cdot m}] + [\kappa_s^{\cdot k} - \kappa_s^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot s} - \kappa_k^{\cdot s}] \delta_q^p \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{22} \left[[\epsilon_q^{\cdot l} - \epsilon_q^{\cdot l}] [\epsilon_l^{\cdot p} - \epsilon_l^{\cdot p}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\epsilon^{pl} - \epsilon^{lp}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{23} \left[[\epsilon_s^{\cdot p} + \epsilon_s^{\cdot p}] [\kappa_q^{\cdot s} - \kappa_q^{\cdot s}] - [\epsilon_{sq} + \epsilon_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \right. \\
 & + [\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot p} - \kappa_k^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{24} \left[[\kappa_q^{\cdot l} - \kappa_q^{\cdot l}] [\kappa_l^{\cdot p} - \kappa_l^{\cdot p}] + [\kappa_{lq} - \kappa_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \right. \\
 & + [\kappa_s^{\cdot p} + \kappa_s^{\cdot p}] [\kappa_q^{\cdot s} - \kappa_q^{\cdot s}] - [\kappa_{sq} + \kappa_{qs}] [\kappa^{ps} - \kappa^{sp}] + \\
 & + [\kappa_q^{\cdot k} + \kappa_q^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot p} - \kappa_k^{\cdot p}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\kappa_{kq} - \kappa_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{25} \left[[\epsilon_q^{\cdot k} + \epsilon_q^{\cdot k}] [\epsilon_k^{\cdot p} - \epsilon_k^{\cdot p}] - [\epsilon^{pk} + \epsilon^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \right] + \\
 & + \frac{1}{8} {}^3C_{26} \left[[\epsilon_q^{\cdot l} - \epsilon_q^{\cdot l}] [\kappa_l^{\cdot p} - \kappa_l^{\cdot p}] + [\epsilon_{lq} - \epsilon_{ql}] [\kappa^{pl} - \kappa^{lp}] + \right. \\
 & + [\kappa_q^{\cdot k} + \kappa_q^{\cdot k}] [\epsilon_k^{\cdot p} - \epsilon_k^{\cdot p}] - [\kappa^{pk} + \kappa^{kp}] [\epsilon_{kq} - \epsilon_{qk}] \left. \right] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{27} [\kappa_q^{\cdot p} - \kappa_q^{\cdot p}] [\epsilon_l^{\cdot l} + \epsilon_m^{\cdot m}] + \\
 & + \frac{1}{4} {}^3C_{28} \left[[\epsilon_q^{\cdot p} - \epsilon_q^{\cdot p}] [\kappa_l^{\cdot l} + \kappa_m^{\cdot m}] + [\epsilon_s^{\cdot k} - \epsilon_s^{\cdot k}] [\kappa_k^{\cdot s} - \kappa_k^{\cdot s}] \delta_q^p \right].
 \end{aligned}$$

Для упрощения работы с определяющими постоянными введем новые па-

раметры. Вместо девяти исходных постоянных ${}^2C_{\mathfrak{c}}$ ($\mathfrak{c} = 1, \dots, 9$) из выражения для упругого потенциала (9) определим следующие модули:

$$\begin{aligned} {}^2C_1 &= G\nu(1 - 2\nu)^{-1}, & {}^2C_2 &= GL^2c_3, & {}^2C_3 &= G, \\ {}^2C_4 &= GL^2, & {}^2C_5 &= Gc_1, & {}^2C_6 &= GL^2c_2, \\ {}^2C_7 &= GLc_4, & {}^2C_8 &= GLc_5, & {}^2C_9 &= GLc_6. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, вместо постоянных ${}^3C_{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a} = 1, \dots, 28$) введем

$$\begin{aligned} {}^3C_1 &= Gc_7, & {}^3C_2 &= GL^3c_8, & {}^3C_3 &= Gc_9, & {}^3C_4 &= GL^3c_{10}, \\ {}^3C_5 &= Gc_{11}, & {}^3C_6 &= GLc_{12}, & {}^3C_7 &= GL^2c_{13}, & {}^3C_8 &= GL^3c_{14}, \\ {}^3C_9 &= GLc_{15}, & {}^3C_{10} &= GL^2c_{16}, & {}^3C_{11} &= GLc_{17}, & {}^3C_{12} &= GL^2c_{18}, \\ {}^3C_{13} &= GLc_{19}, & {}^3C_{14} &= GL^2c_{20}, & {}^3C_{15} &= GLc_{21}, & {}^3C_{16} &= GL^2c_{22}, \\ {}^3C_{17} &= Gc_{23}, & {}^3C_{18} &= GLc_{24}, & {}^3C_{19} &= GL^2c_{25}, & {}^3C_{20} &= GL^3c_{26}, \\ {}^3C_{21} &= Gc_{27}, & {}^3C_{22} &= GLc_{28}, & {}^3C_{23} &= GL^2c_{29}, & {}^3C_{24} &= GL^3c_{30}, \\ {}^3C_{25} &= GLc_{31}, & {}^3C_{26} &= GL^2c_{32}, & {}^3C_{27} &= GLc_{33}, & {}^3C_{28} &= GL^2c_{34}. \end{aligned} \quad (13)$$

В результате мы получаем систему из двух размерных параметров и тридцати пяти безразмерных параметров: G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений); ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности); L — характеристическая микродлина; c_s ($s = 1, \dots, 34$) — не имеющие физической размерности постоянные.

Заключение. В работе исследуется построение квадратичных поправок к определяющим уравнениям для силовых и моментных напряжений в гемитропных микрополярных упругих телах.

1. Ранее были предложены Н/Е/А-представления энергетических потенциалов. Среди них только А-форма позволяет получить кубическую аппроксимацию энергетического потенциала для гемитропного микрополярного тела в виде полиномиальной линейной комбинации рациональных инвариантов. Важно отметить, что часть этих инвариантов, имеющих псевдотензорную природу, проявляет чувствительность к зеркальным преобразованиям в трехмерном пространстве.
2. Для системы, состоящей из двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга, построен полный неприводимый набор индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов. Важно отметить, что представленная форма не содержит метрического тензора [11].
3. Полученный набор инвариантов использован для построения кубической энергетической формы гемитропного микрополярного тела и формирования полного набора из 37 определяющих постоянных, характеризующих упругие свойства материала.
4. Получены определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений, включающие квадратичные поправки, справедливые в произвольной криволинейной системе координат. С этой целью вычислены

производные по асимметричным тензорным аргументам от квадратичных и кубических инвариантов.

5. Получены соотношения (12) и (13), устанавливающие соответствие между формальным представлением и физически интерпретируемыми параметрами материала — модулем сдвига, коэффициентом Пуассона, характеристической микродлиной и тридцатью четырьмя безразмерными параметрами, полностью характеризующими упругие свойства гемитропного материала в кубическом приближении.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

Библиографический список

1. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 pp.
2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 1964. vol. 16. pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine / International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
5. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity* / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. vol. 15. Berlin: Springer, 2004. xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
6. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mech.*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
7. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
8. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
9. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924. vol. 26, no. 3. pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.2307/1989146>.
10. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms* / Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. vol. 24. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. viii+102 pp.
11. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
12. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 434 pp.
13. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
14. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 4. С. 108–115. EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.

15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №3. С. 86–100. EDN: YOENQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
16. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. №1. С. 110–121. EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
17. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Волновые критерии ультратропности микрополярных упругих тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №4. С. 128–138. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2024.62.4.009>.
18. Радаев Ю. Н. Тензоры с постоянными компонентами в определяющих уравнениях гемитропного микрополярного тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. №5. С. 98–110. EDN: PHNOCG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992370006X>.
19. Spencer A. J. M. Theory of invariants / *Continuum Physics*. vol.1. New York: Academic Press, 1971. pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
20. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford: Clarendon Press, 1957. xv+322 pp.
21. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1957. viii+115 pp.
22. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig: B.G. Teubner, 1928. xxvi+978 pp. (In German)
23. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 6. pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700243>.
24. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Двумерные фигуры Ная для гемитропных микрополярных упругих тел // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2024. Т. 24, №1. С. 109–122. EDN: FKFRHA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>.
25. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном способе построения фигур Ная в асимметричных теориях демитропной микрополярной упругости // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. №3. С. 100–111. EDN: KSSOKR. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>.
26. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radaev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultrasotropic micropolar elastic solids // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 3. pp. 1311–1320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424603719>.
27. Murashkin E. V., Radaev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol. 44, no. 6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
28. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2024. vol. 45, no. 5. pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
29. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, №4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
30. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2023. Т. 165, №4. С. 389–403. EDN: HTQAHJ. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.
31. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Связанная термоупругость гемитропных сред. Псевдотензорная формулировка // *Изв. РАН. МТТ*, 2023. №3. С. 163–176. EDN: JMQVBJ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922600876>.

32. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids // *Mech. Solids*, 2023. vol. 58, no. 9. pp. 3111–3119. EDN: WBUGBA. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700255>.
33. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К поливариантности основных уравнений связанной термоупругости микрополярного тела // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. № 3. С. 112–128. EDN: RQUKBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>.
34. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Мультивесовая термомеханика гемитропных микрополярных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2023. № 4. С. 86–120. EDN: RQUKBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>.
35. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity // *Mech. Solids*, 2024. vol. 59, no. 1. pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0025654424700274>.
36. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Термомеханические состояния гиротропных микрополярных тел // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 659–678. EDN: CRRHLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2062>.
37. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.
38. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1. С. 17–27. EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
39. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2. С. 106–115. EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
40. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 2. С. 118–127. EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
41. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
42. Жилин П. А. *Рациональная механика сплошных сред*. СПб.: Политехн. ун-т, 2012. 584 с.

MSC: 15A72, 74A35, 74B20

On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

In the present paper, cubic approximations of energy forms for the potentials of force and couple stresses in hemitropic micropolar elastic solids are proposed and discussed. H/E/A-representations for these potentials were introduced in earlier studies. However, the A-form allows us to obtain a cubic approximation for the stress potential in the form of a polynomial combination of invariants, comprising integer powers of individual and joint base rational algebraic invariants and pseudoinvariants. Some of these pseudoinvariants have “pseudo-tensor pre-images” that are sensitive to mirror reflections and inversions of three-dimensional space.

Within the framework of this study, a complete irreducible set of individual and joint linear, quadratic, and cubic integer rational algebraic invariants is obtained for a set consisting of the symmetric and antisymmetric parts of the asymmetric strain tensor and the wryness tensor. A cubic energy form for a hemitropic micropolar solid is determined, and a complete set of 37 constitutive moduli is specified. Additionally, constitutive equations for force and couple stresses in arbitrary curvilinear coordinates are derived, including quadratic corrections.

Keywords: algebraic weight, pseudotensor, nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid.

Received: 8th January, 2025 / Revised: 19th April, 2025 /Accepted: 28th April, 2025 / First online: 5th May, 2025

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 274–293. EDN: DZUMDJ. DOI: 10.14498/vsgtu2144 (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.comYuri N. Radayev  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

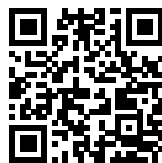
Funding. The work was carried out on the topic of the state assignment (state registration no. 124012500437-9).

References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Herman et Fils, 1909, vi+226 pp.
2. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums, *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 1964, vol. 16, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
3. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
4. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*, Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine, International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures, vol. 25. Wien, New York, Springer, 1972, 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
5. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 15. Berlin, Springer, 2004, xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
6. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mech.*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
7. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
8. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
9. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. DOI: <https://doi.org/10.2307/1989146>.
10. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 24. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1927, viii+102 pp.
11. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
12. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 pp.
13. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
14. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 4, pp. 108–115 (In Russian). EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
15. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 3, pp. 86–100 (In Russian). EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
16. Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 110–121 (In Russian). EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.

17. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Wave criteria for ultratropic micropolar elastic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 4, pp. 128–138 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2024.62.4.009>.
18. Radayev Yu. N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. EDN: SQQPGJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
19. Spencer A. J. M. Theory of invariants, In: *Continuum Physics*, vol. 1. New York, Academic Press, 1971, pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
20. Nye J. F. *Physical Properties of Crystals. Their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford, Clarendon Press, 1957, xv+322 pp.
21. Wooster W. A. *Experimental Crystal Physics*. Oxford, Clarendon Press, 1957, viii+115 pp.
22. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluß der Kristalloptik)*. Leipzig, B.G. Teubner, 1928, xxvi+978 pp. (In German)
23. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Two-dimensional Nye figures for some micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 6, pp. 2254–2268. EDN: AIPHVE. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700243>.
24. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Two-dimensional Nye figures for hemitropic micropolar elastic solids, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 109–122 (In Russian). EDN: FKFRHA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-109-122>.
25. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a method of constructing Nye figures for asymmetric theories of micropolar elasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 100–111 (In Russian). EDN: KSSOKR. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.009>.
26. Krylova E. Yu., Murashkin E. V., Radayev Y. N. The Nye cells and figures for athermic hemitropic, isotropic and ultraisotropic micropolar elastic solids, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 3, pp. 1311–1320. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0025654424603719>.
27. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
28. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
29. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
30. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space, *Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Matem. Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403 (In Russian). EDN: HTQAHJ. DOI: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.
31. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. EDN: CISJLW. DOI: <https://doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
32. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Heat transfer in anisotropic micropolar solids, *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 9, pp. 3111–3119. EDN: WBUGBA. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654423700255>.
33. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 3, pp. 112–128 (In Russian). EDN: RQKUBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.57.3.010>.
34. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the polyvariance of the base equations of coupled micropolar thermoelasticity, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2023, no. 4, pp. 86–120 (In Russian). EDN: RQKUBG. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.58.4.010>.

35. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On algebraic triple weights formulation of micropolar thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 1, pp. 555–580. EDN: GBHEKM. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0025654424700274>.
36. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Thermomechanical states of gyrotropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 659–678 (In Russian). EDN: CRRHLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2062>.
37. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
38. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 17–27 (In Russian). EDN: ZJWFGT. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
39. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Elements of the theory, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 106–115 (In Russian). EDN: FQVGRK. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
40. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Covariantly constant tensors in Euclidean spaces. Applications to continuum mechanics, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 2, pp. 118–127 (In Russian). EDN: ESTJSA. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
41. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebry* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
42. Zhilin P. A. *Ratsional'naya mekhanika sploshnykh sred* [Rational Continuum Mechanics Media]. St. Petersburg, Polytechn. Univ., 2012, 584 pp. (In Russian)



УДК 519.237.5

Итерационное выпуклое оценивание линейных регрессионных моделей в условиях стохастической неоднородности данных

О. А. Голованов¹, А. Н. Тырсин^{1,2}

¹ Институт экономики Уральского отделения РАН, Россия, 620014, Екатеринбург, ул. Московская, 29.

² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

Аннотация

Одной из ключевых проблем линейного регрессионного анализа является обеспечение робастного оценивания параметров модели в условиях стохастической неоднородности данных. В подобных случаях оценки классического метода наименьших квадратов теряют устойчивость. Данная проблема особенно актуальна при распределениях ошибок с более вытянутыми хвостами по сравнению с нормальным распределением. В качестве одного из подходов к повышению робастности регрессионных моделей рассматривается замена квадратичной функции потерь на выпукло-вогнутую, однако непосредственное применение таких функций приводит к многоэкстремальности целевой функции, что существенно усложняет решение задачи.

Целью настоящего исследования является анализ свойств метода вариационно-взвешенных квадратических и абсолютных приближений для невыпуклых функций потерь. В работе предложен подход, основанный на замене исходной невыпуклой задачи регрессионного оценивания на итеративное применение взвешенных методов наименьших квадратов и наименьших модулей. Фактически реализуется метод вариационно-взвешенных квадратических и абсолютных приближений для невыпуклых функций потерь. На каждой итерации взвешенного метода наименьших модулей использовались алгоритмы спуска по узловым прямым.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Голованов О. А., Тырсин А. Н. Итерационное выпуклое оценивание линейных регрессионных моделей в условиях стохастической неоднородности данных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 294–318. EDN: FUVADI. DOI: 10.14498/vsgtu2138.

Сведения об авторах

Олег Александрович Голованов <https://orcid.org/0000-0002-9977-6954>
младший научный сотрудник; центр экономической безопасности¹;
e-mail: golovanov.oa@uieic.ru

Александр Николаевич Тырсин <https://orcid.org/0000-0002-2660-1221>
доктор технических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; центр экономической безопасности¹; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и механики²;
e-mail: at2001@yandex.ru

Исследование итерационных алгоритмов проведено методом статистических испытаний Монте-Карло для различных функций потерь. Установлено, что взвешенный метод наименьших модулей превосходит метод наименьших квадратов по быстродействию при сопоставимой точности оценивания. В условиях одновременного нарушения нескольких предпосылок регрессионного анализа для достижения приемлемой точности предпочтительным является использование либо взвешенного метода наименьших модулей, либо обобщенного метода наименьших модулей, реализованного в виде алгоритма обобщенного спуска. Получены оценки вычислительной сложности алгоритмов и времени их выполнения в зависимости от объема выборки и количества параметров регрессионной модели.

Ключевые слова: линейная регрессия, робастное оценивание, стохастическая неоднородность данных, взвешенный метод наименьших модулей, метод наименьших квадратов, невыпуклые функции потерь, итерационные алгоритмы, устойчивость регрессионных моделей.

Получение: 22 ноября 2024 г. / Исправление: 1 апреля 2025 г. /
Принятие: 15 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 13 мая 2025 г.

Введение. Линейная регрессия представляет собой одну из наиболее распространенных вероятностных моделей, используемых для анализа зависимостей в различных областях знания [1]. Данная модель описывает линейную взаимосвязь между условным математическим ожиданием зависимой переменной Y и набором объясняющих переменных $X_1, X_2, \dots, X_m$ на основе экспериментальных данных $(1, x_{i2}, \dots, x_{im}; y_i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Формально это выражается соотношением [2]

$$E(Y|X_2 = x_2, \dots, X_m = x_m) = \alpha_1 + \sum_{k=2}^m \alpha_k x_k. \quad (1)$$

Таким образом, модель (1) позволяет аппроксимировать величины, которые могут быть представлены в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \mathbf{x}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\top \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{y}$ — вектор наблюдений зависимой переменной; $\mathbf{X} = \{x_{ij}\}_{n \times m}$ — матрица регрессоров, содержащая значения объясняющих переменных $X_1, X_2, \dots, X_m$, причем $\mathbf{x}_i^\top = (1, x_{i2}, \dots, x_{im})$; $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор неизвестных параметров модели; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор случайных ошибок наблюдений.

Задача оценивания коэффициентов модели (1) в общем случае формулируется как задача оптимизации:

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \rho \left(\left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \right) \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m}, \quad (2)$$

где $\rho(\cdot)$ — функция потерь, определенная на положительной полуоси, удовлетворяющая условиям $\rho(0) = 0$ и $\rho'(x) > 0$ для всех $x > 0$.

Классический линейный регрессионный анализ опирается на систему предпосылок, которые определяют требования к объясняющим переменным X_i , параметрам модели α и случайным отклонениям ε , а также позволяют исследовать статистические свойства оценок коэффициентов регрессии [3]:

- 1°) на вектор параметров α не наложено ограничений, то есть $\mathcal{A} = \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{A}$ — множество допустимых (априорных) значений параметров;
- 2°) матрица $\mathbf{X}$ детерминирована, т.е. элементы x_{ij} не являются случайными величинами;
- 3°) матрица $\mathbf{X}$ имеет полный столбцовый ранг: $\text{rank}(\mathbf{X}) = m < n$;
- 4°) вектор ошибок ε случаен, следовательно, вектор наблюдений $\mathbf{y}$ также является случайным вектором;
- 5°) ошибки имеют нулевое математическое ожидание: $E(\varepsilon_i) = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, или в векторной форме $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$;
- 6°) ошибки гомоскедастичны и некоррелированы: $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0$ при $i \neq k$, $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$ для всех $i, k = 1, 2, \dots, n$, где σ_ε^2 — постоянная дисперсия ошибок;
- 7°) распределение ошибок ε является нормальным (гауссовым).

При выполнении указанных предпосылок метод наименьших квадратов (МНК) обеспечивает получение эффективных оценок $\tilde{\alpha}$ коэффициентов регрессии [4]. В рамках МНК в (2) функция потерь имеет вид $\rho(x) = \rho_{ls}(x) = x^2$. Статистические свойства МНК-оценок параметров модели и уравнения регрессии в целом хорошо исследованы. Однако в условиях стохастической неоднородности данных возможны нарушения исходных предположений, приводящие к потере устойчивости МНК-оценок.

Во-первых, эмпирические распределения ошибок часто демонстрируют более вытянутые хвосты по сравнению с нормальным распределением, что снижает эффективность МНК-оценок [5–7]. Особенно критичной для МНК является ситуация наличия выбросов — редких, часто асимметричных наблюдений, а также случаев, когда в модель включены лаговые эндогенные переменные [8–10]. Подобные аномалии могут возникать, например, при развитии процессов деградации в механических системах [11].

Во-вторых, в экономических, медицинских и других исследованиях гетерогенность данных часто приводит к появлению наблюдений, которые могут быть классифицированы как выбросы относительно основной выборки [12–14].

В-третьих, существенную проблему представляет гетероскедастичность — непостоянство дисперсии ошибок наблюдений [3, 15].

В перечисленных случаях для обеспечения робастности оценок рекомендуется применение альтернативных методов, устойчивых к нарушениям классических предпосылок регрессионного анализа.

Если в (2) задать $\rho(x) = \rho_{ld}(x) = |x|$, то получим метод наименьших модулей (МНМ) [16, 17]. Для данного метода разработаны эффективные вычислительные алгоритмы [18–27]. Однако при одновременном воздействии нескольких факторов неоднородности, упомянутых выше, МНМ-оценки также теряют устойчивость [9].

В случае, когда в (2) функция потерь $\rho(x) = \rho_{gld}(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d^2 \rho_{gld}(x)}{dx^2} < 0 \text{ для всех } x > 0,$$

приходим к обобщенному методу наименьших модулей (ОМНМ) [21].

Применение вогнутых ($\rho'(x) > 0$, $\rho''(x) < 0 \forall x > 0$) и выпукло-вогнутых ($\rho'(x) > 0 \forall x > 0$ с точкой перегиба $c > 0$: $\rho''(x) > 0$ при $x < c$ и $\rho''(x) < 0$ при $x > c$) функций потерь приводит к появлению множества локальных минимумов в задаче (2), что существенно увеличивает вычислительную сложность процедуры оценивания. Одним из подходов к решению этой проблемы является сведение исходной невыпуклой задачи робастного оценивания к последовательности задач минимизации взвешенным методом наименьших квадратов (ВМК) [3, 22] или взвешенным методом наименьших модулей (ВМНМ) [23, 24].

Данный подход был впервые использован для реализации МНМ через ВМК и известен как метод Вейсфельда [25], или метод вариационно-взвешенных квадратических приближений [16]. Следует отметить, что в работе [25] метод был эвристически применен к задачам размещения, тогда как в [16] он получил строгое теоретическое обоснование и детальное исследование.

Задачи минимизации в рамках ВМК и ВМНМ характеризуются целевыми функциями вида

$$V_*(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n p_i \rho_* \left(\left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \right) \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m}, \quad (3)$$

где $\rho_*(\cdot)$ представляет функцию потерь ($\rho_*(x) = \rho_{ls}(x) = x^2$ для МНК, $\rho_*(x) = \rho_{ld}(x) = |x|$ для МНМ), а $p_i \geq 0$ — весовые коэффициенты, отражающие точность соответствующих измерений. Эти коэффициенты призваны компенсировать расхождения между эмпирическим распределением ошибок $f_n(x)$ и их теоретически оптимальным распределением:

- нормальным распределением $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$ для МНК;
- распределением Лапласа $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_\varepsilon}\right)$ для МНМ.

В силу выпуклости, непрерывности и ограниченности снизу целевых функций в (3) они обладают единственными точками глобального минимума.

Метод вариационно-взвешенных абсолютных приближений, предложенный в работах [23, 24], имеет ряд ограничений:

- 1) исследован только для случая вогнутых функций потерь $\rho(x)$;
- 2) не изучена область его применимости в зависимости от свойств $\rho(x)$;
- 3) отсутствует анализ вычислительной сложности итерационного процесса, требующего решения последовательности выпуклых задач вида (3) вместо исходной задачи (2).

Метод вариационно-взвешенных квадратических приближений [16,25] разработан исключительно для МНМ, при этом его потенциальные возможности для вогнутых и выпукло-вогнутых функций потерь остаются неисследованными.

Цель настоящей работы состоит в разработке общего подхода к методу вариационно-взвешенных приближений для невыпуклых функций потерь, исследовании его свойств и оценке вычислительной сложности.

1. Методы исследования. Рассмотрим итерационные процедуры взвешивания квадратов и модулей невязок.

1.1. Использование ВМНК. В условиях стохастической неоднородности данных при наличии асимметричных отклонений распределения ошибок от нормального закона целесообразно рассматривать функции потерь, удовлетворяющие следующим условиям [4]:

1) существует конечный положительный предел:

$$0 < \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x^2} = c_1 < \infty;$$

2) функция имеет горизонтальную асимптоту:

$$0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = d_1 < \infty.$$

Следует отметить, что реализация метода остается возможной и при отсутствии горизонтальной асимптоты у функции потерь при условии выполнения соотношения $\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x)/x^2 = 0$.

Итерационная процедура заключается в решении последовательности задач минимизации

$$V_{ls}^{(k)}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} \left(\left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \right) \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m}, \quad (4)$$

где весовые коэффициенты определяются так:

$$p_i^{(k)} = \frac{\rho(|e_i^{(k-1)}|)}{(e_i^{(k-1)})^2}, \quad e_i^{(k-1)} = y_i - \sum_{j=1}^m a_j^{(k-1)} x_{ij}.$$

Здесь $e_i^{(k-1)}$ — ошибки на $(k-1)$ -й итерации; $a_j^{(k-1)}$ — ВМНК-оценки параметров на $(k-1)$ -й итерации; $a_j^{(0)}$ — начальные МНК-оценки; $p_i^{(0)} = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. В случае стремления ошибок $e_i^{(k-1)}$ к нулю весовые коэффициенты $p_i^{(k)}$ вычисляются с помощью предельного перехода в нулевой точке.

Оценки параметров в (4) вычисляются по формуле

$$\mathbf{a} = (\mathbf{U}^\top \mathbf{U})^{-1} (\mathbf{U}^\top \mathbf{v}), \quad (5)$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X}$, $\mathbf{v} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}$, $\mathbf{W} = \text{diag}(p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$.

Рассмотрим три классические функции потерь, предложенные Эндрюсом, Мешалкиным и Рамсеем [4]. Для унификации анализа введем единый параметр λ , характеризующий их свойства:

- при $\lambda \rightarrow 0$ все три функции стремятся к квадратичной $\rho(x) = x^2$;
- при $\lambda \neq 0$ функции обладают горизонтальной асимптотой.

Графическая иллюстрация поведения функций потерь при значениях параметра $\lambda = 0.1$ и 0.5 представлена на рис. 1.

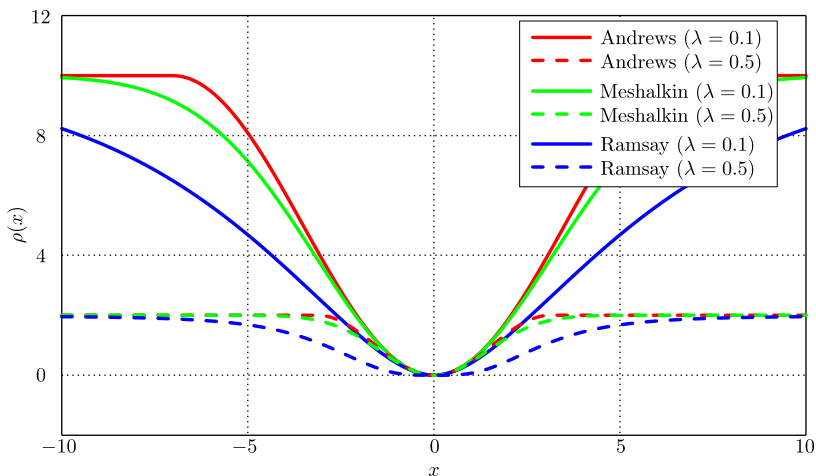


Рис. 1. Графики функций потерь $\rho(x)$ при $\lambda = 0.1$ и 0.5
[Figure 1. Plots of loss functions $\rho(x)$ at $\lambda = 0.1$, and 0.5]

Функция потерь Эндрюса задается кусочно-определенным выражением

$$\rho_A(x) = \begin{cases} (2\lambda)^{-1} [1 - \cos(x\sqrt{2\lambda})], & |x| < \pi/\sqrt{2\lambda}, \\ \lambda^{-1}, & |x| \geq \pi/\sqrt{2\lambda}. \end{cases} \quad (6)$$

Соответствующие весовые коэффициенты вычисляются по формуле

$$p_i^{(k)} = \frac{1 - \cos(e_i^{(k-1)}\sqrt{2\lambda})}{2\lambda(e_i^{(k-1)})^2}.$$

Для корректной программной реализации алгоритма необходимо отдельно рассматривать случай нулевых невязок. Предельное значение весового коэффициента при $e_i^{(k-1)} \rightarrow 0$ определяется следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x\sqrt{2\lambda})}{2\lambda x^2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в вычислительной реализации следует полагать $p_i^{(k)} = 1/2$ при $e_i^{(k-1)} = 0$.

Функция потерь Мешалкина определяется выражением

$$\rho_M(x) = \frac{1 - \exp(-\lambda x^2/2)}{\lambda}. \quad (7)$$

Соответствующие весовые коэффициенты вычисляются так:

$$p_i^{(k)} = \frac{1 - \exp(-\lambda(e_i^{(k-1)})^2/2)}{\lambda(e_i^{(k-1)})^2}.$$

Предельное значение при нулевых невязках определяется следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-\lambda x^2/2)}{\lambda x^2} = \frac{1}{2}.$$

Функция потерь Рамсея задается формулой

$$\rho_R(x) = \frac{1 - (1 + \sqrt{\lambda}|x|) \exp(-\sqrt{\lambda}|x|)}{\lambda}. \quad (8)$$

Весовые коэффициенты для данной функции следующие:

$$p_i^{(k)} = \frac{1 - (1 + \sqrt{\lambda}|e_i^{(k-1)}|) \exp(-\sqrt{\lambda}|e_i^{(k-1)}|)}{2\lambda(e_i^{(k-1)})^2}.$$

Предельное значение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \sqrt{\lambda}|x|) \exp(-\sqrt{\lambda}|x|)}{\lambda x^2} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, алгоритм итерационно пересчитывает значения весовых коэффициентов до тех пор, пока разница между весами текущей и предыдущей итераций не станет минимальной. Экспериментальные исследования показали, что при достижении точности порядка 10^{-12} скорость сходимости метода существенно снижается. Практически оптимальным компромиссом между точностью и вычислительной эффективностью является выполнение двух условий: максимальная допустимая разность весов должна составлять 10^{-8} , а максимальное число итераций ограничивается 50 циклами.

Для обеспечения единого подхода к анализу различных функций потерь определим в уравнениях (6)–(8) значения параметра λ , соответствующие точке перегиба при $x = 3\sigma$ (рис. 2). Численные расчеты при $\sigma = 1$ дают следующие значения:

- $\lambda \approx 0.137$ для функции Эндрюса (6);
- $\lambda \approx 0.111$ для функций Мешалкина (7) и Рамсея (8).

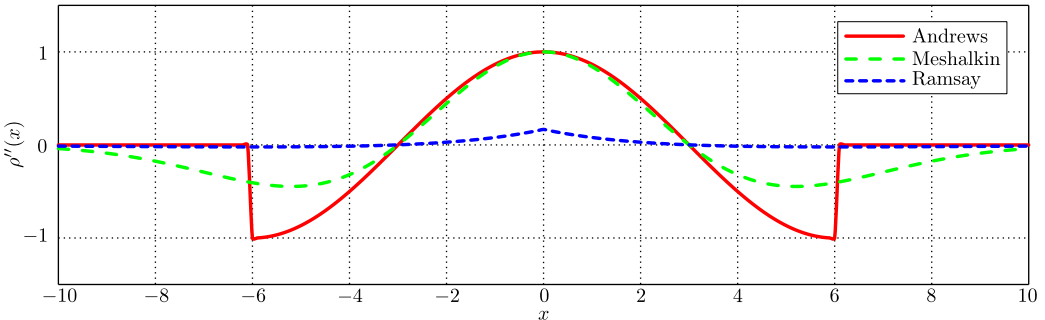


Рис. 2. Графики вторых производных функций потерь в точках перегиба $x = 3\sigma$
 [Figure 2. Graphs of second derivatives of loss functions at inflection points $x = 3\sigma$]

Отметим, что решение задачи регрессионного оценивания методом взвешенных наименьших квадратов остается возможным даже при условии $\lim_{x \rightarrow +0} \rho(x)/x^2 = 0$. Однако в этом случае распределение ошибок будет иметь более короткие хвосты по сравнению с нормальным распределением, асимптотически приближаясь к равномерному распределению. Следует подчеркнуть, что такая ситуация является скорее теоретической, поскольку на практике встречается крайне редко.

В противоположном случае, когда $\lim_{x \rightarrow +0} \rho(x)/x^2 = \infty$, возникает принципиально иная ситуация: весовые коэффициенты, соответствующие малым ошибкам, неограниченно возрастают. Это приводит к неустойчивости оценок параметров регрессии, делая метод неприменимым на практике.

1.2. Использование ВМНМ. Здесь возможны два варианта.

Первый вариант представляет собой итерационную реализацию ОМНМ с функциями потерь $\rho_{gld}(x)$, удовлетворяющими в нуле условию

$$0 < \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x} = c_2 < \infty.$$

В качестве конкретных примеров таких функций потерь рассмотрим $\arctg(|x|)$ и $\ln(|x| + 1)$. Для обеих этих функций выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho_{gld}(x)}{|x|} = 1.$$

Второй вариант предполагает использование ВМНМ для итерационного решения задачи (2) с функциями потерь, обладающими следующими свойствами:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\rho(x)}{x} < \infty.$$

Конкретные примеры таких функций потерь $\rho_{ls}(x)$ приведены в (6)–(8).

Важно отметить, что задачу (2) с функциями потерь, для которых

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\rho(x)}{x} = \infty,$$

невозможно свести к последовательности задач ВМНМ-минимизации. Как и в п. 1.1, при малых ошибках весовые коэффициенты в таком случае неограниченно возрастают, что делает невозможным получение устойчивых оценок. В частности, это относится к функциям потерь вида $\rho(x) = |x|^\beta$ при $0 < \beta < 1$.

Вместо исходной задачи (1) итерационно решается последовательность задач ВМНМ:

$$V_{ld}^{(k)}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} \left| y_i - \sum_{j=1}^m a_j x_{ij} \right| \rightarrow \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m}, \quad (9)$$

где весовые коэффициенты $p_i^{(k)}$ определяются так:

$$p_i^{(k)} = \frac{\rho(|e_i^{(k-1)}|)}{|e_i^{(k-1)}|},$$

а ошибки $e_i^{(k-1)}$ на $(k-1)$ -й итерации вычисляются по формуле

$$e_i^{(k-1)} = y_i - \sum_{j=1}^m a_j^{(k-1)} x_{ij}.$$

Здесь $a_j^{(k-1)}$ — оценки параметров на $(k-1)$ -й итерации, $a_j^{(0)}$ — МНМ-оценки, $p_i^{(0)} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Аналогично предыдущему случаю (см. п. 1.1), регрессионное оценивание с помощью ВМНМ остается корректным и при $e_i^{(k-1)} \rightarrow 0$ благодаря предельному переходу в нуле.

В работах [23, 24] предложен альтернативный подход, где весовые коэффициенты определяются так:

$$p_i^{(k)} = \rho'(|e_i^{(k-1)}|).$$

Однако следует отметить важное отличие: в общем случае $\rho'(x) \neq \rho(x)/x$. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(p_i^{(k)} - \frac{\rho(|e_i^{(k-1)}|)}{|e_i^{(k-1)}|} \right) \neq 0,$$

а последовательность оценок (9) реализует иную функцию потерь. Например, при использовании $\rho(x) = \arctg(|x|)$ фактически минимизируется функция $\tilde{\rho}(x) = |x|/(x^2 + 1)$.

Для решения задачи ВМНМ-оценивания применим алгоритмы покоординатного [26] и модифицированного градиентного [20] спусков по узловым прямым. Прежде чем описать принцип работы алгоритмов, введем необходимые определения.

Пусть $\Omega = \{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ — множество всех n гиперплоскостей Ω_i :

$$\Omega_i : y_i - \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

где каждая гиперплоскость Ω_i соответствует i -му наблюдению выборки.

Узловой точкой называется точка пересечения m линейно независимых гиперплоскостей:

$$\mathbf{u} = \bigcap_{s \in M} \Omega_s, \quad M = \{k_1, \dots, k_m\}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_m, \quad k_l \in \{1, \dots, n\}.$$

Множество всех узловых точек обозначим через U .

Узловой прямой называется прямая, являющаяся пересечением $(m-1)$ линейно независимых гиперплоскостей:

$$l_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = \bigcap_{i \in \{k_1, \dots, k_{m-1}\}} \Omega_i, \quad k_l \in \{1, \dots, n\}.$$

Алгоритм покоординатного спуска реализует следующий итерационный процесс.

1. На нулевой итерации выбирается произвольная узловая точка $\mathbf{u}^{(0)}$, полученная решением СЛАУ, составленной из m произвольных наблюдений.
2. Для текущей узловой точки $\mathbf{u}^{(k)}$ анализируются все инцидентные ей узловые прямые.
3. Находится узловная прямая, на которой целевая функция $V_{ld}^{(k)}(\mathbf{a})$ достигает минимального значения.
4. Осуществляется переход в новую узловую точку $\mathbf{u}^{(k+1)}$ вдоль найденной прямой.
5. Процесс продолжается до достижения точки $\mathbf{u}^{(*)}$, которая является локальным минимумом на множестве всех инцидентных ей узловых прямых.

Модифицированный градиентный спуск (в дальнейшем для краткости называемый просто градиентным спуском) обладает следующими особенностями: учитывает угол наклона узловой прямой, а также сгущение точек вблизи минимума за счет применения первого приближения в оптимальной области решений. Кроме того, он исключает необходимость вычислений значений целевой функции в узловых точках за счет использования производных по направлению.

Для каждой узловой точки $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ производная по направлению узловой прямой вычисляется по формуле

$$\frac{\partial V_{ld}^{(k)}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} = \sum_{i=1}^n \left((c_1 + x_{i2}c_2 + \dots + x_{im}c_m) \cdot \text{sign} \left(\sum_{j=1}^m u_j x_{ij} - y_i \right) \right),$$

где $\mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ — направляющий вектор узловой прямой $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$.

Критерий минимума формулируется следующим образом: если односторонние производные

$$\left. \frac{\partial V_{ld}^{(k)}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} \right|_{\mathbf{u}_-} \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial V_{ld}^{(k)}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{l}_{(k_1, \dots, k_{m-1})}} \right|_{\mathbf{u}_+}$$

в узловой точке $\mathbf{u}$ имеют разные знаки, то эта точка является минимумом функции $V_{ld}^{(k)}(\mathbf{a})$ на узловой прямой $l_{(k_1, \dots, k_{m-1})}$.

Для повышения быстродействия ОМНМ-оценивания регрессии с вогнутыми функциями потерь $\rho_{gld}(x)$ вместо полного перебора всех узловых точек [21] можно использовать приближенные алгоритмы, такие как обобщенный спуск — итерационный алгоритм оценивания регрессии на основе ОМНМ [27]. В этом алгоритме уменьшается исследуемая окрестность точного решения и допускается определенная доля ошибок с заданной вероятностью (например, не более 0.05), т.е. сохраняется статистическая незначимость потери точности.

Основным недостатком данного подхода является необходимость финального уточнения решения с помощью полного перебора в некоторой области вблизи найденного минимума, что обусловлено геометрическими особенностями целевой функции.

2. Обсуждение результатов. Наличие выбросов в выборке может существенно ухудшить качество и надежность модели, что особенно критично для линейного регрессионного анализа. Для комплексного исследования этого эффекта мы проводим серию вычислительных экспериментов с различными типами засорений данных, используя метод статистических испытаний Монте–Карло [28]. В экспериментах генерируются выборки с числом параметров модели $m = 2, \dots, 5$.

Генерация засоренных случайных ошибок ε выполняется по схеме Тьюки–Хьюбера [29, 30] с вероятностью засорения $\gamma = 0.1$:

$$F_{\varepsilon}(x) = (1 - \gamma)F_0(x) + \gamma F_H(x),$$

где $F_0(x)$ — функция распределения основных ошибок (используется стандартное нормальное распределение); $F_H(x)$ — функция распределения засорений (рассматриваются двустороннее и одностороннее распределения Коши и Лапласа).

Нормальное распределение выбрано как эталон с быстро убывающими хвостами, распределение Коши — как крайний случай с вытянутыми хвостами, максимально подверженный влиянию выбросов, а распределение Лапласа занимает промежуточное положение между ними.

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере Dell G5 5587 со следующими характеристиками: 6-ядерный процессор Intel Core i7-8750H; тактовая частота до 4.1 ГГц. Программная реализация алгоритмов выполнена на языке C++ в среде разработки Microsoft Visual Studio 2019.

Перед проведением основного анализа необходимо убедиться в однородности результатов обработки различных генераций данных. В исследовании использованы следующие принципы: каждая выборка генерируется независимо; общим остается только метод формирования незасоренной части данных; генерация выполняется с использованием датчика псевдослучайных чисел. Поскольку исходные данные независимы, любые их математические преобразования также считаются независимыми. Поэтому для статистической проверки однородности результатов применяются параметрический критерий Стьюдента и непараметрический критерий Манна–Уитни. Такое сочетание критериев позволяет повысить надежность и достоверность получаемых выводов.

2.1. Взвешенный метод наименьших квадратов. В результате проведения 100 вычислительных экспериментов при $n = 50, 100, \dots, 300$ и $m = 2, 3, \dots, 5$ было выявлено, что итерационный алгоритм ВМК вне зависимости от функции потерь имеет сильную зависимость от вида засорений. Так, число итераций при добавлении односторонних или двусторонних засорений Коши возросло в среднем в 1.5–2 раза.

Сравнение по критериям Стьюдента и Манна–Уитни среднего времени работы алгоритма ВМК для данных без засорения и с засорением с распределением Коши для функций потерь Эндрюса и Мешалкина отклонило нулевую гипотезу об однородности. Для функции Рамсея количество итераций и время работы алгоритма возросло в 1.2–2.5 раза, что связано с более медленным достижением асимптоты (рис. 1), это привело к выполнению нулевой гипотезы вне зависимости от вида засоряющего распределения.

Ввиду отсутствия значимой разницы между временем работы алгоритма при односторонних и двусторонних засорениях далее условно разделим их на 3 типа: распределения Гаусса, распределения с засорениями Коши и распределения с засорениями Лапласа. Для распределений Коши и Лапласа взяты усредненные значения вне зависимости от симметричности отклонений. Зависимости для среднего времени вычисления 1000 экспериментов от размерности выборки с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.98$ представлены в табл. 1 и на рис. 3.

Из полученных зависимостей выделим три важных момента:

- 1) наименьшее время вычислений достигается для стандартного нормального распределения ошибок;
- 2) зависимость времени от количества параметров модели пренебрежимо мала и асимптотически стремится к нулю независимо от типа засорений;
- 3) наихудшее время наблюдается при засорении распределением Коши в сочетании с функцией потерь Рамсея.

Отдельно отметим, что временные характеристики для случаев без засорений и с засорениями по Лапласу оказываются статистически неразличимыми.

Таблица 1

Зависимости среднего времени вычисления 1000 вычислительных экспериментов от размерности выборки n , порядка модели m и распределения засорений ошибок [Dependencies of the average computation time for 1000 simulation runs on the sample size n , model order m , and error contamination distribution]

Loss Function	Gaussian	Laplace	Cauchy
Andrews	$0.00005 \cdot n^{2.93}$	$0.0001 \cdot n^{2.77} m^{0.16}$	$0.0002 \cdot n^{2.75} m^{0.15}$
Meshalkin	$0.00005 \cdot n^{2.8} m^{0.08}$	$0.0001 \cdot n^{2.78} m^{0.16}$	$0.0003 \cdot n^{2.71} m^{0.14}$
Ramsay	$0.0002 \cdot n^{2.82} m^{0.08}$	$0.0002 \cdot n^{2.78} m^{0.15}$	$0.0008 \cdot n^{2.54} m^{0.16}$

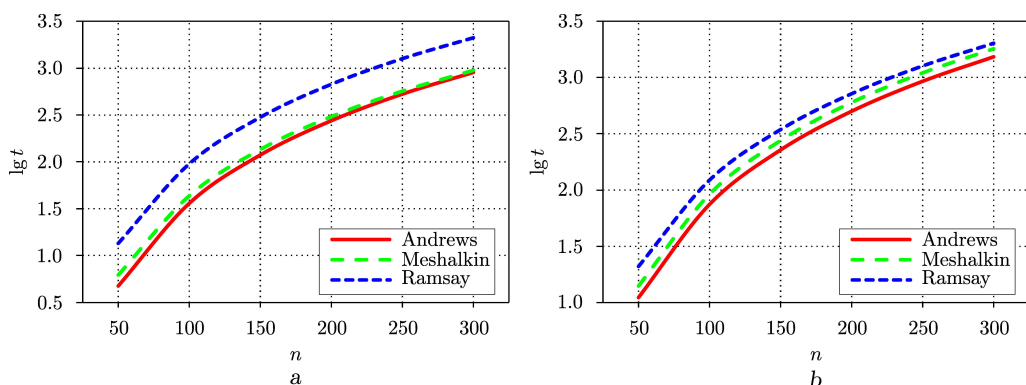


Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма среднего времени обработки 1000 вычислительных экспериментов (сек.) от размера выборки n при $m = 3$: (а) для незасоренного распределения ошибок; (б) для распределения с засорениями по Коши

[Figure 3. Decimal logarithm of the average processing time for 1000 simulation runs (seconds) as a function of sample size n at $m = 3$: (a) error distribution without contamination; (b) Cauchy-contaminated distribution]

Оценим вычислительную сложность ВМНК при вычислении коэффициентов регрессии по формуле (5). Основные вычислительные операции и их сложность:

- формирование матриц $\mathbf{U}$ и векторов $\mathbf{v}$: $O(n^2m)$ и $O(n^2)$ операций соответственно;
- вычисление матричного произведения $\mathbf{U}^\top \mathbf{U}$: $O(nm^2)$ операций;
- вычисление обратных матриц: $O(m^3)$ операций;
- умножение на вектор $\mathbf{v}$: $O(nm)$ операций;
- определение вектора весов $\mathbf{p}$: $O(nm)$ операций;
- диагонализация вектора весов: $O(n)$ операций.

Таким образом, общая вычислительная сложность алгоритма составляет $O(n^2mk)$ при $n \gg m$, где k — количество итераций алгоритма.

Число итераций существенно зависит от способа засорения выборки, что свидетельствует о влиянии вида распределения и не позволяет использовать средние значения для однозначного определения соотношений для каждой функции потерь. Как показали исследования (см. табл. 1), наименьшее число итераций наблюдается для незасоренных выборок, а наибольшее — для выборок с засорениями по Коши. Это позволяет определить примерную область значений для числа операций в нотации *Big O*.

Экспериментальные данные демонстрируют слабую тенденцию роста числа итераций с увеличением размера выборки. В частности, для функции потерь Эндрюса получены следующие эмпирические зависимости:

- $k \approx 9.01 \cdot n^{0.01} m^{0.08}$ ($R^2 = 0.74$) при нормальном распределении;
- $k \approx 10.56 \cdot n^{0.08} m^{0.19}$ ($R^2 = 0.75$) при засорении по Коши.

Отметим слабую зависимость числа итераций k от размера выборки и ее усиление при удлинении хвостов у распределения ошибок. Получены следующие характерные диапазоны числа итераций k :

- $10.5 < k < 19.8$ для функции Эндрюса;
- $11.3 < k < 20.6$ для функции Мешалкина;
- $25.5 < k < 27.6$ для функции Рамсея.

Поэтому на практике в качестве k целесообразнее использовать средние арифметические значения.

Функция потерь Эндрюса продемонстрировала наилучшие результаты по вычислительной эффективности, показав минимальное время работы и наименьшее число итераций среди всех рассмотренных вариантов независимо от типа распределения.

Для анализа точности использовалось сравнение среднеквадратических отклонений (СКО) оценок коэффициентов регрессии от истинных значений. Свободный член модели, хотя и улучшает интерпретацию результатов, может увеличивать СКО при наличии выбросов из-за своей чувствительности к распределению данных. Поэтому основное внимание уделено остальным коэффициентам.

Результаты показывают, что при $n = 50$ для незасоренных данных и данных с засорением Лапласа СКО всех коэффициентов (кроме свободного члена) составляет 0.01 и уменьшается с ростом объема выборки. Это подтверждает высокую точность модели в описании зависимости между переменными. Однако при засорении Коши наблюдаются значительные колебания

СКО — от 0.1 до нескольких сотен, что делает применение ВМНК в таких случаях нецелесообразным.

2.2. Взвешенный метод наименьших модулей. Согласно критериям Стьюдента и Манна–Уитни, вероятность неотклонения нулевой гипотезы об однородности выборок для среднего времени расчета 1000 экспериментов и среднего числа итераций 100 экспериментов при использовании функций потерь $\arctg(|x|)$ и $\ln(|x| + 1)$ для алгоритмов спуска превышает 0.05. Следовательно, у ВМНМ, в отличие от ВМНК, нет зависимости от вида распределения анализируемой выборки и алгоритм использует схожее количество вычислительных ресурсов как для незасоренных данных, так и для выборок с засорениями Коши и Лапласа.

Зависимости среднего времени расчета 1000 экспериментов для трех алгоритмов (покоординатного, градиентного и обобщенного спусков) с $R^2 = 0.99$ представлены в табл. 2. В алгоритме обобщенного спуска доля ошибочных решений не превысила установленный порог в 5 %, что статистически незначимо.

По сравнению с ВМНК в ВМНМ наблюдается значительно более сильная зависимость от числа параметров модели m , обусловленная экспоненциальным ростом количества узловых точек при увеличении размерности. Этот эффект особенно выражен в алгоритме обобщенного спуска, где требуется уточнение решения полным перебором. В то же время уменьшение влияния размера выборки n компенсирует возросшую зависимость от m , так как для построения надежной регрессионной модели необходимо выполнение условия $n \gg m$.

Использование функции потерь $\ln(|x| + 1)$ позволило сократить как время работы алгоритмов, так и среднее количество итераций. По сравнению с $\arctg(|x|)$ для градиентного и покоординатного спусков наблюдается выигрыш в 5–10% по времени вычислений, который снижается с увеличением размерности выборки n . В случае обобщенного спуска с логарифмической функцией потерь при $m = 2$ достигается примерно двукратное ускорение, однако при росте m разница в быстродействии уменьшается до 1.5–5 %.

Для оценки вычислительной сложности алгоритмов покоординатного и градиентного спусков отметим, что основное изменение в алгоритмах связано с добавлением итерационного пересчета, и после первой итерации процесс спуска практически прекращается. Для оценки дополнительной сложности, вносимой итерациями, рассчитано количество анализируемых узловых точек ($\approx m^{1.22}n^{0.77}$) и переходов между узловыми прямыми ($\approx m^{0.26}/n^{0.18}$) на одной итерации. Согласно результатам работы [31], после уточнения слож-

Таблица 2

Зависимости среднего времени вычисления 1000 вычислительных экспериментов алгоритмов спуска размерности выборки n и порядка модели m [Dependencies of the average computation time for 1000 simulation runs of descent algorithms on the sample size n , and model order m]

Algorithm $\rho(x)$	Coordinate Descent	Gradient Descent	Generalised Descent
$\ln(x + 1)$	$0.0001 \cdot n^{2.11} m^{2.03}$	$0.0007 \cdot n^{1.3} m^{2.27}$	$7.8 \cdot 10^{-7} \cdot n^{1.4} m^{9.4}$
$\arctg(x)$	$0.0002 \cdot n^{2.0} m^{2.08}$	$0.0009 \cdot n^{1.27} m^{2.28}$	$3 \cdot 10^{-6} \cdot n^{1.4} m^{8.65}$

ность алгоритмов составляет $O(m^3 n^2 + m^{1.97} n^{1.54} k)$ (для покоординатного спуска) и $O(m^3 n^2 \ln n + C_n^m(m^3 + mn))$ (для обобщенного спуска) с областью решений, соответствующей 95%-му уровню доверительной вероятности $\zeta_{95} = (7.06 \cdot m^{0.57})/n^{0.93}$.

Алгоритм градиентного спуска включает три основных этапа:

- P_1) поиск первого приближения в области из $48.3 \cdot m^{0.2}/n^{0.2}$ случайных наблюдений;
- P_2) анализ полной выборки;
- P_3) итерационный пересчет.

Число переходов между узловыми прямыми и число рассматриваемых узловых точек на этапе P_1 составляет $m^{0.8} n^{0.2}$ и $m^{1.5} n^{0.5}$, а на этапе P_2 — $mn^{0.15}$ и $m^{1.8} n^{0.5}$.

При $n \gg m$ вычислительная сложность этапов алгоритма такая:

$$\begin{aligned} P_1 &= O(m^{1.8} n^{1.2} (m^2 + \ln n + n^{0.3}/m^{0.3})) = O(m^{1.8} n^{1.5}), \\ P_2 &= O(m^2 n^{1.15} (m^2 + \ln n + n^{0.35}/m^{0.2})) = O(m^{1.8} n^{1.5}), \\ P_3 &= O(m^{1.26} n^{0.82} k (m^2 + \ln n + n^{0.72}/m^{0.29})) = O(m^{0.97} n^{1.54} k). \end{aligned}$$

Общая вычислительная сложность алгоритма:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = O(m^{1.8} n^{1.5} + m^{0.97} n^{1.54} k).$$

Алгоритмы покоординатного и градиентного спусков по своей сути идентичны, причем первый представляет собой упрощенную версию второго. Следовательно, количество итераций пересчета весовых коэффициентов в обоих случаях оказывается сходным.

Применение критериев Стиюдента и Манна–Уитни показывает, что хотя вероятность принятия нулевой гипотезы в отдельных случаях снижается до 50 %, среднее число итераций остается статистически неразличимым для различных типов засорений. Для используемых функций потерь установлены следующие зависимости k с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.97$:

- $k \approx 1.87 \cdot n^{0.12} m^{0.17}$ (в среднем 4.3 итерации) для $\ln(|x| + 1)$;
- $k \approx 2.4 \cdot n^{0.09} m^{0.16}$ (в среднем 4.6 итерации) для $\arctg(|x|)$.

Таким образом, использование логарифма в качестве функции потерь более эффективно с точки зрения вычислительной трудоемкости, хотя существенного преимущества не наблюдается.

Оценка точности выполнена путем сравнения с решением, полученным методом обобщенного спуска. Согласно данным [27], оценки этого алгоритма отклоняются от результатов полного перебора узловых точек менее чем в 5 % случаев, что статистически незначимо. В итоге решения, полученные алгоритмами ВМНМ, отличаются от точного в 100 % случаев, однако эти отклонения меньше 0.5 % и уменьшаются с ростом размера выборки.

Таким образом, независимо от выбранной функции потерь и типа распределения данных алгоритмы ВМНМ обеспечивают получение приближенного решения, максимально близкого к точному, при минимальных вычислительных затратах.

Анализ изменения времени работы алгоритмов показывает, что введение итерационного пересчета весов привело к увеличению времени работы алгоритмов:

- в 1.3–1.6 раза для градиентного спуска;
- в 1.4–2 раза для покоординатного спуска.

Полученные результаты демонстрируют, что хотя вычислительная сложность самих алгоритмов изменилась незначительно, дополнительные итерации существенно повысили их вычислительную трудоемкость.

2.3. Сравнительный анализ. Сравнительный анализ рассмотренных алгоритмов показывает, что наивысшая точность достигается при использовании обобщенного метода наименьших модулей, что обусловлено его максимальным соответствием результатам полного перебора. Однако данный алгоритм демонстрирует сильную зависимость от числа параметров модели m из-за необходимости уточнения решения полным перебором.

Алгоритмы ВМНК и ВМНМ, согласно анализу среднеквадратических отклонений, обеспечивают высокую точность и согласованность результатов. При этом ВМНК и покоординатный спуск более чувствительны к числу наблюдений n , что существенно, поскольку для качественного моделирования требуется выполнение условия $n \gg m$. Дополнительно отметим, что в ВМНК количество итераций пересчета весовых коэффициентов в 2–6 раз превышает соответствующий показатель ВМНМ.

Для объективной оценки вычислительной трудоемкости обратимся к графикам сравнения времени работы алгоритмов (рис. 4), где представлены оптимальные по быстродействию варианты: ВМНК с функцией потерь Эндриуса (для незасоренных данных) и ВМНМ с логарифмической функцией потерь.

Таким образом, градиентный спуск по узловым прямым демонстрирует наилучшее быстродействие. Наибольшее время при фиксированном количестве параметров модели наблюдается у ВМНК, а при фиксированном числе наблюдений — у обобщенного спуска.

Сравнение точности алгоритмов ВМНМ и ВМНК по разнице СКО от истинных значений выявило, что при $n = 50$ и $m = 2$ разница СКО составляет 0.006 и уменьшается с ростом m и n .

Полученные результаты свидетельствуют, что различия в точности оце-

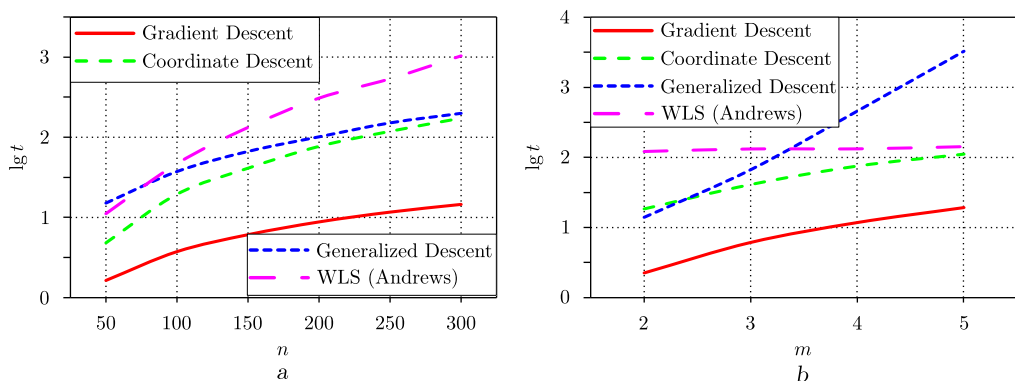


Рис. 4. Десятичный логарифм среднего времени вычислений (сек.) для 1000 вычислительных экспериментов алгоритмами ВМНК, ВМНМ и обобщенного спуска при (a) $m = 3$ и (b) $n = 150$

[Figure 4. Decimal logarithm of average computation time (seconds) for 1000 simulation runs using WLS, WLAD and generalized descent algorithms for cases: (a) $m = 3$, and (b) $n = 150$]

нок алгоритмов ВМНМ и ВМНК малы и малосущественны в контексте практического применения.

2.4. Вопросы практического применения. При решении практических задач регрессионного моделирования важно учитывать два типа взаимоисключающих ситуаций:

- ошибки первого рода («ложное срабатывание») — отвержение верной нулевой гипотезы об отсутствии связи между явлениями или искомого эффекта;
- ошибки второго рода («пропуск цели») — принятие неверной нулевой гипотезы.

МНК преимущественно подвержен ошибкам первого рода из-за чувствительности его оценок к нарушениям предпосылок 1° – 7° . А некорректное применение невыпуклых функций потерь может привести к ошибкам второго рода, когда игнорируются реальные изменения в данных.

Поэтому при регрессионном моделировании нужно ориентироваться на особенности решаемой задачи. Широкий арсенал разных методов оценивания гарантирует получение адекватных моделей. В целом можно предложить следующие рекомендации по выбору метода при условии корректной спецификации модели.

Если нет оснований считать данные стохастически неоднородными, то МНК остается простым и надежным выбором для моделирования, при этом МНК- и МНМ-оценки будут близки. В случаях автокорреляции ошибок и пространственной гетероскедастичности (когда дисперсия ошибок коррелирует с объясняющими переменными) обычно достаточно применять обобщенный МНК, широко используемый в эконометрике [3].

При наличии засорений, не связанных с объясняющими переменными, рекомендуется использовать ВМНМ с функциями потерь, удовлетворяющими условиям $\lim_{x \rightarrow +0} \rho(x)/x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x)/x < \infty$, либо ВМНК с $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) < \infty$. Если засорения носят симметричный характер, подходит метод Хьюбера [30], где $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x)/x < \infty$, практические аспекты реализации которого рассмотрены в [32].

Когда в модель включаются лаговые значения зависимой переменной, нарушается предпосылка 2° , так как эти переменные становятся случайными и коррелируют с ошибками ϵ . В таких случаях при несимметричных засорениях требуются особо устойчивые оценки на основе ВМНМ с функциями потерь $\rho_{gld}(x)$.

Потребность в вогнутых и выпукло-вогнутых функциях потерь возникает при стохастической неоднородности данных в различных областях: экономике и финансах [33, 34], медицине [35], метеорологии [36], геофизике [37], технике [11, 38, 39, 40] и других.

2.5. Анализ динамики безработицы в Свердловской области в период пандемии COVID-19. Согласно данным Федеральной службы государственной статистики, в Свердловской области в период пандемии COVID-19 зафиксирован значительный рост уровня регистрируемой безработицы.

В развитие исследования [34] нами проанализированы ежемесячные данные за 2022–2023 годы. На рис. 5 представлена временная динамика уровня

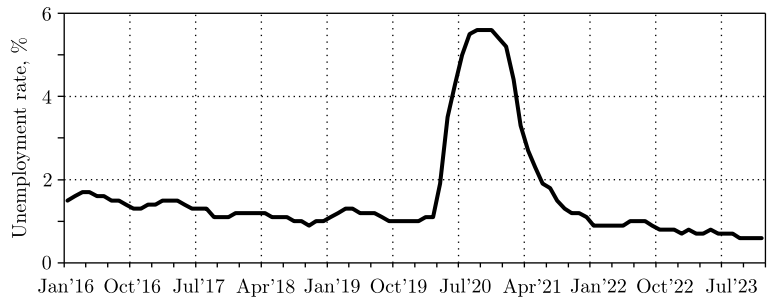


Рис. 5. Динамика уровня безработицы в Свердловской области за 2016–2023 годы
[Figure 5. Unemployment rate dynamics in Sverdlovsk Region, 2016–2023]

безработицы в регионе, демонстрирующая более чем пятикратное увеличение показателя в кризисный период (апрель 2020 – ноябрь 2021 гг.).

Для количественного анализа динамики этого показателя построена линейная регрессионная модель вида

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

где Y — уровень регистрируемой безработицы (%), $X_1 = 1$ (константа), X_2 — порядковая переменная (1–96, соответствуя месяцам с января 2016 г. по декабрь 2023 г.).

Результаты оценивания параметров модели представлены в табл. 3. Особый интерес представляют расчеты по данным, исключаям пандемийный период¹ (последняя строка таблицы), которые соответствуют предпосылкам 1°–7° и могут рассматриваться как эталонные для всего анализируемого периода.

Таблица 3

Результаты оценивания параметров перпеccionной модели [Regression model parameter estimation results]

Метод [Method]	a_1	a_2	R^2
BMHM [WLAD (Weighted Least Absolute Deviations)]	1.517	−0.00897	0.182
MHM [LAD (Least Absolute Deviations)]	1.508	−0.00833	0.164
OMHM [GLAD (Generalized Least Absolute Deviations)]	1.418	−0.00806	0.213
BMHK [WLS (Weighted Least Squares)]	1.966	−0.00216	0.047
MHK [OLS (Ordinary Least Squares)]	1.669	−0.00177	0.002
MHK (без пандемии) [OLS (excl. pandemic)]	1.493	−0.00896	0.853

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

- наибольшую устойчивость к выбросам при сохранении точности оценивания демонстрируют BMHM и OMHM;
- BMHM точнее оценивает коэффициенты тренда, но менее устойчив к односторонним выбросам ($R^2 = 0.182$ против 0.213 у OMHM);
- традиционный MHK показал низкую эффективность ($R^2 = 0.002$) и не позволяет построить трендовую модель, хотя его взвешенная версия (BMHK) дает некоторое улучшение ($R^2 = 0.047$);

¹Из выборки были удалены наблюдения за период пандемии.

- на данных без пандемийного периода ВМНМ и ОМНМ демонстрируют статистически значимые результаты ($R^2 = 0.847$ и 0.830 соответственно).

Полученные результаты подтверждают, что в условиях аномальных выбросов, характерных для кризисных периодов, традиционные методы оценивания требуют модификации, причем взвешенные методы (ВМНМ, ОМНМ) демонстрируют наилучший баланс между устойчивостью и точностью.

Заключение. В работе предложен подход к устойчивому линейному регрессионному моделированию в условиях стохастической неоднородности данных, основанный на сведении задачи оценивания с вогнутыми и выпукло-вогнутыми функциями потерь к итерационному применению ВМНК и ВМНМ. Исследованы вычислительные свойства этих алгоритмов и проведена оценка их трудоемкости, показавшая, что для типичных задач с небольшими выборками время вычислений не превышает нескольких секунд.

Сравнительный анализ выявил, что при сопоставимой точности ВМНК уступает ВМНМ в быстродействии, особенно при наличии засорений с вытянутыми хвостами распределений, что ограничивает его применение случаями без грубых ошибок. Для задач, требующих одновременно высокой скорости и точности, особенно при несимметричных засорениях, оптимальным решением является ВМНМ с алгоритмом градиентного спуска.

Когда приоритетом является максимальная точность без жестких ограничений на вычислительные затраты, особенно при комплексных нарушениях предпосылок регрессионного анализа, рекомендуется использовать ОМНМ, реализованный как алгоритм обобщенного спуска, избегая функций потерь с условием $\lim_{x \rightarrow +0} \rho(x)/x = \infty$.

Разработанные практические рекомендации по применению метода вариационно-взвешенных приближений для невыпуклых функций потерь подчеркивают важность учета специфики стохастической неоднородности данных и требований конкретной задачи при выборе метода оценивания регрессионных зависимостей.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад. Все авторы внесли существенный вклад в исследование: участвовали в разработке методологии, проведении анализа и подготовке рукописи. Окончательная версия статьи была одобрена всеми соавторами перед подачей в печать.

Финансирование. Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Института экономики Уральского отделения РАН.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность анонимным рецензентам за внимательное прочтение работы и конструктивные замечания, которые способствовали улучшению качества публикации.

Библиографический список

1. Hoffmann J. P. *Linear Regression Models. Applications in R*. New York: CRC Press, 2022. xv+420 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003162230>.
2. Орлов А. И. Многообразие моделей регрессионного анализа (обобщающая статья) // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2018. Т. 84, № 5. С. 63–73. EDN: XQBSKD. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2018-84-5-63-73>.

3. Greene W. H. *Econometric Analysis*. New York: Pearson, 2020. 1176 pp.
4. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. *Прикладная статистика: Исследование зависимостей*. М.: Финансы и статистика, 1985. 488 с.
5. Clarke B. *Robustness Theory and Application*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2018. xxiii+215 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118669471>.
6. Орлов А. И. О требованиях к статистическим методам анализа данных (обобщающая статья) // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2023. Т. 89, № 11. С. 98–106. EDN: VEWJXD. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-11-98-106>.
7. Salls D., Torres J. R., Varghese A. C., et al. Statistical characterization of random errors present in synchrophasor measurements / *2021 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*. Washington, DC, 2021. pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/PESGM46819.2021.9638135>.
8. Ives A. R. Random Errors are Neither: On the Interpretation of Correlated Data // *Methods in Ecology and Evolution*, 2022. vol. 13, no. 10. pp. 2092–2105. DOI: <https://doi.org/10.1111/2041-210X.13971>.
9. Болдин М. В., Симонова Г. И., Тюрин Ю. Н. *Знаковый статистический анализ линейных моделей*. М.: Наука, 1997. 288 с.
10. Anandhi P., Prabhu S. M. The robust regression estimators: Performance & evaluation // *Int. J. Stat. Appl. Math.*, 2023. vol. 8, no. 6. pp. 83–87. DOI: <https://doi.org/10.22271/math.2023.v8.i6a.1444>.
11. Колобов А. Б. *Вибродиагностика: теория и практика*. М.: Инфра-Инженерия, 2019. 252 с.
12. Дубровская Ю. В. Анализ неоднородности экономического развития территорий в условиях цифровизации // *Вестн. Омск. ун-в. Сер. Экономика*, 2020. Т. 18, № 2. С. 102–113. EDN: QWJRTP. DOI: [https://doi.org/10.24147/1812-3988.2020.18\(2\).102-113](https://doi.org/10.24147/1812-3988.2020.18(2).102-113).
13. Bhatia S., Frangioni J. V., Hoffman R. M., et al. The challenges posed by cancer heterogeneity // *Nature Biotechnology*, 2012. vol. 30, no. 7. pp. 604–610. DOI: <https://doi.org/10.1038/nbt.2294>.
14. Wan J.-Z., Wang C.-J., Marquet P. A. Environmental heterogeneity as a driver of terrestrial biodiversity on a global scale // *Progr. Phys. Geogr.*, 2023. vol. 47, no. 6. pp. 912–930. DOI: <https://doi.org/10.1177/03091333231189045>.
15. Atkinson A. C., Riani M., Torti F. Robust methods for heteroskedastic regression // *Comput. Stat. Data Anal.*, 2016. vol. 104. pp. 209–222. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.07.002>.
16. Мудров В. И., Кушко В. Л. *Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки*. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.
17. Dodge Y. *The Concise Encyclopedia of Statistics*. New York, NY: Springer, 2008. ix+616 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1>.
18. Акимов П. А., Матасов А. И. Итерационный алгоритм для l_1 -аппроксимации в динамических задачах оценивания // *Автомат. и телемех.*, 2015. № 5. С. 7–26. EDN: TUVXHT.
19. Тырсин А. Н. Алгоритмы спуска по узловым прямым в задаче оценивания регрессионных уравнений методом наименьших модулей // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2021. Т. 87, № 5. С. 68–75. EDN: OFEXNK. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2021-87-5-68-75>.
20. Голованов О. А., Тырсин А. Н. Модифицированный алгоритм градиентного спуска по узловым прямым в задаче регрессионного анализа // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, 2025. Т. 91, № 3. С. 83–92. EDN: RLOBGS. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2025-91-3-83-92>.
21. Тырсин А. Н., Соколов Л. А. Оценивание линейной регрессии на основе обобщенного метода наименьших модулей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5. С. 134–142. EDN: NCTNLB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu797>.
22. Cohen A., Migliorati G. Optimal weighted least-squares methods // *SMAI J. Comput. Math.*, 2017. vol. 3. pp. 181–203. DOI: <https://doi.org/10.5802/smai-jcm.25>.

23. Панюков А. В., Тырсин А. Н. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей // *Изв. Челяб. научн. центра*, 2007. № 1. С. 6–11. EDN: IBMJQX.
24. Панюков А. В. Об устойчивом оценивании параметров авторегрессионных моделей на основе обобщенного метода наименьших модулей // *Вестник НГУЭУ*, 2015. № 4. С. 339–346. EDN: VFZLFR.
25. Weiszfeld E., Plastria F. On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum // *Ann. Oper. Res.*, 2009. vol. 167, no. 1. pp. 7–41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-008-0352-z>.
26. Тырсин А. Н., Азарян А. А. Точное оценивание линейных регрессионных моделей методом наименьших модулей на основе спуска по узловым прямым // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2018. Т. 10, № 2. С. 47–56. EDN: YXCEWU. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp180205>.
27. Голованов О. А., Тырсин А. Н. Повышение быстродействия алгоритма обобщенного метода наименьших модулей за счет уточнения области решений / *Современные методы теории краевых задач. Понtryагинские чтения – XXXIII*: Матер. Междун. конф. (Воронеж, 03–09 мая 2023 г.). Воронеж: ВГУ, 2023. С. 115–117. EDN: DHJTII.
28. Barbu A., Zhu S.-C. Introduction to Monte Carlo methods / *Monte Carlo Methods*. Singapore: Springer, 2020. pp. 1–17. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-2971-5_1.
29. Tukey J. W. A survey of sampling from contaminated distributions / *Contributions to Probability and Statistics*. Redwood, CA: Stanford Univ. Press, 1960. pp. 443–485.
30. Huber P. J., Ronchetti E. M. *Robust Statistics* / Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009. xvi+354 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470434697>.
31. Азарян А. А. *Быстрые алгоритмы моделирования многомерных линейных регрессионных зависимостей на основе метода наименьших модулей* : Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Екатеринбург: УрФУ, 2018. 148 с. EDN: LFRCIU.
32. Tyrsin A. N., Golovanov O. A. Systems monitoring based on robust estimation of stochastic time series models // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022. vol. 2388, no. 1, 012074. EDN: JCWPQA. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2388/1/012074>.
33. Гайомей Д. Высокочастотная оценка волатильности и цена опциона // *Вестн. Алтайск. акад. экономики и права*, 2022. № 4-2. С. 167–176. EDN: BHQQLDR. DOI: <https://doi.org/10.17513/vaael.2153>.
34. Голованов О. А., Тырсин А. Н., Васильева Е. В. Оценка влияния пандемии COVID-19 на тренды социально-экономического развития региона России: кейс Свердловской области // *J. Appl. Economic Res.*, 2022. Т. 21, № 2. С. 257–281. EDN: EMXLYU. DOI: <https://doi.org/10.15826/vestnik.2022.21.2.010>.
35. Кирьянов Б. Ф., Токмачев М. С. *Математические модели в здравоохранении*. Великий Новгород: НовГУ им. Ярослава Мудрого, 2009. 279 с. EDN: QLWOYN.
36. Соболев Г. А., Закржевская Н. А., Мигунов И. Н. Влияние метеорологических условий на тектонические деформации в часовом диапазоне периодов // *Физика Земли*, 2021. № 6. С. 20–35. EDN: HYRFUA. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002333721060090>.
37. Короновский Н. В., Брянцева Г. В. *Опасные природные процессы*. М.: ИНФРА-М, 2024. 233 с.
38. Новиков А. В., Губинский Д. Н., Зарай Е. А. Каротаж в процессе бурения — эффективный тайм-менеджмент и надежная база для оценки подсчетных параметров пласта // *Актуальные проблемы нефти и газа*, 2021. № 3. С. 49–60. EDN: OWPUCJ. DOI: <https://doi.org/10.29222/ipng.2078-5712.2021-34.art4>.
39. Клячкин В. Н., Кравцов Ю. А. Обнаружение нарушений при многомерном статистическом контроле технологического процесса // *Программные продукты и системы*, 2016. № 3. С. 192–197. EDN: XEPQLZ. DOI: <https://doi.org/10.15827/0236-235X.115.192-197>.
40. Vial G. Understanding digital transformation: A review and a research agenda // *J. Strat. Inf. Syst.*, 2019. vol. 28, no. 2. pp. 118–144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsis.2019.01.003>.

MSC: 62F35, 62J05, 65K10

Iterative convex estimation of linear regression models under data stochastic heterogeneity

*O. A. Golovanov¹, A. N. Tyrsin^{1,2}*¹ Institute of Economics, Ural Branch of RAS,
19, Moskovskaya st., Ekaterinburg, 620014, Russian Federation.² Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin,
19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

Abstract

One of the key challenges in linear regression analysis is ensuring robust parameter estimation under stochastic data heterogeneity. In such cases, classical least squares estimates lose their stability. This problem becomes particularly acute with error distributions having heavier tails than normal distribution. Among various approaches to enhance regression robustness, replacing quadratic loss functions with convex-concave ones has been considered, though direct application leads to multimodal objective functions, significantly complicating the optimization problem.

This study aims to analyze properties of variationally-weighted quadratic and absolute approximations for non-convex loss functions. We propose an approach based on replacing the original non-convex regression problem with iterative application of weighted least squares and least absolute deviations methods, effectively implementing variationally-weighted approximations for non-convex loss functions. Each iteration of the weighted least absolute deviations method employed descent algorithms along nodal lines.

Through Monte Carlo simulations with various loss functions, we demonstrate that the weighted least absolute deviations method outperforms least squares in computational efficiency while maintaining comparable estimation accuracy. When multiple regression assumptions are violated simultaneously, either the weighted least absolute deviations method or the generalized least absolute deviations method (implemented as a generalized descent algorithm) proves preferable for achieving acceptable accuracy. We provide

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)



 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Golovanov O. A., Tyrsin A. N. Iterative convex estimation of linear regression models under data stochastic heterogeneity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 294–318. EDN: FUVADI. DOI: 10.14498/vsgtu2138 (In Russian).

Authors' Details:

Oleg A. Golovanov  <https://orcid.org/0000-0002-9977-6954>

Junior Researcher; Center for Economic Security¹; e-mail: golovanov.oa@uieec.ru

Aleksander N. Tyrsin  <https://orcid.org/0000-0002-2660-1221>

Dr. Tech. Sci., Professor; Leading Researcher; Center for Economic Security¹; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics and Mechanics²; e-mail: at2001@yandex.ru

computational complexity estimates and execution time analyses depending on sample size and number of regression parameters.

Keywords: linear regression, robust estimation, stochastic data heterogeneity, weighted least absolute deviations, least squares method, non-convex loss functions, iterative algorithms, regression model robustness.

Received: 22nd November, 2024 / Revised: 1st April, 2025 /

Accepted: 15th April, 2025 / First online: 13th May, 2025

Competing interests. The authors declare no conflict of interest.

Authors' contributions and responsibilities. All authors have made substantial contributions to the research: participated in methodology development, data analysis, and manuscript preparation. The final version of the article has been approved by all co-authors prior to submission.

Funding. This study was conducted as part of the research plan of the Institute of Economics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.

Acknowledgments. The authors sincerely thank the anonymous reviewers for their careful reading of the manuscript and constructive comments that helped improve the publication quality.

References

1. Hoffmann J. P. *Linear Regression Models. Applications in R*. New York, CRC Press, 2022, xv+420 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003162230>.
2. Orlov A. I. Diversity of the models for regression analysis (generalizing article), *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*, 2018, vol. 84, no. 5, pp. 63–73 (In Russian). EDN: XQBSKD. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2018-84-5-63-73>.
3. Greene W. H. *Econometric Analysis*. New York, Pearson, 2020, 1176 pp.
4. Aivazian S. A., Eniukov I. S., Meshalkin L. D. *Prikladnaya statistika: Issledovanie zavisimosti* [Applied Statistics: Study of Dependencies]. Moscow, Finance and Statistics, 1985, 488 pp. (In Russian)
5. Clarke B. *Robustness Theory and Application*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2018, xxiii+215 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118669471>.
6. Orlov A. I. On the requirements for statistical methods of data analysis (generalizing article), *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*, 2023, vol. 89, no. 11, pp. 98–106 (In Russian). EDN: VEWJXD. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-11-98-106>.
7. Salls D., Torres J. R., Varghese A. C., et al. Statistical characterization of random errors present in synchrophasor measurements, In: *2021 IEEE Power & Energy Society General Meeting (PESGM)*. Washington, DC, 2021, pp. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1109/PESGM46819.2021.9638135>.
8. Ives A. R. Random Errors are Neither: On the Interpretation of Correlated Data, *Methods in Ecology and Evolution*, 2022, vol. 13, no. 10, pp. 2092–2105. DOI: <https://doi.org/10.1111/2041-210X.13971>.
9. Boldin M. V., Simonova G. I., Tyurin Yu. N. *Znakovyi statisticheskii analiz lineinykh modelei* [Sign-Based Statistical Analysis of Linear Models]. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian)
10. Anandhi P., Prabhu S. M. The robust regression estimators: Performance & evaluation, *Int. J. Stat. Appl. Math.*, 2023, vol. 8, no. 6, pp. 83–87. DOI: <https://doi.org/10.22271/math.2023.v8.i6a.1444>.
11. Kolobov A. B. *Vibrodiagnostika: teoriya i praktika* [Vibrodiagnostics: Theory and Practice]. Moscow, Infra-Inzheneriya, 2019, 252 pp.

12. Dubrovskaya Yu. V. Analysis of heterogeneity of economic development of territories in the conditions of digitalization, *Vestn. Omsk. Univ. Ser. Ekonomika*, 2020, vol. 18, no. 2, pp. 102–113 (In Russian). EDN: QWJRTP. DOI: [https://doi.org/10.24147/1812-3988.2020.18\(2\).102-113](https://doi.org/10.24147/1812-3988.2020.18(2).102-113).
13. Bhatia S., Frangioni J. V., Hoffman R. M., et al. The challenges posed by cancer heterogeneity, *Nature Biotechnology*, 2012, vol. 30, no. 7, pp. 604–610. DOI: <https://doi.org/10.1038/nbt.2294>.
14. Wan J.-Z., Wang C.-J., Marquet P. A. Environmental heterogeneity as a driver of terrestrial biodiversity on a global scale, *Progr. Phys. Geogr.*, 2023, vol. 47, no. 6, pp. 912–930. DOI: <https://doi.org/10.1177/03091333231189045>.
15. Atkinson A. C., Riani M., Torti F. Robust methods for heteroskedastic regression, *Comput. Stat. Data Anal.*, 2016, vol. 104, pp. 209–222. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.07.002>.
16. Mudrov V. I., Kushko V. L. *Metody obrabotki izmereniy. Kvazipravdopodobnyye otsenki* [Methods of Measurement Processing. Quasi-Likelihood Estimates]. Moscow, Radio i svyaz, 1983, 304 pp. (In Russian)
17. Dodge Y. *The Concise Encyclopedia of Statistics*. New York, NY, Springer, 2008, ix+616 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-32833-1>.
18. Akimov P. A., Matasov A. I. An iterative algorithm for l_1 -norm approximation in dynamic estimation problems, *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 5, pp. 733–748. EDN: UFVCWT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S000511791505001X>.
19. Tyrsin A. N. Algorithms for descent along nodal straight lines in the problem of estimating regression equations using the least absolute deviations method, *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*, 2021, vol. 87, no. 5, pp. 68–75 (In Russian). EDN: OFEXNK. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2021-87-5-68-75>.
20. Golovanov O. A., Tyrsin A. N. Modified gradient descent algorithm along nodal straight lines in regression analysis problem, *Industrial Laboratory. Materials Diagnostics*, 2025, vol. 91, no. 3, pp. 83–92 (In Russian). EDN: RLOBGS. DOI: <https://doi.org/10.26896/1028-6861-2025-91-3-83-92>.
21. Tyrsin A. N., Sokolov L. A. Linear regression estimation using generalized least absolute deviations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 5, pp. 134–142 (In Russian). EDN: NCTNLB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu797>.
22. Cohen A., Migliorati G. Optimal weighted least-squares methods, *SMAI J. Comput. Math.*, 2017, vol. 3, pp. 181–203. DOI: <https://doi.org/10.5802/smai-jcm.25>.
23. Panyukov A. V., Tyrsin A. N. Interrelation of weighted and generalised variants of the least absolute deviations method, *Izv. Cheliab. Nauchn. Tsentra*, 2007, no. 1, pp. 6–11 (In Russian). EDN: IBMJQX.
24. Panyukov A. V. Stable parameter estimation of autoregressive models based on generalized method of least modules, *Vestnik NSUEM*, 2015, no. 4, pp. 339–346 (In Russian). EDN: VFZLFR.
25. Weiszfeld E., Plastria F. On the point for which the sum of the distances to n given points is minimum, *Ann. Oper. Res.*, 2009, vol. 167, no. 1, pp. 7–41. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-008-0352-z>.
26. Tyrsin A. N., Azaryan A. A. Exact evaluation of linear regression models by the least absolute deviations method based on the descent through the nodal straight lines, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 47–56 (In Russian). EDN: YXCEWU. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp180205>.
27. Golovanov O. A., Tyrsin A. N. Increasing the efficiency of the generalized least absolute deviations algorithm by refining the solution domain, In: *Modern methods of boundary value theory*, Proc. of the XXXIII Intern. Pontryagin Conf. (Voronezh, 3–9 May 2023). Voronezh, Voronezh State Univ., 2023, pp. 115–117 (In Russian). EDN: DHJTII.
28. Barbu A., Zhu S.-C. Introduction to Monte Carlo methods, In: *Monte Carlo Methods*. Singapore, Springer, 2020, pp. 1–17. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-2971-5_1.

29. Tukey J. W. A survey of sampling from contaminated distributions, In: *Contributions to Probability and Statistics*. Redwood, CA, Stanford Univ. Press, 1960, pp. 443–485.
30. Huber P. J., Ronchetti E. M. *Robust Statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2009, xvi+354 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780470434697>.
31. Azaryan A. A. *Fast algorithms for modeling multivariate linear regression dependencies based on least absolute deviations method*, Candidate dissertation in Physical and Mathematical Sciences (Specialty: 05.13.18 — Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes). Ekaterinburg, Ural Federal Univ., 148 pp. (In Russian). EDN: LFRCIU.
32. Tyrsin A. N., Golovanov O. A. Systems monitoring based on robust estimation of stochastic time series models, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022, vol. 2388, no. 1, 012074. EDN: JCWPQA. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2388/1/012074>.
33. Gayomey J. High frequency volatility estimation and option pricing, *Vestn. Altaisk. Akad. Ekonomiki Prava*, 2022, no. 4-2, pp. 167–176 (In Russian). EDN: BHLDR. DOI: <https://doi.org/10.17513/vaael.2153>.
34. Golovanov O. A., Tyrsin A. N., Vasilyeva E. V. Assessing the impact of the COVID-19 pandemic on the trends in socio-economic development of an industrial region in Russia, *J. Appl. Economic Res.*, 2022, vol. 21, no. 2, pp. 257–281 (In Russian). EDN: EMXLYU. DOI: <https://doi.org/10.15826/vestnik.2022.21.2.010>.
35. Kiryanov B. F., Tokmachev M. S. *Matematicheskie modeli v zdravookhranении* [Mathematical Models in Healthcare]. Veliky Novgorod, Yaroslav-the-Wise Novgorod State Univ., 2009, 279 pp. (In Russian). EDN: QLWOYH.
36. Sobolev G. A., Zakrzhevskaya N. A., Migunov I. N. Effect of meteorological conditions on tectonic deformations in hourly period range, *Izv., Phys. Solid Earth*, 2021, vol. 57, no. 6, pp. 834–848. EDN: FXNRXQ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1069351321060094>.
37. Koronovskii N. V., Bryantseva G. V. *Opasnye prirodnye protsessy* [Hazardous Natural Processes]. Moscow, INFRA-M, 2024, 233 pp. (In Russian)
38. Novikov A. V., Gubinsky D. N., Zaray E. A. Logging while drilling — efficient time management and reliable base for estimating volumetric parameters of a reservoir, *Actual Problems of Oil and Gas*, 2021, no. 3, pp. 49–60 (In Russian). EDN: OWPUCJ. DOI: <https://doi.org/10.29222/ipng.2078-5712.2021-34.art4>.
39. Klyachkin V. N., Kravtsov Yu. A. Irregularities in multivariate statistical control of a technological process, *Software & Systems*, 2016, no. 3, pp. 192–197 (In Russian). EDN: XEPQLZ. DOI: <https://doi.org/10.15827/0236-235X.115.192-197>.
40. Vial G. Understanding digital transformation: A review and a research agenda, *J. Strat. Inf. Syst.*, 2019, vol. 28, no. 2, pp. 118–144. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsis.2019.01.003>.



УДК 517.968.7

Определение динамических режимов в эредитарной двумодовой модели динамо

Е. А. Казаков, Г. М. Водинчар

Институт космифизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
Россия, 684034 Камчатский край, Елизовский район, с. Паратунка, ул. Мирная, 7.

Аннотация

Работа посвящена анализу результатов вычислительных экспериментов с эредитарной динамической системой, моделирующей двухмодовое гидромагнитное динамо с памятью. В статье проведено численное исследование динамических режимов, возникающих при вариации управляющих параметров данной системы. Эредитарная динамическая система представлена в виде системы интегро-дифференциальных уравнений.

Одним из ключевых методов исследования динамических режимов является анализ показателей Ляпунова. Для применения данного метода система интегро-дифференциальных уравнений была сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе приводятся описание соответствующего класса ядер и результат редукции.

В качестве альтернативного подхода к определению динамических режимов использовался тест 0–1. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью теста 0–1 и показателей Ляпунова для частного случая, которое показало их качественное соответствие. В дальнейшем исследовании динамических режимов интегро-дифференциальной системы применялся преимущественно тест 0–1.

Следует отметить, что данный метод позволяет идентифицировать лишь регулярные (периодические и асимптотически стационарные) либо хаотические режимы динамики системы. Для более детальной классификации регулярных режимов предложен дополнительный метод, основанный на анализе характеристик автокорреляционной функции временного ряда решения интегро-дифференциальной системы. Эмпирически установлено, что вычисление математического ожидания автокорреляционной функции позволяет различать периодические/квазипериодические и асимптотически стационарные режимы.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Казаков Е. А., Водинчар Г. М. Определение динамических режимов в эредитарной двумодовой модели динамо // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 319–333. EDN: LWBCIR. DOI: 10.14498/vsgtu2130.

Сведения об авторах

Евгений Анатольевич Казаков <https://orcid.org/0000-0001-7235-4148>
младший научный сотрудник; лаб. электромагнитных излучений; e-mail: kazakov@ikir.ru

Глеб Михайлович Водинчар <https://orcid.org/0000-0002-5516-1931>
кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования физических процессов; e-mail: vodinchar@ikir.ru

Исследованы случаи как мгновенной, так и запаздывающей эредитарной обратной связи. Результаты моделирования демонстрируют, что рассматриваемая модель воспроизводит ряд динамических режимов, характерных для реальных космических динамо-систем.

Ключевые слова: эредитарная динамо-система, тест 0–1, карта динамических режимов, хаотический режим, регулярный режим, автокорреляционный анализ.

Получение: 14 ноября 2024 г. / Исправление: 11 мая 2025 г. /
Принятие: 26 мая 2025 г. / Публикация онлайн: 2 июня 2025 г.

Введение. Существование крупномасштабных магнитных полей космических объектов (планет, звезд и галактик) традиционно объясняется действием механизма гидромагнитного динамо [1, 2]. Данный механизм предполагает генерацию магнитного поля в процессе эволюции системы, содержащей сплошную электропроводящую среду (жидкий металл или плазму). В простейшем случае для космических динамо-систем этот механизм реализуется посредством взаимной генерации тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля, обусловленной крупномасштабными движениями проводящей среды и мелкомасштабными турбулентными пульсациями [1, 3]. Необходимым условием является наличие начальной намагниченности среды, создаваемой внешним (затравочным) магнитным полем.

В теории динамо существенную роль играет обратная связь, проявляющаяся во влиянии растущего магнитного поля на процесс его генерации, что приводит к подавлению последнего и установлению конечной величины поля. Физической основой данной обратной связи выступает сила Лоренца, модифицирующая движение проводящей среды. Полная система уравнений динамо включает: 1) уравнение движения среды с учетом силы Лоренца и 2) уравнение магнитной индукции, описывающее генерацию поля. Нелинейный по скорости и магнитному полю характер этих уравнений в сочетании с необходимостью учета начальных и граничных условий делает их решение чрезвычайно сложной вычислительной задачей. Особо следует подчеркнуть, что адекватное описание α -эффекта (генерации крупномасштабного магнитного поля посредством нелинейного взаимодействия мелкомасштабных турбулентных пульсаций) требует учета нелокальности и памяти (эредитарности) системы [4, 5].

Прямое численное моделирование полной системы уравнений динамо сопряжено со значительными вычислительными затратами. Для моделирования на временных масштабах, сопоставимых с продолжительностью существования космических объектов, приходится ограничиваться маломодовыми приближениями. Наиболее радикальное упрощение приводит к двумодовым моделям. Примечательно, что даже в рамках столь существенного пространственного упрощения модели с памятью позволяют воспроизводить динамические режимы, аналогичные наблюдаемым в природных системах, включая такие характеристики, как фрактальность шкалы полярности магнитного поля и степенное распределение времени между инверсиями.

Поэтому разработка и исследование малоразмерных динамических систем с памятью, моделирующих процесс генерации магнитных полей на феноменологическом уровне, представляют собой актуальное направление в развитии

теории космических динамо-систем.

В работах [6–8] предложена двумодовая эредитарная модель динамо, описываемая следующей системой интегро-дифференциальных уравнений в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\eta x + y \left[\eta - \xi s^2 \int_0^t K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right], \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x \left[D - \int_0^t K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right], \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ соответствуют амплитудам тороидальной и полоидальной компонент магнитного поля, а положительные коэффициенты η , s , ξ и D представляют собой управляющие параметры модели. Временной масштаб системы нормирован на характерное время диссипации полоидальной компоненты поля. Физическая интерпретация параметров следующая:

- η^{-1} — характерное безразмерное время диссипации тороидальной компоненты поля;
- s^{-1} — относительная эффективность генерации тороидальной компоненты;
- ξ — отношение эффективностей генерации тороидальной и полоидальной компонент за счет α -эффекта;
- D — относительное динамо-число, определяющее баланс между генерацией и диссипацией ($D > 1$ соответствует преобладанию генерации над диссипацией, $D < 1$ — обратной ситуации).

Образно выражаясь, механизм динамо «активируется» только при $D > 1$.

Ядро $K(\cdot)$ предполагается неотрицательным и интегрируемым на промежутке $[0, +\infty)$. Конкретный вид функции ядра определяет модель подавления α -эффекта в системе (1).

Начальные условия $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$ задают начальную замагниченность среды затравочным полем.

При $\xi = 0$ получаем динамо-систему, где тороидальная компонента генерируется из полоидальной исключительно за счет крупномасштабного движения среды, а полоидальная компонента — из тороидальной благодаря α -эффекту. Такой механизм принято называть $\alpha\omega$ -динамо. В случае $\xi \neq 0$ α -эффект участвует в генерации обеих компонент поля, что соответствует механизму $\alpha^2\omega$ -динамо.

Вопрос существования и единственности решения системы (1) при произвольных начальных условиях рассмотрен в работе [8].

Физический смысл интегрального члена заключается в учете памяти в обратной связи динамо-системы, когда подавление генерации магнитного поля определяется функцией $Q(x, y)$ от компонент поля, усредненной по предшествующим состояниям. В реальных физических системах такая обратная связь обусловлена силой Лоренца, которая квадратична по полю. Поэтому естественно рассматривать функцию $Q(x, y)$ как квадратичную форму своих аргументов: $Q(x, y) = A(x^2 + y^2) + 2Cxy$, где A и C — постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно.

Частные случаи имеют четкую физическую интерпретацию:

- при $A = 0$ подавление α -эффекта определяется только спиральностью поля $H = xy$;
- при $C = 0$ — только энергией поля $E = x^2 + y^2$;
- если же оба коэффициента отличны от нуля, то в подавлении участвуют как спиральность, так и энергия поля.

Наиболее полное представление о поведении динамической системы дает карта динамических режимов — диаграмма на плоскости параметров системы, где по осям координат отложены управляющие параметры, а различные области соответствуют разным типам динамических режимов.

Реальные космические динамо-системы демонстрируют значительное разнообразие сложных динамических режимов, включая квазистационарные состояния, квазирегулярные и хаотические колебания, всплески активности, вассилиации (колебания вокруг ненулевого уровня), инверсии поля и другие [1, 3].

В современной литературе описаны различные критерии идентификации хаотических режимов. Наиболее простой метод основан на анализе спектра колебаний с помощью преобразования Фурье. Дискретный спектр характерен для периодических и квазипериодических колебаний, тогда как непрерывный спектр свидетельствует либо о хаотическом, либо о случайном характере динамики. Альтернативой Фурье-анализу служит вейвлет-анализ динамических систем. Еще один подход использует отображения Пуанкаре — сечения фазовой траектории некоторой поверхностью. Для случайного процесса отображение Пуанкаре представляет собой облако точек, тогда как квазипериодические и хаотические решения дают линии. Характерной особенностью хаотических режимов является их экспоненциальная чувствительность к малым изменениям начальных условий.

Наиболее надежным методом детектирования хаоса в системах, описываемых дифференциальными уравнениями, считается анализ скорости расхождения траекторий, который количественно оценивается с помощью показателей Ляпунова.

Однако практическое применение этого метода может быть сопряжено со значительными вычислительными трудностями, а для систем интегродифференциальных уравнений сама возможность его использования требует дополнительного обоснования. В связи с этим для исследования режимов в системе (1) целесообразно применять методы, опирающиеся исключительно на фазовые траектории, полученные в численных экспериментах, а не на уравнения системы. Одним из наиболее известных методов такого типа является тест 0–1 [9].

В настоящей работе представлены результаты применения теста 0–1 к системе (1). Проведенные вычислительные эксперименты демонстрируют эффективность данного метода для различения регулярных и хаотических режимов. Однако следует отметить, что тест 0–1 не позволяет дифференцировать типы регулярных режимов — асимптотически стационарный режим и периодические/квазипериодические колебания.

Для решения этой задачи предлагается эмпирическая методика, основанная на анализе характеристик автокорреляционной функции траектории системы. Дополнительно проводится сравнительный анализ обоих подходов для случая, когда система (1) допускает редукцию к дифференциальной форме.

1. Сведение к дифференциальной системе. Интегральный член в системе (1) отражает ключевую особенность модели — наличие эредитарности (памяти). Однако для определенного класса ядер с экспоненциальной асимптотикой возможно исключение интегрального члена путем расширения фазового пространства системы. Более точно: если ядро удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, то исходная интегро-дифференциальная система (1) может быть сведена к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными начальными условиями для введенных фазовых переменных. Данное утверждение формализуется следующей теоремой [10].

ТЕОРЕМА. Пусть ядро $K(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$a_0 K^{(n)}(t) + a_1 K^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} K'(t) + a_n K(t) = 0$$

с постоянными коэффициентами a_i . Тогда интегральное соотношение

$$z(t) = \int_0^t K(t - \tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau$$

эквивалентно задаче Коши для функции $z(t)$:

$$a_0 \frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = \sum_{l=1}^n a_{n-l} \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0) \frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}} Q(x(t), y(t)),$$

$$z(0) = 0,$$

$$\left. \frac{d^l z(t)}{dt^l} \right|_{t=0} = \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0) \frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}} Q(x(t), y(t)) \Big|_{t=0}, \quad l = 1, \dots, n-1.$$

Одним из частных случаев ядер $K(t)$, к которым применима данная теорема, являются экспоненциальные ядра вида $K(t) = e^{-bt}$, где $b > 0$. Параметр b^{-1} представляет собой безразмерный временной масштаб ядра, определяющий эффективную длительность памяти в системе. При дополнительном условии $\xi = 0$ модель соответствует механизму $\alpha\omega$ -динамо.

Соответствующая задача Коши принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\eta x + \eta y, & \frac{dy}{dt} &= -y + x(D - z), & \frac{dz}{dt} &= Q(x, y) - bz, \\ x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В частном случае, когда функция подавления $Q(x, y) = xy$ (что соответствует учету только спиральности поля), система (2) сводится к классической системе Лоренца, динамика которой детально изучена [11]. К данной системе применимы как метод показателей Ляпунова, так и тест 0–1.

Для визуализации динамических режимов были построены карты режимов на основе расчета показателей Ляпунова. При фиксированном значении

параметра $\eta = 10$ проводилось варьирование параметров D (от 1 до 100 с шагом 1) и b (от 1 до 2 с шагом 0.1). На рис. 1 представлены результаты для случая $Q(x, y) = xy$.

Следует отметить, что для многих систем, описываемых дифференциальными уравнениями, вычисление показателей Ляпунова представляет собой вычислительно сложную задачу. Эта сложность обусловлена необходимостью при моделировании n -мерной системы дополнительно рассчитывать n систем в вариациях, что существенно увеличивает временные затраты на вычисления [12, 13, 15].

Дополнительные трудности при расчете показателей Ляпунова могут быть связаны с экспоненциальным ростом фазовых переменных и их вариаций для определенных значений управляющих параметров. Кроме того, данный метод требует знания уравнений системы в вариациях. В связи с этим в работе был использован альтернативный подход к определению динамических режимов — тест 0–1.

Для верификации теста 0–1 была построена карта (рис. 2) динамических режимов системы (2). Качественное сравнение результатов, полученных обоими методами, демонстрирует их хорошее соответствие. В дальнейшем анализе динамических режимов системы (1) использовался тест 0–1 как более универсальный метод, применимый как к системам дифференциальных уравнений, так и к интегро-дифференциальным системам.

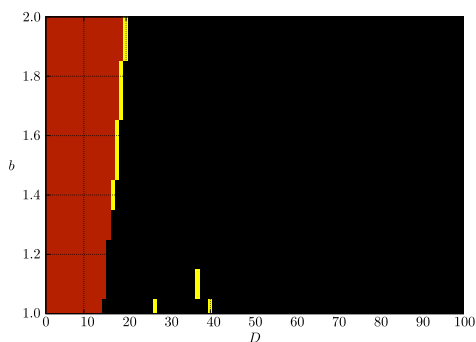


Рис. 1. Карта динамических режимов для системы Лоренца, построенная по показателям Ляпунова: красный цвет — асимптотически стационарные режимы; желтый цвет — периодические режимы; черный цвет — хаотические режимы (онлайн в цвете)

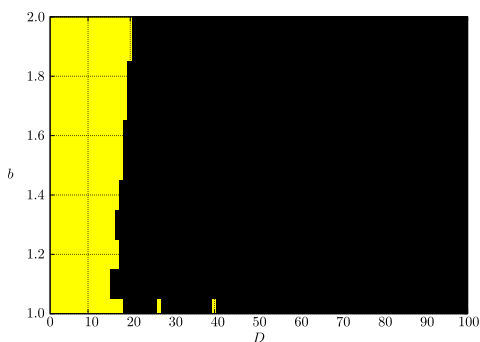


Рис. 2. Карта динамических режимов для системы Лоренца, построенная с использованием теста 0–1: желтый цвет — регулярные режимы (асимптотически стационарные и периодические); черный — хаотические режимы (онлайн в цвете)

[Figure 1. (online in color) Map of dynamic regimes for the Lorenz system obtained using Lyapunov exponents: red color — asymptotically stationary regimes; yellow color — periodic regimes; black color — chaotic regimes]

[Figure 2. (online in color) Map of dynamic regimes for the Lorenz system obtained using 0–1 test: yellow color — regular regimes (asymptotically stationary and periodic); black color — chaotic regimes]

2. Анализ динамических режимов с помощью теста 0–1. В работе рассматриваются два различных типа ядер интеграла подавления: ядра с экспоненциальной асимптотикой $K(t) = t^n e^{-bt}$ и ядра со степенной асимптотикой $K(t) = t^n (1+t)^{-(b+n)}$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, а $b^{-1} > 0$ определяет

временной масштаб ядра.

Физический смысл параметров заключается в следующем:

- при $K(0) \neq 0$ система демонстрирует мгновенный отклик в обратной связи;
- в случае $K(0) = 0$ наблюдается запаздывающий отклик, причем величина задержки возрастает с увеличением параметра n , поскольку максимум ядра смещается в более поздние моменты времени, уменьшая влияние текущих значений компонент поля.

Далее рассматривается случай $\xi = 0$, соответствующий механизму $\alpha\omega$ -динамо, который наиболее характерен для космических динамо-систем. Значение параметра η фиксировано и равно 10, что обусловлено геометрическими особенностями тороидальных и полоидальных компонент — известно, что при одинаковых пространственных масштабах тороидальные моды затухают быстрее полоидальных.

В качестве квадратичной формы подавления выбрана спиральность поля $Q(x, y) = xy$. Этот выбор обусловлен двумя факторами: во-первых, энергия поля (знакоположительная форма) может вызывать чрезмерно сильное подавление; во-вторых, спиральность оказывает существенное влияние на динамику динамо-систем, что подтверждено в работе [5].

Численное моделирование системы (1) проводилось при следующих параметрах: параметр D варьировался от 2 до 220 с шагом 1, а параметр b изменялся от 2 до 5 с шагом 0.1.

На рис. 3 представлена карта динамических режимов для системы с экспоненциальным ядром подавления $K(t) = e^{-bt}$.

Анализ карты позволяет сделать следующие наблюдения. При малых значениях динамо-числа D в системе наблюдаются исключительно регулярные режимы. С увеличением этого параметра происходит переход в хаотическую область, причем граница между регулярными и хаотическими режимами выражена достаточно четко. Однако при дальнейшем росте D наблюдается чередование хаотических и регулярных областей.

Такая структура карты режимов свидетельствует о том, что малые флуктуации параметров D и b способны изменить характер динамики лишь вблизи границ областей. С физической точки зрения флуктуации параметра D соответствуют вариациям скорости крупномасштабных движений и интенсивности турбулентных пульсаций, которые вполне возможны в реальных системах. Таким образом, можно заключить, что система демонстрирует высокую устойчивость типов динамики по отношению к малым возмущениям параметров.

Рассмотрим теперь случай степенного ядра $K(t) = (1 + t)^{-b}$. Результаты численного моделирования представлены на рис. 4. Сравнительный анализ показывает отсутствие качественных различий между поведением системы с экспоненциальным (рис. 3) и степенным (рис. 4) ядрами.

Перейдем к анализу случая ядер с запаздывающим обратным влиянием. В качестве первого примера рассмотрим экспоненциальное ядро вида $K(t) = te^{-bt}$. Результаты численного моделирования для этого случая представлены на рис. 5. Наблюдается принципиально иная картина динамики по сравнению с ядрами без задержки: обширная область параметров демонстрирует сложное переплетение регулярных и хаотических зон. Такая структура

означает, что даже незначительные флуктуации управляющих параметров способны вызывать резкую смену типа динамики системы. С физической точки зрения это соответствует спонтанным перестройкам режима генерации магнитного поля без внешних воздействий. Подобные явления действительно наблюдаются в реальных динамо-системах.

Аналогичное исследование для степенного ядра с запаздыванием $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ приведено на рис. 6. Полученная карта режимов качественно аналогична предыдущему случаю.

Обобщая полученные результаты, можно сделать важный вывод: клю-

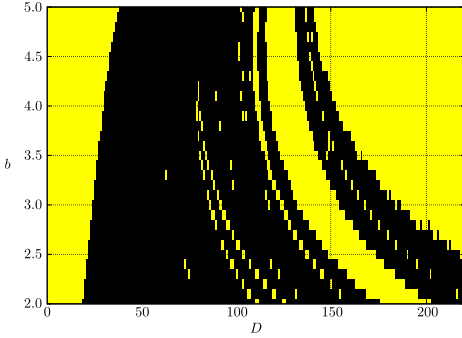


Рис. 3. Карта динамических режимов системы (1) с экспоненциальным ядром $K(t) = e^{-bt}$; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

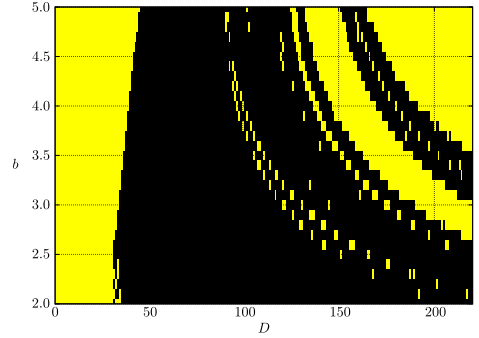


Рис. 4. Карта динамических режимов системы (1) со степенным ядром $K(t) = (1+t)^{-b}$; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

[Figure 3. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with exponential kernel $K(t) = e^{-bt}$; the color coding follows Fig. 2]

[Figure 4. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with power-law kernel $K(t) = (1+t)^{-b}$; the color coding follows Fig. 2]

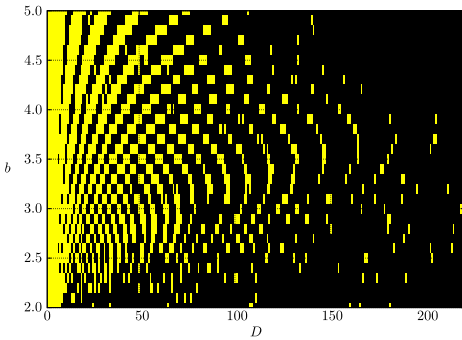


Рис. 5. Карта динамических режимов системы (1) с экспоненциальным ядром $K(t) = te^{-bt}$ и запаздывающим откликом; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

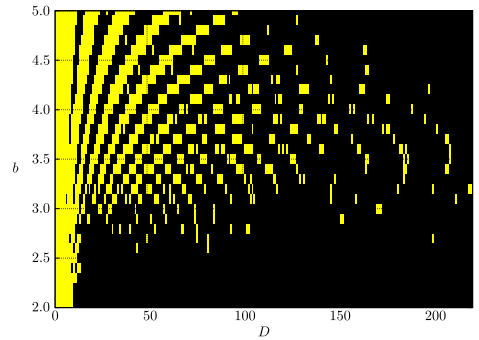


Рис. 6. Карта динамических режимов системы (1) со степенным ядром $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ и запаздывающим откликом; цветовая кодировка карты как на рис. 2 (онлайн в цвете)

[Figure 5. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with delayed-response exponential kernel $K(t) = te^{-bt}$; the color coding follows Fig. 2]

[Figure 6. (online in color) Map of dynamic regimes for system (1) with delayed-response power-law kernel $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$; the color coding follows Fig. 2]

чевым фактором, определяющим динамику системы, является наличие или отсутствие запаздывания в обратной связи, тогда как тип асимптотики ядра (экспоненциальная или степенная) играет второстепенную роль.

Тест 0–1 позволяет различать только два типа динамических режимов: хаотический и регулярный, при этом к регулярным относятся как асимптотически стационарные, так и периодические решения. Для более детальной классификации регулярных режимов необходимо применение дополнительных методов анализа.

Рассмотрим подход, основанный на анализе автокорреляционных функций. Пусть получены временные ряды фазовых переменных $x(t)$ и $y(t)$ системы (1) с шагом интегрирования h . В соответствии с методами цифровой обработки сигналов [16] выполним нормировку времени, приняв h за единичный интервал, так что дискретное время t принимает целые значения: $t = 0, 1, \dots, N$.

Для временного ряда $x(t)$ вычисляется его энергия:

$$E = \sum_{t=0}^N x^2(t).$$

Нормированная автокорреляционная функция определяется так:

$$R(\tau) = \frac{1}{E} \sum_{t=0}^N x(t)x(t+\tau), \quad \tau = 0, 1, \dots, N-1.$$

Теперь найдем статистические характеристики полученного ряда $R(\tau)$, а именно его математическое ожидание M и дисперсию V . В дальнейшем анализе рассматриваются только случаи, когда тест 0–1 показал результат регулярной динамики.

Характерные графики автокорреляционной функции представлены на рис. 7: для асимптотически стационарного режима (а) и для периодического режима (б) вид автокорреляционных функций существенно различается.

Анализ многочисленных вычислительных экспериментов показал, что математическое ожидание M автокорреляционной функции служит надежным критерием для различения типов регулярной динамики. Для асимптотически стационарных режимов характерны значения $M \geq 0.4$, тогда как периодические режимы соответствуют меньшим значениям математического ожидания.

Применение этого критерия позволило построить уточненные карты динамических режимов (рис. 8), где асимптотически стационарные режимы обозначены красным цветом, периодические — желтым, а хаотические — черным.

Сравнение карт динамических режимов для различных ядерных функций позволяет сделать следующие выводы. Асимптотически стационарные режимы преобладают при малых значениях динамо-числа D , что соответствует слабой генерации поля. С увеличением D система переходит либо в периодический, либо в хаотический режим. Особенностью систем с запаздывающей обратной связью является преобладание колебательной динамики — регулярной или хаотической.

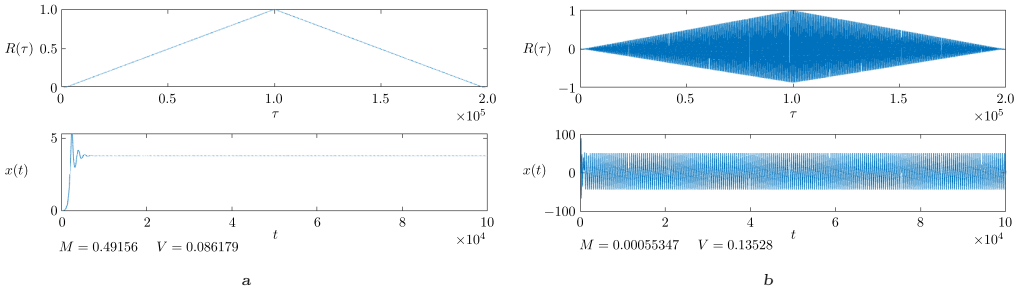


Рис. 7. Автокорреляционные функции и временные ряды для различных режимов: а — асимптотически стационарный режим ($D = 5$, $b = 2.7$); б — периодический режим ($D = 220$, $b = 2.7$)

[Figure 7. Autocorrelation functions and time series for various dynamical regimes: (a) asymptotically stationary regime ($D = 5$, $b = 2.7$); (b) periodic regime ($D = 220$, $b = 2.7$)]

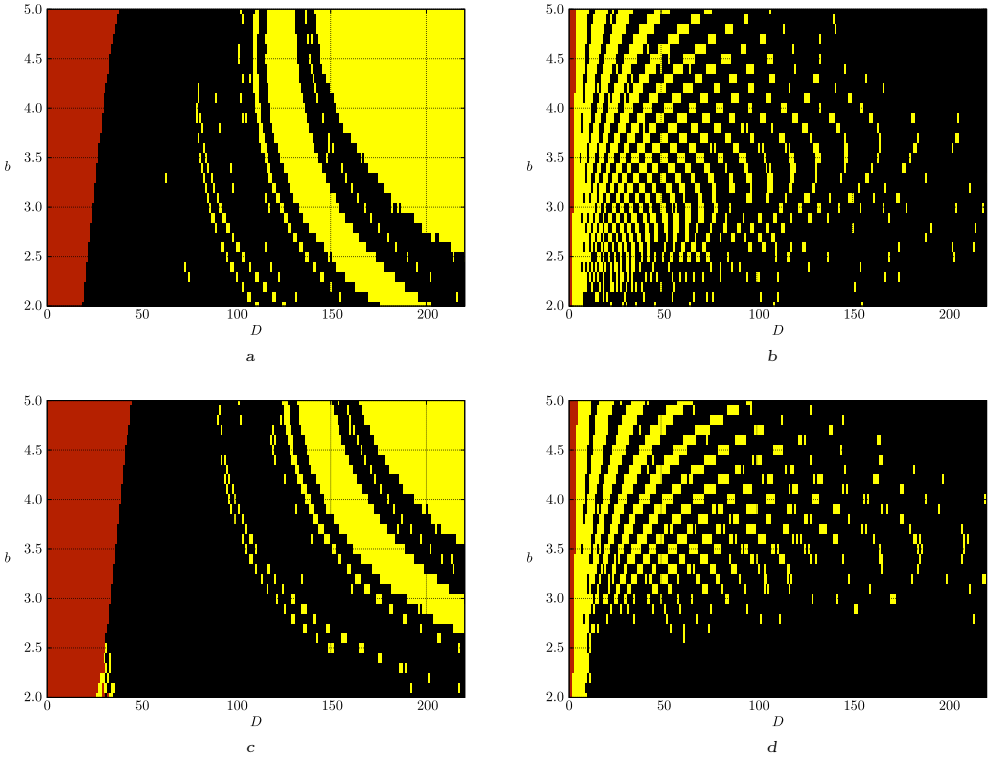


Рис. 8. Карты динамических режимов системы (1) для различных ядер: а — $K(t) = e^{-bt}$ (экспоненциальное без запаздывания); б — $K(t) = te^{-bt}$ (экспоненциальное с запаздыванием); в — $K(t) = (1+t)^{-b}$ (степенное без запаздывания); д — $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ (степенное с запаздыванием). Карты построены с использованием теста 0–1 и анализа автокорреляционных функций; цветовая кодировка карты как на рис. 1 (онлайн в цвете)

[Figure 8. (online in color) Dynamical regime maps of system (1) for different kernels: (a) $K(t) = e^{-bt}$ (exponential without delay); (b) $K(t) = te^{-bt}$ (exponential with delay); (c) $K(t) = (1+t)^{-b}$ (power-law without delay); (d) $K(t) = t(1+t)^{-(b+1)}$ (power-law with delay). The maps were constructed using the 0–1 test and autocorrelation function analysis; color coding follows Fig. 1

Заключение. Идентификация типов динамических режимов играет ключевую роль при исследовании математических моделей динамических систем, поскольку разные режимы соответствуют принципиально различным сценариям эволюции моделируемых физических процессов. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо зарекомендовал себя метод показателей Ляпунова. Однако в случае эредитарных систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями или уравнениями с дробными производными (Герасимова—Капуто или Римана—Лиувилля [17]), применение этого метода становится проблематичным. Хотя в литературе встречаются работы, где показатели Ляпунова применяются к уравнениям дробного порядка [18], строгое теоретическое обоснование такой процедуры пока отсутствует.

В данном контексте особую важность приобретают методы анализа временных рядов, полученных в результате численного моделирования или натурных экспериментов. Одним из таких методов является тест 0–1, который был успешно применен в нашей работе для исследования двумодовой эредитарной системы, моделирующей космическое динамо с памятью в механизме подавления α -эффекта.

Проведенные исследования показали, что тест 0–1 эффективно разделяет хаотические и регулярные режимы, но не позволяет отличить асимптотически стационарные режимы от периодических и квазипериодических. Для решения этой задачи была разработана дополнительная методика, основанная на анализе автокорреляционных функций. Хотя предложенный подход пока не имеет строгого теоретического обоснования, его эффективность была подтверждена в ходе численных экспериментов. Полученные результаты открывают перспективы для дальнейших теоретических исследований и применения методики к более сложным моделям динамо-систем.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли равный вклад в разработку концепции исследования, проведение расчетов и подготовку рукописи. Окончательная версия статьи была одобрена всеми соавторами.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Государственного задания ИКИР ДВО РАН (регистрационный номер НИОКТР 124012300245-2).

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное рассмотрение работы и конструктивные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Библиографический список

1. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. М., Ижевск: НИЦ «РХД», 2006. 436 с.
2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. New York: Pergamon Press, 1980. 271 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03269-0>.
3. Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle* / International Geophysics. vol. 63. London: Academic Press, 1996. xiv+531 pp.
4. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport // *Astrophys. J.*, 2009. vol. 706, no. 1. pp. 712–726. DOI: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/706/1/712>.

5. Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2008. vol. 102, no. 6. pp. 601–632. DOI: <https://doi.org/10.1080/03091920802260466>.
6. Vodinchar G. Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale $\alpha\omega$ -dynamo // *Mathematics*, 2020. vol. 8, no. 11, 2065. DOI: <https://doi.org/10.3390/math8112065>.
7. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2021. Т. 35, № 2. С. 40–47. EDN: RDPQER. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47>.
8. Казаков Е. А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью // *Вычисл. технол.*, 2022. Т. 27, № 6. С. 19–32. DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.6.003>.
9. Gottwald G. A., Melbourne I. The 0–1 test for chaos: A review / *Chaos Detection and Predictability* / Lecture Notes in Physics, 915. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 221–247. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-48410-4_7.
10. Водинчар Г. М., Казаков Е. А. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2023. Т. 42, № 1. С. 180–190. EDN: BRDBZK. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190>.
11. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory // *E3S Web Conf.*, 2018. vol. 62, 02011. EDN: HUZOAB. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20186202011>.
12. Барбашин Е. А. *Функции Ляпунова* / Сер. Физико-математическое наследие: Математика (теория дифференциальных уравнений). М.: URSS, 2012. 246 с. EDN: QKAKBH.
13. Bathe K.-J., Wilson E. L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis* / Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976. xv+528 pp.
14. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part I: Theory // *Meccanica*, 1980. vol. 15, no. 1. pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf02128236>.
15. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part II: Numerical application // *Meccanica*, 1980. vol. 15, no. 1. pp. 21–30. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02128237>.
16. Сергиенко А. Б. *Цифровая обработка сигналов*. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 768 с.
17. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 510 с. EDN: QJVANP.
18. Паровик Р. И. Хаотические режимы фрактального нелинейного осциллятора // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 2. С. 364–379. EDN: UXHTLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1611>.

MSC: 47G20, 37M25

Determination of dynamic modes in a two-mode hereditary dynamo system

E. A. Kazakov, G. M. Vodinchar

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation,
Far East Division, Russian Academy of Sciences,
7, Mirnaya str. Paratunka, Kamchatkiy kray, 684034, Russian Federation.

Abstract

This study presents a computational analysis of a hereditary dynamical system modeling a two-mode hydromagnetic dynamo with memory. We conduct a numerical investigation of dynamic regimes emerging under variation of the system's control parameters. The hereditary dynamical system is described by a set of integro-differential equations.

Lyapunov exponent analysis serves as a principal method for examining dynamic regimes. To implement this approach, the integro-differential system was reduced to a system of ordinary differential equations. The paper provides a description of the corresponding class of kernels and the reduction result.

As an alternative approach, we employ the 0-1 test for chaos detection. A comparative analysis between the 0-1 test and Lyapunov exponents for a particular case demonstrates their qualitative agreement. Subsequent investigations are primarily utilized the 0-1 test for analyzing the integro-differential system's dynamic regimes.

Notably, this method only discriminates between regular (periodic and asymptotically stationary) and chaotic regimes. For finer classification of regular regimes, we propose an auxiliary method based on analyzing the autocorrelation function characteristics of the solution's time series. Empirical results show that computing the autocorrelation function's expected value effectively distinguishes periodic/quasi-periodic regimes from asymptotically stationary ones.

Both instantaneous and delayed hereditary feedback cases are examined. Simulation results reveal that the model reproduces various dynamic regimes characteristic of actual cosmic dynamo systems.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kazakov E. A., Vodinchar G. M. Determination of dynamic modes in a two-mode hereditary dynamo system, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 319–333. EDN: LWBCIR. DOI: 10.14498/vsgtu2130 (In Russian).

Authors' Details:

Evgeny A. Kazakov  <https://orcid.org/0000-0001-7235-4148>

Junior Researcher; Lab. of Electromagnetic Propagation; e-mail: kazakov@ikir.ru

Gleb M. Vodinchar  <https://orcid.org/0000-0002-5516-1931>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Lab. Simulation of Physical Processes; e-mail: vodinchar@ikir.ru

Keywords: hereditary dynamo system, 0–1 test, dynamic regime map, chaotic regime, regular regime, autocorrelation analysis.

Received: 14th November, 2024 / Revised: 11th May, 2025 /

Accepted: 26th May, 2025 / First online: 2nd June, 2025

Competing interests. The authors declare no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed equally to: research conceptualization, computational analysis, and manuscript preparation. The final version of the manuscript was approved by all co-authors.

Funding. This research was supported by the State Assignment of IKIR FEB RAS (registration number NIOKTR 124012300245-2).

Acknowledgments. The authors thank the reviewers for their thorough evaluation and constructive comments that significantly improved the article.

References

1. Zel'dovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D. *Magnitnyye polya v astrofizike* [Magnetic Fields in Astrophysics]. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2006, 436 pp. (In Russian)
2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*. New York, Pergamon Press, 1980, 271 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03269-0>.
3. Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, International Geophysics, vol. 63. London, Academic Press, 1996, xiv+531 pp.
4. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport, *Astrophys. J.*, 2009, vol. 706, no. 1, pp. 712–726. DOI: <https://doi.org/10.1088/0004-637x/706/1/712>.
5. Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2008, vol. 102, no. 6, pp. 601–632. DOI: <https://doi.org/10.1080/03091920802260466>.
6. Vodinchar G. Hereditary oscillator associated with the model of a large-scale $\alpha\omega$ -dynamo, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, 2065. DOI: <https://doi.org/10.3390/math8112065>.
7. Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, vol. 35, no. 2, pp. 40–47 (In Russian). EDN: RDPQER. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47>.
8. Kazakov E. A. Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory, *Comput. Technol.*, 2022, vol. 27, no. 6, pp. 19–32 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.6.003>.
9. Gottwald G. A., Melbourne I. The 0–1 test for chaos: A review, In: *Chaos Detection and Predictability*, Lecture Notes in Physics, 915. Berlin, Heidelberg, Springer, pp. 221–247. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-48410-4_7.
10. Vodinchar G. M., Kazakov E. A. Elimination of the integral term in the equations of one hereditary system related to the hydromagnetic dynamo, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 42, no. 1, pp. 180–190. EDN: BRDBZK. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190>.
11. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory, *E3S Web Conf.*, 2018, vol. 62, 02011. EDN: HUZ0AB. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20186202011>.
12. Barbashin E. A. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov Functions], Physico-Mathematical Heritage: Mathematics (Theory of Differential Equations). Moscow, URSS, 2012, 246 pp. EDN: QKAKBH.
13. Bathe K.-J., Wilson E. L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Civil Engineering and Engineering Mechanics Series. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1976, xv+528 pp.

14. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf02128236>.
15. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part II: Numerical application, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 21–30. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02128237>.
16. Sergienko A. B. *Tsifrovaya obrabotka signalov* [Digital Signal Processing]. St. Petersburg, BHV-Petersburg, 2011, 768 pp. (In Russian)
17. Uchaykin V. V. *Metod drobnykh proizvodnykh* [The Method of Fractional Derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 510 pp. (In Russian). EDN: QJVANP.
18. Parovik R. I. Chaotic regimes of a fractal nonlinear oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 364–379 (In Russian). EDN: UXHTLO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1611>.



УДК 520.88:523.982

Математическое моделирование формирования предвспышечного сигнала в условиях солнечной атмосферы

Д. В. Романов¹, К. В. Романов¹, В. А. Романов²,
Е. А. Степанов², А. А. Лебедев², В. А. Маскаев²

¹ Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева, Россия, 660049, Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89.

² Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

Аннотация

В работе исследуется развитие неустойчивости Паркера в коротковолновой части спектра колебаний крупномасштабных магнитных полей (волновое число $m > 20$) в верхних слоях конвективной зоны Солнца. Вследствие резкой нелинейности подъема верхней части магнитной арки формируется иглообразный профиль, пронизывающий солнечную атмосферу с гиперзвуковой скоростью. При подъеме магнитного поля фотосферные слои и хромосфера испытывают резкий вертикальный удар, что приводит к генерации цуга круговых расходящихся ударных волн, распространяющихся вдоль солнечной поверхности. Данное явление уверенно регистрируется современными наблюдательными средствами и получило название «солнцетрясения». Начало генерации расходящихся ударных волн является предвестником вспышечной активности в пределах активной области солнечной атмосферы. В работе получены численные оценки пространственного и временного разрешения регистрирующей аппаратуры, необходимого для детального изучения подъема магнитного поля с гиперзвуковыми скоростями в хромосфере Солнца.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Романов Д. В., Романов К. В., Романов В. А., Степанов Е. А., Лебедев А. А., Маскаев В. А. Математическое моделирование формирования предвспышечного сигнала в условиях солнечной атмосферы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 334–346. EDN: NAFTRO. DOI: 10.14498/vsgtu2140.

Сведения об авторах

Дмитрий Валерьевич Романов <https://orcid.org/0000-0002-4982-5973>
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. информатики и информационных технологий в образовании; e-mail: d-v-romanov@ya.ru

Константин Валерьевич Романов <https://orcid.org/0000-0001-7320-2517>
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. математики и методики обучения математике; e-mail: k-v-romanov@ya.ru

Валерий Александрович Романов <https://orcid.org/0000-0001-9876-0822>
доктор физико-математических наук; профессор; каф. математической кибернетики и компьютерных наук; e-mail: valeriy.a.romanov@yandex.ru

Ключевые слова: фотосфера, солнечные пятна, конвективная зона Солнца, магнитная трубка, неустойчивость Паркера.

Получение: 26 декабря 2024 г. / Исправление: 31 марта 2025 г. /

Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 9 июня 2025 г.

Введение. Вспышки на Солнце представляют собой наиболее мощное проявление солнечной активности [1–3]. Они оказывают значительное влияние на околоземное космическое пространство и магнитосферу Земли [4, 5]. Исследования, проводимые в рамках международных программ по изучению солнечно-земных связей, охватывают широкий спектр прикладных задач — от обеспечения безопасности космических миссий (защита оборудования и здоровья экипажа при длительных экспедициях) до медицинских аспектов (возможные осложнения сердечно-сосудистых заболеваний, онкологические риски и другие негативные последствия [6, 7]).

Ключевым элементом проводимых исследований является диагностика формирующихся активных областей солнечной атмосферы, которые служат очагами вспышечной активности. Особое значение имеет идентификация физических процессов (сигналов), предшествующих началу вспышечной активности в таких областях. Эти сигналы получили название «предвестников» [1, 6], причем их природа может быть различной.

Изучению «предвестников», исследованию их физической природы посвящено множество теоретических и наблюдательных работ [6–9]. Тем не менее проблема остается актуальной, поскольку до сих пор не установлены надежные физические критерии или явления, которые бы однозначно характеризовали начальную стадию вспышечного процесса и позволяли точно диагностировать предвспышечное состояние в формирующихся активных областях солнечной атмосферы [6, 7].

В данной работе для решения указанной задачи методом математического моделирования исследуется динамика выброса магнитного поля из верхних слоев конвективной зоны в солнечную атмосферу. Результаты расчетов демонстрируют наличие взрывных режимов нелинейного обострения при подъеме магнитного поля. Физическим механизмом, обеспечивающим нелинейный рост скорости подъема магнитного поля, является развитие неустойчивости Паркера в коротковолновой части спектра колебаний всплывающих магнитных полей в верхних слоях конвективной зоны Солнца. В работе детально анализируется динамика подъема магнитного поля от фотосферного уровня до верхних слоев хромосферы. Полученные результаты позволяют иденти-

Евгений Александрович Степанов  <https://orcid.org/0000-0002-2050-2724>
аспирант; каф. математической кибернетики и компьютерных наук;
e-mail: ev_stepanof@yandex.ru

Антон Андреевич Лебедев  <https://orcid.org/0000-0002-8241-1916>
аспирант; каф. математической кибернетики и компьютерных наук;
e-mail: maiorovaleks94@gmail.com

Владимир Алексеевич Маскаев  <https://orcid.org/0009-0000-3754-6902>
аспирант; каф. математической кибернетики и компьютерных наук;
e-mail: maskaev-01@mail.ru

фицировать физический механизм генерации интенсивных концентрических ударных волн, распространяющихся вдоль солнечной поверхности в очагах вспышечной активности и наблюдаемых экспериментально [10].

1. Математическая постановка задачи. Современные наблюдательные данные о зарождении и временной эволюции активных областей в солнечной атмосфере позволяют установить, что формирующиеся магнитные структуры представляют собой совокупность мелкомасштабных магнитных трубок с высокой напряженностью магнитного поля, расположенных в слабомагнитной плазме (рис. 1). Динамика тонкой магнитной трубки в конвективной зоне и атмосфере Солнца описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\rho_i \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{H}{4\pi} \cdot \frac{\partial(\vec{H})}{\partial \ell} + (\rho_i - \rho_e)\vec{g}, \quad (1)$$

$$p_i + \frac{H^2}{8\pi} = p_e, \quad (2)$$

$$\frac{\rho_i^\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{p_i}{\rho_i^\gamma} \right) = \text{div}(k \cdot \vec{\nabla} T) + Q_i, \quad (3)$$

$$H \cdot \sigma = \text{const} \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} p_e = \rho_e \cdot \vec{g}, \quad (5)$$

$$p_i = \frac{R}{\mu} \cdot \rho_i \cdot T_i, \quad (6)$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_i}{\rho_i}. \quad (7)$$

Здесь (1) — уравнение движения трубки с учетом силы натяжения магнитного поля и выталкивающей силы Архимеда; (2) — уравнение баланса давлений на границе трубки; (3) — уравнение энергии с учетом теплопроводности и радиационных потерь; (4) — условие сохранения магнитного потока; (5) — уравнение гидростатического равновесия для внешней плазмы; (6), (7) — уравнения состояния идеального газа. Индексы i и e обозначают параметры внутри и



Рис. 1. Формирование группы пятен в активной области NOAA 10488 по изображениям в континууме SOHO MDI [13]

[Figure 1. Formation of a sunspot group in the active region of NOAA 10488 from images in the SOHO MDI continuum [13]]

вне трубки соответственно. В уравнениях введены следующие обозначения: H — напряженность магнитного поля [Гс]; ρ — плотность плазмы [г/см³]; p — газовое давление [дин/см²]; $\vec{v}$ — скорость плазмы [см/с]; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения [см/с²]; σ — площадь поперечного сечения трубки [см²]; ℓ — координата вдоль оси магнитной трубки [см]; T — температура плазмы [К]; k — коэффициент теплопроводности [эрг/(см · с · К)]; Q_i — объемные потери энергии на излучение [эрг/(см³ · с)]; γ — показатель адиабаты; $R = 8.314 \times 10^7$ — универсальная газовая постоянная [эрг/(К · моль)]; μ — молярная масса плазмы [г/моль]; ε — удельная внутренняя энергия [эрг/г]. Профили $\rho_e(r)$, $p_e(r)$, $g(r)$ определяются по стандартной модели внутреннего строения Солнца [11].

В начальный момент времени трубка расположена в экваториальной плоскости Солнца (рис. 2, а). Волновое число m соответствует количеству стоячих волн вдоль периметра трубки. В равновесном состоянии выталкивающая сила Архимеда компенсируется натяжением магнитных силовых линий. Вблизи положения равновесия возникают два типа линейных колебаний: быстрые (альфвеновские) и медленные (варикозные) моды (рис. 2, б). В гравитационном поле Солнца наименее устойчивыми являются медленные моды колебаний. При малых значениях напряженности магнитного поля области с повышенной плотностью опускаются вниз, тогда как разреженные участки, теряя массу, под действием архимедовой силы ускоренно всплывают к фотосфере и в атмосферу Солнца. Данный механизм описывает развитие неустойчивости Паркера для медленных мод колебаний магнитного поля в конвективной зоне.

Для численного решения системы уравнений (1)–(7) вводится лагранжева массовая координата s , определяющая массу вещества между фиксированным начальным и текущим сечениями трубки [12]. Система уравнений в безразмерных массовых лагранжевых переменных аппроксимируется разностными схемами и разделяется на три группы: уравнения для координат узлов трубки, динамические и тепловые уравнения. Полученная нелинейная система разностных уравнений решается неявным методом Ньютона с использованием процедуры раздельных прогонок [12].

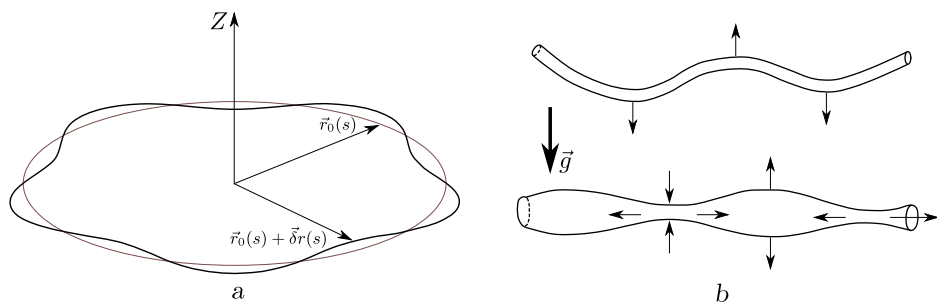


Рис. 2. Начальная форма магнитной трубки для волнового числа $m = 5$ (а); течение плазмы в трубке для изгибной (быстрой) и продольной (медленной) мод колебаний (б)
[Figure 2. The initial shape of the magnetic tube for the wavenumber $m = 5$ (a); plasma flow in a tube for bending (fast) and longitudinal (slow) oscillation modes (b)]

2. Физические условия развития неустойчивости Паркера в верхних слоях конвективной зоны Солнца. Развитие неустойчивости Паркера для колебаний магнитной трубки проявляется по-разному в зависимости от глубины ее залегания в конвективной зоне. На рис. 3, а представлены распределения газодинамических параметров на различных глубинах конвективной зоны, полученные в рамках программы GONG [11]. В верхних слоях конвективной зоны (на глубинах менее 10^5 км от фотосферного уровня, где радиус Солнца составляет 695 500 км) формируется область с высокими градиентами газодинамических параметров. При уменьшении глубины погружения равновесные положения магнитной трубки становятся менее устойчивыми. Ключевым параметром устойчивости является длина волны (характеризуемая волновым числом m): с увеличением длины волны области повышенной плотности в трубке под действием гравитации легче опускаются вниз, что приводит к развитию неустойчивости Паркера. При больших значениях волнового числа m устойчивые конфигурации магнитного поля формируются вблизи фотосферного уровня (рис. 3, б).

Для гармоник $m = 20$ глубина потери устойчивости составляет 52 394 км ниже фотосферного уровня при начальной напряженности магнитного поля $H = 2 \cdot 10^6$ Гс. При всплывании магнитной арки все участки трубки динамически эквивалентны: газ поступает в некоторый объем с одной стороны и вытекает с другой. Особый интерес представляет верхняя точка арки, где газ вытекает через оба боковых сечения сегмента трубки.

В этой области создаются оптимальные условия для развития неустойчивости Паркера, что приводит к нелинейному росту скорости подъема вершины арки (рис. 4, 5). Вершина приобретает иглообразную форму, причем степень заостренности напрямую влияет на эффективность стекания газа под действием гравитации и, следовательно, на развитие неустойчивости.

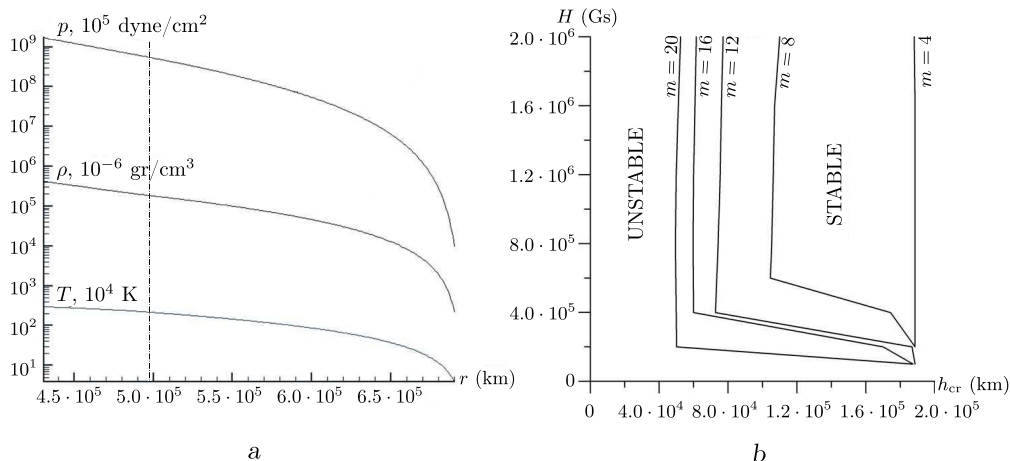


Рис. 3. Распределение газодинамических параметров в зависимости от глубины конвективной зоны [11] (а); распределение критических значений напряженности магнитного поля развития неустойчивости Паркера в зависимости от глубины конвективной зоны и волнового числа m (б)

[Figure 3. Distribution of gas-dynamic parameters depending on the depth of the convective zone [11] (a); distribution of critical values of the magnetic field strength for the development of the Parker instability depending on the depth of the convective zone and the wave number m (b)]

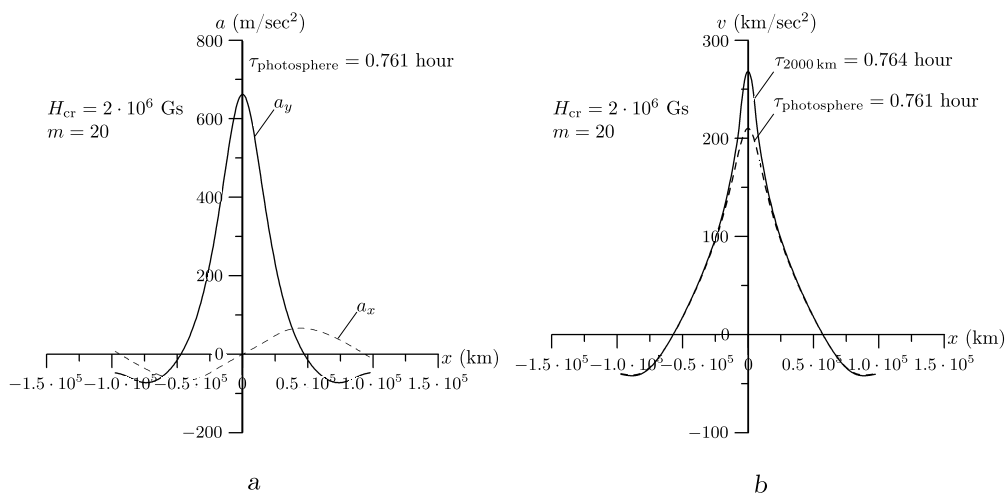


Рис. 4. Распределение вертикального и горизонтального ускорений магнитной трубки (а); распределение вертикальной скорости подъема трубки при выходе на фотосферный уровень и в верхние слои хромосферы (b)

[Figure 4. Distribution of vertical and horizontal accelerations of the magnetic flux tube (a); vertical velocity distribution during the tube's ascent through the photospheric level and into the upper chromospheric layers (b)]

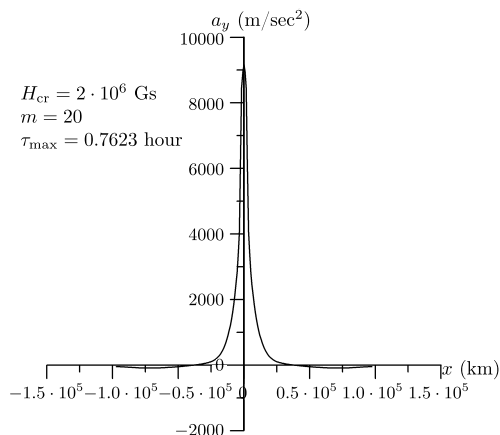


Рис. 5. Распределение вертикального ускорения магнитной трубки в верхних слоях хромосферы

[Fig. 5. Distribution of vertical acceleration of the magnetic flux tube in the upper chromospheric layers]

Начальная стадия неустойчивости (рис. 4–6) характеризуется классическим механизмом: газ стекает к основанию арки, а центральная часть, непрерывно теряя массу, ускоряется по направлению к фотосфере. Возрастающие температурные градиенты вдоль оси трубки вызывают усиление тепловых потоков от основания к вершине. Для трубки с радиусом сечения 1 км при срыве тепловые потоки достигают $3 \cdot 10^{29}$ эрг/с (рис. 6, b), что достаточно для обеспечения энергии типичной солнечной вспышки ($\sim 10^{32}$ эрг, [1, 2]). Несмотря на малую начальную глубину ($\lambda \approx 2 \cdot 10^5$ км), на нелинейной стадии вершина арки приобретает ускорение до 600 м/с² (рис. 4, a) и скорость подъема 200 км/с (рис. 4, b).

Основная стадия разгона магнитной трубки реализуется при подъеме в пределах хромосферы Солнца. В верхних слоях хромосферы реализуется

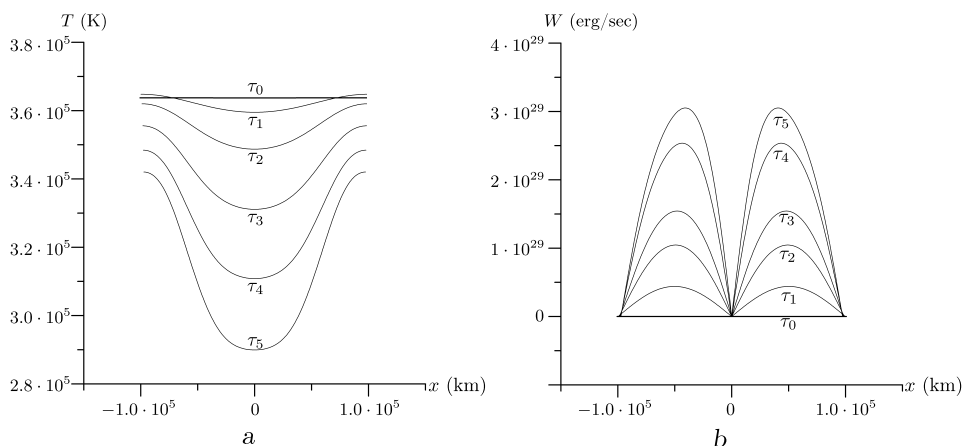


Рис. 6. Распределения температуры (а) и тепловых потоков (b) при подъеме магнитной трубки к фотосферному уровню: $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 32$ мин, $\tau_2 = 38$ мин, $\tau_3 = 42$ мин, $\tau_4 = 43$ мин, $\tau_5 = 44$ мин

[Figure 6. Distributions of temperature (a) and heat fluxes (b) during the magnetic flux tube's ascent to the photospheric level: $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 32$ min, $\tau_2 = 38$ min, $\tau_3 = 42$ min, $\tau_4 = 43$ min, $\tau_5 = 44$ min]

взрывной режим развития неустойчивости Паркера. Максимальное значение вертикального ускорения достигает величины 8000 м/сек^2 , что почти на два порядка превышает величину ускорения свободного падения на поверхности Солнца (рис. 5). Скорость подъема достигает значений около 300 км/с , что на порядок превышает значение местной скорости звука ($M \simeq 12$). Вершина всплывающей «иглы» резко заостряется: полуширина графика вертикального ускорения снижается от значения $20\,000 \text{ км}$ на фотосферном уровне до значений порядка 10^3 км в верхних слоях хромосферы (рис. 5). Также на порядок понижается значение полуширины графика вертикальной скорости подъема по отношению к фотосферному уровню (рис. 4, b).

В результате нелинейного роста скорости верхней части арочной магнитной структуры при развитии нелинейной фазы неустойчивости Паркера фотосферные и, в большей степени, хромосферные слои испытывают резкий вертикальный удар, сила которого пропорциональна ускорению всплывающей верхней части магнитной арки (рис. 5). Полуширина профиля распределения вертикального ускорения на фотосферном уровне составляет порядка 1000 км — распределение носит сингулярный характер. Горизонтальное ускорение магнитной трубки на фотосферном уровне определяется силами натяжения магнитного поля и практически отсутствует (рис. 4, a). При достижении фотосферного уровня трубка успевает разогнаться до гиперзвуковых скоростей подъема (рис. 4, b). В результате фотосфера (и особенно хромосфера) испытывают мощный вертикальный удар, сконцентрированный на малой площади и производимый заостренным телом, движущимся с гиперзвуковой скоростью. От места воздействия удара отходят сильные концентрические ударные волны, распространяющиеся вдоль солнечной поверхности. Эти волны современными наблюдательными средствами уверенно регистрируются (рис. 7) и получили название «солнцетрясений» [10].

В верхних слоях хромосферы Солнца на высотах порядка 2000 км от фотосферного уровня реализуется нелинейный рост температуры из-за эффекта

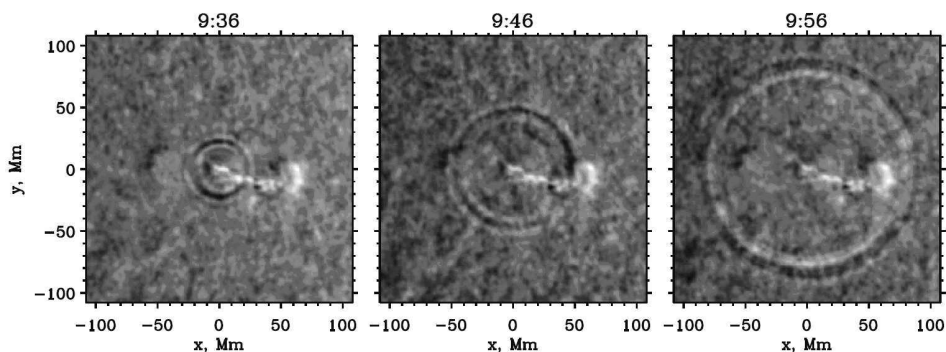


Рис. 7. Генерация концентрических ударных волн в солнечной хромосфере и на фотосферном уровне («солнцетрясение»)

[Figure 7. Generation of concentric shock waves in the solar chromosphere and photospheric level ("sunquake")]

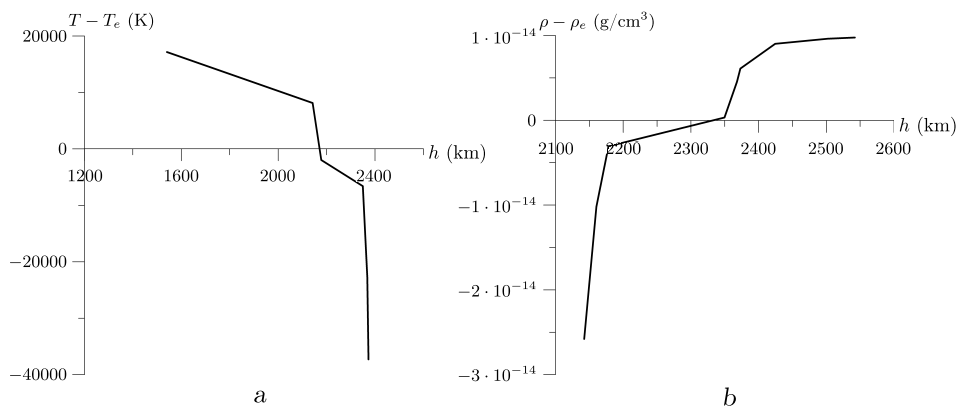


Рис. 8. Разность температур (a) и плотностей газа (b) внутри и снаружи магнитной трубки в верхних слоях хромосферы

[Figure 8. Temperature difference (a) and gas density contrast (b) inside and outside the magnetic flux tube in the upper chromospheric layers]

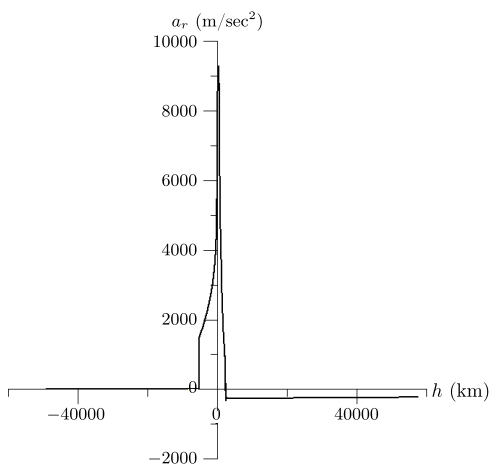


Рис. 9. Распределение вертикального ускорения верхней точки арочной магнитной структуры в зависимости от высоты подъема в солнечной атмосфере

[Figure 9. Vertical acceleration distribution of the apex of an arched magnetic structure as a function of ascent height in the solar atmosphere]

аномального прогрева солнечной атмосферы [8]. На этих высотах нелинейно резко растет температура и падает плотность газа. Как следствие, разности температур и плотностей газа внутри и снаружи магнитной трубки меняют знак (рис. 8). Выталкивающая сила Архимеда исчезает, и ускорение магнитной трубки становится отрицательным (рис. 9). Силовое воздействие всплывающего магнитного потока на солнечную атмосферу прекращается.

Заключение. Феномен выброса магнитных полей с гиперзвуковыми скоростями в солнечную хромосферу представляет принципиальную важность для анализа физических процессов, сопровождающих хромосферные вспышки [3]. Непосредственная регистрация процесса выброса магнитного поля в хромосферу затруднена ограничениями пространственно-временного разрешения наблюдательных данных. Характерный диапазон глубин формирования спектральных линий в хромосфере составляет порядка 100 км [1]. Магнитная трубка, поднимающаяся со скоростью 300 км/с (рис. 4, b), преодолевает область чувствительности спектральных линий менее чем за 0.1 сек, что существенно превышает возможности временного разрешения современной наблюдательной аппаратуры [7].

В аспекте пространственного разрешения ситуация более благоприятная. На стадии взрывного ускорения магнитной трубки формируется очень узкий профиль вертикального ускорения с полушириной порядка 1000 км (рис. 5). Этот параметр определяет требуемое пространственное разрешение для регистрации вспышечных процессов в солнечной атмосфере. Современные наблюдательные системы успешно решают эту задачу, что позволило получить фундаментальные результаты в исследовании механизмов хромосферных вспышек [7, 10].

Решение проблемы временного разрешения при регистрации подъема магнитного поля по ансамблю спектральных линий, формирующихся от фотосферы до верхней хромосферы, позволит детально исследовать динамику магнитных полей в нижних слоях солнечной атмосферы и, в перспективе, полностью объяснить механизмы формирования энергетических потоков во вспышечных событиях. Это также разрешает проблему триггерного механизма инициирования вспышек [1, 3], который является следствием неустойчивости Паркера для крупномасштабных магнитных полей в верхних слоях конвективной зоны Солнца.

Ключевой результат настоящего исследования заключается в установлении того факта, что начало генерации концентрических ударных волн, распространяющихся вдоль солнечной поверхности (рис. 7), предшествует старту вспышечных процессов в активной области. Данное явление по своей физической природе представляет собой достоверный «предвестник» вспышечной активности.

Конкурирующие интересы. Авторы не имеют конфликта интересов по материалам представленной работы.

Авторский вклад и ответственность. К.В. Романов — концепция исследования; математическая и физическая постановка задачи; разработка численного алгоритма (метод циклических раздельных прогонок для магнитной трубки с импульсными тепловыми потоками); интерпретация результатов; подготовка первоначального варианта статьи. Д.В. Романов — соавторство в постановке задачи; разработка числен-

ного алгоритма; тестирование программного комплекса (тепловая и динамическая группы уравнений); анализ литературы; финальная редакция статьи. В.А. Романов — участие в физической постановке; аналитические тесты для тепловой и динамической групп (различные граничные условия и режимы вращения); анализ астрофизических данных; финальная редакция. Е.А. Степанов — реализация численного алгоритма; тестирование программного комплекса (проверка порядка аппроксимации); проведение всех расчетов; представленных в статье; финальная редакция. А.А. Лебедев — разработка программного комплекса; тестовые расчеты; сравнительный анализ численных методов; проведение всех расчетов; финальная редакция. В.А. Маскаев — разработка программного комплекса; тестовые расчеты; анализ численных подходов в литературе; проведение всех расчетов; финальная редакция. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена на базе бюджетного финансирования.

Благодарность. Авторы благодарят Л.В. Ермакову (Институт солнечно-земной физики СО РАН) за предоставленные наблюдательные данные по зарождению активных областей, А.Г. Косовичева (Крымская астрофизическая обсерватория РАН) за предоставленные данные по внутреннему строению Солнца из проекта GONG.

Библиографический список

1. Svestka Z. *Solar Flares*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publ. Comp., 1976. 384 pp.
2. Smith H. J., Smith E. P. *Solar Flares*. N.Y.: Macmillan Co., 1963. 334 pp.
3. Сомов Б. В. Проблемы физики солнечных вспышек / *Проблемы физики солнечных вспышек*. М.: ИЗМИРАН, 1983. С. 5–51.
4. Пудовкин М. И., Чертков А. Д. Эффективность солнечных вспышек // *Докл. АН СССР*, 1971. Т. 201, № 1. С. 75–77.
5. Чертков А. Д. Геомагнитная активность на спаде солнечных циклов / *Суббури и возмущения в магнитосфере*. Л.: Наука, 1975. С. 283–299.
6. *Solar Activity Observations and Predictions* / ed. P. S. McIntosh, M. Dryer. Cambridge: MIT Press, 1972. xv+444 pp.
7. Северный П. Б. *Некоторые проблемы физики Солнца*. М.: Наука, 1988. 220 с.
8. Priest E. R. *Solar Magnetohydrodynamics* / *Geophysics and Astrophysics Monographs*. vol. 21. Dordrecht: Springer, 1982. xix+469 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-7958-1>.
9. Parker E. N. *Cosmical Magnetic Fields. Their Origin and their Activity* / *The International Series of Monographs on Physics*. Oxford: Clarendon Press, 1979. xvii+841 pp.
10. Kosovichev A. G., Zharkova V. V. Observation of seismic effects of solar flares from the SOHO Michelson Doppler Imager / *Symposium – International Astronomical Union*. vol. 185 (Kyoto, Japan, 18–22 August, 1997), *New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, 1998. pp. 191–194. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0074180900238606>.
11. Christensen-Dalsgaard J., Däppen W., Ajukov S. V., et al. The current state of Solar modeling // *Science*, 1996. vol. 272, no. 5266. pp. 1286–1292. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1286>.
12. Степанов Е. А., Майоров А. О., Романов К. В. [и др.] Математическое моделирование развития неустойчивости Паркера крупномасштабных колебаний магнитных полей в конвективной зоне Солнца // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*, 2021. Т. 21, № 2. С. 106–115. EDN: DZYYVB. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-106-115>.
13. Grigor'ev V. M., Ermakova L. V., Khlystova A. I. Emergence of magnetic flux at the solar surface and the origin of active regions // *Astron. Rep.*, 2009. vol. 53, no. 9. pp. 869–878. EDN: MWTYGB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772909090108>.

MSC: 85A30, 85A20

Mathematical modeling of pre-flare signal formation in the solar atmosphere

*D. V. Romanov¹, K. V. Romanov¹, V. A. Romanov²,
E. A. Stepanov², A. A. Lebedev², V. A. Maskaev²*

¹ Krasnoyarsk State Pedagogical University,
89, Ada Lebedeva st., Krasnoyarsk, 660049, Russian Federation.

² Saratov State University,
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

This study is devoted to the development of Parker instability in the short-wavelength range of large-scale magnetic field oscillations (wavenumber $m > 20$) within the upper layers of the solar convective zone. The strongly nonlinear ascent of the magnetic arc's apex forms a needle-like structure that penetrates the solar atmosphere at hypersonic velocities. During the magnetic field's rise, photospheric and chromospheric layers experience an abrupt vertical impact, generating a train of circular diverging shock waves propagating along the solar surface. This phenomenon, reliably detected by modern observational instruments, is called as a “sunquake”. The onset of diverging shock wave generation serves as a precursor to flare activity within the active region. The paper provides numerical estimates for the spatial and temporal resolution requirements of observational instrumentation needed to study hypersonic magnetic flux emergence in the solar chromosphere.

Keywords: photosphere, sunspots, solar convective zone, magnetic flux tube, Parker instability.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Romanov D. V., Romanov K. V., Romanov V. A., Stepanov E. A., Lebedev A. A., Maskaev V. A. Mathematical modeling of pre-flare signal formation in the solar atmosphere, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 334–346. EDN: NAFTRO. DOI: 10.14498/vsgtu2140 (In Russian).

Authors' Details:

Dmitry V. Romanov  <https://orcid.org/0000-0002-4982-5973>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Computer Science and Information Technology in Education; e-mail: d-v-romanov@ya.ru

Konstantin V. Romanov  <https://orcid.org/0000-0001-7320-2517>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics; e-mail: k-v-romanov@ya.ru

Valery A. Romanov  <https://orcid.org/0000-0001-9876-0822>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science; e-mail: valeriy.a.romanov@yandex.ru

Received: 26th December, 2024 / Revised: 31st March, 2025 /

Accepted: 28th April, 2025 / First online: 9th June, 2025

Competing Interests. The authors declare no competing interests regarding the materials presented in this work.

Author contributions and responsibilities. K.V. Romanov: Research conception; Mathematical and physical formulation of the problem; Development of numerical algorithm (cyclic sweep method for magnetic flux tube with impulsive heat flows); Results interpretation; Initial draft preparation. D.V. Romanov: Co-authorship in problem formulation; Numerical algorithm development; Software testing (thermal and dynamic equation groups); Literature review; Final manuscript editing. V.A. Romanov: Participation in physical formulation; Analytical tests for thermal and dynamic groups (various boundary conditions and rotation regimes); Astrophysical data analysis; Final editing. E.A. Stepanov: Numerical algorithm implementation; Software testing (verification of approximation order); Execution of all presented calculations; Final editing. A.A. Lebedev: Software development; Test calculations; Comparative analysis of numerical methods; Execution of all calculations; Final editing. V.A. Maskaev: Software development; Test calculations; Analysis of numerical approaches in literature; Execution of all calculations; Final editing. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was performed within the framework of state budget funding.

Acknowledgments. The authors thank L.V. Ermakova (Institute of SolarTerrestrial Physics, Siberian Branch of the RAS) for providing observational data on active region formation, and A.G. Kosovichev (Crimean Astrophysical Observatory, RAS) for solar interior structure data from the GONG project.

References

1. Svestka Z. *Solar Flares*. Dordrecht, Holland, D. Reidel Publ. Comp., 1976, 384 pp.
2. Smith H. J., Smith E. P. *Solar Flares*. N.Y., Macmillan Co., 1963, 334 pp.
3. Somov B. V. Problems of solar flare physics, In: *Problemy fiziki solnechnykh vspyshek* [Problems of Solar Flare Physics]. Moscow, IZMIRAN, 1983, pp. 5–51 (In Russian).
4. Pudovkin M. I., Chertkov A. D. Efficiency of solar flares, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1971, vol. 201, no. 1, pp. 75–77 (In Russian).
5. Chertkov A. D. Geomagnetic activity during solar cycle decline, In: *Subburi i voz-mushcheniya v magnitosfere* [Substorms and Magnetospheric Disturbances]. Leningrad, Nauka, 1975, pp. 283–299 (In Russian).
6. *Solar Activity Observations and Predictions*, ed. P. S. McIntosh, M. Dryer. Cambridge, MIT Press, 1972, xv+444 pp.

Evgeny A. Stepanov  <https://orcid.org/0000-0002-2050-2724>

Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science;
e-mail: ev_stepanov@yandex.ru

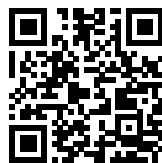
Anton A. Lebedev  <https://orcid.org/0000-0002-8241-1916>

Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science;
e-mail: maiorovaleks94@gmail.com

Vladimir A. Maskaev  <https://orcid.org/0009-0000-3754-6902>

Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Cybernetics and Computer Science;
e-mail: maskaev-01@mail.ru

7. Severny P. B. *Nekotoryye problemy fiziki Solntsa* [Some Problems of Solar Physics]. Moscow, Nauka, 1988, 220 pp. (In Russian)
8. Priest E. R. *Solar Magnetohydrodynamics*, Geophysics and Astrophysics Monographs, vol. 21. Dordrecht, Springer, 1982, xix+469 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-009-7958-1>.
9. Parker E. N. *Cosmical Magnetic Fields. Their Origin and their Activity*, The International Series of Monographs on Physics. Oxford, Clarendon Press, 1979, xvii+841 pp.
10. Kosovichev A. G., Zharkova V. V. Observation of seismic effects of solar flares from the SOHO Michelson Doppler Imager, In: *Symposium – International Astronomical Union*, vol. 185 (Kyoto, Japan, 18–22 August, 1997), New Eyes to See Inside the Sun and Stars, 1998, pp. 191–194. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0074180900238606>.
11. Christensen-Dalsgaard J., Däppen W., Ajukov S. V., et al. The current state of Solar modeling, *Science*, 1996, vol. 272, no. 5266, pp. 1286–1292. DOI: <https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1286>.
12. Stepanov E. A., Mayorov A. O., Romanov K. V., et al. Mathematical modeling of the Parker's instability development of large-scale vibrations of magnetic fields in the sun convective zone, *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 106–115 (In Russian). EDN: DZYYVB. DOI: <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2021-21-2-106-115>.
13. Grigor'ev V. M., Ermakova L. V., Khlystova A. I. Emergence of magnetic flux at the solar surface and the origin of active regions, *Astron. Rep.*, 2009, vol. 53, no. 9, pp. 869–878. EDN: MWTYGB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772909090108>.



УДК 517.958:531.742

Аналитическая формула и численный расчет второй гармоники динамической восприимчивости концентрированной феррожидкости

М. С. Русанов

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

Аннотация

Методами аналитического и численного анализа исследуется вторая компонента динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих магнитных частиц. Рассматривается конфигурация наложенных друг на друга магнитных полей: переменного и параллельного ему постоянного. Диполь-дипольные взаимодействия учитываются в рамках двухчастичных корреляций с использованием подхода модифицированной теории среднего поля первого порядка.

Из аналитического решения уравнения Фоккера–Планка получено выражение для второй гармоники как функции двух параметров: восприимчивости Ланжевена χ_L , характеризующей диполь-дипольные взаимодействия, и параметра Ланжевена ξ_0 , представляющего собой отношение магнитной энергии к тепловой.

Полученное выражение для второй гармоники согласуется с ранее известными результатами, в которых межчастичными взаимодействиями пренебрегали. Проведенное исследование имеет значительный теоретический интерес и может быть использовано для более точной характеристики свойств магнитных частиц.

Ключевые слова: феррожидкость, уравнение Фоккера–Планка, плотность вероятности, динамическая восприимчивость, межчастичные взаимодействия, постоянное поле, численное решение, аналитическое решение.

Получение: 22 октября 2024 г. / Исправление: 12 февраля 2025 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 10 мая 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ © 2025 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Русанов М. С. Аналитическая формула и численный расчет второй гармоники динамической восприимчивости концентрированной феррожидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 2. С. 347–362. EDN: NBRPKD. DOI: 10.14498/vsgtu2124.

Сведения об авторе

Михаил Сергеевич Русанов <https://orcid.org/0000-0001-7439-8179>
инженер-исследователь; лаб. математического моделирования физико-химических процессов в многофазных средах; департамент математики, механики и компьютерных наук; институт естественных наук и математики; e-mail: mikhail.rusanov@urfu.ru

Введение. Суспензия магнитных наночастиц, диспергированных в немагнитной жидкости-носителе, называется магнитной жидкостью, или феррожидкостью [1]. Уникальное свойство такого коллоидного раствора заключается в сочетании текучести, характерной для жидкостей, со способностью к намагничиванию. Средний размер наночастиц составляет около 10 нм. Такую систему можно рассматривать как ансамбль одинаковых сферических диполей с диаметром магнитного ядра d и магнитным моментом $m = vM_s$, где M_s — намагниченность насыщения, а $v = \pi d^3/6$ — объем магнитного ядра. Под действием внешнего магнитного поля магнитные моменты, противодействуя тепловому движению, преимущественно ориентируются по направлению поля, что приводит к возникновению намагниченности системы.

Существует два основных механизма ориентации магнитных моментов: броуновский и неелевский. Броуновский механизм характеризуется поворотом магнитного момента вместе с частицей, тогда как при неелевском механизме ориентация магнитного момента изменяется внутри неподвижной частицы за счет тепловых флуктуаций. В феррожидкостях, где частицы свободно перемещаются в объеме жидкости, преобладает броуновский механизм ориентации.

В переменном магнитном поле с амплитудой h и частотой ω намагниченность можно представить в виде ряда по гармоникам:

$$\frac{M(t)}{\rho m} = \sum_{p=1}^{\infty} \chi_p(h, \omega) e^{ip\omega t}, \quad (1)$$

где ρ — концентрация частиц. Коэффициенты ряда (1), зависящие от амплитуды и частоты переменного поля, определяют p -ю гармонику динамической восприимчивости.

Динамическая восприимчивость представляет собой ключевой параметр, характеризующий отклик ансамбля магнитных частиц на внешнее магнитное поле. Исследование магнитного отклика имеет важное значение для многочисленных прикладных областей. В частности, мнимая часть динамической восприимчивости позволяет оценить интенсивность диссипации энергии, что рассматривается в медицинских приложениях как потенциальный метод терапии онкологических заболеваний [2–4]. Для клинического применения этого метода требуется повышение его эффективности и безопасности. Установлено, что наличие постоянного поля способствует более эффективной генерации тепла [5]. Однако в этом случае в спектре динамической восприимчивости возникают новые эффекты, обусловленные комбинацией переменного и постоянного полей [6].

Дополнительную сложность представляет учет диполь-дипольных взаимодействий между частицами, характерных для концентрированных образцов. В работе [7] методом компьютерного моделирования исследовалась динамическая восприимчивость феррожидкости. Экспериментальные измерения динамической восприимчивости представлены в исследовании [8]. Результаты этих работ демонстрируют, что сильные межчастичные взаимодействия могут приводить к образованию гибких цепочек, кольцеобразных структур и плотных кластерных агрегатов. Следовательно, модель идеальной системы без учета межчастичных взаимодействий становится недостаточной для адекватного описания реальных систем.

Динамическая восприимчивость представляет собой активную область теоретических исследований. В классической работе [9] получено выражение для первой гармоники (линейной восприимчивости), описывающее отклик ансамбля невзаимодействующих дипольных частиц на слабое переменное поле:

$$\chi_D = \frac{\chi_L}{1 + i\omega\tau_B}, \quad (2)$$

где $\tau_B = \pi d^3 \eta / (2k_B T)$ — характерное время броуновской релаксации; η — динамическая вязкость окружающей жидкости; $k_B T$ — тепловая энергия системы; $\chi_L = 8\lambda\varphi$ — статическая восприимчивость Ланжевена, пропорциональная константе дипольной связи $\lambda = \mu_0 m^2 / (4\pi d^3 k_B T)$ и объемной доле частиц $\varphi = \rho \pi d^3 / 6$; ρ — объемная концентрация магнитных частиц.

Выражение для третьей гармоники (нелинейного отклика) в случае малых амплитуд переменного поля без учета межчастичных взаимодействий приведено в работе [10]. Особого внимания заслуживают исследования [11, 12], посвященные влиянию диполь-дипольных взаимодействий на первую и третью компоненты динамического отклика. В работах [12, 13] предложены упрощенные аппроксимационные выражения для первой и третьей гармоник, учитывающие как межчастичные взаимодействия, так и произвольные амплитуды переменного поля. Описание первой и третьей гармоник для произвольных амплитуд поля (без учета межчастичных взаимодействий) представлено в исследовании [14]. Влияние постоянного подмагничивающего поля на первую компоненту динамического отклика рассмотрено в работе [15]. Выражения для второй компоненты динамического отклика получены в исследованиях [16, 17], однако в этих работах взаимодействие между частицами не учитывалось.

Настоящее исследование направлено на углубленное изучение второй компоненты динамической восприимчивости. Основное внимание уделяется анализу совместного влияния диполь-дипольных взаимодействий между частицами и напряженности постоянного магнитного поля. При этом рассматривается случай малых амплитуд переменного поля.

1. Математическая модель. Рассматривается ансамбль из N идентичных сферических магнитных диполей, диспергированных в жидкости-носителе. Вектор магнитного момента k -й частицы описывается выражением

$$\mathbf{m}_k = m_k \hat{\mathbf{m}}_k,$$

где $\hat{\mathbf{m}}_k = (\sin \theta_k \cos \varphi_k, \sin \theta_k \sin \varphi_k, \cos \theta_k)$ — единичный вектор ориентации, а m_k — модуль магнитного момента. Радиус-вектор частицы задается как

$$\mathbf{r}_k = r_k \hat{\mathbf{r}}_k,$$

где $\hat{\mathbf{r}}_k = (\sin \zeta_k \cos \psi_k, \sin \zeta_k \sin \psi_k, \cos \zeta_k)$ — единичный вектор направления, а r_k — длина радиус-вектора. Здесь θ_k , φ_k , ζ_k , ψ_k — углы в сферической системе координат.

Частицы находятся в бесконечно протяженном цилиндре, ориентированном вдоль оси Oz . Такая геометрия позволяет пренебречь краевыми эффектами и считать, что внешнее магнитное поле совпадает с полем внутри образца. Магнитное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = (h_0 + h e^{i\omega t}) \hat{\mathbf{H}},$$

где h — амплитуда переменного магнитного поля, ω — его частота, h_0 — напряженность постоянного поля, а $\hat{\mathbf{H}} = (0, 0, 1)$ — единичный вектор направления. Введем обозначение $x_k = \cos \theta_k$, где θ_k — угол между векторами $\hat{\mathbf{m}}_k$ и $\hat{\mathbf{H}}$.

Энергия зеемановского взаимодействия k -го магнитного момента с внешним полем определяется выражением

$$U_H = -\mu_0(\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{H}) = -\mu_0 m(h_0 + h e^{i\omega t}) x_k. \quad (3)$$

Потенциал диполь-дипольного взаимодействия между k -й и j -й частицами имеет вид

$$U_d = -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi r_{k,j}^3} [3(\hat{\mathbf{m}}_k \cdot \hat{\mathbf{r}}_{k,j})(\hat{\mathbf{m}}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_{k,j}) - (\hat{\mathbf{m}}_k \cdot \hat{\mathbf{m}}_j)], \quad (4)$$

где $r_{k,j}$ — расстояние между центрами частиц.

Поскольку система обладает осевой симметрией, ориентация k -го магнитного момента зависит только от угла θ_k . Эволюцию ориентации магнитного момента описывает уравнение Фоккера—Планка:

$$2\tau_B \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(1 - x_k^2) \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} + W \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) представляет собой функцию плотности вероятности ориентации магнитного момента $W = W(t, x_k)$, определяющую наиболее вероятное направление магнитного момента относительно внешнего поля в момент времени t . Данное решение удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-1}^1 W(t, x_k) dx_k = 1. \quad (6)$$

Для идеальной системы невзаимодействующих частиц нормированная на тепловую энергию потенциальная энергия $U = U(t, x_k)$ сводится к зеемановской энергии (3):

$$U = U^{id} = U_H / k_B T = -(\xi_0 + \xi e^{i\omega t}) x_k, \quad (7)$$

где $\xi_0 = \mu_0 m h_0 / (k_B T)$ и $\xi = \mu_0 m h / (k_B T)$ — параметры Ланжевена для постоянного и переменного полей соответственно.

Для учета межчастичных взаимодействий применяется метод среднего магнитного поля первого порядка (МСП-1), предложенный в работе [18]. Метод основан на предположении, что на k -ю частицу помимо внешнего магнитного поля действует дополнительное поле, создаваемое j -й частицей во всем объеме системы. В рамках данного подхода диполь-дипольные взаимодействия учитываются с точностью до вклада парных корреляций. Таким образом, потенциальная энергия системы взаимодействующих частиц включает два вклада: энергию взаимодействия магнитных моментов с внешними полями и энергию диполь-дипольных взаимодействий:

$$U = U^{int} = \left(U_H + \rho \iint U_d(k, j) \Theta(k, j) W^{id} d\hat{\mathbf{m}}_j d\hat{\mathbf{r}}_j \right) / (k_B T), \quad (8)$$

где W^{id} — решение уравнения (5) с потенциальной энергией (7). Интегралы по $d\hat{\mathbf{m}}_j$ и $d\hat{\mathbf{r}}_j$ представляют собой усреднение по всем возможным ориентациям магнитного момента и положениям j -й частицы соответственно:

$$\begin{aligned} \int d\hat{\mathbf{r}}_j &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\psi_j \int_0^\pi \sin \zeta_j d\zeta_j \int_0^{R/\sin \zeta_j} r_j^2 dr_j, \\ \int d\hat{\mathbf{m}}_j &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dx_j \int_0^{2\pi} d\varphi_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Функция Хевисайда $\Theta(k, j) = \Theta(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|)$ исключает возможность перекрытия j -й и k -й частиц.

Подстановка выражений (4) и (9) в (8) с последующим интегрированием дает

$$U^{int} = - \left[\xi_0 + \xi e^{i\omega t} + \chi_L \int_{-1}^1 W^{id} x_j dx_j \right] x_k. \quad (10)$$

Намагниченность системы определяется как усредненная по всем возможным ориентациям проекция магнитного момента k -й частицы на направление магнитного поля с весовой функцией W :

$$M(t) = \rho m \int (\hat{\mathbf{m}}_k \cdot \hat{\mathbf{H}}) W d\hat{\mathbf{m}}_k = \rho m \int_{-1}^1 W x_k dx_k. \quad (11)$$

Действительная и мнимая части второй гармоники находятся через коэффициенты ряда Фурье:

$$\mathcal{R}[\chi_2] = \frac{\omega}{\pi \xi^2} \int_0^{2\pi/\omega} M(t) \cos(2\omega t) dt, \quad \mathcal{I}[\chi_2] = \frac{\omega}{\pi \xi^2} \int_0^{2\pi/\omega} M(t) \sin(2\omega t) dt, \quad (12)$$

где $\mathcal{R}[x]$ и $\mathcal{I}[x]$ обозначают действительную и мнимую части величины $[x]$ соответственно.

2. Аналитическая формула второй гармоники в случае малых амплитуд переменного поля. Для аналитического решения уравнения (5) применяется метод разделения переменных. Функция плотности вероятности $W(t, x_k)$ представляется в виде бесконечного ряда по системе ортогональных функций (далее индекс k опущен для упрощения записи):

$$W(t, x) = W_0(\xi_0, x) + \sum_{l=1}^{\infty} T_l(t) P_l(x), \quad (13)$$

$$W_0(\xi_0, x) = \frac{\xi_0}{2 \operatorname{sh} \xi_0} e^{\xi_0 x}. \quad (14)$$

В качестве базиса разложения использованы полиномы Лежандра $P_l(x)$. Выражение (14) описывает равновесное распределение ориентаций магнитных моментов. Подстановка (13) в уравнение (5) с учетом свойств полиномов Лежандра приводит к бесконечной системе рекуррентных уравнений для коэффициентов T_l :

$$2\tau_B T_l' = -T_{l+1} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{l(l+1)}{2l+3} + T_{l-1} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{l(l+1)}{2l-1} - l(l+1) T_l - \xi e^{i\omega t} f_l(\xi_0), \quad (15)$$

где функция $f_l(\xi_0)$ определяется выражением

$$f_l(\xi_0) = \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{\partial}{\partial x} [(1-x^2)W_0(\xi_0, x)] dx. \quad (16)$$

Решение для функций $T_l(t)$ ищется в виде разложения по гармоникам:

$$T_l(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \chi_{l,p} e^{ip\omega t}, \quad (17)$$

где коэффициенты разложения $\chi_{l,p}$ зависят от параметров ξ_0 , ξ и ω .

Подстановка разложения (17) и выражения для потенциальной энергии (7) в систему (15) приводит к бесконечной системе уравнений относительно коэффициентов $\chi_{l,p}$ для случая невзаимодействующих частиц:

$$\begin{aligned} (2ik\omega\tau_B + l(l+1))\chi_{l,p} = & -\xi \frac{l(l+1)}{2l+3} \chi_{l+1,p-1} + \xi \frac{l(l+1)}{2l-1} \chi_{l-1,p-1} - \\ & - \xi_0 \frac{l(l+1)}{2l+3} \chi_{l+1,p} + \xi_0 \frac{l(l+1)}{2l-1} \chi_{l-1,p} - \delta_{1,p} \xi f_l(\xi_0), \end{aligned} \quad (18)$$

где $\delta_{1,p}$ — символ Кронекера.

Выражение для намагниченности (11) после подстановки разложения (13) с учетом свойства ортогональности полиномов Лежандра принимает вид

$$M(t) = \rho m \int_{-1}^1 x W dx = \rho m \left(L(\xi_0) + \frac{2}{3} \sum_{p=1}^{\infty} \chi_{1,p} e^{ip\omega t} \right), \quad (19)$$

где $L(x) = \text{cth } x - 1/x$ — функция Ланжевена.

Действительная и мнимая части второй гармоники, вычисляемые согласно (12), после подстановки (19) выражаются через коэффициент $\chi_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\chi_2] &= \frac{\omega}{\pi \xi^2} \int_0^{2\pi/\omega} M(t) \cos(2\omega t) dt = \frac{k \chi_L^2}{\xi^2} \mathcal{R}[\chi_{1,2}], \\ \mathcal{I}[\chi_2] &= \frac{\omega}{\pi \xi^2} \int_0^{2\pi/\omega} M(t) \sin(2\omega t) dt = \frac{k \chi_L^2}{\xi^2} \mathcal{I}[\chi_{1,2}], \end{aligned}$$

где $k = 12m/\rho$. Таким образом, вторая гармоника динамической восприимчивости полностью определяется коэффициентом $\chi_{1,2}$.

Система уравнений (18) содержит бесконечное число неизвестных. Для получения аналитического решения необходимо ограничить систему конечным числом уравнений. Учитывая условие малости амплитуды переменного поля ($\xi \ll 1$), можно показать, что вклад гармоники с номером p пропорционален ξ^p .

Анализ показывает, что для определения гармоник выше первой необходимо рассматривать как минимум два уравнения системы. Введем приближение, полагая $\chi_{l,p} = 0$ при $l > 2$ и $p > 2$. Для случая невзаимодействующих

диполей решение системы (18) дает следующие выражения для коэффициентов:

$$\chi_{1,1}^{id} = \frac{\xi \frac{1}{5}\xi_0 f_2(\xi_0) - f_1(\xi_0)(3 + i\omega\tau_B)}{2(1 + i\omega\tau_B)(3 + i\omega\tau_B) + \frac{1}{5}\xi_0^2}, \quad (20)$$

$$\chi_{1,2}^{id} = -\frac{\xi^2}{10} \frac{f_2(\xi_0) \left(\frac{1}{5}\xi_0^2 - (1 + i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) \right) - 3f_1(\xi_0)\xi_0(2 + i\omega\tau_B)}{\left[(1 + 2i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) + \frac{1}{5}\xi_0^2 \right] \left[(1 + i\omega\tau_B)(3 + i\omega\tau_B) + \frac{1}{5}\xi_0^2 \right]}, \quad (21)$$

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, полученные из (16), имеют вид

$$f_1(x) = -\frac{3L(x)}{x}, \quad f_2(x) = -\frac{15L_3(x)}{x}, \quad L_3(x) = 1 - \frac{3L(x)}{x}.$$

В предельном случае $\xi_0 \rightarrow 0$ коэффициент (20) воспроизводит формулу Дебая (2), тогда как коэффициент (21) стремится к нулю. Таким образом, аналитическое решение уравнения (5) для невзаимодействующих диполей в случае малых амплитуд переменного поля принимает форму

$$W^{id}(t, x) = W_0 + (\chi_{1,1}^{id} e^{i\omega t} + \chi_{1,2}^{id} e^{i2\omega t}) P_1(x) + \dots \quad (22)$$

Рассмотрим вклад диполь-дипольных взаимодействий в потенциальную энергию. Подстановка решения (22) в выражение (10) с последующим интегрированием дает модифицированное выражение для потенциальной энергии, учитывающее межчастичные взаимодействия:

$$U = U^{int} = -[\tilde{\xi}_0 + Ae^{i\omega t} + Be^{i2\omega t}]x, \quad (23)$$

где введены следующие обозначения:

$$\tilde{\xi}_0 = \xi_0 + \chi_L L(\xi_0),$$

$$A = \xi \left(1 + \frac{\chi_L}{3} \frac{\frac{1}{5}\xi_0 f_2(\xi_0) - f_1(\xi_0)(3 + i\omega\tau_B)}{(1 + i\omega\tau_B)(3 + i\omega\tau_B) + \frac{1}{5}\xi_0^2} \right),$$

$$B = -\xi^2 \frac{\chi_L}{15} \frac{f_2(\xi_0) \left(\frac{1}{5}\xi_0^2 - (1 + i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) \right) - 3f_1(\xi_0)\xi_0(2 + i\omega\tau_B)}{\left[(1 + 2i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) + \frac{1}{5}\xi_0^2 \right] \left[(1 + i\omega\tau_B)(3 + i\omega\tau_B) + \frac{1}{5}\xi_0^2 \right]}.$$

Решение снова ищем в виде разложения (13), используя модифицированное начальное распределение $W_0(\tilde{\xi}_0, x)$. Подстановка потенциальной энергии (23) в систему (15) приводит к новой системе рекуррентных соотношений для коэффициентов $\chi_{l,p}$, учитывающей межчастичные взаимодействия:

$$\begin{aligned} (2ik\omega\tau_B + l(l+1))\chi_{l,p} = & -A \frac{l(l+1)}{2l+3} \chi_{l+1,p-1} + A \frac{l(l+1)}{2l-1} \chi_{l-1,p-1} - \\ & - \tilde{\xi}_0 \frac{l(l+1)}{2l+3} \chi_{l+1,p} + \tilde{\xi}_0 \frac{l(l+1)}{2l-1} \chi_{l-1,p} - \\ & - B \frac{l(l+1)}{2l+3} \chi_{l+1,p-2} + B \frac{l(l+1)}{2l-1} \chi_{l-1,p-2} - \delta_{1,p} A f_l(\tilde{\xi}_0) - \delta_{2,p} B f_l(\tilde{\xi}_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы (24) находится аналогичным методом. Вторая гармоника динамической восприимчивости с учетом диполь-дипольных взаимодействий принимает вид

$$\chi_{1,2} = -\frac{A^2}{10} \frac{f_2(\tilde{\xi}_0) \left(\frac{1}{5} \tilde{\xi}_0^2 - (1 + i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) \right) - 3\tilde{\xi}_0 f_1(\tilde{\xi}_0)(2 + i\omega\tau_B)}{\left[(1 + 2i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) + \frac{1}{5} \tilde{\xi}_0^2 \right] \left[(1 + i\omega\tau_B)(3 + i\omega\tau_B) + \frac{1}{5} \tilde{\xi}_0^2 \right]} + \frac{B}{2} \frac{\frac{1}{5} \tilde{\xi}_0 f_2(\tilde{\xi}_0) - f_1(\tilde{\xi}_0)(3 + 2i\omega\tau_B)}{(1 + 2i\omega\tau_B)(3 + 2i\omega\tau_B) + \frac{1}{5} \tilde{\xi}_0^2}. \quad (25)$$

3. Численное решение уравнения Фоккера—Планка. Аналитическое представление функции W с использованием конечного числа уравнений в системе (17) ограничивает область параметров, где выражение (25) адекватно описывает вторую гармонику. Для определения границ применимости формулы (25) было выполнено численное решение уравнения Фоккера—Планка с последующим расчетом второй гармоники.

Численное решение уравнения (5) проводилось с использованием конечно-разностной схемы, предложенной в работе [19]. Изначально разработанная для уравнений конвекции-диффузии, данная схема успешно адаптируется для уравнения Фоккера—Планка, где первый член интерпретируется как диффузионный, а второй — как конвекционный. Сходимость и устойчивость схемы доказаны в [19], а ее применение продемонстрировано в работах [20, 21] для систем с неелевской релаксацией.

Численное решение получено для диапазона частот $10^{-2} \leq \omega\tau_B \leq 10^2$ с логарифмическим шагом 0.1 по десятичным порядкам. Пространственно-временная сетка задавалась следующим образом:

$$t_n = t_{n-1} + h_t, \quad t_0 = 0, \quad h_t = \frac{2\pi}{\omega} 10^{-4};$$

$$x_m = x_{m-1} + h_x, \quad x_0 = -1 + \frac{h_x}{2}, \quad h_x = 0.001,$$

где h_x и h_t — шаги по пространственной и временной координатам соответственно. Индексы n и m изменяются от 0 до $N_n = 10^4$ и $N_m = 2/h_x - 1$ соответственно. Значения функции в узлах сетки обозначены как $W_{n,m} = W(t_n, x_m)$.

Дискретный аналог уравнения (5) согласно [19] имеет вид

$$\frac{e^{-\delta h_t} W_{n,m} - W_{n-1,m}}{h_t} + (D + C + \delta)(e^{-\delta h_t} W_{n,m}) = 0, \quad (26)$$

где операторы диффузии D и конвекции C определяются следующими выражениями:

$$DW_{n,m} = -f\left(x_m + \frac{h_x}{2}\right) \frac{W_{n,m+1} - W_{n,m}}{h_x^2} + f\left(x_m - \frac{h_x}{2}\right) \frac{W_{n,m} - W_{n,m-1}}{h_x},$$

$$CW_{n,m} = v\left(t^*, x_m + \frac{h_x}{2}\right) \frac{W_{n,m+1} + W_{n,m}}{2h_x} - v\left(t^*, x_m - \frac{h_x}{2}\right) \frac{W_{n,m} + W_{n,m-1}}{2h_x},$$

$$f(x) = 1 - x^2, \quad t^* = \frac{t_{n+1} + t_n}{2}, \quad v(t, x) = \frac{\partial U}{\partial x}(1 - x^2).$$

Численное решение включает следующие этапы:

- 1) решение уравнения (5) с потенциальной энергией (7) для получения W^{id} — распределения без учета межчастичных взаимодействий;
- 2) вычисление интегрального вклада диполь-дипольных взаимодействий:

$$I = \chi_L \int_{-1}^1 W^{id} x dx;$$

- 3) повторное решение уравнения (5) с модифицированной потенциальной энергией (10), учитывающей взаимодействия;
- 4) численное интегрирование для определения намагниченности (11) и компонент восприимчивости (12) методом трапеций.

Параметр стабилизации δ в схеме (26) выбирается согласно [19]:

$$\delta = \frac{1}{2} \max |v'_x|.$$

В расчетах использовались следующие значения:

- $\delta = \xi + \xi_0/2$ — для невзаимодействующих частиц;
- $\delta = \xi + \xi_0/2 + I/2$ — с учетом взаимодействий частиц.

Начальное распределение задается выражением (14). Для достижения термодинамического равновесия, исключающего зависимость от начальных условий, моделирование проводится до $t_f = 10T$, где $T = 2\pi/\omega$ — период переменного поля. Установившееся решение определяется усреднением W на интервале $[9T, 10T]$ с нормировкой, обеспечивающей выполнение (6).

4. Сравнение аналитической формулы и численного решения.

На рис. 1 представлены зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей динамической восприимчивости (21) для трех значений напряженности постоянного поля: $\xi_0 = 0.1, 0.5$ и 1 . Численное решение уравнения (5), показанное точками (символами), получено при амплитуде переменного поля $\xi = 0.1$. Наблюдается хорошее согласие аналитического и численного решений при $\xi_0 \lesssim 0.5$. Расхождение при больших значениях $\xi_0 > 0.5$ обусловлено усечением системы (18) до двух уравнений.

Для верификации результатов на графиках приведены данные из работы [16] (крестики), полностью совпадающие с выражением (21), что подтверждает корректность полученных результатов.

На рис. 2 показаны зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей восприимчивости (25), учитывающей межчастичные взаимодействия, при $\xi = \xi_0 = 0.1$ для различных значений восприимчивости Ланжевена: $\chi_L = 0.5, 1$ и 3 . Численное решение уравнения (5) представлено точками. В случае $\chi_L = 0.5$, соответствующем разбавленной феррожидкости со слабыми корреляциями, результаты (25) (сплошные линии) близки к решению (21) для невзаимодействующей системы (пунктирные линии). Наблюдается хорошее соответствие аналитического и численного решений во всем исследованном диапазоне $\chi_L \lesssim 3$.

Рассмотрим поведение статической восприимчивости и сдвиг положения максимума мнимой части в зависимости от напряженности постоянного магнитного поля ξ_0 при различных значениях восприимчивости Ланжевена χ_L .

На рис. 3, а представлены следующие данные: сплошными линиями показана зависимость действительной части аналитического решения (25) в статическом пределе ($\omega\tau_B \rightarrow 0$) для значений $\chi_L = 1$ и 2 ; точками обозначены

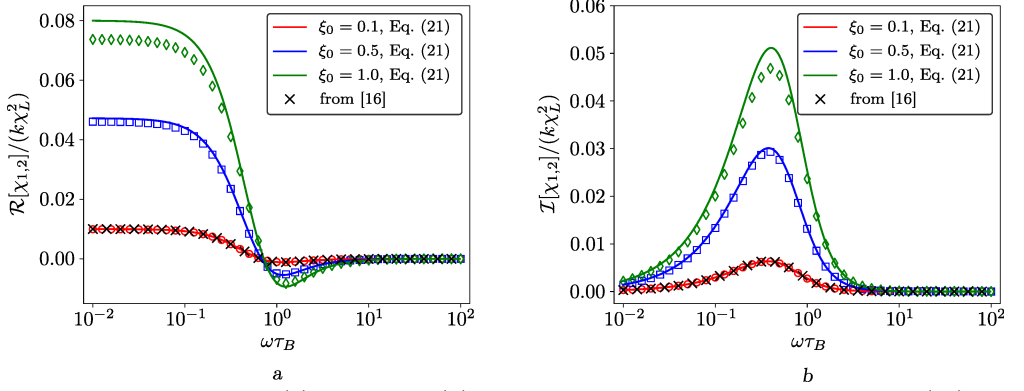


Рис. 1. Действительная (а) и мнимая (b) части динамической восприимчивости (21) для значений напряженности постоянного поля $\xi_0 = 0.1, 0.5$ и 1 и амплитуде переменного поля $\xi = 0.1$: линии — аналитическое решение по (21); символы — численные данные; крестики — результаты [16]

[Figure 1. Real (a) and imaginary (b) parts of the dynamic susceptibility (21) for DC field strengths $\xi_0 = 0.1, 0.5$, and 1 and AC field amplitude $\xi = 0.1$: lines — analytical solution by (21); symbols — numerical data; crosses — results from [16]]

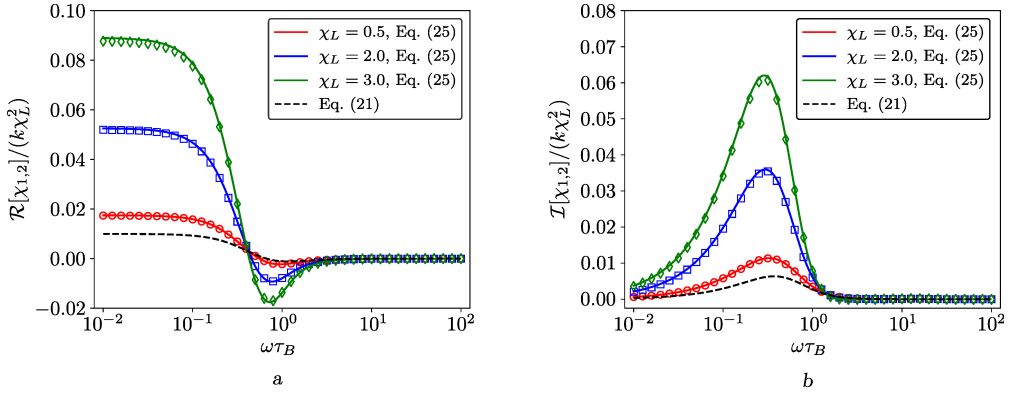


Рис. 2. Действительная (а) и мнимая (b) части восприимчивости (25) для $\chi_L = 0.5, 2$ и 3 : сплошные линии — аналитическое решение по (25); символы — численные данные; пунктирные линии — аналитическое решение по (21). Значения амплитуды переменного поля и напряженности постоянного поля равны: $\xi = \xi_0 = 0.1$

[Figure 2. Real (a) and imaginary (b) parts of the susceptibility (25) for $\chi_L = 0.5, 2$ and 3 : solid lines — analytical solution by (25); symbols — numerical data; dashed lines — analytical solution by (21). The AC field amplitude and DC field strength are equal: $\xi = \xi_0 = 0.1$]

результаты численного решения уравнения (5) при малой частоте $\omega\tau_B = 0.01$ для тех же значений χ_L ; для сравнения пунктирной линией приведена зависимость, полученная по формуле (21), не учитывающая межчастичные взаимодействия, и сопутствующие численные данные.

Анализ полученных зависимостей позволяет выявить существование выраженного локального максимума вблизи значения $\xi_0 \approx 1$. В области относительно слабых полей ($\xi_0 \lesssim 1$) учет диполь-дипольных взаимодействий приводит к существенному возрастанию статической восприимчивости второй гармоники, причем наиболее значительный эффект наблюдается в окрестности указанного максимума. При превышении напряженности поля значения $\xi_0 > 1$ влияние межчастичных корреляций постепенно ослабевает. При

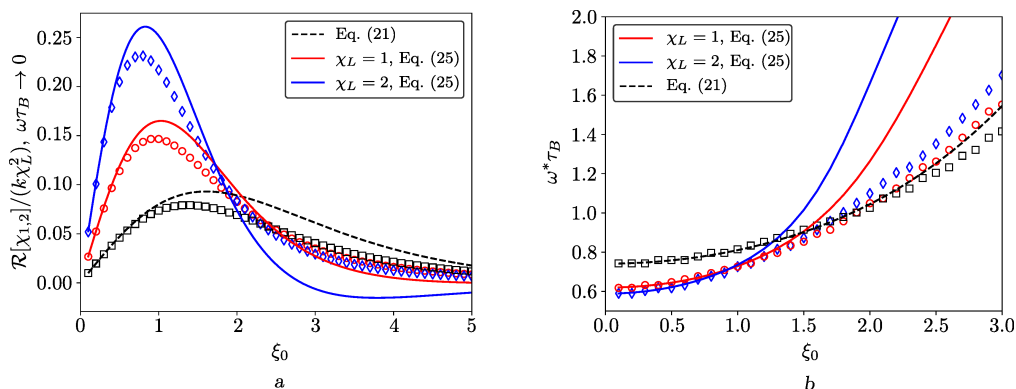


Рис. 3. Зависимость статической восприимчивости (a) и положения максимума мнимой части (b) от величины напряженности постоянного поля ξ_0 . Восприимчивость Ланжевена принимает значения $\chi_L = 1$ и 2. Сплошные линии обозначают максимум, найденный по формуле (25), которая учитывает межчастичные взаимодействия. Пунктирные линии — максимум, определенный по формуле (21) для системы без учета взаимодействий. Символы — результат численного решения уравнения (5)

[Figure 3. Dependence of static susceptibility (a) and position of the imaginary part maximum (b) on DC field strength ξ_0 . The Langevin susceptibility takes values $\chi_L = 1$ and 2. Solid lines show maxima calculated by (25) accounting for interparticle interactions. Dashed lines — maxima from (21) for non-interacting systems. Symbols — numerical solution of equation (5)]

дальнейшем увеличении ξ_0 основную роль начинает играть взаимодействие магнитных моментов с внешним постоянным полем, что приводит к практическому совпадению статических восприимчивостей взаимодействующей и невзаимодействующей систем.

На рис. 3, b представлена зависимость характерной частоты $\omega^*\tau_B$, соответствующей максимуму мнимой части динамической восприимчивости, от безразмерной напряженности постоянного поля ξ_0 для систем с восприимчивостью Ланжевена $\chi_L = 1$ и 2. Сплошные линии отражают аналитическую зависимость, полученную по формуле (25), учитывающей межчастичные взаимодействия, тогда как точки соответствуют результатам численного моделирования на основе уравнения (5). Для сравнения приведены аналогичные зависимости, рассчитанные по формуле (21) без учета диполь-дипольных взаимодействий (пунктирные линии), и соответствующие им численные данные (точки).

Анализ представленных зависимостей демонстрирует следующие особенности поведения системы. В области слабых полей ($\xi_0 \lesssim 1.5$) увеличение восприимчивости Ланжевена вызывает сдвиг положения максимума в область более низких частот, что обусловлено усилением роли межчастичных взаимодействий. В точке $\xi_0 \approx 1.5$ наблюдается баланс между взаимодействием магнитных моментов с внешним полем и диполь-дипольными взаимодействиями. При дальнейшем росте напряженности поля ($\xi_0 > 1.5$) преобладающее влияние внешнего поля приводит к смещению максимума мнимой части в область высоких частот.

5. Заключение. В данной работе получена аналитическая формула для второй гармоники динамической восприимчивости ансамбля взаимодействующих магнитных частиц в слабом переменном поле. Сравнение теоретических результатов с численным решением уравнения Фоккера—Планка пока-

зало, что при значениях параметра Ланжевена $\xi_0 \lesssim 0.5$, характеризующего отношение магнитной энергии к тепловой, между ними наблюдается хорошее соответствие. При $\xi_0 > 0.5$ наблюдается снижение точности аналитического описания.

В отличие от предыдущих исследований, рассматривавших невзаимодействующие частицы, в настоящей работе в рамках МСП-1 учтен вклад диполь-дипольных взаимодействий. Полученная обобщенная формула для второй гармоники согласуется с известными результатами для случая пренебрежимо слабых межчастичных взаимодействий.

Анализ выявил существенное влияние межчастичных взаимодействий на динамический отклик системы. В зависимости от напряженности постоянного поля ξ_0 диполь-дипольные взаимодействия могут как усиливать, так и ослаблять отклик. Направление сдвига частоты $\omega^* \tau_B$, соответствующей максимуму мнимой части восприимчивости, также определяется величиной приложенного постоянного поля.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов нет.

Авторский вклад и ответственность. Работа полностью выполнена автором. Автор несет полную ответственность за предоставление законченной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи одобрена автором.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-12-00039, <https://rscf.ru/project/23-12-00039/>.

Благодарность. Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю д.ф.-м.н. Е. А. Елфимовой.

Библиографический список

1. Rosensweig R. E. *Ferrohydrodynamics*. New York: Cambridge, 1998. 344 pp.
2. Al-Areqi A. R., Xiaogang Y., Renpeng Y., et al. Synthesis of zinc ferrite particles with high saturation magnetization for magnetic induction hyperthermia // *J. Magn. Magnet. Mater.*, 2023. vol. 579, 170839. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.170839>.
3. Kritika, Indrajit R. Therapeutic applications of magnetic nanoparticles: recent advances // *Material. Advances*, 2022. vol. 3, no. 20. pp. 7425–7444. DOI: <https://doi.org/10.1039/D2MA00444E>.
4. Stueber D. D., Villanova J., Aponte I., et al. Magnetic nanoparticles in biology and medicine: Past, present, and future trends // *Pharmaceutics*, 2021. vol. 13, no. 7, 943. DOI: <https://doi.org/10.3390/pharmaceutics13070943>.
5. Lucaci C. M., Nitica S., Fizesan I., et al. Enhanced magnetic hyperthermia performance of zinc ferrite nanoparticles under a parallel and a transverse bias DC magnetic field // *Nanomaterials*, 2022. vol. 12. pp. 419–588. DOI: <https://doi.org/10.3390/nano12203578>.
6. Rusanov M. S., Kuznetsov M. A., Zverev V. S., Elfimova E. A. Influence of a bias dc field and an ac field amplitude on the dynamic susceptibility of a moderately concentrated ferrofluid // *Phys. Rev. E*, 2023. vol. 108, no. 2, 024607. EDN: LVREAX. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.024607>.
7. Ivanov A. O., Camp P. J. How particle interactions and clustering affect the dynamic magnetic susceptibility of ferrofluids // *J. Magn. Magnet. Mater.*, 2023. vol. 586, 171216. EDN: LXFRGI. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.171216>.
8. Lebedev A. V., Stepanov V. I., Kuznetsov A. A., et al. Dynamic susceptibility of a concentrated ferrofluid: The role of interparticle interactions // *Phys. Rev. E*, 2019. vol. 100, no. 3. EDN: JOCHQF. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032605>.
9. Debye P. *Polar Molecules*. New York: Chemical Catalog, 1929. 174 pp.

10. Raikher Y. L., Stepanov V. I. Nonlinear dynamic susceptibilities and field-induced birefringence in magnetic particle assemblies / *Advances in Chemical Physics*. vol. 129, 2004. pp. 419–588. EDN: OGWEAD. DOI: <https://doi.org/10.1002/047168077x.ch4>.
11. Ivanov A. O., Zverev V. S., Kantorovich S. S. Revealing the signature of dipolar interactions in dynamic spectra of polydisperse magnetic nanoparticles // *Soft Matter*, 2016. vol. 12, no. 15. pp. 3507–3513. EDN: XMDERI. DOI: <https://doi.org/10.1039/c5sm02679b>.
12. Rusanov M. S., Zverev V. S., Elfimova E. A. Third harmonic of the dynamic magnetic susceptibility of a concentrated ferrofluid: Numerical calculation and simple approximation formula // *Phys. Rev. E*, 2024. vol. 110, no. 3. pp. 034605. EDN: UYCLLS. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.034605>.
13. Rusanov M. S., Zverev V. S., Elfimova E. A. Influence of a bias dc field and an ac field amplitude on the dynamic susceptibility of a moderately concentrated ferrofluid // *Phys. Rev. E*, 2023. vol. 108, no. 2, 024607. EDN: LVREAX. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.024607>.
14. Yoshida T., Enpuku K. Simulation and quantitative clarification of AC susceptibility of magnetic fluid in nonlinear Brownian relaxation region // *Japan. J. Appl. Phys.*, 2009. vol. 48, no. 12R, 127002. DOI: <https://doi.org/10.1143/JJAP.48.127002>.
15. Batrudinov T. M., Ambarov A. V., Elfimova E. A., et al. Theoretical study of the dynamic magnetic response of ferrofluid to static and alternating magnetic fields // *J. Magn. Magnet. Mater.*, 2017. vol. 431. pp. 180–183. EDN: YUTRGN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.09.094>.
16. Coffey W. T., Kalmyko Y. P., Nijun W. Nonlinear normal and anomalous response of non-interacting electric and magnetic dipoles subjected to strong AC and DC bias fields // *Nonlinear Dyn.*, 2015. vol. 80. pp. 1861–1867. EDN: UOECOZ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1488-9>.
17. Déjardin J.-L., Debiais G., Ouadjou A. On the nonlinear behavior of dielectric relaxation in alternating fields. II. Analytic expressions of the nonlinear susceptibilities // *J. Chem. Phys.*, 1993. vol. 98, no. 10. pp. 8149–8153. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.464570>.
18. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: An influence of interparticle correlations // *Phys. Rev. E*, 2001. vol. 64, no. 4, 041405. EDN: WJQLGO. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.041405>.
19. Афанасьева Н. М., Вабищевич П. Н., Васильева М. В. Безусловно устойчивые схемы для задач конвекции-диффузии // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 3. С. 3–15. EDN: PRYKHB.
20. Ambarov A. V., Zverev V. S., Elfimova E. A. Numerical modeling of the magnetic response of interacting superparamagnetic particles to an ac field with arbitrary amplitude // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2020. vol. 28, no. 8, 085009. EDN: PCMKHA. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-651X/abbfbb>.
21. Ambarov A. V., Zverev V. S., Elfimova E. A. Influence of field amplitude and dipolar interactions on the dynamic response of immobilized magnetic nanoparticles: Perpendicular mutual alignment of an alternating magnetic field and the easy axes // *Phys. Rev. E*, 2023. vol. 107, no. 2, 024601. EDN: ZNXBCM. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.024601>.

MSC: 35Q84, 76W05

Analytical formula and numerical calculation of the second harmonic of dynamic susceptibility in concentrated ferrofluids

M. S. Rusanov

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin,
19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

Abstract

In this work, the second component of dynamic susceptibility of an ensemble of interacting magnetic particles is studied by using analytical and numerical methods. The configuration of superimposed magnetic fields is considered: alternating and parallel constant fields. Dipole-dipole interactions are taken into account within two-particle correlations using a modified first-order mean-field theory approach.

From the analytical solution of the Fokker–Planck equation, an expression for the second harmonic is obtained as a function of two parameters: the Langevin susceptibility χ_L , which characterizes dipole-dipole interactions, and the Langevin parameter ξ_0 , representing the ratio of magnetic energy to thermal energy.

The obtained expression for the second harmonic agrees with previously known results where interparticle interactions were neglected. This research has significant theoretical interest and can be used for more precise characterization of magnetic particle properties.

Keywords: ferrofluid, Fokker–Planck equation, probability density, dynamic susceptibility, interparticle interactions, constant field, numerical solution, analytical solution.

Received: 22nd October, 2024 / Revised: 12th February, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 10th May, 2025

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Rusanov M. S. Analytical formula and numerical calculation of the second harmonic of dynamic susceptibility in concentrated ferrofluids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 347–362. EDN: NBPBKD. DOI: 10.14498/vsgtu2124 (In Russian).

Authors' Details:

Mikhail S. Rusanov  <https://orcid.org/0000-0001-7439-8179>

Research Engineer; Lab. of Mathematical Modeling of Physicochemical Processes in Multiphase Media; Dept. of Mathematics, Mechanics and Computer Science; Institute of Natural Sciences and Mathematics; e-mail: mikhail.rusanov@urfu.ru

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The work was entirely conducted by the author. The author takes full responsibility for submitting the final manuscript version for publication. The final manuscript version has been approved by the author.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-12-00039), <https://rscf.ru/en/project/23-12-00039/>.

Acknowledgments. I am deeply grateful to my research advisor Assoc. Prof. E. A. Elfimova (D.Sc. in Physics and Mathematics).

References

1. Rosensweig R. E. *Ferrohydrodynamics*. New York, Cambridge, 1998, 344 pp.
2. Al-Areqi A. R., Xiaogang Y., Renpeng Y., et al. Synthesis of zinc ferrite particles with high saturation magnetization for magnetic induction hyperthermia, *J. Magn. Magnet. Mater.*, 2023, vol. 579, 170839. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.170839>.
3. Kritika, Indrajit R. Therapeutic applications of magnetic nanoparticles: recent advances, *Material. Advances*, 2022, vol. 3, no. 20, pp. 7425–7444. DOI: <https://doi.org/10.1039/D2MA00444E>.
4. Stueber D. D., Villanova J., Aponte I., et al. Magnetic nanoparticles in biology and medicine: Past, present, and future trends, *Pharmaceutics*, 2021, vol. 13, no. 7, 943. DOI: <https://doi.org/10.3390/pharmaceutics13070943>.
5. Lucaci C. M., Nitica S., Fizesan I., et al. Enhanced magnetic hyperthermia performance of zinc ferrite nanoparticles under a parallel and a transverse bias DC magnetic field, *Nanomaterials*, 2022, vol. 12, pp. 419–588. DOI: <https://doi.org/10.3390/nano12203578>.
6. Rusanov M. S., Kuznetsov M. A., Zverev V. S., Elfimova E. A. Influence of a bias dc field and an ac field amplitude on the dynamic susceptibility of a moderately concentrated ferrofluid, *Phys. Rev. E*, 2023, vol. 108, no. 2, 024607. EDN: LVREAX. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.024607>.
7. Ivanov A. O., Camp P. J. How particle interactions and clustering affect the dynamic magnetic susceptibility of ferrofluids, *J. Magn. Magnet. Mater.*, 2023, vol. 586, 171216. EDN: LXFRGI. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.171216>.
8. Lebedev A. V., Stepanov V. I., Kuznetsov A. A., et al. Dynamic susceptibility of a concentrated ferrofluid: The role of interparticle interactions, *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 100, no. 3. EDN: JOCHQF. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.032605>.
9. Debye P. *Polar Molecules*. New York, Chemical Catalog, 1929, 174 pp.
10. Raikher Y. L., Stepanov V. I. Nonlinear dynamic susceptibilities and field-induced birefringence in magnetic particle assemblies, In: *Advances in Chemical Physics*, vol. 129, 2004, pp. 419–588. EDN: OGWEAD. DOI: <https://doi.org/10.1002/047168077x.ch4>.
11. Ivanov A. O., Zverev V. S., Kantorovich S. S. Revealing the signature of dipolar interactions in dynamic spectra of polydisperse magnetic nanoparticles, *Soft Matter*, 2016, vol. 12, no. 15, pp. 3507–3513. EDN: XMDERI. DOI: <https://doi.org/10.1039/c5sm02679b>.
12. Rusanov M. S., Zverev V. S., Elfimova E. A. Third harmonic of the dynamic magnetic susceptibility of a concentrated ferrofluid: Numerical calculation and simple approximation formula, *Phys. Rev. E*, 2024, vol. 110, no. 3, pp. 034605. EDN: UYCLLS. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.110.034605>.
13. Rusanov M. S., Zverev V. S., Elfimova E. A. Influence of a bias dc field and an ac field amplitude on the dynamic susceptibility of a moderately concentrated ferrofluid, *Phys. Rev. E*, 2023, vol. 108, no. 2, 024607. EDN: LVREAX. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.108.024607>.
14. Yoshida T., Enpuku K. Simulation and quantitative clarification of AC susceptibility of magnetic fluid in nonlinear Brownian relaxation region, *Japan. J. Appl. Phys.*, 2009, vol. 48, no. 12R, 127002. DOI: <https://doi.org/10.1143/JJAP.48.127002>.

15. Batrudinov T. M., Ambarov A. V., Elfimova E. A., et al. Theoretical study of the dynamic magnetic response of ferrofluid to static and alternating magnetic fields, *J. Magn. Magnet. Mater.*, 2017, vol. 431, pp. 180–183. EDN: YUTRGN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2016.09.094>.
16. Coffey W. T., Kalmyko Y. P., Nijun W. Nonlinear normal and anomalous response of non-interacting electric and magnetic dipoles subjected to strong AC and DC bias fields, *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 80, pp. 1861–1867. EDN: UOEC0Z. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1488-9>.
17. Déjardin J.-L., Debiais G., Ouadjou A. On the nonlinear behavior of dielectric relaxation in alternating fields. II. Analytic expressions of the nonlinear susceptibilities, *J. Chem. Phys.*, 1993, vol. 98, no. 10, pp. 8149–8153. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.464570>.
18. Ivanov A. O., Kuznetsova O. B. Magnetic properties of dense ferrofluids: An influence of interparticle correlations, *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 64, no. 4, 041405. EDN: WJQLGO. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.041405>.
19. Afanaseva N. M., Vabishchevich P. N., Vasileva M. V. Unconditionally stable schemes for convection-diffusion problems, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 3, pp. 1–11. EDN: RFDQXP. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13030018>.
20. Ambarov A. V., Zverev V. S., Elfimova E. A. Numerical modeling of the magnetic response of interacting superparamagnetic particles to an ac field with arbitrary amplitude, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 8, 085009. EDN: PCMKHA. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-651X/abbfbb>.
21. Ambarov A. V., Zverev V. S., Elfimova E. A. Influence of field amplitude and dipolar interactions on the dynamic response of immobilized magnetic nanoparticles: Perpendicular mutual alignment of an alternating magnetic field and the easy axes, *Phys. Rev. E*, 2023, vol. 107, no. 2, 024601. EDN: ZNXBCM. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.024601>.



УДК 517.958

О скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерного кинетического уравнения Бродвелла

Г. А. Филиппов

Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

Аннотация

Статья посвящена описанию процедуры построения решения задачи о стабилизации периодического возмущения положения равновесия для одномерной модели Бродвелла. Описывается процедура построения решения: применяется метод Фурье для решения системы уравнений относительно коэффициентов Фурье переменных. В пространстве образов Фурье система сводится к проекции на одну переменную, что позволяет выразить остальные коэффициенты Фурье $u_{k,l}$, $v_{k,l}$, $w_{k,l}$ через $z_{k,l}$ с помощью уравнений состояния.

Существенную роль в исследовании скорости стабилизации играет линеаризация z -проекции, представляющая собой в данном случае интегро-дифференциальный оператор, описываемый в терминах теоремы Пэли–Винера. Рассогласование правой и левой частей одномерной системы приводит в методе Фурье к возникновению препятствий при построении аннуляторов секулярных членов соответствующей проекции. Указанные препятствия не позволяют получить решение задачи для произвольных начальных данных, описывающих периодические возмущения положения равновесия. Установлено, что для различных проекций возникающие препятствия оказываются идентичными.

Ключевые слова: кинетические уравнения Бродвелла, одномерная система Бродвелла, системы уравнений, скорость стабилизации периодических возмущений.

Получение: 16 апреля 2025 г. / Исправление: 9 июня 2025 г. /
Принятие: 10 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Филиппов Г. А. О скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерного кинетического уравнения Бродвелла // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 2. С. 363–380. EDN: NDYKAL. DOI: 10.14498/vsgtu2186.

Сведения об авторе

Георгий Алексеевич Филиппов <https://orcid.org/0009-0005-0054-1696>
аспирант; каф. высшей математики; e-mail: g.philippov@yandex.ru

Введение. Как известно, кинетическая теория рассматривает газ как совокупность огромного числа хаотически движущихся частиц (например молекул), взаимодействующих между собой тем или иным способом [1–6]. В результате таких взаимодействий частицы обмениваются импульсом и энергией. Взаимодействие может осуществляться как посредством прямых столкновений частиц, так и через различные силовые поля.

Для формального описания подобных явлений в [2] (см. также [6]) рассматриваются так называемые дискретные модели кинетического уравнения Больцмана, где приводится феноменологический вывод уравнения Больцмана для газовой модели с конечным числом различных скоростей частиц и конечным числом типов взаимодействий (модели типа Бродвелла [2]).

Пусть $f_i(t, x)$ — функция распределения частиц в пространстве $x \in \mathbb{R}^d$ в момент времени t , движущихся со скоростью $v_i \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что их взаимодействие описывается скоростью изменения функции распределения $F_i(f_1, \dots, f_n)$. Тогда получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\partial_t f_i + (v, \partial_x f_i) = F(f_1, \dots, f_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

которая называется дискретной моделью уравнения Больцмана, если F_i моделирует интеграл столкновений:

$$F(f_1, \dots, f_n) = \sum_{k,j} \sigma_{k,l}^{ij} (f_k f_l - f_i f_j).$$

Здесь суммирование проводится по всем k, l, j , участвующим в заранее заданных взаимодействиях (столкновениях) вида $(k, l) \rightarrow (i, j)$.

В данной работе разработаны методы исследования проекций системы Фурье на систему коэффициентов Фурье одной независимой переменной. При этом для одномерной модели Бродвелла проекции приводят к появлению секулярных членов. В частности, для u -проекции возникают секулярные члены вида $q_{z,r}^+ e^{ikt}$, $q_{v,r}^+ e^{ikt}$ и $q_{w,r}^- e^{-ikt}$.

Особенностью рассматриваемой системы является рассогласование между левой и правой частями уравнений: правая часть уникальна, поскольку описывает условия упругих столкновений частиц, тогда как левые части попарно идентичны. Это рассогласование создает препятствия для построения аннуляторов секулярных членов. Задача оказывается разрешимой лишь для регулярного процесса при выполнении условий возмущения положения равновесия.

Существенную роль в исследовании скорости стабилизации (в терминах теоремы Пэли–Винера) играет линеаризация u -проекции, представляющая собой в данном случае интегро-дифференциальный оператор (см. раздел 6). При разработке стандартного метода перехода к теореме Пэли–Винера потребовалось детальное описание этого перехода (включая оценки всех его составляющих) для модели Бродвелла в каждой из рассматриваемых проблем.

Важным результатом стало доказательство существования линейной взаимно однозначной замены независимых переменных, преобразующей систему

Фурье в линейную систему относительно переменной u . Данное преобразование существенно упрощает исследование слабой сходимости аппроксимационных решений к слабому решению задачи Коши как для регулярного, так и для нерегулярного процессов.

1. Модель Бродвелла [2, 5]. Широко известна двумерная модель Бродвелла ($d = 2$, $n = 4$):

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_3 + \partial_y f_3 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_4 - \partial_y f_4 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Модель Бродвелла наглядно демонстрирует сущность уравнения Больцмана, которое, как показано в [6], описывает смесь *двух конкурирующих процессов*: *релаксации и свободного движения*. Релаксационный процесс стремится уравнивать значения f_1 и f_3 , а также f_2 и f_4 (процесс «максвеллизации»), приводя к $Q(f_1, f_2) \rightarrow 0$. Свободное движение, напротив, вызывает расхождение этих функций распределения.

Ситуация быстрой релаксации соответствует случаю, когда f_1 почти равна f_2 . Противоположный предельный случай медленной релаксации (малое число столкновений) известен как кнудсеновский газ и характеризуется большим значением числа Кнудсена ε .

В работе [11] для системы Бродвелла исследованы периодические возмущения состояния равновесия $f_i = n_e^i + \hat{n}_i$, где $n_e^i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$) и $n_e^1 n_e^2 = n_e^3 n_e^4$. Возмущения $N(t, x, y) = (\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4)$ удовлетворяют пространственно-периодическим граничным условиям $N(t, x, y) = N(t, x + 2\pi, y + 2\pi)$, где (x, y) принадлежат ячейке периодичности. Введем следующее переобозначение:

$$N(t, x, y) = \varepsilon^2(\sqrt{u_e} \hat{u}, \sqrt{v_e} \hat{v}, \sqrt{w_e} \hat{w}, \sqrt{z_e} \hat{z}).$$

Применяя метод Фурье, перейдем к рассмотрению коэффициентов Фурье. Для двумерной системы можно осуществить проекцию на одну переменную (например, $u_{k,l} - u$ -проекция), выражая остальные коэффициенты Фурье $v_{k,l}$, $w_{k,l}$, $z_{k,l}$ через $z_{k,l}$ с помощью уравнений состояния. Ключевую роль в исследовании скорости стабилизации играет линеаризация u -проекции, которая в данном случае представляет собой интегро-дифференциальный оператор, описываемый в терминах теоремы Пэли–Винера.

Переход к проекции сопровождается появлением секулярных членов, которые однозначно аннулируются для регулярного процесса. Проблема построения аннуляторов секулярных членов возникает на так называемом «кресте» — для коэффициентов Фурье с индексами (k, l) , удовлетворяющих условию $(k^2 - l^2)l = 0$. Это создает препятствия для стабилизации соответствующих коэффициентов Фурье. Система для таких коэффициентов аналогична

системе для коэффициентов Фурье одномерной модели Бродвелла:

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\ \partial_t f_3 + \partial_x f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4), \\ \partial_t f_4 - \partial_x f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4).\end{aligned}\tag{2}$$

В чем заключается проблематичность данной модели? В одномерном случае частицы с одинаковыми скоростями распределены по разным группам (пары f_1, f_3 и f_2, f_4). При этом правая часть моделирует интеграл столкновений, построенный для четырех групп частиц с жестким условием *различия их групповых скоростей*. Таким образом, мы имеем *рассогласование между правой и левой частями модели* (2).

Этот вывод справедлив и для многоскоростных многомерных дискретных моделей кинетики, правая часть которых основана на разбиении частиц по группам с различными групповыми скоростями. Как показано выше, для двумерной модели Бродвелла проблема *рассогласования правой и левой частей* возникает на «кресте». Естественно, аналогичная проблема *рассогласования* возникает и для многоскоростных многомерных дискретных моделей кинетики на аналоге «креста» модели Бродвелла, который мы будем называть «обобщенным крестом».

Отметим, что уравнение Больцмана можно рассматривать как «континуальную сумму» моделей типа Бродвелла. Рассогласование правой и левой частей уравнения Больцмана обсуждается в [12].

Рассогласование в системе (2) приводит к возникновению препятствий при построении аннуляторов секулярных членов соответствующей проекции методом Фурье. Как будет показано далее, для одномерной модели (2) эти препятствия (например, для u -проекции) имеют вид

$$\sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0.\tag{3}$$

Указанные препятствия не позволяют построить решение задачи для произвольных начальных данных, описывающих периодические возмущения положения равновесия (включая распределения Максвелла — бегущие волны):

$$f_1 = f_3 = 1 + \varepsilon^2 \varphi(x - t), \quad f_2 = f_4 = 1 + \varepsilon^2 \psi(t + x),$$

начальные данные которых

$$f_1^0 = f_3^0 = 1 + \varepsilon^2 \varphi(x), \quad f_2^0 = f_4^0 = 1 + \varepsilon^2 \psi(x)$$

представляют собой периодические возмущения положения равновесия, не удовлетворяющие условиям (3).

В отличие от рассмотренной модели, одномерная модель Карлемана (см. [7])

$$\begin{aligned}\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2),\end{aligned}$$

не допускает распределений Максвелла, поэтому периодические возмущения положений равновесия $f_1^e > 0$, $f_2^e > 0$, $(f_1^e)^2 = (f_2^e)^2$, стабилизируются экспоненциально быстро [10].

2. Проблемы стабилизации в одномерной модели Бродвелла. Целью данной статьи является исследование проблемы скорости стабилизации периодических возмущений положения равновесия для одномерной модели Бродвелла (2).

Основным рабочим методом является метод Фурье в сочетании с проекцией процесса на одну из компонент (см. [8, 10]), что приводит к возникновению секулярных членов. В двумерном случае возникает проблема аннулирования секулярных членов (проблема «креста», см. [11]) — отсутствие аннуляторов секулярных членов для коэффициентов Фурье решения с индексами (k, l) , удовлетворяющими условию $(k^2 - l^2)l = 0$. Это создает препятствия для стабилизации соответствующих коэффициентов Фурье.

Исследование данной проблемы требует предварительного анализа вопроса стабилизации для одномерной модели Бродвелла. В настоящей работе рассматривается процедура построения решения задачи о стабилизации периодического возмущения положения равновесия для одномерной модели Бродвелла (2).

Для одномерной системы Бродвелла рассмотрим периодическое возмущение состояния равновесия

$$F(t, x) = (f_1, f_2, f_3, f_4) = F_e + \varepsilon^2 U(t, x),$$

где $F_e = (f_e^1, \dots, f_e^4)$, $f_e^i > 0$ ($i = 1, \dots, 4$), $f_e^1 f_e^2 = f_e^3 f_e^4$, причем $U(t, x) = U(t, x + 2\pi)$, т.е. удовлетворяет пространственно-периодическим граничным условиям, $x \in (0, 1)$. Введем переобозначение:

$$N(t, x) = N_e + \varepsilon^2 (\sqrt{u_e} \hat{u}, \sqrt{v_e} \hat{v}, \sqrt{w_e} \hat{w}, \sqrt{z_e} \hat{z}), \quad N_e = (u_e, v_e, w_e, z_e).$$

Применяя метод Фурье, перейдем к рассмотрению коэффициентов Фурье переменных. В пространстве образов Фурье можно осуществить проекцию на одну переменную (например, u_k — u -проекция), выражая остальные коэффициенты Фурье v_k , w_k , z_k через u_k с помощью уравнений состояния.

Ключевую роль в исследовании скорости стабилизации (в терминах теоремы Пэли–Винера [8, 10]) играет линеаризация u -проекции, представляющая собой в данном случае интегро-дифференциальный оператор. Изучение свойств этого оператора совместно с анализом квадратичности правой части в (1) позволило получить следующие результаты.

– Возникает препятствие для стабилизации коэффициентов Фурье:

$$\sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0. \quad (4)$$

– При невыполнении условий согласования препятствия u -проекции возможно подключение второй проекции (например, z -проекции) для построения решения методом Фурье. Однако условия согласования препятствия для z -проекции совпадают с таковыми для u -проекции:

$$\sqrt{w_e} w_k^0 + \sqrt{u_e} u_k^0 = 0, \quad \sqrt{v_e} v_k^0 + \sqrt{z_e} z_k^0 = 0.$$

Это исключает возможность построения каскада решений для произвольных периодических возмущений положения равновесия.

– Для коэффициентов Фурье $u_k^0, v_k^0, w_k^0, z_k^0, k \in \mathbb{Z}_0$, удовлетворяющих условиям согласования (4), процесс стабилизируется к состоянию равновесия экспоненциально быстро. Такой процесс будем называть *u-регулярным*.

3. Система для возмущения. В данном разделе исследуется скорость процесса «максвеллизации» на примере периодических возмущений положения равновесия для одномерной модели Бродвелла (1), где $f_j > 0$. Рассматриваются периодические возмущения положения равновесия:

$$\begin{aligned} f_1 &= u_e + \varepsilon^2 \sqrt{u_e} \hat{u}; & f_2 &= v_e + \varepsilon^2 \sqrt{v_e} \hat{v}; \\ f_3 &= w_e + \varepsilon^2 \sqrt{w_e} \hat{w}; & f_4 &= z_e + \varepsilon^2 \sqrt{z_e} \hat{z}. \end{aligned}$$

Положение равновесия характеризуется значениями $f_1^e = u_e, f_2^e = v_e, f_3^e = w_e, f_4^e = z_e$, удовлетворяющими условию $w_e z_e = u_e v_e$. Основная задача заключается в определении условий существования решения возмущенной системы и анализа его стабилизации.

Система уравнений для возмущений имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{u_e} \hat{u} + \partial_x \sqrt{u_e} \hat{u} - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \partial_t \sqrt{v_e} \hat{v} - \partial_x \sqrt{v_e} \hat{v} - \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \partial_t \sqrt{w_e} \hat{w} + \partial_x \sqrt{w_e} \hat{w} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \partial_t \sqrt{z_e} \hat{z} - \partial_x \sqrt{z_e} \hat{z} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}_e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v}), \\ \mathcal{L}_e &= w_e \sqrt{z_e} \hat{z} + z_e \sqrt{w_e} \hat{w} - u_e \sqrt{v_e} \hat{v} - v_e \sqrt{u_e} \hat{u}, \\ \partial_t \sqrt{u_e} \hat{u} + \partial_x \sqrt{u_e} \hat{u} &= \partial_t \sqrt{v_e} \hat{v} - \partial_x \sqrt{v_e} \hat{v}, \\ \partial_t \sqrt{w_e} \hat{w} + \partial_x \sqrt{w_e} \hat{w} &= \partial_t \sqrt{z_e} \hat{z} - 2 \partial_x \sqrt{z_e} \hat{z}, \\ \partial_t \sqrt{w_e} \hat{w} + \partial_x \sqrt{w_e} \hat{w} &= \partial_t \sqrt{u_e} \hat{u} + \partial_x \sqrt{u_e} \hat{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

В пространстве образов Фурье система принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{u_e} u_k + ik \sqrt{u_e} u_k - \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ \partial_t \sqrt{v_e} v_k - ik \sqrt{v_e} v_k - \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= \varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ \partial_t \sqrt{w_e} w_k + ik \sqrt{w_e} w_k + \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ \partial_t \sqrt{z_e} z_k - ik \sqrt{z_e} z_k + \frac{1}{\varepsilon} L_k^e &= -\varepsilon \sqrt{u_e} \sqrt{v_e} (\hat{w} \hat{z} - \hat{u} \hat{v})_k, \\ L_k^e &= w_e \sqrt{z_e} z_k + z_e \sqrt{w_e} w_k - u_e \sqrt{v_e} v_k - v_e \sqrt{u_e} u_k. \\ Q_k &= \sum_{k_1+k_2=k} (w_{k_1} z_{k_2} - u_{k_1} v_{k_2}). \end{aligned} \tag{6}$$

4. u -проекция. Опишем процедуру построения u -проекции. Из системы (6) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sqrt{z_e}z_k - ik\sqrt{z_e}z_k &= -\left(\frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k\right), \\ \frac{d}{dt}\sqrt{w_e}w_k + ik\sqrt{w_e}w_k &= -\left(\frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k\right), \\ \frac{d}{dt}\sqrt{v_e}v_k - ik\sqrt{v_e}v_k &= \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k.\end{aligned}\quad (7)$$

Интегрирование системы (7) позволяет получить выражения

$$\begin{aligned}\sqrt{v_e}v_k &= \sqrt{v_e}v_k^0 e^{ikt} \int_0^t e^{-2iks} d_s(e^{iks} \sqrt{u_e}u_k) ds = \\ &= q_{v,k}^+ e^{ikt} + \sqrt{u_e}u_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds,\end{aligned}\quad (8)$$

где

$$q_{v,k}^+ = \sqrt{v_e}v_k^0 - \sqrt{u_e}u_k^0.$$

Также получим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-ikt}\sqrt{z_e}z_k) &= -e^{-2ikt}\frac{d}{dt}(e^{ikt}\sqrt{u_e}u_k), \\ \sqrt{z_e}z_k &= q_{z,k}^+ e^{ikt} - \sqrt{u_e}u_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$q_{z,k}^+ = \sqrt{z_e}z_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0,$$

и

$$\sqrt{w_e}w_k = q_{w,k}^- e^{-ikt} - \sqrt{u_e}u_k,\quad (10)$$

где

$$q_{w,k}^- = \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0.$$

Уравнение для компоненты u_k принимает вид

$$\partial_t \sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k - \frac{1}{\varepsilon}L_k^e = \varepsilon\sqrt{u_e}\sqrt{v_e}(\widehat{wz} - \widehat{uv})_k.$$

После подстановки получаем выражение для L_e :

$$\begin{aligned}L_e &= w_e \left(q_{z,k}^+ e^{ikt} - \sqrt{u_e}u_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds \right) + \\ &\quad + z_e (q_{w,k}^- e^{-ikt} - \sqrt{u_e}u_k) - v_e \sqrt{u_e}u_k - \\ &\quad - u_e \left(q_{v,k}^+ e^{ikt} + \sqrt{u_e}u_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds \right).\end{aligned}$$

Подстановка в первое уравнение системы (5) приводит к интегро-дифференциальному уравнению для компоненты u_k :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k + \frac{1}{\varepsilon}K_e\sqrt{u_e}u_k + \\ + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)}\sqrt{u_e}u_k ds = \\ = \frac{1}{\varepsilon}(w_e q_{z,k}^+ + z_e q_{w,k}^- e^{-ikt} - u_e q_{v,k}^+ e^{ikt}) + \varepsilon\sqrt{u_e}\sqrt{v_e}(\widehat{w}\widehat{z} - \widehat{u}\widehat{v})_k, \quad (11) \end{aligned}$$

где $K_e = u_e + v_e + w_e + z_e$.

Введем оператор

$$\begin{aligned} T_{u,k}(\sqrt{u_e}u_k) = \frac{d}{dt}\sqrt{u_e}u_k + ik\sqrt{u_e}u_k + \frac{1}{\varepsilon}K_e\sqrt{u_e}u_k + \\ + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)}\sqrt{u_e}u_k ds. \end{aligned}$$

Как будет показано далее, данный интегро-дифференциальный оператор играет ключевую роль в построении решения u -проекции.

5. u -регулярный процесс. Процесс будем называть *регулярным*, если выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \sqrt{v_e}v_k + \sqrt{z_e}z_k = 0; \quad \sqrt{u_e}u_k + \sqrt{w_e}w_k = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad (12) \\ v_0^0 = z_0^0 = u_0^0 = w_0^0, \end{aligned}$$

где $\mathbb{Z}_0 = \{k \in \mathbb{Z}; k \neq 0\}$.

Далее мы покажем, что регулярный процесс допускает глобальное решение в весовом гильбертовом пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\sigma)$ последовательностей $U = \{u_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$ с квадратом нормы

$$\|U\|^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left(\left| \frac{d}{dt} u_k \right|^2 + |k|^2 |u_k|^2 \right) dt, \quad \gamma > 0.$$

Дополнительно определим пространство числовых последовательностей $S = \{S_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$ с квадратом нормы

$$\|S\|_{\mathcal{H}\sigma}^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} |S_k|^2.$$

В дальнейшем также будет использоваться весовое гильбертово пространство $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}\sigma)$ последовательностей $Y = \{Y_k, k \in \mathbb{Z}_0\}$ с квадратом нормы

$$\|Y\|^2 = \sup_{k \in \mathbb{Z}_0} |k|^{2\sigma} \int_0^\infty e^{2\gamma t} |Y_k|^2 dt, \quad \gamma > 0.$$

6. Интегро-дифференциальный оператор $T_{u,k}$. Как было установлено ранее (см. также [7–9]), *существенную роль* в исследовании проблемы

стабилизации решений задачи Коши для системы (11), (8)–(10) играют свойства интегро-дифференциального оператора $T_{u,k}$.

Его символ (преобразование Лапласа по переменной t) имеет вид

$$\sigma(T_{u,k})(p) = p + ik + \frac{1}{\varepsilon}K_e + \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e)\frac{1}{p - ik}.$$

Заметим, что в разложении символа

$$\Sigma(T_{u,k})(p) = \frac{\sigma(T_{u,k})(p)}{p + ik} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\left((K_e - w_e - u_e)\frac{1}{p + ik} + (w_e + u_e)\frac{1}{p - ik}\right)$$

все коэффициенты *положительны*. Это свойство будет играть ключевую роль при анализе символов операторов $T_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_0$.

В данном случае

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Sigma(T_{u,k})(p) = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} p \left((v_e + z_e) \frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p + k)^2} + \right. \\ \left. + (u_e + w_e) \frac{1}{(\operatorname{Re} p)^2 + (\operatorname{Im} p - k)^2} \right) \geq 1 \end{aligned}$$

для всех $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq 0$. Следовательно, функция $(p + ik)/\sigma(T_{u,k})(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq 0$.

Это позволяет предположить, что функция $1/\sigma(T_{u,k})(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\varepsilon\gamma$ для достаточно малого $\gamma > 0$. Данное свойство дает возможность применить теорему Пэли–Винера и построить обратный оператор $T_{u,k}^{-1}$.

7. Оценки оператора $T_{u,k}$, $k \in \mathbb{Z}_0$. Положим

$$A_k(\sqrt{u_e}u_k) = \frac{1}{\varepsilon}2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e}u_k ds.$$

Для получения оценок решения задачи Коши для уравнения

$$L(f) = T_{u,k}(f) = g, \quad f|_{t=0} = 0 \quad (13)$$

в соболевских нормах приведем известные факты, которые будут использованы в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пространством Харди $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ назовем класс вектор-функций $\widetilde{f(p)}$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H , голоморфных в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \gamma \geq 0\}$, для которых*

$$\sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x + iy)}\|_H^2 dy < \infty, \quad p = x + iy.$$

Сформулируем теорему Пэли–Винера для пространств Харди.

ТЕОРЕМА ПЭЛИ–ВИНЕРА.

1. Пространство $H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций (преобразований Лапласа), допускающих представление

$$\widetilde{f(p)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{pt} f(t) dt \quad (14)$$

для $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > \gamma \geq 0$.

2. Для любой вектор-функции $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ существует единственное представление (14), где вектор-функция $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, причем справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{(\gamma+iy)t} \widetilde{f(\gamma+iy)} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \gamma \geq 0.$$

3. Для вектор-функций $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)$ и $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, связанных соотношением (14), справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}\|_{H_2(\operatorname{Re} p > \gamma, H)}^2 &\equiv \sup_{x > \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widetilde{f(x+iy)}\|_H^2 dy = \\ &= \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)}^2. \end{aligned}$$

Если установлено, что преобразование Лапласа функции $L(f)$ таково, что $pL(f)(p)$, $L(f)$ и $L(A_k f)$ принадлежат пространству Харди $\widetilde{f(p)} \in H_2(\operatorname{Re} p > \gamma)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, то по теореме Пэли–Винера функции $\frac{d}{dt}f$, f и $A_k f$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, $f \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+)$ для любого $g \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Отсюда следует разрешимость уравнения (13) в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+)$. Покажем, что

$$\|f\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+)} + \|A_k f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq a_0 \|g\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

Для этого необходима оценка символа $\sigma(T_{u,k})(p)$ снизу. Далее приведем результаты, касающиеся свойств символа $\sigma(T_{u,k})(p)$ оператора $T_{u,k}$ и прежде всего условия его строгой устойчивости, когда корни $\sigma(T_{u,k})(p) = 0$ находятся в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < -\varepsilon\gamma$ параметра $p \in \mathbb{C}$ для некоторого $\gamma \in (0, 1)$.

8. Оценки символов $\sigma(T_{u,k})(p)$ и $\Sigma(T_{u,k})(p)$. Приведем оценки символов $\sigma(T_{u,k})(p)$ и $\Sigma(T_{u,k})(p)$, следующие из результатов работ [7, 9, 10].

$$\text{Положим } \Sigma(T_{u,k})(p) = \frac{\sigma(T_{u,k})(p)}{p + ik}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $k \in \mathbb{Z}_0$. Для $\operatorname{Re} p > -\varepsilon\gamma$, где $\gamma = (1-\alpha)\mu^2/K_e$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \mu < 1$, и при дополнительном условии $|\operatorname{Im} p \pm k| \geq \mu|k|$ справедлива равномерная по $k \in \mathbb{Z}_0$ оценка

$$|\Sigma_{u,k}(p)| \geq \alpha.$$

ЛЕММА 2. Равномерно по $k \in \mathbb{Z}_0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -\gamma\varepsilon$, $\gamma = \mu^2/K_e$, для достаточно малого $0 < \mu < 1$ справедлива оценка

$$|\sigma(T_{u,k})(p)| > c(\mu),$$

где $c(\mu) > 0$. Следовательно, по теореме Пэли-Винера, для любой функции $g(t) \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)$ задача Коши (13) имеет решение

$$f = T_{u,k}^{-1}g \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+), \quad f|_{t=0} = 0,$$

удовлетворяющее оценке

$$\|T_{u,k}^{-1}g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq c(\mu)\|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)}. \quad (15)$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда существует постоянная $c(\mu) > 0$ такая, что равномерно по $k \in \mathbb{Z}_0$ для любой функции $g \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)$ выполняется

$$\left(\frac{d}{dt} + ik\right)T_{u,k}^{-1}g \in L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+),$$

причем справедлива оценка

$$\left\|\left(\frac{d}{dt} + ik\right)T_{u,k}^{-1}g\right\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)} \leq \max(\alpha^{-1}, \varepsilon\mu c(\mu)|k|)\|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}(\mathbb{R}_+)}.$$

ЛЕММА 4. В условиях леммы 2 для интегрального члена в $T_{u,k}$ справедлива оценка

$$\|A_k T_{u,k}^{-1}g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}} \leq \frac{1}{\varepsilon} c_2 \|g\|_{L_{2,\varepsilon\gamma}}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для параметра $\gamma = (1 - \alpha)\mu^2/K_e$, $\alpha \in (0, 1)$, и достаточно малого $\mu \in (0, 1)$ функция $((p - ik)\sigma(T_{u,k})(p))^{-1}$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon\gamma$. Кроме того, существует постоянная $c(\mu) > 0$ такая, что равномерно по $k \in \mathbb{Z}_0$ выполняются оценки

$$\sup_{\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p|^2}{|(p - ik)\sigma(T_{u,k})(p)|^2} d\operatorname{Im} p \leq c(\mu) \max(1, \varepsilon^2(|k| - K_e))$$

и

$$\sup_{\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|(p - ik)\sigma(T_{u,k})(p)|^2} d\operatorname{Im} p \leq c(\mu).$$

9. Переход к однородным начальным данным. Выполним замену переменных:

$$\sqrt{u_e}u_k = \sqrt{u_e}u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \sqrt{u_e}\mathcal{X}_k,$$

где $\mathcal{X}_k$ — новая переменная с нулевыми начальными условиями.

При этом интегральный член преобразуется следующим образом:

$$2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e s/\varepsilon} ds = -\frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 (e^{-K_e t/\varepsilon} - e^{ikt}).$$

Получаем выражения для остальных переменных:

$$\begin{aligned} \sqrt{z_e} z_k = Q_{z,k}^+ e^{ikt} - \frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} - \\ - \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k ds, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{v_e} v_k = Q_{v,k}^+ e^{ikt} + \frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \\ + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k ds, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$Q_{z,k}^+ = q_{z,k}^+ - \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} u_k^0, \quad Q_{v,k}^+ = q_{v,k}^+ + \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} u_k^0.$$

Для переменной w_k имеем

$$\sqrt{w_e} w_k = -\sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k,$$

поскольку для регулярного процесса выполняется $q_{w,k}^- = \sqrt{u_e} u_k + \sqrt{w_e} w_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}_0$.

Уравнение для новой переменной $\mathcal{X}_k$ принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k + (K_e/\varepsilon + ik) \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k + \\ + \frac{1}{\varepsilon} 2ik (w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} \mathcal{X}_k ds = \\ = \mathcal{F}_k + \frac{1}{\varepsilon} (w_e Q_{z,k}^+ - u_e Q_{v,k}^+) e^{ikt} + \varepsilon Q_k^{(1)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\mathcal{F}_k = \left(\frac{1}{\varepsilon} (w_e + u_e) \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} - ik \right) \sqrt{u_e} u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon}$$

с начальным условием

$$\mathcal{X}_k|_{t=0} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(w_e q_{z,k}^+ - u_e q_{v,k}^+ - (w_e + u_e) \frac{2ik}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} u_k^0 \right) = \frac{1}{\varepsilon} (w_e Q_{z,k}^+ - u_e Q_{v,k}^+).$$

Нелинейный член $Q_k^{(1)}$ выражается так:

$$\begin{aligned}
 Q_k^{(1)}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) &= \sum_{k_1+k_2=k} (z_{k_1} w_{k_2} - v_{k_1} u_{k_2}) = \\
 &= - \sum_{k_1+k_2=k} (\sqrt{u_e} u_{k_2}^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + \sqrt{u_e} \mathcal{X}_{k_2}) (Q_{z,k_1}^+ + Q_{v,k_1}^+) e^{ik_1 t}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

10. Условия стабилизации уравнений состояния. Для устранения секулярных членов $Q_{z,k}^+ e^{ikt}$ и $Q_{v,k}^+ e^{ikt}$ в уравнениях состояния (16), (17) введем замену переменных для регулярного процесса:

$$\sqrt{u_e} \mathcal{X}_k = S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k), \quad (20)$$

где $S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ — аннулятор, что следует из оценки теоремы 1, а согласно оценке (15), $T_{u,k}^{-1}(Y_k) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$ для любой $Y_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

Воспользуемся приемом выделения секулярности из интеграла

$$2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} (S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds,$$

который использовался в [10] в силу определения оператора $T_{u,k}$:

$$\begin{aligned}
 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) ds &= \\
 &= \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} \{ S_k^+ e^{iks} - \partial_t S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) + (K_e/\varepsilon + ik) S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) \}.
 \end{aligned}$$

Подстановка в (16) и (17) дает

$$\begin{aligned}
 \sqrt{z_e} z_k &= \left(Q_{z,k}^+ - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ \right) e^{ikt} + F_{z,k} - \\
 &\quad - \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{v_e} v_k &= \left(Q_{v,k}^+ + \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ \right) e^{ikt} + F_{v,k} + \\
 &\quad + \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{z,k} &= -\frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} X_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} - S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) - \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} ((K_e/\varepsilon + ik) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) - \partial_t S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks})) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+),
 \end{aligned}$$

$$F_{v,k} = \frac{K_e/\varepsilon}{K_e/\varepsilon + ik} \sqrt{u_e} X_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) - \\ - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} (\partial_t S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) - (K_e/\varepsilon + ik) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks})) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$$

в силу оценок раздела 6.

Определим амплитуду S_k^+ из уравнений

$$Q_{z,k}^+ - \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ = 0; \quad Q_{v,k}^+ + \frac{\varepsilon}{w_e + u_e} S_k^+ = 0, \quad (21)$$

что приводит к *препятствию* для аннуляции секулярных членов:

$$Q_{z,k}^+ + Q_{v,k}^+ = 0 \Rightarrow \widehat{q}_{z,k}^+ + \widehat{q}_{v,k}^+ = 0 \Rightarrow \sqrt{z_e} z_k^0 + \sqrt{v_e} v_k^0 = 0. \quad (22)$$

Окончательные выражения принимают вид

$$\sqrt{z_e} z_k = F_{z,k} - \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds, \\ \sqrt{v_e} v_k = F_{v,k} + \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} \sqrt{u_e} T_{u,k}^{-1}(Y_k) ds, \quad (23)$$

где правые части (23) стабилизируются к нулю для любого $Y_k \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

11. Сведение к уравнению в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия регулярности (12), $\sigma > 3/2$ и $\gamma = \varepsilon \mu^2 / K_e$. Тогда для достаточно малого $\mu \in (0, 1)$ существует единственное глобальное решение

$$\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_\sigma)$$

задачи Коши для системы (18).

Доказательство. Подстановка (20) в уравнение (18) приводит к

$$Y_k + (\partial_t + ik + K_e/\varepsilon) S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{ikt}) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} 2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) ds = \\ = \mathcal{F}_{\mathcal{X},k} + \frac{1}{\varepsilon} (w_e + u_e) Q_{z,k}^+ e^{ikt},$$

где $Q_k^{(1)}(X, X) = 0$ согласно (19) и (22).

Осталось выделить секулярный член из интеграла

$$\frac{1}{\varepsilon} 2ik(w_e + u_e) \int_0^t e^{ik(t-s)} S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) ds = \\ = S_k^+ e^{iks} - \partial_t S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}) + (ik + K_e/\varepsilon) S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{iks}).$$

Учитывая (21), получаем

$$Y_k = F_{Y,k},$$

где

$$F_{Y,k} = \mathcal{F}_{\mathcal{X},k} - 2(K_e/\varepsilon + ik)S_k^+ T_{X,k}^{-1}(e^{iks}) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)$$

при $\sigma > 3/2$.

Стандартные методы оценок [10] вместе с результатами раздела 6 об интегро-дифференциальном операторе $T_{u,k}$ завершают доказательство теоремы. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Переход к переменной Y_k существенно упрощает задачу по сравнению с двумерной моделью Бродвелла, где исходная задача для коэффициентов Фурье сводится к нелинейному интегральному уравнению для последовательности функций $Y = \{Y_{k,l}, (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ при ненулевых k и l (см. [11]).

12. Аппроксимационное решение. Введем последовательность аппроксимационных решений следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{u_e}u^{(m)}(x,t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} (\sqrt{u_e}u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + S_k^+ T_k^{-1}(e^{ikt}) + T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k)) e^{ikx}; \\ \sqrt{v_e}v^{(m)}(x,t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} \left(F_{v,k} + T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) + 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) ds \right) e^{ikx}; \\ \sqrt{w_e}w^{(m)}(x,t) &= - \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} (\sqrt{u_e}u_k^0 e^{-K_e t/\varepsilon} + S_k^+ T_{u,k}^{-1}(e^{ikt}) + T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k)) e^{ikx}; \\ \sqrt{z_e}z^{(m)}(x,t) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_0 \\ |k| \leq m}} \left(F_{z,k} - T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) - 2ik \int_0^t e^{ik(t-s)} T_{u,k}^{-1}(\sqrt{u_e}Y_k) ds \right) e^{ikx}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда аппроксимационное решение при $m \rightarrow \infty$ слабо сходится к слабому решению задачи Коши для одномерной модели Бродвелла.

Доказательство представляет собой существенное упрощение соответствующего доказательства из работы [10].

Заключение. Проведенное исследование позволяет сформулировать следующие основные выводы.

1. Установлено, что рассогласование правой и левой частей в системе (2) создает принципиальные препятствия для построения аннуляторов секкулярных членов в рамках метода Фурье.
2. Для одномерной модели (2) обнаружены универсальные условия согласования:

$$\sqrt{v_e}v_k^0 + \sqrt{z_e}z_k^0 = 0, \quad \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0 = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_0, \quad (24)$$

которые должны выполняться для всех проекций системы.

3. Доказано, что наличие условий (24) существенно ограничивает класс допустимых начальных данных, описывающих периодические возмущения положения равновесия.

4. Разработанный метод позволяет построить решение задачи только для регулярного процесса, когда начальные условия удовлетворяют ограничениям (24).
5. Для преодоления выявленных ограничений требуется разработка специальной процедуры регуляризации, которая будет представлена в одной из следующих публикаций.

Таким образом, в данной работе установлены фундаментальные ограничения, связанные с особенностями структуры одномерной модели Бродвелла, и намечены пути их преодоления в рамках дальнейших исследований.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено без финансовой поддержки.

Благодарность. Автор глубоко признателен профессору Е. В. Радкевичу за ценные обсуждения, критические замечания и постоянную поддержку на всех этапах выполнения данного исследования. Конструктивные советы и экспертные рекомендации профессора Е. В. Радкевича существенно способствовали совершенствованию результатов, представленных в данной работе.

Библиографический список

1. Больцман Л. *Лекции по теории газов*. М.: Гостехиздат, 1956. 554 с.
2. Годунов С. К., Султангазин У. М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // *УМН*, 1971. Т. 26, № 3(159). С. 3–51.
3. Султангазин У. М. *Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана*. Алма-Ата: Наука, 1985. 192 с.
4. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations // *Australian J. Phys.*, 1989. vol. 42, no. 1. pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1071/PN89000>.
5. Broadwell J. E. 401–414 // *J. Fluid Mech.*, 1964. vol. 19, no. 3. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112064000817>.
6. Веденяпин В. В. *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*. М.: Физматлит, 2001. 112 с.
7. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О локальном равновесии уравнения Карлемана // *Пробл. мат. анализа*, 2015. Т. 78. С. 165–190. EDN: XRDZZV.
8. Радкевич Е. В. О существовании глобальных решений задачи Коши для дискретных кинетических уравнений // *Пробл. мат. анализа*, 2011. Т. 62. С. 109–151.
9. Радкевич Е. В. О существовании глобальных решений задачи Коши для дискретных кинетических уравнений. II // *Пробл. мат. анализа*, 2012. Т. 63. С. 145–188.
10. Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова–Султангазина / *Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям* (Москва, 22–29 августа, 2014). Часть 3 / СМФН, Т. 60. М.: РУДН, 2016. С. 23–81. EDN: PGBIKG.
11. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Filippov G. A. On stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (a regular process) // *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2025 (to appear).
12. Платонова К. С., Боровских А. В. Групповой анализ одномерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы // *ТМФ*, 2021. Т. 208, № 3. С. 367–386. EDN: ERFSOE. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10098>.

MSC: 35Q70, 35B35, 35L65

On the stabilization rate of periodic perturbations of equilibrium states for the one-dimensional Broadwell kinetic equation

G. A. Filippov

Moscow State University of Civil Engineering

(National Research University),

26, Yaroslavskoye sh., Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with a procedure for constructing solutions to the problem of stabilizing periodic perturbations of equilibrium states in the one-dimensional Broadwell model. The solution procedure employs the Fourier method to solve the system of equations for the Fourier coefficients of the variables. In the Fourier transform space, the system reduces to a projection onto a single variable, enabling expression of the remaining Fourier coefficients $u_{k,l}$, $v_{k,l}$, $w_{k,l}$ through $z_{k,l}$ by using state equations.

The linearization of the z -projection plays a crucial role in studying the stabilization rate, representing in this case an integro-differential operator described in terms of the Paley–Wiener theorem. The discrepancy between the right and left sides of the one-dimensional system creates obstacles in the Fourier method when constructing annihilators of secular terms for the corresponding projection. These obstacles prevent obtaining solutions for arbitrary initial data describing periodic perturbations of the equilibrium position. It is established that the arising obstacles are identical for different projections.

Keywords: Broadwell kinetic equations, one-dimensional Broadwell system, systems of equations, stabilization rate of periodic perturbations.

Received: 16th April, 2025 / Revised: 9th June, 2025 /

Accepted: 10th June, 2025 / First online: 30th June, 2025

Competing interests. The author declares no competing interests.

Authors' contributions. I take full responsibility for submitting the final manuscript version for publication. The final version of the manuscript has been approved by me.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Filippov G. A. On the stabilization rate of periodic perturbations of equilibrium states for the one-dimensional Broadwell kinetic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 363–380. EDN: NDYKAL. DOI: 10.14498/vsgtu2186 (In Russian).

Author's Details:

Georgiy A. Filippov  <https://orcid.org/0009-0005-0054-1696>

Postgraduate Student; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: g.philippov@yandex.ru

Funding. The research received no specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Acknowledgments. The author is deeply grateful to Professor E. V. Radkevich for valuable discussions, critical comments, and continuous support throughout all stages of this research. Professor Radkevich's constructive advice and expert recommendations significantly contributed to improving the results presented in this work.

References

1. Boltzmann L. *Lektsii po teorii gazov* [Lectures on the Theory of Gases]. M., Gostekhizdat, 1956, 554 pp. (In Russian)
2. Godunov S. K., Sultangazin U. M. On discrete models of the kinetic Boltzmann equation, *Russian Math. Surveys*, 1971, vol. 26, no. 3, pp. 1–56. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1971v026n03ABEH003822>.
3. Sultanagazin U. M. *Diskretnyye nelineynyye modeli uravneniya Bol'tsmana* [Discrete Non-linear Models of the Boltzmann Equation]. Alma-Ata, Nauka, 1985, 192 pp. (In Russian)
4. Euler N., Steeb W.-H. Painlevé test and discrete Boltzmann equations, *Australian J. Phys.*, 1989, vol. 42, no. 1, pp. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1071/PH89000>.
5. Broadwell J. E. 401–414, *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, no. 3. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112064000817>.
6. Vedenyapin V. V. *Kineticheskiye uravneniya Bol'tsmana i Vlasova* [Kinetic Boltzmann and Vlasov Equations]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 112 pp. (In Russian)
7. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A. Local equilibrium of the Carleman equation, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, vol. 207, no. 2, pp. 296–323. EDN: WOEYSR. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2373-x>.
8. Radkevich E. V. The existence of global solutions to the Cauchy problem for discrete kinetic equations, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2012, vol. 181, no. 2, pp. 232–280. EDN: PDKBIR. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0683-9>.
9. Radkevich E. V. The existence of global solutions to the Cauchy problem for discrete kinetic equations. II, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2012, vol. 181, no. 5, pp. 701–750. EDN: PDLYGZ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0711-9>.
10. Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A., Radkevich E. V. On the nature of local equilibrium in the Carleman and Godunov–Sultangazin equations, In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Differential and Functional-Differential Equations* (Moscow, August 22–29, 2014). Part 3, CMFD, 60. Moscow, PFUR, 2016, pp. 23–81 (In Russian). EDN: PGBIKG.
11. Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Filippov G. A. On stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (a regular process), *Eurasian J. Math. Comp. Appl.*, 2025 (to appear).
12. Platonova K. S., Borovskih A. V. Group analysis of the one-dimensional Boltzmann equation. Invariants and the problem of moment system closure, *Theoret. and Math. Phys.*, 2021, vol. 208, no. 3, pp. 1165–1181. EDN: KNHKSI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040577921090014>.



УДК 517.15, 517.581, 511.331.1

Асимптотика сумм с гауссовым ядром и мультипликативными коэффициентами

А. С. Зинченко, А. М. Романенков

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследуется задача определения асимптотического поведения конечной суммы, содержащей гауссову функцию и мультипликативный множитель. Суммы подобного вида возникают при анализе сложности алгоритмов обхода бинарного дерева и лучевого поиска. Метод комплексного интегрирования позволяет перейти от конечной дискретной суммы к интегралу по бесконечной вертикальной прямой в одномерной комплексной плоскости. Установлено, что подынтегральная функция включает целую положительную степень дзета-функции Римана. Применение стандартной техники вычисления вычетов дает возможность получить асимптотическое значение данного интеграла.

Ключевые слова: асимптотический анализ, конечные суммы, гауссово ядро, мультипликативные коэффициенты, метод комплексного интегрирования, дзета-функция Римана.

Получение: 6 сентября 2024 г. / Исправление: 21 января 2025 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 6 мая 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зинченко А. С., Романенков А. М. Асимптотика сумм с гауссовым ядром и мультипликативными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 381–389. EDN: BCHVZM. DOI: 10.14498/vsgtu2113.

Сведения об авторах

Александр Сергеевич Зинченко <https://orcid.org/0000-0001-7971-4572>
кандидат экономических наук; доцент; каф. 916 математики; e-mail: zinchenkoas@mail.ru

Александр Михайлович Романенков <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>
кандидат технических наук, доцент; каф. 916 математики;
e-mail: romanaleks@gmail.com

В прикладных задачах возникает необходимость вычисления конечных сумм специального вида. Подобные суммы появляются при оценке сложности алгоритмов и обычно называются функциями стоимости. Функция стоимости тем или иным образом сводится к временной оценке выполнения алгоритма. Таким образом, для анализа сложности можно учитывать определенные операции алгоритма, однако в конечном итоге задача сводится к оценке скорости его выполнения. Примечательным фактом является взаимосвязь между внешне различными алгоритмами, которая устанавливается посредством известных арифметических функций (число делителей, сумма делителей и их степеней). В частности, при оценке сложности алгоритмов требуются данные об асимптотическом поведении этих арифметических функций, причем типичным инструментом исследования выступает дзета-функция Римана. Именно свойства дзета-функции позволяют получить оценки сложности.

Следует отметить, что анализ поведения дзета-функции Римана представляет собой сложную и нетривиальную задачу. Так, в работе [1] продемонстрирована методика оценки среднего квадрата обобщения дзета-функции на коротких интервалах. В работе [2] дзета-функция и ее обобщение возникают при исследовании параметрических конечных сумм с биномиальными коэффициентами. В [3] проведен анализ конечных симметричных сумм Эйлера.

При анализе алгоритмов пузырьковой сортировки, обменной сортировки и поиска в бинарном дереве [4] возникает необходимость исследования конечной суммы следующего вида:

$$W(m, k, f) = \sum_{t=1}^{m-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2m}\right) t^k f(t), \quad (1)$$

где $m \geq 2$, $m, k \in \mathbb{Z}$, а $f(t)$ — мультипликативная функция.

Для дальнейшего анализа потребуется представление выражения (1) в виде комплексного интеграла.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Функция $W(m, k, f)$, определенная формулой (1), допускает представление*

$$W(m, k, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z) (2m)^z \left(\sum_{t=1}^{m-1} \frac{f(t)}{t^{2z-k}} \right) dz,$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Меллина для экспоненты. Пусть x — произвольное положительное число. Тогда справедливо равенство [2, 4]:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \quad c > 0. \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) $x = t^2/(2m)$ из (1) получаем

$$W(m, k, f) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{t=1}^{m-1} \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) t^{k-2z} (2m)^z dz \right) f(t). \quad (3)$$

Пусть $z = x + iy$. Оценим интеграл в (3):

$$\begin{aligned} \left| \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) t^{k-2z} (2m)^z dz \right| &\leq \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |\Gamma(z) t^{k-2z} (2m)^z| dy = \\ &= t^{k-2c} (2m)^c \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{c-g_1(b)}^{c+ig_2(b)} |\Gamma(c+iy)| dy, \end{aligned}$$

где $g_1(x)$, $g_2(x)$ — вещественнозначные функции вещественного переменного, такие что $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x) = +\infty$.

Из [5] известна оценка для $|\Gamma(x+iy)|$. А именно, $\exists C_1, C_2 > 0$:

$$C_1(|x+iy|+1)^{x-1/2} e^{-|y|\pi/2} \leq |\Gamma(x+iy)| \leq C_2(|x+iy|+1)^{x-1/2} e^{-|y|\pi/2}, \quad (4)$$

где $x \in K \subset \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

В силу оценки (4) интеграл в (3) сходится абсолютно, поэтому можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Полагая $c = 1/2$, окончательно получаем

$$W(m, k, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z) (2m)^z \sum_{t=1}^{m-1} \frac{f(t)}{t^{2z-k}} dz. \quad \square$$

Следуя работам [3, 4], изложим метод комплексного интегрирования. Рассмотрим в комплексной плоскости прямоугольный контур $\gamma_1 = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (рис. 1), который при фиксированных значениях N и M охватывает конечное число особых точек $\Gamma(z)$. При стремлении N и M к бесконечности в указанный контур попадают все особые точки подынтегральной функции.

Выберем числа N и M достаточно большими. Согласно теореме Коши о вычетах, значение интеграла по замкнутому контуру равно сумме вычетов в особых точках, расположенных внутри контура. При этом интеграл по всему контуру можно представить как сумму интегралов по его составляющим:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} f(z) dz. \quad (5)$$

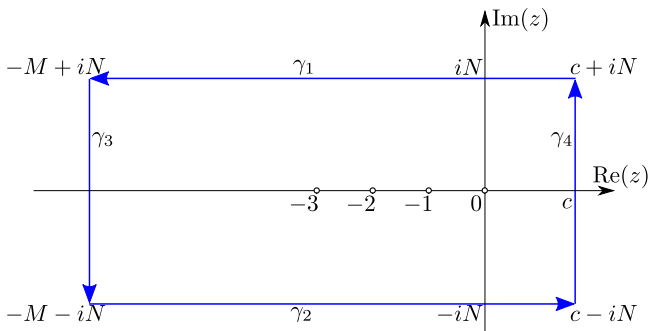


Рис. 1. Контур интегрирования [Fig. 1. Integration contour]

Пусть $\tau_k(n)$ обозначает количество решений в натуральных числах уравнения

$$x_1 x_2 \cdots x_k = n,$$

где $k, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, функция $\tau_k(n)$ определяет число способов разложения натурального числа n в произведение k натуральных сомножителей.

Далее будем рассматривать $W(m, k, f)$, где положим $f(t) = \tau_k(t)$. В утверждении присутствует конечная сумма, верхний предел которой можно устремить к бесконечности. Поскольку

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} = \sum_{t=1}^{m-1} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} + \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}},$$

справедливо равенство

$$\sum_{t=1}^{m-1} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} - \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}}. \quad (6)$$

Учитывая, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\tau_k(t) \ll C_\varepsilon t^\varepsilon$ [6], из (6) получаем асимптотическую оценку по z :

$$\left| \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} \right| \ll C_\varepsilon \sum_{t=m}^{\infty} \frac{1}{t^{2\operatorname{Re} z - k - \varepsilon}},$$

где ряд в правой части сходится при $\operatorname{Re} z > (1+k)/2 + \varepsilon/2$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{t=m}^{\infty} \frac{\tau_k(t)}{t^{2z-k}} = 0.$$

Известно [6], что для $n \in \mathbb{N}$ ряд Дирихле для $\tau_n(t)$ выражается через дзета-функцию Римана:

$$\zeta^n(z) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\tau_n(t)}{t^z}.$$

Тогда можем записать:

$$W(m, k, \tau_n(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z-k) dz.$$

Отметим, что функцию, определяемую рядом Дирихле, можно аналитически продолжить левее точки $z = (1+k)/2$ [6].

Оценим интеграл по контуру $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t + iN, t \in [1/2, -\infty)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z-k) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2}^{-\infty} \Gamma(t + iN) (2m)^{t+iN} \zeta^n(2t + 2iN - k) dt \ll \end{aligned}$$

$$\ll e^{-N\pi/2}(N^{1/2} \ln N)^n \int_{1/2}^{-\infty} (|t + iN| + 1)^{t-1/2} (2m)^t dt. \quad (7)$$

При $N \rightarrow \infty$ правая часть оценки (7) стремится к нулю благодаря экспоненциальному множителю. Интеграл по контуру $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = t - iN, t \in [1/2, -\infty)\}$ оценивается аналогичным образом.

Далее оценим интеграл по контуру $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1/2 + it - M, t \in (N, -N)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z - k) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_N^{-N} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it - M\right) (2m)^{1/2+it-M} \zeta^n(1 + 2it - 2M - k) dt \ll \\ &\ll \frac{(2m)^{1/2-M}}{(M-1)!} \int_N^{-N} e^{-t\pi/2} (t^{2M} \ln t)^n dt. \end{aligned} \quad (8)$$

При $M \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ интеграл (8) стремится к нулю.

Рассмотрим теперь интеграл по контуру $\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 1/2 + it, t \in (-N, N)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_4} \Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z - k) dz &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-N}^N \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) (2m)^{1/2+it} \zeta^n\left(\frac{1}{2} + it - k\right) dz. \end{aligned}$$

Согласно (5), данный интеграл полностью определяется вычетами в особых точках подынтегральной функции. В точке $z = -j$ имеем следующий вычет:

$$\operatorname{Res}_{z=-j} (\Gamma(z) (2m)^z \zeta^n(2z - k)) = \frac{(-1)^j}{j! (2m)^j} \left(\frac{B_{2j+k+1}}{2j+k+1} \right)^n,$$

где B_{2j+k+1} — числа Бернулли.

Далее, подынтегральное выражение имеет полюс в точке $z = (k+1)/2$. Для нахождения вычета выполним замену $w = (z - (k+1))/2$ и разложим подынтегральную функцию в ряд Лорана:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(w + \frac{k+1}{2}\right) (2m)^{w+(k+1)/2} \zeta^n(2w+1) &= \\ &= \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left(1 + w\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + O(w^2)\right) \times \\ &\times (2m)^{(k+1)/2} (1 + w \ln 2m + O(w^2)) \left(\frac{1}{2w} + \gamma + O(w)\right)^n, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$, γ — постоянная Эйлера.

Рассмотрим последний сомножитель в (9) и применим бином Ньютона

$$\left(\frac{1}{2w} + \gamma\right)^n = \sum_{p=0}^n \frac{C_n^p}{(2w)^{n-p}} \gamma^p,$$

выделяя слагаемые

$$C_n^{n-2} \left(\frac{1}{2w} \right)^{n-(n-2)} \gamma^{n-2} + C_n^{n-1} \left(\frac{1}{2w} \right)^{n-(n-1)} \gamma^{n-1} = \frac{n(n-1)\gamma^{n-2}}{8w^2} + \frac{n\gamma^{n-1}}{2w},$$

которых достаточно для того, чтобы найти вычет в точке $z = (k+1)/2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=(k+1)/2} (\Gamma(z)(2m)^z \zeta^n(2z-k)) &= \\ &= \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2} \left(1 + w\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + O(w^2)\right) \times \\ &\times (1 + w \ln 2m + O(w^2)) \left(\frac{n(n-1)\gamma^{n-2}}{8w^2} + \frac{n\gamma^{n-1}}{2w}\right) \approx \\ &\approx \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2} \left(\frac{n(n-1)\gamma^{n-2}}{8} \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m\right) + \frac{n\gamma^{n-1}}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Формула (10) позволяет анализировать все подобные интегралы в точке $z = (k+1)/2$ при $n \geq 1$. Например, для $n = 1$:

$$\operatorname{Res}_{z=(k+1)/2} (\Gamma(z)(2m)^z \zeta(2z-k)) \approx \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2},$$

что согласуется с известными результатами из [4, 7].

При $n = 2$ вычет в точке $z = (k+1)/2$ вычисляется так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=(k+1)/2} (\Gamma(z)(2m)^z \zeta^2(2z-k)) &\approx \\ &\approx \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) (2m)^{(k+1)/2} \left(\frac{1}{4} \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m\right) + \gamma\right). \end{aligned}$$

Формула (10) позволяет находить оценки для случаев, когда подынтегральное выражение содержит многочлен от дзета-функции Римана:

$$\Omega_q(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z)(2m)^z P_q(\zeta(2z-k)) dz,$$

где

$$P_q(\zeta(2z-k)) = \sum_{l=0}^q p_l \zeta^l(2z-k).$$

В случае $q = 3$

$$\begin{aligned} \Omega_3(m) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z)(2m)^z P_3(\zeta(2z-k)) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \Gamma(z)(2m)^z (p_0 + p_1 \zeta(2z-k) + p_2 \zeta^2(2z-k) + p_3 \zeta^3(2z-k)) dz \end{aligned}$$

оценка в точке $z = (k+1)/2$ определяется выражением

$$\Omega_3(m) \approx \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)(2m)^{(k+1)/2} \left[p_0 + \frac{1}{2}p_1 + p_2 \left(\frac{1}{4} \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m \right) + \gamma \right) + p_3 \left(\frac{3}{4} \gamma \left(\psi\left(\frac{k+1}{2}\right) + \ln 2m \right) + \frac{3}{2} \gamma^2 \right) \right].$$

Закключение. В работе предложен метод вычисления асимптотического поведения конечных сумм специального вида, основанный на сведении исходной суммы к комплексному интегралу. Ключевой особенностью исследуемого интеграла является наличие в подынтегральном выражении полинома от дзета-функции Римана.

Основные результаты работы включают:

- разработку алгоритма вычисления асимптотического значения суммы через анализ особенностей подынтегральной функции;
- явное получение асимптотических выражений для случая полинома третьей степени от дзета-функции;
- анализ вычетов в особых точках, определяющих главный член асимптотики.

Полученные результаты могут быть применены для анализа сложности алгоритмов, связанных с обходом бинарных деревьев и задачами лучевого поиска, где возникают суммы рассматриваемого типа.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Библиографический список

1. Laurinćikas A., Šiaučiūnas D. The mean square of the Hurwitz zeta-function in short intervals // *Axioms*, 2024. vol. 13, no. 8, 510. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13080510>.
2. Batır N. Choi J. Parameterized finite binomial sums // *Mathematics*, 2024. vol. 12, no. 16, 2450. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12162450>.
3. Zhao J. Finite and symmetric Euler sums and finite and symmetric (alternating) multiple T -values // *Axioms*, 2024. vol. 13, no. 4, 210. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13040210>.
4. Knuth D. E. *The Art of Computer Programming*. vol. 3: Sorting and Searching. Bonn: Addison-Wesley, 1997. 736 pp.
5. Евграфов М. А. *Асимптотические оценки и целые функции*. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. Чанга М. Е. Метод комплексного интегрирования / Лекц. курсы НОЦ, Т. 2. М.: МИАН, 2006. С. 3–56. EDN: TSOANP. DOI: <https://doi.org/10.4213/1kn2>.
7. Соломинов В. М., Романенков А. М. Методы аналитической теории чисел для асимптотического анализа пузырьковой сортировки / *Стратегии развития науки и образования в XXI веке*. Смоленск, 2016. С. 119–128. EDN: XVXECL.

MSC: 30E15, 11N37, 11M06

Asymptotics of sums with Gaussian kernel and multiplicative coefficients

A. S. Zinchenko, A. M. Romanenkov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

This study deals with the asymptotic behavior of finite sums containing a Gaussian function and a multiplicative term. Such sums naturally arise in complexity analysis of binary tree traversal and ray searching algorithms. Using the method of complex integration, we transform the discrete finite sum into an integral along an infinite vertical line in the complex plane. We demonstrate that the integrand contains a positive integer power of the Riemann zeta function. By applying standard residue calculation techniques, we obtain the asymptotic value of this integral.

Keywords: asymptotic analysis, finite sums, Gaussian kernel, multiplicative coefficients, complex integration method, Riemann zeta function.

Received: 6th September, 2024 / Revised: 21st January, 2025 /

Accepted: 21st February, 2025 / First online: 6th May, 2025

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zinchenko A. S., Romanenkov A. M. Asymptotics of sums with Gaussian kernel and multiplicative coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 381–389. EDN: BCHVZM. DOI: 10.14498/vsgtu2113 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander S. Zinchenko  <https://orcid.org/0000-0001-7971-4572>

Cand. Econom. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics; e-mail: zinchenkoas@mai.ru

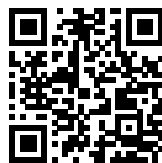
Alexander M. Romanenkov  <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematics;

e-mail: romanaleks@gmail.com

References

1. Laurinćikas A., Šiaučiūnas D. The mean square of the Hurwitz zeta-function in short intervals, *Axioms*, 2024, vol. 13, no. 8, 510. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13080510>.
2. Batır N. Choi J. Parameterized finite binomial sums, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 16, 2450. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12162450>.
3. Zhao J. Finite and symmetric Euler sums and finite and symmetric (alternating) multiple T -values, *Axioms*, 2024, vol. 13, no. 4, 210. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms13040210>.
4. Knuth D. E. *The Art of Computer Programming*, vol. 3, Sorting and Searching. Bonn, Addison-Wesley, 1997, 736 pp.
5. Evgrafov M. A. *Asymptotic Estimates and Entire Functions*. Mineola, NY, Dover Publ., 2020, x+181 pp.
6. Changa M. E. Method of complex integration, *Lekts. Kursy NOC*, 2. Moscow, Steklov Math. Institute of RAS, 2006, pp. 3–56 (In Russian). EDN: TSOANP. DOI: <https://doi.org/10.4213/1kn2>.
7. Solominov V. M., Romanenkov A. M. Methods of analytic number theory for asymptotic analysis of bubble sort, In: *Development Strategies of Science and Education in the 21st Century*. Smolensk, 2016, pp. 119–128 (In Russian). EDN: XVXECL.



УДК 519.868

Стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта и производственных ресурсов региона

Л. А. Сараев, А. В. Юкласова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, Самара, ул. Московское ш., 34.

Аннотация

Представлена стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта (ВРП), разработанная на основе статистических данных по Самарской области за период 1998–2023 годы. Модель позволяет оценить влияние инвестиций на развитие региональной экономики. Для описания динамики ВРП предложено стохастическое дифференциальное уравнение баланса, связывающее показатели ВРП с объемами регионального производственного ресурса (РПР). В рамках исследования проведена оценка объемов РПР, построены теоретические траектории динамики ВРП и РПР, а также получены кривые математических ожиданий их роста. Результаты численного анализа модели демонстрируют высокую степень соответствия эмпирическим данным.

Ключевые слова: валовой региональный продукт, региональные производственные ресурсы, инвестиционный коэффициент, коэффициент амортизации, производственная функция Кобба–Дугласа, стохастическое дифференциальное уравнение, стохастические траектории.

Получение: 6 сентября 2024 г. / Исправление: 21 января 2025 г. /
Принятие: 21 февраля 2025 г. / Публикация онлайн: 6 мая 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сараев Л. А., Юкласова А. В. Стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта и производственных ресурсов региона // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 390–400. EDN: ATCNTU. DOI: 10.14498/vsgtu2128.

Сведения об авторах

Леонид Александрович Сараев <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор; кафедра математики и бизнес-информатики; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Анастасия Валерьевна Юкласова <https://orcid.org/0009-0007-9684-8864>

кандидат экономических наук, доцент; доцент; кафедра государственного и муниципального управления; e-mail: yuklasova.anasta@mail.ru

Введение. Устойчивый экономический рост регионов составляет основу стабильного развития национальной экономики в целом.

Разработка экономико-математических методов прогнозирования динамики регионального развития представляет собой одну из наиболее актуальных задач современной экономической теории. Решение данной задачи позволяет осуществлять комплексный анализ бизнес-процессов, определять оптимальные параметры производства валового регионального продукта (ВРП) и объемов региональных производственных ресурсов (РПР).

Фундаментальные положения теории экономического роста систем подробно изложены в работах [1, 2 и др.].

На основе этих исследований разработан широкий спектр моделей экономического роста, учитывающих влияние технологических инноваций и информационных технологий [3–13].

Региональная экономическая динамика по своей природе имеет стохастический характер, обусловленный взаимодействием инвестиционных потоков и амортизационных отчислений. В связи с этим основным математическим аппаратом для моделирования экономического развития предприятий выступает теория стохастических дифференциальных уравнений и их систем [14–16].

Целью настоящего исследования является разработка инновационной стохастической модели прогнозирования динамики ВРП и РПР под воздействием инвестиционных факторов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим объем валового регионального продукта V , определяемый объемами производственных ресурсов региона. К указанным ресурсам относятся: основной капитал, производственные фонды, трудовые ресурсы, материальные затраты, применяемые технологии и инновации.

Данные ресурсы могут быть агрегированы в интегральный показатель — региональный производственный ресурс, характеризуемый объемом производственного фактора Q .

Объем ВРП региона V задается производственной функцией от фактора производства Q . В рамках исследования ограничимся классической производственной функцией Кобба–Дугласа:

$$V = PQ^a, \quad (1)$$

где P — стоимость продукции на единицу ресурса; a — коэффициент эластичности выпуска по ресурсу Q , причем $0 \leq a \leq 1$.

Объем производственного фактора $Q = Q(t)$ представляет собой непрерывно дифференцируемую и ограниченную функцию на временной полуоси $t \in [0, \infty)$.

Величина РПР удовлетворяет ограничению

$$Q_0 \leq Q(t) \leq Q_\infty,$$

где Q_0 — известное начальное значение производственного фактора; Q_∞ — его предельное значение, подлежащее определению.

Для анализа динамики ВРП региона необходимо сформулировать уравнение баланса для объема производственного фактора $Q = Q(t)$.

Приращение объема РПП $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ за малый временной интервал Δt может быть представлено в виде трех компонент:

$$\Delta Q(t) = \Delta Q^A(t) + \Delta Q^I(t) + \Delta Q^W(t), \quad (2)$$

где $\Delta Q^A(t)$ — уменьшение объема производственного фактора вследствие амортизации; $\Delta Q^I(t)$ — прирост объема производственного фактора за счет инвестиций в промышленный комплекс региона; $\Delta Q^W(t)$ — стохастическая компонента, отражающая случайные колебания РПП.

Компонента амортизации за интервал Δt описывается выражением

$$\Delta Q^A(t) = -AQ(t)\Delta t, \quad (3)$$

где A — коэффициент амортизации, определяющий долю выбывающего объема производственного фактора в единицу времени.

Приращение инвестиционной составляющей за временной интервал Δt определяется соотношением

$$\Delta Q^I(t) = I(t)\Delta t = BV(t)\Delta t = BPQ^a(t)\Delta t, \quad (4)$$

где $I(t)$ — объем инвестиций в момент времени t ; B — коэффициент капиталообразования (доля ВРП, направляемая в инвестиции); $V(t)$ — объем ВРП, вычисляемый согласно производственной функции (1).

Стохастическая компонента $\Delta Q^W(t)$, отражающая естественную волатильность инвестиционных процессов, моделируется стандартным винеровским процессом [15, 16]:

$$\Delta Q^W(t) = \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \Delta w, \quad (5)$$

где w — стандартный винеровский процесс; $\Delta w = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ — приращение винеровского процесса; ρ — параметр волатильности (СКО случайных колебаний РПП); $\varepsilon \sim N(0, 1)$ — стандартная нормальная случайная величина.

Из структуры уравнения (5) следует важное свойство модели: в окрестностях начального Q_0 и предельного Q_∞ значений производственного фактора система демонстрирует квазидетерминированное поведение.

Подстановка выражений (3), (4) и (5) в уравнение баланса (2) приводит к следующему соотношению:

$$\Delta Q(t) = (-AQ(t) + BPQ^a(t))\Delta t + \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \Delta w. \quad (6)$$

Выполняя предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta w \rightarrow 0$ в соотношении (6), получаем стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито [14]:

$$dQ(t) = S(t)dt + Z(t)dw, \quad (7)$$

где

$$S(t) = -AQ(t) + BPQ^a(t), \quad (8)$$

$$Z(t) = \rho(Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right), \quad (9)$$

причем $S(t)$ представляет собой функцию сноса, а $Z(t)$ — функцию волатильности.

Начальное условие для уравнения (7) задается следующим образом:

$$Q(0) = Q_0. \quad (10)$$

2. Стохастические траектории динамики ВРП. Анализ структуры стохастического дифференциального уравнения баланса (7) позволяет установить, что рост объема производственного фактора $Q(t)$ происходит при выполнении условия $dQ(t) \geq 0$, что соответствует случаю, когда объем внутренних инвестиций превышает амортизационные отчисления.

Рост объема прекращается при достижении предельного значения Q_∞ , когда инвестиции компенсируют амортизационные потери. В окрестности этой предельной точки случайный процесс становится квазидетерминированным, что позволяет определить Q_∞ из уравнения

$$-AQ_\infty + BPQ_\infty^a = 0,$$

решение которого имеет вид

$$Q_\infty = \left(\frac{BP}{A}\right)^{1/(1-a)}. \quad (11)$$

Численное решение стохастического дифференциального уравнения (7) с коэффициентами (8), (9) при начальном условии (10) реализуется на временном интервале $[t_0, t_n]$, дискретизированном точками $(t_0 < t_1 < \dots < t_n)$, с использованием метода Эйлера—Маруямы [14]:

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i + S_i \Delta t_i + \varepsilon_i Z_i \sqrt{\Delta t_i}, \\ S_i = -AQ_i + BPQ_i^a, \\ Z_i = \rho(Q_i - Q_0) \left(1 - \frac{Q_i}{Q_\infty}\right), \end{cases} \quad (12)$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ — шаг дискретизации; $Q_i = Q(t_i)$, $S_i = S(t_i)$, $Z_i = Z(t_i)$ — значения соответствующих функций; ε_i — реализация стандартной нормальной случайной величины на интервале $[t_{i-1}, t_i]$.

Реализация алгоритма (12) позволяет получить набор случайных точек $\{(t_i, Q_i)\}_{i=0}^n$ и соответствующие стохастические траектории динамики производственного фактора.

Для определения математического ожидания процесса $Q(t)$ проведем статистическое усреднение уравнения (7) с учетом выражений (8) и (9):

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\langle Q \rangle + BP\langle Q^a \rangle, \quad (13)$$

где $\langle \cdot \rangle$ обозначает оператор математического ожидания.

При вычислении статистического момента $\langle Q^a \rangle$ методом последовательных приближений возникает проблема замыкания бесконечной цепочки уравнений. Для ее решения введем следующее предположение о характере флуктуаций:

$$Q(t) - \langle Q \rangle = \xi \langle Q \rangle \varepsilon(t), \quad (14)$$

где $\varepsilon(t)$ — стандартный случайный процесс с нулевым средним, а безразмерный коэффициент пропорциональности ξ задается выражением

$$\xi = \rho \left(1 - \frac{Q_0}{\langle Q \rangle} \right) \left(1 - \frac{\langle Q \rangle}{Q_\infty} \right). \quad (15)$$

Для вычисления величины $Q^a = \langle Q \rangle^a (1 + \xi \cdot \varepsilon)^a$ воспользуемся соотношениями (14) и (15), применив разложение в биномиальный ряд при условии малых флуктуаций $|\xi \varepsilon| < 1$:

$$Q^a = \langle Q \rangle^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2) \cdots (a-k+1)}{k!} \xi^k \varepsilon^k.$$

Ограничиваясь квадратичными членами разложения, получаем

$$Q^a \approx \langle Q \rangle^a \left(1 + a\xi\varepsilon + \frac{a(a-1)}{2} \xi^2 \varepsilon^2 \right). \quad (16)$$

Статистическое усреднение выражения (16) с учетом свойств случайной величины ε ($\langle \varepsilon \rangle = 0$, $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$) дает

$$\langle Q^a \rangle = \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \xi^2 \right). \quad (17)$$

Подстановка (17) в уравнение (13) приводит к замкнутому дифференциальному уравнению для математического ожидания:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\langle Q \rangle + BP\langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \xi^2 \right), \quad (18)$$

где коэффициент ξ определяется согласно (15). Начальное условие сохраняется в виде (10).

В детерминированном приближении, когда флуктуациями можно пренебречь ($\xi \rightarrow 0$), уравнение (18) упрощается до вида

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\langle Q \rangle + BP\langle Q \rangle^a. \quad (19)$$

Решение задачи Коши для уравнения (19) с начальным условием (10) имеет аналитическое представление:

$$\langle Q \rangle(t) = (Q_\infty^{1-a} + (Q_0^{1-a} - Q_\infty^{1-a})e^{-A(1-a)t})^{1/(1-a)}, \quad (20)$$

где Q_∞ определяется выражением (11).

Соответствующее среднее значение объема ВРП региона вычисляется по формуле

$$\langle V \rangle(t) = P(Q_{\infty}^{1-a} + (Q_0^{1-a} - Q_{\infty}^{1-a})e^{-A(1-a)t})^{a/(1-a)}.$$
 (21)

Применим полученные теоретические результаты (уравнения (12), (13), (18)–(21)) для анализа динамики ВРП и РПР Самарской области.

Исходные статистические данные¹ об изменении объема ВРП за период 1998–2023 гг. представлены в табл. 1, где $t = T - 1998$ — относительный год наблюдения; $T \geq 1998$ — календарный год.

Методом наименьших квадратов на основе данных табл. 1 и теоретической зависимости (21) были оценены параметры производственной функции: $P = 6.4928$, $a = 0.81454$, $Q_0 = 17.724$.

Таблица 1

Динамика валового регионального продукта $V(t)$ Самарской области в период 1998–2023 гг.
[Evolution of the Gross Regional Product $V(t)$ in Samara Region (1998–2023)]

Year	t	V , mln RUB	Year	t	V , mln RUB	Year	t	V , mln RUB
1998	0	67.520	2007	9	584.969	2016	18	1364.822
1999	1	105.581	2008	10	699.296	2017	19	1449.006
2000	2	140.407	2009	11	584.000	2018	20	1625.559
2001	3	180.049	2010	12	695.651	2019	21	1773.989
2002	4	206.320	2011	13	834.149	2020	22	1781.909
2003	5	256.555	2012	14	937.435	2021	23	2157.662
2004	6	327.119	2013	15	1048.546	2022	24	2378.451
2005	7	401.812	2014	16	1149.148	2023	25	2746.426
2006	8	487.714	2015	17	1264.910	2024	26	—

Таблица 2

Динамика регионального производственного ресурса $Q(t)$ Самарской области в период 1998–2023 гг. [Evolution of the Regional Productive Capacity $Q(t)$ in Samara region (1998–2023)]

Year	t	Q , mln RUB	Year	t	Q , mln RUB	Year	t	Q , mln RUB
1998	0	17.724	2007	9	251.058	2016	18	710.389
1999	1	30.685	2008	10	312.575	2017	19	764.555
2000	2	43.543	2009	11	250.547	2018	20	880.462
2001	3	59.089	2010	12	310.577	2019	21	980.167
2002	4	69.844	2011	13	388.128	2020	22	985.542
2003	5	91.267	2012	14	447.936	2021	23	1246.504
2004	6	122.990	2013	15	513.971	2022	24	1404.877
2005	7	158.316	2014	16	575.158	2023	25	1676.243
2006	8	200.828	2015	17	647.086	2024	26	—

Примечание: Данные представлены в фактических ценах соответствующих лет. Периодизация дана в абсолютных (календарные годы) и относительных ($t = 0$ для 1998 года) показателях.

Note: Data are presented in current prices of respective years. The periodization is given in both absolute (calendar years) and relative terms ($t = 0$ for 1998).

¹Статистические данные получены с официального сайта Территориального органа Федеральной службы государственной статистики по Самарской области: «Валовой региональный продукт» [Электронный ресурс]. URL: <https://63.rosstat.gov.ru/grp> (дата обращения: 05.11.2024).

С учетом полученных оценок производственная функция (1) принимает конкретный вид:

$$V(t) = 6.4928 \cdot Q^{0.81454}(t). \quad (22)$$

С помощью формулы (22) вычислены прогнозные значения объемов регионального производственного ресурса Q , представленные в табл. 2.

На рис. 1 показаны траектория роста объема валового регионального продукта $V(t)$, построенная по данным табл. 1, и прогнозная траектория роста объема регионального производственного ресурса $Q(t)$, рассчитанная по данным табл. 2.

На рис. 2 представлено сравнение стохастических траекторий роста объема валового регионального продукта $V(t)$ и объема регионального производственного ресурса $Q(t)$, полученных численной реализацией алгоритма (12) и расчетами по формуле (22), со статистическими данными табл. 1 и 2.

На рис. 3 приведено сравнение математических ожиданий роста объема валового регионального продукта $\langle V \rangle$ и объема регионального производственного ресурса $\langle Q \rangle$, рассчитанных путем численного решения задачи Коши (18), (10) с использованием формулы (22), со статистическими данными табл. 1 и табл. 2.

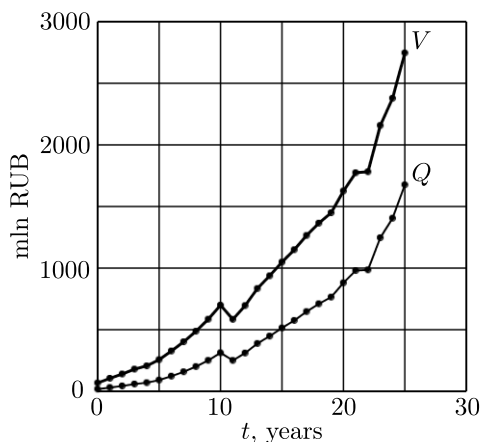


Рис. 1. Эмпирическая траектория роста валового регионального продукта V (по данным табл. 1) и прогнозируемая траектория роста регионального производственного ресурса Q (по данным табл. 2)

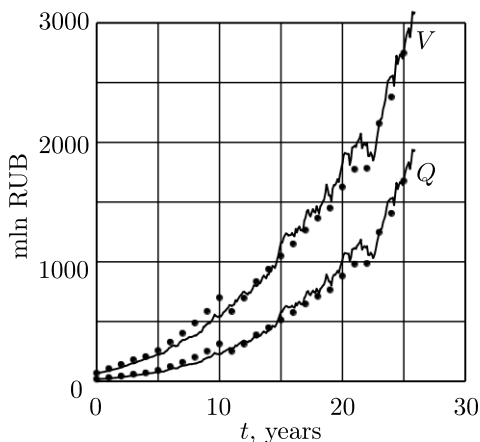


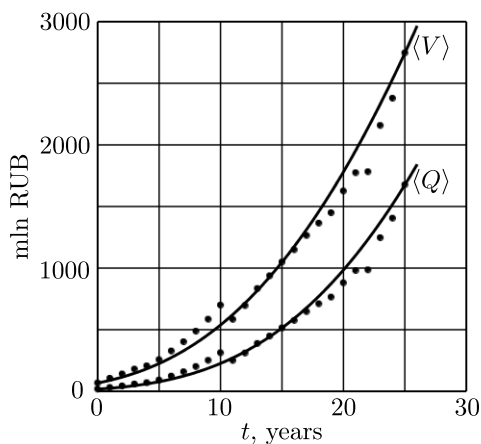
Рис. 2. Стохастические траектории роста валового регионального продукта $V(t)$ и регионального производственного ресурса $Q(t)$, полученные численным моделированием по алгоритму (12) и расчетами по формуле (22); точки — статистические данные из табл. 1 и табл. 2

[Figure 1. Empirical trajectory of gross regional product V growth (according to Table 1) and predicted trajectory of regional production resource Q growth (according to Table 2)]

[Figure 2. Stochastic growth trajectories of gross regional product $V(t)$ and regional production resource $Q(t)$ obtained through: numerical simulation using algorithm (12), and calculations via formula (22); points represent statistical data from Tables 1 and 2]

Рис. 3. Математические ожидания $\langle V \rangle$ и $\langle Q \rangle$, полученные численным решением задачи Коши (18), (10) с использованием (22); точки — статистические данные из табл. 1 и табл. 2

[Figure 3. Mathematical expectations $\langle V \rangle$ and $\langle Q \rangle$ obtained by numerical solution of the Cauchy problem (18), (10) using (22); points represent statistical data from Tables 1 and 2]



В расчетах использованы следующие значения параметров модели:

$$P = 6.4928, \quad a = 0.81454, \quad A = 0.1, \quad B = 0.12, \\ \rho = 0.1, \quad Q_0 = 17.724, \quad Q_\infty = 64187.494.$$

Закключение. В работе предложена стохастическая модель прогнозирования динамики валового регионального продукта, разработанная на основе статистических данных Самарской области за 1998-2023 гг. Модель позволяет оценивать объемы регионального производственного ресурса с учетом стохастических факторов, строить теоретические траектории динамики ВРП и РПР и прогнозировать математические ожидания роста экономических показателей.

Численное моделирование подтвердило адекватность модели — результаты демонстрируют высокую степень соответствия статистическим данным. Полученные результаты могут быть использованы для долгосрочного прогнозирования регионального экономического развития, оценки эффективности инвестиционных программ и анализа устойчивости региональной экономики к стохастическим колебаниям.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением модели для учета дополнительных экономических факторов и применением к другим регионам.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford: Clarendon Press, 1936. 248 pp.
2. Dykas P., Tokarski T., Wisla R. *The Solow Model of Economic Growth. Application to Contemporary Macroeconomic Issues* / Routledge Studies in Economic Theory, Method and Phi-

- losophy. London: Routledge, 2023. xvi+248 pp. <https://hdl.handle.net/10419/290597>. DOI: <https://doi.org/10.4324/9781003323792>.
3. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth // *The American Economic Review*, 1980. vol. 70, no. 2. pp. 220–224. <http://www.jstor.org/stable/1815471>.
4. Lucas R. E. On the mechanics of economic development // *Journal of Monetary Economics*, 1988. vol. 22, no. 1. pp. 3–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
5. Romer R. M. Endogenous technological change // *Journal of Political Economy*, 1990. vol. 98, no. 5. pp. S71–S102. <http://www.jstor.org/stable/2937632>.
6. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1991. xiv+359 pp.
7. Barro R. J., Sala-i-Martin X. *Economic Growth*. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 1995. xvii+654 pp.
8. Bruno M., Easterly W. Inflation crises and long-run growth // *Journal of Monetary Economics*. vol. 41, no. 1. pp. 3–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-3932\(97\)00063-9](https://doi.org/10.1016/s0304-3932(97)00063-9).
9. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence // *Structural Change and Economic Dynamics*, 2004. vol. 15, no. 4. pp. 401–420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
10. Королев А. В., Матвеев В. Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // *Автоматика и телемеханика*, 2006. № 4. С. 106–114. EDN: NCSKJH.
11. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // *Экономический анализ: теория и практика*, 2007. № 5. С. 23–30. EDN: HWIKHF.
12. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2012. № 4. С. 46–57. EDN: PFQNBТ.
13. Прасолов А. В. *Математические методы экономической динамики*. СПб.: Лань, 2015. 352 с. EDN: VLRGLN.
14. Itô K., McKean H. P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths* / Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. vol. 125. Berlin: Springer-Verlag, 1974. xiv+321 pp.
15. Соловьев В. И. *Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения*. М.: Вега–Инфо, 2009. 176 с. EDN: QTSXXZ.
16. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. EDN: MLТMBA. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>.

MSC: 91B64, 91B70, 37N40, 62P20

Stochastic model for forecasting the dynamics of gross regional product and regional production resources

L. A. Saraev, A. V. Yuklasova

Samara National Research University,

34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The article presents a stochastic model for forecasting dynamics of gross regional product (GRP), developed using statistical data from Samara Region for the period 1998–2023. The model enables assessment of investment impact on regional economic development. To describe GRP dynamics, we propose a stochastic differential balance equation that relates GRP indicators to regional production resource (RPR) volumes. Within the study, we have: (1) estimated RPR volumes, (2) constructed theoretical trajectories of GRP and RPR dynamics, and (3) derived mathematical expectation curves for their growth. Numerical analysis demonstrates the model's high consistency with empirical data.

Keywords: gross regional product, regional production resources, investment coefficient, depreciation rate, Cobb–Douglas production function, stochastic differential equation, stochastic trajectories.

Received: 5th November, 2024 / Revised: 21st March, 2025 /

Accepted: 15th April, 2025 / First online: 3rd June, 2025

Competing interests. We have no conflicts of interest concerning the authorship and publication of this article.

Author contributions and accountability. All authors participated in developing the article concept and writing the manuscript. The authors take full responsibility for

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

   The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Saraev L. A., Yuklasova L. A. Stochastic model for forecasting the dynamics of gross regional product and regional production resources, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 390–400. EDN: ATCNTU. DOI: 10.14498/vsgtu2128 (In Russian).

Authors' Details:

Leonid A. Saraev  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of Mathematics and Business Informatics;
e-mail: saraev_leo@mail.ru

Anastasiya V. Yuklasova  <https://orcid.org/0009-0007-9684-8864>

Cand. Econ. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of State and Municipal Administration; e-mail: yuklasova.anasta@mail.ru

submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without external funding.

References

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford, Clarendon Press, 1936, 248 pp.
2. Dykas P., Tokarski T., Wisla R. *The Solow Model of Economic Growth. Application to Contemporary Macroeconomic Issues*, Routledge Studies in Economic Theory, Method and Philosophy. London, Routledge, 2023, xvi+248 pp. <https://hdl.handle.net/10419/290597>. DOI: <https://doi.org/10.4324/9781003323792>.
3. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth, *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, no. 2, pp. 220–224. <http://www.jstor.org/stable/1815471>.
4. Lucas R. E. On the mechanics of economic development, *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 22, no. 1, pp. 3–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(88\)90168-7](https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7).
5. Romer R. M. Endogenous technological change, *Journal of Political Economy*, 1990, vol. 98, no. 5, pp. S71–S102. <http://www.jstor.org/stable/2937632>.
6. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, Massachusetts, London, MIT Press, 1991, xiv+359 pp.
7. Barro R. J., Sala-i-Martin X. *Economic Growth*. Cambridge, Massachusetts, London, MIT Press, 1995, xvii+654 pp.
8. Bruno M., Easterly W. Inflation crises and long-run growth, *Journal of Monetary Economics*, vol. 41, no. 1, pp. 3–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-3932\(97\)00063-9](https://doi.org/10.1016/s0304-3932(97)00063-9).
9. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence, *Structural Change and Economic Dynamics*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 401–420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
10. Korolev A. V., Matveenkov V. D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model, *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 4, pp. 624–633. EDN: LJYCZD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117906040102>.
11. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. Comparative analysis of simulation modeling packages and computer mathematics systems for economic growth theory models, *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2007, no. 5, pp. 23–30 (In Russian). EDN: HWIKHF.
12. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya*, 2012, no. 4, pp. 46–57 (In Russian). EDN: PFQNB7.
13. Prasolov A. V. *Matematicheskiye metody ekonomicheskoy dinamiki* [Mathematical Methods in Economic Dynamics]. St. Petersburg, Lan', 2015, 352 pp. (In Russian). EDN: VLRGLN.
14. Itô K., McKean H. P. *Diffusion Processes and Their Sample Paths*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 125. Berlin, Springer-Verlag, 1974, xiv+321 pp.
15. Solov'ev V. I. *Ekonomiko-matematicheskoye modelirovaniye rynka programmnoy obespecheniya* [Economic-Mathematical Modeling of the Software Market]. Moscow, Vega–Info, 2009, 176 pp. (In Russian). EDN: QTSXXZ.
16. Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. EDN: MLTMB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>.

Подписной индекс 18108

ISSN 1991-8615 (print)

02



9 771991 861253



Цена свободная