

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 29, № 3 – 2025

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Сентябрь — 2025

Серия
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 29, № 3/80 – 2025)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)

Редакционная коллегия:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. Делл Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- С. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- В. Э. Келлер — д.ф.-м.н., доц. (Пермь, Россия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- Д. С. Лисовенко — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., в.н.с. (Москва, Россия)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. Рамачандран — доктор наук (Ченнай, Индия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 29, № 3/80 – 2025)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 22 сентября 2025 г.

Дата выхода в свет 15 октября 2025 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 13.00. Уч.-изд. л. 12.97.

Тираж 500 экз. Рег. № 175/25.

Заказ № 342.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге агентства «Урал-Пресс» 18108 Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
September — 2025

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2025, vol. 29, no. 3

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- I. E. Keller (Perm', Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. Imatani (Kyoto, Japan)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenkov (Perm, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- V. Ramachandran (Chennai, India)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- P. V. Sevastyanov (Częstochowa, Poland)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Арзикулов З. О., Хасанов А., Эргашев Т. Г. “Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами” 407

Механика деформируемого твёрдого тела

Кочетков А. В., Модин И. А., Баландин В. В., Баландин Вл. Вл., Бессмертный К. Д. “Ударное взаимодействие гранулированной среды и стержня с оголовком конусной формы” 430

Мехоношин К. А., Трусов П. В. “Структурно-механическая модель для описания эффекта Портевена–Ле Шателье” 448

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. “Поправки четвертой степени в энергетических потенциалах гемитропных микрополярных тел” 472

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. “Неоднородное течение Экмана” . 486

Королева М. Р. “Приближенное решение задачи Римана для неклассической газовой динамики” 503

Черепанов В. В. “Моделирование зоны возмущения разреженной многокомпонентной низкотемпературной плазмы неподвижным симметричным телом” . . 516

Энатская Н. Ю. “Комбинаторный анализ n -размерной k -цикловой подстановки с ограниченными размерами циклов” 538

Краткие сообщения

Бейбалаев В. Д., Ибатов Т. И. “Начально-краевая задача для нестационарного уравнения теплопроводности в ограниченной области без тепловой изоляции боковой поверхности” 554

Зинченко А. С., Нехаев А. А., Романенков А. М. “О нахождении градиента в задаче управления колебаниями механических систем без трения” . . . 566

Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. “Прогнозирование ползучести и длительной прочности наводороженного титанового сплава ВТ6 по изделию-лидеру” 579

Крылов С. С., Мьоз А., Перепелкин В. В. “Моделирование чандлеровского и годичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты” 591

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

<i>Arzikulov Z. O., Hasanov A., Ergashev T. G.</i> “Confluent hypergeometric functions and their application to the solution of Dirichlet problem for the Helmholtz equation with three singular coefficients”	407
--	-----

Mechanics of Solids

<i>Kochetkov A. V., Modin I. A., Balandin V. V., Balandin Vl. Vl., Bes-smertnyi K. D.</i> “Impact interaction between granular media and a rod with conical head”	430
<i>Mekhonoshin K. A., Trusov P. V.</i> “Structural-mechanical model for describing the Portevin–Le Châtelier effect”	448
<i>Murashkin E. V., Radayev Yu. N.</i> “Quartic corrections in energy potentials of hemitropic micropolar solids”	472

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

<i>Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu.</i> “Inhomogeneous Ekman flow” . .	486
<i>Koroleva M. R.</i> “Approximate solution to the Riemann problem in non-classical gas dynamics”	503
<i>Cherepanov V. V.</i> “Modeling the perturbation zone of a rarefied multicomponent low-temperature plasma by a stationary symmetric body”	516
<i>Enatskaya N. Yu.</i> “Combinatorial analysis of n -sized k -cycle substitutions with restricted cycle sizes”	538

Short Communications

<i>Beybalaev V. D., Ibaov T. I.</i> “Initial-boundary value problem for nonstationary heat conduction equation in a bounded domain with non-insulated lateral surface”	554
<i>Zinchenko A. S., Nekhaev A. A., Romanenkov A. M.</i> “On determination of gradient in optimal control problems for frictionless mechanical oscillatory systems”	566
<i>Radchenko V. P., Afanaseva E. A., Saushkin M. N.</i> “Prediction of creep and long-term strength for hydrogen-charged VT6 Titanium alloy using a leader specimen”	579
<i>Krylov S. S., Myu Z. A., Perepelkin V. V.</i> “Modeling Chandler and annual polar motion with account for lunar orbit precession”	591



УДК 517.956

Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

З. О. Арзикулов¹, А. Хасанов^{2,4}, Т. Г. Эргашев^{2,3,4}

¹ Ферганский государственный технический университет, Узбекистан, 150107, Фергана, ул. Ферганская, 86.

² Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 9.

³ Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары-Ниязи, 39.

⁴ Гентский университет, Бельгия, 9000, Гент, ул. Синт-Питерснёвестрат, 33.

Аннотация

В ходе серии исследований, охватывающей период с 1889 по 1939 год, были систематически изучены все двойные гипергеометрические ряды второго порядка. Значительный вклад в развитие теории гипергеометрических функций двух переменных внес Горн, предложивший их классификацию на полные и конфлюэнтные функции. Составленный Горном список включает четырнадцать полных и двадцать конфлюэнтных функций двух переменных, причем последние являются предельными случаями полных функций. В 1985 году Сривастава и Карлссон завершили построение полного набора гипергеометрических функций второго порядка трех переменных, однако аналогичная классификация для

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Арзикулов З. О., Хасанов А., Эргашев Т. Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции и их применение к решению задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 3. С. 407–429. EDN: YWKYZB. DOI: 10.14498/vsgtu2156.

Сведения об авторах

Зафаржон Одилович Арзикулов <https://orcid.org/0009-0004-2965-4566>

PhD; старший преподаватель; каф. высшей математики; e-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

Анварджан Хасанов <https://orcid.org/0000-0002-9849-4103>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник, отд. дифференциальных уравнений и их применения²; научный сотрудник, каф. математики, анализа, логики и дискретной математики⁴; e-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Тухтасин Гуламжанович Эргашев <https://orcid.org/0000-0003-3542-8309>

доктор физико-математических наук, профессор; научный сотрудник, отд. дифференциальных уравнений и их применения²; профессор, каф. высшей математики³; научный сотрудник, каф. математики, анализа, логики и дискретной математики⁴; e-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

их конфлюэнтных аналогов до сих пор остается незавершенной. Таким образом, теория конфлюэнтных гипергеометрических функций трех переменных в настоящее время находится в стадии формирования, а изучение функций четырех переменных представляет собой перспективное направление исследований.

В настоящей работе исследуются некоторые конфлюэнтные гипергеометрические функции от трех и четырех переменных. Устанавливаются их новые свойства, которые применяются для решения задачи Дирихле для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами.

Фундаментальные решения указанного уравнения выражаются через конфлюэнтную гипергеометрическую функцию четырех переменных, а явное решение задачи Дирихле в первом октанте строится с помощью функции трех переменных, являющейся следом конфлюэнтной функции четырех переменных. Доказывается теорема о вычислении значений функций многих переменных и устанавливаются формулы их преобразования. Полученные результаты используются для определения порядка сингулярности фундаментальных решений и обоснования корректности решения задачи Дирихле.

Единственность решения задачи Дирихле доказывается на основе принципа экстремума для эллиптических уравнений.

Ключевые слова: конфлюэнтные функции многих переменных, системы дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа, сингулярное уравнение Гельмгольца, фундаментальное решение, задача Дирихле.

Получение: 24 февраля 2025 г. / Исправление: 2 мая 2025 г. /

Принятие: 5 мая 2025 г. / Публикация онлайн: 22 августа 2025 г.

1. Введение. Начиная с работы И. Н. Векуа [1, гл. 1] исследуются краевые задачи для уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0,$$

где λ — вообще говоря, комплексная постоянная. Это уравнение встречается во многих разделах математической физики (теория упругости, теория электромагнитных волн и др.); его иногда называют метагармоническим уравнением, а его решения — метагармоническими функциями; постоянную λ называют параметром метагармонической функции [2].

Ввиду наличия многочисленных приложений в современной теории дифференциальных уравнений в частных производных значительное место занимают исследования вырождающихся уравнений, особый класс которых составляют уравнения с сингулярными коэффициентами.

Впервые в 1952 году М. Б. Капилевичем [3] была решена задача Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{2\alpha}{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n} - b^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1,$$

в полупространстве $x_n > 0$.

Краевые задачи для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha, \quad 2\beta < 1, \quad (1)$$

были предметом интереса многих математиков.

Уравнение (1) связано с уравнением смешанного типа

$$\eta^m u_{\xi\xi} + \xi^n u_{\eta\eta} + \lambda^2 u = 0, \quad (2)$$

а именно, если в области эллиптичности привести уравнение (2) к канонической форме, то получится уравнение (1). При $n = \lambda = 0$ уравнение (2) называется уравнением Геллерстедта, а в случае $n = \lambda = 0$, $m = 1$ — уравнением Трикоми и имеет важное прикладное значение в газовой динамике [4].

Теория краевых задач для различных частных случаев уравнения (1) активно разрабатывалась во второй половине XX века. С. П. Пулькиным [5] исследованы краевые задачи типа Е для уравнения (1) при $\beta = \lambda = 0$. Краевыми задачами для частных случаев уравнения (1), а также уравнения (2), занимались Д. Аманов [6], М. Е. Лернер и О. А. Репин [7], Е. И. Моисеев [8], Н. Б. Плещинский и Д. Н. Тумаков [9], Н. Р. Раджабов [10], М. С. Салахитдинов и А. Хасанов [11].

В 1969 году R. P. Gilbert [12] построил интегральное представление решений уравнения (1) через аналитические функции. Выведенная там формула обращения этого представления содержит весьма громоздкие ряды и неудобна в приложениях, в частности при решении вопросов о сведениях краевых задач для уравнения (1) к хорошо изученным краевым задачам теории аналитических функций [13]. В работе А. Хасанова [14] фундаментальные решения уравнения (1) построены в явных формах.

В монографии [15] получены различные интегральные представления решений и некоторые частные формулы их обращений для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца (1) и соответствующего ему гиперболического уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} + \frac{2\alpha}{x}u_x - \frac{2\beta}{y}u_y + \lambda^2 u = 0, \quad 0 < 2\alpha, \quad 2\beta < 1,$$

получаемого из (1) заменой y на $-iy$.

Для уравнения (1) при $\lambda = \mu i$ в работе О. А. Репина и М. Е. Лернера [16] доказана однозначная разрешимость и найдена формула решения задачи Дирихле в первом квадранте. А. А. Абашкиным [17] поставлены и исследованы новые краевые задачи для двuosесимметрического уравнения Гельмгольца (1) в прямоугольнике, полуполосе и полосе. Отличительной особенностью исследованных краевых задач [17] является то, что на параметры α , β и λ уравнения (1) накладываются минимальные ограничения.

В настоящей работе исследуется задача Дирихле для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z - \lambda^2 u = 0 \quad (3)$$

в первом октанте, где α, β, γ и λ — действительные числа, причем $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$. Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений. С использованием известного решения уравнения (3), построенного в [18], решение рассматриваемой задачи строится в явной форме. При доказательстве теоремы существования применяются свойства конфлюэнтной гипергеометрической функции от трех переменных A_2 , впервые введенной и исследованной в [14].

Исследованию краевых задач для уравнения (3) посвящено сравнительно малое количество работ. Отметим работы А. Хасанова [19] и Э. Т. Каримова [20], в которых решения основных краевых задач для уравнения (3) при $\lambda = 0$ в бесконечной (первом октанте) и конечной (первом октанте шара) областях соответственно найдены в явных формах. В работе [21] для уравнения (3) при $\beta = \gamma = \lambda = 0$ построена теория потенциала и решена задача Хольмгрена с помощью метода потенциала.

2. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных. Известно [22, 23], что решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциала, приводит к специальным функциям. Чаще всего они появляются при решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных. Разнообразие задач, приводящих к специальным функциям, вызвало быстрый рост числа функций, применяемых в приложениях.

Символ Похгаммера $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (z)_0 = 1.$$

Справедливы равенства $(z)_n = (-1)^n(1-n-z)_n$, $(1)_n = n!$ и

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \quad (4)$$

Равенство (4) можно использовать для введения символа $(z)_n$ при действительных (комплексных) n .

Большие успехи в изучении теории гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b; c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!}, \quad |x| < 1 \quad (5)$$

стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или многих переменных.

Ашпель [24] определил в 1880 г. гипергеометрическую функцию

$$F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!}, \quad |x| + |y| < 1, \quad (6)$$

которая аналогична функции Гаусса.

Гипергеометрическая функция Лауричелла [25]

$$F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} \mathbf{x} \right] = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} (a)_{|\mathbf{k}|} \prod_{i=1}^n \frac{(b_i)_{k_i}}{(c_i)_{k_i}} \frac{x_i^{k_i}}{k_i!}, \quad |x_1| + \cdots + |x_n| < 1, \quad (7)$$

является естественным обобщением классической гипергеометрической функции Гаусса (5) и функции Аппеля (6) на случай многих комплексных переменных и соответствующих им комплексных параметров. Здесь и далее

$$\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n), \quad \mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n), \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n), \quad |\mathbf{k}| := k_1 + \dots + k_n, \quad k_1 \geq 0, \dots, k_n \geq 0.$$

В приложениях функций Лауричелла $F_A^{(n)}$ важна следующая

ТЕОРЕМА 1 [26]. Пусть a, b_k, c_k — действительные числа, $a > |\mathbf{b}| > 0$ и $c_k > b_k$. Тогда для $n = 1, 2, \dots$ справедливо следующее предельное соотношение:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon^{-|\mathbf{b}|} F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} 1 - \frac{f_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \dots, 1 - \frac{f_n(\varepsilon)}{\varepsilon} \right] \right\} = \\ = \frac{\Gamma(a - |\mathbf{b}|)}{\Gamma(a)} \prod_{k=1}^n \frac{|f_k(0)|^{-b_k} \Gamma(c_k)}{\Gamma(c_k - b_k)}, \end{aligned}$$

где $|\mathbf{b}| := b_1 + \dots + b_n$; $f_k(\varepsilon)$ — произвольные функции, причем $f_k(0) \neq 0$.

Отметим, что явные решения основных краевых задач для многомерных сингулярных эллиптических уравнений выражаются через гипергеометрическую функцию Лауричелла $F_A^{(n)}$, число переменных которой равно числу сингулярных коэффициентов рассматриваемого эллиптического уравнения [27, 28].

Рассмотрим следующую конфлюэнтную гипергеометрическую функцию от $n + 1$ переменных [29]:

$$H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} \mathbf{x}; y \right] = \sum_{|\mathbf{k}|+l=0}^{\infty} (a)_{|\mathbf{k}|-l} \prod_{j=1}^n \frac{(b_j)_{k_j}}{(c_j)_{k_j}} \frac{x_j^{k_j}}{k_j!} \cdot \frac{y^l}{l!}, \quad \sum_{j=1}^n |x_j| < 1. \quad (8)$$

Для функции $H_A^{(n,1)}$ справедлива формула преобразования

$$H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} \mathbf{x}; y \right] = Z^{-a} H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{c} - \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} -\frac{\mathbf{x}}{Z}; Zy \right], \quad (9)$$

где

$$Z := 1 - x_1 - \dots - x_n.$$

В приложениях конфлюэнтной гипергеометрической функции $H_A^{(n,1)}$ к решению краевых задач используется следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть a, b_k, c_k — действительные числа, $a > |\mathbf{b}| > 0$ и $c_k > b_k$. Тогда для $n = 1, 2, \dots$ справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon^{-|\mathbf{b}|} H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} 1 - \frac{f_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \dots, 1 - \frac{f_n(\varepsilon)}{\varepsilon}, \varepsilon y \right] \right\} =$$

$$= \frac{\Gamma(a - |\mathbf{b}|)}{\Gamma(a)} \prod_{k=1}^n \frac{|f_k(0)|^{-b_k} \Gamma(c_k)}{\Gamma(c_k - b_k)}, \quad (10)$$

где $|\mathbf{b}| := b_1 + \dots + b_n$; $f_k(\varepsilon)$ — произвольные функции, причем $f_k(0) \neq 0$; y — действительная переменная.

Доказательство. Из определения (8) конфлюэнтной гипергеометрической функции $H_A^{(n,1)}$ следует

$$H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} x; y \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-a)_k} \frac{y^k}{k!} F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} a-k, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} x \right], \quad (11)$$

где $F_A^{(n)}$ — гипергеометрическая функция Лауричелла, определенная в (7). Положив в (11) $y = 0$, придем к равенству

$$H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} x; 0 \right] = F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} x \right]. \quad (12)$$

Далее доказательство теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1 и формулы (12). $\square$

Частные случаи конфлюэнтной гипергеометрической функции $H_A^{(n,1)}$ были известны: в случае $n = 1$ — конфлюэнтная функция Горна H_3 , определяемая равенством

$$H_3(a, b; c; x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m-n} (b)_m}{(c)_m} \frac{x^m y^n}{m! n!}, \quad |x| < 1; \quad (13)$$

в случае $n = 2$ — конфлюэнтная функция, введенная в [14]:

$$A_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} x, y, z \right] = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n-k} (b_1)_m (b_2)_n}{(c_1)_m (c_2)_n} \frac{x^m y^n z^k}{m! n! k!}, \quad |x| + |y| < 1;$$

в случае $n = 3$ конфлюэнтная гипергеометрическая функция $H_A^{(3,1)}$ была определена впервые в [18] через функцию Лауричелла $F_A^{(3)}$:

$$\begin{aligned} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{matrix} x, y, z, t \right] &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-a)_k} \frac{t^k}{k!} F_A^{(3)} \left[\begin{matrix} a-k, b_1, b_2, b_3; \\ c_1, c_2, c_3; \end{matrix} x, y, z \right], \quad |x| + |y| + |z| < 1. \end{aligned}$$

В приложениях любой гипергеометрической функции важна система дифференциальных уравнений в частных производных, которой удовлетворяет данная гипергеометрическая функция. Такая система для конфлюэнтной функции двух переменных H_3 была известна. Однако Волкодавов и Быстрова [30] впервые обратили внимание на то, что в известной справочной литературе по специальным функциям [31, гл. 5, фор. 5.9(34)] приведена ошибочно

система дифференциальных уравнений, которой якобы удовлетворяет функция (13), и ими получена истинная система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет конфлюэнтная функция $H_3(a, b; c; x, y)$.

Конфлюэнтная функция $u = A_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} x, y, z \right]$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных [14]:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} - xyu_{xy} + xzu_{xz} + \\ \quad + [c_1 - (a + b_1 + 1)x]u_x - b_1yu_y + b_1zu_z - ab_1u = 0, \\ y(1-y)u_{yy} - xyu_{xy} + yzu_{yz} - \\ \quad - b_2xu_x + [c_2 - (a + b_2 + 1)y]u_y + b_2zu_z - ab_2u = 0, \\ zu_{zz} - xu_{xz} - yu_{yz} + (1-a)u_z + u = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Вообще говоря, конфлюэнтная функция $H_A^{(n,1)} \left[\begin{matrix} a, \mathbf{b}; \\ \mathbf{c}; \end{matrix} \mathbf{x}; y \right]$ удовлетворяет системе из $n+1$ уравнений гипергеометрического типа, которая в окрестности начала координат имеет 2^n линейно независимых решений (за подробностями см. [29]).

3. Фундаментальные решения обобщенного трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами. Первую октанту трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ обозначим через

$$\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Пусть (x, y, z) и (ξ, η, ζ) — две точки области Ω . Обозначим

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

В области Ω рассмотрим обобщенное трехмерное уравнение Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами

$$Lu \equiv \Delta u + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z - \lambda^2 u = 0, \quad (15)$$

где α, β, γ и λ — действительные числа, причем $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$.

Уравнение вида

$$L^*u \equiv \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\alpha u}{x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2\beta u}{y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2\gamma u}{z} \right) - \lambda^2 u = 0 \quad (16)$$

называется сопряженным уравнением к уравнению $Lu = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ называется фундаментальным решением уравнения (15) с особенностью в точке $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, если она

- 1) является решением уравнения (15) по переменным ξ, η, ζ во всех точках Ω , за исключением точки (x, y, z) ;
- 2) является решением сопряженного уравнения (16) по переменным x, y, z во всех точках Ω , за исключением точки (ξ, η, ζ) ;
- 3) при $(x, y, z) \rightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ имеет особенность порядка $1/r$.

Как известно [18], уравнение (15) имеет 8 линейно независимых решений:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= k_0 r^{-2a} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a, \alpha, \beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_{11} &= k_{11} (x\xi)^{1-2\alpha} r^{4\alpha-2a-2} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\alpha, 1-\alpha, \beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_{12} &= k_{12} (y\eta)^{1-2\beta} r^{4\beta-2a-2} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\beta, \alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_{13} &= k_{13} (z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\gamma-2a-2} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\gamma, \alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_{21} &= k_{21} (x\xi)^{1-2\alpha} (y\eta)^{1-2\beta} r^{4\alpha+4\beta-2a-4} \times \\
 &\quad \times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\beta, 1-\alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_{22} &= k_{22} (x\xi)^{1-2\alpha} (z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\gamma-2a-4} \times \\
 &\quad \times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\gamma, 1-\alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_{23} &= k_{23} (y\eta)^{1-2\beta} (z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\beta+4\gamma-2a-4} \times \\
 &\quad \times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\beta-2\gamma, \alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \\
 u_3 &= k_3 (x\xi)^{1-2\alpha} (y\eta)^{1-2\beta} (z\zeta)^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\beta+4\gamma-2a-6} \times \\
 &\quad \times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+3-2\alpha-2\beta-2\gamma, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right],
 \end{aligned}$$

где $a := \alpha + \beta + \gamma + 1/2$; $k_0, \dots, k_3$ — известные постоянные. Здесь для краткости совокупность переменных обозначена через X :

$$X := \left(-\frac{4x\xi}{r^2}, -\frac{4y\eta}{r^2}, -\frac{4z\zeta}{r^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r^2 \right).$$

Очевидно, каждое из этих решений симметрично относительно переменных x, y, z и ξ, η, ζ , следовательно, они удовлетворяют уравнению (15) как по переменным x, y, z , так и по ξ, η, ζ . Однако эти функции не удовлетворяют сопряженному уравнению (16) по переменным x, y, z .

Справедлива следующая

ЛЕММА 1. Если функция $w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (15) по переменным ξ, η, ζ , то функция

$$q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$$

удовлетворяет сопряженному уравнению (16) по переменным x, y, z .

Доказательство. Пусть некоторая функция $w(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (15) по переменным ξ, η, ζ , тогда в силу симметричности она удовлетворяет этому же уравнению по переменным x, y, z , т.е. $L(w) = 0$.

Теперь подставим функцию $q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ в сопряженное уравнение (16). С этой целью вычислим необходимые производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial x} &= 2\alpha x^{2\alpha-1} y^{2\beta} z^{2\gamma} w + x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_x, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= 2\alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2} y^{2\beta} z^{2\gamma} w + 4\alpha x^{2\alpha-1} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_x + x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2\alpha q}{x} \right) &= 2\alpha(2\alpha-1)x^{2\alpha-2} y^{2\beta} z^{2\gamma} w + 2\alpha x^{2\alpha-1} y^{2\beta} z^{2\gamma} w_x\end{aligned}$$

и аналогично по переменным y и z .

Подставив вычисленные производные в сопряженное уравнение (16), получим

$$L^*(q) = x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} L(w) = 0.$$

Последнее равенство доказывает лемму 1. $\square$

Таким образом, следующие функции удовлетворяют первым двум условиям определения 1:

$$q_0 = x^{2\alpha} y^{2\beta} z^{2\gamma} r^{-2\alpha} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a, \alpha, \beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (17)$$

$$q_{11} = xy^{2\beta} z^{2\gamma} \xi^{1-2\alpha} r^{4\alpha-2\alpha-2} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\alpha, 1-\alpha, \beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (18)$$

$$q_{12} = x^{2\alpha} yz^{2\gamma} \eta^{1-2\beta} r^{4\beta-2\alpha-2} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\beta, \alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (19)$$

$$q_{13} = x^{2\alpha} y^{2\beta} z\zeta^{1-2\gamma} r^{4\gamma-2\alpha-2} H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+1-2\gamma, \alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (20)$$

$$\begin{aligned}q_{21} &= xyz^{2\gamma} \xi^{1-2\alpha} \eta^{1-2\beta} r^{4\alpha+4\beta-2\alpha-4} \times \\ &\times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\beta, 1-\alpha, 1-\beta, \gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{22} &= xy^{2\beta} z\zeta^{1-2\alpha} \xi^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\gamma-2\alpha-4} \times \\ &\times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\alpha-2\gamma, 1-\alpha, \beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{23} &= x^{2\alpha} yz\eta^{1-2\beta} \zeta^{1-2\gamma} r^{4\beta+4\gamma-2\alpha-4} \times \\ &\times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+2-2\beta-2\gamma, \alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right], \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3 &= k_3 xyz \xi^{1-2\alpha} \eta^{1-2\beta} \zeta^{1-2\gamma} r^{4\alpha+4\beta+4\gamma-2\alpha-6} \times \\ &\times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} a+3-2\alpha-2\beta-2\gamma, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} X \right]. \quad (24)\end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Если $0 < 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1$, то каждая из функций, определенных равенствами (17)–(24), имеет особенность порядка $1/r$ при $r \rightarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим в качестве примера функцию q_3 , определенную в (24). Для остальных функций утверждение устанавливается аналогично.

Функцию q_3 можно представить в виде

$$q_3(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) = \frac{1}{r} \cdot \tilde{q}_3(x, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{q}_3 &= k_3 x y z \xi^{1-2\alpha} \eta^{1-2\beta} \zeta^{1-2\gamma} r^{2\alpha+2\beta+2\gamma-6} \times \\ &\quad \times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} 7/2 - \alpha - \beta - \gamma, 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; \\ 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \end{matrix} X \right], \\ k_3 &= \frac{\Gamma(7/2 - \alpha - \beta - \gamma) \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1 - \beta) \Gamma(1 - \gamma)}{\pi^{3/2} 4^{\alpha+\beta+\gamma-2} \Gamma(2 - 2\alpha) \Gamma(2 - 2\beta) \Gamma(2 - 2\gamma)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Покажем, что функция $\tilde{q}_3$ ограничена при $r \rightarrow 0$. С этой целью в правой части (25) произведем замену переменных:

$$\xi = x + \varepsilon t, \quad \eta = y + \varepsilon s, \quad \zeta = z + \varepsilon v,$$

где t, s, v — новые переменные и $\varepsilon \geq 0$, тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{q}_3(x, y, z; x + \varepsilon t, y + \varepsilon s, z + \varepsilon v) &= \\ &= k_3 x y z (x + \varepsilon t)^{1-2\alpha} (y + \varepsilon s)^{1-2\beta} (z + \varepsilon v)^{1-2\gamma} [\varepsilon^2(t^2 + s^2 + v^2)]^{\alpha+\beta+\gamma-3} \times \\ &\quad \times H_A^{(3,1)} \left[\begin{matrix} 7/2 - \alpha - \beta - \gamma, 1 - \alpha, 1 - \beta, 1 - \gamma; \\ 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta, 2 - 2\gamma; \end{matrix} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4x(x + \varepsilon t)}{\varepsilon^2(t^2 + s^2 + v^2)}, - \frac{4y(y + \varepsilon s)}{\varepsilon^2(t^2 + s^2 + v^2)}, - \frac{4z(z + \varepsilon v)}{\varepsilon^2(t^2 + s^2 + v^2)} \right]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и используя теорему 2 о предельных значениях конфлюэнтной гипергеометрической функции (см. формулу (10)), получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{q}_3 = \frac{1}{4\pi} < \infty.$$

Лемма 2 доказана. □

Следовательно, функции, определенные равенствами (17)–(24), являются фундаментальными решениями трехмерного сингулярного уравнения Гельмгольца (15).

4. Постановка задачи Дирихле и теорема единственности.

Задача Дирихле. Найти регулярное решение $u(x, y, z)$ сингулярного уравнения Гельмгольца (15) из класса функций $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad 0 \leq x, y < \infty, \quad (27)$$

$$u(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad 0 \leq x, z < \infty, \quad (28)$$

$$u(0, y, z) = \tau_3(y, z), \quad 0 \leq y, z < \infty, \quad (29)$$

и условию исчезновения на бесконечности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (30)$$

где $\tau_1(t, s)$, $\tau_2(t, s)$, $\tau_3(t, s)$ — заданные функции вида

$$\tau_1(x, y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1} e^{|\lambda| \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}}}, \quad \tilde{\tau}_1(x, y) \in C(0 \leq x, y < \infty), \quad (31)$$

$$\tau_2(x, z) = \frac{\tilde{\tau}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{\varepsilon_2} e^{|\lambda| \sqrt{R^2 + x^2 + z^2}}}, \quad \tilde{\tau}_2(x, z) \in C(0 \leq x, z < \infty), \quad (32)$$

$$\tau_3(y, z) = \frac{\tilde{\tau}_3(y, z)}{(1 + y^2 + z^2)^{\varepsilon_3} e^{|\lambda| \sqrt{R^2 + y^2 + z^2}}}, \quad \tilde{\tau}_3(y, z) \in C(0 \leq y, z < \infty), \quad (33)$$

причем $\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{2} < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 < 2$.

Кроме того, функции $\tau_1(x, y)$, $\tau_2(x, z)$ и $\tau_3(y, z)$ удовлетворяют условиям согласования в начале координат:

$$\tau_1(0, 0) = \tau_2(0, 0) = \tau_3(0, 0)$$

и на границах области Ω :

$$\tau_1(x, 0) = \tau_2(x, 0), \quad \tau_1(0, y) = \tau_3(y, 0), \quad \tau_2(0, z) = \tau_3(0, z), \quad x, y, z \in \bar{\Omega}.$$

Здесь $\bar{\Omega}$ обозначает замыкание области Ω :

$$\bar{\Omega} = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Задача Дирихле для сингулярного уравнения Гельмгольца (3) в бесконечной области Ω может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Достаточно показать, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Рассмотрим конечную подобласть $\Omega_R \subset \Omega$, ограниченную координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и октантом сферы радиуса R :

$$\sigma_R := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

В случае однородных граничных условий

$$\tau_1(x, y) = 0, \quad \tau_2(x, z) = 0, \quad \tau_3(y, z) = 0,$$

согласно принципу экстремума для эллиптических уравнений [32, гл. 1], функция $u(x, y, z)$ достигает своих экстремальных значений в $\bar{\Omega}_R$ только на σ_R .

Для произвольной точки $(x, y, z) \in \Omega_R$ и любого $\varepsilon > 0$ выберем R достаточно большим, чтобы $|u(x, y, z)| < \varepsilon$ на σ_R . Тогда в силу принципа максимума $|u(x, y, z)| < \varepsilon$ во всей области Ω_R . Поскольку ε произвольно мало, заключаем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Теорема 3 доказана. $\square$

5. Существование решения задачи Дирихле. Пусть $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_R$. Вырежем из области Ω_R шар достаточно малого радиуса ε с центром в точке (ξ, η, ζ) и оставшуюся часть области Ω_R обозначим через Ω_ε , а через C_ε — сферу вырезанного шара. Используя известную формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \left(u \frac{\partial q_3}{\partial \mathbf{N}} - q_3 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} \right) dC_\varepsilon = & - \int_{\sigma_R} u \frac{\partial q_3}{\partial \mathbf{M}} d\sigma_R + \int_{D_1} u(x, y, 0) \frac{\partial q_3}{\partial z} \Big|_{z=0} dx dy + \\ & + \int_{D_2} u(x, 0, z) \frac{\partial q_3}{\partial y} \Big|_{y=0} dx dz + \int_{D_3} u(0, y, z) \frac{\partial q_3}{\partial x} \Big|_{x=0} dy dz, \end{aligned} \quad (34)$$

где $u(x, y, z)$ — искомое решение уравнения (15); $q_3(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ — фундаментальное решение уравнения (15), определенное в (24); $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ — внешние нормали к C_ε и σ_R соответственно; D_1 , D_2 и D_3 — боковые грани области Ω_R :

$$D_1 := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < R^2, x > 0, y > 0, z = 0\},$$

$$D_2 := \{(x, y, z) : x^2 + z^2 < R^2, x > 0, y = 0, z > 0\},$$

$$D_3 := \{(x, y, z) : y^2 + z^2 < R^2, x = 0, y > 0, z > 0\}.$$

Следуя работе [18], будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \left(u \frac{\partial q_3}{\partial \mathbf{N}} - q_3 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{N}} \right) dC_\varepsilon = u(\xi, \eta, \zeta).$$

Далее, переходя к пределу в правой части (34) при $R \rightarrow \infty$ и учитывая при этом условия задачи Дирихле, после некоторых преобразований получим

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) = & (1 - 2\gamma) k_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_1(t, s) ts}{r_1^{2a}} \times \\ & \times A_2 \left[\begin{matrix} a, 1 - \alpha, 1 - \beta; \\ 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta; \end{matrix} -\frac{4xt}{r_1^2}, -\frac{4ys}{r_1^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r_1^2 \right] dt ds, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y, z) = & (1 - 2\beta) k_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_2(t, s) ts}{r_2^{2a}} \times \\ & \times A_2 \left[\begin{matrix} a, 1 - \alpha, 1 - \gamma; \\ 2 - 2\alpha, 2 - \gamma; \end{matrix} -\frac{4xt}{r_2^2}, -\frac{4zs}{r_2^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r_2^2 \right] dt ds, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} u_3(x, y, z) = & (1 - 2\alpha) k_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_3(t, s) ts}{r_3^{2a}} \times \\ & \times A_2 \left[\begin{matrix} a, 1 - \gamma, 1 - \beta; \\ 2 - 2\gamma, 2 - 2\beta; \end{matrix} -\frac{4yt}{r_3^2}, -\frac{4zs}{r_3^2}, -\frac{1}{4}\lambda^2 r_3^2 \right] dt ds, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} a = 7/2 - \alpha - \beta - \gamma, \quad r_1^2 = (x - t)^2 + (y - s)^2 + z^2, \\ r_2^2 = (x - t)^2 + y^2 + (z - s)^2, \quad r_3^2 = x^2 + (y - t)^2 + (z - s)^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Если функцию $\tau_1(x, y)$ можно представить в виде (31), то функция $u_1(x, y, z)$, определенная равенством (36), является регулярным решением уравнения (15) в области Ω , удовлетворяющим граничным условиям

$$u_1(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad u_1(x, 0, z) = 0, \quad u_1(0, y, z) = 0, \quad (39)$$

и условию исчезновения на бесконечности (30).

Доказательство. Прежде всего мы должны убедиться в том, что функция (36) удовлетворяет сингулярному уравнению Гельмгольца (15).

С этой целью рассмотрим вспомогательную функцию

$$W(x, y, z; t, s) = x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} r_1^{-2a} \omega(\xi, \eta, \theta), \quad (40)$$

где

$$\omega(\xi, \eta, \theta) := A_2 \left[\begin{matrix} a, 1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta, 2-2\gamma; \end{matrix} \xi, \eta, \theta \right],$$

$$\xi = -\frac{4xt}{r_1^2}, \quad \eta = -\frac{4ys}{r_1^2}, \quad \theta = -\frac{\lambda^2}{4} r_1^2.$$

Вычислим необходимые производные от вспомогательной функции W по переменным x, y, z и подставим их в сингулярное уравнение Гельмгольца. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} & W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} + \frac{2\alpha}{x} W_x + \frac{2\beta}{y} W_y + \frac{2\gamma}{z} W_z - \lambda^2 W = \\ &= \Lambda \frac{\xi}{x} \{ \xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi} - \xi\eta\omega_{\xi\eta} + \xi\theta\omega_{\xi\theta} + \\ & \quad + [2(1-\alpha) - (2-\alpha+a)\xi]\omega_{\xi} - a(1-\alpha)\omega \} + \\ &+ \Lambda \frac{\eta}{y} \{ \eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta} - \xi\eta\omega_{\xi\eta} + \eta\theta\omega_{\eta\theta} + \\ & \quad + [2(1-\beta) - (2-\beta+a)\eta]\omega_{\eta} - a(1-\beta)\omega \} + \\ & \quad + \theta \{ \theta\omega_{\theta\theta} - \xi\omega_{\xi\theta} - \eta\omega_{\eta\theta} + (1-a)\omega_{\theta} - \omega \} = 0, \end{aligned}$$

где $\Lambda = x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} r_1^{-2a}$, которое равносильно следующей системе уравнений гипергеометрического типа:

$$\begin{cases} \xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi} - \xi\eta\omega_{\xi\eta} + \xi\theta\omega_{\xi\theta} + [2(1-\alpha) - (2-\alpha+a)\xi]\omega_{\xi} - a(1-\alpha)\omega = 0, \\ \eta(1-\eta)\omega_{\eta\eta} - \xi\eta\omega_{\xi\eta} + \eta\theta\omega_{\eta\theta} + [2(1-\beta) - (2-\beta+a)\eta]\omega_{\eta} - a(1-\beta)\omega = 0, \\ \theta\omega_{\theta\theta} - \xi\omega_{\xi\theta} - \eta\omega_{\eta\theta} + (1-a)\omega_{\theta} - \omega = 0. \end{cases}$$

Сопоставляя последнюю систему уравнений с системой уравнений (14) для конфлюэнтной функции A_2 , можно заключить, что функция (40) является решением сингулярного уравнения Гельмгольца. Следовательно, функция $u_1(x, y, z)$, определенная равенством (36), удовлетворяет сингулярному уравнению Гельмгольца (15).

Теперь докажем, что функция $u_1(x, y, z)$ удовлетворяет граничным условиям (39). Действительно, введя в подынтегральной функции в (36) вместо t и s новые переменные $\mu = (t-x)/z$ и $\nu = (s-y)/z$, получим

$$\begin{aligned} u_1 &= (1-2\gamma) k_3 \frac{x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta}}{z^{4-2\alpha-2\beta}} \int_{-x/z}^{\infty} \int_{-y/z}^{\infty} \frac{\tau_1(x + \mu z, y + \nu z; \lambda) (x + z\mu)(y + z\nu)}{K^a} \times \\ & \times A_2 \left[\begin{matrix} a, 1-\alpha, 1-\beta; \\ 2-2\alpha, 2-2\beta; \end{matrix} \frac{4x(x + z\mu)}{z^2 K}, \frac{4y(y + \nu z)}{z^2 K}, -\frac{1}{4} \lambda^2 z^2 K \right] d\mu d\nu, \quad (41) \end{aligned}$$

где $K := 1 + \mu^2 + \nu^2$.

Используя теорему 2 о предельных значениях конфлюэнтной гипергеометрической функции (см. формулу (10)), в правой части (41) переходим к пределу при $z \rightarrow 0$. Учитывая выражение (26) для коэффициента k_3 , известную формулу для вычисления двукратного несобственного интеграла [33, стр. 633, фор. 4.623]

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(a^2x^2 + b^2y^2) dx dy = \frac{\pi}{4ab} \int_0^\infty \varphi(x) dx$$

и формулу Лежандра для удвоения аргумента гамма-функции [31, стр. 19, фор. (15)]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

получим

$$\lim_{z \rightarrow 0} u_1(x, y, z) = \tau_1(x, y). \quad (42)$$

Совершив аналогичные преобразования, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_1(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} u_1(x, y, z) = 0. \quad (43)$$

Следовательно, на основании равенств (42) и (43) заключаем, что функция $u_1(x, y, z)$, определенная равенством (36), удовлетворяет условиям (39).

Остается показать исчезновение функции $u_1(x, y, z)$ на бесконечности. Воспользовавшись формулой преобразования (см. фор. (9))

$$\begin{aligned} A_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} x, y, z \right] &= (1 - x - y)^{-a} \times \\ &\times A_2 \left[\begin{matrix} a, c_1 - b_1, c_2 - b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} -\frac{x}{1 - x - y}, -\frac{y}{1 - x - y}, (1 - x - y)z \right], \end{aligned}$$

функцию (36) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= (1/2 - \gamma) k_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_1(t, s) ts}{\rho^{2a}} \times \\ &\times A_2 \left[\begin{matrix} a, 1 - \alpha, 1 - \beta; \\ 2 - 2\alpha, 2 - 2\beta; \end{matrix} \frac{4xt}{\rho^2}, \frac{4ys}{\rho^2}, -\frac{1}{4} \lambda^2 \rho^2 \right] dt ds, \quad (44) \end{aligned}$$

где $\rho^2 = (x + t)^2 + (y + s)^2 + z^2$.

Нетрудно заметить, что в (44) справедливо неравенство

$$\frac{4xt}{\rho^2} + \frac{4ys}{\rho^2} < 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

Докажем, что при стремлении точки (x, y, z) к бесконечности, т.е. при $R \rightarrow \infty$, функция (44) стремится к нулю. С этой целью конфлюэнтную гипергеометрическую функцию A_2 представим виде

$$A_2 \left[\begin{matrix} a, b_1, b_2; \\ c_1, c_2; \end{matrix} x, y, z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(1-a)_k k!} F_2(a - k, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y),$$

где F_2 — гипергеометрическая функция Аппеля (6).

Из теории функций Аппеля [24] известно, что если $|x| + |y| < 1$, то при любых значениях числовых параметров гипергеометрическая функция Аппеля F_2 ограничена:

$$|F_2(a, b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)| \leq C_1, \quad |x| + |y| < 1,$$

следовательно, имеем оценку

$$|u_1| \leq C_2 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\tau_1(t, s)| t s}{\rho^{7-2\alpha-2\beta-2\gamma}} {}_0F_1\left(b; \frac{\lambda^2}{4} \rho^2\right) dt ds, \quad (45)$$

где $b = \alpha + \beta + \gamma - 5/2$.

Здесь под интегралом ${}_0F_1$ обозначает обобщенную гипергеометрическую функцию [34, стр. 437, фор. 7.2.3(1)], для которой справедлива следующая формула связи [34, стр. 594, фор. 7.13.1(1)]:

$${}_0F_1(b; z) = \Gamma(b) z^{(1-b)/2} I_{b-1}(2\sqrt{z}), \quad (46)$$

где

$$I_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

— модифицированная функция Бесселя [15, гл. 1, фор. (1.84)]. Далее, применяя последовательно к правой части (45) формулу связи (46), асимптотическое представление [35, стр. 93]

$$I_\alpha(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

и представление (31) для заданной функции τ_1 , получим

$$|u_1| \leq C_3 x^{1-2\alpha} y^{1-2\beta} z^{1-2\gamma} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{|\lambda| \rho t s} dt ds}{e^{|\lambda| \sqrt{R^2 + t^2 + s^2}} (1 + t^2 + s^2)^{\varepsilon_1} \rho^{4-\alpha-\beta-\gamma}}.$$

Выполнив замену $t = R\mu$, $s = R\nu$ в последнем двойном несобственном интеграле, получим

$$|u_1| \leq C_3 \left(\frac{x}{R}\right)^{1-2\alpha} \left(\frac{y}{R}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{z}{R}\right)^{1-2\gamma} \frac{K(x, y)}{R^{2\varepsilon_1-3+\alpha+\beta+\gamma}}, \quad (47)$$

где

$$\varepsilon_1 > \frac{3}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2},$$

$$K(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{|\lambda| R (\sqrt{1+\mu^2+\nu^2+\frac{2x}{R}+\frac{2y}{R}} - \sqrt{1+\mu^2+\nu^2})} \mu \nu d\mu d\nu}{(\mu^2 + \nu^2)^{\varepsilon_1} (1 + \mu^2 + \nu^2)^{(4-\alpha-\beta-\gamma)/2}}. \quad (48)$$

Покажем, что двойной несобственный интеграл в правой части (48) ограничен при $R \rightarrow \infty$. Действительно, используя формулу [36]

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_n \frac{x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 \cdots dx_n}{[(r_1 x_1)^{q_1} + \cdots + (r_n x_n)^{q_n}]^t [1 + (r_1 x_1)^{q_1} + \cdots + (r_n x_n)^{q_n}]^s} =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1/q_1) \cdots \Gamma(p_n/q_n) \Gamma(P-t) \Gamma(s+t-P)}{q_1 q_2 \cdots q_n r_1^{p_1/q_1} \cdots r_n^{p_n/q_n} \Gamma(P) \Gamma(s)},$$

где $P := p_1/q_1 + \cdots + p_n/q_n$; p_k, q_k, r_k и s — положительные числа ($k = \overline{1, n}$), $0 < P - t < s$, и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, будем иметь соотношение

$$\lim_{R \rightarrow \infty} K(x, y) = \frac{\Gamma(2 - \varepsilon_1) \Gamma((2\varepsilon_1 - \alpha - \beta - \gamma)/2)}{4\Gamma((4 - \alpha - \beta - \gamma)/2)}, \quad \varepsilon_1 < 2. \quad (49)$$

Таким образом, в силу (47) и (49) справедлива оценка

$$|u_1| \leq \frac{C_3}{R^{2\varepsilon_1 - 3 + \alpha + \beta + \gamma}}, \quad \frac{3}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} < \varepsilon_1 < 2, \quad R \rightarrow \infty,$$

учитывая которую, заключаем, что функция (41) обращается в нуль на бесконечности. Лемма 3 доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Повторяя рассуждения, проведенные в лемме 3, можно доказать еще две леммы относительно функций $u_2(x, y, z)$ и $u_3(x, y, z)$, определенных, соответственно, равенствами (37) и (38). Так что если для заданных функций $\tau_2(x, z)$ и $\tau_3(y, z)$ справедливы представления (32) и (33), то каждая из функций $u_2(x, y, z)$ и $u_3(x, y, z)$ является решением сингулярного уравнения Гельмгольца (3), исчезающим на бесконечности и удовлетворяющим совокупности условий

$$u_2(x, y, 0) = 0, \quad u_2(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad u_2(0, y, z) = 0,$$

$$u_3(x, y, 0) = 0, \quad u_3(x, 0, z) = 0, \quad u_3(0, y, z) = \tau_3(y, z)$$

соответственно.

ТЕОРЕМА 4. Если функции $\tau_1(x, y)$, $\tau_2(x, z)$ и $\tau_3(y, z)$ удовлетворяют условиям (31), (32) и (33) соответственно, то функция $u(x, y, z)$, определенная в (35), является регулярным решением уравнения (15) в области Ω , удовлетворяющим условиям (27)–(30).

Доказательство теоремы 4 следует из леммы 3 и замечания 1.

Заключение. Установлены новые свойства конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных и доказана теорема о значениях гипергеометрической функции при предельных значениях переменных, имеющая важное приложение при решении краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

На основе известных линейно независимых решений трехмерного сингулярного уравнения Гельмгольца построены фундаментальные решения данного уравнения, выражаемые через конфлюэнтную функцию от четырех переменных и с использованием доказанной предельной теоремы определен порядок особенности этих решений.

Впервые решена задача Дирихле для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами в бесконечной области. Единственность решения задачи доказана известным методом принципа экстремума для эллиптических уравнений. Благодаря доказанным свойствам конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных решение поставленной задачи удалось выписать в явном виде через конфлюэнтную функцию от трех переменных. В дальнейшем полученное решение задачи Дирихле может быть использовано при решении краевых задач для трехмерных сингулярных уравнений смешанного типа в качестве решения, принесенного из эллиптической части смешанной области.

Результаты настоящей работы открывают путь к исследованию краевых задач для сингулярных эллиптических уравнений. Используя построенные фундаментальные решения, можно поставить и решить задачу Неймана и еще несколько задач со смешанными условиями Дирихле и Неймана для трехмерного уравнения Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами в первом октанте или в других областях.

В настоящее время известны [29] все линейно независимые решения обобщенного многомерного сингулярного уравнения Гельмгольца вида

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{2\alpha_k}{x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \lambda^2 u = 0, \quad m \geq 2, \quad n \geq 1, \quad m \geq n, \quad 0 < 2\alpha_k < 1, \quad (50)$$

которые выражаются через конфлюэнтную функцию $H_A^{(n,1)}$ от $n+1$ переменных. Предлагается распространить результаты данной работы к многомерному уравнению Гельмгольца с n сингулярными коэффициентами (50).

Поэтому полученные в работе результаты можно рассматривать как начальный этап исследования конфлюэнтных гипергеометрических функций многих переменных и решения краевых задач для уравнения Гельмгольца с тремя и более сингулярными коэффициентами.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений*. М., Ленинград: Гостехиздат, 1948. 296 с.
2. Векуа И. Н. Об одном разложении метагармонических функций // *Докл. АН СССР*, 1945. Т. 48, № 1. С. 3–6.
3. Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа // *Матем. сб.*, 1952. Т. 30(72), № 1. С. 11–38.
4. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике*. М.: Наука, 1973. 712 с.
5. Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} + u_{yy} + px^{-1}u_x = 0$ // *Уч. зап. Куйбыш. пед. ин-та. Физ.-мат. науки*, 1958. Т. 21. С. 3–54.
6. Аманов Д. Некоторые краевые задачи для вырождающегося эллиптического уравнения в неограниченной области // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1984. № 1. С. 8–13.

7. Лернер М. Е., Репин О. А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564. EDN: WJHLOV.
8. Моисеев Е. И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1565–1567.
9. Плещинский Н. Б., Тумаков Д. Н. Граничные задачи для уравнения Гельмгольца в квадранте и в полуплоскости, составленной из двух квадрантов // *Изв. вузов. Матем.*, 2004. № 7. С. 63–74. EDN: HQUGXR.
10. Раджабов Н. Р. Теоремы единственности и аналоги формулы Пуассона в первом октанте для уравнения типа Гельмгольца с n сингулярной гиперплоскостью // *Докл. АН СССР*, 1978. Т. 238, № 4. С. 804–807.
11. Салахитдинов М. С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладой линией вырождения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 110–119.
12. Gilbert R. P. *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York, London: Academic Press, 1969. xviii+311 pp.
13. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи*. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2007. vol. 52, no. 8. pp. 673–683. DOI: <https://doi.org/10.1080/17476930701300375>.
15. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
16. Репин О. А., Лернер М. Е. О задаче Дирихле для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца в первом квадранте // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998. № 6. С. 5–8. EDN: HKVCIB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1>.
17. Абашкин А. А. Об одной весовой краевой задаче в бесконечной полуполосе для двuosесимметрического уравнения Гельмгольца // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. Т. 6. С. 3–12. EDN: PVYBAX.
18. Urinov A. K., Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // *Appl. Math. Lett.*, 2011. vol. 24, no. 3. pp. 314–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.10.013>.
19. Хасанов А. *Гипергеометрические функции и их применения к решению краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка*. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Ташкент, 2009. 240 с.
20. Каримов Э. Т. О задаче Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами // *Докл. АН Узбекистана*, 2010. Т. 2. С. 9–11.
21. Эргашев Т. Г. Потенциалы для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом и их применение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 257–285. EDN: HVACIC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1810>.
22. Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series ${}^N F(x_1, \dots, x_N)$ arising in physical and quantum chemical applications // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983. vol. 16, no. 9. pp. 1813–1825. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/9/007>.
23. Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics* / Surveys in Applied Mathematics. vol. 3. New York: John Wiley & Sons, 1958. xv+278 pp.
24. Appell P. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivés partielles // *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1880. vol. 90. pp. 296–299 (In French).
25. Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili // *Palermo Rend.*, 1893. vol. 7. pp. 111–158 (In Italian).
26. Эргашев Т. Г., Тулакова З. Р. Задача Дирихле для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами в бесконечной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. № 7. С. 81–91. EDN: OJVXJT. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-7-81-91>.

27. Эргашев Т. Г. Обобщенная задача Хольмгрена для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 7. С. 872–886. EDN: IYVASY. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120070043>.
28. Эргашев Т. Г., Тулакова З. Р. Задача со смешанными граничными условиями для сингулярного эллиптического уравнения в бесконечной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2022. № 7. С. 58–72. EDN: IMUNNL. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-7-58-72>.
29. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 15–26. EDN: HRRMPZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220010047>.
30. Волкодав В. Ф., Быстрова О. К. Построение функций Римана–Адамара для одного вырождающегося уравнения // *Диффер. уравн.*, 1991. Т. 27, № 8. С. 1444–1446.
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*. vol. 1. New York: McGraw-Hill, 1953. xxvi+302 pp.
32. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin: Springer, 1970. xii+372 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5>.
33. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.
34. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*. М.: Наука, 1986. 800 с.
35. Маричев О. И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)*. Минск: Наука и жизнь, 1978. 312 с.
36. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain // *Lobachevskii J. Math.*, 2022. vol. 43, no. 1. pp. 199–206. EDN: SNHKZE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222040102>.

MSC: 33C70, 35J25, 35J05, 35A08

Confluent hypergeometric functions and their application to the solution of Dirichlet problem for the Helmholtz equation with three singular coefficients

Z. O. Arzikulov¹, A. Hasanov^{2,4}, T. G. Ergashev^{2,3,4}

¹ Fergana State Technical University,
86, Fergana st., Fergana, 150107, Uzbekistan.

² V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Science,
9, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

³ Tashkent Institute of Irrigation and
Agricultural Mechanization Engineers,
39 Kari-Niyazi st., Tashkent, 100000, Uzbekistan.

⁴ Ghent University,
33, Sint-Pietersnieuwstraat, Ghent, 9000, Belgium.

Abstract

In the course of a series of studies spanning the fifty-year period from 1889 to 1939, all double hypergeometric series of the second order were systematically investigated. A significant contribution to the study of hypergeometric functions of two variables was made by Horn, who proposed their classification into two types: complete and confluent. Horn's final list comprised fourteen complete (non-confluent) functions of two variables and twenty distinct confluent functions, which represent limiting cases of the complete ones. In 1985, Srivastava and Karlsson completed the classification of all possible second-order complete hypergeometric functions of three

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Arzikulov Z. O., Hasanov A., Ergashev T. G. Confluent hypergeometric functions and their application to the solution of Dirichlet problem for the Helmholtz equation with three singular coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 407–429. EDN: YWKYB. DOI: 10.14498/vsgtu2156 (In Russian).

Authors' Details:

Zafarjon O. Arzikulov  <https://orcid.org/0009-0004-2965-4566>

PhD; Senior Lecturer; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

Anvardjan Hasanov  <https://orcid.org/0000-0002-9849-4103>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Research Fellow, Dept. of Differential Equations and Their Applications²; Research Associate, Dept. of Mathematics, Analysis, Logic and Discrete Mathematics⁴; e-mail: anvarhasanov@yahoo.com

Tuhtasin G. Ergashev  <https://orcid.org/0000-0003-3542-8309>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Research Associate, Dept. of Differential Equations and Their Applications²; Professor, Dept. of Higher Mathematics³; Research Associate, Dept. of Mathematics, Analysis, Logic and Discrete Mathematics⁴; e-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

variables, while a similar systematic classification for their confluent counterparts remains incomplete. Thus, the theory of confluent hypergeometric functions of three variables has not yet been fully developed, and the study of functions of four variables represents an area for future research.

This paper investigates certain confluent hypergeometric functions of three and four variables, establishing their new properties and applying them to the solution of the Dirichlet problem for the three-dimensional Helmholtz equation with three singular coefficients.

Fundamental solutions of the aforementioned Helmholtz equation are expressed in terms of a confluent hypergeometric function of four variables, while an explicit solution to the Dirichlet problem in the first octant is constructed using a function of three variables, which is derived as a trace of the four-variable confluent function. A theorem on the computation of limiting values of multivariate functions is proved, and transformation formulas for these functions are established. These results are employed to determine the singularity order of fundamental solutions and to validate the correctness of the solution to the Dirichlet problem.

The uniqueness of the solution to the Dirichlet problem is proved using the maximum principle for elliptic equations.

Keywords: multiple confluent hypergeometric function, PDE-systems of hypergeometric type, singular Helmholtz equation, fundamental solution, Dirichlet problem.

Received: 24th February, 2025 / Revised: 2nd May, 2025 /

Accepted: 5th May, 2025 / First online: 22nd August, 2025

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

References

1. Vekua I. N. *New Methods for Solving Elliptic Equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 1. New York, John Wiley & Sons, 1967, xii+358 pp.
2. Vekua I. N. On one expansion of metaharmonic functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1945, vol. 48, no. 1, pp. 3–6 (In Russian).
3. Kapilevich M. B. On an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Sb. Math.*, 1952, vol. 72, no. 1, pp. 11–38 (In Russian).
4. Frankl F. I. *Izbrannyye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 712 pp. (In Russian)
5. Pulkin S. P. Some boundary value problems for the equation $u_{xx} + u_{yy} + px^{-1}u_x = 0$, *Uch. Zap. Kuibyshev. Ped. In-ta. Fiz.-mat. Nauki*, 1958, vol. 21, pp. 3–54 (In Russian).
6. Amanov D. Some boundary value problems for a degenerate elliptic equation in an unbounded domain, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1984, no. 1, pp. 8–13 (In Russian).
7. Lerner M. E., Repin O. A. Nonlocal boundary value problems in a vertical half-strip for a generalized axisymmetric Helmholtz equation, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1640–1642. EDN: LGMMOT. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017985319783>.

8. Moiseev E. I. Solvability of a nonlocal boundary value problem, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1643–1646. EDN: LGWFPF. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1017937403853>.
9. Pleshchinsky N. B., Tumakov D. N. Boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant and in a half-plane formed from two quadrants, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 7, pp. 60–71.
10. Radzhabov N. R. Uniqueness theorems and analogues of Poisson's formula in the first octant for an equation of Helmholtz type with n singular hyperplanes, *Sov. Math., Dokl.*, 1978, vol. 19, no. 4, pp. 111–115.
11. Salakhitdinov M. C., Hasanov A. The Tricomi problem for an equation of mixed type with a nonsmooth line of degeneracy, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 110–119 (In Russian).
12. Gilbert R. P. *Function Theoretic Methods in Partial Differential Equations*. New York, London, Academic Press, 1969, xviii+311 pp.
13. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. New York, Dover Publ., 1990, xvii+561 pp.
14. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2007, vol. 52, no. 8, pp. 673–683. DOI: <https://doi.org/10.1080/17476930701300375>.
15. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
16. Repin O. A., Lerner M. E. On the Dirichlet problem for the generalized biaxially symmetric Helmholtz equation in the first quadrant, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1998, no. 6, pp. 5–8 (In Russian). EDN: HKVCIB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1>.
17. Abashkin A. A. On a weighted boundary-value problem in an infinite half-strip for a bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 6, pp. 1–9. EDN: RFHWBR. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13060017>.
18. Urinov A. K., Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter, *Appl. Math. Lett.*, 2011, vol. 24, no. 3, pp. 314–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.10.013>.
19. Hasanov A. *Hypergeometric Functions and Their Applications to Solving Boundary Value Problems for Degenerate Second-Order Differential Equations*, D.Sc. (Physics and Mathematics) Thesis. Tashkent, 2009, 240 pp. (In Russian)
20. Karimov E. T. On the Dirichlet problem for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients, *Dokl. Akad. Nauk. Uzbekistana*, 2010, vol. 2, pp. 9–11 (In Russian).
21. Ergashev T. G. Potentials for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient and their application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 257–285 (In Russian). EDN: HVACIC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1810>.
22. Niukkanen A. W. Generalised hypergeometric series ${}_N F(x_1, \dots, x_N)$ arising in physical and quantum chemical applications, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, vol. 16, no. 9, pp. 1813–1825. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/9/007>.
23. Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*, Surveys in Applied Mathematics, vol. 3. New York, John Wiley & Sons, 1958, xv+278 pp.
24. Appell P. Sur les séries hypergéométriques de deux variables et sur des équations différentielles linéaires aux dérivés partielles, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1880, vol. 90, pp. 296–299 (In French).
25. Lauricella G. Sulle funzioni ipergeometriche a più variabili, *Palermo Rend.*, 1893, vol. 7, pp. 111–158 (In Italian).
26. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Dirichlet problem for an elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2021, vol. 65, no. 7, pp. 71–80. EDN: WJAPIG. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X21070082>.
27. Ergashev T. G. Generalized Holmgren problem for an elliptic equation with several singular coefficients, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 842–856. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120070046>.

28. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. A problem with mixed boundary conditions for a singular elliptic equation in an infinite domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2022, vol. 66, no. 7, pp. 51–63. EDN: GYKGFC. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X22070039>.
29. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 15–26. EDN: HRRMPZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220010047>.
30. Volkodavov V. F., Bistrtova O. K. Construction of Riemann–Hadamard functions for a degenerate equation, *Differ. Uravn.*, 1991, vol. 27, no. 8, pp. 1444–1446 (In Russian).
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, vol. 1. New York, McGraw-Hill, 1953, xxvi+302 pp.
32. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin, Springer, 1970, xii+372 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5>.
33. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products]. Moscow, Fizmatlit, 1962, 1100 pp. (In Russian)
34. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy* [Integrals and Series: Additional Chapters]. Moscow, Nauka, 1986, 800 pp. (In Russian)
35. Marichev O. I. *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsii (teoriya i tablitsy formul)* [Methods for Computing Integrals of Special Functions (Theory and Formula Tables)]. Minsk, Nauka i zhizn', 1978, 312 pp. (In Russian)
36. Ergashev T. G., Tulakova Z. R. The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 199–206. EDN: SNHKZE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222040102>.



УДК 539.3

Ударное взаимодействие гранулированной среды и стержня с оголовком конусной формы

А. В. Кочетков, И. А. Модин, В. В. Баландин,
Вл. Вл. Баландин, К. Д. Бессмертный

Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,
Россия, 603022, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23.

Аннотация

Выполнено численное моделирование ударного взаимодействия недеформируемого конического тела с пористым слоем. Пористый слой представлен в виде совокупности отдельных элементов, движение и деформация которых описаны в рамках бессеточного численного метода дискретных элементов. Данный метод интерпретирует элементы как частицы с заданными упругими характеристиками, что обеспечивает эффективное моделирование процессов, сопровождающихся значительными перемещениями и нарушением сплошности среды, в отличие от классических сеточных методов. Изложены основные принципы метода дискретных элементов, получившего широкое распространение благодаря развитию вычислительных технологий. Приведены описание численной модели и методики расчета. Представлены результаты моделирования нормального высокоскоростного взаимодействия деформируемой пористой среды, состоящей из частиц, с упругим стержнем, имеющим коническую форму в области контакта. Учтено кулоновское трение на границе раздела пористой среды и конуса. Проведена оценка контактных сил, действующих со стороны дискретной среды на упругое коническое тело. Результаты численного моделирования сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в ходе обращенного эксперимента, в котором упаковка с пористым слоем металась навстречу неподвижному стержню при различных начальных скоростях.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Кочетков А. В., Модин И. А., Баландин В. В., Баландин Вл. Вл., Бессмертный К. Д. Ударное взаимодействие гранулированной среды и стержня с оголовком конусной формы // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 3. С. 430–447. EDN: WTDEIJ. DOI: 10.14498/vsgtu2157.

Сведения об авторах

Анатолий Васильевич Кочетков <https://orcid.org/0000-0001-7939-8207>

доктор физико-математических наук; заведующий лабораторией; лаб. динамики многокомпонентных сред; e-mail: kochetkov@mech.unn.ru

Иван Александрович Модин <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов; e-mail: mianet@mail.ru

Ключевые слова: метод дискретных элементов, численное моделирование, эксперимент, трехмерная задача, большие перемещения, удар, проникание, гранулированный слой, трение.

Получение: 24 февраля 2025 г. / Исправление: 28 апреля 2025 г. /

Принятие: 9 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 17 июля 2025 г.

Введение. Ячеистые материалы, пористые среды, перфорированные перегородки, проницаемые экраны в виде препятствий или каскадов препятствий, плетеные сетки, решетки и другие среды, состоящие из множества пор, обладают такими свойствами, как высокая удельная прочность, низкая теплопроводность, способность гасить вибрации и поглощать значительную долю энергии импульсных воздействий. По морфологии пор ячеистые материалы можно разделить на стохастические и периодические пористые структуры. Как правило, последние состоят из правильных и повторяющихся симметричных фрагментов, механические свойства которых поддаются моделированию.

В частности, одним из перспективных демпфирующих элементов, защищающих конструкции от импульсных воздействий, являются пористые среды. В ряде работ [1–3] приводятся результаты экспериментов по определению параметров нагружения жесткой стенки, покрытой пористой средой при ударной нагрузке. В других исследованиях [4–6] показано, что наличие пористых слоев уменьшает величину остаточного напряжения и скорость приложения нагрузки. Основные механические параметры пористых материалов определяются их структурными свойствами.

При моделировании пористой среды необходимо учитывать площадь контакта и трение между контактирующими элементами (гранулами). Сыпучие материалы проявляют сложную реакцию при динамической нагрузке: в начальный момент взаимодействия происходит переукладка и уплотнение пористого слоя. Насыпные пористые материалы, свойства которых изменяются в зависимости от степени сжатия, привлекают внимание исследователей из различных областей [7–11].

Целью данного исследования является моделирование процесса контактного взаимодействия пористой среды с опорным стержнем, имеющим коническую форму в области контакта. Для верификации численного решения проведены экспериментальные исследования, результаты которых сравниваются с расчетными данными.

Владимир Васильевич Баландин  <https://orcid.org/0000-0002-3907-3480>
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. динамических испытаний материалов; e-mail: vbalandin99@gmail.com

Владимир Владимирович Баландин  <https://orcid.org/0000-0003-3061-8875>
кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. динамических испытаний материалов; e-mail: rustydog2007@yandex.ru

Кирилл Дмитриевич Бессмертный  <https://orcid.org/0009-0003-0515-4375>
младший научный сотрудник; лаб. динамики многокомпонентных сред;
e-mail: besskirill@gmail.com

1. Метод дискретных элементов. Метод дискретных элементов (DEM, Discrete Element Method) представляет собой численный инструмент для моделирования поведения пористых, сыпучих и дробимых материалов. В отличие от традиционных континуальных методов, таких как метод конечных элементов (МКЭ) или метод конечных разностей (МКР), DEM рассматривает материал как совокупность дискретных элементов, взаимодействующих посредством контактных сил. Такой подход позволяет учитывать межчастичные контакты, трение, упругие и пластические деформации, а также разрушение материала на уровне отдельных элементов.

Метод дискретных элементов находит широкое применение в различных областях науки и промышленности. В горном деле он используется для моделирования процессов дробления горных пород, анализа устойчивости откосов и движения сыпучих материалов в бункерах. В нефтегазовой отрасли DEM применяется для исследования поведения частиц при гидроразрыве пласта и фильтрации жидкостей через пористые среды. В гражданском строительстве метод позволяет моделировать динамическое взаимодействие грунта с инженерными конструкциями, оценивая устойчивость фундаментов, подпорных стен и дорожных покрытий.

Основная идея метода заключается в численном решении уравнений движения для каждой частицы с учетом внешних и контактных сил. Динамика системы определяется на основе законов Ньютона, а контактные взаимодействия описываются различными моделями, включая модель Герца–Миндлина и модели липкого контакта. В данной работе используется модель Герца для определения контактных сил и моментов. По своей природе DEM относится к бессеточным лагранжевым методам [12–15] и сводится к явному интегрированию уравнений движения для каждой частицы как твердого тела:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_{i,n} + \mathbf{F}_{i,t} + \mathbf{F}_{i,f} + \mathbf{F}_{i,b}, \quad (1)$$

$$I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \mathbf{r}_{i,c} \times \mathbf{F}_{i,t} + \mathbf{T}_{i,r}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{i,c}$ — вектор, соединяющий центр масс частицы с точкой контакта; $\mathbf{F}_{i,n}$ — нормальная составляющая контактной силы между частицами; $\mathbf{F}_{i,t}$ — тангенциальная составляющая контактной силы между частицами; $\mathbf{F}_{i,f}$ — сила со стороны окружающей среды (не рассматривается в данной работе); $\mathbf{F}_{i,b}$ — суммарное воздействие других центральных сил (гравитация, сила Кулона и др.); $\mathbf{T}_{i,r}$ — дополнительный момент сил, учитывающий неидеальность формы частицы.

В простейшей постановке каждая частица характеризуется радиус-вектором центра $\mathbf{x}_i$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_i$. Линейные и угловые ускорения вычисляются из уравнений (1) и (2). В DEM частицы рассматриваются как упругие слабдеформируемые тела, где деформация математически описывается как пространственное пересечение частиц. Линейная модель пружинно-демпферного взаимодействия (рис. 1) выражает нормальную составляющую контактной силы через характеристический размер области пересечения δ и относительную скорость контактирующих частиц Δu :

$$\mathbf{F}_n = -k_n \delta_n + c_n \Delta \mathbf{u}_n. \quad (3)$$

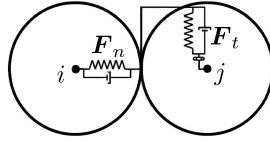


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия двух частиц в модели дискретных элементов; показаны нормальная (F_n) и тангенциальная (F_t) составляющие контактной силы
 [Figure. 1. Schematic of contact interaction between two particles in the discrete element method; shown are the normal (F_n) and tangential (F_t) components of the contact force]

Касательная составляющая силы отталкивания определяется как

$$F_t = \min \left\{ \left| k_t \int_{t_{c,0}}^t \Delta u_t dt + c_t \Delta u_t \right|, \mu F_n \right\}, \quad (4)$$

где $\delta_n = \delta \mathbf{n} = \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) / \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, направленный вдоль линии, соединяющий центры масс частиц; Δu_n и Δu_t — нормальная и тангенциальная составляющие относительной скорости двух частиц, находящихся в контакте; k_n , k_t и c_n , c_t — нормальные и касательные коэффициенты жесткости и демпфирования. Формулы (3) и (4) справедливы и для контакта частицы со стенкой с учетом ограничения кулоновской силой трения с коэффициентом μ .

Интегральный член в (4) соответствует закону Гука для упругой тангенциальной деформации поверхностей двух частиц в контакте, который произошел в момент времени $t = t_{c,0}$, а демпфирующая составляющая учитывает диссипацию упругой энергии. Вариация коэффициентов k_n , k_t , c_n , c_t как функций пространственного пересечения частиц позволяет получать различные линейные и нелинейные модели контактного взаимодействия [16–18].

Здесь и далее индексы i и j относятся к двум соседним взаимодействующим частицам. Для контактной модели Герца, которая используется в численных расчетах, коэффициенты k_n , k_t и c_n , c_t в случае взаимодействия двух произвольных частиц рассчитываются следующим образом [13,17,20]:

$$k_n = \frac{4}{3} Y^* \sqrt{R^* \delta_n}, \quad c_n = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_n m^*} \geq 0,$$

$$k_t = 8 G^* \sqrt{R^* \delta_n}, \quad c_t = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta \sqrt{S_t m^*} \geq 0.$$

При этом в случае контакта двух частиц с массами m_1 и m_2 , размерами R_1 и R_2 , модулями Юнга Y_1 и Y_2 , коэффициентами Пуассона ν_1 и ν_2 :

$$S_n = 2 Y^* \sqrt{R^* \delta_n}, \quad S_t = 8 G^* \sqrt{R^* \delta_n}, \quad \beta = \frac{\ln e}{\sqrt{\ln^2 e + \pi^2}},$$

$$\frac{1}{Y^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{Y_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{Y_2}, \quad \frac{1}{G^*} = \frac{2(2 - \nu_1)(1 + \nu_1)}{Y_1} + \frac{2(2 - \nu_2)(1 + \nu_2)}{Y_2},$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad \frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

где e — коэффициент упругого восстановления, который равен отношению скоростей частицы после и до контакта. Как правило, это пользовательская константа, значения которой задаются в диапазоне от 0 до 1.

Численное решение уравнений (1) и (2) получается их последовательным интегрированием с помощью методов трапеций или прямоугольников, в последнем в качестве опорной точки может быть выбрана точка посередине отрезка интегрирования. Для практического внедрения DEM важным аспектом является алгоритм поиска контактов для системы из многих частиц [19, 20]. В 1967 году Верлетом была представлена модель создания списков ближайших соседей. Идея состоит в том, что список потенциальных контактов формируется периодически. Далее на каждом временном шаге этот список проверяется и выполняются вычисления контактных сил. Такой подход позволяет заранее исключать пары частиц, которые находятся далеко друг от друга [21–23]. Две частицы добавляются в список контактов, если

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| < r_i + r_j + s,$$

где $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ — радиус-векторы центров взаимодействующих частиц; r_i, r_j — радиусы взаимодействующих сфер; s — параметр Верлета, или «скин» параметр, который определяет, как долго текущий список контактов может оставаться релевантным. Полагая постоянным временной шаг Δt , а также, обозначая максимальную скорость частиц как $v_{\max}$, текущий список контактов можно не обновлять следующее количество шагов:

$$N_{\text{verlet}} = \frac{s}{2v_{\max}\Delta t}.$$

2. Экспериментальные результаты. С помощью методики обращенно-го эксперимента проведено исследование ударного взаимодействия тел с пористой средой [24]. Методика предназначена для определения силы сопротивления внедрению ударника путем анализа интегральных нагрузок на начальном участке проникания. Она сводится к следующему: контейнер заданных размеров, заполненный пористым материалом, который разгоняется до требуемой скорости и соударяется с неподвижным коническим индентором (полный угол раствора 60°), закрепленным на мерном стержне. Материал стержня и конуса подбирается таким образом, чтобы исключить пластические деформации при выбранных скоростях удара.

В ходе ударного взаимодействия в стержне регистрируется упругий импульс сжатия с деформацией $\varepsilon(t)$. Сила сопротивления прониканию $F(t)$, действующая на индентор при взаимодействии с пористой средой, определяется по зарегистрированному импульсу сжатия с использованием соотношения

$$F(t) = E\varepsilon(t)S,$$

где E — модуль упругости материала мерного стержня; S — площадь его поперечного сечения. Таким образом, задача измерения сил сопротивления сводится к регистрации продольных упругих деформаций в мерном стержне.

Регистрация продольного импульса осуществлялась датчиками, расположенными на боковой поверхности опорного стержня на расстоянии трех диаметров (60 мм) от места крепления конической части. Конический индентор

имел диаметр основания 20 мм с полным углом раствора 60° . В эксперименте использовался пористый слой, размещенный в полипропиленовом контейнере со следующими параметрами: длина 70 мм, внешний диаметр 56.8 мм, внутренний диаметр 54.5 мм, толщина дна 2 мм. Глубина заполнения контейнера пористым материалом составляла 38 мм при массе 400 г. Длина конической части опорного стержня равнялась 17.3 мм.

Для анализа погрешностей измерений с помощью программного комплекса UPSGOD [40] было выполнено численное моделирование процесса распространения волн деформации от зоны контакта до тензодатчиков, расположенных на расстоянии трех диаметров стержня. Результаты моделирования (рис. 2, кривые 2 и 4) показали отсутствие значительных искажений сигнала на этом расстоянии. На рис. 2 кривые 1 и 3 соответствуют экспериментальным данным о силах сопротивления, зарегистрированным при скоростях соударения 179 м/с и 159 м/с соответственно.

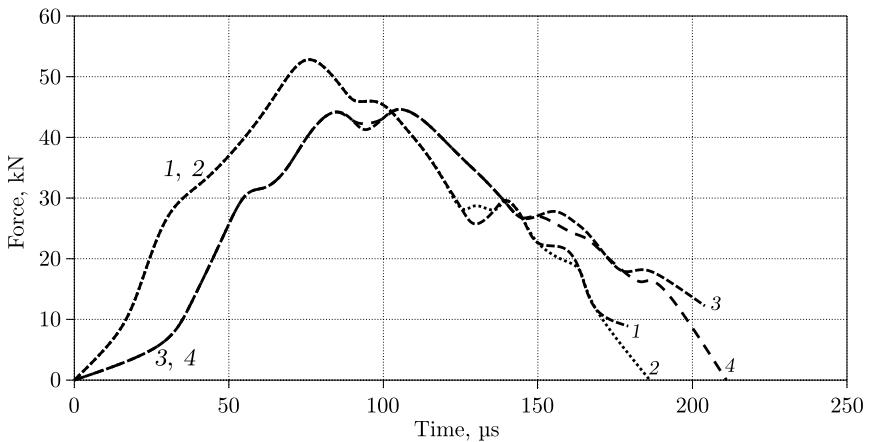


Рис. 2. Фиксируемая сила в эксперименте (кривые 1, 3) и при численном расчете (кривые 2, 4) на боковой поверхности мерного стержня на расстоянии трех диаметров

[Figure 2. Measured force in the experiment (curves 1, 3) and in numerical simulation (curves 2, 4) on the lateral surface of the measuring rod at a distance of three diameters]

3. Моделирование ударного взаимодействия пористой среды с коническим индентором. На рис. 3 представлена расчетная схема взаимного расположения упругого стержня с коническим контактным элементом и пористой среды. Схема соответствует обращенному эксперименту [24], проводившемуся для оценки силы сопротивления при внедрении опорного стержня путем анализа интегральных нагрузок на начальном участке проникновения. На рис. 3 показана конфигурация пористого слоя и опорного стержня с коническим элементом.

Моделирование ударного взаимодействия осуществлялось с использованием собственного оригинального программного обеспечения, реализующего метод DEM [25]. Параметры пористой упаковки в расчетах:

- модуль Юнга $E = 200$ ГПа;
- коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$;
- объемная доля пор $\phi = 0.36$.

Коэффициенты k_n , k_t и c_n , c_t рассчитывались на каждом временном шаге автоматически с применением контактной модели Герца [25–28] на основе

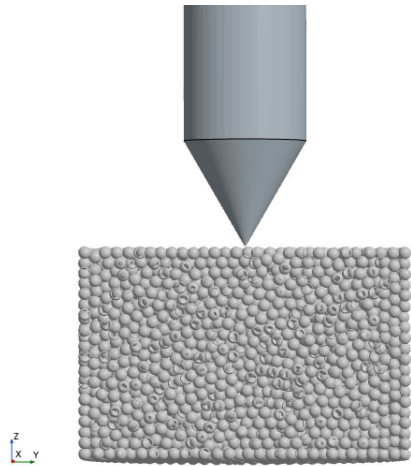


Рис. 3. Расчетная схема обращенного эксперимента: взаимодействие конического индентора с гранулированной средой

[Figure. 3. Computational scheme of the inverse experiment: interaction between the conical indenter and granular medium]

заданных значений модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Численное моделирование отдельных частиц рассмотрено в работах [29–34], других пористых структур — в [35–40].

В DEM-моделировании мерный стержень и конический элемент рассматривались как упругие малодеформируемые тела. Расчеты выполнялись с поверхностной сеткой (размер ячейки 0.2 мм для конической части), коэффициент трения между пористым слоем и стержнем принят равным 0.3. Вариации коэффициента трения скольжения не оказывают существенного влияния на результаты. Полипропиленовый контейнер в модели не учитывался, начальная скорость пористой среды составляла 159 м/с и 179 м/с, при этом стержень с коническим элементом находился в состоянии покоя.

Трехмерная постановка задачи в декартовой системе координат XYZ (начало в вершине конуса) предполагала неподвижность, но упругую деформируемость стержня и конуса (рис. 3). Движение гранулированной среды инициировалось вдоль оси Z . Контактное взаимодействие между соседними частицами с номерами i и j рассчитывалось в локальных системах координат для каждой сферы гранулированной среды на каждом временном шаге.

На рис. 4, 5 показаны измеренная сила воздействия DEM-частиц на коническую часть стержня вдоль оси Z (кривая 1), усредненная сила (шаг усреднения — 100 временных интервалов, кривая 2) и экспериментальная зависимость (кривая 3).

На рис. 6 и 7 представлены распределения скоростей в упаковке DEM-частиц и ее положения в моменты времени 40, 80 и 100 мкс соответственно для случая метания упаковки со скоростью 159 м/с и 20, 40 и 80 мкс соответственно для случая метания упаковки со скоростью 179 м/с (рис. 7).

Как видно из представленных результатов, данные численного моделирования демонстрируют хорошее соответствие экспериментальным результатам обращенного эксперимента. На рис. 3 кривые 1 и 3 отображают нагрузку, характер изменения которой качественно повторяет экспериментальную за-

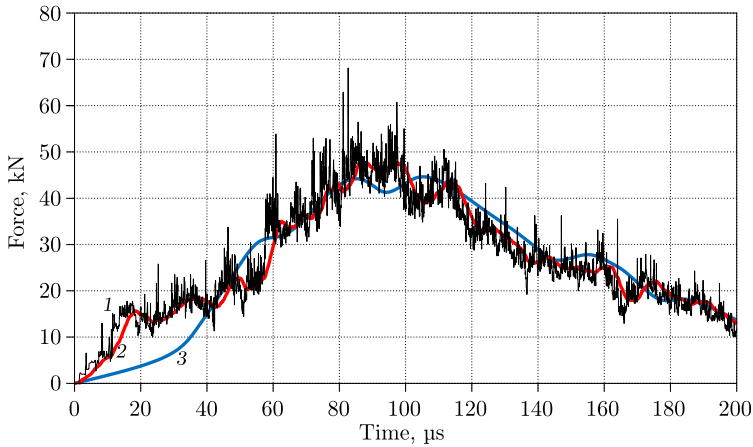


Рис. 4. Расчетные силы нагрузки со стороны пористой среды в сравнении с экспериментом для скорости 159 м/с: 1 — сила воздействия DEM-частиц на конический индентор; 2 — усредненная сила с шагом 100 временных интервалов; 3 — экспериментальные данные

[Figure 4. Calculated loading forces from the porous medium compared with experimental data at 159 m/s: 1 — force exerted by DEM particles on the conical indenter; 2 — averaged force with 100-time-step interval; 3 — experimental measurements]

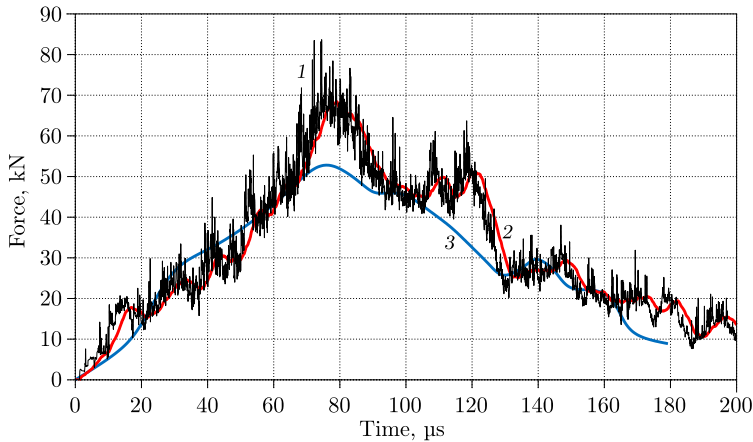


Рис. 5. Расчетные силы нагрузки со стороны пористой среды в сравнении с экспериментом для скорости 179 м/с: 1 — сила воздействия DEM-частиц на конический индентор; 2 — усредненная сила с шагом 100 временных интервалов; 3 — экспериментальные данные

[Figure 5. Calculated loading forces from the porous medium compared with experimental data at 179 m/s: 1 — force exerted by DEM particles on the conical indenter; 2 — averaged force with 100-time-step interval; 3 — experimental measurements]

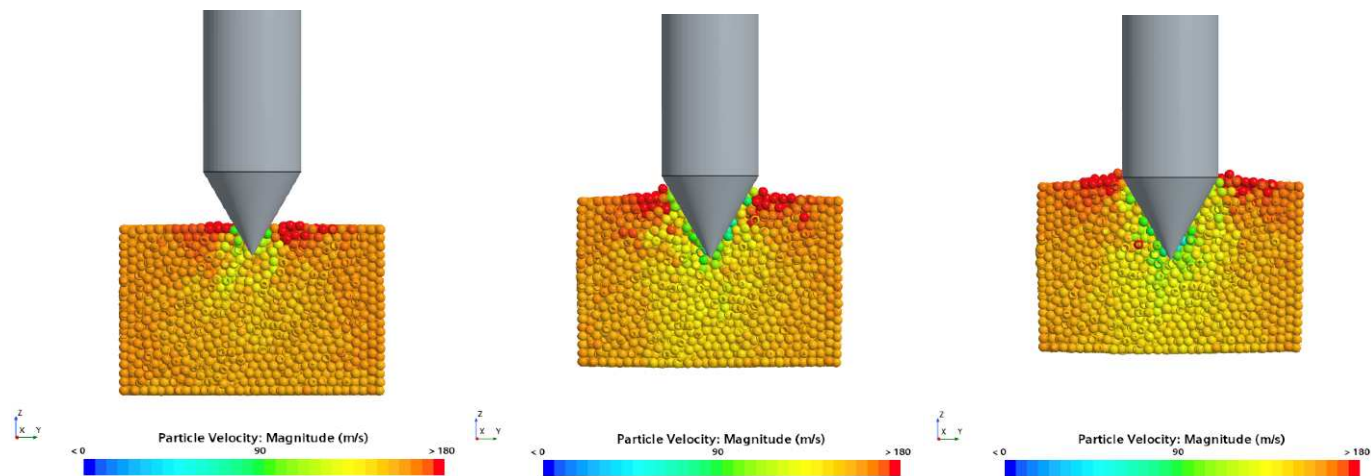


Рис. 6. Состояние упаковки частиц и их скорости (м/с), метаемой среды со скоростью 159 м/с, в моменты времени 40, 80 и 100 мкс соответственно

[Figure 6. State of particle packing and velocity distribution (m/s) for the impacted medium at 159 m/s, shown at time instants of 40, 80, and 100 μ s respectively]

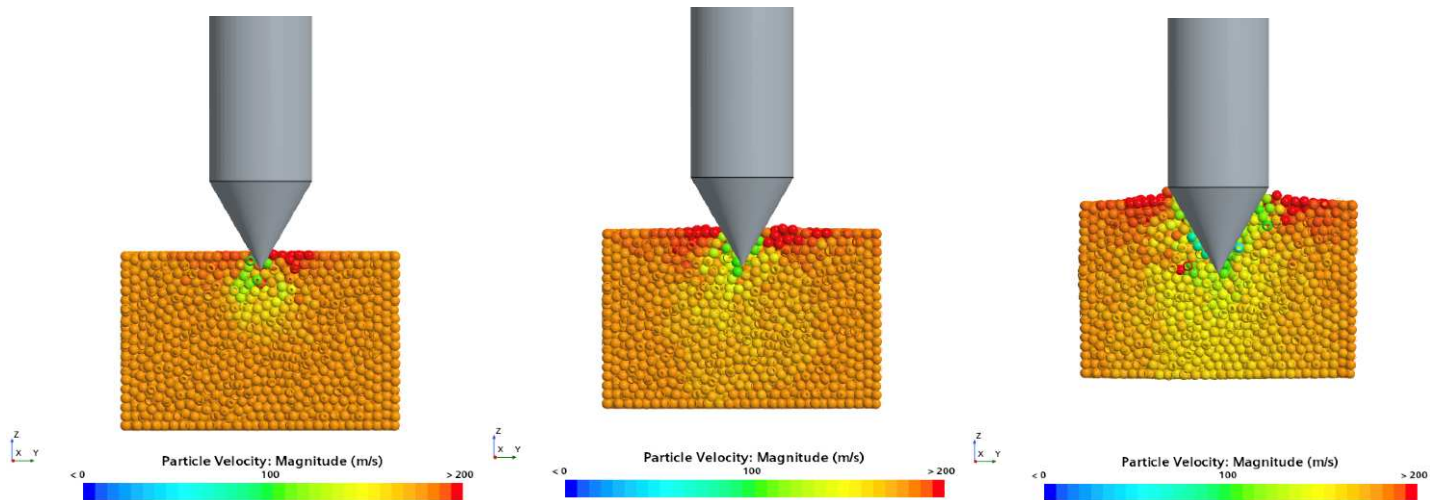


Рис. 7. Состояние упаковки частиц и их скорости (м/с), метаемой среды со скоростью 179 м/с, в моменты времени 40, 80 и 100 мкс соответственно

[Figure 7. State of particle packing and velocity distribution (m/s) for the impacted medium at 179 m/s, shown at time instants of 40, 80, and 100 μ s respectively]

висимость, полученную по данным тензорезисторов мерного стержня. При этом амплитудные значения сигнала в эксперименте (рис. 3, кривые 2 и 4) находятся в удовлетворительном согласии с результатами численного моделирования. Применение метода дискретных элементов для моделирования пористой среды позволило воспроизвести не только общий характер нагружения, но и такие особенности экспериментальных данных, как спад сигнала и деградация структуры упаковки при $t > 80$ мкс.

На рис. 8 представлено трехмерное изображение, иллюстрирующее конфигурацию внедряемого тела и состояние пористого слоя в момент времени $t = 250$ мкс для случая начальной скорости упаковки 159 м/с.

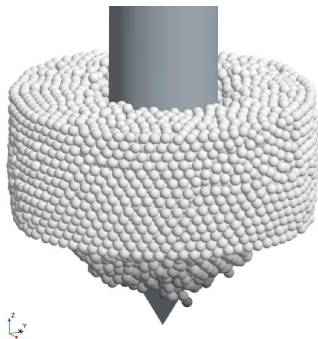


Рис. 8. Состояние упаковки пористого слоя, соответствующее моменту времени 250 мкс для случая начальной скорости 159 м/с

[Figure 8. Configuration of the porous layer packing at 250 μ s for the initial impact velocity of 159 m/s]

Закключение. В работе исследовано динамическое поведение пористой среды при ударном взаимодействии с коническим индентором. Выполнены экспериментальные исследования ударного нагружения, включавшие испытания по соударению контейнера с пористым слоем и опорного мерного стержня, что позволило получить данные о возникающих контактных силах и напряженно-деформированном состоянии. Параллельно разработана вычислительная модель метода дискретных элементов (DEM), адекватность которой подтверждена верификацией на экспериментальных результатах. Проведен анализ пространственно-временного распределения напряжений, позволивший установить закономерности эволюции динамического отклика пористой среды в процессе ударного воздействия.

Основные результаты исследования могут быть сформулированы следующим образом:

- На начальной стадии контактного взаимодействия (первые 20 мкс) наблюдается интенсивная переупаковка гранул пористой среды в зоне контакта с индентором.
- Пиковое контактное усилие достигает максимума к моменту времени 80 мкс, после чего начинается стадия разлета гранулята, сопровождающаяся релаксацией контактных напряжений.
- Предложенный вычислительный подход демонстрирует эффективность при моделировании динамики гранулированных сред и расчете интегральных нагрузок на взаимодействующие с ними упругие тела.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии каких-либо конфликтов интересов, связанных с публикацией данной статьи.

Авторский вклад и ответственность. А.В. Кочетков — концепция исследования, постановка целей и задач, визуализация данных, верификация результатов, работа с черновиком рукописи. И.А. Модин — концепция исследования, выполнение численного моделирования, подготовка и редактирование рукописи. В.В. Баландин — планирование и проведение экспериментальных исследований, обработка и интерпретация данных, работа с черновиком рукописи. Вл.Вл. Баландин — планирование и проведение экспериментальных исследований, обработка и интерпретация данных, работа с черновиком рукописи. К.Д. Бессмертный — выполнение численных расчетов, обработка и анализ результатов, работа с черновиком рукописи. Все авторы принимали участие в утверждении окончательной версии рукописи и несут полную ответственность за содержание публикации.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 22–79–10076, <https://rscf.ru/project/22-79-10076/>).

Благодарности. Авторы выражают признательность анонимным рецензентам за внимательное рассмотрение работы и конструктивные замечания, способствовавшие улучшению качества публикации.

Библиографический список

1. Гельфанд Б. Е., Сильников М. В. *Фугасные эффекты взрывов*. СПб.: Полигон, 2002. 272 с.
2. Гельфанд Б. Е., Губанов А. В., Тимофеев Е. И. Взаимодействие воздушных ударных волн с пористым экраном // *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1983. № 4. С. 79–84. <https://mzg.ipmnet.ru/ru/Issues/1983/4/79>.
3. Гельфанд Б. Е., Медведев С. П., Поленов А. Н., Фролов С. М. Передача ударно-волновой нагрузки насыщенными средами // *Прикл. мех. техн. физ.*, 1988. Т. 29, № 2. С. 115–121.
4. Glam B., Igra O., Britan A., Ben-Dor G. Dynamics of stress wave propagation in a chain of photoelastic discs impacted by a planar shock wave; Part I, experimental investigation // *Shock Waves*, 2007. vol. 17, no. 1. pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0094-x>.
5. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials // *Exp. Fluids*, 1997. vol. 22. pp. 507–518. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003480050078>.
6. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Shock waves attenuation by granular filters // *Int. J. Multiph. Flow*, 2001. vol. 27, no. 4. pp. 617–634. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(00\)00048-3](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(00)00048-3).
7. Britan A., Ben-Dor G. Shock tube study of the dynamical behavior of granular materials // *Int. J. Multiph. Flow*, 2006. vol. 32, no. 5. pp. 623–642. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007>.
8. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Development of a general approach for predicting the pressure fields of unsteady gas flows through granular media // *J. Appl. Phys.*, 2006. vol. 99, 093519. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2197028>.
9. Britan A., Elperin T., Igra O., Jiang J. P. Head-on collision of a planar shock wave with a granular layer // *AIP Conf. Proc.*, 1996. vol. 370. pp. 971–974. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.50571>.
10. Милявский В. В., Фортвов В. Е., Фролова А. А. [и др.] О механизме усиления давления при увеличении пористости сред, ударно сжимаемых в конических и цилиндрических мишенях // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010. Т. 50, № 12. С. 2195–2207.

11. Ruan H. H., Gao Z. Y., Yu T. X. Crushing of thin-walled spheres and sphere arrays // *Int. J. Mech. Sci.*, 2006. vol. 48, no. 2. pp. 117–133. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.08.006>.
12. Clift R., Grace J. R., Weber M. E. *Particles, Bubbles and Drops*. New York: Academic Press, 1978. 394 pp.
13. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies // *Géotechnique*, 1979. no. 1. pp. 47–65. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>.
14. Sommerfeld M. *Theoretical and Experimental Modelling of Particulate Flow: Overview and Fundamentals*: Lecture Series No. 2000-6. Rhode-Saint-Genèse, Belgium: Von Karman Institute for Fluid Mechanics, 2000. 62 pp.
15. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. xii+452 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781139171731>.
16. Walton O. R. Numerical simulation of inelastic frictional particle-particle-interactions / *Particulate Two-Phase Flow*; ed. M.C. Roco. Stoneham, MA: Butterworth-Heinemann, 1993. pp. 884–911.
17. Di Renzo A., Di Maio F. P. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes // *Chem. Eng. Sci.*, 2004. no. 3. pp. 525–541. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2003.09.037>.
18. Pöschel T., Schwager T. *Computational Granular Dynamics. Models and Algorithms*. Berlin: Springer, 2005. x+322 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-27720-X>.
19. Walton O. R., Braun R. L. Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks // *J. Rheol.*, 1986. vol. 30, no. 5. pp. 949–980. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.549893>.
20. Kloss C., Goniva C., Hager A., et al. Models, algorithms and validation for opensource DEM and CFD-DEM // *Prog. Comput. Fluid Dyn.*, 2012. vol. 12, no. 2–3. pp. 140–152. DOI: <https://doi.org/10.1504/pcfd.2012.047457>.
21. Schwager T., Pöschel T. Coefficient of restitution and linear-dashpot model revisited // *Granul. Matter*, 2007. vol. 9, no. 6. pp. 465–469. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10035-007-0065-z>.
22. Zhu H. P., Zhou Z. Y., Yang R. Y., Yu A. B. Discrete particle simulation of particulate systems: A review of major applications and findings // *Chem. Eng. Sci.*, 2008. vol. 63, no. 23. pp. 5728–5770. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.08.006>.
23. Ai J., Chen J.-F., Rotter J. M., Ooi J. Y. Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations // *Powder Technol.*, 2011. vol. 206, no. 3. pp. 269–282. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2010.09.030>.
24. Модин И. А., Баландин Вл. Вл. Экспериментальные исследования взаимодействия ударников с гранулированными слоями из металлических шариков // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2023. Т. 85, № 4. С. 539–550. EDN: MRZLIY. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-4-539-550>.
25. Tsuji T., Yabumoto K., Tanaka T. Spontaneous structures in three-dimensional bubbling gas-fluidized bed by parallel DEM-CFD coupling simulation // *Powder Technol.*, 2008. vol. 184, no. 2. pp. 132–140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2007.11.042>.
26. Zhou Z., Zhu H., Yu A., et al. Discrete particle simulation of gas-solid flow in a blast furnace // *Comput. Model. Eng. Sci.*, 2008. vol. 32, no. 8. pp. 1760–1772. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2007.08.018>.
27. Kochetkov A. V., Leontev N. V., Modin I. A. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer // *AIP Conf. Proc.*, 2019. vol. 2116, 270003. EDN: LYDUXA. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5114277>.
28. Zhu H. P., Zhou Z. Y., Yang R. Y., Yu A. B. Discrete particle simulation of particulate systems: Theoretical developments // *Chem. Eng. Sci.*, 2007. vol. 62, no. 13. pp. 3378–3396. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2006.12.089>.
29. Модин И. А., Кочетков А. В., Глазова Е. Г. Численное исследование взаимодействия ударной волны с проникаемым деформируемым гранулированным слоем // *Вестн.*

- Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 1. С. 79–92. EDN: FUXBZE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1879>.
30. Глазова Е. Г., Кочетков А. В., Лисицын А. А., Модин И. А. Численное моделирование взаимодействия деформируемого газопроницаемого фрагмента гранулированного слоя с ударной волной в трехмерной постановке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 4. С. 645–658. EDN: CFAYCE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2007>.
31. Kochetkov A. V., Modin I. A. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable granulated layer / *Behav. Mater. Impact Explos. High Press. Dyn. Strain Rates / Advanced Structured Materials*, 176; eds. M. Yu. Orlov, P. M. Visakh. Cham: Springer, 2023. pp. 129–143. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-17073-7_9.
32. Abuziarov M. H., Glazova E. G., Kochetkov A. V., et al. Simulation of the interaction of waves with granulated layers in shock tubes / *Proc. XII All Russ. Sci. Conf. Curr. Issues Contin. Mech. Celest. Mech.* / Springer Proceedings in Physics, 412; eds. M. Yu. Orlov, P. M. Visakh. Singapore: Springer, 2024. pp. 122–127. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-97-1872-6_18.
33. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А., Савихин А. О. Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. мех.*, 2018. № 52. С. 53–62. EDN: XNHSEX. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/52/6>.
34. Брагов А. М., Константинов А. Ю., Кочетков А. В. [и др.] Экспериментальное исследование деформационных свойств насыпного слоя из свинцовых шариков при динамическом и квазистатическом нагружении // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2017. Т. 4. С. 16–27. EDN: YLDACI. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.02>.
35. Sukhanov M. V., Velmuzhov A. P., Stepanov B. S., et al. The $\text{Ga}_{20}\text{Ge}_{20}\text{Se}_{60}$ glass-ceramics as a promising long-wave IR optical material // *J. Non-Cryst. Solids*, 2022. vol. 590, 121700. EDN: KBTUAI. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2022.121700>.
36. Telegin S. V., Kirillova N. I., Modin I. A., Suleimanov E. V. Effect of particle size distribution on functional properties of $\text{Ce}_{0.9}\text{Y}_{0.1}\text{O}_{2-d}$ ceramics // *Ceram. Int.*, 2021. vol. 47, no. 12. pp. 17316–17321. EDN: RLZNQO. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.03.043>.
37. Laoucine A., Bachene M., Rechak S., et al. Perforation analysis by punching of metal sheets // *Ann. Chim. Sci. Matér.*, 2022. vol. 46, no. 1. pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.18280/ACSM.460101>.
38. Wang D., Liu E., Zhang D., et al. An elasto-plastic constitutive model for frozen soil subjected to cyclic loading // *Cold Reg. Sci. Technol.*, 2021. vol. 189, 103341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2021.103341>.
39. Модин И. А., Кочетков А. В., Повереннов Е. Ю. Численно-экспериментальное исследование нелинейного сжатия пакетов металлических плетеных сеток // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2022. Т. 84, № 2. С. 236–246. EDN: FTNGAQ. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-2-236-246>.
40. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1214, 012004. EDN: SLQSSR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004>.

MSC: 74M25, 70E55

Impact interaction between granular media and a rod with conical head

A. V. Kochetkov, I. A. Modin, V. V. Balandin,
Vl. Vl. Balandin, K. D. Bessmertnyi

Research Institute of Mechanics,
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23, pr. Gagarina, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation.

Abstract

Numerical modeling of impact interaction between a non-deformable conical body and a porous layer has been performed. The porous layer is represented as an assembly of discrete elements, whose motion and deformation are described using a mesh-free discrete element method (DEM). This approach interprets elements as particles with defined elastic properties, enabling effective simulation of processes involving large displacements and material discontinuity, unlike conventional mesh-based methods. The fundamental principles of DEM, which has gained widespread adoption due to advances in computational technologies, are presented. The numerical model and calculation methodology are described in detail. Simulation results are presented for normal high-velocity interaction between a deformable porous medium (composed of particles) and an elastic rod with a conical contact surface. Coulomb friction at the interface between the porous medium and conical surface is accounted for. The contact forces exerted by the discrete medium on the elastic conical body are evaluated. The numerical results are compared with experimental data obtained from reverse ballistic experiments where a container with porous material is projected against a stationary rod at various initial velocities.

Keywords: discrete element method, numerical modeling, experiment, three-dimensional problem, large displacements, impact, penetration, granular layer, friction.

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kochetkov A. V., Modin I. A., Balandin V. V., Balandin Vl. Vl., Bessmertnyi K. D. Impact interaction between granular media and a rod with conical head, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 430–447. EDN: WTDEIJ. DOI: 10.14498/vsgtu2157 (In Russian).

Authors' Details:

Anatoliy Vasilevich Kochetkov  <https://orcid.org/0000-0001-7939-8207>

Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Head of the Laboratory; Lab. of Dynamics of Multicomponent Media; e-mail: kochetkov@mech.unn.ru

Ivan A. Modin  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

Candidate of Technical Sciences; Senior Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials; e-mail: mianet@mail.ru

Received: 24th February, 2025 / Revised: 28th April, 2025 /

Accepted: 9th June, 2025 / First online: 17th July, 2025

Competing interests. The authors declare no competing interests regarding the publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. A.V. Kochetkov: Conceptualization; Methodology; Data visualization; Validation, Writing — original draft. I.A. Modin: Conceptualization; Numerical modeling; Writing — original draft and review & editing. V.V. Balandin: Experimental design; Investigation; Data curation; Writing — original draft. V.I. Balandin: Experimental design; Investigation; Data curation; Writing — original draft. K.D. Bessmertnyi: Numerical calculations; Formal analysis; Writing — original draft. All authors have read and approved the final manuscript and take full responsibility for its content.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22–79–10076, <https://rscf.ru/en/project/22-79-10076/>).

Acknowledgments. The authors are grateful to the anonymous reviewers for their thorough evaluation and constructive comments that helped improve the quality of this publication.

References

1. Gel'fand B. E., Sil'nikov M. V. *Fugasnyye efekty vzryvov* [High-Explosive Effects of Blasts]. St. Petersburg, Poligon, 2002, 272 pp. (In Russian)
2. Gel'fand B. E., Gubanov A. V., Timofeev E. I. Interaction of shock waves in air with a porous screen, *Fluid Dyn.*, 1984, vol. 18, no. 4, pp. 561–566. EDN: XUXOUW. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01090621>.
3. Gel'fand B. E., Medvedev S. P., Polenov A. N., Frolov S. M. Transmission of a shock load by bulk media, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1988, vol. 29, no. 2, pp. 268–273. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00908593>.
4. Glam B., Igra O., Britan A., Ben-Dor G. Dynamics of stress wave propagation in a chain of photoelastic discs impacted by a planar shock wave; Part I, experimental investigation, *Shock Waves*, 2007, vol. 17, no. 1, pp. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0094-x>.
5. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials, *Exp. Fluids*, 1997, vol. 22, pp. 507–518. DOI: <https://doi.org/10.1007/s003480050078>.
6. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Shock waves attenuation by granular filters, *Int. J. Multiph. Flow*, 2001, vol. 27, no. 4, pp. 617–634. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(00\)00048-3](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(00)00048-3).
7. Britan A., Ben-Dor G. Shock tube study of the dynamical behavior of granular materials, *Int. J. Multiph. Flow*, 2006, vol. 32, no. 5, pp. 623–642. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007>.

Vladimir V. Balandin  <https://orcid.org/0000-0002-3907-3480>

Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Leading Researcher; Lab. of Multicomponent Media Dynamics; e-mail: vbalandin99@gmail.com

Vladimir V.I. Balandin  <https://orcid.org/0000-0003-3061-8875>

Candidate of Technical Sciences; Leading Researcher; Lab. of Dynamic Testing of Materials; e-mail: rustydog2007@yandex.ru

Kirill D. Bessmertnyi  <https://orcid.org/0009-0003-0515-4375>

Junior Researcher; Lab. of Multicomponent Media Dynamics; e-mail: besskirill@gmail.com

8. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Development of a general approach for predicting the pressure fields of unsteady gas flows through granular media, *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, 093519. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2197028>.
9. Britan A., Elperin T., Igra O., Jiang J. P. Head-on collision of a planar shock wave with a granular layer, *AIP Conf. Proc.*, 1996, vol. 370, pp. 971–974. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.50571>.
10. Milyavskii V. V., Fortov V. E., Frolova A. A., et al. On the mechanism of pressure increase with increasing porosity of the media compressed in conical and cylindrical targets, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 12, pp. 2082–2094. EDN: OHPYBN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510120109>.
11. Ruan H. H., Gao Z. Y., Yu T. X. Crushing of thin-walled spheres and sphere arrays, *Int. J. Mech. Sci.*, 2006, vol. 48, no. 2, pp. 117–133. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.08.006>.
12. Clift R., Grace J. R., Weber M. E. *Particles, Bubbles and Drops*. New York, Academic Press, 1978, 394 pp.
13. Cundall P. A., Strack O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, 1979, no. 1, pp. 47–65. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>.
14. Sommerfeld M. *Theoretical and Experimental Modelling of Particulate Flow: Overview and Fundamentals*, Lecture Series No. 2000-6. Rhode-Saint-Genèse, Belgium, Von Karman Institute for Fluid Mechanics, 2000, 62 pp.
15. Johnson K. L. *Contact Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1987, xii+452 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781139171731>.
16. Walton O. R. Numerical simulation of inelastic frictional particle-particle-interactions, In: *Particulate Two-Phase Flow*; ed. M.C. Roco. Stoneham, MA, Butterworth-Heinemann, 1993, pp. 884–911.
17. Di Renzo A., Di Maio F. P. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes, *Chem. Eng. Sci.*, 2004, no. 3, pp. 525–541. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2003.09.037>.
18. Pöschel T., Schwager T. *Computational Granular Dynamics. Models and Algorithms*. Berlin, Springer, 2005, x+322 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-27720-X>.
19. Walton O. R., Braun R. L. Viscosity, granular-temperature, and stress calculations for shearing assemblies of inelastic, frictional disks, *J. Rheol.*, 1986, vol. 30, no. 5, pp. 949–980. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.549893>.
20. Kloss C., Goniva C., Hager A., et al. Models, algorithms and validation for opensource DEM and CFD-DEM, *Prog. Comput. Fluid Dyn.*, 2012, vol. 12, no. 2–3, pp. 140–152. DOI: <https://doi.org/10.1504/pcfd.2012.047457>.
21. Schwager T., Pöschel T. Coefficient of restitution and linear-dashpot model revisited, *Granul. Matter*, 2007, vol. 9, no. 6, pp. 465–469. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10035-007-0065-z>.
22. Zhu H. P., Zhou Z. Y., Yang R. Y., Yu A. B. Discrete particle simulation of particulate systems: A review of major applications and findings, *Chem. Eng. Sci.*, 2008, vol. 63, no. 23, pp. 5728–5770. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.08.006>.
23. Ai J., Chen J.-F., Rotter J. M., Ooi J. Y. Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations, *Powder Technol.*, 2011, vol. 206, no. 3, pp. 269–282. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2010.09.030>.
24. Modin I. A., Balandin V. I. Experimental studies of the interaction of strikers with granular layers of metal balls, *Probl. Strength Plast.*, 2023, vol. 85, no. 4, pp. 539–550 (In Russian). EDN: MRZLIY. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-4-539-550>.
25. Tsuji T., Yabumoto K., Tanaka T. Spontaneous structures in three-dimensional bubbling gas-fluidized bed by parallel DEM-CFD coupling simulation, *Powder Technol.*, 2008, vol. 184, no. 2, pp. 132–140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2007.11.042>.
26. Zhou Z., Zhu H., Yu A., et al. Discrete particle simulation of gas-solid flow in a blast furnace, *Comput. Model. Eng. Sci.*, 2008, vol. 32, no. 8, pp. 1760–1772. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2007.08.018>.

27. Kochetkov A. V., Leontev N. V., Modin I. A. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer, *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2116, 270003. EDN: LYDUXA. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5114277>.
28. Zhu H. P., Zhou Z. Y., Yang R. Y., Yu A. B. Discrete particle simulation of particulate systems: Theoretical developments, *Chem. Eng. Sci.*, 2007, vol. 62, no. 13, pp. 3378–3396. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2006.12.089>.
29. Modin I. A., Kochetkov A. V., Glazova E. G. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable deformable granulated layer, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 79–92 (In Russian). EDN: FUXBZE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1879>.
30. Glazova E. G., Kochetkov A. V., Lisitsyn A. A., Modin I. A. Numerical simulation of the interaction of a deformable gas permeable fragment of a granular layer with a shock wave in a three-dimensional formation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 4, pp. 645–658 (In Russian). EDN: CFAYCE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2007>.
31. Kochetkov A. V., Modin I. A. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable granulated layer, In: *Behav. Mater. Impact Explos. High Press. Dyn. Strain Rates*, Advanced Structured Materials, 176; eds. M. Yu. Orlov, P. M. Visakh. Cham, Springer, 2023, pp. 129–143. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-17073-7_9.
32. Abuziarov M. H., Glazova E. G., Kochetkov A. V., et al. Simulation of the interaction of waves with granulated layers in shock tubes, In: *Proc. XII All Russ. Sci. Conf. Curr. Issues Contin. Mech. Celest. Mech.*, Springer Proceedings in Physics, 412; eds. M. Yu. Orlov, P. M. Visakh. Singapore, Springer, 2024, pp. 122–127. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-97-1872-6_18.
33. Kochetkov A. V., Leontev N. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids, *Tomsk State Univ. J. Math. Mech.*, 2018, vol. 52, pp. 53–62 (In Russian). EDN: XNHSEX. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/52/6>.
34. Bragov A. M., Konstantinov A. U., Kochetkov A. V., et al. Experimental study of deformation properties of a bulk layer from plumbum balls under dynamic and quasistatic loading, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, vol. 4, pp. 16–27 (In Russian). EDN: YLDACI. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.02>.
35. Sukhanov M. V., Velmuzhov A. P., Stepanov B. S., et al. The $\text{Ga}_{20}\text{Ge}_{20}\text{Se}_{60}$ glass-ceramics as a promising long-wave IR optical material, *J. Non-Cryst. Solids*, 2022, vol. 590, 121700. EDN: KBTUAI. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrsol.2022.121700>.
36. Telegin S. V., Kirillova N. I., Modin I. A., Suleimanov E. V. Effect of particle size distribution on functional properties of $\text{Ce}_{0.9}\text{Y}_{0.1}\text{O}_{2-d}$ ceramics, *Ceram. Int.*, 2021, vol. 47, no. 12, pp. 17316–17321. EDN: RLZNQO. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.03.043>.
37. Laoucine A., Bachene M., Rechak S., et al. Perforation analysis by punching of metal sheets, *Ann. Chim. Sci. Matér.*, 2022, vol. 46, no. 1, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.18280/ACSM.460101>.
38. Wang D., Liu E., Zhang D., et al. An elasto-plastic constitutive model for frozen soil subjected to cyclic loading, *Cold Reg. Sci. Technol.*, 2021, vol. 189, 103341. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2021.103341>.
39. Modin I. A., Kochetkov A. V., Poverennov E. Yu. Numerical and experimental study nonlinear compression packages of metal meshes, *Probl. Strength Plast.*, 2022, vol. 84, no. 2, pp. 236–246 (In Russian). EDN: FTNGAQ. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-2-236-246>.
40. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1214, 012004. EDN: SLQSSR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004>.



УДК 539.374

Структурно-механическая модель для описания эффекта Портевена–Ле Шателье

К. А. Мехоношин, П. В. Трусев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
факультет прикладной математики и механики,
Россия, 614013, Пермь, ул. пр. Поздеева, 11.

Аннотация

Несмотря на почти 200-летнюю историю с момента открытия возникновения в определенных режимах деформирования большинства сплавов эффекта прерывистой пластичности, последний продолжает оставаться привлекательным объектом исследования механиков и физиков. Развиваются как экспериментальные, так и теоретические исследования, на основе которых разрабатываются различные математические модели, краткий обзор которых приведен в настоящей работе. С учетом стохастического характера проявления эффекта Портевена–Ле Шателье, включая пространственно-временное распределение полос сдвига, изменение отклика при монотонном деформировании, обнаруживаемые в натурных и численных экспериментах по деформированию образцов из различных сплавов, значительный интерес представляют также методы математического описания и анализа получаемых результатов.

На стадии разработки структуры формулируемой модели проанализированы физические механизмы, ответственные за возникновение эффекта Портевена–Ле Шателье. В качестве основных приняты два механизма: 1) формирование скоплений атомов примесей в окрестностях временно остановленных на препятствиях дислокаций; 2) захват атомов легирующих элементов медленно движущимися дислокациями. Для описания эффекта предложена модель одноосного растяжения стержня при кинематическом нагружении, основанная на структурно-механическом подходе. Сформулированы основные определяющие и эволюционные соотношения, базирующиеся на описании физических механизмов взаимодействия дислокаций с примесными атомами.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мехоношин К. А., Трусев П. В. Структурно-механическая модель для описания эффекта Портевена–Ле Шателье // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 448–471. EDN: XMFRLQ. DOI: 10.14498/vsgtu2229.

Сведения об авторах

Кирилл Алексеевич Мехоношин ✉️ <https://orcid.org/0009-0002-8549-3141>

бакалавр; лаборант-исследователь; лаб. многоуровневого моделирования конструкционных и функциональных материалов; e-mail: ctrl1111@vk.com

Петр Валентинович Трусев <https://orcid.org/0000-0001-8997-5493>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математического моделирования систем и процессов; e-mail: tpv@pstu.ru

Приведена двухэтапная процедура идентификации модели, основанная на методах статистического анализа и вейвлет-преобразования. Представлены результаты применения идентифицированной модели для описания рассматриваемого эффекта при деформировании образцов из сплава Al–Mg.

Ключевые слова: эффект Портевена–Ле Шателье, гипотеза Коттрелла, структурно-механический подход, определяющие соотношения, идентификация и верификация моделей, статистический анализ, вейвлет-анализ.

Получение: 22 мая 2025 г. / Исправление: 4 июня 2025 г. /

Принятие: 10 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 15 июля 2025 г.

Введение. Металлические сплавы, из которых большинство изделий изготавливаются методами термомеханической обработки, служат основными конструкционными материалами в большинстве отраслей промышленности. Необходимость решения многочисленных прикладных задач обусловлена постоянными требованиями к совершенствованию существующих и разработке новых технологий обработки сплавов для создания изделий с заданными эксплуатационными характеристиками. Особую актуальность представляет построение физически обоснованных конститутивных моделей (КМ) для исследования процессов термомеханической обработки многофазных сплавов, включая материалы, проявляющие эффект прерывистой пластичности при определенных температурно-скоростных условиях деформирования.

Фундаментальная часть решения данной проблемы включает детальный анализ и описание физических механизмов, реализующихся при термомеханической обработке сплавов, в частности, взаимодействия дислокаций с атомами примесей. В окрестностях дислокаций, временно остановленных у препятствий различной природы, формируются так называемые «атмосферы» примесных атомов [1], создающие дополнительное сопротивление их движению. Этот механизм является основной причиной возникновения эффекта прерывистой пластичности (эффекта Портевена–Ле Шателье [2], ЭПЛШ) в определенных диапазонах скоростей деформирования и температур, математическому моделированию которого посвящено настоящее исследование.

Внешнее проявление ЭПЛШ при деформировании сплавов характеризуется образованием полос сдвига — областей локализованных деформаций. Наличие таких полос на поверхности готовых изделий существенно увеличивает их шероховатость, снижает усталостную прочность, коррозионную стойкость и аэродинамические характеристики. Поэтому исследование возникновения ЭПЛШ, особенно на завершающих стадиях технологических процессов обработки сплавов, имеет важное практическое значение.

Целью данной работы является разработка конститутивной модели неупругого деформирования сплавов, учитывающей эффект Портевена–Ле Шателье на основе физических механизмов его возникновения. Математическая модель создана в рамках структурно-механического подхода и учитывает два основных механизма, обуславливающих ЭПЛШ:

- диффузию атомов примесей (как решеточную, так и туннельную), применяемую к временно остановленным дислокациям;

– захват примесных атомов медленно движущимися дислокациями.

В силу нелинейности и жесткости полученной системы уравнений особое внимание уделено алгоритму решения, основанному на пошаговой процедуре с итерациями на каждом шаге, реализуемой с использованием схем неявных методов Рунге—Кутты. Разработана процедура повышения эффективности вычислений при идентификации и верификации моделей прерывистой пластичности, основанная на принципе разделения параметров модели по рассматриваемым физическим механизмам неупругого деформирования. Для анализа результатов применены методы статистического и вейвлет-анализа, позволяющие адекватно описывать стохастическую природу скачков напряжений. Приведены результаты применения идентифицированной модели для описания одноосного кинематического нагружения стержня из сплава Al–Mg с учетом ЭПЛШ.

1. Краткий обзор работ по исследованию прерывистой пластичности. Большинство существующих моделей ЭПЛШ и методов их идентификации основано на результатах экспериментальных исследований. Значительная часть экспериментальных данных получена в ходе опытов по одноосному нагружению образцов различных сплавов [3–7]. Многочисленные исследования посвящены анализу возникновения и распространения полос локализованной деформации вдоль образцов с использованием оптических методов [8–11].

В литературе принято выделять три основных типа проявления ЭПЛШ: А, В и С [12]. Для большинства сплавов наблюдается последовательное изменение типа эволюции полос сдвига от А к В и затем к С при уменьшении скорости деформации и/или повышении температуры. Более подробное описание указанных и других экспериментальных методов исследования ЭПЛШ, а также их результатов представлено в обзорной статье [13]. В настоящей работе основное внимание уделено анализу существующих моделей описания прерывистой пластичности.

1.1. Некоторые существующие модели для описания ЭПЛШ. В данном обзоре кратко приведены основные идеи и соотношения наиболее известных работ по моделированию эффекта Портевена—Ле Шателье, модификация которых продолжается до настоящего времени. С более подробным анализом публикаций по данной тематике можно ознакомиться в обзорных работах [14, 15].

Модель Пеннинга. Модель Пеннинга [16] занимает особое место среди первых математических моделей, основанных на постулировании участка отрицательной скоростной чувствительности. В данной модели процессы на микроструктурном уровне не рассматриваются, что позволяет отнести ее к классу макрофеноменологических конститутивных моделей. Основу модели составляют два ключевых соотношения: уравнение, связывающее характеристики напряженно-деформированного состояния (НДС) образца с внешней жесткой нагрузкой, и определяющее соотношение (ОС):

$$\sigma = h\varepsilon + F(\dot{\varepsilon}),$$

где h — коэффициент деформационного упрочнения; σ , ε , $\dot{\varepsilon}$ — соответственно одноосные напряжение, деформация и скорость деформации; $F(\dot{\varepsilon})$ — слагаемое, характеризующее скоростную чувствительность материала.

Анализ модели показывает, что при монотонном возрастании функции F по мере увеличения скорости деформации деформация сохраняет однородный характер. Однако в случае, когда зависимость $F(\dot{\epsilon})$ с ростом скорости проходит через свой максимум и минимум, локальная скорость деформации начинает проявлять скачкообразное поведение, что соответствует неоднородности деформации при ЭПЛШ. В рамках данного исследования была предложена N -образная зависимость компоненты напряжения течения $F(\dot{\epsilon})$ от скорости деформации $\dot{\epsilon}$. Модель позволила получить качественно удовлетворительные результаты для частных случаев единичной скачущей и непрерывно движущейся полосы деформации. Впоследствии функция Пеннинга, постулирующая участок отрицательной скоростной чувствительности, нашла широкое применение в различных модификациях у других исследователей ЭПЛШ, поскольку эта модель одной из первых обеспечила математически строгое и достаточно простое описание возникновения прерывистости деформаций. Однако следует отметить, что в модели Пеннинга физические механизмы эффекта Портевена–Ле Шателье не получили должного внимания.

Модель Коттрелла–Билби. Физическое обоснование возникновения прерывистой пластичности было заложено в моделях, учитывающих взаимодействие дислокаций с примесными атомами в рамках концепции динамического деформационного старения, предложенной Коттреллом. В работах [1, 17] с энергетических позиций рассмотрено формирование атмосферы примесных атомов в окрестности одиночной краевой дислокации. В основе модели лежит предположение о пропорциональности скорости примесных атомов градиенту энергии взаимодействия атома примеси с дислокацией. Было получено соотношение для концентрации примесных атомов вблизи медленно движущейся краевой дислокации, основанное на уравнении неразрывности и разложении скорости группы атомов примесей на две компоненты: обусловленную взаимодействием с полем напряжений дислокации и диффузионную.

Анализ данного соотношения показал, что при медленном движении дислокаций атомы примесей смещаются в тыльную часть области атмосферы, создавая силу сопротивления, которая тормозит движение дислокаций и пропорциональна скорости их скольжения. Дальнейшее развитие теории Коттреллом в 1958 году привело к получению оценок критических скоростей движения и напряжений, при достижении которых атмосферы могут перемещаться вместе с дислокациями. Эти идеи и результаты легли в основу большинства последующих физически обоснованных моделей ЭПЛШ. Однако следует отметить, что модель Коттрелла–Билби в исходной формулировке дает приемлемую точность только на начальной стадии процесса старения, что стимулировало разработку различных модификаций данного подхода с учетом дополнительных механизмов взаимодействия примесных атомов с дислокациями.

КЕМС-модель. Наиболее известной моделью описания ЭПЛШ, основанной на гипотезе Коттрелла, по праву считается модель Кубина–Эстрина–Маккормика (КЕМС-модель) [18–21]. В 1985 году Эстрин и Кубин выдвинули идею использования модели нижнего структурного уровня для определения функции Пеннинга $F(\dot{\epsilon})$. Реализация этой идеи была осуществлена в 1990 году, когда авторами была предложена двухуровневая модель одно-

осного нагружения, учитывающая динамическое деформационное старение и эволюцию плотностей мобильных и имобильных дислокаций (дислокаций леса).

Следует отметить, что ранее дислокационная модель, учитывающая взаимодействие нескольких типов дислокаций, была предложена Анантакришной [22]. Однако в отличие от КЕМС-модели она формулировалась в терминах средних по образцу значений НДС без учета неоднородности деформаций, характерной для ЭПЛШ. В модели Эстрина и Кубина изменение напряжения течения определяется суммой двух вкладов: первый описывает взаимодействие дислокаций с дислокациями леса, а второй, называемый «напряжением трения» f , отражает взаимодействие мобильных дислокаций с примесными атомами.

Процесс формирования атмосфер моделируется через диффузию примесей к мобильным дислокациям, временно остановленным на имобильных дислокациях. Время остановки t_w связано с плотностью дислокаций леса и скоростью деформации соотношением, вывод которого основан на уравнении Орована. Используя введенное время t_w , авторы предложили соотношение для напряжения трения f , развивающее идеи Коттрелла—Билби.

Дальнейшее развитие подход Кубина и Эстрина получил в работах Маккормика (1988–1995 гг.), где напряжение течения представлено как аддитивная величина, включающая три компоненты: сопротивление кристаллической решетки, вклад от скорости деформации и вклад от концентрации примесных атомов в атмосферах Коттрелла c_d . Концентрация c_d определяется эволюционным уравнением, основанным на модели Коттрелла—Билби и содержащим параметр эффективного времени старения t_a . В случае квазистационарного деформирования предполагается равенство $t_a = t_w$. Авторами также предложена зависимость для скоростного упрочнения как функции накопленной деформации, скорости деформации и концентрации c_d .

Представленные работы стали основой для многочисленных последующих моделей и их модификаций в области исследования ЭПЛШ [23–28]. КЕМС-модель была успешно интегрирована в известные пакеты метода конечных элементов и широко используется для анализа ЭПЛШ.

Модель Лебедкина. Особый интерес с точки зрения полученных результатов представляет нелинейная механическая модель М. А. Лебедкина [29, 30], рассматривающая одноосно деформируемый кристаллический образец как одномерную связанную цепочку элементов, пластическое течение которых описывается локальным нелинейным определяющим соотношением. В основе модели лежит модифицированное уравнение Пеннинга. Для учета неоднородности пластического течения образец моделируется в виде одномерной цепочки из N блоков, представляющих элементарные области с квазиоднородной деформацией.

Упругое взаимодействие между элементами характеризуется коэффициентом K . На основе этих предположений автор ввел модифицированное определяющее соотношение для i -го блока:

$$\sigma = h\varepsilon_i + F(\dot{\varepsilon}_i) + K((\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})),$$

где ε_i — локальная деформация i -го блока, а добавочный член $K((\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}))$ описывает упругое взаимодействие между элементами. Замыка-

ние системы уравнений осуществляется путем добавления соотношения, описывающего условие деформации: задаваемая испытательной машиной скорость деформирования представляется как сумма скорости упругой деформации системы «машина – образец» и средней скорости пластического течения образца. Неоднородность свойств при решении системы учитывается через случайный выбор начальных значений локальных скоростей деформации.

По утверждению автора, предложенная модель адекватно описывает пространственную картину локализации деформации и статистическое распределение амплитуд скачков напряжений. Однако использование функции Пеннинга приводит к потере физической интерпретации процесса, которая могла бы быть учтена через дополнительные законы без введения отдельного дислокационного уровня для описания взаимодействия дислокаций с примесями.

Современные подходы. Помимо моделей, основанных на взаимодействии дислокаций с примесными атомами, следует упомянуть модели, учитывающие другие типы взаимодействий, например, чисто дислокационные. Модель для чистых монокристаллов, предложенная Мигелем, Вейсом и Грассо [31], учитывает дальнотянущие взаимодействия дислокаций, движущихся в вязкой среде. В этой модели со временем происходит самоорганизация дислокаций в структуры, разделяющие их на три популяции: остановившиеся, медленно движущиеся и быстрые.

Примечательно, что данная модель способна качественно описать ЭПЛШ без учета динамического деформационного старения. Однако полученные результаты противоречат экспериментальным данным, согласно которым в чистых металлах эффект не наблюдается. Существуют также модели, учитывающие взаимодействия дислокаций с включениями вторичных фаз [32], однако они не получили такого развития, как модели, основанные на гипотезе Коттрелла.

За последнее десятилетие в рамках макрофеноменологического подхода к моделированию ЭПЛШ появилось лишь небольшое количество работ, предлагающих новые подходы. Среди них можно выделить модели для описания одноосного деформирования алюминиевых сплавов [33,34], основанные на модификации модели MTS [35], а также модель пластического деформирования вольфрамовых сплавов с использованием кинетического метода Монте–Карло для описания эволюции атомарной структуры в условиях ЭПЛШ [36–38].

Однако все указанные модели ориентированы на описание поведения конкретных сплавов в узком диапазоне воздействий. Для создания более универсальных моделей ЭПЛШ необходимо явное описание эволюции структуры материалов на различных масштабных уровнях. В этом контексте наиболее перспективным представляется применение физически обоснованных многоуровневых моделей [39]. В настоящее время существует лишь ограниченное число моделей описания ЭПЛШ в рамках многоуровневого подхода, с которыми можно ознакомиться в обзоре [40]. Большинство из них относятся к классу прямых упруговязкопластических моделей.

Подводя итоги краткого обзора существующих моделей для рассмотрения ЭПЛШ, отметим, что модель, представленная в данной работе, развивает идеи стержневых моделей и формулируется в рамках структурно-механического подхода с учетом ключевых физических механизмов. В отличие от многих рассмотренных подходов, в нашей модели не используется искусственно

вводимая отрицательная скоростная чувствительность материала через различные модификации уравнения Пеннинга. Вместо этого эволюция напряжения течения основывается на качественном анализе физических процессов, обуславливающих возникновение прерывистой пластичности.

1.2. Работы по статистическому анализу ЭПЛШ и использованию вейвлет-преобразования. При построении моделей для описания ЭПЛШ особое значение приобретают вопросы их идентификации и верификации, непосредственно влияющие на корректность и точность предлагаемых моделей. Основная сложность при решении этих задач обусловлена стохастическим характером реакции материала на монотонные воздействия, проявляющимся в скачкообразных изменениях напряжений или деформаций при кинематическом или силовом нагружении соответственно. В связи с этим возникает необходимость применения методов статистического анализа для исследования распределения амплитуд характерных скачков напряжений и/или деформаций, возникающих при ЭПЛШ [30, 41].

В указанных работах представлены результаты экспериментов по одноосному растяжению моно- и поликристаллов сплавов Al–Mg с постоянной скоростью перемещения захватов жесткой испытательной машины при повышенных температурах. Для каждого фиксированного набора параметров нагружения объем случайной выборки составлял от 100 до 300 скачков напряжений. Основная тенденция изменения статистических характеристик скачков напряжений заключается в постепенном переходе от колоколообразных распределений, близких к нормальному, к асимметричным монотонно убывающим распределениям, аналогичным степенным законам, при увеличении скорости деформации (см. рис. 1) и/или снижении температуры (при переходе между режимами $C \rightarrow B \rightarrow A$).

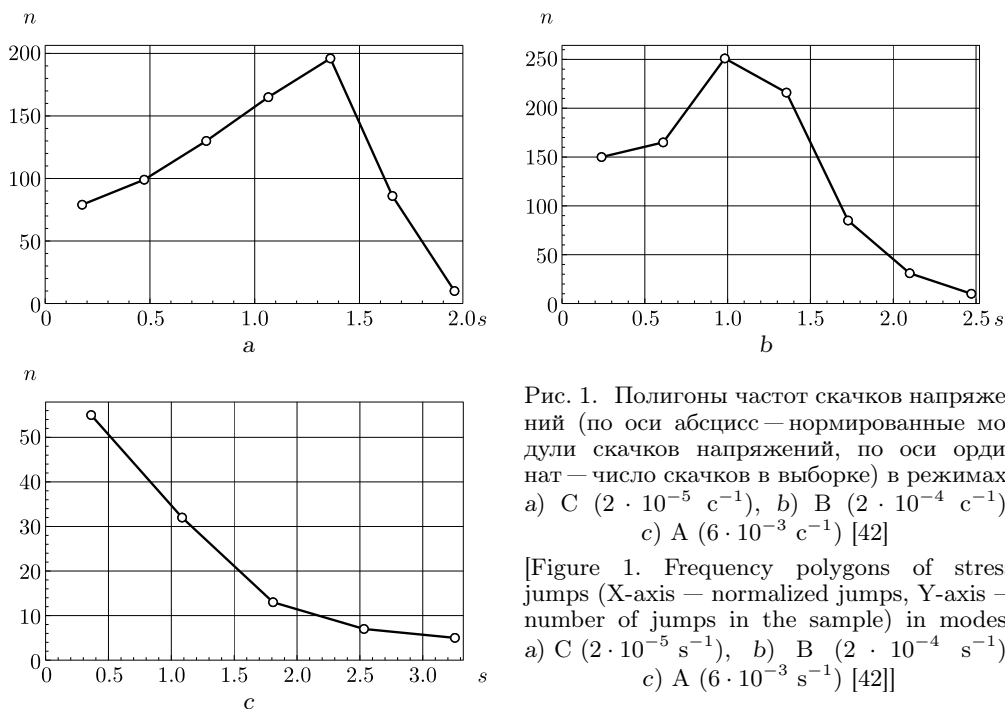


Рис. 1. Полигоны частот скачков напряжений (по оси абсцисс — нормированные модули скачков напряжений, по оси ординат — число скачков в выборке) в режимах: а) С ($2 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$), б) В ($2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$), в) А ($6 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$) [42]

[Figure 1. Frequency polygons of stress jumps (X-axis — normalized jumps, Y-axis — number of jumps in the sample) in modes: а) С ($2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), б) В ($2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$), в) А ($6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$) [42]]

Ключевым аспектом анализируемых работ, определяющим все последующие выводы о статистических свойствах ЭПЛШ, является процедура нормировки выборки скачков напряжений. Экспериментальные данные свидетельствуют о систематической зависимости средней амплитуды скачков напряжений от накопленной деформации, что позволяет рассматривать модули скачков напряжений $\Delta\sigma(\varepsilon)$ как случайный процесс, зависящий от параметра ε .

Предложенная авторами нормировка может быть интерпретирована как представление данного случайного процесса в виде произведения случайной и детерминированной составляющих:

$$\Delta\sigma(\varepsilon) = f(\varepsilon) \cdot s,$$

где s — случайные нормированные модули скачков напряжений, а $f(\varepsilon)$ — детерминированная функция, зависящая от накопленной деформации ε и характеризующая деформационное упрочнение материала. В качестве $f(\varepsilon)$ могут использоваться различные аппроксимации: линейная регрессия зависимости скачков напряжений от накопленной деформации (использована на рис. 1), сглаженная экспериментальная кривая напряженно-деформированного состояния и другие.

Нормировка скачков напряжений существенно упрощает и ускоряет формирование репрезентативной выборки, поскольку позволяет перейти от анализа случайного процесса к исследованию случайной величины. Выборку нормированных скачков можно получить по данным одного эксперимента, тогда как для анализа исходных скачков требуется проведение сотен однотипных испытаний для получения сечений случайного процесса, что значительно увеличивает временные и материальные затраты. В связи с этим в настоящей работе анализ амплитуд скачков напряжений также основан на их нормировке.

Важным аспектом анализа данных ЭПЛШ является исследование частотных характеристик скачков напряжений, существенно влияющих на вид кривой НДС. В данном контексте частота понимается как количество скачков напряжений, возникающих на единицу накопленной деформации.

Для учета эволюции частотных характеристик скачков напряжений в процессе неупругого деформирования в работе [43] предложено использовать вейвлет-преобразование исходной кривой НДС [44]. Выбрав оптимальный для решаемой задачи материнский вейвлет, можно получить значения дискретного вейвлет-преобразования $W(a, \Delta\varepsilon)$ для анализируемого прерывистого графика, где a — масштабный коэффициент (обратный определенной частоте), $\Delta\varepsilon$ — сдвиг по деформации. Величина $W(a, \Delta\varepsilon)$ достаточно точно характеризует частотный спектр скачков напряжений, локализованный в конкретный момент неупругого деформирования.

2. Постановка задачи. Математическая модель для описания ЭПЛШ создана в рамках структурно-механического подхода. Рассматривается случай одноосного растяжения стержневого образца при кинематическом нагружении. Образец представляется совокупностью одноосно нагружаемых вязкопластических элементов (в количестве N шт.) и тремя упругими элементами, которые соединены последовательно между собой (см. рис. 2).

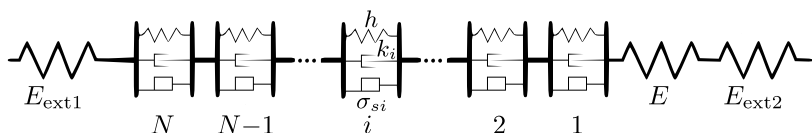


Рис. 2. Структурная схема модели [Figure 2. Structural scheme of the model]

Два внешних упругих элемента моделируют поведение нагружающей системы, а третий элемент — «пружина» с жесткостью E — описывает упругие свойства самого стержня. Каждый из вязкопластических элементов имитирует процессы, сопровождающие пластическое деформирование: деформационное упрочнение и механизмы взаимодействия дислокаций с примесными атомами.

Данные элементы характеризуются пределом текучести σ_s , до достижения которого они ведут себя как абсолютно жесткое тело. Пределы текучести элементов отличаются друг от друга и в отсчетной конфигурации распределены по некоторому случайному закону, учитывающему неоднородность физических характеристик исследуемого образца.

После достижения σ_s при последующем неупругом деформировании напряжение течения в элементе изменяется в зависимости от накопленных деформаций и скорости деформации. Первый процесс эволюции напряжения течения описывает механизм монотонного деформационного упрочнения. Второй процесс, связанный со скоростными эффектами, непосредственно относится к моделируемому эффекту прерывистой пластичности и характеризуется описанной далее немонотонной зависимостью. Законы изменения напряжения течения в каждом упруговязкопластическом элементе одинаковы, однако их значения в различные моменты деформирования могут заметно отличаться, что характеризует неоднородность деформации исследуемого образца.

Для вывода соотношений модели использовались гипотеза аддитивности упругой и неупругой составляющих одноосных деформации ε и скорости деформации d ($d = \dot{\varepsilon}$), условия активации и согласования пластического деформирования, правила структурно-механического подхода, гипотеза Коттрелла для описания ЭПЛШ, отраженная в эволюции напряжения течения структурного элемента.

В качестве основных механизмов ЭПЛШ приняты:

- 1) формирование «атмосфер Коттрелла» в окрестностях временно остановленных на препятствиях дислокаций [1];
- 2) захват атомов легирующих элементов медленно движущимися дислокациями [45].

В качестве основного определяющего соотношения выступает закон Гука в скоростной форме:

$$\dot{\sigma} = E^*(d - d^{\text{in}}), \quad \sigma(0) = 0,$$

$$d^{\text{in}} = \sum_{i=1}^N d_i^{\text{in}}, \quad E^* = \frac{EE_0}{E + E_0},$$

где E^* — общий модуль Юнга системы «машина (E_0) — образец (E)»; d^{in} — неупругая составляющая скорости деформации; N — число вязкопластиче-

ских элементов; d_i^{in} — неупругая составляющая скорости деформации i -го элемента. Поведение i -го элемента подчиняется вязкопластическому ОС типа

$$\dot{d}_i^{\text{in}} = H(\sigma - \sigma_{\text{cr}i})H(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_{\text{cr}i})d_0\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{cr}i}}\right)^m, \quad (1)$$

где $\sigma_{\text{cr}i}$ — напряжение течения i -го элемента; d_0 — скорость неупругой деформации при $\sigma = \sigma_{\text{cr}i}$; m — параметр скоростной чувствительности; $H(x)$ — функция Хэвисайда, использованная для учета условий активации и согласования пластического деформирования.

Закон эволюции критического напряжения i -го элемента с применением гипотезы аддитивности вкладов в изменение напряжения течения от деформационного упрочнения и динамического деформационного старения имеет вид

$$\dot{\sigma}_{\text{cr}i} = \left(h_1 + \frac{h_2}{2\sqrt{\varepsilon_i^{\text{in}}}}\right)\dot{d}_i^{\text{in}} + \dot{k}_i(t, d_i^{\text{in}}, \varepsilon_i^{\text{in}}, c, \theta), \quad \sigma_{\text{cr}i}(0) = \sigma_{si}, \quad (2)$$

где σ_{si} — начальный предел текучести i -го элемента; h_1, h_2 — параметры деформационного упрочнения (Па); $k_i(t, d_i^{\text{in}}, \varepsilon_i^{\text{in}}, c, \theta)$ — функционал, описывающий изменения напряжения течения за счет взаимодействия дислокаций с атмосферами Коттрелла; c — концентрация примесей; θ — температура.

Эволюция второго слагаемого напряжения течения k_i описывается на основе принципа аддитивности вкладов физических механизмов ЭПЛШ. При локальных скоростях деформации элементов, не превышающих пороговое значение d_{cr} (связанное со скоростью диффузии примесных атомов v_{dif}), проявляются два механизма увеличения напряжения: диффузия и захват атомов примеси движущимися дислокациями.

В этих механизмах, отвечающих за рост концентрации захваченных атомов, необходимо также учитывать, что для дислокаций и примесных атомов в зависимости от их собственных характеристик (вектора Бюргерса, атомного радиуса) есть предельная концентрация насыщения облаков c_s , а следовательно — есть ограничение $k_{\text{max}}(c_s)$ по величине напряжения сопротивления.

Также интенсивность захвата легирующих элементов должна зависеть от количества уже осевших на дислокациях примесных атомов, так как силы их взаимодействия убывают по мере насыщения атмосфер Коттрелла. После достижения в элементе критической скорости деформации d_{cr} напряжение течения убывает за счет отрыва дислокаций от образовавшихся атмосфер Коттрелла.

При отрыве примесей от дислокаций их концентрация в атмосферах не может стать меньше средней концентрации примесных атомов в образце. Данное условие описывается следующим ограничением: k_i не должно принимать отрицательных значений. Таким образом, для определения скорости изменения дополнительного напряжения течения принимается следующий вид соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{k}_i(t, d_i^{\text{in}}, \varepsilon_i^{\text{in}}, c, \theta) = & \left(1 - \left[\frac{k_i}{k_{\text{max}}(c_s)}\right]^q\right)H(d_{\text{cr}}(v_{\text{dif}}) - d_i^{\text{in}})[C_{\text{dif}} + C_{\text{cap}}] - \\ & - H(k_i)H(d_i^{\text{in}} - d_{\text{cr}}(v_{\text{dif}}))C_{\text{sep}}, \quad k_i(0, 0, 0, c, \theta) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где C_{dif} — слагаемое, отражающее упрочнение за счет механизмов диффузии примесных атомов к медленно движущимся или временно остановленным дислокациям; C_{cap} — слагаемое, описывающее упрочнение по механизму сбора атомов движущимися дислокациями; C_{sep} — слагаемое, отражающее разупрочнение при реализации механизма отрыва дислокаций от атмосфер Коттрелла; q — параметр модели.

Накопленные пластические деформации коррелируют с плотностью дислокаций, возрастание которой ведет к увеличению роли туннельной диффузии в процессах неупругого деформирования. Поэтому принимается, что диффузия примесных атомов возрастает с накоплением неупругих деформаций $\varepsilon_i^{\text{in}}$ в i -ом элементе.

Наращение диффузии за счет туннельного механизма происходит до определенного стационарного значения, приближение к которому становится ощутимым при преодолении неупругой деформации порогового значения ε_{cr} , характеризующего известное из экспериментальных данных явление насыщения плотности дислокаций.

Рассматриваемый вклад диффузионного механизма в изменение критического напряжения явно зависит от концентрации примесных атомов в сплаве c и их коэффициента диффузии D ($\text{м}^2/\text{с}$), связанного с температурой θ законом Аррениуса.

Исходя из всех рассмотренных физических зависимостей можно предложить следующий вид слагаемого C_{dif} из (3):

$$C_{\text{dif}} = c_{\text{dif}} \frac{c}{c_s} \frac{D_0}{l^2} \left[\exp \left(-\frac{E_a}{\kappa \theta} \right) + \zeta \exp \left(-\frac{\varepsilon_{\text{cr}}}{\varepsilon_i^{\text{in}}} \right) \right], \quad (4)$$

где D_0 — решеточный коэффициент диффузии ($\text{м}^2/\text{с}$); E_a — энергия активации диффузии; κ — постоянная Больцмана; l — характерное расстояние между дислокациями; ζ — параметр, характеризующий скорость возрастания коэффициента диффузии с ростом деформации; c_{dif} — параметр упрочнения за счет механизма диффузии (Па).

Дополнительное изменение напряжения течения за счет сбора свободных атомов примеси медленно движущимися дислокациями зависит от пройденного ими пути, отражением которого на макроуровне являются накопленные неупругие деформации. На этом основании предполагается, что скорость возрастания k_i за счет этого механизма зависит от скорости неупругой деформации рассматриваемого элемента.

Данный способ увеличения количества примесных атомов в атмосферах Коттрелла напрямую зависит от концентрации примесей в материале c и потенциальной энергии взаимодействия дислокаций с атомами U .

Рассматриваемый механизм также зависит от температуры, при повышении которой увеличивается кинетическая энергия атомов примесей и возрастает амплитуда колебаний атомов основного материала.

Данные изменения ведут к «размытию» энергетического барьера, который легирующие элементы должны преодолеть, чтобы оторваться от дислокаций.

Представленные зависимости отражены в слагаемом C_{cap} из (3):

$$C_{\text{cap}} = c_{\text{cap}} \frac{c}{c_s} \frac{U}{\kappa \theta} d_i^{\text{in}}, \quad (5)$$

где $c_{\text{сеп}}$ — параметр упрочнения за счет механизма сбора примесей (Па).

Механизм отрыва дислокаций от примесей приводит к уменьшению k_i тем стремительнее, чем больше скорость деформации элемента. Его воздействие явным образом зависит от температуры по тем же соображениям, что и для предыдущего механизма (5).

Слагаемое $C_{\text{сеп}}$, входящее в (3), принимает следующий вид:

$$C_{\text{сеп}} = c_{\text{сеп}} \frac{\theta}{\theta_{\text{melt}}} \left(\frac{d_i^{\text{in}}}{d_{\text{cr}}} \right)^{\beta} d_i^{\text{in}}, \quad (6)$$

где θ_{melt} — температура плавления материала; $c_{\text{сеп}}$ — параметр разупрочнения за счет механизма отрыва дислокаций (Па); β — параметр модели.

Все введенные в описанных соотношениях параметры модели определяются по экспериментальным данным в процедуре идентификации модели.

В силу нелинейности соотношений в полученной системе уравнений и ее существенной жесткости численный алгоритм решения задачи основан на пошаговой процедуре, реализуемой с использованием схем неявных методов Рунге–Кутты (трехстадийный метод Гаусса–Лежандра) [46]. Подбор шага интегрирования осуществляется с учетом активации (при упрочнении) и деактивации (при разупрочнении) вязкопластических элементов на рассматриваемом шаге.

3. Метод идентификации модели. Идентификация разработанной модели для описания ЭПЛШ выполнена в соответствии со следующей процедурой. Экспериментальные и модельные кривые σ – ε , отражающие проявление рассматриваемого эффекта, могут быть представлены в виде суперпозиции двух составляющих: осредненной (гладкой), характеризующей механизмы деформационного упрочнения, и немонотонной, описывающей взаимодействие атомов примеси с дислокациями, включая возникновение отрицательной скоростной чувствительности материала.

Для повышения эффективности минимизации расхождений между экспериментальными и модельными данными рекомендуется двухэтапная процедура:

- 1) идентификация параметров модели без учета механизмов ЭПЛШ;
- 2) идентификация параметров, описывающих ЭПЛШ, с использованием параметров, определенных на первом этапе.

Для реализации этого подхода диаграмму НДС следует разделить на два набора данных: осредненную гладкую кривую и характеристики скачков напряжения.

Гладкую составляющую экспериментальной и модельной кривых σ – ε в области неупругого деформирования можно аппроксимировать функцией

$$\bar{\sigma}(\varepsilon) = b_0 \sqrt{\varepsilon} + b_1 \varepsilon + b_2, \quad \varepsilon \geq \sigma_s / E, \quad (7)$$

где b_i — коэффициенты, определяемые методом наименьших квадратов, $i = 0, 1, 2$.

Второй набор данных, характеризующий скачки напряжения, может быть получен путем их статистического анализа и вейвлет-анализа локальных частотных характеристик. Рассматривая модули скачков напряжения $\Delta\sigma$ как выборку случайной величины, распределенной по заданному закону, можно

получить их достаточную статистику $T(s)$ методом максимального правдоподобия:

$$T(s) = \{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p\}, \quad s = \Delta\sigma / \Delta\bar{\sigma}, \quad (8)$$

где $\hat{\theta}_i$ — оценки параметров выбранного p -параметрического распределения, $i = \overline{1, p}$; s — нормированная на величину линейной регрессии скачков напряжения $\Delta\bar{\sigma}$ выборка модулей скачков напряжения $\Delta\sigma$.

Таким образом, экспериментальные и модельные данные могут быть представлены следующими параметрами: b_0, b_1, b_2 — коэффициенты для построения осредненной кривой σ – ε ; $T(s)$ — достаточная статистика нормированных скачков напряжения s ; $W(a, \Delta\varepsilon)$ — вейвлет-преобразование прерывистой кривой НДС.

Целевая функция J_1 первого этапа идентификации параметров d_0, m, h_1, h_2 из уравнений (1) и (2) представляет собой норму разности между результатами численного моделирования (с «отключенными» членами, отвечающими за ЭПЛШ) и гладкой аппроксимацией экспериментальных данных, полученной по формуле (7):

$$J_1(d_0, m, h_1, h_2) = \|\bar{\sigma}_{\text{exp}}(\varepsilon) - \sigma_{\text{num}}(\varepsilon; d_0, m, h_1, h_2)\| \rightarrow \min. \quad (9)$$

На втором этапе идентификации, направленном на определение параметров, связанных с описанием прерывистой пластичности ($d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}}$ из уравнений (3), (4), (5) и (6)), в качестве целевых функций предлагается использовать векторную норму разности между достаточными статистиками скачков напряжения и чебышевскую норму разности вейвлет-функций экспериментальных данных и численного решения с учетом механизмов ЭПЛШ:

$$\begin{aligned} J_{2.1}(d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}}) &= \\ &= \|T_{\text{exp}}(s) - T_{\text{num}}(s; d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}})\| \rightarrow \min, \\ J_{2.2}(d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}}) &= \\ &= \max_D |W_{\text{exp}}(a, \Delta\varepsilon) - W_{\text{num}}(a, \Delta\varepsilon; d_{\text{cr}}, k_{\text{max}}, c_{\text{dif}}, c_{\text{cap}}, c_{\text{sep}}, \beta, \zeta, \varepsilon_{\text{cr}})| \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (10)$$

$$D = \left\{ (a, \Delta\varepsilon) : a \in \mathbb{R}, \Delta\varepsilon \in \left[0, \int_0^T \dot{\varepsilon} dt \right] \right\}.$$

Задача оптимизации второго этапа (10) является многокритериальной [47], что требует применения специальных алгоритмов идентификации. Первый этап (9) реализуется методом Нелдера—Мида. После его завершения найденные параметры фиксируются и используются на втором этапе, алгоритм которого представляет собой итерационный перебор наборов оставшихся параметров модели в узлах заданной многомерной сетки. На каждой итерации выполняются следующие операции: локализация областей последующего поиска; параллельная обработка выделенных областей; сгущение сетки в перспективных областях. Окончательный выбор решения среди множества оптимальных результатов осуществляется исследователем.

4. Результаты и их анализ. Идентификация параметров модели выполнена на основе экспериментальных данных одноосного растяжения образца из сплава АМгбм при комнатной температуре со скоростью деформирования $\dot{\varepsilon} = 5.4 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ (режим В), представленных в работе [43]. Процедура идентификации включала два этапа, соответствующих критериям (9) и (10).

В качестве статистических характеристик скачков напряжения (8) использованы выборочное среднее и среднеквадратичное отклонения. Следует отметить, что данная статистика не является исчерпывающей, поскольку распределение скачков напряжения во всех режимах ЭПЛШ существенно отличается от нормального. Поиск адекватного многопараметрического распределения, описывающего стохастические свойства скачков ЭПЛШ, выходит за рамки настоящего исследования. Для вейвлет-анализа на втором этапе идентификации применен вейвлет Добеши второго порядка.

На рис. 3 представлены результаты расчетов с использованием идентифицированной модели, а в таблице приведены значения ее основных параметров.

Максимальное отклонение между экспериментальными и модельными кривыми НДС составляет 9 МПа. Среднее значение скачков напряжений имеет хорошее соответствие, однако их среднеквадратичное отклонение в численных результатах оказалось почти в два раза меньше по сравнению с экспериментальными данными. Погрешность в оценке средней частоты возникновения скачков напряжений составляет менее 1% от экспериментальных значений. Особенно точно модель описывает критическую деформацию, при которой начинают возникать скачки. На основании проведенного анализа можно заключить, что идентифицированная модель демонстрирует хорошие результаты как по критерию адекватности, так и по точности описания экспериментальных данных.

Идентифицированные параметры модели [Identified model parameters]

N	$d_0, 10^{-5} \text{ 1/s}$	m	$h_1, \text{ МПа}$	$h_2, \text{ МПа}$	$k_{\max}, \text{ МПа}$	$d_{cr}, 10^{-5} \text{ с}^{-1}$
45	7.3	94	-2365	8556	40	9.7
q	$c_{dif}, \text{ МПа}$	ζ	$\varepsilon_{cr}, \%$	$c_{cap}, \text{ МПа}$	$c_{sep}, \text{ МПа}$	β
100	4625	12.3	0.15	3041	86521	106

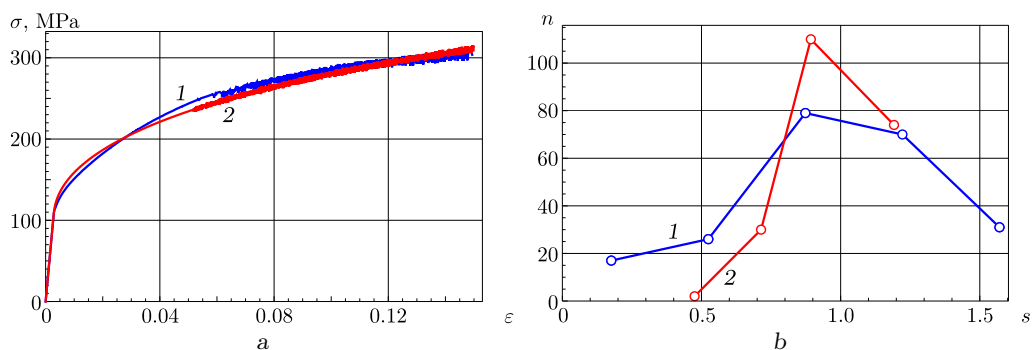


Рис. 3. Результаты идентификации модели: а) диаграммы напряженно-деформированного состояния; б) полигоны частот (1 — экспериментальные данные; 2 — модельные результаты)

Figure 3. Model identification results: а) stress-strain diagrams; б) frequency polygons (1 — experimental data; 2 — simulation results)]

Дополнительно проведена верификация представленной модели для оценки области ее применимости и предсказательных способностей. В ходе этой работы возникли определенные трудности с поиском подходящих экспериментальных данных по одноосному растяжению того же сплава алюминия (АМг6м) при других параметрах нагружения, которые можно было бы качественно разделить на два предложенных набора данных для их последующего анализа. В связи с этим для целей верификации был выбран другой сплав алюминия с магнием, обладающий отличающимися характеристиками деформационного упрочнения, которые необходимо было учесть в модели.

Для сравнения с результатами моделирования использованы экспериментальные данные о жестком одноосном растяжении образца из сплава Al-3.2%Mg при комнатной температуре со скоростью деформации $\dot{\epsilon} = 2.38 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ (режим В), представленные в работе [48]. В структуре модели были соответствующим образом изменены следующие параметры: заданная скорость деформации; модуль Юнга; предел текучести; два параметра деформационного упрочнения (h_1 и h_2 из уравнения (2)); концентрация примесей и температура плавления сплава. Все остальные параметры модели оставались неизменными после процедуры идентификации для образцов из сплава АМг6м. Результаты верификации модели представлены на рис. 4.

Численные результаты, полученные в ходе верификации, демонстрируют удовлетворительное соответствие экспериментальным данным. Максимальное отклонение по сглаженной кривой напряжений составляет приблизительно 10 МПа. Наблюдаются некоторые различия между статистическими характеристиками скачков напряжений. Наиболее существенные расхождения отмечаются в частотной картине — средняя частота возникновения скачков напряжений в модели примерно в 1.5 раза превышает экспериментальное значение. Критическая деформация в численных результатах достигается несколько раньше, чем в эксперименте. На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что рассматриваемая модель, как и большинство стержневых моделей, применима в достаточно узком диапазоне характеристик материалов. Для удовлетворительного моделирования поведения материалов с существенно отличающимся химическим составом требуется полное переопределение всех параметров модели.

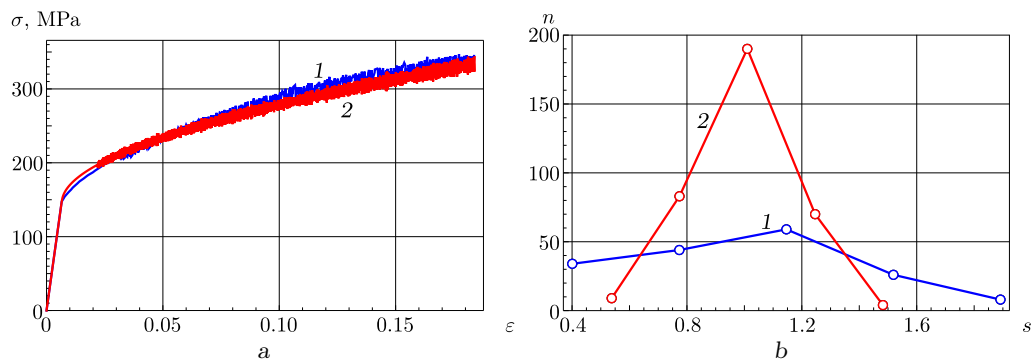


Рис. 4. Результаты верификации модели: а) диаграммы напряженно-деформированного состояния; б) полигоны частот (1 — экспериментальные данные, 2 — модельные результаты)

[Figure 4. Model verification results: а) stress-strain diagrams; б) frequency polygons (1 — experimental data, 2 — simulation results)]

5. Заключение. В данной работе представлены детальное описание и математическая формулировка структурно-механической модели, учитывающей два физических механизма ЭПЛШ, а также процедуры и результаты идентификации и верификации модели на экспериментальных данных по одноосному растяжению сплавов алюминия.

Основные особенности разработанного подхода заключаются в следующем. С одной стороны, в рамках структурно-механического подхода относительно просто строятся модели для описания одноосного растяжения стержневых образцов. С другой стороны, в таком подходе достаточно сложно явно и физически корректно описать сложные механизмы неупругого деформирования. В представленной работе все соотношения системы уравнений вводятся на основе качественного физического описания основных процессов ЭПЛШ, что позволяет сохранить математическую простоту и компактность модели, характерные для выбранного подхода.

Необходимо особо отметить вычислительные особенности реализации данной модели, связанные с ее значительной численной жесткостью. Для преодоления этих трудностей требуется применение специальных неявных схем интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Важное место в исследовании занимают вопросы анализа и представления результатов моделирования, которые играют ключевую роль на заключительных этапах работы. Предложена оригинальная двухэтапная процедура идентификации параметров модели, основанная на принципе расщепления по основным рассматриваемым физическим механизмам неупругого деформирования. В основе процедуры лежат строгие математические методы: аппроксимация экспериментальных данных; статистический анализ скачков напряжения; вейвлет-преобразование кривых деформирования.

Следует подчеркнуть, что поставленная задача идентификации параметров модели является многокритериальной, что накладывает специфику на алгоритмы ее решения.

Адекватность и эффективность предложенной математической модели, а также разработанных методов ее анализа подтверждены результатами идентификации и верификации на экспериментальных данных. В то же время представленная модель, как и большинство моделей данного класса, не является универсальной по отношению к материалу и режимам нагружения. Этот недостаток характерен для структурно-механических моделей и отсутствует в более сложных многоуровневых конститутивных моделях, которые, однако, в настоящее время практически не разработаны для описания эффекта прерывистой пластичности.

В связи с этим перспективным направлением дальнейших исследований представляется развитие многоуровневого подхода к моделированию ЭПЛШ, что позволит устранить указанные ограничения.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-19-00785, <https://rscf.ru/project/25-19-00785/>.

Библиографический список

1. Cottrell A. H. *Dislocations and plastic flow in crystals*. New York: Oxford Univ. Press., 1953. 223 pp.
2. Portevin A., Le Châtelier F. Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1923. vol. 176. pp. 507–510.
3. McCormick P. G. The Portevin – Le Châtelier effect in an Al–Mg–Si alloy // *Acta Metall.*, 1971. vol. 19. pp. 463–471. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(71\)90170-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(71)90170-2).
4. Chen W., Chaturvedi M. C. On the mechanism of serrated deformation in aged Inconel 718 // *Mater. Sci. Eng. A.*, 1997. vol. 229, no. 1–2. pp. 163–168. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00005-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00005-1).
5. Estrin Y., Lebyodkin M. A. The influence of dispersion particles on the Portevin–Le Châtelier effect: from average particle characteristics to particle arrangement // *Mater. Sci. Eng. A*, 2004. vol. 387–389. pp. 195–198. EDN: LIJIZN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2004.01.079>.
6. Wang W., Wu D., Chen R., Lou C. Influence of temperature and strain rate on serration type transition in NZ31 Mg alloy // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2015. vol. 25, no. 11. pp. 3611–3617. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(15\)64002-X](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(15)64002-X).
7. Ren S. C., Morgeneyer T. F., Mazière M., et al. Portevin–Le Châtelier effect triggered by complex loading paths in an Al–Cu aluminium alloy // *Philos. Mag.*, 2018. vol. 99, no. 6. pp. 659–678. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2018.1550296>.
8. Zhang Q., Jiang Z., Jiang H., et al. On the propagation and pulsation of Portevin–Le Châtelier deformation bands: An experimental study with digital speckle pattern metrology // *Int. J. Plast.*, 2005. vol. 21, no. 11. pp. 2150–2173. EDN: MHSTVR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.03.017>.
9. Halim H., Wilkinson D. S., Niewczas M. The Portevin–Le Châtelier (PLC) effect and shear band formation in an AA5754 alloy // *Acta Mater.*, 2007. vol. 55, no. 12. pp. 4151–4160. EDN: MCXUYX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.03.007>.
10. Shibkov A. A., Zolotov A. E., Zheltov M. A., Denisov A. A. Morphological diagram of Savart–Masson bands of macrolocalized deformation // *Crystallogr. Rep.*, 2012. vol. 57 1. pp. 105–111. EDN: PDJGMJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063774511030308>.
11. Mehenni M., Ait-Amokhtar H., Fressengeas C. Spatiotemporal correlations in the Portevin–Le Châtelier band dynamics during the type B–type C transition // *Mater. Sci. Eng. A.*, 2019. vol. 756. pp. 313–318. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.04.036>.
12. Russell B. Repeated yielding in tin bronze alloys // *Phil. Mag. J. Theor. Exp. Appl. Phys.*, 1963. vol. 88. pp. 615–630. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786436308211160>.
13. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Методы и результаты исследования эффекта Портевена–Ле Шателье: эксперименты и макрофеноменологические модели // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2023. № 5. С. 99–131. EDN: OUR0EB. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.09>.
14. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Прерывистая текучесть: физические механизмы, экспериментальные данные, макрофеноменологические модели // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2014. № 3. С. 186–232. EDN: SXDTPL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
15. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Прерывистая текучесть: модели, основанные на физических теориях пластичности // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2017. № 1. С. 134–163. EDN: YJTWCX. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.1.09>.
16. Penning P. Mathematics of the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Metall.*, 1972. vol. 20, no. 10. pp. 1169–1175. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(72\)90165-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(72)90165-4).

17. Cottrell A. H., Jaswon M. A. Distribution of solute atoms round a slow dislocation // *Proc. R. Soc.*, 1949. vol. 199, no. 1056. pp. 104–114. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0128>.
18. Kubin L. P., Estrin Y. The Portevin–Le Châtelier effect in deformation with constant stress rate // *Acta Metall.*, 1985. vol. 33. pp. 397–407. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90082-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90082-3).
19. Kubin L. P., Estrin Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Metall. Mater.*, 1990. vol. 38, no. 5. pp. 697–708. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(90\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90021-8).
20. McCormick P. G. Theory of flow localization due to dynamic strain ageing // *Acta Metall.*, 1988. vol. 36, no. 12. pp. 3061–3067. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90043-0).
21. Estrin Y., McCormick P. G. Modelling the transient flow behaviour of dynamic strain ageing materials // *Acta Metall. Mater.*, 1991. vol. 39, no. 12. pp. 2977–2983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90030-5](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90030-5).
22. Ananthakrishna G., Valsakumar M. C. Repeated yield drop phenomenon: a temporal dissipative structure // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1982. vol. 15, no. 12. pp. 171–175. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/15/12/003>.
23. Mansouri L. Z., Coër J., Thuillier S., et al. Investigation of Portevin–Le Châtelier effect during Erichsen test // *Int. J. Mater. Form.*, 2020. vol. 13. pp. 687–697. EDN: VZCJHC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12289-019-01511-5>.
24. Ren S., Mazière M., Forest S., et al. A constitutive model accounting for strain ageing effects on work-hardening. Application to a C–Mn steel // *Comptes Rendus. Mécanique*, 2017. vol. 345, no. 12. pp. 908–921. EDN: YHDGGT. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.09.005>.
25. Lin Y. C., Yang H., He D.-G., Chen J. A physically-based model considering dislocation–solute atom dynamic interactions for a nickel-based superalloy at intermediate temperatures // *Mater. Des.*, 2019. vol. 183, 108122. EDN: CGDZVX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108122>.
26. Mazière M., Mortensen A., Forest S. Finite element simulation of the Portevin–Le Châtelier effect in highly reinforced metal matrix composites // *Philos. Mag.*, 2021. vol. 101, no. 12. pp. 1471–1489. EDN: HESCJH. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2021.1919331>.
27. Guillermin N., Besson J., Köster A., et al. Experimental and numerical analysis of the Portevin–Le Châtelier effect in a nickel-base superalloy for turbine disks application // *Int. J. Solids Struct.*, 2023. vol. 264, 112076. EDN: LAALBS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112076>.
28. Mäkinen T., Ovaska M., Laurson L., Alava M. J. Portevin–Le Châtelier effect: modeling the deformation bands and stress-strain curves // *J. Mater. Sci.: Mater. Theory*, 2022. vol. 6, 15. EDN: PCWWIB. DOI: <https://doi.org/10.1186/s41313-022-00044-w>.
29. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. Statistical behaviour and strain localization patterns in the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Mater.*, 1996. vol. 44, no. 11. pp. 4531–4541. EDN: LDZXJN. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6454\(96\)00076-6](https://doi.org/10.1016/1359-6454(96)00076-6).
30. Лебедин М. А., Дунин–Барковский Л. Р. Критическое поведение и механизм корреляции деформационных процессов в условиях неустойчивости пластического течения // *ЖЭТФ*, 1998. Т. 113, № 5. С. 1816–1829; Lebyodkin M. A., Dunin–Barkowski L. R. Critical behavior and mechanism of strain correlations under conditions of unstable plastic flow // *J. Exp. Theor. Phys.*, 1998. vol. 86, no. 5. pp. 993–1000. EDN: LESKIX. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.558571>.
31. Weiss J., Grasso J.-R., Miguel M.-C., et al. Complexity in dislocation dynamics: experiments // *Mater. Sci. Eng. A*, 2001. vol. 309–310. pp. 360–364. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01633-6](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01633-6).
32. Brechet Y., Estrin Y. On the influence of precipitation on the Portevin–Le Châtelier effect // *Acta Metall. Mater.*, 1995. vol. 43, no. 3. pp. 955–963. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)00334-e](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00334-e).

33. Kreyca J., Kozeschnik E. State parameter-based constitutive modelling of stress strain curves in Al–Mg solid solutions // *Int. J. Plast.*, 2018. vol.103. pp. 67–80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.01.001>.
34. Xu J., Holmedal B., Hopperstad O. S., et al. Dynamic strain ageing in an AlMg alloy at different strain rates and temperatures: Experiments and constitutive modelling // *Int. J. Plast.*, 2022. vol.151, 103215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2022.103215>.
35. Follansbee P. S., Kocks U. F. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable // *Acta Metall.*, 1988. vol.36, no.1. pp. 81–93. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90030-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90030-2).
36. Zhao Y., Marian J. Direct prediction of the solute softening-to-hardening transition in W–Re alloys using stochastic simulations of screw dislocation motion // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol.26, no.4, 045002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-651X/aaecf>.
37. Zhao Y., Dezerald L., Marian J. Electronic structure calculations of oxygen atom transport energetics in the presence of screw dislocations in tungsten // *Metals*, 2019. vol.9, no.2. pp. 252. DOI: <https://doi.org/10.3390/met9020252>.
38. Zhao Y., Dezerald L., Pozuelo M., et al. Simulating the mechanisms of serrated flow in interstitial alloys with atomic resolution over diffusive timescales // *Nat. Commun.*, 2020. vol.11, 1227. EDN: JQHNB. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-15085-3>.
39. Трусов П. В., Швейкин А. И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 605 с. DOI: <https://doi.org/10.15372/multilevel2019tpv>.
40. Трусов П. В., Герасимов Р. М. Методы и результаты исследования эффекта Портевена–Ле Шателье: физически-ориентированные континуальные и многоуровневые модели // *Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*, 2023. №5. С. 132–158. EDN: CMPXGG. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.10>.
41. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. P. Dynamic strain ageing and stick-slip instabilities: A parallel approach and statistical study // *Solid State Phenom.*, 1995. vol.42–43. pp. 313–324. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.42-43.313>.
42. Lebyodkin M. A., Kobelev N. P., Bougherira Y., et al. On the similarity of plastic flow processes during smooth and jerky flow: Statistical analysis // *Acta Mater.*, 2012. vol.60. pp. 3729–3740. EDN: PDOAED. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2012.03.026>.
43. Trusov P. V., Chechulina E. A., Gerasimov R. M., et al. Using the wavelet transform to process data from experimental studies of the discontinuous plastic deformation effect // *Fract. Struct. Integr.*, 2024. vol.68. pp. 159–174. EDN: QQSTVH. DOI: <https://doi.org/10.3221/igf-esis.68.10>.
44. Дьяконов В. П. *Вейвлеты. От теории к практике*. М.: Солон-Пресс, 2010. 399 с. EDN: ZUWWCX.
45. Петухов Б. В. Упрочнение кристаллов вследствие динамического старения дислокаций // *Кристаллография*, 2003. Т.48, №5. С. 873–878. EDN: ONUMGJ.
46. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations* / CWI Monographs. vol.2. Amsterdam: North-Holland, 1984. ix+307 pp.
47. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Malabar, FL: Robert E. Krieger Publ., 1989. xxii+546 pp.
48. Ait-Amokhtar H., Fressengeas C., Bouabdallah K. On the effects of the Mg content on the critical strain for the jerky flow of Al–Mg alloys // *Mat. Sci. Eng. A*, 2015. vol.631. pp. 209–213. EDN: UWCHNZ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.02.055>.

MSC: 74C15, 74D10

Structural-mechanical model for describing the Portevin–Le Châtelier effect

K. A. Mekhonoshin, P. V. Trusov

Perm State National Research Polytechnical University,
Applied Mathematics and Mechanics Faculty,
11, Pr. Pozdeev st., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

Despite nearly 200 years having passed since its discovery, the Portevin–Le Châtelier (PLC) effect—the phenomenon of discontinuous plastic flow observed in most alloys under specific deformation conditions—remains an active research area for both mechanicians and physicists. Current studies encompass experimental investigations and theoretical developments, leading to various mathematical models, a brief review of which is presented in this work. Given the stochastic nature of the PLC effect, including the spatiotemporal distribution of slip bands and response variations during monotonic loading (as evidenced by physical and numerical experiments on various alloy specimens), mathematical description and analysis methods for these phenomena are of particular scientific interest.

During the model development stage, we carried out a thorough analysis of the physical mechanisms underlying the PLC effect. Two primary mechanisms were identified: (1) the formation of impurity atom clusters around temporarily arrested dislocations at obstacles, and (2) the capture of alloying element atoms by slowly moving dislocations. For modeling this effect, we propose a structural-mechanical approach to describe uniaxial tensile loading of rod specimens under kinematic control. The formulation includes fundamental constitutive and evolutionary relations based on the physical mechanisms of dislocation-impurity interactions.

A novel two-stage model identification procedure is introduced, incorporating statistical analysis and wavelet transform methods. The paper

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Mekhonoshin K. A., Trusov P. V. Structural-mechanical model for describing the Portevin–Le Châtelier effect, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 448–471. EDN: XMFRLQ. DOI: 10.14498/vsgtu2229 (In Russian).

Authors' Details:

Kirill A. Mekhonoshin  <https://orcid.org/0009-0002-8549-314>

BSC; Laboratory Researcher; Lab. of Multilevel Modeling of Structural and Functional Materials; e-mail: ctrl111@vk.com

Peter V. Trusov  <https://orcid.org/0000-0001-8997-5493>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Modeling of Systems and Processes;

e-mail: tpv@pstu.ru

presents application results of the identified model for describing the PLC effect in Al–Mg alloy specimens, demonstrating its effectiveness in capturing the key features of discontinuous plastic flow.

Keywords: Portevin–Le Châtelier effect, Cottrell hypothesis, structural-mechanical approach, constitutive relations, model identification and verification, statistical analysis, wavelet analysis.

Received: 22nd May, 2025 / Revised: 4th June, 2025 /

Accepted: 10th June, 2025 / First online: 15th July, 2025

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 25–19–00785), <https://rscf.ru/en/project/25-19-00785/>.

References

1. Cottrell A. H. *Dislocations and plastic flow in crystals*. New York, Oxford Univ. Press., 1953, 223 pp.
2. Portevin A., Le Châtelier F. Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1923, vol. 176, pp. 507–510.
3. McCormick P. G. The Portevin – Le Châtelier effect in an Al–Mg–Si alloy, *Acta Metall.*, 1971, vol. 19, pp. 463–471. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(71\)90170-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(71)90170-2).
4. Chen W., Chaturvedi M. C. On the mechanism of serrated deformation in aged Inconel 718, *Mater. Sci. Eng. A.*, 1997, vol. 229, no. 1–2, pp. 163–168. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00005-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00005-1).
5. Estrin Y., Lebyodkin M. A. The influence of dispersion particles on the Portevin–Le Châtelier effect: from average particle characteristics to particle arrangement, *Mater. Sci. Eng. A*, 2004, vol. 387–389, pp. 195–198. EDN: LIJIZN. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2004.01.079>.
6. Wang W., Wu D., Chen R., Lou C. Influence of temperature and strain rate on serration type transition in NZ31 Mg alloy, *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2015, vol. 25, no. 11, pp. 3611–3617. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(15\)64002-X](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(15)64002-X).
7. Ren S. C., Morgeneyer T. F., Mazière M., et al. Portevin–Le Châtelier effect triggered by complex loading paths in an Al–Cu aluminium alloy, *Philos. Mag.*, 2018, vol. 99, no. 6, pp. 659–678. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2018.1550296>.
8. Zhang Q., Jiang Z., Jiang H., et al. On the propagation and pulsation of Portevin–Le Châtelier deformation bands: An experimental study with digital speckle pattern metrology, *Int. J. Plast.*, 2005, vol. 21, no. 11, pp. 2150–2173. EDN: MHSTVR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2005.03.017>.
9. Halim H., Wilkinson D. S., Niewczas M. The Portevin–Le Châtelier (PLC) effect and shear band formation in an AA5754 alloy, *Acta Mater.*, 2007, vol. 55, no. 12, pp. 4151–4160. EDN: MCXUYX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.03.007>.
10. Shibkov A. A., Zolotov A. E., Zheltov M. A., Denisov A. A. Morphological diagram of Savart–Masson bands of macrolocalized deformation, *Crystallogr. Rep.*, 2012, vol. 57 1, pp. 105–111. EDN: PDJGMJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063774511030308>.
11. Mehenni M., Ait-Amokhtar H., Fressengeas C. Spatiotemporal correlations in the Portevin–Le Châtelier band dynamics during the type B–type C transition, *Mater. Sci. Eng. A.*, 2019, vol. 756, pp. 313–318. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.04.036>.

12. Russell B. Repeated yielding in tin bronze alloys, *Phil. Mag. J. Theor. Exp. Appl. Phys.*, 1963, vol. 88, pp. 615–630. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786436308211160>.
13. Trusov P. V., Chechulina E. A. Methods and results of studying the Portevin–Le Châtelier effect: experiments and macrophenomenological model, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 5, pp. 99–131 (In Russian). EDN: OUROEB. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.09>.
14. Trusov P. V., Chechulina E. A. Serrated yielding: physical mechanisms, experimental dates, macrophenomenological models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 186–232 (In Russian). EDN: SXDTPL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
15. Trusov P. V., Chechulina E. A. Serrated yielding: crystal viscoplastic models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 1, pp. 134–163 (In Russian). EDN: YJTWCX. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.1.09>.
16. Penning P. Mathematics of the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Metall.*, 1972, vol. 20, no. 10, pp. 1169–1175. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(72\)90165-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(72)90165-4).
17. Cottrell A. H., Jaswon M. A. Distribution of solute atoms round a slow dislocation, *Proc. R. Soc.*, 1949, vol. 199, no. 1056, pp. 104–114. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1949.0128>.
18. Kubin L. P., Estrin Y. The Portevin–Le Châtelier effect in deformation with constant stress rate, *Acta Metall.*, 1985, vol. 33, pp. 397–407. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90082-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90082-3).
19. Kubin L. P., Estrin Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Metall. Mater.*, 1990, vol. 38, no. 5, pp. 697–708. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(90\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90021-8).
20. McCormick P. G. Theory of flow localization due to dynamic strain ageing, *Acta Metall.*, 1988, vol. 36, no. 12, pp. 3061–3067. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90043-0).
21. Estrin Y., McCormick P. G. Modelling the transient flow behaviour of dynamic strain ageing materials, *Acta Metall. Mater.*, 1991, vol. 39, no. 12, pp. 2977–2983. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(91\)90030-5](https://doi.org/10.1016/0956-7151(91)90030-5).
22. Ananthakrishna G., Valsakumar M. C. Repeated yield drop phenomenon: a temporal dissipative structure, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1982, vol. 15, no. 12, pp. 171–175. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/15/12/003>.
23. Mansouri L. Z., Coër J., Thuillier S., et al. Investigation of Portevin–Le Châtelier effect during Erichsen test, *Int. J. Mater. Form.*, 2020, vol. 13, pp. 687–697. EDN: VZCJHC. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12289-019-01511-5>.
24. Ren S., Mazière M., Forest S., et al. A constitutive model accounting for strain ageing effects on work-hardening. Application to a C–Mn steel, *Comptes Rendus. Mécanique*, 2017, vol. 345, no. 12, pp. 908–921. EDN: YHDGGT. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.09.005>.
25. Lin Y. C., Yang H., He D.-G., Chen J. A physically-based model considering dislocation–solute atom dynamic interactions for a nickel-based superalloy at intermediate temperatures, *Mater. Des.*, 2019, vol. 183, 108122. EDN: CGDZVX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108122>.
26. Mazière M., Mortensen A., Forest S. Finite element simulation of the Portevin–Le Châtelier effect in highly reinforced metal matrix composites, *Philos. Mag.*, 2021, vol. 101, no. 12, pp. 1471–1489. EDN: HESCJH. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786435.2021.1919331>.
27. Guillermin N., Besson J., Köster A., et al. Experimental and numerical analysis of the Portevin–Le Châtelier effect in a nickel-base superalloy for turbine disks application, *Int. J. Solids Struct.*, 2023, vol. 264, 112076. EDN: LAALBS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112076>.
28. Mäkinen T., Ovaska M., Laurson L., Alava M. J. Portevin–Le Châtelier effect: modeling the deformation bands and stress-strain curves, *J. Mater. Sci.: Mater. Theory*, 2022, vol. 6, 15. EDN: PCWWIB. DOI: <https://doi.org/10.1186/s41313-022-00044-w>.

29. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. Statistical behaviour and strain localization patterns in the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Mater.*, 1996, vol. 44, no. 11, pp. 4531–4541. EDN: LDXZJN. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6454\(96\)00076-6](https://doi.org/10.1016/1359-6454(96)00076-6).
30. Lebyodkin M. A., Dunin–Barkowskii L. R. Critical behavior and mechanism of strain correlations under conditions of unstable plastic flow, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1998, vol. 86, no. 5, pp. 993–1000. EDN: LESKIX. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.558571>.
31. Weiss J., Grasso J.-R., Miguel M.-C., et al. Complexity in dislocation dynamics: experiments, *Mater. Sci. Eng. A*, 2001, vol. 309–310, pp. 360–364. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(00\)01633-6](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(00)01633-6).
32. Brechet Y., Estrin Y. On the influence of precipitation on the Portevin–Le Châtelier effect, *Acta Metall. Mater.*, 1995, vol. 43, no. 3, pp. 955–963. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)00334-e](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)00334-e).
33. Kreyca J., Kozeschnik E. State parameter-based constitutive modelling of stress strain curves in Al–Mg solid solutions, *Int. J. Plast.*, 2018, vol. 103, pp. 67–80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2018.01.001>.
34. Xu J., Holmedal B., Hopperstad O. S., et al. Dynamic strain ageing in an AlMg alloy at different strain rates and temperatures: Experiments and constitutive modelling, *Int. J. Plast.*, 2022, vol. 151, 103215. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2022.103215>.
35. Follansbee P. S., Kocks U. F. A constitutive description of the deformation of copper based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable, *Acta Metall.*, 1988, vol. 36, no. 1, pp. 81–93. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90030-2](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90030-2).
36. Zhao Y., Marian J. Direct prediction of the solute softening-to-hardening transition in W–Re alloys using stochastic simulations of screw dislocation motion, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 26, no. 4, 045002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-651X/aaecf>.
37. Zhao Y., Dezerald L., Marian J. Electronic structure calculations of oxygen atom transport energetics in the presence of screw dislocations in tungsten, *Metals*, 2019, vol. 9, no. 2, pp. 252. DOI: <https://doi.org/10.3390/met9020252>.
38. Zhao Y., Dezerald L., Pozuelo M., et al. Simulating the mechanisms of serrated flow in interstitial alloys with atomic resolution over diffusive timescales, *Nat. Commun.*, 2020, vol. 11, 1227. EDN: JQHANB. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-020-15085-3>.
39. Trusov P. V., Shveykin A. I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskikh materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multiscale Models of Mono- and Polycrystalline Materials: Theory, Algorithms, Application Examples]. Novosibirsk, Publ. House of SB RAS, 2019, 605 pp. (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.15372/multilevel2019tpv>.
40. Trusov P. V., Gerasimov R. M. Methods and results of the Portevin–Le Châtelier effect study: Physically oriented continuum and multilevel models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, no. 5, pp. 132–158 (In Russian). EDN: CMPXGG. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.5.10>.
41. Lebyodkin M., Brechet Y., Estrin Y., Kubin L. P. Dynamic strain ageing and stick-slip instabilities: A parallel approach and statistical study, *Solid State Phenom.*, 1995, vol. 42–43, pp. 313–324. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.42-43.313>.
42. Lebyodkin M. A., Kobelev N. P., Bougherira Y., et al. On the similarity of plastic flow processes during smooth and jerky flow: Statistical analysis, *Acta Mater.*, 2012, vol. 60, pp. 3729–3740. EDN: PDOAED. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2012.03.026>.
43. Trusov P. V., Chechulina E. A., Gerasimov R. M., et al. Using the wavelet transform to process data from experimental studies of the discontinuous plastic deformation effect, *Fract. Struct. Integr.*, 2024, vol. 68, pp. 159–174. EDN: QQSTVH. DOI: <https://doi.org/10.3221/igf-esis.68.10>.
44. D'yakonov V. P. *Veyvlety. Ot teorii k praktike* [Wavelets. From Theory to Practice]. Moscow, Solon-Press, 2010, 399 pp. (In Russian). EDN: ZUWXCX.
45. Petukhov B. V. Hardening of crystals caused by the dynamic aging of dislocations, *Crystalllogr. Rep.*, 2003, vol. 48, no. 5, pp. 813–818. EDN: LHZMKJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1612600>.

46. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, CWI Monographs, vol. 2. Amsterdam, North-Holland, 1984, ix+307 pp.
47. Steuer R. E. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. Malabar, FL, Robert E. Krieger Publ., 1989, xxii+546 pp.
48. Ait-Amokhtar H., Fressengeas C., Bouabdallah K. On the effects of the Mg content on the critical strain for the jerky flow of Al–Mg alloys, *Mat. Sci. Eng. A*, 2015, vol. 631, pp. 209–213. EDN: UWCHNZ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.02.055>.



УДК 539.3

Поправки четвертой степени в энергетических потенциалах гемитропных микрополярных тел

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Настоящее исследование посвящено применению теории алгебраических инвариантов для аппроксимации потенциала силовых и моментных напряжений четвертой степени в нелинейном гемитропном микрополярном упругом теле. На основе теории целых рациональных алгебраических инвариантов (полуинвариантов) исследовано полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга, представленных в форме инвариантных следов.

В результате выделен набор из 86 инвариантных следов, включающий 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных, 44 инвариантных тройки и 17 инвариантных четверок. Из 86 элементов отобрано 39 инвариантов в соответствии с правилом возрастания алгебраических степеней: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических и 19 инвариантов четвертой степени. Предложена схема построения 39 инвариантов четвертой степени, сгруппированных в четыре категории на основе следующих правил: произведения линейных инвариантов между собой, произведения квадратичных инвариантов между собой, произведения линейных и квадратичных инвариантов, попарные произведения линейных и кубических инвариантов, а также собственные инварианты четвертой степени.

Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, включающий квадратичные, кубические и слагаемые четвертой алгебраической степени. Таким образом, микрополярный потенциал характеризуется 124 определяющими модулями. Приведены формулы для вычисления всех 39 инвариантов в смешанных тензорных компонентах. В результате получены 87 поправок

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Поправки четвертой степени в энергетических потенциалах гемитропных микрополярных тел // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 3. С. 472–485. EDN: CMAPHC. DOI: 10.14498/vsgtu2163.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин ✉️ <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

к кубическому потенциалу силовых и моментных напряжений нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела.

Ключевые слова: наномасштаб, микромасштаб, энергетическая форма, целочисленный рациональный алгебраический инвариант, неприводимая система инвариантов, кубическая аппроксимация, гемитропное микрополярное упругое тело.

Получение: 25 февраля 2025 г. / Исправление: 12 июня 2025 г. /
Принятие: 18 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 10 июля 2025 г.

1. Введение и вводные замечания. При построении определяющих уравнений в механике континуума исключительную роль играет теория рациональных алгебраических инвариантов [1–7]. Инварианты и полуинварианты позволяют корректно сформулировать аппроксимации заданной степени для энергетических потенциалов силовых и моментных напряжений в микрополярной механике упругих тел [8–18]. Это особенно актуально при построении математических моделей гемитропных микрополярных упругих сред. В данном случае наиболее подходящим оказывается А-представление [17, 18] энергетических форм, представляющее собой линейную комбинацию индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов асимметричного тензора деформаций и градиента поля микроповоротов относительно гемитропной группы преобразований.

Основным понятием теории алгебраических инвариантов является индивидуальный инвариант (псевдоинвариант) тензора (псевдотензора) [4, с. 136]. При этом если алгебраический вес g инварианта равен нулю, то инвариант называется абсолютным, а при $g \neq 0$ — относительным, или псевдоинвариантом. Инварианты тензора могут быть заданы несколькими способами [4, с. 327]. Например, для аффинора A_k^s следы его степеней образуют бесконечную систему инвариантов:

$$S_1 = A_s^s, \quad S_2 = A_s^k A_k^s, \quad S_3 = A_s^k A_k^l A_l^s, \quad \dots \quad (1)$$

С другой стороны, существенную роль играют также следующие инварианты:

$$I_1 = A_s^s, \quad I_2 = A_{[s}^k A_{k]}^s, \quad I_3 = A_{[s}^k A_k^l A_{l]}^s, \quad \dots \quad (2)$$

Квадратные скобки в (2) обозначают операцию альтернирования по заключенным в них индексам. Раскрывая знак альтернирования в (2), можно получить формулы Варинга, связывающие между собой инварианты системы (2) и системы (1).

Совместные инварианты набора, состоящего из нескольких тензоров (псевдотензоров), определяются следами внутренних совместных произведений тензоров, входящих в набор.

Системы инвариантов (1) и (2) представляют собой бесконечные множества. Кроме того, целая рациональная функция (с числовыми коэффициентами) от нескольких инвариантов системы также будет (при определенных условиях) инвариантом того же набора.

В связи с этим возникает понятие неприводимого инварианта системы, т.е. такого инварианта, который не является целой рациональной функцией от других инвариантов той же системы. Множество всех неприводимых инвариантов системы называется ее полной системой инвариантов, т.е. множеством инвариантов, представляющих собой целые рациональные функции, причем никакой из инвариантов не может быть выражен в виде целой рациональной функции остальных (или некоторых из них).

Следует отметить, что монография [5] посвящена построению систем инвариантов для различных наборов тензоров. Однако как в ней, так и в ее английском оригинале присутствуют досадные опечатки [5, с. 65, Табл. 2]. Среди индивидуальных инвариантов матрицы **a** ошибочно указан инвариант $\mathbf{b}^3$. В строке, описывающей набор совместных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных матриц второго ранга **a**, **b**, **u** и **v**, отсутствуют инварианты $\mathbf{u}^2\mathbf{a}\mathbf{v}\mathbf{b}^{2*†}$, а вместо инвариантов $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^{*†}$ приведены инварианты $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{a}^2\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{b}\mathbf{a}^{2*}$. Однако, руководствуясь статьями [1, 2], можно составить корректный полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов двух симметричных и двух антисимметричных тензоров второго ранга (см. [2, р. 80, Table 1]). Вместе с тем первую часть статьи [1] следует читать с осторожностью, поскольку, по утверждению самого автора, в ней также присутствуют неточности.

Настоящее исследование направлено на последовательное применение результатов теории алгебраических инвариантов для построения аппроксимации заданной (четвертой) степени точности энергетических форм потенциалов силовых и моментных напряжений микрополярных упругих тел. С помощью теории целых рациональных алгебраических инвариантов (полуинвариантов) изучено полное множество неприводимых инвариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга в форме инвариантных следов. Из 86 элементов отобрано 39 инвариантов в соответствии с правилом возрастания алгебраических степеней: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных, 12 кубических и 19 инвариантов четвертой степени. Предложена схема построения 39 инвариантов четвертой степени, сгруппированных в четыре категории на основе следующих правил: произведения линейных инвариантов между собой, произведения квадратичных инвариантов между собой, произведения линейных и квадратичных инвариантов, попарные произведения линейных и кубических инвариантов, а также собственные инварианты четвертой степени. Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, содержащий квадратичные, кубические и слагаемые четвертой алгебраической степени. В результате получены 87 поправок к кубическому потенциалу силовых и моментных напряжений нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела.

Изложение в значительной степени основано на терминологии, обозначениях, методах и результатах, разработанных в предыдущих статьях [17–25].

2. Инвариантные следы, не превышающие четвертую степень и образующие целый рациональный базис относительно гемитропной группы преобразований. Рассмотрим систему, состоящую из двух асимметричных тензоров второго ранга. Каждый из этих тензоров может быть представлен в виде алгебраической суммы симметричной и антисимметрич-

ной составляющих:

$$\mathbf{A} + \mathbf{V}; \quad \mathbf{B} + \mathbf{W}.$$

При этом выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^\top; & \mathbf{V} &= -\mathbf{V}^\top; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^\top; & \mathbf{W} &= -\mathbf{W}^\top. \end{aligned}$$

Используя результаты, полученные в работах [1, 2, 5], для системы, состоящей из двух симметричных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и двух антисимметричных $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ тензоров второго ранга, можно построить систему инвариантов. Следует отметить, что рассуждения о совместных и индивидуальных инвариантах такой системы существенно зависят от размерности пространства [26]. В дальнейшем будем считать, что размерность пространства равна 3. Полный набор индивидуальных и совместных гемитропных инвариантов указанной системы тензоров состоит из 86 неприводимых элементов [1, 2, 5], упорядоченных согласно [5, с. 65, Табл. 2]:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| 1) $\text{tr}[\mathbf{A}]$; | 2) $\text{tr}[\mathbf{A}^2]$; | 3) $\text{tr}[\mathbf{A}^3]$; | 4) $\text{tr}[\mathbf{B}]$; |
| 5) $\text{tr}[\mathbf{B}^2]$; | 6) $\text{tr}[\mathbf{B}^3]$; | 7) $\text{tr}[\mathbf{V}^2]$; | 8) $\text{tr}[\mathbf{W}^2]$; |
| 9) $\text{tr}[\mathbf{AB}]$; | 10) $\text{tr}[\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 11) $\text{tr}[\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; | 12) $\text{tr}[\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2]$; |
| 13) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}]$; | 14) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2]$; | 15) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVA}^2]$; | 16) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}]$; |
| 17) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]$; | 18) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BVB}^2]$; | 19) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]$; | 20) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]$; |
| 21) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWA}^2]$; | 22) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]$; | 23) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]$; | 24) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BWB}^2]$; |
| 25) $\text{tr}[\mathbf{VW}]$; | 26) $\text{tr}[\mathbf{VAB}]$; | 27) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]$; | 28) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]$; |
| 29) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2]$; | 30) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{BA}]$; | 31) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{AB}]$; | 32) $\text{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; |
| 33) $\text{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 34) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]$; | 35) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 36) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; |
| 37) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}]$; | 38) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AVB}^2]$; | 39) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BVA}^2]$; | 40) $\text{tr}[\mathbf{WAB}]$; |
| 41) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]$; | 42) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]$; | 43) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2]$; | 44) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{BA}]$; |
| 45) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{AB}]$; | 46) $\text{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; | 47) $\text{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 48) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]$; |
| 49) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2\mathbf{B}]$; | 50) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2\mathbf{A}]$; | 51) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}]$; | 52) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AWB}^2]$; |
| 53) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BWA}^2]$; | 54) $\text{tr}[\mathbf{VWA}]$; | 55) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2]$; | 56) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]$; |
| 57) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]$; | 58) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}^2]$; | 59) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}^2]$; | 60) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWA}^2]$; |
| 61) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVA}^2]$; | 62) $\text{tr}[\mathbf{VWB}]$; | 63) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2]$; | 64) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]$; |
| 65) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]$; | 66) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}^2]$; | 67) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}^2]$; | 68) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BWB}^2]$; |
| 69) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BVB}^2]$; | 70) $\text{tr}[\mathbf{VWAB}]$; | 71) $\text{tr}[\mathbf{VWBA}]$; | 72) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}]$; |
| 73) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2\mathbf{A}]$; | 74) $\text{tr}[\mathbf{WVA}^2\mathbf{B}]$; | 75) $\text{tr}[\mathbf{WVB}^2\mathbf{A}]$; | 76) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{B}^2]$; |
| 77) $\text{tr}[\mathbf{VWA}^2\mathbf{BA}]$; | 78) $\text{tr}[\mathbf{VWB}^2\mathbf{AB}]$; | 79) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WAB}]$; | 80) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VAB}]$; |
| 81) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}]$; | 82) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}]$; | 83) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{BWA}^2]$; | 84) $\text{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AWB}^2]$; |
| 85) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{BVA}^2]$; | 86) $\text{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AVB}^2]$. | | |

Здесь и далее операция внутреннего произведения тензоров будет опускаться, т.е. запись $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ сокращается до $\mathbf{AB}$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением гемитропных инвариантов не выше четвертой степени из набора (3). Количество таких инвариантов составляет 39. Для удобства перенумеруем их в соответствии со следующими правилами:

- 1) инварианты нумеруются в порядке возрастания их алгебраической степени;
- 2) при одинаковой степени — в порядке увеличения количества различных сомножителей во внутреннем произведении;
- 1) при прочих равных условиях — в алфавитном порядке.

При этом правило 1 является главным, а правила 2 и 3 — подчиненными. Кроме того, правило 3 также подчинено правилу 2. В результате получаем упорядоченный набор инвариантов не выше четвертой степени:

$$\begin{array}{llll}
 1) \operatorname{tr}[\mathbf{A}]; & 2) \operatorname{tr}[\mathbf{B}]; & 3) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^2]; & 4) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^2]; \\
 5) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2]; & 6) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2]; & 7) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}]; & 8) \operatorname{tr}[\mathbf{VW}]; \\
 9) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^3]; & 10) \operatorname{tr}[\mathbf{B}^3]; & 11) \operatorname{tr}[\mathbf{AB}^2]; & 12) \operatorname{tr}[\mathbf{BA}^2]; \\
 13) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}]; & 14) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}]; & 15) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}]; & 16) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}]; \\
 17) \operatorname{tr}[\mathbf{VAB}]; & 18) \operatorname{tr}[\mathbf{WAB}]; & 19) \operatorname{tr}[\mathbf{VWA}]; & 20) \operatorname{tr}[\mathbf{VWB}]; \\
 21) \operatorname{tr}[\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2]; & 22) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{A}^2]; & 23) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{B}^2]; & 24) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{A}^2]; \\
 25) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{B}^2]; & 26) \operatorname{tr}[\mathbf{VA}^2\mathbf{B}]; & 27) \operatorname{tr}[\mathbf{WA}^2\mathbf{B}]; & 28) \operatorname{tr}[\mathbf{VB}^2\mathbf{A}]; \\
 29) \operatorname{tr}[\mathbf{WB}^2\mathbf{A}]; & 30) \operatorname{tr}[\mathbf{VWA}^2]; & 31) \operatorname{tr}[\mathbf{VWB}^2]; & 32) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{AB}]; \\
 33) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{AB}]; & 34) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WA}]; & 35) \operatorname{tr}[\mathbf{V}^2\mathbf{WB}]; & 36) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VA}]; \\
 37) \operatorname{tr}[\mathbf{W}^2\mathbf{VB}]; & 38) \operatorname{tr}[\mathbf{VWAB}]; & 39) \operatorname{tr}[\mathbf{VWBA}]. &
 \end{array} \quad (4)$$

Каждый из инвариантных следов снабжен индивидуальным идентификационным номером 1–39. Отметим, что в наборе (4) присутствуют: два инварианта первой степени (1, 2); шесть инвариантов второй степени (3–8); двенадцать инвариантов третьей степени (9–20) и девятнадцать инвариантов четвертой степени (21–39).

Для вычисления алгебраических инвариантов (4), следуя монографии [4, с. 327], можно воспользоваться представлением тензоров в смешанных компонентах. Такой подход является удобным и не зависит от метрики пространства. В этом случае инварианты (4) в заданной криволинейной системе координат принимают вид

$$\begin{array}{lll}
 1) A_s^s; & 2) B_s^s; & 3) A_s^k A_k^s; \\
 4) B_s^k B_k^s; & 5) V_s^k V_k^s; & 6) W_s^k W_k^s; \\
 7) A_s^k B_k^s; & 8) V_s^k W_k^s; & 9) A_s^k A_k^l A_l^s; \\
 10) B_s^k B_k^l B_l^s; & 11) A_s^k B_k^l B_l^s; & 12) B_s^k A_k^l A_l^s; \\
 13) V_s^k V_k^l A_l^s; & 14) V_s^k V_k^l B_l^s; & 15) W_s^k W_k^l A_l^s; \\
 16) W_s^k W_k^l B_l^s; & 17) V_s^k A_k^l B_l^s; & 18) W_s^k A_k^l B_l^s; \\
 19) V_s^k W_k^l A_l^s; & 20) V_s^k W_k^l B_l^s; & 21) A_s^k A_k^l B_l^m B_m^s; \\
 22) V_s^k V_k^l A_l^m A_m^s; & 23) V_s^k V_k^l B_l^m B_m^s; & 24) W_s^k W_k^l A_l^m A_m^s;
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & 25) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 26) V_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 27) W_s^{\cdot k} A_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \\
 & 28) V_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \quad 29) W_s^{\cdot k} B_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \quad 30) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \\
 & 31) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 32) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 33) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \\
 & 34) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} W_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \quad 35) V_s^{\cdot k} V_k^{\cdot l} W_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 36) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} V_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}; \\
 & 37) W_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} V_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 38) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} A_l^{\cdot m} B_m^{\cdot s}; \quad 39) V_s^{\cdot k} W_k^{\cdot l} B_l^{\cdot m} A_m^{\cdot s}.
 \end{aligned}$$

Выделим сначала линейные инварианты из списка (4):

$$1, 2. \quad (5)$$

Отметим, что линейные инварианты (5) могут быть также выражены через $A_k^{\cdot}$ и $B_k^{\cdot}$.

Сформируем набор квадратичных инвариантов из элементов списка (4). Очевидно, что таковыми являются (номера соответствуют инвариантам) [24]:

$$\begin{aligned}
 & 1^2, 1 \cdot 2; \\
 & 2^2; \\
 & 3, 4, 5, 6, 7, 8.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Набор (6) состоит из 9 квадратичных гемитропных инвариантов, которые были использованы для построения квадратичной энергетической формы [17, 18].

Для построения аппроксимаций более высоких степеней (третьей, четвертой и т.д.) энергетических форм необходимо расширить систему рациональных инвариантов до инвариантов более высоких целых степеней (3, 4, 5, ...).

Выпишем неприводимую систему кубических инвариантов, представляющих собой совместные произведения инвариантов из списка (4) общей степени 3. Полный перечень из 28 кубических гемитропных инвариантов имеет следующий вид [25]:

$$\begin{aligned}
 & 1^3, 1^2 \cdot 2, 1 \cdot 2^2; \\
 & 2^3; \\
 & 1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 1 \cdot 5, 1 \cdot 6, 1 \cdot 7, 1 \cdot 8; \\
 & 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6, 2 \cdot 7, 2 \cdot 8; \\
 & 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Построим полный набор инвариантов четвертой степени, представляющих собой совместные комбинации инвариантов из списка (4) общей алгебраической степени 4 по следующей схеме. Сначала найдем комбинации линейных инвариантов между собой:

$$\begin{aligned}
 & 1^4, 1^3 \cdot 2, 1^2 \cdot 2, 1 \cdot 2^3; \\
 & 2^4.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Затем определим комбинации квадратичных инвариантов между собой:

$$\begin{aligned} &3^2, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, 3 \cdot 8; \\ &4^2, 4 \cdot 5, 4 \cdot 6, 4 \cdot 7, 4 \cdot 8; \\ &5^2, 5 \cdot 6, 5 \cdot 7, 5 \cdot 8; \\ &6^2, 6 \cdot 7, 6 \cdot 8; \\ &7^2, 7 \cdot 8; \\ &8^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Комбинации линейных и квадратичных инвариантов вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &1^2 \cdot 3, 1^2 \cdot 4, 1^2 \cdot 5, 1^2 \cdot 6, 1^2 \cdot 7, 1^2 \cdot 8; \\ &2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 4, 2^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 6, 2^2 \cdot 7, 2^2 \cdot 8; \\ &1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 5, 1 \cdot 2 \cdot 6, 1 \cdot 2 \cdot 7, 1 \cdot 2 \cdot 8. \end{aligned} \tag{10}$$

Комбинации линейных и кубических инвариантов имеют вид

$$\begin{aligned} &1 \cdot 9, 1 \cdot 10, 1 \cdot 11, 1 \cdot 12, 1 \cdot 13, 1 \cdot 14, \\ &1 \cdot 15, 1 \cdot 16, 1 \cdot 17, 1 \cdot 18, 1 \cdot 19, 1 \cdot 20; \\ &2 \cdot 9, 2 \cdot 10, 2 \cdot 11, 2 \cdot 12, 2 \cdot 13, 2 \cdot 14, \\ &2 \cdot 15, 2 \cdot 16, 2 \cdot 17, 2 \cdot 18, 2 \cdot 19, 2 \cdot 20. \end{aligned} \tag{11}$$

Наконец, выделим инварианты четвертой степени:

$$\begin{aligned} &21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, \\ &31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39. \end{aligned} \tag{12}$$

Объединив полученные группы комбинаций (8), (9), (10), (11) и (12), получим искомый полный набор из $5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87$ инвариантов четвертой степени.

3. Аппроксимация четвертой степени энергетической формы гетитропного микрополярного упругого тела. Основываясь на результатах предыдущего раздела, построим систему индивидуальных и совместных целых рациональных алгебраических инвариантов симметричных и антисимметричных частей асимметричных тензоров деформаций и тензора изгиба-кручения. Для этого выполним следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{sym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{B} &= \text{sym } \boldsymbol{\kappa}, \\ \mathbf{V} &= \text{asym } \boldsymbol{\epsilon}, & \mathbf{W} &= \text{asym } \boldsymbol{\kappa}. \end{aligned} \tag{13}$$

В смешанных компонентах соотношения (13) принимают вид

$$\begin{aligned} A_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^k + \epsilon_{\cdot s}^k], & B_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^k + \kappa_{\cdot s}^k], \\ V_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\epsilon_{s \cdot}^k - \epsilon_{\cdot s}^k], & W_{s \cdot}^k &= \frac{1}{2} [\kappa_{s \cdot}^k - \kappa_{\cdot s}^k]. \end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что смешанные тензорные компоненты в (14) могут быть представлены альтернативным эквивалентным способом (например, через $A_{\cdot s}^{k\cdot}$ и $B_{\cdot s}^{k\cdot}$).

Используя замену (13) и следуя схеме нумерации из работ [17, 18], систему квадратичных гемитропных инвариантов (6) можно представить в соответствии с [24], а систему гемитропных кубических инвариантов (7) — согласно [25]. Аналогичным образом может быть получена система гемитропных инвариантов четвертой степени. Ввиду значительного объема соответствующих выражений мы не приводим их в данной статье.

А-представление аппроксимации четвертой степени энергетической формы гемитропного микрополярного упругого тела, соответствующее системе инвариантов второй, третьей и четвертой степеней, запишем в компактной форме:

$$\mathcal{U} = \sum_{a=1}^9 {}^2C_a {}^2I_a + \sum_{c=1}^{28} {}^3C_c {}^3\mathfrak{J}_c + \sum_{m=1}^{87} {}^4C_m {}^4\mathfrak{K}_m, \quad (15)$$

где введены следующие обозначения для определяющих модулей:

- 2C_a ($a = 1, \dots, 9$) — определяющие модули квадратичного приближения;
- 3C_c ($c = 1, \dots, 28$) — определяющие модули, связанные с кубическими поправками;
- 4C_m ($m = 1, \dots, 87$) — определяющие модули, связанные с поправками четвертой степени;
- 2I_a ($a = 1, \dots, 9$) — квадратичные инварианты;
- ${}^3\mathfrak{J}_c$ ($c = 1, \dots, 28$) — кубические инварианты;
- ${}^4\mathfrak{K}_m$ ($m = 1, \dots, 87$) — инварианты четвертой степени.

Следует особо отметить чувствительность некоторых определяющих модулей к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, что обусловлено возможностью присвоения нечетного алгебраического веса тензору изгиба-кручения.

Совокупность определяющих модулей ($9+28+87 = 124$): 2C_a ($a = 1, \dots, 9$); 3C_c ($c = 1, \dots, 28$) и 4C_m ($m = 1, \dots, 87$), присутствующих в потенциале силовых и моментных напряжений (15), представляет собой неопределенные коэффициенты в линейной комбинации неприводимой системы инвариантов второй, третьей и четвертой алгебраических степеней системы двух асимметричных тензоров второго ранга.

4. Заключение. В настоящей работе развит подход, основанный на теории алгебраических инвариантов, для построения аппроксимации четвертой степени энергетической формы нелинейного гемитропного микрополярного упругого тела. Алгебраические инварианты представлены в форме инвариантных следов, соответствующих, в общем случае, неперестановочным степеням внутренних произведений тензоров второго ранга, составляющих исследуемую систему. Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом.

1. На основе теории целых рациональных алгебраических инвариантов (полуинвариантов) исследовано полное множество неприводимых ин-

вариантов для системы двух асимметричных тензоров второго ранга, представленных в форме инвариантных следов. В результате выделен полный набор из 86 инвариантных следов, состоящий из 8 индивидуальных инвариантов, 17 парных инвариантов, 44 инвариантных троек и 17 инвариантных четверок. Общее количество инвариантов составляет $8 + 17 + 44 + 17 = 86$.

2. Из 86 элементов отобрано 39 инвариантов в соответствии с правилом возрастания алгебраических степеней: 2 линейных инварианта, 6 квадратичных инвариантов, 12 кубических инвариантов и 19 инвариантов четвертой степени ($2 + 6 + 12 + 19 = 39$). Предложена схема построения 39 инвариантов четвертой степени, организованных в четыре группы.
3. Установлены целые рациональные комбинации четвертой алгебраической степени, сформированные из 39 элементов по следующей схеме: произведения линейных инвариантов между собой (5 комбинаций); произведения квадратичных инвариантов между собой (21 комбинация); произведения линейных и квадратичных инвариантов (18 комбинаций), попарные произведения линейных и кубических инвариантов (24 комбинации), собственные инварианты четвертой степени (19 комбинаций). Общее количество комбинаций составляет $5 + 21 + 18 + 24 + 19 = 87$.
4. Построен потенциал силовых и моментных напряжений гемитропного микрополярного упругого тела, включающий квадратичные, кубические и слагаемые четвертой алгебраической степени. В результате микрополярный потенциал характеризуется 124 определяющими модулями ($9 + 28 + 87 = 124$).
5. Получены явные формулы для вычисления всех 39 инвариантов в смешанных тензорных компонентах в произвольной криволинейной системе координат.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена по теме государственного задания (государственный регистрационный номер 124012500437-9).

Библиографический список

1. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962. vol. 9. pp. 45–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253332>.
2. Spencer A. J. M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part II // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965. vol. 18. pp. 51–82. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253982>.
3. Smith G. F. On isotropic integrity bases // *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965. vol. 18. pp. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00251667>.
4. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.

5. Spencer A. J. M. Theory of invariants / *Continuum Physics*. vol.1. New York: Academic Press, 1971. pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
6. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
7. Жилин П. А. *Рациональная механика сплошных сред*. СПб.: Политехн. ун-т, 2012. 584 с.
8. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Herman et Fils, 1909. vi+226 pp.
9. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums // *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1964. vol.16. pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
10. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua / *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
11. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*: Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine / International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. vol.25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
12. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums // *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1958. vol.10. pp. 195–213.
13. Neuber H. On the effect of stress concentration in Cosserat continua / *Mechanics of Generalized Continua*; eds. E. Kröner. Berlin, Heidelberg: Springer, 1968. pp. 109–113. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13.
14. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity* / Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. vol.15. Berlin: Springer, 2004. xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
15. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mech.*, 1974. vol.20, no.1. pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
16. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
17. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Приведение естественных форм гемитропных энергетических потенциалов к конвенциональным // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 4. С. 108–115. EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
20. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О двух основных естественных формах потенциала асимметричных тензоров силовых и моментных напряжений в механике гемитропных тел // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 3. С. 86–100. EDN: YOENQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
21. Мурашкин Е. В. О связи микрополярных определяющих параметров термодинамических потенциалов состояния // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2022. № 1. С. 110–121. EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
22. Murashkin E. V., Radayev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.*, 2023. vol.44, no.6. pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
23. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2024. vol.45, no.5. pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.

24. Murashkin E. V., Radayev Y. N. Cubic approximation of stress potential for a hemitropic micropolar elastic solid // *Lobachevskii J. Math.*, 2025. vol. 46, no. 5. pp. 2391–2400. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080225606514>.
25. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О квадратичных поправках определяющих уравнений для гемитропного микрополярного упругого тела // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 2. С. 274–293. EDN: DZUMDJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2144>.
26. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.

MSC: 15A72, 74A35, 74B20

Quartic corrections in energy potentials of hemitropic micropolar solids

*E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The present study is devoted to employing the theory of algebraic invariants for deriving an approximation of the potential of force and couple stresses of the fourth degree for a nonlinear hemitropic micropolar elastic solid. The complete set of irreducible invariants for a system of two asymmetric second-rank tensors in the form of invariant traces is studied using the theory of integer rational algebraic invariants (semi-invariants).

As a result, a set of 86 invariant traces is obtained. This set comprises 8 individual invariants, 17 doublets, 44 triplets, and 17 quadruplets. From these 86 elements, 39 invariants were selected according to the rule of increasing algebraic degrees: 2 linear invariants, 6 quadratic, 12 cubic, and 19 quartic. The 39 fourth-degree invariants are divided into four groups based on the following rules: products of linear invariants with each other, products of quadratic invariants with each other, products of linear and quadratic invariants, pairwise products of linear and cubic invariants, and proper fourth-degree invariants.

The potential of force and couple stresses of a hemitropic micropolar elastic solid is constructed, containing quadratic, cubic, and quartic algebraic terms. Thus, the micropolar potential contains a total of 124 constitutive modules. Formulas for calculating all 39 invariants in mixed tensor components are provided. As a result, 87 quartic corrections to the cubic potential of force and couple stresses of a nonlinear hemitropic micropolar elastic solid are obtained.

Mechanics of Solids

Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Quartic corrections in energy potentials of hemitropic micropolar solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 472–485. EDN: CMAPHC. DOI: 10.14498/vsgtu2163 (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: murashkin@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Keywords: nanoscale, microscale, energy form, integer rational algebraic invariant, irreducible system of invariants, cubic approximation, hemitropic micropolar elastic solid.

Received: 25th February, 2025 / Revised: 12th June, 2025 /

Accepted: 18th June, 2025 / First online: 10th July, 2025

Competing interests. We have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out on the topic of the state assignment (state registration no. 124012500437-9).

References

1. Spencer A. J. M., Rivlin R. S. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 9, pp. 45–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253332>.
2. Spencer A. J. M. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part II, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965, vol. 18, pp. 51–82. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253982>.
3. Smith G. F. On isotropic integrity bases, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1965, vol. 18, pp. 282–292. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00251667>.
4. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, The Netherlands, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
5. Spencer A. J. M. Theory of invariants, In: *Continuum Physics*, vol. 1. New York, Academic Press, 1971, pp. 240–353. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-240801-4.50008-X>.
6. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebrы* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
7. Zhilin P. A. *Ratsional'naya mekhanika sploshnykh sred* [Rational Continuum Mechanics Media]. St. Petersburg, Polytechn. Univ., 2012, 584 pp. (In Russian)
8. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, Herman et Fils, 1909, vi+226 pp.
9. Kessel S. Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1964, vol. 16, pp. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.24355/dbbs.084-201301181342-0>.
10. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. H. Görtler. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16.
11. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*, Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine, International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures, vol. 25. Wien, New York, Springer, 1972, 286 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9>.
12. Günther W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1958, vol. 10, pp. 195–213.
13. Neuber H. On the effect of stress concentration in Cosserat continua, In: *Mechanics of Generalized Continua*; eds. E. Kröner. Berlin, Heidelberg, Springer, 1968, pp. 109–113. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13.
14. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 15. Berlin, Springer, 2004, xv+356 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.

15. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mech.*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
16. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
17. Radaev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Radaev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Reducing natural forms of hemitropic energy potentials to conventional ones, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 4, pp. 108–115 (In Russian). EDN: DTZTJY. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.54.4.009>.
20. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On two base natural forms of asymmetric force and couple stress tensors of potential in mechanics of hemitropic solids, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 3, pp. 86–100 (In Russian). EDN: YOEHQV. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.53.3.010>.
21. Murashkin E. V. On the relationship of micropolar constitutive parameters of thermodynamic state potentials, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2022, no. 1, pp. 110–121 (In Russian). EDN: JXXIAX. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2023.55.1.012>.
22. Murashkin E. V., Radaev Y. N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity, *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. EDN: PINYDI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
23. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. Theory of Poisson's ratio for a thermoelastic micropolar acentric isotropic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 2378–2390. EDN: ASGCQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080224602480>.
24. Murashkin E. V., Radaev Y. N. Cubic approximation of stress potential for a hemitropic micropolar elastic solid, *Lobachevskii J. Math.*, 2025, vol. 46, no. 5, pp. 2391–2400. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080225606514>.
25. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On quadratic corrections of constitutive equations for a hemitropic micropolar elastic solid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 2, pp. 274–293 (In Russian). EDN: DZUMDJ. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.14498/vsgtu2144>.
26. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)



MSC: 76D05, 76U05

Inhomogeneous Ekman flow

N. V. Burmasheva^{1,2}, E. Yu. Prosviryakov^{1,2}¹ Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.² Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

This paper presents a new exact solution describing the inhomogeneous distribution of velocity and pressure fields in the problem of isothermal steady shear flow of a viscous incompressible fluid. The obtained exact solutions remain valid when the kinematic viscosity is replaced by the turbulent viscosity in the Navier–Stokes equations.

It is shown that in the class of functions that are linear in some coordinates, a joint inhomogeneous solution for the velocity field can have only a specific structure—with constant spatial accelerations. In this case, either only two specific accelerations vanish, or all four spatial accelerations equal zero (homogeneous velocity field, Ekman solution). No other joint solutions exist in the specified class.

The case of two nonzero spatial accelerations is analyzed in detail, and the complete exact solution is provided. To understand the main properties of this solution, the corresponding boundary value problem is investigated and comprehensive illustrative material is presented.

Keywords: exact solution, shear flow, Ekman flow, overdetermined system.

Received: 6th April, 2025 / Revised: 5th July, 2025 /

Accepted: 10th July, 2025 / First online: 22nd July, 2025

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Ekman flow, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 486–502. EDN: CQUYOV. DOI: 10.14498/vsgtu2179.

Authors' Details:

Natalya V. Burmasheva  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Information Technology and Automation¹; Senior Researcher; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics²; e-mail: nat_burm@mail.ru

Evgeniy Yu. Prosviryakov  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology and Automation¹; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics²;

e-mail: evgen_pros@mail.ru

Introduction. The description of natural fluid flows is based on the equations of geophysical hydrodynamics, which are derived from the standard Navier–Stokes equations by accounting for planetary rotation [1–3]. The study of fluid flows was initiated by Ekman in his seminal paper [4]. Ekman investigated flows not on a sphere but on a tangent plane attached at a specific point (a region of study within the World Ocean). Thus, in developing the theory of oceanic and sea currents, Ekman introduced the idea of locally neglecting the planet’s sphericity. This simplification allowed the vast majority of subsequent studies to use only one Coriolis parameter (the first Coriolis parameter) to describe rotation. This approach in geophysical hydrodynamics became known as the “primitive equations” of ocean theory [5–8].

In a rectangular Cartesian coordinate system, Ekman derived equations of motion for a rotating fluid by considering the balance of inertial forces and viscous friction forces, supplemented by the continuity (incompressibility) equation [4]. The fluid motions considered in his article belong to the class of shear flows and are described by an overdetermined system of partial differential equations.

It should be noted that the classification of Ekman flow types varies depending on the frame of reference. Ekman’s pioneering work [4] considered isobaric flow in a rotating coordinate system. In other words, the pressure force is balanced by the centrifugal force. If the fluid flow is considered in a stationary (inertial) coordinate system, such motion is not isobaric. Gradient Ekman flows (Ekman–Couette–Poiseuille flows) were first considered in the monograph [9].

When constructing an exact solution for the equations of the rotating ocean, Ekman proposed an exact solution for the overdetermined system, describing a homogeneous shear flow; that is, the velocity field structure is determined solely by the vertical (transverse) coordinate. In this case, the continuity (incompressibility) equation was automatically satisfied. Consequently, it became a “redundant” equation in the overdetermined system of partial differential equations. The Ekman exact solution now serves as a starting point for investigating World Ocean currents. Initially, it was used to model fluid motion in an infinite ocean. Gradually, perspectives shifted, and a transition occurred from modeling the ocean as having infinite depth to a layer of finite thickness [8–21].

Studies in [18, 19] initiated research on modifying the Ekman exact solution by incorporating two or three Coriolis parameters in the representation of the angular velocity vector to describe inhomogeneous shear flows. An exact solution was constructed for the overdetermined Navier–Stokes system within the Lin–Sidorov–Aristov class. Note that the type of exact solution describing an inhomogeneous Ekman-type flow is determined by the combination of Coriolis parameters and the curvature of the pressure field (which leads to a change in the type of the differential equation).

Despite the increasing number of modifications and generalizations of the Ekman exact solution [23–29], specialists in geophysical hydrodynamics perceive a deficit of research on boundary value problems for the mathematical and physical modeling of World Ocean currents. This paper analyzes an exact solution to a boundary value problem describing an inhomogeneous Ekman flow with a single (first) Coriolis parameter.

1. Problem Statement. We consider an isothermal steady flow of a rotating viscous incompressible fluid. The rotation is characterized by a constant angular velocity $\mathbf{\Omega}$. We assume that the vector $\mathbf{\Omega}$ has only one nonzero component (the single Coriolis parameter approximation) [5, 6, 12]:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(0, 0, f).$$

The system of Navier–Stokes equations, taking into account the inertial force (in the rotating coordinate system), takes the form [10, 12]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here $\mathbf{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z))$ is the velocity vector; $P(x, y, z)$ is the reduced pressure normalized by density, obtained from the true pressure p by subtracting the centrifugal component $\frac{\rho}{2}(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}, \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$ and accounting for potential body forces; ν is the kinematic viscosity of the fluid; ∇ , Δ are the Hamiltonian and Laplace operators, respectively.

In coordinate form, system (1) for inhomogeneous shear flows

$$\mathbf{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), 0)$$

becomes:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} - fV_y &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + fV_x &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

The resulting system (2) is quadratically nonlinear and overdetermined. To resolve the overdeterminacy, we consider a velocity field of the following form [10, 18, 19]:

$$V_x = U(z) + u(z)y, \quad V_y = V(z). \quad (3)$$

Functions of the form (3) identically satisfy the last equation of system (2)—the incompressibility equation. The components on the right-hand sides of expressions (3) can nonlinearly depend on the vertical (transverse) coordinate z .

The solution for the pressure field is also sought in the form of a complete linear function of the horizontal (longitudinal) coordinates x and y :

$$P = P_0 + P_1x + P_2y. \quad (4)$$

Note that the coefficients of the longitudinal coordinates in formula (4) (unlike expressions (3)) do not depend on the vertical coordinate z due to the penultimate equation of system (2), meaning they are constants. The values of the pressure field components are determined from the boundary conditions or from a point in the flow region where the pressure is known.

In [10, 18, 19], it was shown that the overdetermined system (2) is solvable in the class

$$\begin{aligned} V_x &= U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y, & V_y &= V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y, \\ P &= P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y + P_{12}(z)xy + P_{11}(z)\frac{x^2}{2} + P_{22}(z)\frac{y^2}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

which generalizes the class (3), (4).

Note that the attractiveness of the class (3) (besides identically satisfying the incompressibility equation in system (2)) also lies in the fact that the class (3) reduces to the Lin–Sidorov–Aristov class (5) by a coordinate transformation (rotation):

$$x \rightarrow x \cos \psi + y \sin \psi \stackrel{\text{not}}{=} \bar{x}, \quad y \rightarrow -x \sin \psi + y \cos \psi \stackrel{\text{not}}{=} \bar{y},$$

or (due to the invertibility of the rotation transformation)

$$x = \bar{x} \cos \psi - \bar{y} \sin \psi, \quad y = \bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi.$$

Then

$$\begin{aligned} \overline{V_x} &= V_x \cos \psi + V_y \sin \psi = (U + uy) \cos \psi + V \sin \psi = \\ &= (U + u(\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi)) \cos \psi + V \sin \psi = \\ &= U \cos \psi + V \sin \psi + u \sin \psi \cos \psi \bar{x} + u \cos^2 \psi \bar{y} = \overline{U} + \overline{u_1 x} + \overline{u_2 y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{V_y} &= -V_x \sin \psi + V_y \cos \psi = -(U + uy) \sin \psi + V \cos \psi = \\ &= -(U + u(\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi)) \sin \psi + V \cos \psi = \\ &= -U \sin \psi + V \cos \psi - u \sin^2 \psi \bar{x} - u \sin \psi \cos \psi \bar{y} = \overline{V} + \overline{v_1 x} + \overline{v_2 y}. \end{aligned}$$

Next, we substitute the class (3), (4) into the first two equations of system (2) (the last two equations of this system are automatically satisfied by the choice of the class (3), (4)):

$$\begin{aligned} (U(z) + u(z)y) \frac{\partial(U(z) + u(z)y)}{\partial x} + V(z) \frac{\partial(U(z) + u(z)y)}{\partial y} - fV(z) &= \\ = -\frac{\partial(P_0 + P_1x + P_2y)}{\partial x} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2(U(z) + u(z)y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U(z) + u(z)y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(U(z) + u(z)y)}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U(z) + u(z)y) \frac{\partial V(z)}{\partial x} + V(z) \frac{\partial V(z)}{\partial y} + f(U(z) + u(z)y) &= \\ = -\frac{\partial(P_0 + P_1x + P_2y)}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Computing the necessary partial derivatives, we arrive at the following system of equations:

$$\begin{aligned} uV - fV &= -P_1 + \nu(U'' + u''y), \\ f(U + uy) &= -P_2 + \nu V''. \end{aligned}$$

Here, the prime denotes the derivative with respect to the vertical coordinate z . Applying the method of undetermined coefficients to the equations of the last system, we obtain the following equivalent system:

$$\begin{aligned} (u - f)V &= -P_1 + \nu U'', \quad u'' = 0, \\ fU &= -P_2 + \nu V'', \quad u = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

The fulfillment of the last equation in system (6) automatically ensures the fulfillment of its second equation. Furthermore, the class (3) can now describe only a homogeneous velocity field:

$$V_x = U(z), \quad V_y = V(z), \quad (7)$$

which corresponds to the classical Ekman solution for a rotating coordinate system [4].

Expressions (7) are fully consistent with the conclusions presented in [10] for the class (5). According to the theorem proved in [10], system (2) is solvable in the class (5) only if the spatial accelerations are constant and determined by the expressions:

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f}, \quad u_2 = \frac{P_{11} - P_{22} - f\alpha}{2f}, \quad v_1 = \frac{P_{11} - P_{22} + f\alpha}{2f}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f}. \quad (8)$$

For the considered form (4) of the pressure field, equalities (8) lead to the expressions:

$$u_1 = v_2 = 0, \quad u_2 = -\frac{\alpha}{2}, \quad v_1 = \frac{\alpha}{2}. \quad (9)$$

Within the representation (3) for the velocity field of the flow, the last two equalities in system (9) can be satisfied only when $\alpha = 0$, i.e., only in the case of a homogeneous velocity field.

2. Construction of an Exact Solution. We now construct an inhomogeneous exact solution of system (2) for the velocity field, taking into account the pressure field structure (4). We reiterate that the class (4) is fully consistent with the third equation (the pressure equation) of the considered system (2).

In this case, the spatial accelerations are described by dependencies (9), where the parameter α is a nonzero solution of the following equation (see [10], formula (2.9)):

$$\alpha^2 f^2 + 2\alpha f^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha f^2(\alpha + 2f) = 0,$$

i.e., $\alpha = -2f$. Therefore, solution (9) takes the form:

$$u_1 = v_2 = 0, \quad u_2 = f, \quad v_1 = -f. \quad (10)$$

This means that the class (5), with expressions (4), describes a velocity field of the form:

$$V_x = U(z) + fy, \quad V_y = V(z) - fx. \quad (11)$$

The inhomogeneous solution (11) for the rotating coordinate system generalizes the classical Ekman solution, in which the velocity field in the rotating system was assumed to be homogeneous [4]. The solution (11) in the fixed coordinate system becomes:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = (V_x, V_y, 0) &\Rightarrow \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (V_x, V_y, 0) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & f/2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (V_x, V_y, 0) + \left(-\frac{fy}{2}, \frac{fx}{2}, 0\right) = (U(z) + fy, V(z) - fx, 0) + \left(-\frac{fy}{2}, \frac{fx}{2}, 0\right) = \\ &= \left(U(z) + \frac{1}{2}fy, V(z) - \frac{1}{2}fx, 0\right). \end{aligned}$$

Using the previously obtained result for the class (5) (see [10], system (3.1)):

$$\nu U'' - Uu_1 - (u_2 - f)V = P_1,$$

$$\nu V'' + Vu_1 - (v_1 + f)V = P_2,$$

and substituting expressions (10) into this system, we obtain:

$$\nu U'' - U \cdot 0 - (f - f)V = P_1,$$

$$\nu V'' + V \cdot 0 - (-f + f)V = P_2.$$

This results in the following decoupled system of equations:

$$\nu U'' = P_1, \quad \nu V'' = P_2.$$

Integrating each equation independently, we find the general solution:

$$U = \frac{P_1}{2\nu}z^2 + c_1z + c_2, \quad V = \frac{P_2}{2\nu}z^2 + c_3z + c_4. \quad (12)$$

Consequently, the velocity field in the moving coordinate system is described by the following pair of functions:

$$\begin{aligned} V_x = U + u_2y &= \frac{P_1}{2\nu}z^2 + c_1z + c_2 + fy = \frac{P_1}{2\nu}z^2 + c_1z + c_2 + fy, \\ V_y = V + v_1x &= \frac{P_2}{2\nu}z^2 + c_3z + c_4 - fx. \end{aligned} \quad (13)$$

The obtained formulas (12) (and accordingly, expressions (13)) represent an exact solution to the overdetermined system to which system (2) reduces within the class (4)–(5) of hydrodynamic fields that are linear in part of the coordinates. Both background velocities (12) define a linear combination of independent power functions of different orders. This solution structure potentially opens up a wide scope for various variations in the flow profile structure and for investigating

velocity field stratification. We will subsequently consider possible fluid flow profiles using the example of a classical boundary value problem for steady flows in geophysical hydrodynamics. Thus, the obtained exact solution (13) describes a gradient solid-body rotation of the fluid.

3. Selection of Boundary Conditions. Consider the flow of a solid-body rotating fluid in an infinitely extended horizontal layer of constant thickness h . Assume that the lower boundary $z = 0$ is solid and non-deformable. Let us examine the behavior of solution (13) at this boundary:

$$\begin{aligned} V_x(0) &= \frac{P_1}{2\nu} \cdot 0^2 + c_1 \cdot 0 + c_2 + fy = c_2 + fy, \\ V_y(0) &= \frac{P_2}{2\nu} \cdot 0^2 + c_3 \cdot 0 + c_4 - fx = c_4 - fx. \end{aligned} \quad (14)$$

Expressions (14) clearly demonstrate that the no-slip condition for the shear flow $(U(z), V(z), 0)$ can be satisfied at the lower boundary. The physical meaning of the exact solution (13), according to formulas (14), corresponds to a shear flow over a rotating substrate (an infinitely extended disk or plate). Therefore, when illustrating the obtained solution (13), we impose the no-slip condition for the background velocities of the shear flow (12) as the first boundary condition:

$$U(0) = 0, \quad V(0) = 0,$$

which gives:

$$c_2 = c_4 = 0. \quad (15)$$

Based on similar considerations, the second boundary condition is also applied not to the full velocity field (13), but to its homogeneous components (12). We assume that the distribution of background velocities is specified at the upper rotating boundary of the layer $z = h$:

$$U(h) = W \cos \varphi, \quad V(h) = W \sin \varphi.$$

This represents a translational wind velocity at the upper boundary of the rotating fluid layer.

Taking into account the previously obtained expressions (12) and (15), we obtain the system of two conditions:

$$U(h) = \frac{P_1}{2\nu} h^2 + c_1 h = W \cos \varphi, \quad V(h) = \frac{P_2}{2\nu} h^2 + c_3 h = W \sin \varphi.$$

Solving this system yields:

$$c_1 = \frac{W}{h} \cos \varphi - \frac{P_1}{2\nu} h, \quad c_3 = \frac{W}{h} \sin \varphi - \frac{P_2}{2\nu} h. \quad (16)$$

Consequently, the solution to the boundary value problem takes the form:

$$\begin{aligned} U &= z \left[\frac{P_1}{2\nu} z + \left(\frac{W}{h} \cos \varphi - \frac{P_1}{2\nu} h \right) \right], \\ V &= z \left[\frac{P_2}{2\nu} z + \left(\frac{W}{h} \sin \varphi - \frac{P_2}{2\nu} h \right) \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V_x &= z \left[\frac{P_1}{2\nu} z + \left(\frac{W}{h} \cos \varphi - \frac{P_1}{2\nu} h \right) \right] + fy, \\ V_y &= z \left[\frac{P_2}{2\nu} z + \left(\frac{W}{h} \sin \varphi - \frac{P_2}{2\nu} h \right) \right] - fx. \end{aligned} \quad (18)$$

The obtained solution (18) represents a pair of functions, each being a superposition of a linear combination of linearly independent power functions of the vertical coordinate z and an inhomogeneous field that is linear in the longitudinal coordinate x (or y , respectively).

4. Results and Discussion. The structure of the velocity vector projections allows us to obtain profiles of varying curvature by modifying the fluid characteristics and boundary condition parameters.

The coincidence of stagnation points for both velocities (17) is possible under two conditions:

$$0 < -\frac{2\nu \left(\frac{W}{h} \cos \varphi - \frac{P_1}{2\nu} h \right)}{P_1} < h \quad \text{for } P_1 \neq 0$$

(i.e., $0 < h - \frac{2\nu W \cos \varphi}{h P_1} < h$) and

$$\frac{P_2}{2\nu} \left(h - \frac{2\nu W \cos \varphi}{h P_1} \right) + \left(\frac{W}{h} \sin \varphi - \frac{P_2}{2\nu} h \right) = 0$$

(i.e., $\tan \varphi = P_2/P_1$).

Figures 1 and 2 show the profiles (17) of the homogeneous components U and V of the velocity field, calculated using the same parameter values that define the boundary value problem (15), (16). For the graphical illustration of the obtained exact solution in Figs. 1–11, the following flow parameters were used: $f = 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $W = -0.15 \text{ m/s}$, $\varphi = \pi/2.01$, $P_1 = -0.03 \times 10^{-5} \text{ Pa/m}$, $P_2 = 2P_1$, $h = 1 \text{ m}$.

The substantially nonlinear character of the velocity vector projections determines the nonlinear (spiral) nature of the hodograph profile in the cross-section $x = y = 0$ (Fig. 3).

Changes in the hodograph when considering different cross-sections are illustrated in Figs. 4 and 5.

Similar nonlinear dependencies are also observed when constructing the specific kinetic energy profile (Fig. 6).

Changes in the specific kinetic energy profile across different cross-sections are illustrated in Figs. 7 and 8.

Figures 9–11 show the level curves of specific kinetic energy in various cross-sections (both along the longitudinal coordinates x and y , and along the transverse coordinate z).

The inhomogeneity of the level curve shapes presented in Figs. 9–11 is explained by the asymmetry of the exact solution (13) (taking into account boundary conditions (15) and (16)) with respect to the coordinates of the chosen Cartesian system.

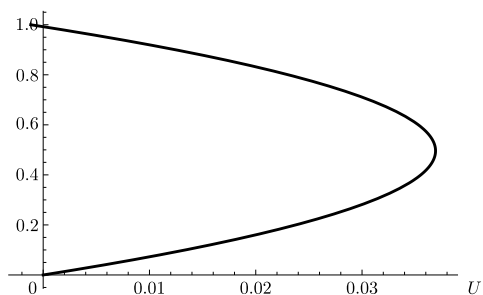


Figure 1. The profile of the velocity U

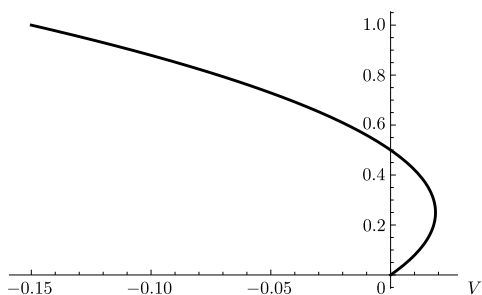


Figure 2. The profile of the velocity V

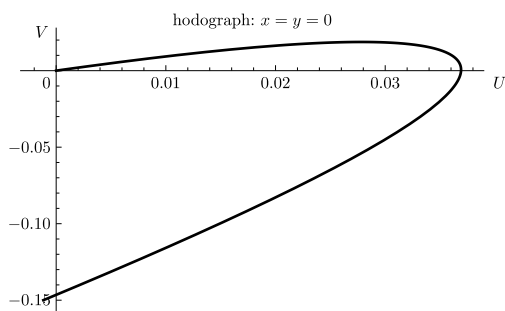


Figure 3. The hodograph of the velocity U, V

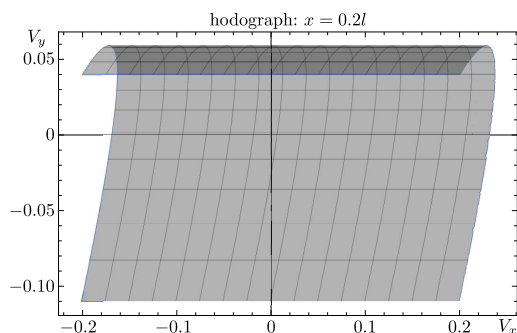
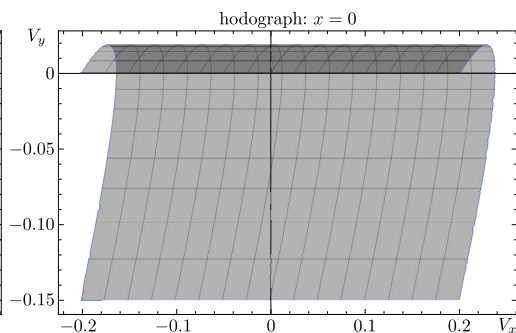
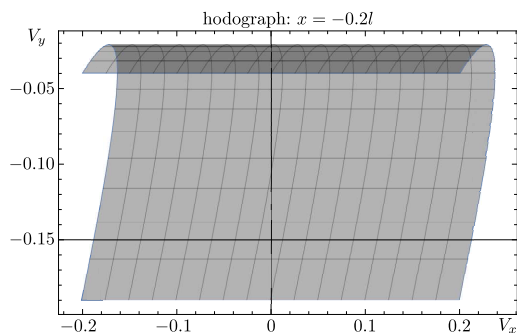


Figure 4. Family of hodographs (V_x, V_y) when changing the cross-section along the longitudinal coordinate x

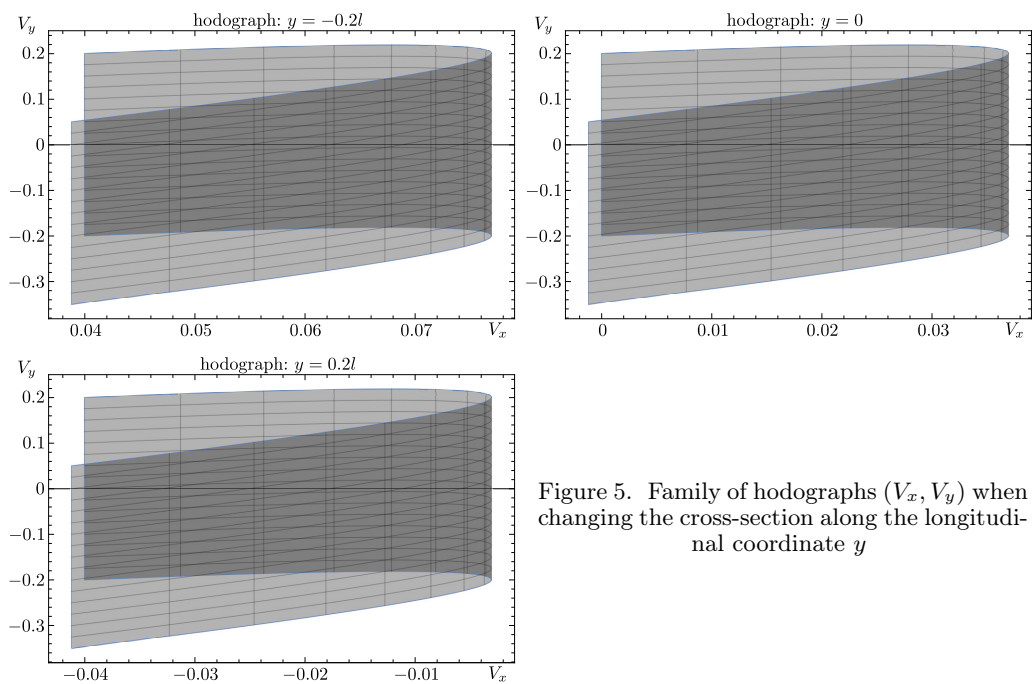


Figure 5. Family of hodographs (V_x, V_y) when changing the cross-section along the longitudinal coordinate y

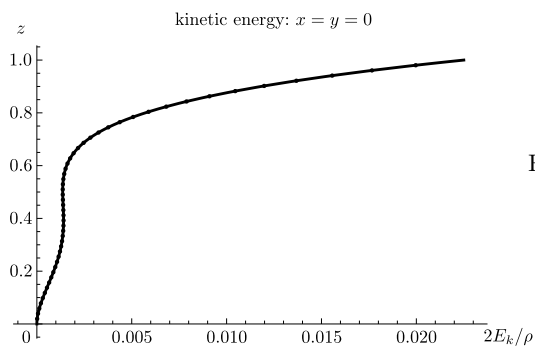


Figure 6. The profile of the specific kinetic energy $2E_k/\rho$

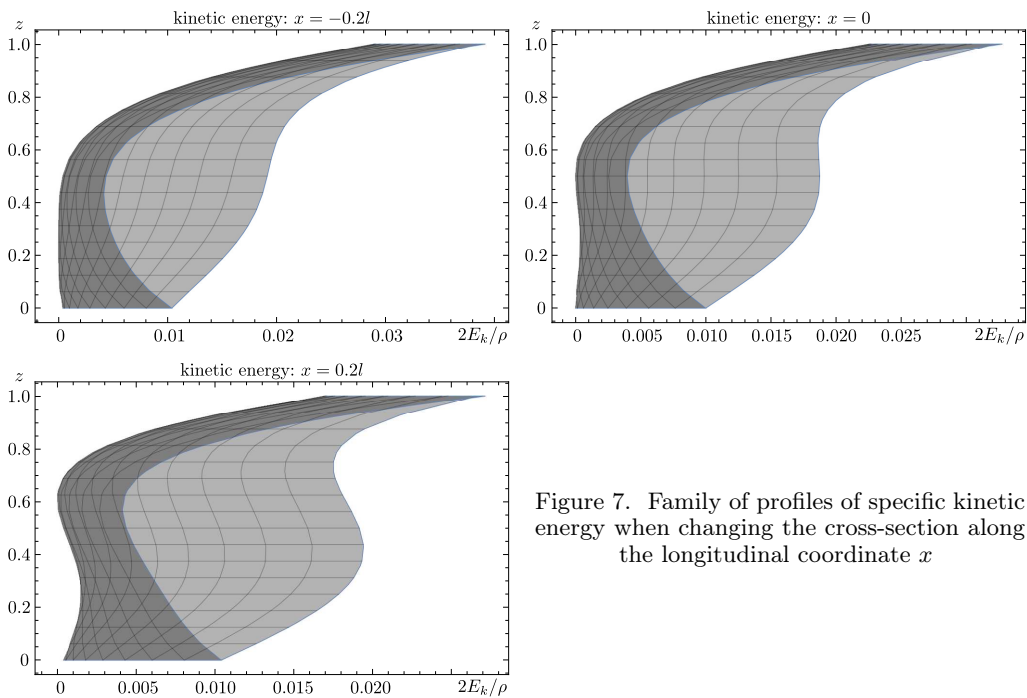


Figure 7. Family of profiles of specific kinetic energy when changing the cross-section along the longitudinal coordinate x

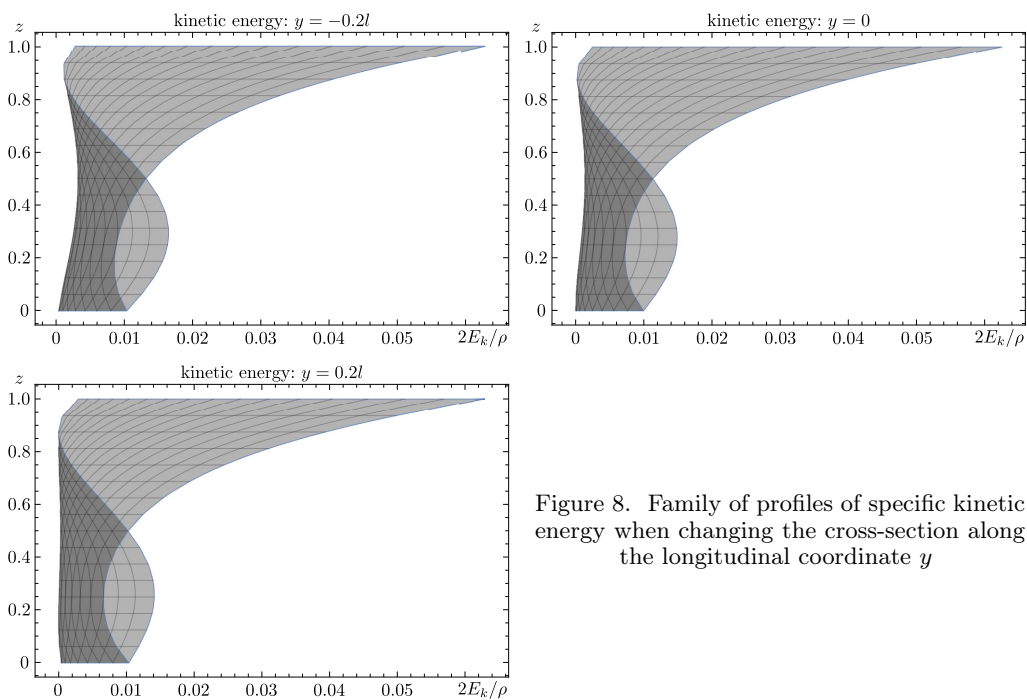


Figure 8. Family of profiles of specific kinetic energy when changing the cross-section along the longitudinal coordinate y

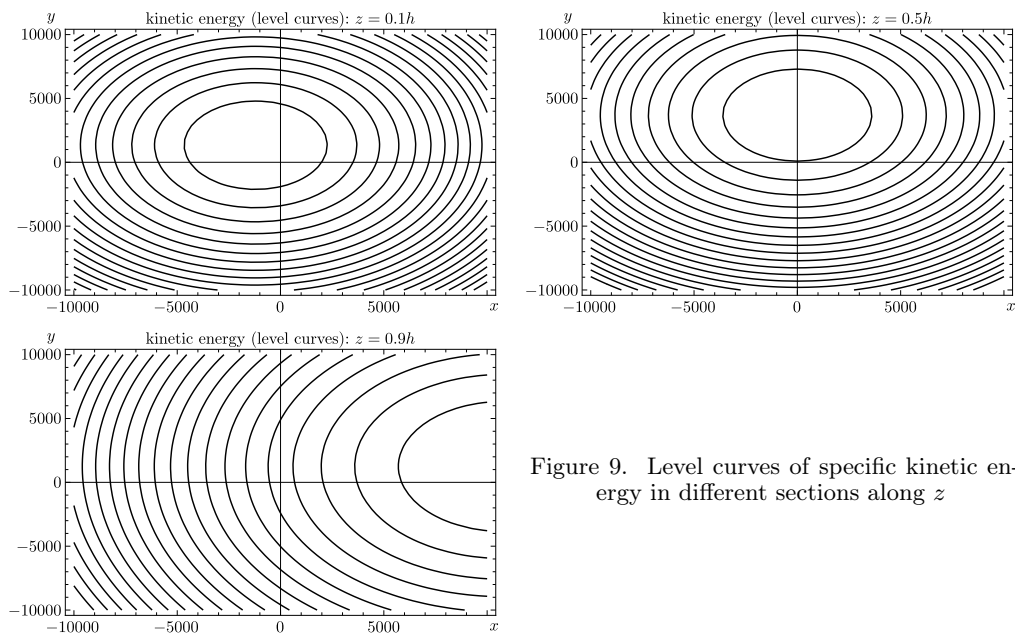


Figure 9. Level curves of specific kinetic energy in different sections along z

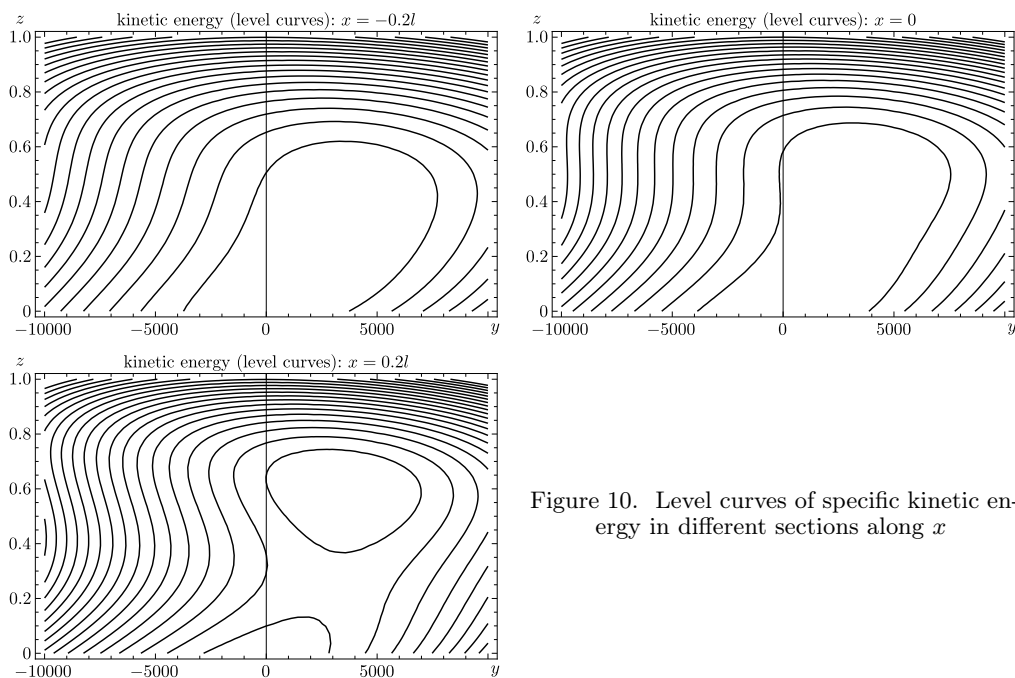


Figure 10. Level curves of specific kinetic energy in different sections along x

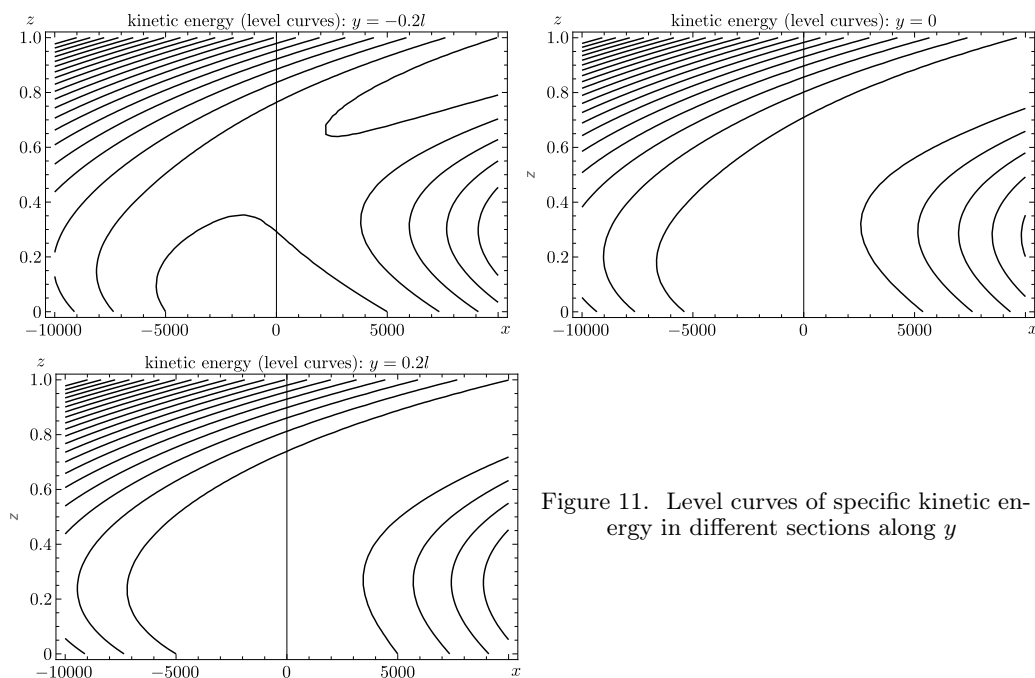


Figure 11. Level curves of specific kinetic energy in different sections along y

Conclusion. This paper presents a new exact solution for inhomogeneous distributions of velocity and pressure fields in the problem of isothermal steady shear flow of a viscous incompressible fluid. The derived exact solutions remain valid when turbulent viscosity is substituted for kinematic viscosity in the Navier–Stokes equations.

Our analysis demonstrates that within the class of functions that are linear in some coordinates, joint inhomogeneous solutions for the velocity field must exhibit specific structural characteristics with constant spatial accelerations. The solution space is restricted to two distinct cases: either only two specific accelerations vanish, or all four spatial accelerations equal zero (corresponding to the homogeneous velocity field in the Ekman solution). No other joint solutions exist within the specified function class.

We provide a detailed analysis of the case with two nonzero spatial accelerations, presenting the complete exact solution. To elucidate the fundamental properties of this solution, we examine the corresponding boundary value problem and provide comprehensive graphical illustrations.

Competing Interests. The authors declare no competing interests.

Author Contributions. Each author participated in the development of the article concept; the authors contributed equally to this work. The authors are fully responsible for the final submitted manuscript. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 25–29–00339), <https://rscf.ru/en/project/25-29-00339/>.

References

1. Smagorinsky J. History and progress, In: *The Global Weather Experiment-Perspective on Its Implementation and Exploitation*, A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP), National Academy of Science, 1978, 4–12 pp.
2. Smagorinsky J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: Early recollections, *Adv. Geophys.*, 1983, vol. 25, pp. 3–37. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0065-2687\(08\)60170-3](https://doi.org/10.1016/S0065-2687(08)60170-3).
3. Smagorinsky J., Phillips N. A. Scientific problems of the global weather experiment, In: *The Global Weather Experiment-Perspective on Its Implementation and Exploitation*, A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP), National Academy of Science, 1978, 13–21 pp.
4. Ekman V. On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean currents, *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–53. <http://jhirlibrary.jhu.edu/handle/1774.2/33989>.
5. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. Berlin, New York, Springer-Verlag, 1987, xiv+710 pp.
6. Davidson P. A. Ekman Boundary Layers, In: *The Dynamics of Rotating Fluids*. Oxford, Oxford Academic, 2024, pp. 99–126. DOI: <https://doi.org/10.1093/9780191994272.003.0007>.
7. Aristov S. N., Frik P. G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large-scale eddies in shallow water, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189–194. EDN: ZONZGY. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00858033>.
8. Aristov S. N., Myasnikov V. P. Time-dependent three-dimensional structures in the near-surface layer of the ocean, *Phys. Dokl.*, 1996, vol. 41, no. 8, pp. 358–360. EDN: LDSWPZ.
9. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevyye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchem-sya sloe zhidkosti* [Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm State Univ., 2006, 153 pp. (In Russian). EDN: UHQWPT.
10. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 26, 2020, pp. 79–87 (In Russian). EDN: IAWMLK. DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.
11. Gorshkov A. V., Prosviryakov E. Yu. Ekman convective layer flow of a viscous incompressible fluid, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 189–195. EDN: XXMQQP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001433818020081>.
12. Korotaev G. K., Mikhaylova E. N., Shapiro N. B. *Teoriya ekvatorial'nykh protivotecheniy v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World Ocean]. Kiev, Naukova Dumka, 1986, 205 pp. (In Russian)
13. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, pp. 391–395. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
14. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 1, pp. 197–203. EDN: LZHPWE. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00852164>.
15. Aristov S. N. *Vortex Flows in Thin Fluid Layers*, Dr. Sci. Dissertation in Phys. and Math. Vladivostok, Inst. of Automation and Control Processes, 1990, 303 pp. (In Russian)
16. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. EDN: LPGJRJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>.
17. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. EDN: WVXGZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040579516030027>.
18. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters, *Bull. Irkutsk State*

- Univ. Ser. Math.*, 2020, vol. 32, pp. 33–48 (In Russian). EDN: PIXYNJ. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33>.
19. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters, *Diagn. Resour. Mech. Mater. Struct.*, 2020, no. 3, pp. 29–46 (In Russian). EDN: EMNPVK. DOI: <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2020.3.029-046>.
20. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2012, xiv+470 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781139226516>.
21. Chkhetiani O. G., Vazaeva N. V. On algebraic perturbations in the atmospheric boundary layer, *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 432–445. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001433819050050>.
22. Berker R. A. *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Thèses de l'entre-deux-guerres. Paris–Lille, Imprimerie A. Taffin–Lefort, 1936, vii+161 pp. <http://eudml.org/doc/192863>.
23. Wheeler M. H. On stratified water waves with critical layers and Coriolis forces, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2019, vol. 39, no. 8, pp. 4747–4770. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2019193>.
24. Sarja A., Singh P., Ekkad S. V. Parallel rotation for negating Coriolis force effect on heat transfer, *Aeronaut. J.*, 2020, vol. 124, no. 1274, pp. 581–596. DOI: <https://doi.org/10.1017/aer.2020.1>.
25. Prosviryakov E. Yu., Sokolov A. S. Numerical construction of a Set of zero velocities and countercurrents for steady dynamic equilibria, *Tech. Phys. Lett.*, 2022, vol. 48, no. 12, pp. 322–328. EDN: FBDWUK. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1063785022110050>.
26. Zhao J. Axisymmetric convection flow of fractional Maxwell fluid past a vertical cylinder with velocity slip and temperature jump, *Chin. J. Phys.*, 2020, vol. 67, pp. 501–511. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2020.08.009>.
27. Tro S., Grooms I., Julien K. Parameterized Ekman boundary layers on the tilted f -plane, *J. Fluid Mech.*, 2024, vol. 1000, A61. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2024.561>.
28. Kosteletzky J., Anson C. Surface roughness in stratified turbulent Ekman flow, *Boundary-Layer Meteorol.*, 2025, vol. 191, 5. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10546-024-00895-5>.
29. McPhaden M. J., Athulya K., Girishkumar M. S., Orlic M. Ekman revisited: Surface currents to the left of the winds in the Northern Hemisphere, *Sci. Adv.*, 2024, vol. 10, no. 46, eadr0282. DOI: <https://doi.org/10.1126/sciadv.adr0282>.

УДК 532.5.032

Неоднородное течение Экмана

Н. В. Бурмашева^{1,2}, Е. Ю. Просвиряков^{1,2}

¹ Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

² Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Представлено новое точное решение, описывающее неоднородное распределение полей скорости и давления в задаче об изотермическом стационарном сдвиговом течении вязкой несжимаемой жидкости. Полученные точные решения остаются справедливыми при замене кинематической вязкости на турбулентную в уравнениях Навье–Стокса.

Показано, что в классе функций, линейных по части координат, совместное неоднородное решение для поля скорости может иметь лишь определенную структуру — с постоянными пространственными ускорениями. При этом либо обращаются в ноль только два определенных ускорения, либо все четыре пространственных ускорения равны нулю (однородное поле скорости, решение Экмана). Других совместных решений в указанном классе не существует.

Детально проанализирован случай двух ненулевых пространственных ускорений и приведено полное точное решение. Для понимания основных свойств этого решения исследована соответствующая краевая задача и представлен исчерпывающий иллюстративный материал.

Ключевые слова: точное решение, сдвиговое течение, течение Экмана, перепределенная система.

Получение: 6 апреля 2025 г. / Исправление: 5 июля 2025 г. /

Принятие: 10 июля 2025 г. / Публикация онлайн: 22 июля 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Ekman flow, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 486–502. EDN: CQUYOV. DOI: 10.14498/vsgtu2179.

Сведения об авторах

Наталья Владимировна Бурмашева ✉  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>
кандидат технических наук; доцент; департамент информационных технологий и автоматики¹; старший научный сотрудник; сектор нелинейной вихревой гидродинамики²;
e-mail: nat_burm@mail.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>
доктор физико-математических наук; профессор; департамент информационных технологий и автоматики¹; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики²;
e-mail: evgen_pros@mail.ru

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в разработке концепции статьи; вклад авторов является равнозначным. Авторы несут полную ответственность за представление окончательной версии рукописи. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 25–29–00339), <https://rscf.ru/project/25-29-00339/>.

MSC: 76N15, 35L45

Approximate solution to the Riemann problem in non-classical gas dynamics



M. R. Koroleva

Udmurt Federal Research Center
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34, T. Baramzina str., Izhevsk, 426067, Russian Federation.

Abstract

This study considers an approach to construct an approximate solver for the non-classical Riemann problem. In this regime, the solution of the discontinuity decay problem may contain composite waves, including both classical and non-classical compression and rarefaction waves. The algorithm for finding the exact solution is based on a geometric representation of shock and rarefaction waves on isentropic curves and involves the repeated use of iterative methods to solve local tasks, such as identifying inflection points on isentropes, points of tangency between a straight line and a curve, intersection points, and others. A significant challenge when using iterative methods is the need to specify initial guesses that ensure method convergence. The approach proposed in this work is based on tabulating exact solutions for Riemann problems over a wide range of initial state parameters. These tabulated data are then used to find an approximate solution without requiring iterative methods. The approximate solver was successfully applied to solve two one-dimensional discontinuity decay problems in the non-classical domain.

Keywords: Riemann problem, non-classical gas dynamics, exact solution, approximate solution, solution geometric interpretation, tabulated data.

Received: 26th February, 2025 / Revised: 5th April, 2025 /

Accepted: 28th April, 2025 / First online: 2nd September, 2025

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Koroleva M. R. Approximate solution to the Riemann problem in non-classical gas dynamics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 503–515. EDN: ASUEIW. DOI: 10.14498/vsgtu2166.

Author's Details:

Mariya R. Koroleva <https://orcid.org/0000-0001-5697-9199>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Institute of Mechanics; e-mail: koroleva@udman.ru

1. Introduction. Exact solutions to the fluid dynamics equations are important for several reasons. First, they provide a convenient tool for the theoretical study of liquid and gas flow characteristics [1–3]. Furthermore, exact solutions are widely used for verifying new numerical models developed to approximate solutions to fluid dynamics problems [4, 5]. They are particularly relevant for complex and generally underexplored physical regimes, such as those in non-classical gas dynamics.

Non-classical gas dynamics is a field of fluid mechanics that studies the dynamic behavior of substances not obeying the ideal gas law. Such substances include, for example, dense gases, supercritical compressible fluids, and certain two-phase media. These gases, referred to as real gases, are described by special equations of state and are characterized by thermodynamic conditions near the saturation curve in the region where the fundamental derivative G is negative [6–8]:

$$G(p, v) = \frac{v^3}{2c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s,$$

where p is pressure, v is specific volume, and $c = \sqrt{-v^2(\partial p/\partial v)_s}$ is the speed of sound evaluated along an isentrope $s = \text{const}$.

The region with $G < 0$ is termed the inversion zone. In Fig. 1, the inversion zone is highlighted in gray on the $(p-v)$ diagram. In this region, the wave structure of the Riemann problem solution is non-trivial, involving unusual phenomena such as rarefaction shocks and smooth compression fans [9, 10]. These can also combine to form complex composite waves known as non-classical waves. The emergence of non-classical waves is related to the convexity of the isentropes on the $(p-v)$ diagram and the relative position of the contact discontinuity with respect to the initial states in the Riemann problem.

To find the exact solution to the Riemann problem in the inversion zone, a complex geometric algorithm proposed in [7] can be applied. This algorithm requires solving a series of local problems: (a) finding the inflection points of the isentropes, (b) constructing the tangent lines at the curve points, (c) determining the intersection points of a curve with a secant line, and (d) solving a nonlinear system of equations. This approach is justified for a simple test problem. However,

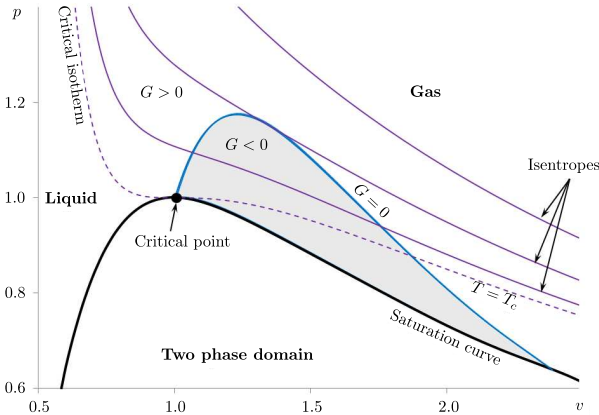


Figure 1. $(p-v)$ diagram close to the critical point; the inversion zone ($G < 0$) is shaded in gray

it becomes impractical for larger-scale applications, even in one dimension. The local problems listed above are typically solved iteratively using Newton's method, which is highly sensitive to the initial approximation, particularly in the inversion region [11].

In this study, a method for constructing an approximate Riemann solver for non-classical gas dynamics in the inversion region is proposed. It is based on the exact solution of the Riemann problem but is less computationally intensive while still capturing the essential features of the non-classical solution.

2. Geometric Interpretation of the Riemann Problem Solution. Let us consider the Riemann problem for the Euler equations governing the motion of a compressible inviscid non-heat-conducting gas. To construct the solution, the specific volume v , the velocity u , and the specific entropy s are used as the unknown variables. By introducing the definitions

$$W = \begin{pmatrix} v \\ u \\ s \end{pmatrix}, \quad A(W) = \begin{pmatrix} u & -v & 0 \\ v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s & u & v \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

the governing gasdynamic equations can be written as follows:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A(W) \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

The system of equations (1) is closed by an equation of state in the general form $e = e(s, v)$, from which the gas pressure $p(s, v)$ can be determined.

The initial data contain a discontinuity separating two states with uniform distributions on the left and right sides:

$$W(x, 0) = \begin{cases} W_{\text{Left}}, & \text{for } x < 0, \\ W_{\text{Right}}, & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

where $W_{\text{Left}} = (p_L, v_L, u_L)$ and $W_{\text{Right}} = (p_R, v_R, u_R)$. To find the solution, the intermediate state $W_{\text{indt}} = (p^*, v_L^*, v_R^*, u^*)$ that connects W_{Left} and W_{Right} must be determined.

In classical gas dynamics, the Riemann problem has a self-similar solution comprising a system of simple waves—shock waves (s) or rarefaction waves (f)—connected by a contact discontinuity (cd). In general, a set of possible solutions, or *solution patterns*, can be denoted as follows: s – s , s – f , f – s , f – f . The wave structure of the solution depends on the intermediate state (p^*, v_L^*, v_R^*, u^*) , obtained by determining the intersection between the one-parameter family of states connected to the left state (p_L, v_L) and the one-parameter family associated with the right state (p_R, v_R) .

One of the solutions is shown in Fig. 2. It includes, from left to right, a rarefaction wave, a contact discontinuity, and a shock wave. The solution is characterized by an f – s pattern, sketched in Fig. 2, *b*. This corresponds to Sod's shock tube problem with the initial data:

$$\text{Sod: } \begin{cases} v_L = 1, & p_L = 1, & u_L = 0, \\ v_R = 8, & p_R = 0.1, & u_R = 0. \end{cases}$$

In Fig. 2, *a*, two isentropes are shown on the (p - v) diagram: the lower one corresponds to the gas parameters on the left of the discontinuity, and the upper one to the gas parameters on the right. The line denoted as s_{RH} is the Hugoniot adiabat. The red composite line connecting these two states represents the solution to the Riemann problem. Since $p_L > p^*$, the solution on the left side contains a rarefaction wave. On the right side, $p_R < p^*$; therefore, a shock wave forms there. These waves are connected by a contact discontinuity. The pressure, specific volume, and velocity distributions are shown in Fig. 2, *c*, *d*, and *e*, respectively.

The pressure value in the intermediate state p^* is defined by the equation $F(p) = 0$ [11]. This equation arises from a combination of the Rankine–Hugoniot relations and the condition of constant entropy. For an ideal gas, $F(p)$ can be expressed in terms of pressure and velocity variables, without the specific volume variable, as follows:

$$F(p) = f(p, p_L, v_L) + f(p, p_R, v_R) - (u_L - u_R) = 0. \quad (2)$$

The functions $f(p, p_L, v_L)$ and $f(p, p_R, v_R)$ in (2) are defined as:

$$f(p, p_H, v_H) = \begin{cases} \frac{(p - p_H)v_H}{c_H \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p}{p_H} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}}}, & \text{for } p \geq p_H, \\ \frac{2}{\gamma-1} c_H \left[\left(\frac{p}{p_H} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], & \text{for } p < p_H, \end{cases}$$

where the subscript “ H ” denotes “ L ” for the left wave and “ R ” for the right wave,

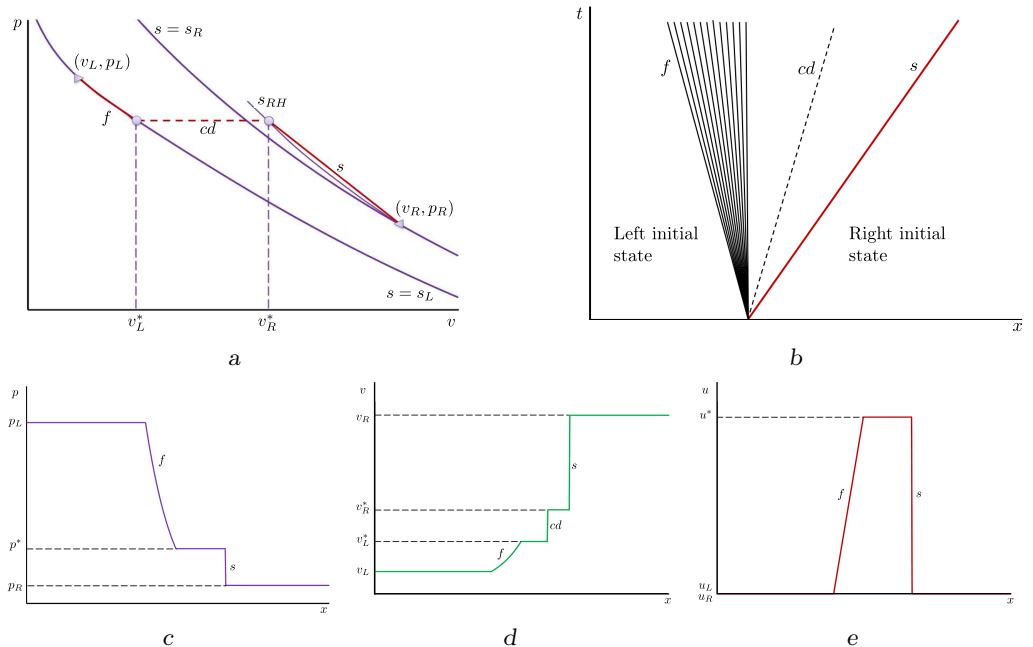


Figure 2. Schematic of the Riemann problem solution for the fan–shock case in classical gas dynamics: *a*) (p - v) plane; *b*) characteristic field; *c*) pressure distribution; *d*) specific volume distribution; *e*) velocity distribution

γ is the specific heat ratio, and c_H is the speed of sound, calculated from the equation of state.

In non-classical gas dynamics, the isentropes corresponding to the left and right initial states can exhibit concave portions. The algorithm proposed in [7] is based on a geometric procedure that requires constructing the convex envelope for a set of points in the $(p-v)$ plane. This construction can be viewed as a method to connect two states in the $(p-v)$ plane by combining different paths—portions of the flux curve and straight-line segments. The result is a composite curve with no convexity changes. The shape of this composite curve between the two states determines the resulting wave type. This algorithm is physically justified by the Oleinik entropy condition [12]. Constructing the solution requires determining the following elements for each isentrope:

- 1) Two inflection points: $(p_L^i, v_L^i)_{1,2}$ and $(p_R^i, v_R^i)_{1,2}$;
- 2) Two absolute envelope points: $(p_L^e, v_L^e)_{1,2}$ and $(p_R^e, v_R^e)_{1,2}$;
- 3) Points where a straight line is tangent to the isentrope: (p_L^t, v_L^t) , (p_R^t, v_R^t) , and (p_v^t, v_v^t) ;
- 4) Points where a straight line intersects the isentrope: $(p^{\text{inter}}, v^{\text{inter}})$.

In this case, the solution can include both classical waves (rarefaction fans and shock waves) and non-classical waves (compression fans (F) and rarefaction shocks (S)). Moreover, the solution may involve composite waves, such as a non-classical rarefaction shock combined with a classical rarefaction fan from the left state, and a classical shock combined with a non-classical compression fan and a classical shock from the right state (e.g., an $Sf-sFs$ pattern).

Let us consider two test examples with non-classical wave solutions for the Riemann problem, with the following initial conditions:

$$f-F \text{ case: } \begin{cases} v_L = 0.677, & p_L = 1.405, & u_L = -0.1365, \\ v_R = 1.451, & p_R = 1.03, & u_R = -0.1. \end{cases} \quad (3)$$

$$Fs-f \text{ case: } \begin{cases} v_L = 1.294, & p_L = 0.959, & u_L = 0, \\ v_R = 1.423, & p_R = 1.055, & u_R = 0. \end{cases} \quad (4)$$

The general solution for the initial state (3) has an $f-F$ pattern. Its left part is a classical rarefaction fan. Since the right state lies within the inversion zone on the $(p-v)$ diagram, the solution includes a non-classical wave—a compression fan. A schematic of the solution for the initial conditions (3) from the right state is shown in Fig. 3, *a*. The coordinate v_R^* of the intermediate state point is located between the inflection points $v_R^{i_1}$ and $v_R^{i_2}$ of the right isentrope. Thus, a non-classical compression fan wave forms, highlighted in red in Fig. 3.

The general solution for the initial state (4) has an $Fs-f$ pattern. The left initial state also lies within the inversion zone. A schematic of the solution for the initial conditions (4) from the left state is shown in Fig. 3, *b*. The coordinate v_L^* of the intermediate state point is located ahead of the inflection points $v_L^{i_1}$ and $v_L^{i_2}$ of the left isentrope. However, a straight line is required to connect v_L^* with the non-classical rarefaction shock originating from the left state.

The pressure and gas velocity for intermediate state of the solution are determined from the nonlinear system of two equations imposing that both pressure and velocity assume the same values across the contact discontinuity.

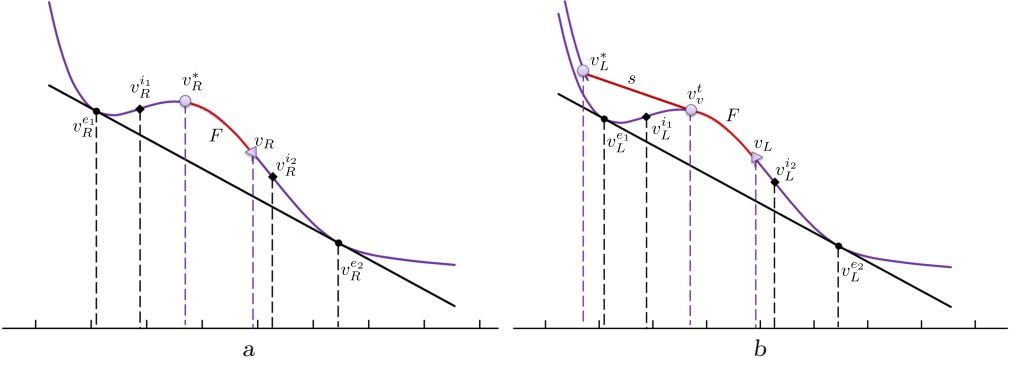


Figure 3. Schematic of the Riemann problem solution for non-classical gas dynamics: a) F -wave pattern from the right initial state for the f - F case; b) Fs -wave pattern from the left initial state for the Fs - f case

$$\begin{cases} p(v_L^*, p_L, v_L) = p(v_R^*, p_R, v_R), \\ u(v_L^*, p_L, v_L, u_L) = p(v_R^*, p_R, v_R, u_R). \end{cases} \quad (5)$$

The solution of the equation system (5) is determined by the relations for pressure and velocity as functions of v for different wave structures. It is necessary to use expressions for the sound speed, gas velocity, and pressure for the rarefaction wave, along with the Hugoniot relations for shock waves [8]. These equations depend on the equation of state. For a van der Waals gas [13], the general expressions can be written as follows:

– Pressure for the rarefaction wave:

$$Q(v, p_H, v_H) = \left(p_H + \frac{1}{v_H^2} \right) \left(\frac{v_H - 1}{v - 1} \right)^{1+\delta} - \frac{1}{v^2}; \quad (6)$$

– Pressure for the shock wave:

$$p^{RH}(v, p_H, v_H) = \frac{e_H - p_H \frac{v - v_H}{2} + \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \frac{1}{v} + \frac{1}{\delta v^2}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\delta} \right) v - \left(\frac{1}{2} v_H + \frac{1}{\delta} \right)}. \quad (7)$$

In (6) and (7), $\delta = R/c_v$ is a dimensionless parameter, where c_v is the specific heat at constant volume and R is the gas constant of the substance. There exists a boundary value $\delta_{\text{nonclas}} = 0.06$; substances with δ below this value exhibit behavior within the inversion zone. The problems (3) and (4) have been formulated for $\delta = 0.008$, and the relations (6) and (7) have been used to define the functions in (5):

– For shock waves:

$$\begin{cases} p(v, p_H, v_H) = p^{RH}(v, p_H, v_H) = p^{RH}, \\ u(v, p_H, v_H, u_H) = u_H \mp z \cdot \sqrt{(v_H - v)(p^{RH} - p_H)}, \\ z = \text{sign}(v_H - v); \end{cases} \quad (8)$$

– For rarefaction fans:

$$\begin{cases} p(v, p_H, v_H) = Q(v, p_H, v_H), \\ u(v, p_H, v_H, u_H) = u_H \pm \int_{v_H}^v \sqrt{-Q'(v, p_H, v_H)} dv, \\ Q'(v, p_H, v_H) = \frac{\partial Q(v, p_H, v_H)}{\partial v}; \end{cases} \quad (9)$$

– For non-classical double composite waves (*fs* construction):

$$\begin{cases} p(v, p_H, v_H) = p^{RH}(v, p_v^t, v_v^t) = p_v^{RH}, \\ p_v^t = Q(v_v^t, p_H, v_H), \\ u(v, p_H, v_H, u_H) = u_H \pm \int_{v_H}^{v_v^t} \sqrt{-Q'(v, p_H, v_H)} dv - \\ \quad - z \cdot \sqrt{(v_v^t - v)(p_t^{RH} - p_v^t)}, \\ z = \text{sign}(v_v^t - v). \end{cases} \quad (10)$$

Similar expressions can be derived for all possible wave patterns in accordance with the wave solution identification algorithm.

3. Constructing the Solution for Composite Waves. Constructing the solution for composite waves requires considering all possible wave patterns over a wide range of the variable v in the system (5). To build the solution, specific volume-dependent Boolean variables must be defined:

- 1) A procedure for selecting the correct wave associated with the left initial state begins by determining the location of the left point on the isentrope. If the wave starts with a segment along the isentrope, the first logical variable is true (**PrL = true**). Otherwise, **PrL = false**.
- 2) To identify a classical rarefaction fan or a non-classical compression fan, the local coordinate v must be positioned relative to the inflection points. If the segment (v_L, v) does not contain any inflection point, the second logical variable is true (**PrInf = true**).
- 3) To define the non-classical *fS* and *fSf* patterns, the location of v relative to the absolute envelope points must be identified. If the segment (v_L, v) contains both absolute envelope points, the third logical variable is false (**PrAbs = false**).
- 4) To identify the non-classical *S* and *Sf* patterns, the position of the isentrope curve relative to the secant line through (v_L, p_L) and $(v, p(s_L, v))$ must be determined. If the segment lies above the curve, the fourth logical variable is true (**PrSecUp = true**).
- 5) To define a shock wave (*s*) or double non-classical *SF* and *sFs* patterns, the position of the isentrope curve relative to the secant line through (v_L, p_L) and $(v, p(s_L, v))$ must be determined. If the segment lies below the curve, the fifth logical variable is true (**PrSecDn = true**).
- 6) To identify the non-classical *SF* and *sFs* patterns, the local coordinate v must be positioned relative to the inflection points. If the segment (v, v_L^t) does not contain any inflection point, the sixth logical variable is true (**PrInfT = true**).

These Boolean variables are not used simultaneously, but the logical structure of the algorithm cannot be constructed without all of them. The DRAKON flowchart [14] of the algorithm for wave solution identification is presented in Fig. 4. It is designed for the left initial state when $v_L < v$. The DRAKON flowchart for the left initial state when $v_L > v$ is presented in Fig. 5.

The input data for this algorithm are the initial state parameters (p_L, v_L) and the variable v . Depending on the current value of v , one of five different wave patterns from the left side must be selected. A similar procedure applies to the right wave solution. The presented algorithm is used to define the complicated functions in the system (5).

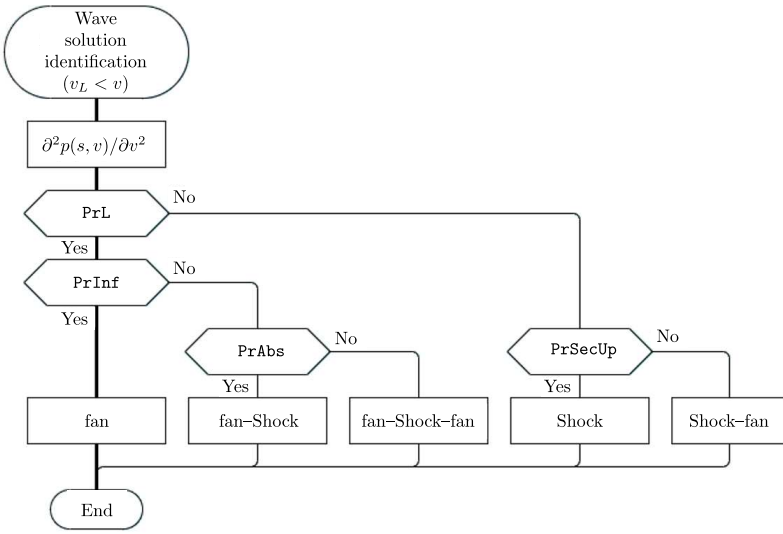


Figure 4. DRAKON flowchart of the algorithm for wave solution identification ($v_L < v$)

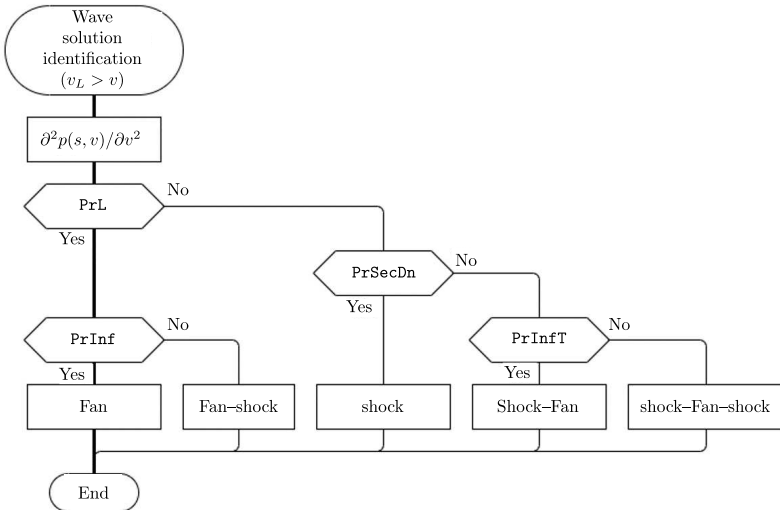


Figure 5. DRAKON flowchart of the algorithm for wave solution identification ($v_L > v$)

4. Approximate Solution. The system (5) can be solved by any iterative method; for example, Newton's method can be applied. The existence and uniqueness of the solution to the Riemann problem have been established for classical gas dynamics [15, 16], but this has not been rigorously formulated for the non-classical regime. Moreover, iterative methods are also required to solve various nonlinear equations for determining:

- inflection points;
- absolute envelope points;
- points of tangency between a straight line and an isentrope curve;
- points of intersection between a straight line and an isentrope curve.

In the field of non-classical gas dynamics, these functions, as well as those in (5), are composite, and the problem of specifying a suitable initial guess for iterative methods arises. This issue becomes particularly acute at the junctions of waves in a composite solution, where iterative methods often diverge. Numerical experiments have shown that for solving the aforementioned problems, the bisection method is more robust. However, even using the bisection method, in some cases, “manual” control of the solution search procedure is required. The application of iterative methods to the Riemann problem in non-classical gas dynamics is justified for simple test problems. However, it becomes impractical for larger-scale applications, such as when used as a building block within the Godunov method. Extending the algorithm to a three-dimensional statement on a non-orthogonal grid results in a physically justified but computationally inefficient algorithm from a practical implementation perspective.

Given the above situation, an approximate Riemann solver appears to be a viable alternative. The approach proposed in the present study to construct an approximate Riemann solver is based on approximating the complex functions in (5) without relying on specific initial states. Four different approaches have been employed to build approximate solvers within the Godunov method framework in [17]: linearization of the nonlinear equations, cubic interpolation, local approximation of the equation of state using a two-term equation of state [11, 17], and a tabulation method. Analysis of the obtained results demonstrated the effectiveness of two approaches: the local approximation method and the tabulation method. In this work, the tabulation method is applied to solve problems (3) and (4).

The key challenge with composite wave solutions is the inability to express pressure analytically as a function of gas velocity, as is achieved for the ideal gas in equation (2). The main idea of the proposed approach is to replace the governing continuous functions of the solution with their discrete representations at interpolation nodes. These discrete functions can then be used to solve the Riemann problem both in isolation, for test problems, and as part of the Godunov method for more complex problems.

For this purpose, three interpolation meshes are defined:

$$\begin{cases} p_H^i = p_H^{i-1} + \Delta p_i, & i = \overline{1, N_p}, & p_H^0 = p_H^{\min}, & p_H^{N_p} = p_H^{\max}, \\ v_H^j = v_H^{j-1} + \Delta v_j, & j = \overline{1, N_v}, & v_H^0 = v_H^{\min}, & v_H^{N_v} = v_H^{\max}, \\ v_k = v_{k-1} + \Delta v_k, & k = \overline{1, N}, & v^0 = v_{\min}, & v^N = v_{\max}. \end{cases} \quad (11)$$

Here, Δp_i , Δv_j , and Δv_k are the step sizes of the interpolation mesh for the initial pressure, initial specific volume, and specific volume variable, respectively;

N_p , N_v , and N are the numbers of nodes in the interpolation mesh.

For each point on these meshes, the discrete values $p_{i,j} = p(v, p_H^i, v_H^j)$ and $\Delta u_{i,j} = \Delta u(v, p_H^i, v_H^j)$ are computed at all points v_k using equations (8), (9), and (10). Suppose the initial state (p_L, v_L) of a given problem falls within the intervals $p_H^{i-1} < p_L < p_H^i$ and $v_H^{j-1} < v_L < v_H^j$. The values of the functions $p(v, p_L, v_L)$ and $\Delta u(v, p_L, v_L, u_L)$ at the points v_k can be obtained using bilinear interpolation. In Fig. 6, five lines in the $(p-v)$ plane are shown. The dashed lines represent the pressure functions defined on the interpolation meshes (11), and the solid line represents the pressure function obtained by bilinear interpolation for the given values (p_L, v_L) . The velocity function is determined similarly.

In general, the solution to the Riemann problem is based on the functions $p_1(v) = p(v, p_L, v_L)$, $p_2(v) = p(v, p_R, v_R)$ and $u_1(v) = u_L - \Delta u(v, p_L, v_L)$, $u_2(v) = u_R + \Delta u(v, p_R, v_R)$, defined on the set of values v_k . These functions satisfy the system (5). A graphical representation of the Riemann problem solution is shown in Fig. 7.

To find the solution, two values v_L^* and v_R^* must be determined such that the following equalities hold:

$$p_1(v_L^*) = p_2(v_R^*),$$

$$u_1(v_L^*) = u_2(v_R^*).$$

Since the functions under consideration are discrete, a non-iterative procedure can be employed to find the solution. For this purpose, it is necessary to construct the discrete function $P(u) = p_1^*(u) - p_2^*(u)$ on the common interval of the variable u , thereby eliminating the variable v from the relations. This is feasible for every pair of discrete functions:

$$p_1(v), u_1(v) \Rightarrow p_1^*(u),$$

$$p_2(v), u_2(v) \Rightarrow p_2^*(u),$$

as they are defined on the same interpolation points.

In this case, solving the system (5) becomes unnecessary. The solution can be directly determined on the interval $[u_{i-1}, u_i]$ where the function $P(u)$ changes

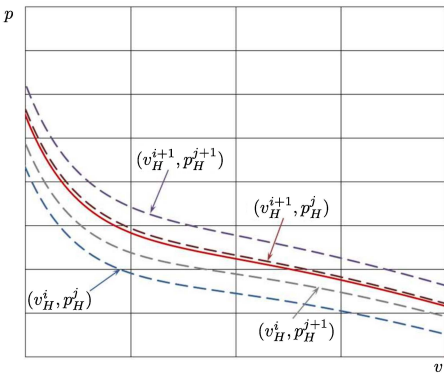


Figure 6. Bilinear interpolation for the solution function

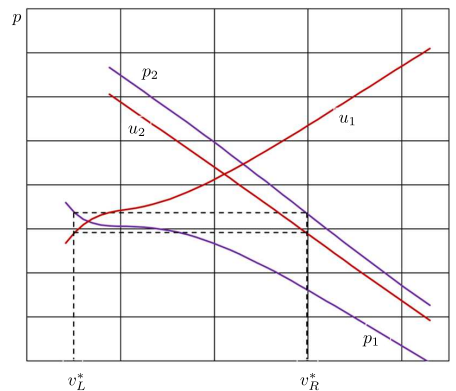


Figure 7. Solution construction

sign. Assuming a linear variation of $P(u)$ between the mesh nodes u_{i-1} and u_i , the gas velocity at the contact discontinuity is found using the formula:

$$u^* = u_i - P(u_i) \frac{u_i - u_{i-1}}{P(u_i) - P(u_{i-1})}.$$

Knowing the velocity u^* , the pressure at the contact discontinuity can be calculated from either of the two functions— $p_1^*(u)$ or $p_2^*(u)$. Then, the specific volume values v_L^* and v_R^* are uniquely determined from the corresponding tabulated functions.

The described approach has been applied to approximately solve the test problems (3) and (4). A comparison of the exact solution of these problems with the approximate one is given in Table 1. The maximum absolute deviation of the approximate solution from the exact one does not exceed 0.06.

Table 1
Comparison of exact and approximate solutions for the test problems

Parameter	Solution	
	Exact	Approximate
<i>f</i> – <i>F</i> case		
p^*	1.09759974969995	1.09763372318514
u^*	−0.159809461904289	−0.159716582534566
v_L^*	0.903652908743441	0.903792866716065
v_R^*	1.16005152731677	1.15985386107073
<i>F</i> – <i>f</i> case		
p^*	0.991790383560825	0.991866646053808
u^*	−0.122048393289314	−0.121922929652812
v_L^*	0.83579973857623	0.835319156613279
v_R^*	1.65865734349481	1.65845846192419

5. Conclusion. In the present paper, an approach to construct an approximate solver for the Riemann problem in the non-classical regime of gas dynamics is proposed. It is based on utilizing tabulated discrete data obtained from the exact solutions of the discontinuity decay problem on an interpolation mesh. This approach eliminates the need for iterative methods to find an approximate solution and allows for the correct identification of physical quantities in composite wave solutions.

Competing interests. The author declares no competing interests.

Author’s Responsibilities. The author takes full responsibility for the content of the manuscript and the decision to submit the final version for publication.

Funding. This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Deville M. O. Exact solutions of the Navier–Stokes Equations, In: *An Introduction to the Mechanics of Incompressible Fluids*, vol. 22. Cham, Springer, 2022, pp. 51–89. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-04683-4_3.
2. Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New exact solutions with a linear velocity field for the gas dynamics equations for two types of state equations, *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 1, 123. EDN: FSXDCX. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10010123>.

3. Prosviryakov E. Yu., Ledyankina O. A., Goruleva L. S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the flow of multicomponent fluids with internal heat generation, *Russ. Aeronaut.*, 2024, vol. 67, no. 1, pp. 60–69. EDN: CLAH0C. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068799824010070>.
4. Brutyani M. A., Ibragimov U. G. Exact solution of the Navier–Stokes equations for rotational tornado-like flow of a viscous gas, *Proc. Moscow Inst. Phys. Technol.*, 2024, vol. 16, no. 3(63), pp. 92–104 (In Russian). EDN: FPNPCB.
5. Galkin V. A., Dubovik A. O., Morgun D. A. Visualization of flow of a viscous incompressible fluid corresponding to exact solutions of the Navier–Stokes equations, *Sci. Vis.*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 52–63 (In Russian). EDN: NWGODH. DOI: <https://doi.org/10.26583/sv.16.1.05>.
6. Guardone A., Vigeveno L., Argrow B. M. Assessment of thermodynamic models for dense gas dynamics, *Phys. Fluids*, 2004, vol. 16, no. 11, pp. 3878–3887. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1786791>.
7. Fossati M., Quartapelle L. *The Riemann problem for hyperbolic equations under a nonconvex flux with two inflection points*, 2014, arXiv: 1402.5906 [physics.flu-dyn].
8. Quartapelle L., Castelletti L., Guardone A., Quaranta G. Solution of the Riemann problem of classical gasdynamics, *J. Comput. Phys.*, 2003, vol. 190, no. 1, pp. 118–140. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00267-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00267-5).
9. Coquelet C., Chapoy A., Richon D. Development of a new alpha function for the Peng–Robinson equation of state: Comparative study of alpha Function models for pure gases (natural gas components) and water-gas systems, *Int. J. Thermophys.*, 2004, vol. 25, no. 1, pp. 133–158. DOI: <https://doi.org/10.1023/b:ijot.0000022331.46865.2f>.
10. Qi J., Xu J., Han K., et al. Development and validation of a Riemann solver in Open-FOAM® for non-ideal compressible fluid dynamics, *Eng. Appl. Comput. Fluid Mech.*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 116–140. DOI: <https://doi.org/10.1080/19942060.2021.2002723>.
11. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., et al. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical Solution of Multidimensional Problems in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 401 pp. (In Russian)
12. Glass O. An extension of Oleinik’s inequality for general 1D scalar conservation laws, *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 113–165. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219891608001398>.
13. Zhang L., Gao G. Equations of states and polytropic processes of van der Waals gases, *Phys. Eng.*, 2024, vol. 34, no. 3, pp. 16–21. DOI: <https://doi.org/10.26599/PHYS.2024.9320303>.
14. Parondzhanov V. D., Mitkin S. B. The DRAKON medical algorithmic language and the DRAKON-builder program for the creation and application of clinical algorithms, *Virtual Technol. Med.*, 2022, no. 1, pp. 32–44 (In Russian). EDN: YKCSIC. DOI: https://doi.org/10.46594/2687-0037_2022_1_1410.
15. Liu T.-P. The Riemann problem for for general systems of conservation laws, *J. Differ. Equ.*, 1975, vol. 18, no. 1, pp. 218–234. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(75\)90091-1](https://doi.org/10.1016/0022-0396(75)90091-1).
16. Smith R. G. The Riemann problem in gasdynamics, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 249, no. 1, pp. 1–50. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1979-0526309-2>.
17. Koroleva M. R., Tenenev V. A. Approximate Riemann solvers for the Soave–Redlich–Kwong equation of state, *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2024, vol. 20, no. 3, pp. 345–359. EDN: KFCNYJ. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd240905>.

УДК 517.958:531.332

Приближенное решение задачи Римана для неклассической газовой динамики

М. Р. Королева

Удмуртский федеральный исследовательский центр
Уральского отделения Российской академии наук,
Россия, 426067, Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.

Аннотация

Рассмотрен подход к построению приближенного решателя для неклассической задачи Римана. Решение задачи о распаде разрыва в области неклассической газовой динамики может содержать составные волны, включающие чередующиеся волны сжатия и разрежения, в том числе неклассические. Алгоритм нахождения точного решения строится на основе геометрического представления ударных волн и волн разрежения на изэнтропах и предполагает многократное использование итерационных методов для решения локальных задач, таких как нахождение точек перегиба на изэнтропах, точек касания прямой и кривой и т.д. При решении таких задач итерационными методами возникает проблема поиска начальных приближений, обеспечивающих сходимость метода. Предлагаемый в данной работе подход основан на табулировании точных решений задач Римана в широком диапазоне параметров начального состояния. Эти данные затем используются для нахождения приближенного решения без применения итерационных методов. Приближенный решатель был успешно применен для решения двух одномерных модельных задач о распаде разрыва в неклассической области.

Ключевые слова: задача Римана, неклассическая газовая динамика, точное решение, приближенное решение, геометрическая интерпретация решения, табулирование данных.

Получение: 26 февраля 2025 г. / Исправление: 5 апреля 2025 г. /
Принятие: 28 апреля 2025 г. / Публикация онлайн: 2 сентября 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Этот контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Koroleva M. R. Approximate solution to the Riemann problem in non-classical gas dynamics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 503–515. EDN: ASUEIW. DOI: 10.14498/vsgtu2166.

Сведения об авторе

Мария Равиловна Королева  <https://orcid.org/0000-0001-5697-9199>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; институт механики; e-mail: koroleva@udman.ru



УДК 517.958:[537.5+533.9]

Моделирование зоны возмущения разреженной многокомпонентной низкотемпературной плазмы неподвижным симметричным телом

В. В. Черепанов

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Обоснована математическая модель самосогласованной релаксации возмущенной области, построенная на основе нелинейной системы Власова—Пуассона, которая описывает взаимодействие неподвижного поглощающего заряженного проводника (сферической или цилиндрической формы) со свободномолекулярной многокомпонентной низкотемпературной плазмой. Многомерность кинетических уравнений создавала существенные сложности для численной реализации модели. Для их преодоления разработана система криволинейных координат с неголономными связями, позволяющая сократить фазовый объем задачи; приведен вывод формы кинетического уравнения в данной системе координат. Подробно описан применяемый численный метод моделирования.

Полученные результаты не только подтверждают адекватность предложенной модели и корректность реализации численных алгоритмов, но и представляют значительный практический интерес. Кинетический характер модели обеспечивает возможность детального исследования состояния плазмы и самосогласованного электрического поля в околоповерхностной области. В частности, на примере сферического тела в трехкомпонентной плазме продемонстрировано наличие существенного неравновесия в распределении частиц в возмущенной зоне, а также выявлены характерные особенности пространственного распределения и динамики частиц с различным знаком заряда.

Ключевые слова: разреженная плазма, заряженный шар, возмущенная зона, фазовое пространство, неголономные координаты, самосогласованное поле, функция распределения, макропараметры, эволюция.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ ©️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Черепанов В. В. Моделирование зоны возмущения разреженной многокомпонентной низкотемпературной плазмы неподвижным симметричным телом // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 516–537. EDN: NKWWTP. DOI: 10.14498/vsgtu2153.

Сведения об авторе

Валерий Вениаминович Черепанов <https://orcid.org/0000-0003-2733-752X>
доктор технических наук, доцент; профессор; кафедра физики;
e-mail: vvcherepanov@yandex.ru

Получение: 10 февраля 2025 г. / Исправление: 23 июля 2025 г. /

Принятие: 4 августа 2025 г. / Публикация онлайн: 12 августа 2025 г.

Физические условия и предварительное обсуждение модели. Ионизированные многокомпонентные среды, включая разреженные, их свойства и взаимодействие с различными телами и системами традиционно привлекают пристальное внимание исследователей. Хотя многие приложения низкотемпературной плазмы относительно недавно возникли в таких областях, как медицина, экология, связь, энергетика, физика твердого тела и технологии [1–10], позиции аэрокосмической тематики в подобных исследованиях остаются весьма значительными [11–22].

Вместе с тем в задачах теплообмена разреженная низкотемпературная плазма практически не рассматривается, что обусловлено спецификой данного состояния вещества и особенностями его описания. Прежде всего, исследование разреженных сред требует отказа от традиционных для специалистов по теплообмену макроскопических уравнений, которые принципиально неприменимы к газам в непосредственной близости от взаимодействующих с ними поверхностей. Макроскопическое описание предполагает изотропию распределения частиц по скоростям, однако это условие нарушается в кнудсеновском пристеночном слое, где динамику газа можно описывать только на основе кинетического подхода [23,24]. Кроме того, в ионизованных газах с высокой концентрацией заряженных частиц существенное влияние на динамику среды оказывает электромагнитное поле, описание которого нельзя рассматривать изолированно. Наконец, плазма в общем случае представляет собой настолько сложную и многопараметрическую систему, что для неё практически не существует универсальной и одновременно эффективной математической модели [25, 26]. Таким образом, решение задач теплообмена в такой среде сохраняет актуальность и в настоящее время.

Данная работа отражает некоторые результаты решения проблем начального этапа разработки комплекса программных инструментов для задач теплообмена в разреженной многокомпонентной плазме. В связи с этим представленное исследование ограничено рассмотрением идеальной низкотемпературной полностью ионизованной кулоновской плазмы без магнитного поля и столкновений ионов, то есть ситуацией, когда размеры тела и области возмущения, вносимого им в ионизированный газ, сопоставимы по порядку величины с дебаевским радиусом, а длины свободного пробега и ларморовские радиусы ионов превышают его настолько, что столкновениями ионов и влиянием магнитного поля в анализируемой зоне возмущения можно пренебречь.

Отметим, что подобное специфическое состояние ионизированного газа помимо возможности его лабораторной реализации наблюдается в космической плазме так называемой переходной зоны — обширной области, простирающейся от внешних границ ионосферы (порядка 2000 км) до плазмопаузы (3–5 радиусов Земли) и далее, где летательные аппараты можно считать квазипокоящимися телами по отношению к частицам [27, 28]. В этой области степень ионизации плазмы возрастает с удалением от Земли от значений порядка 10^4 , эффективный свободный пробег ионов превышает 10^4 м, а дебаев-

ский радиус варьируется от нескольких сантиметров до величин, сопоставимых с размерами летательных аппаратов или их ключевых конструкционных элементов. Последнего условия, как правило, достаточно для решения задач диагностики в зондовых экспериментах, проводимых для тел, размеры которых значительно меньше, чем у летательных аппаратов [29]. Магнитное поле Земли на таких расстояниях существенно слабее, чем на поверхности; ларморовский радиус электронов увеличивается с ростом расстояния от нескольких метров до нескольких десятков метров, а у ионов он всегда значительно больше. В таких условиях в области возмущения толщиной до нескольких десятков дебаевских радиусов взаимодействием ионов с магнитным полем Земли можно уверенно пренебречь.

При наличии в газе свободных электронов поглощающие поверхности тел обычно приобретают отрицательный плавающий потенциал [27], обеспечивающий баланс потоков заряженных частиц разного знака на поверхности. Уже в этих условиях положительные ионы преобладают в пристеночной области, поскольку скорости электронов, как правило, значительно выше. Расчет плавающего потенциала представляет собой отдельную обратную задачу, однако его элементарные оценки можно найти в различных источниках (см., например, [30]). Эти оценки показывают, что в рассматриваемой области космической плазмы с температурой до 10^4 К абсолютные значения плавающего потенциала невелики и не превышают нескольких вольт.

При задании на поверхности тела потенциалов, сопоставимых с плавающим, электрические токи в возмущенной зоне оказываются незначительными, а их плотность, согласно расчетам, не превышает десятка мА/м^2 . Следовательно, собственным магнитным полем ионизированного газа в данном случае также можно пренебречь, ограничившись рассмотрением лишь квазистационарного самосогласованного электрического поля.

Действительно, поскольку в сильно разреженном газе столкновения частиц практически отсутствуют, температуры его различных компонент могут существенно различаться в течение определенного времени. Однако в естественных условиях космического пространства длительного различия температур компонент не наблюдается. Поэтому релаксация структур в плазме при неизменных или медленно меняющихся внешних условиях происходит за характерное время наиболее тяжелых частиц, тогда как релаксация поля и электронов осуществляется значительно быстрее. В этом случае поле можно считать квазистационарным, а электроны — находящимися в равновесном распределении. В частности, для электронов можно использовать распределение Больцмана или модифицированное распределение, учитывающее эффект их поглощения отрицательно заряженной поверхностью [27]. Такой подход позволяет исключить кинетическое уравнение для электронов из математической модели области возмущения и решать бесстолкновительную задачу релаксации на характерном временном масштабе ионов.

Возможная анизотропия распределения ионов разреженного газа по скоростям в окрестности тела требует их описания на основе бесстолкновительного кинетического уравнения Власова, предложенного в работе [31]. С тех пор накоплен значительный объем исследований, посвященных этому уравнению и связанным с ним задачам, что привело к формированию целого научного направления. Хотя само кинетическое уравнение продолжает по-

сильно имя А. А. Власова [25, 32], это название часто используется в контексте различных его модификаций и уточнений.

Основная система уравнений, рассматриваемая в данной работе применительно к плазме с самосогласованным электростатическим полем, называется системой Власова—Пуассона, хотя это наименование встречается и в гравитационной теории. Уравнение Власова успешно применяется для решения физических задач в различных областях, оно всесторонне исследовано математически, для него известны различные методы решения, найдены и изучены важные аналитические решения. Обзоры по данной тематике представлены в относительно недавних работах [33, 34].

Однако, признавая фундаментальное значение исследований, посвященных аналитическому изучению и решению уравнения Власова, следует отметить, что такие решения либо носят приближенный характер, либо рассматривают задачи, достаточно далекие от практических приложений. Это создает широкие возможности для численных методов, особенно в случаях нелинейности, многокомпонентных сред, криволинейной геометрии и других сложных условий. Некоторые практические аспекты, актуальные для подобных ситуаций, будут рассмотрены далее в данной работе.

Наряду с кинетическими уравнениями для ионов и уравнением для потенциала макроскопического квазистационарного электрического поля (содержащим нелинейность, обусловленную видом равновесного распределения электронов), в рассматриваемый вариант системы Власова—Пуассона для возмущенной зоны входят уравнения связи макропараметров газа с функциями распределения, а также необходимые граничные и начальные условия.

В невозмущенной плазме концентрации и заряды различных частиц удовлетворяют условию квазинейтральности $\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} = 0$, где индекс α обозначает сорт (тип) частиц с зарядом e_{α} и концентрацией n_{α} . Следовательно, на начальном этапе формирования возмущенной зоны макроскопическое электрическое поле создается исключительно внесенным телом и может рассчитываться, как в вакууме.

Для компонентов невозмущенного равновесного газа справедливо максвелловское распределение по скоростям, которое принимается в качестве начального приближения. Однако при моделировании это асимптотическое внешнее граничное условие приходится переносить из «бесконечности» в точки r_{∞} внешней границы $\partial_e V$ конечной зоны возмущения V . Если такой перенос для макроскопической плотности заряда вполне корректен (поскольку она действительно становится пренебрежимо малой на расстоянии нескольких дебаевских радиусов от тела), то предположение о сохранении на внешней границе возмущенной зоны распределения частиц по скоростям, идентичного невозмущенной плазме, является некорректным. На границе $\partial_e V$ следует учитывать ненулевую среднюю скорость компонент, необходимую для обеспечения непрерывности полного тока проводимости. Таким образом, на внешней границе возмущенной зоны исчезает лишь макроскопическое электрическое поле, тогда как у функций распределения ионов устраняются проявления анизотропии, вызванные воздействием поверхности тела $\partial_b V$.

Наконец, систему уравнений задачи целесообразно представить в безразмерной форме. Для перехода к безразмерным величинам удобно использовать естественную систему масштабов, не приводящую к появлению дополнитель-

ных коэффициентов в уравнениях. Принимая ионы первого типа в качестве наиболее тяжелых и медленных частиц, для многокомпонентного газа в системе СИ такую систему масштабов можно записать в виде

$$\begin{aligned} M_n &= n_{1\infty}, \quad M_T = T_{1\infty}, \quad M_L = R_{D1\infty} = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T_{1\infty}}{e^2 n_{1\infty}} \right)^{1/2}, \\ M_\varphi &= \frac{k_B T_{1\infty}}{e}, \quad M_v = \left(\frac{2k_B T_{1\infty}}{m_1} \right)^{1/2}, \\ M_t &= \frac{M_L}{M_v}, \quad M_E = \frac{M_\varphi}{M_L}, \quad M_f = \frac{M_n}{M_v^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где M_n — масштаб концентрации частиц; M_T — масштаб температуры; M_L — масштаб длины; M_φ — масштаб потенциала электрического поля; M_v — масштаб скорости; M_t — масштаб времени; M_E — масштаб напряженности электрического поля; M_f — масштаб функции распределения; n_1 — концентрация ионов первого типа; T_1 — температура ионов первого типа; R_{D1} — дебаевский радиус для ионов первого типа; e — элементарный заряд; k_B и ε_0 — постоянная Больцмана и электрическая постоянная; m_1 — масса иона первого типа. Индекс ∞ относится к параметрам невозмущенной плазмы.

Рассмотрим случай, когда в равновесную многокомпонентную разреженную низкотемпературную плазму внесен неподвижный относительно нее проводник, имеющий форму шара или бесконечного прямого кругового цилиндра. Поверхность проводника полностью поглощает все падающие частицы и имеет заданный электрический потенциал. Будем пренебрегать магнитным полем и столкновениями ионов, а электроны считать распределенными равномерно в квазистационарном самосогласованном электрическом поле. Далее в работе рассматриваются как вопросы численной реализации соответствующей математической модели зоны плазменного возмущения, основанной на нелинейной системе Власова—Пуассона, так и некоторые результаты ее применения.

1. Неголономные координаты и математическая формулировка задачи. Поскольку фазовое пространство является многомерным, целесообразно не только учесть симметрию задачи, но и выбрать переменные, обеспечивающие максимально компактное представление области решения.

В монографии [35] исследована связь структуры конвективного фазового оператора кинетического уравнения с метрикой пространства, доказана его ковариантность и установлены правила преобразования в криволинейные координаты евклидова пространства. Однако в этой классической работе А. А. Власова рассматривался переход от декартовых фазовых координат лишь к произвольным голономным криволинейным координатам u_k , $k = 1, \dots, 6$, для которых почти всюду выполняется условие взаимно однозначного непрерывного соответствия с декартовыми координатами. В монографии показано, что когда функция распределения не зависит от части переменных u_k , $k = m + 1, \dots, 6$, кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial(J^* f)}{\partial t} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial u_k} (\dot{u}_k J^* f) = 0, \quad J^* = \int_{\Omega_{m+1, \dots, 6}} J(u_1, \dots, u_6) d\Omega_{m+1, \dots, 6}, \quad (2)$$

где J^* — якобиан преобразования, проинтегрированный по области $\Omega_{m+1,\dots,6}$ полного изменения переменных u_k , $k = m+1, \dots, 6$. Уравнение (2) формально совпадает с уравнением неразрывности для декартовых координат, выражая условие баланса вещества с плотностью J^*f в криволинейном фазовом пространстве.

Однако голономные координаты не всегда обеспечивают минимизацию области решения. В частности, при наличии очевидной угловой и трансверсальной симметрии, характерной для неподвижных сферических и цилиндрических тел, фазовое пространство становится более локализованным при использовании координат $r, v, \mu = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}/(rv)$ [29]. Эти координаты являются неголономными, так как их связь с компонентами трансверсальной скорости не является взаимно однозначной, несмотря на непрерывность. Следовательно, переход к указанным неголономным переменным требует дополнительных пояснений.

Во-первых, отметим, что преобразование кинетического уравнения к переменным r, v, μ в случае центральной и осевой симметрии задачи при отсутствии поля приводит к исчезновению в фазовом конвективном операторе компонент, содержащих производные по v . Следовательно, соответствующие преобразования следует выполнять только при наличии поля.

Во-вторых, поскольку форма конвективного фазового оператора в голономных координатах установлена в работе [35], преобразование координат можно проводить исходя из формы уравнения Власова для сферических и цилиндрических координат, полученных в указанной работе. Обозначив через Z зарядовое число частиц и используя масштабы (1), запишем эти исходные формы для дальнейших преобразований.

В случае цилиндрических координат имеем

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^m u^\alpha u^\beta \frac{\partial f}{\partial u^m} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \\ &+ \left(\frac{v_\phi^2}{r} + \frac{ZE_r}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \left(-\frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{ZE_\phi}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\phi} + \dot{v}_z \frac{\partial f}{\partial v_z}. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае сферических координат имеем

$$\begin{aligned} \frac{Df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^m u^\alpha u^\beta \frac{\partial f}{\partial u^m} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} + \frac{ZE_r}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \\ &+ \left(\frac{v_\phi^2}{r} \cotg \theta - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{ZE_\theta}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} + \left(-\frac{v_r v_\phi}{r} - \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cotg \theta + \frac{ZE_\phi}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\phi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^m$ — символы Кристоффеля; по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование. Формы уравнений (3) и (4) допускают наличие электрического поля произвольной ориентации, а смысл входящих в них переменных ясен из контекста.

Рассмотрим сначала цилиндрический оператор (3), предполагая осевую симметрию в физическом пространстве и дополнительную однородность вдоль оси Oz , совпадающей с осью цилиндра. В этом случае поле, функция распределения и конвективный фазовый оператор не зависят от координат ϕ и z , однако сохраняют зависимость от радиальной и трансверсальной скоростей.

Из (3) получаем

$$\frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{v_\phi^2}{r} + \frac{ZE_r}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\phi}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\phi}. \quad (5)$$

Связь между компонентами скорости в цилиндрических и неголономных координатах задается следующими соотношениями:

$$v_r = v\mu, \quad v_\phi = \pm \sqrt{1 - \mu^2}, \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2}, \quad \mu = \frac{v_r}{\sqrt{v_r^2 + v_\phi^2}}, \quad (6)$$

причем именно многозначность одного из выражений в (6) обуславливает неголономность соответствующих преобразований.

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial v_r} = \frac{\partial \mu}{\partial v_r} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial v}{\partial v_r} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v_\phi} = \frac{\partial \mu}{\partial v_\phi} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial v}{\partial v_\phi} \frac{\partial}{\partial v},$$

и вычисляя частные производные, из (6) получаем

$$\frac{\partial}{\partial v_r} = \frac{1 - \mu^2}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v_\phi} = \mp \frac{\mu \sqrt{1 - \mu^2}}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} \pm \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (7)$$

Подстановка (7) в (5) дает окончательный вид кинетического фазового оператора в неголономных координатах:

$$\frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{ZE_r \mu}{2} \frac{\partial f}{\partial v} + (1 - \mu^2) \left(\frac{v}{r} + \frac{ZE_r}{2v} \right) \frac{\partial f}{\partial \mu}. \quad (8)$$

В случае неподвижного сферического тела функция распределения частиц зависит лишь от t , r , v_r , v_τ и обладает трансверсальной симметрией (трансверсальные компоненты векторов обозначены индексом τ). Следовательно, конвективный фазовый оператор в неголономных координатах сохраняет аналогичный вид. Данный факт легко устанавливается посредством преобразований, аналогичных приведенным выше.

С учётом симметрии и уравнения (8) безразмерная система принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v\mu \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} + \frac{ZE_r \mu}{2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} + (1 - \mu^2) \left(\frac{v}{r} + \frac{ZE_r}{2v} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mu} = 0,$$

$$\beta_\alpha = m_\alpha / T_{\alpha\infty}, \quad \alpha = 1, \dots, N-1, \quad t > 0, \quad v \in (0, \infty), \quad r \in [r_b, r_\infty],$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = n_e - \sum_{\alpha=1}^{N-1} Z_{\alpha} n_{\alpha}, \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \gamma = \begin{cases} 1, & \text{цилиндр,} \\ 2, & \text{шар,} \end{cases}$$

$$f_{\alpha}(0, r, v, \mu) = n_{\alpha\infty} (\beta_{\alpha}/\pi)^{3/2} \exp(-\beta_{\alpha} v^2), \quad \varphi(0, r) = \varphi_1 r_1/r,$$

$$f_{\alpha}(t, r_b, v, \mu) = 0, \quad \mu < 0, \quad \varphi(t, r_b) = \varphi_1, \quad \varphi(t, r_{\infty}) = 0, \quad (9)$$

$$f_{\alpha}(t, r_e, v, \mu) = n_{\alpha\infty} (\beta_{\alpha}/\pi)^{3/2} \exp[-\beta_{\alpha}(v^2 - 2vv_{\alpha\infty} + v_{\alpha\infty}^2)],$$

$$n_{\alpha}(t, r) = 2\pi \int_0^{\infty} v^2 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(t, r, v, \mu) d\mu dv,$$

$$T_{\alpha}(t, r) = \frac{2\pi}{n_{\alpha}} \int_0^{\infty} v^2 \int_{-1}^1 v_{T,\alpha}^2(t, r, v, \mu) f_{\alpha}(t, r, v, \mu) d\mu dv,$$

$$q_{\alpha,r}(t, r) = \frac{2\pi}{n_{\alpha}} \int_0^{\infty} v^3 \int_{-1}^1 \mu v_{T,\alpha}^2(t, r, v, \mu) f_{\alpha}(t, r, v, \mu) d\mu dv,$$

$$\langle v_{\alpha,\tau} \rangle(t, r) = 0, \quad \langle v_{\alpha,r} \rangle(t, r) = \frac{2\pi}{n_{\alpha}} \int_0^{\infty} v^3 \int_{-1}^1 \mu f_{\alpha}(t, r, v, \mu) d\mu dv,$$

$$v_{T,\alpha}^2(t, r, v, \mu) = (v\mu - \langle v_{\alpha,r} \rangle(t, r))^2 + v^2(1 - \mu^2),$$

где N — количество компонент газа; массы частиц и температуры компонент плазмы приведены в безразмерных единицах. Индекс α , как и ранее, обозначает тип частиц (при этом $\alpha = N$ заменён на e для электронов). Индекс b соответствует поверхности тела $\partial_b V$, ∞ — внешней границе $\partial_e V$ возмущённой зоны, радиус которой задаётся *a priori*; T обозначает тепловую скорость частиц. Угловые скобки $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по ансамблю частиц.

Для электронов можно использовать безразмерное распределение Больцмана

$$n_e(t, r) = n_{e,\infty} \exp(\varepsilon \varphi(t, r)) \quad (10)$$

либо модифицированное распределение [27]:

$$n_e(t, r) = \frac{1}{2} n_{e,\infty} \exp(\varepsilon \varphi(t, r)) \left\{ 1 + p + (1 - q) \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{r^2}} \exp \left[\frac{\varepsilon r_b^2 (\varphi(t, r) - \varphi_b)}{r^2 - r_b^2} \right] \right\}, \quad (11)$$

где

$$p = \Phi \left(\sqrt{\varepsilon (\varphi(t, r) - \varphi_b)} \right), \quad q = \Phi \left(\sqrt{\frac{\varepsilon r^2 (\varphi(t, r) - \varphi_b)}{r^2 - r_b^2}} \right),$$

$\Phi(\cdot)$ — функция ошибок, а $\varepsilon = T_{1,\infty}/T_{e,\infty}$.

Важно отметить, что дивергентная форма (2) кинетического оператора (8) позволяет применять для его аппроксимации как консервативные вычислительные схемы [36], так и имитационные динамические методы, основанные на моделировании переноса вещества в фазовом пространстве [37, 38].

Учитывая целесообразность использования дивергентной формы кинетического уравнения в задаче (9), отметим зависимость проинтегрированного якобиана преобразования J^* от геометрии тела:

$$J^* = \begin{cases} 4\pi r v / \sqrt{1 - \mu^2}, & \text{цилиндр,} \\ 8\pi^2 r^2 v^2, & \text{шар,} \end{cases} \quad (12)$$

где интегрирование выполняется по всем углам физического пространства, включая азимутальный угол для сферической системы или полярный угол для цилиндрической системы в пространстве скоростей. В обоих случаях пространство скоростей двумерно, что ограничивает контроль лишь радиальной компонентой скорости и модулем её трансверсальной компоненты.

2. Численное решение и некоторые особенности реализации метода. Для решения кинетического уравнения задачи (9) использовался метод крупных частиц с постоянным форм-фактором [38], реализованный на равномерной неоднородной сетке криволинейного фазового пространства $\{r, v, \mu\}$ с шагами h_r, h_v, h_μ . Метод предполагает, что последовательно рассматриваемые ячейки сетки фазового пространства (крупные частицы) объемом $h_r h_v h_\mu$ (якобиан (12) учитывается в фазовой плотности вещества согласно (2)) сначала перемещаются как жесткие объекты в соответствии со скоростями, рассчитанными для их центров, и шагом метода по времени, определяемым из условия устойчивости. Затем вещество смещенной крупной частицы в соответствии с выбранным форм-фактором перераспределяется между ячейками разностной сетки, с которыми у нее имеется непустое пересечение. При постоянном форм-факторе вещество частицы равномерно распределено по ее объему, а сам метод крупных частиц эквивалентен явной схеме дифференцирования против потока, имеющей первый порядок точности аппроксимации по шагам и условие устойчивости Куранта [36–38]:

$$\Delta t < \frac{1}{\sqrt{K}} \min_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{h_k}{\max |\dot{u}_k|} \right), \quad (13)$$

где K — размерность пространства задачи, а экстремумы определяются по всем ячейкам области решения. С физической точки зрения условие (13) не позволяет крупным частицам в течение одного шага метода по времени сместиться дальше, чем на одну ячейку сетки, по любому из координатных направлений.

Для расчета макропараметров ионов использовались квадратуры интегралов, входящих в систему (9). При этом проблему вычисления несобственных интегралов по $v \in (0, \infty)$ в (9) можно решить, например, используя адаптивную подвижную по v сетку [29], отслеживающую смещение по этой переменной носителя функции распределения. Тогда бесконечный интервал интегрирования можно заменить подвижным интервалом фиксированной конечной ширины, задаваемой *a priori*, гарантированно перекрывающим основную

часть носителя. Также несобственный интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов по единичному промежутку с переменными интегрирования v и $1/v$. Подобный прием, хотя и несколько более ресурсоемкий, успешно применялся автором для расчета несобственных интегралов в задачах переноса излучения [39].

В данной работе использовался первый подход. Для уменьшения контролируемого диапазона переменной v в условиях смещения носителя функции распределения в фазовом пространстве задачи её сетка была выполнена неоднородной и подвижной по v . На каждом временном шаге метода первоначальные положения крупных частиц ассоциировались с центрами фазовых ячеек $r_i = r_b + h_r(i - 1/2)$, $\mu_k = -1 + h_\mu(k - 1/2)$, $v_{j,k,i} = v_{\min k,i} + h_v(j - 1/2)$, где $i = 1, \dots, N_r$, $j = 1, \dots, N_v$, $k = 1, \dots, N_\mu$. Необходимая подвижность сетки обеспечивалась использованием переменной нижней границы $v = v_{\min k,i}$, рассчитываемой для каждого (r_i, μ_k) — «пучка» крупных частиц. Для её вычисления использовался следующий алгоритм.

Определим сеточную функцию $Q_{j,k,i} = Q(r_i, v_{j,k,i}, \mu_k)$, где $Q(r, v, \mu) = J^*(r, v, \mu)f(r, v, \mu)h_r h_v h_\mu$, задающую количество частиц в фазовых ячейках. Здесь и далее для краткости опускается временной аргумент. В качестве примера рассмотрим случай шара. Пусть $V(r, h_r) = 4\pi r^2 h_r$ — объём шарового слоя толщины h_r . Тогда значения $Q_{1,k,i}$ и $Q_{N_v,k,i}$, полученные после каждого этапа перемещения крупных частиц и перераспределения их содержимого, использовались для определения параметра $\eta_{k,i}$ направления смещения носителя функции распределения, параметра величины сдвига $s_{i,k}$ сетки, минимальной скорости $v_{\min k,i}$ и пересчёта сеточной функции Q при сдвиге сетки следующим образом (для краткости несущественные для понимания сути преобразований индексы i, k в последующих соотношениях также опущены):

$$\begin{aligned} s &= \frac{|Q_{N_v} - Q_1|}{\eta(Q_2 + Q_{N_v}) + (1 - \eta)(Q_1 + Q_{N_v-1})}, \quad \eta = \Theta(Q_{N_v} - Q_1), \\ v_{\min} &:= \eta(v_{\min} + h_v s) + (1 - \eta) \max(0, v_{\min} - h_v s), \\ Q_1 &:= (1 - s)Q_1 + s\eta Q_2, \\ Q_{N_v} &:= (1 - s)Q_{N_v} + s(1 - \eta)Q_{N_v-1}, \\ Q_j &:= (1 - s)Q_j + s[\eta Q_{j+1} + (1 - \eta)Q_{j-1}], \quad j = 2, \dots, N_v - 1. \end{aligned}$$

Здесь $\Theta(\cdot)$ — функция Хэвисайда, $:=$ — символ присваивания. Введение подвижных сеток давно и эффективно используется при решении подобных кинетических задач и позволяет, в частности, по модулю скорости рассматривать относительно небольшой диапазон Δv значений v . В проведенных расчетах он нигде не превышал 5 (в единицах тепловой скорости наиболее тяжелых ионов невозмущенной плазмы).

Для оценки величины средней скорости v_∞ перетекания ионов через внешнюю границу возмущённой зоны запишем уравнение баланса (неразрывности) полного числа частиц N для предпоследнего радиального слоя толщиной h_r , середина которого имеет радиальную координату $r_{N_r-1} = r_e - 3h_r/2$. В качестве примера вновь рассмотрим случай сферической геометрии. Поскольку объём такого слоя с центральным радиусом r на используемой сетке определяется выражением $V(r, h_r) = 4\pi r^2 h_r$, получаем

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N \langle \mathbf{v} \rangle) \right]_{N_r-1}^k = \left[\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (N \langle v_r \rangle) \right]_{N_r-1}^k = \\
 &= 4\pi r_{N_r-1}^2 h_r \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{N_r-1}^k + 4\pi h_r \left[\frac{\partial}{\partial r} (N \langle v_r \rangle) \right]_{N_r-1}^k = \\
 &= 4\pi r_{N_r-1}^2 h_r \left(\frac{n^k - n^{k-1}}{\Delta t} \right)_{N_r-1} + 2\pi (r_{N_r}^2 n_{N_r}^k \langle v_r \rangle_{N_r}^k - r_{N_r-2}^2 n_{N_r-2}^k \langle v_r \rangle_{N_r-2}^k),
 \end{aligned}$$

откуда следует искомая оценка:

$$v_{\infty}^k = \langle v_r \rangle_{N_r}^k = \frac{r_{N_r-2}^2}{r_{N_r}^2} \frac{n_{N_r-2}^k}{n_{N_r}^k} \langle v_r \rangle_{N_r-2}^k - 2h_r \frac{r_{N_r-1}^2}{r_{N_r}^2} \frac{1}{n_{N_r}^k} \left(\frac{n^k - n^{k-1}}{\Delta t} \right)_{N_r-1}.$$

В приведённых соотношениях верхние индексы соответствуют временно-му слою (случаи квадратов величин понятны из контекста), нижние индексы обозначают пространственную координату. Пространственная производная аппроксимируется симметричной схемой, временная производная — методом «дифференцирования назад».

Свойства квазилинейных эллиптических операторов и подходы к численному решению нелинейного уравнения Пуассона с правой частью, содержащей распределения типа (10) и (11), подробно исследованы в работе [40]. В указанной работе помимо классического метода установления применимого для случая экспоненциальной нелинейности (распределение Больцмана (10)), предложен новый метод разбиения области решения, основанный на принципе сжимающих отображений и теореме Банаха о неподвижной точке. Данный метод использует связь между нормой эллиптического оператора перехода в процессе простых итераций и диаметром области решения нелинейной задачи Дирихле.

Метод разбиения области существенно расширяет класс допустимых функций плотности в уравнении Пуассона, включая распределения вида (11). Оба рассмотренных метода обладают локальным характером и могут быть эффективно использованы для вычисления электрического потенциала при численном решении задачи (9).

3. Результаты моделирования и их обсуждение. Описанный в предыдущем разделе метод решения задачи (9) был реализован в среде программирования *Matlab*. В данном разделе представлены и анализируются результаты, демонстрирующие как адекватность разработанного вычислительного инструмента, так и эффективность кинетического подхода в целом. Исследование проводилось для трёхкомпонентной плазмы со следующими безразмерными параметрами: $r_b = 7$, $r_{\infty} = 25$, $\varphi_1 = -6$, $T_{1,2,\infty} = T_{e,\infty} = 1$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = -1$, $m_{1,2} = 1$, $n_{1,\infty} = 1$, $n_{2,\infty} = n_{e,\infty} = 0.5$. В расчётах использовалось распределение Больцмана (10) для электронов, причём их температура считалась постоянной во всей расчётной области.

Для численного решения в фазовом пространстве неголономных криволинейных координат (r, v, μ) применялась равномерная подвижная сетка с размерностями $N_r = 45$, $N_v = 30$, $N_{\mu} = 20$. Ширина контролируемой области по скоростной переменной составляла $\Delta v = 4.5$.

Из рис. 1, а видно, что электрическое поле быстро локализуется в окрестности заряженного тела: радиальная компонента напряжённости E_r становится практически постоянной малой отрицательной величиной в большей

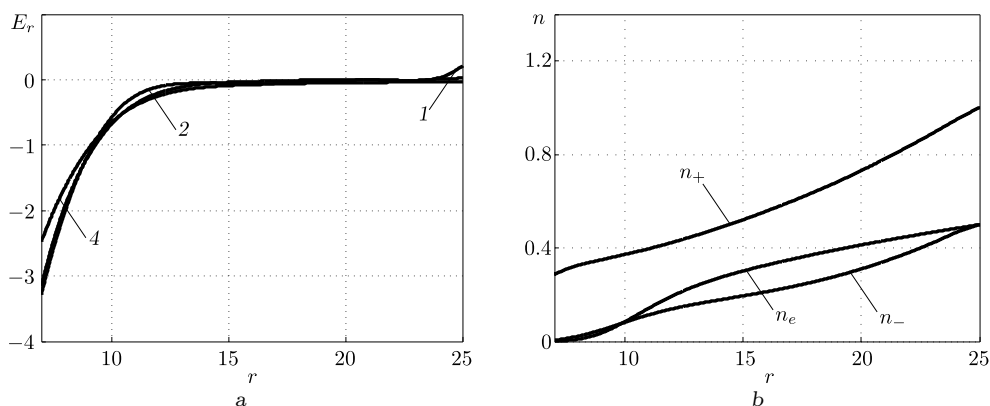


Рис. 1. Эволюция профиля радиальной напряженности электрического поля E_r в ходе развития возмущенной зоны (a) и стационарные профили концентрации электрических зарядов (b). Здесь и далее нумерация кривых соответствует таблице

[Figure 1. Evolution of the radial electric field intensity E_r profile during the development of the disturbed zone (a) and stationary profiles of electric charge concentration (b). Here and elsewhere, the curve numbering corresponds to the table]

Нумерация кривых на рисунках [Numbering of curves in figures]

Curve number	1	2	3	4
Iteration number	10	50	150	1000
Scaled time	0.888849	4.17642	11.9797	80.0561

части расчётной области. Такая конфигурация поля обеспечивает приток положительных ионов из внешней зоны к поверхности тела, компенсирующий их поглощение. При этом, как показано на рис. 1, b, большая часть возмущённой зоны становится квазинейтральной, что подтверждает корректность выбора границы расчётной области r_∞ .

Нумерация кривых на рисунках соответствует данным таблицы, где приведены номера временных итераций метода крупных частиц и соответствующие значения безразмерного времени. Отметим, что некоторые кривые не представлены на рисунках, поскольку визуально не отличаются от показанных вследствие различного времени релаксации характеристик системы.

Моделирование продемонстрировало, что в стационарном режиме электрический потенциал φ изменяется монотонно. Однако данное поведение наблюдается не на всех стадиях процесса. На начальном этапе формирования возмущённой области в пристеночный слой поступает избыточное количество положительных ионов, которые не успевают немедленно достичь поверхности тела. В этот период в возмущённой зоне формируются слой положительного объёмного заряда и соответствующий потенциальный барьер, снижающий интенсивность притока положительных ионов. Наличие данного барьера можно идентифицировать при детальном анализе кривой 1 на рис. 1, a, где сохраняется область с положительными значениями радиальной компоненты напряжённости электрического поля E_r .

Поведение частиц с различным знаком заряда в возмущённой зоне имеет принципиальные различия. Особый интерес представляют распределения фазовой плотности $Q = J^*f$ для положительных и отрицательных ионов,

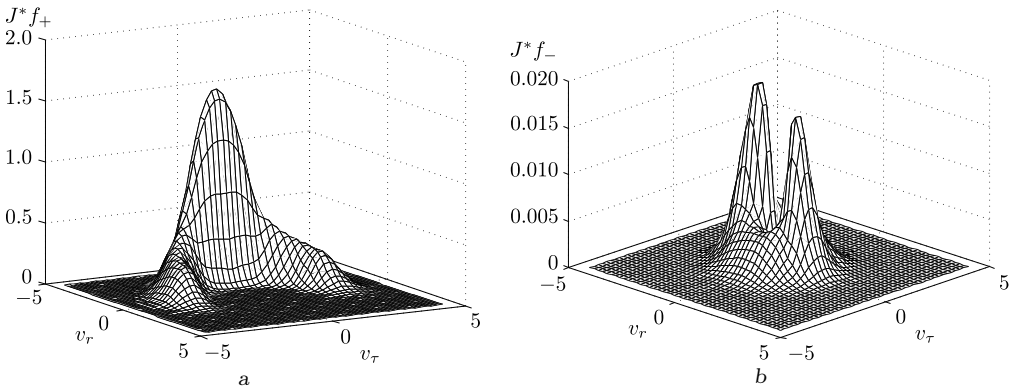


Рис. 2. Вид стационарной фазовой плотности $Q = J^* f$ распределения положительных (а) и отрицательных (b) ионов в пристеночном слое тела
 [Figure 2. The type of the stationary phase density $Q = J^* f$ distribution for positive (a) and negative (b) ions in the near-wall layer of the body]

приведенные на рис. 2 для стационарного состояния вблизи поверхности тела. Для визуализации использовалось фазовое пространство с голономными координатами — радиальной v_r и трансверсальной v_τ скоростью, что обеспечивает наглядность интерпретации результатов. Переход к переменной v_τ осуществлён с учётом осевой симметрии трансверсального движения.

Следует отметить, что все функции распределения $f_\pm(r, v_r, v_\tau)$ обладают трансверсальной симметрией. Однако данный эффект, как для Q , так и для f , необходимо специально учитывать в графических процедурах, поскольку его отображение в неголономных координатах принципиально невозможно.

В процессе развития возмущенной области наряду со смещением носителя плотности распределения, отражающего ускорение положительных ионов (причем его величина возрастает по мере приближения к поверхности тела), происходит формирование и усиление группировок частиц, обладающих относительно высокими трансверсальными скоростями v_τ , что отчетливо видно на рис. 2, а. Как будет показано далее, именно такие частицы обуславливают повышение температуры положительных ионов в тонком приповерхностном слое газа. Данный механизм аналогичен процессу разогрева вещества в аккреционной области, наблюдаемому в окрестности черных дыр. В этом смысле поглощающая все падающие частицы сфера демонстрирует сходное поведение.

Отрицательные ионы покидают возмущенную зону, за исключением относительно небольшой доли частиц с высокой радиальной скоростью, преодолевающих отталкивающее поле. При этом значительная их часть отражается полем, о чем свидетельствует наличие двух пиков сопоставимой амплитуды, соответствующих падающим и удаляющимся частицам на рис. 2, b. Локализация фазового носителя разнонаправленного движения отрицательных ионов вблизи радиального направления (см. рис. 2, b) поддерживает низкоинтенсивный тепловой процесс, что должно приводить к охлаждению отрицательных частиц вблизи тела.

Следует подчеркнуть, что на рисунках представлена именно фазовая плотность $Q = J^* f$ распределения частиц, а не их функция распределения, на которой, в частности, отсутствует видимое разделение потоков падающих на

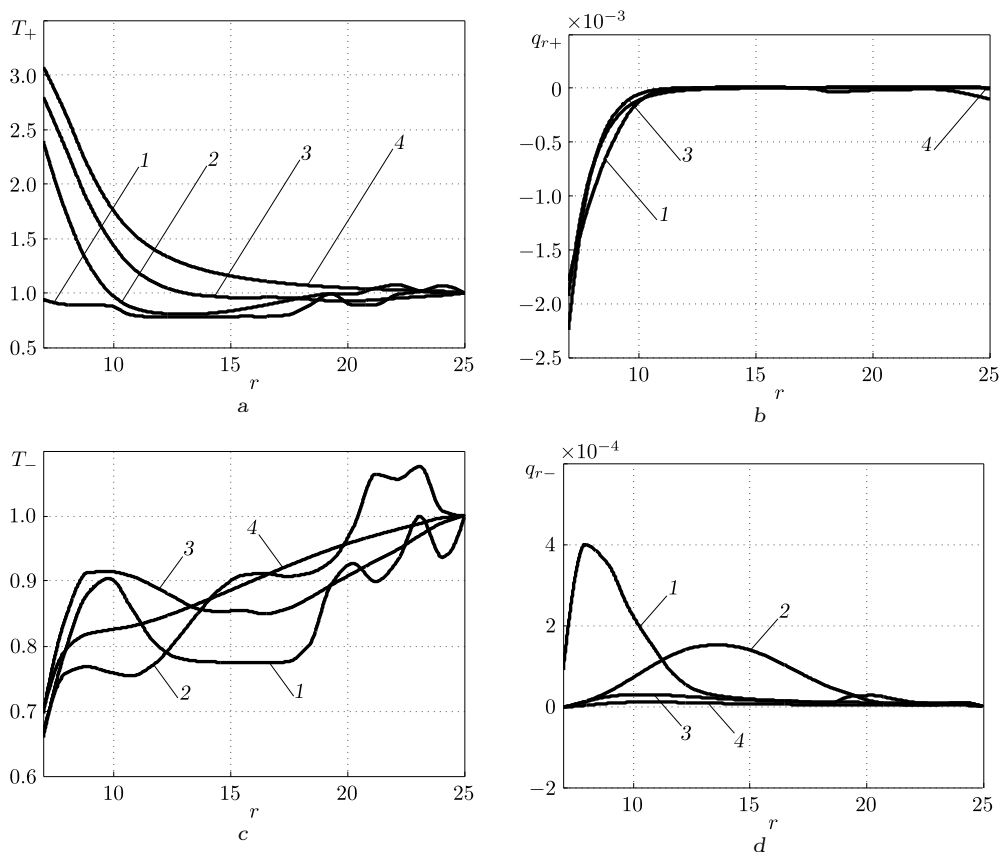


Рис. 3. Поведение радиальных профилей тепловых характеристик возмущенной зоны в ходе ее развития: а и б — температура T_+ и радиальная плотность теплового потока положительных ионов q_{r+} ; с и д — температура T_- и радиальная плотность теплового потока отрицательных ионов q_{r-}

[Figure 13. Behavior of radial profiles of thermal characteristics of the disturbed zone during its development: а and б — temperature T_+ and radial heat flux density of positive ions q_{r+} ; с and д — temperature T_- and radial heat flux density of negative ions q_{r-}]

поверхность и отраженных отрицательных ионов. Как видно, кинетическое распределение частиц в пристеночной области является существенно неравновесным и принципиально различается для частиц с разным знаком заряда.

Указанные процессы в фазовом пространстве подтверждаются эволюцией профилей температуры и радиальной плотности тепловых потоков ионов разного знака, представленных на рис. 3.

Особого внимания заслуживает поведение профиля температуры положительных ионов T_+ в возмущенной области (рис. 3, а). Появление в плазме поглощающей отрицательно заряженной поверхности первоначально приводит к «вымыванию» из пристеночной области наиболее энергичных частиц данного типа, вызывая их охлаждение. Однако последующая динамика T_+ демонстрирует интенсивный разогрев ионов в приповерхностном слое. Поскольку, как показывают расчеты, этот процесс не сопровождается увеличением радиального ионного тока (являющегося мерой интенсивности радиального движения частиц), рост температуры может быть объяснен лишь накоплением в пристеночной области частиц с высокой угловой скоростью, удерживаемых

вблизи сферической поверхности балансом электрических и центробежных сил. Вследствие трансверсальной симметрии задачи для шара средняя орбитальная скорость ионов равна нулю, поэтому накопление положительных частиц с высокой вращательной скоростью приводит к повышению температуры.

Фазовые процессы также влияют на теплоперенос, определяя вид профилей плотности радиального теплового потока положительных ионов $q_{r,+}$ в возмущенной зоне (рис. 3, *b*). В области слабого поля и относительно низкой температуры плотность теплового потока близка к нулю. Основные значения потока сосредоточены в непосредственной близости от поверхности тела и формируются при относительно высоких значениях T_+ и E . Как видно из рисунков, пространственная локализация величин $q_{r,+}$ и E максимальна у поверхности тела по сравнению с другими характеристиками. При этом усиление теплового потока в приповерхностной области может быть весьма существенным и способно влиять на физические свойства поверхности.

Тепловое поведение отрицательных ионов (рис. 3, *c, d*), хотя и менее значимо для поверхности тела в рассматриваемом случае, также представляет интерес и связано с фазовыми процессами. Частицы с более высокой энергией первыми покидают возмущенную зону либо замедляются полем. Этот результат ожидаем, однако расчеты показывают, что процесс происходит исключительно быстро, несмотря на равенство масс положительных и отрицательных ионов. Удаление отрицательных ионов носит лавинообразный характер, о чем свидетельствуют наличие и динамика одиночного импульса на радиальных профилях их тока проводимости и теплового потока. Тепловой поток, представленный на рис. 3, *d*, фактически повторяет поведение тока проводимости и демонстрирует тепловую волну, связанную с выносом отрицательных частиц из возмущенной зоны. Хотя температура отрицательных ионов (рис. 3, *c*) эволюционирует сложным образом, ее профиль со временем становится монотонным, как и у положительных частиц. Однако, в отличие от положительных ионов, отрицательные частицы вблизи тела, как и ожидалось, охлаждаются.

Заключение. В настоящей работе исследованы процессы, возникающие при взаимодействии заряженных неподвижных симметричных тел с разреженной ионизированной плазмой. Ключевой особенностью рассматриваемых физических систем является наличие существенно неравновесного анизотропного распределения компонент плазмы по скоростям в пристеночном слое, а также необходимость самосогласованной постановки задачи релаксации, в которой процессы переноса плазмы и формирования электромагнитного поля взаимосвязаны. В качестве основы описания использована математическая модель, базирующаяся на кинетическом подходе и системе уравнений Власова для ионных компонент.

Для рассматриваемой задачи использована криволинейная система негомономных координат, позволяющая сократить фазовое пространство и повысить эффективность численных методов. Обоснована форма кинетических уравнений в предложенной системе координат. Детально рассмотрены особенности реализации модели и применяемого численного метода.

Создана методологическая основа, разработан и верифицирован программный инструментарий, не только представляющий прикладной интерес, но

и формирующий базу для решения более сложных задач, описывающих поведение ионизированных газов в окрестности заряженных тел.

На примере решения задачи об отрицательно заряженном однородном абсорбирующем шаре в трехкомпонентной плазме, содержащей ионы обоих знаков и электроны, продемонстрировано наличие значительного неравновесия и анизотропии в распределении частиц в возмущенной зоне. Полученные результаты имеют четкую физическую интерпретацию, что подтверждает адекватность модели и корректность разработанного программного обеспечения. По результатам расчетов представлены распределения ионов в фазовом пространстве, эволюция профилей основных макроскопических характеристик плазмы и распределения электрического поля в возмущенной области.

Проведен детальный анализ теплового поведения компонент плазмы в окрестности поглощающих заряженных тел. На примере сферического тела показано, что разогрев притягиваемых частиц в непосредственной близости от поверхности обусловлен накоплением частиц с интенсивным трансверсальным движением. Данные частицы концентрируются в приповерхностной области, не достигая поверхности вследствие центробежного эффекта. Исследован механизм охлаждения отталкиваемых частиц. Установлено, что тепловой поток частиц, притягиваемых к поверхности, формируется в узкой околоповерхностной области с высокими значениями электрического поля и температуры данной компоненты, тогда как тепловой поток отталкиваемых частиц коррелирует с их током проводимости.

Конкурирующие интересы. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов в отношении данной публикации.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за содержание и подготовку окончательной версии рукописи. Окончательная версия рукописи одобрена автором.

Финансирование. Исследование выполнено за счет бюджетного финансирования.

Благодарность. Автор выражает благодарность рецензентам за внимательное рассмотрение работы, ценные замечания и конструктивные предложения.

Библиографический список

1. Morfill G. E., Ivlev A. V. Complex plasmas: An interdisciplinary research field // *Rev. Mod. Phys.*, 2009. vol. 81, no. 4. pp. 1353–1404. EDN: MYCKIN. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1353>.
2. Kuznetsov I. A., Saveliev A. A., Rasipuram S., et al. Development of active porous medium filters on plasma textiles // *AIP Conf. Proc.*, 2012. vol. 1453. pp. 265–270. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4711186>.
3. Giddey S., Badwal S. P. S., Kulkarni A., Munnings C. A. A comprehensive review of direct carbon fuel cell technology // *Prog. Energy Combust. Sci.*, 2012. vol. 38, no. 3. pp. 360–399. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pecs.2012.01.003>.
4. Thissen H. Plasma-based surface modification for the control of biointerfacial interactions / *Biosynthetic Polymers for Medical Applications* / Woodhead Publishing Series in Biomaterials; eds. L. Poole-Warren, P. Martens, R. Green. Amsterdam: Elsevier, 2016. pp. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-105-4.00005-5>.
5. Gay-Mimbrera J., Garcia M. C., Isla-Tejera B., et al. Clinical and biological principles of cold atmospheric plasma application in skin cancer // *Adv. Ther.*, 2016. vol. 33, no. 6. pp. 894–909. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12325-016-0338-1>.
6. Fayrushin I. I., Dautov I. G., Kashapov N. F. Distribution of potential and concentra-

- tion of electrons in low-temperature plasma with hollow microparticles // *Int. J. Env. Sci. Technol.*, 2017. vol. 14. pp. 2555–2560. EDN: XNOAWS. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13762-016-1054-8>.
7. Bronold F. X., Rasek K., Fehske H. Electron microphysics at plasma-solid interfaces // *J. Appl. Phys.*, 2020. vol. 128, 180908, arXiv: 2011.06821 [physics.plasm-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0027406>.
8. Freidman P. C., Fridman A. Using cold plasma to treat warts in children: A case series // *Pediatr. Dermatol.*, 2020. vol. 37, no. 4. pp. 706–709. DOI: <https://doi.org/10.1111/pde.14180>.
9. Кожевников В. Ю., Козырев А. В., Коковин А. О., Семенюк Н. С. Кинетическая модель вакуумного расширения плазмы в цилиндрическом промежутке // *Физ. плазмы*, 2023. Т. 49, № 11. С. 1170–1177. EDN: HAWJYO. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367292123600607>.
10. Adamovich I., Agarwal S., Ahedo E., et al. The 2022 Plasma Roadmap: low temperature plasma science and technology // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2022. vol. 55, no. 37, 373001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac5e1c>.
11. Sanmartin J. R., Estes R. D. The orbital-motion-limited regime of cylindrical Langmuir probes // *Phys. Plasm.*, 1999. vol. 6, no. 1. pp. 395–405. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.873293>.
12. Merlino R. L. Experimental investigations of dusty plasmas // *AIP Conf. Proc.*, 2005. vol. 799. pp. 3–11. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2134567>.
13. Thomas E. Dust clouds in DC-generated dusty plasmas: Transport, waves, and three-dimensional effects // *Contr. Plasm. Phys.*, 2009. vol. 49, no. 4–5. pp. 316–345. DOI: <https://doi.org/10.1002/ctpp.200910029>.
14. Chung S. S. M. FDTD simulations on radar cross section of metal cone and plasma covered metal cone // *Vacuum*, 2012. vol. 86, no. 7. pp. 970–984. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2011.08.016>.
15. Lev D., Myers R. M., Lemmer K. M., et al. The technological and commercial expansion of electric propulsion // *Acta Astro.*, 2019. vol. 159. pp. 213–227. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.03.058>.
16. Тимофеев А. В., Николаев В. С. Влияние параметров тлеющего разряда на среднее межчастичное расстояние в плазменно-пылевых структурах в диапазоне температур от криогенных до комнатной // *ЖЭТФ*, 2019. Т. 155, № 2. С. 356–370. EDN: YVYMG. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044451019020160>.
17. Ohkawa Y., Kawamoto S., Okumura T., et al. Review of KITE – Electrodynamic tender experiment on the Japanese H-II Transfer Vehicle // *Acta Astro.*, 2020. vol. 177. pp. 750–758. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.03.014>.
18. Голубь А. П., Попель С. И. Нестационарные процессы при формировании пылевой плазмы у поверхности спутника Марса–Деймоса // *Физ. плазмы*, 2021. Т. 47, № 8. С. 741–747. EDN: OHSJUJ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367292121070088>.
19. Ваулина О. С. Перераспределение кинетической энергии в трехмерных облаках заряженных пылевых частиц // *Физ. плазмы*, 2022. Т. 48, № 1. С. 36–40. EDN: KNZZYV. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367292122010140>.
20. Игнатов А. М. Влияние невзаимных сил на устойчивость пылевых кластеров // *Физ. плазмы*, 2021. Т. 47, № 5. С. 391–400. EDN: ZSQIDF. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367292121050024>.
21. Попель С. И., Зеленый Л. М., Захаров А. С. Пылевая плазма в солнечной системе: безатмосферные космические тела // *Физ. плазмы*, 2023. Т. 49, № 8. С. 813–820. EDN: HZLIWW. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0367292123600437>.
22. Hartzell C. M., Bellan P., Bodewits D., et al. Payload concepts for investigations of electrostatic dust motion on the lunar surface // *Acta Astro.*, 2023. vol. 207. pp. 89–105. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.02.032>.

23. Chapman S., Cowling T. G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge: Cambridge Univ., 1991. 423 pp.
24. Силин В. П. *Введение в кинетическую теорию газов*. М.: Наука, 1971. 338 с.
25. Ecker G. *Theory of Fully Ionized Plasmas*. New York, London: Academic Press, 1972. xv+344 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10607-1>.
26. Арцимович А. А., Сагдеев Р. З. *Физика плазмы для физиков*. М.: Атомиздат, 1979. 320 с.
27. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Питаевский Л. П. *Искусственные спутники в разреженной плазме*. М.: Наука, 1964. 382 с. EDN: ZTCPTT.
28. Альперт Я. Л. *Волны и искусственные тела в приземной плазме*. М.: Наука, 1974. 216 с.
29. Алексеев Б. В., Котельников В. А., Черепанов В. В. Электростатический зонд в многокомпонентной плазме // *TBT*, 1984. Т. 22, № 2. С. 395–396.
30. Жданов С. К., Курнаев В. А., Романовский М. К., Цветков И. В. *Основы физических процессов в плазме и плазменных установках*. М.: МИФИ, 2007. 368 с.
31. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа // *УФН*, 1967. Т. 93, № 3. С. 444–470. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0093.196711f.0444>.
32. Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P. J. Theory and applications of the Vlasov equation // *Eur. Phys. J. D*, 2015. vol. 69, 68. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2015-60082-y>.
33. Веденяпин В. В., Когтенов Д. А. О выводе и свойствах уравнений типа Власова // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2023, 020. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-20>.
34. Скубачевский А. Л. Уравнения Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // *УМН*, 2014. Т. 69, № 2. С. 107–148. EDN: SJQKIX. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9579>.
35. Власов А. А. *Статистические функции распределения*. М.: Наука, 1966. 356 с.
36. Годунов С. К., Рябенский В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию*. М.: Наука, 1977. 400 с.
37. Potter D. *Computational Physics*. London: John Wiley & Sons, 1973. xi+304 pp.
38. Hockney R. W., Eastwood J. W. *Computer Simulation Using Particles*. Bristol, Philadelphia: Adam Hilger, 1988. xxi+540 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780367806934>.
39. Алифанов О. М., Черепанов В. В. *Методы исследования и прогнозирования свойств высокопористых теплозащитных материалов*. М.: МАИ, 2014. 264 с.
40. Черепанов В. В. О решении некоторых нелинейных эллиптических уравнений для тепловых приложений // *Тепл. процессы в техн.*, 2024. Т. 16, № 2. С. 55–67. EDN: CSHXIN.

MSC: 76X05, 82D10, 35Q83

Modeling the perturbation zone of a rarefied multicomponent low-temperature plasma by a stationary symmetric body

V. V. Cherepanov

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

The paper presents a mathematical model of self-consistent relaxation in a perturbed region, based on the nonlinear Vlasov–Poisson system, which describes the interaction of a stationary absorbing charged conductor (of spherical or cylindrical geometry) with a free-molecular multicomponent low-temperature plasma. The high dimensionality of kinetic equations posed significant challenges for numerical implementation. To overcome these, we developed a system of curvilinear coordinates with nonholonomic constraints that reduces the phase volume of the problem; the derivation of the kinetic equation form in this coordinate system is provided. The employed numerical simulation method is described in detail.

The obtained results not only validate the adequacy of the proposed model and the correctness of numerical algorithms implementation, but also demonstrate substantial practical relevance. The kinetic nature of the model enables detailed investigation of plasma state and self-consistent electric field in the near-surface region. Specifically, for the case of a spherical body in three-component plasma, we demonstrate significant nonequilibrium in particle distribution within the perturbed zone and reveal characteristic features of spatial distribution and dynamics for particles with different charge signs.

Keywords: rarefied plasma, charged ball, disturbed zone, phase space, non-holonomic coordinates, self-consistent field, distribution function, macroparameters, evolution.

Received: 10th February, 2025 / Revised: 23rd July, 2025 /

Accepted: 4th August, 2025 / First online: 12th August, 2025

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Cherepanov V. V. Modeling the perturbation zone of a rarefied multicomponent low-temperature plasma by a stationary symmetric body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 516–537. EDN: NKWTP. DOI: 10.14498/vsgtu2153 (In Russian).

Author's Details:

Valery V. Cherepanov  <https://orcid.org/0000-0003-2733-752X>

Dr. Tech. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Physics; e-mail: vvcherepanov@yandex.ru

Competing interests. The author declares no competing interests regarding this publication.

Author contribution and responsibility. The author bears full responsibility for the content and preparation of the final manuscript version. The final manuscript version has been approved by the author.

Funding. This research was supported by state budget funding.

Acknowledgments. The author expresses gratitude to the reviewers for their thorough evaluation of the work, valuable comments, and constructive suggestions.

References

1. Morfill G. E., Ivlev A. V. Complex plasmas: An interdisciplinary research field, *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, no. 4, pp. 1353–1404. EDN: MYCKIN. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.1353>.
2. Kuznetsov I. A., Saveliev A. A., Rasipuram S., et al. Development of active porous medium filters on plasma textiles, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1453, pp. 265–270. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4711186>.
3. Giddey S., Badwal S. P. S., Kulkarni A., Munnings C. A. A comprehensive review of direct carbon fuel cell technology, *Prog. Energy Combust. Sci.*, 2012, vol. 38, no. 3, pp. 360–399. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pecs.2012.01.003>.
4. Thissen H. Plasma-based surface modification for the control of biointerfacial interactions, In: *Biosynthetic Polymers for Medical Applications*, Woodhead Publishing Series in Biomaterials; eds. L. Poole-Warren, P. Martens, R. Green. Amsterdam, Elsevier, 2016, pp. 129–144. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-105-4.00005-5>.
5. Gay-Mimbrera J., Garcia M. C., Isla-Tejera B., et al. Clinical and biological principles of cold atmospheric plasma application in skin cancer, *Adv. Ther.*, 2016, vol. 33, no. 6, pp. 894–909. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12325-016-0338-1>.
6. Fayrushin I. I., Dautov I. G., Kashapov N. F. Distribution of potential and concentration of electrons in low-temperature plasma with hollow microparticles, *Int. J. Env. Sci. Technol.*, 2017, vol. 14, pp. 2555–2560. EDN: XNOAWS. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13762-016-1054-8>.
7. Bronold F. X., Rasek K., Fehske H. Electron microphysics at plasma-solid interfaces, *J. Appl. Phys.*, 2020, vol. 128, 180908, arXiv: 2011.06821 [physics.plasm-ph]. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0027406>.
8. Freidman P. C., Fridman A. Using cold plasma to treat warts in children: A case series, *Pediatr. Dermatol.*, 2020, vol. 37, no. 4, pp. 706–709. DOI: <https://doi.org/10.1111/pde.14180>.
9. Kozhevnikov V. Yu., Kozirev A. V., Kokovin A. O., Semeniuk N. S. Kinetic model of vacuum plasma expansion in a cylindrical gap, *Plasma Phys. Rep.*, 2023, vol. 49, no. 11, pp. 1350–1357. EDN: TEDTAW. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1063780x23601256>.
10. Adamovich I., Agarwal S., Ahedo E., et al. The 2022 Plasma Roadmap: low temperature plasma science and technology, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2022, vol. 55, no. 37, 373001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/ac5e1c>.
11. Sanmartin J. R., Estes R. D. The orbital-motion-limited regime of cylindrical Langmuir probes, *Phys. Plasm.*, 1999, vol. 6, no. 1, pp. 395–405. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.873293>.
12. Merlino R. L. Experimental investigations of dusty plasmas, *AIP Conf. Proc.*, 2005, vol. 799, pp. 3–11. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2134567>.
13. Thomas E. Dust clouds in DC-generated dusty plasmas: Transport, waves, and three-dimensional effects, *Contr. Plasm. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 4–5, pp. 316–345. DOI: <https://doi.org/10.1002/ctpp.200910029>.

14. Chung S. S. M. FDTD simulations on radar cross section of metal cone and plasma covered metal cone, *Vacuum*, 2012, vol. 86, no. 7, pp. 970–984. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2011.08.016>.
15. Lev D., Myers R. M., Lemmer K. M., et al. The technological and commercial expansion of electric propulsion, *Acta Astro.*, 2019, vol. 159, pp. 213–227. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.03.058>.
16. Timofeev A. V., Nikolaev V. S. Effect of glow discharge parameters on the mean inter-particle distance in dusty plasma structures in the cryogenic-room temperature range, *J. Exp. Theor. Phys.*, 2019, vol. 128, pp. 312–322. EDN: XHPLLW. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1063776119010175>.
17. Ohkawa Y., Kawamoto S., Okumura T., et al. Review of KITE – Electrodynamic tender experiment on the Japanese H-II Transfer Vehicle, *Acta Astro.*, 2020, vol. 177, pp. 750–758. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.03.014>.
18. Golub A. P., Popel S. I. Non-stationary processes during the formation of dusty plasma at the surface of Deimos, the satellite of Mars, *Plasma Phys. Rep.*, 2021, vol. 47, no. 8, pp. 826–831. EDN: TYOEJP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063780X21070084>.
19. Vaulina O. S. Redistribution of kinetic energy in three-dimensional clouds of charged dust grains, *Plasma Phys. Rep.*, 2022, vol. 48, no. 1, pp. 33–36. EDN: OIYFLV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063780X22010123>.
20. Ignatov A. M. Effect of nonreciprocal forces on the stability of dust clusters, *Plasma Phys. Rep.*, 2021, vol. 47, no. 5, pp. 410–418. EDN: EPHPXO. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063780X21050020>.
21. Popel S. I., Zelenyi L. M., Zakharov A. V. Dusty plasma in the solar system: Celestial bodies without atmosphere, *Plasma Phys. Rep.*, 2023, vol. 49, no. 8, pp. 1006–1013. EDN: DMNBYE. DOI: <https://doi.org/10.1134/s1063780x23600780>.
22. Hartzell C. M., Bellan P., Bodewits D., et al. Payload concepts for investigations of electrostatic dust motion on the lunar surface, *Acta Astro.*, 2023, vol. 207, pp. 89–105. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2023.02.032>.
23. Chapman S., Cowling T. G. *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge, Cambridge Univ., 1991, 423 pp.
24. Silin V. P. *Vvedeniye v kineticheskuyu teoriyu gazov* [Introduction to Kinetic Theory of Gases]. Moscow, Nauka, 1971, 338 pp. (In Russian)
25. Ecker G. *Theory of Fully Ionized Plasmas*. New York, London, Academic Press, 1972, xv+344 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10607-1>.
26. Artsimovich A. A., Sagdeev R. Z. *Fizika plazmy dlya fizikov* [Plasma Physics for Physicists]. Moscow, Atomizdat, 1979, 320 pp. (In Russian)
27. Alpert Ya. L., Gurevich A. V., Pitaevskii L. P. *Iskusstvennye sputniki v razrezhennoi plazme* [Artificial Satellites in Rarefied Plasma]. Moscow, Nauka, 1964, 382 pp. (In Russian). EDN: ZTCPTT.
28. Al'pert Ya. L. *Volny i iskusstvennye tela v prizemnoi plazme* [Waves and Artificial Bodies in Near-Earth Plasma]. Moscow, Nauka, 1974, 216 pp. (In Russian)
29. Alekseev B. V., Kotelnikov V. A., Cherepanov V. V. Electrostatic probe in multicomponent plasma, *Teplofiz. Vys. Temp.*, 1984, vol. 22, no. 2, pp. 395–396 (In Russian).
30. Zhdanov S. K., Kurnaev V. A., Romanovskii M. K., Tsvetkov I. V. *Osnovy fizicheskikh protsessov v plazme i plazmennyykh ustanovkakh* [Fundamentals of Physical Processes in Plasma and Plasma Devices]. Moscow, MEPhI, 2007, 368 pp. (In Russian)
31. Vlasov A. A. The vibrational properties of an electron gas, *Sov. Phys. Usp.*, 1968, vol. 10, no. 6, pp. 721–733. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1968v010n06ABEH003709>.
32. Pegoraro F., Califano F., Manfredi G., Morrison P. J. Theory and applications of the Vlasov equation, *Eur. Phys. J. D*, 2015, vol. 69, 68. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2015-60082-y>.

33. Vedenyapin V. V., Kogtenev D. A. On Derivation and Properties of Vlasov-Type Equations, *Keldysh Institute preprints*, 2023, 020 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2023-20>.
34. Skubachevskii A. L. Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field, *Russ. Math. Surv.*, 2014, vol. 69, no. 2, pp. 291–330. EDN: UELRWZ. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM2014v069n02ABEH004889>.
35. Vlasov A. A. *Statisticheskie funktsii raspredeleniia* [Statistical Distribution Functions]. Moscow, Nauka, 1966, 356 pp. (In Russian)
36. Godunov S. K., Ryaben’kii V. S. *Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu* [Difference Schemes: Introduction to the Theory]. Moscow, Nauka, 1977, 400 pp. (In Russian)
37. Potter D. *Computational Physics*. London, John Wiley & Sons, 1973, xi+304 pp.
38. Hockney R. W., Eastwood J. W. *Computer Simulation Using Particles*. Bristol, Philadelphia, Adam Hilger, 1988, xxi+540 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780367806934>.
39. Alifanov O. M., Cherepanov V. V. *Metody issledovaniya i prognozirovaniya svoistv vysokoporistyykh teplozashchitnykh materialov* [Methods for Studying and Predicting Properties of Highly Porous Thermal Protection Materials]. Moscow, Moscow Aviation Inst., 2014, 264 pp. (In Russian)
40. Cherepanov V. V. On the solution of some nonlinear elliptic equation for thermal applications, *Tepl. Protsessy Tekhn.*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 55–67 (In Russian). EDN: CSHXIN.



УДК 519.115

Комбинаторный анализ n -размерной k -цикловой подстановки с ограниченными размерами циклов

Н. Ю. Энатская

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова,
Россия, 123458, Москва, ул. Таллинская, 34.

Аннотация

Рассматриваются комбинаторные схемы подстановок с различными ограничениями на размеры циклов: нижним, верхним и двусторонним.

Для предложенных схем решаются задачи перечислительной комбинаторики: определяются числа исходов, строятся их прямые нумерованные перечисления, решаются прямые и обратные задачи нумерации (устанавливаются взаимно-однозначные соответствия между номерами и видами исходов), определяются вероятностные распределения на множествах исходов и предлагается универсальная процедура их моделирования с заданными вероятностями.

Все исследования проводятся авторским перечислительным методом (ПМ), основанным на построении случайного процесса итерационного формирования и неповторного нумерованного перечисления исходов схемы. Исходы первой итерации процесса перечисления всех допустимых по условиям ограничений составов размеров циклов определяются через схемы размещения неразличимых частиц по различным ячейкам при тех же ограничениях. В терминах размещения в наших схемах различные частицы размещаются по неразличимым ячейкам с учетом их взаимных порядков при фиксированном начальном элементе. Последующие итерации учитывают эти особенности.

Наряду с непосредственным исследованием схем по направлениям ПМ предлагается получение части результатов путем их пересчета из результатов аналогичного анализа более общих, ранее изученных схем с меньшими ограничениями на значения рассматриваемых характеристик.

Ключевые слова: схема подстановок, размеры циклов, задача нумерации, моделирование.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Энотика Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ n -размерной k -цикловой подстановки с ограниченными размерами циклов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 3. С. 538–553. EDN: MDNXJG. DOI: 10.14498/vsgtu2171.

Сведения об авторе

Наталья Юрьевна Энатская <https://orcid.org/0000-0003-1241-7543>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; деп. прикладной математики;
e-mail: nat1943@mail.ru

Получение: 19 марта 2025 г. / Исправление: 24 июля 2025 г. /

Принятие: 7 августа 2025 г. / Публикация онлайн: 11 сентября 2025 г.

Введение. Асимптотические исследования случайных подстановок и их цикловой структуры широко представлены в научной литературе, например, в работах [1–6]. В этих исследованиях вводятся характеристики, связанные с цикловой структурой подстановки, предлагаются их обобщенные параметрические модели, изучается асимптотическое поведение элементов вариационного ряда длин циклов, находятся предельные распределения и моменты их крайних значений. Используется связь циклической структуры подстановки со схемой размещения частиц по ячейкам.

В настоящей работе проводится доасимптотический анализ n -мерных случайных подстановок с k циклами в условиях различных ограничений на размеры циклов во всех направлениях перечислительного метода. Рассмотрение этих схем продолжает авторские исследования по перечислительным методам для подстановок с различными ограничениями, представленные, например, в [7, 8].

Подстановки с различными ограничениями на их цикловую структуру представляют собой один из основных объектов исследования комбинаторики и находят широкое применение в фундаментальной математике. Методы комбинаторного анализа подстановок с ограничением на циклы широко используются в приложениях, где важна структура дискретных преобразований: в криптографии (в шифрах на основе подстановок), в теории вероятностей и статистике (при моделировании случайных процессов), в теории графов (при построении графов подстановок с большим обхватом) и в теории кодирования (где требуется отсутствие коротких циклов). Кроме того, результаты исследования по перечислительным методам все большего разнообразия комбинаторных схем приводят к накоплению стандартов для самообучаемости методов перечисления. Это расширяет возможности использования нейронных сетей (см. [9–11]) при конструировании и анализе новых комбинаторных схем.

Анализ схемы проводится на основании построения процедуры бесповторного нумерованного перечисления ее исходов. Наряду с данным описанием схемы используется ее эквивалентная интерпретация в терминах размещения n различных частиц по k неразличимым ячейкам с учетом их порядка в каждой ячейке, начиная, например, с частицы с наименьшим номером. Здесь используется соответствие понятий: размерности подстановки — числу частиц, количества и размеров циклов — числу ячеек и уровням их заполнения, порядков отображений в циклах подстановки — указанным порядкам частиц в ячейках. Различные ограничения размеров s циклов в подстановках (или уровней заполнения ячеек) будем называть нижним ограничением $s \geq s_1$, верхним — $s \leq s_2$ и двусторонним — $s_1 \leq s \leq s_2$ соответственно в схемах A , B , C . Вид исходов схем — составы элементов циклов подстановки без учета порядка циклов и с учетом порядка отображений элементов в каждом цикле.

Различия комбинаторного анализа этих схем в условиях разных ограничений на размеры циклов состоят в различной организации и результатах их ре-

ализаций при неповторном переборе допустимых наборов размеров циклов. Они дают начальные предсостояния первых этапов процессов прямых перечислений исходов схем и будут рассмотрены отдельно. Дальнейший анализ схем по запланированным направлениям принципиально совпадает и будет представлен общим описанием.

В дальнейшем номера элементов подстановки для краткости будем называть элементами.

1. Основные определения, обозначения и понятия. В доасимптотических условиях значений параметров комбинаторной схемы при каждом заданном ограничении на размеры циклов необходимо построить вероятностную модель неповторного нумерованного перечисления ее исходов и провести их анализ по всем направлениям перечислительного метода.

Основные определения, обозначения и понятия:

- **итерация** — шаг перехода в графе перечисления исходов схемы к следующему этапу (шагу) их перечисления;
- **ПМ** — перечислительный метод исследования моделей по приведенным в аннотации направлениям; он состоит в построении вероятностных моделей на формирующих исходы итерационных случайных процессах поединичного добавления этапов перечисления исходов ранее изученных схем с управляемыми (через вероятности итерационных переходов) вероятностными распределениями их исходов;
- **ЗН** — задача нумерации по установлению взаимно-однозначного соответствия между всеми номерами и видами исходов схемы;
- **ПЗН** — прямая задача нумерации, состоящая в нахождении вида исхода схемы по его номеру;
- **ОЗН** — обратная задача нумерации, состоящая в нахождении номера исхода схемы по его виду;
- **траектория исхода** — последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;
- **пучок** в графе процесса — совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;
- **размер пучка** на каждой итерации — число переходов из каждого исхода итерации;
- **пучковая структура графа** — перечисление размеров пучков всех итераций;
- **УМ** — универсальный (единый) метод моделирования исходов схемы, состоящий в разыгрывании одним случайным числом его номера со сформированным вероятностным распределением исходов схемы и получении его смоделированного вида по результату решения ПЗН.

2. Вспомогательные результаты. Приведем краткие сведения об используемых далее приемах анализа комбинаторных схем (со своими обозначениями), а на результаты анализа простейших основных схем приведем ссылки на соответствующие публикации.

Кроме этого, получим и докажем в леммах отдельные требуемые далее результаты, в основном относящиеся к анализу схем размещения неразличимых частиц по различным ячейкам.

2.1. Перечислительный метод (ПМ). В основе доасимптотического

анализа рассматриваемых схем лежит ПМ (см. [12]), суть которого состоит в организации получения качественной информации об исходах схемы и переводе ее в количественную — результатов ее анализа в доасимптотической области изменения ее параметров. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы путем последовательного поединичного добавления элементов схемы до заданного значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Перевод качественной информации о видах всех исходов схемы обеспечивают три инструмента. Первый — это метод графов (МГ), который описывает графическое представление итерационного процесса перечисления исходов. Второй — задача нумерации (ЗН), устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между видами исходов и их номерами. Третий — универсальное моделирование (УМ) исходов, которое предоставляет единый прием их разыгрывания: номера исходов разыгрываются, а их виды определяются по решению задачи нумерации с учетом специфики схемы. Одним из важных приемов ПМ для получения новых результатов доасимптотического анализа комбинаторных схем является операция по перечислению (ОПП), введение которой дает возможность вычисления характеристик схем, зависящих от видов предсостояний исходов при их формировании итерационным случайным процессом как функций от них по перечислению исходов итерации получения этих предсостояний.

Целью применения ПМ является изучение схемы по указанным в аннотации направлениям, среди которых для моделирования исходов схемы предложен общий подход, названный универсальным моделированием (УМ), использующим результаты всех направлений анализа схемы по ПМ.

2.2. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД). Под действиями схемы понимается реализация исходов итераций при последовательном добавлении этапов перечисления всех промежуточных и итоговых исходов схемы.

Схема ОПД с приводимыми здесь результатами анализа из [12] возникает, когда каждому следующему действию (итерации) подвергаются исходы предыдущего действия, и числа исходов каждого следующего действия могут быть неодинаковыми, т. е. зависят не только от характера действия, но и от вида предыдущего исхода. Результатом этого являются, возможно, разные размеры пучков внутри итераций в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему.

При анализе схемы ОПД считаем известными результаты всех направлений исследования ПМ составляющих ее комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i -е из которых ($i = \overline{1, k}$) совершается $N^{(i)}$ способами. Число пучков каждой итерации равно числу исходов предыдущей итерации. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\bar{d}^{(k)} = (d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_{N^{(k-1)}}^{(k)})$, т. е. общее число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N^{(0)} = 1$:

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий с обозначениями i — номер действия, а j_i — номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из k действий при известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 1. *Совершается k действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории τ в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до k -й итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i ($i = \overline{1, k}$):*

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)},$$

где все пучковые структуры действий $\bar{d}^{(i)}$ заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max \left\{ t : \sum_{l=1}^t d_l^{(k)} = A_k \leq N_*^{(k)} \right\},$$

где $\delta = 0$ при $A_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $A_k < N_*^{(k)}$.

По решенной ЗН для всех действий находим по $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

ТЕОРЕМА 2. *Совершается k действий и задан вид исхода $R_*^{(k)} = \{j_1, \dots, j_k\}$. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = k$, где $i = \overline{1, k}$:*

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} d_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

Теоремы 1 и 2 доказаны в [12, п. 1.9].

2.3. Перечисление и численность исходов схемы размещения n неразличимых частиц по k различным ячейкам с нижним ограничением уровня заполнения ячеек.

ЛЕММА 1. *Число исходов схемы $N_1 = N_1(k, n, s_1) = C_{k+n-ks_1-1}^{k-1}$.*

Доказательство. Для перечисления исходов этой схемы с данным нижним ограничением ($s \geq s_1$) предварительно положим во все ячейки по s_1 частиц, а остальные $(n - ks_1)$ частиц разместим по k ячейкам по схеме сочетаний с повторением (следующей из схемы сочетаний (см. [12, п. 1.3]) с числом исходов $C_{k+n-ks_1-1}^{k-1}$. Далее переводим эти исходы схемы сочетаний в уровни заполнения ячеек в нашей схеме (как длины серий подряд идущих невыбранных по схеме сочетаний $k - 1$ из $k + n - ks_1 - 1$ номеров элементов). Увеличивая каждый полученный уровень заполнения на s_1 , получаем в том же количестве $N_1 = C_{k+n-ks_1-1}^{k-1}$ все исходы схемы, что и утверждалось. $\square$

2.4. Перечисление и численности схемы размещений n неразличимых частиц по k различным ячейкам с верхним ограничением уровня заполнения ячеек. Для перечисления исходов в данной схеме сочетаний с повторениями и с верхним ограничением $s \leq s_2$ будем использовать следующую интерпретацию. Имеется ряд из $m = k + n - 1$ мест. На этих местах расположены n частиц и $(k - 1)$ разделяющая перегородка $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{k-1})$, которая расставляется всеми возможными способами так, чтобы образовать k ячеек, содержащих не более s_2 частиц каждая. В терминах наборов уровней заполнения ячеек получим их в порядке ячеек по формулам $d_1 = t_1 - 1$; $d_k = k + n - 1 - t_{k-1}$ и $d_i = t_i - t_{i-1} - 1$ при $i = \overline{2, k-1}$, где $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k)$ — вектор уровней заполнения ячеек в их порядке.

Выбор мест этих перегородок $\bar{t}$ определен следующей леммой.

ЛЕММА 2. Диапазоны варьирования возможных вариантов последовательных мест установки внутренних перегородок определяются для всех $i = \overline{1, k-1}$ из рекуррентного соотношения

$$l_i = \max(t_{i-1} + 1, n + i - s_2(k - i)) \leq t_i \leq \min(t_{i-1} + s_2 + 1, n + i) = L_i. \quad (1)$$

Доказательство. Для нахождения мест внутренних перегородок $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{k-1})$ должен выполняться ряд требований:

1) разности между местами границ должны быть не более $s_2 + 1$, откуда

$$t_i \leq t_{i-1} + s_2 + 1; \quad (2)$$

2) правее значения t_i среди m мест поместятся остальные $k - 1 - i$ границ, откуда

$$t_i \leq m - (k - 1 - i) = n + i; \quad (3)$$

3) значение следующего элемента больше предыдущего, откуда

$$t_i \geq t_{i-1} + 1; \quad (4)$$

4) правее значения t_i среди m мест окажется мест не более, чем для $k - 1 - i$ остальных границ и $s_2(k - i)$ максимально допустимого в остальных ячейках числа частиц, откуда

$$t_i \geq m - (k - 1 - i) - s_2(k - i) = n + i - s_2(k - i). \quad (5)$$

Теперь, объединяя соотношения (2) и (3) в верхнюю границу для t_i , а (4) и (5) — в нижнюю границу для t_i , получаем при $i = \overline{1, k-1}$ доказываемую формулу (1) диапазона изменения значений для t_i . Лемма доказана. $\square$

Число исходов схемы сочетаний с повторением с данным верхним ограничением $N_2 = N_2(k, n, s_2)$ в графе их перечисления определяется суммой размеров пучков предпоследней итерации. Это при последовательном переборе мест установления границ между ячейками соответствует сумме размеров диапазонов варьирования мест t_{k-1} , задающих размеры пучков (в графе перечисления исходов схемы) для значений уровней заполнения последней ячейки.

2.5. Перечисление и численности схемы размещений n неразличимых частиц по k различным ячейкам с двусторонним ограничением уровня заполнения ячеек.

ЛЕММА 3. Число исходов схемы

$$N_3 = N_3(k, n, s_1, s_2) = N_2(k, n - ks_1, s_2 - s_1).$$

Доказательство. Для перечисления исходов этой схемы организуем сначала выполнение данного нижнего ограничения на уровне заполнения ячеек $s \geq s_1$ путем предварительного помещения во все k ячеек по s_1 частиц одним способом. Остальные $(n - ks_1)$ частиц разместим по всем k ячейкам, как в п. 2.4, с их данным верхним ограничением для уровней заполнения ячеек $s \leq (s_2 - s_1)$ числом способов $N_2(k, n - ks_1, s_2 - s_1)$, откуда следует утверждение леммы. $\square$

2.6. Число одноцикловых подстановок данного порядка.

ЛЕММА 4. Количество подстановок n -го порядка, имеющих ровно один цикл, равно $(n - 1)!$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что кроме матричной формы, любая одноцикловая подстановка может быть записана в виде последовательности n отображений ее элементов с замыканием, т. е. последний элемент отображается в первый. А количество таких отображений определяется числом перестановок $(n - 1)$ -го элемента начиная с любого фиксированного, например, с наименьшим номером, что и доказывает утверждение леммы. $\square$

2.7. Взаимный пересчет разных форм записи подстановок. Взаимный перевод нижней строки матричной формы записи подстановки и цикловой — порядка отображений ее элементов производится по очевидным правилам.

Правило 1 (перевод порядка отображений элементов в перестановку нижней строки подстановки). Каждый элемент отображения ставится в нижнюю строку подстановки на место с номером своего предшественника в отображении элемента.

Правило 2 (перевод нижней строки подстановки в порядок отображений ее элементов в подстановке). В отображение начиная с 1 ставится подряд каждый элемент нижней строки подстановки с места с номером последнего найденного в отображении элемента.

ПРИМЕР 1. Подстановка задана отображением ее элементов $(1, 4, 3, 5, 2)$. Тогда по правилу 1 нижняя строка подстановки в матричной форме имеет вид $(4, 1, 5, 3, 2)$, что проверяется для отображения непосредственно по подстановке с ее найденной нижней строкой.

ПРИМЕР 2. Подстановка задана в матричной форме своей нижней строкой $(4, 1, 5, 3, 2)$. Тогда по правилу 2 отображение ее элементов имеет вид $(1, 4, 3, 5, 2)$, что проверяется для отображения непосредственно по подстановке с ее данной нижней строкой.

3. Общий вид и общее перечисление исходов схемы с любыми данными ограничениями на уровни заполнения ячеек. Изучаемая (наша) схема подстановок данной структуры с данными ограничениями в терминах размещения частиц по ячейкам соответствует размещению n различных частиц по k неразличимым ячейкам с различными порядками частиц в каждой ячейке начиная с определенной частицы, например, с минимальным номером.

Процесс перечисления исходов нашей схемы будем получать из результатов перечисления исходов **схем*** (размещения неразличимых частиц по различным ячейкам пп. 2.3–2.5 с соответствующим ограничением на уровни заполнения ячеек). При этом из результатов исходов **схем*** в нашей схеме организуем ее отличия:

- **различимость частиц** — заменой уровней заполнения ячеек перечислением их составов номеров частиц по схеме перестановок с повторением (см. [12, п. 1.2]);
- **неразличимость ячеек** — перечислением их составов номеров частиц в каждой ячейке в заранее определенном порядке (например, по возрастанию их уровней заполнения, а при совпадающих уровнях заполнения — в порядке роста в них минимальных номеров частиц);
- **различимость взаимных порядков** перечисления частиц в ячейке — перечислением их по схеме перестановок (см. [12]) начиная с частицы, например, с минимальным номером.

Виды исходов в схемах A, B, C , являющихся видами исходов нашей схемы в условиях каждого из данных ограничений в них, представляем каждый последовательностью k описанных выше составов номеров частиц — элементов подстановки в порядках их отображений в количествах размеров циклов.

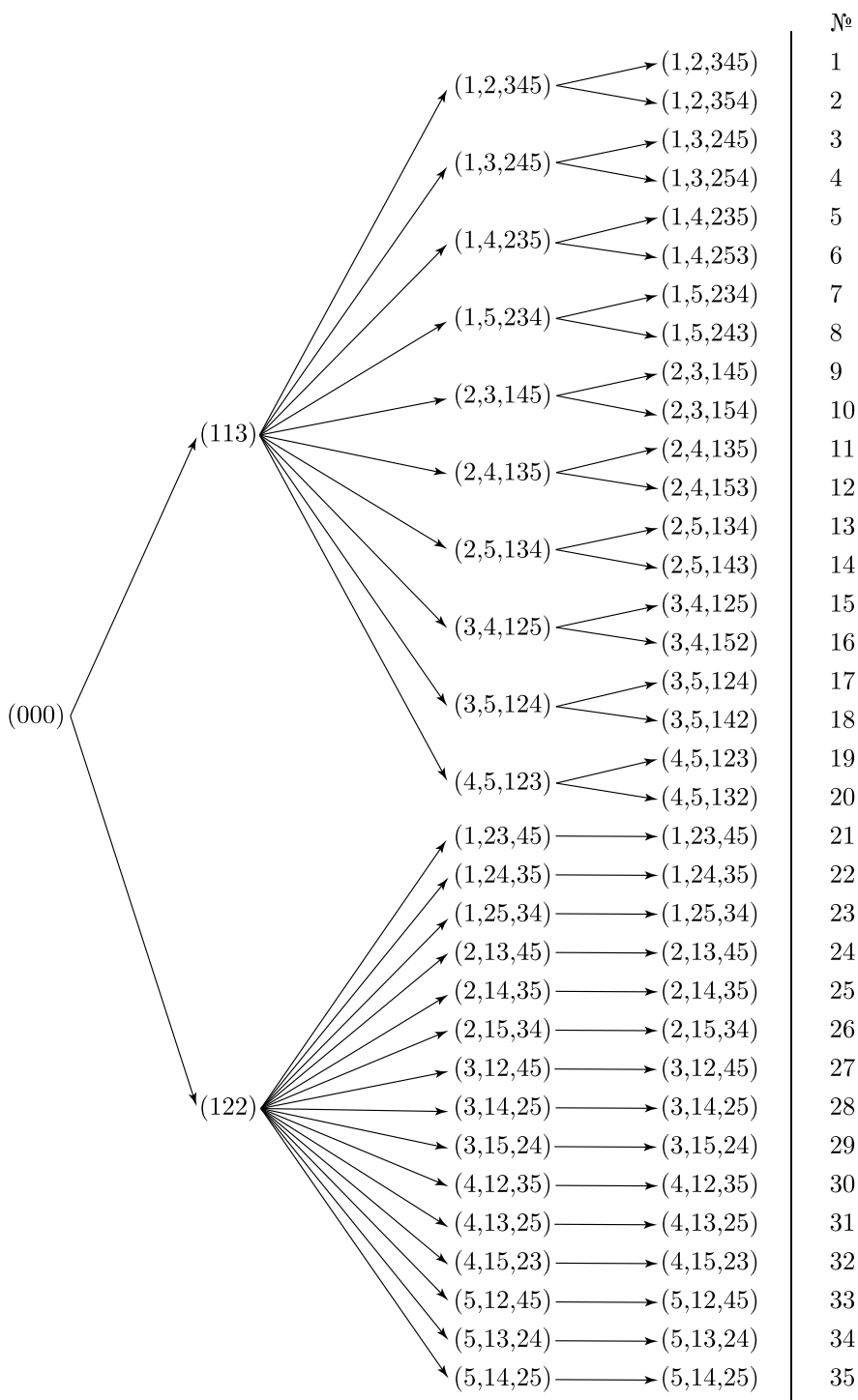
Прямое неповторное перечисление исходов схемы производится по схеме ОПД (см. п. 2.2), т. к. количество ее итоговых исходов зависит от состава размеров циклов. Реализация действий пошагово детализируется и представляется нижеследующим алгоритмом с известными из пп. 2.3–2.5 результатами для **схем*** в виде $\{\bar{d}\}$ (в обозначении п. 2.4) начальных последовательностей уровней заполнения ячеек в неубывающем порядке в нашей схеме.

АЛГОРИТМ

1. Для учета *неразличимости ячеек* перечисляем возможные (по пп. 2.3–2.5) составы уровней заполнения ячеек в указанном выше порядке с отбраковкой повторов.
2. Для учета *различимости частиц* по исходам шага 1 в их порядке по схеме перестановки с повторением перечисляем составы нумерованных частиц в ячейках.
3. Для учета *различимости взаимного порядка частиц* в каждой ячейке производим в ней все перестановки номеров частиц начиная с минимального.

На примере покажем перечисление исходов схемы с пояснением структуры и характеристик соответствующего графа (см. рисунок).

ПРИМЕР 3. Пусть в условиях схемы дано $n = 5, k = 3, s = s_1 = 1$. Тогда, очевидно, (или по п. 2.3) в первой итерации имеем $\{\bar{d}\} = \{(113), (122)\}$. На второй итерации при заданных наборах уровней заполнения ячеек в указанных на первой итерации порядках перечисляем составы номеров частиц



Граф перечисления исходов схемы из примера 3
 [The graph of enumeration of the outcomes of the scheme in Example 3]

в них. На третьей итерации в каждой ячейке перечисляем перестановки их частиц начиная с частицы с наименьшим номером.

Граф итерационного перечисления исходов по алгоритму представлен на рисунке с пучковой структурой по итерациям

$$(2), \quad (10, 15), \quad (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

размерами пучков по итерациям. Число исходов N схемы или число исходов 3-й итерации непосредственно по графу равно $20 + 15 = 35$ и совпадает с суммой размеров пучков предпоследней итерации: $2 \cdot 10 + 1 \cdot 15 = 35$.

4. Числа исходов схем A, B, C . Различие численностей исходов схем A, B, C определяется разными начальными предсостояниями, отражающими заданные ограничения в них и представляющими свои наборы уровней заполнения ячеек

$$\{\bar{d}\} = \{(d_1, \dots, d_i, \dots, d_k)\}$$

с маркировками по их совпадениям $\{\bar{\mu}\} = \{(\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_q)\}$, где $q, q \leq k$, — число разных уровней заполнения в $\bar{d}$. В соответствии с общим алгоритмом перечисления исходов схем A, B, C числа исходов в них после получения разных предсостояний описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. Числа N исходов схем A, B, C при исходных в каждой схеме состояниях определяются по формуле

$$N = \sum_{\{\bar{d}\}} \frac{n!}{\prod_{i=1}^k d_i \prod_{j=1}^q \mu_j!}. \quad (6)$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из процедуры перечисления исходов схемы по алгоритму, где

- 1) число всех ее исходов вычисляется ОПП — операцией суммы по перечислению (см. п. 3 и [12, п. 1]) начальных предсостояний схемы $\{\bar{d}\}$. А каждое слагаемое должно учитывать:
- 2) число делений элементов подстановки на циклы заданных в $\bar{d}$ размеров в одном указанном в п. 3 порядке по схеме перестановок с повторением (см. [12, п. 1.7]), уменьшенным в число раз неразличимых взаимных порядков групп циклов совпадающих размеров (т. е. в произведение факториалов маркировок размеров циклов) в количестве

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k d_i! \prod_{j=1}^q \mu_j!};$$

- 3) числа взаимных порядков элементов в циклах начиная с минимального, т. е. (по п. 2.6) в количестве $\prod_{i=1}^k (d_i - 1)!$ при каждом d_i -м размере i -го цикла. А это (по правилу умножения исходов) после очевидного сокращения:

$$N = \sum_{\{\bar{d}\}} \frac{n! \prod_{i=1}^k (d_i - 1)!}{\prod_{i=1}^k d_i! \prod_{j=1}^q \mu_j!}$$

приводит к формуле (6) по всем $\{\bar{d}\}$ при данном ограничении. Теорема доказана. □

Найдем число исходов в примере 1 по (6) и сравним с результатом по графу. По (6) $N = 5!/1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2! + 5!/1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2! = 35$, что совпадает с результатом по графу на рисунке.

5. Пучковая структура графа перечисления исходов схемы. Настоящее исследование дает следующие возможности:

- 1) вычисление числа исходов схемы по процедуре бесповторного перечисления ее исходов без построения графа как суммы размеров пучков предпоследней итерации;
- 2) решение ЗН для исходов схемы.

В наших схемах A , B , C в соответствии с алгоритмом бесповторного перечисления исходов схемы получаем следующее:

- размер пучка начальной итерации равен числу допустимых (возможных) составов $\{d\}$ — размеров циклов в схеме;
- для каждого состава размеров циклов в исходе начальной итерации последовательные размеры пучков первой итерации — числа различных делений элементов подстановки на циклы заданных размеров

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k d_i \prod_{j=1}^q \mu_j!};$$

- для каждого исхода первой итерации на предпоследней второй итерации получаем последовательные пучки размерами численностей перестановок элементов в количествах размеров циклов минус 1 (кроме стоящих на первых местах циклов элементов с минимальными среди них номерами), равных их факториалам по лемме 4. (В примере 3 пучковая структура графа найдена.)

6. Задача нумерации для исходов схемы. Рассматриваемая схема представляет собой схему ОПД, которыми являются приведенные выше действия по перечислению ее исходов в алгоритме, где действия совершаются числами способов, определяемых пучковой структурой графа перечисления исходов схемы.

Результаты решения ЗН приведены в п. 2.2, и на i -й итерации будем обозначать через $N^{(i)}$ — номер исхода и $R^{(i)}$ — вид исхода.

Покажем решение прямой и обратной ЗН (ПЗН и ОЗН) на примере.

Пример 4. Пусть, как и в примере 3, $n = 5$, $k = 3$, $s = s_1 = 1$ с приведенной там пучковой структуре графа перечисления исходов схемы с обозначениями в i -й итерации номеров и видов исходов через $N^{(i)}$, $R^{(i)}$ и номерам исходов в содержащих их пучках — через j_i .

Прямая задача нумерации. Дан номер исхода $N^* = N^{(3)} = 23$, найти его вид $R^* = R^{(3)}$.

Приведем решение ПЗН по формулам теоремы 1:

$$N^{(2)} = 13, \text{ т. к. } 2 \cdot 10 + 1 + 1 + 1 = 23, \delta = 1; j_3 = 23 - 22 = 1;$$

$$N^{(1)} = 1 + 1 = 2, \text{ т. к. } 10 < 13, \delta = 0; j_2 = 13 - 10 = 3, j_1 = 2.$$

Откуда по результатам решения ПЗН для действий начиная с первой итерации получаем последовательные виды исходов по их итерационным номерам в своих пучках в траектории к итоговому исходу с номером 23: $(1, 2, 2)$, $(1, 25, 34)$, $(1, 25, 34)$, где вид последней итерации — искомый вид исхода $R^{(3)} =$

$(1, 25, 34)$, что совпадает с визуальным результатом по графу (на рисунке $(1, 2, 2)$ обозначен через (122)).

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НУМЕРАЦИИ. Дан вид исхода $R^* = R^{(3)} = (1, 25, 34)$, найти его номер $N^* = N^{(3)}$.

Из данного вида итогового исхода схемы $R^* = R^{(3)} = (1, 25, 34)$ с известной (из примера 3) пучковой структурой графа перечисления исходов схемы следует, что для $R^{(2)} = (1, 25, 34)$, $R^{(1)} = (1, 2, 2)$, $j_1 = 2$, $j_2 = 3$, $j_3 = 1$. Тогда по теореме 2:

$$N^{(1)} = j_1 = 2, \quad N^{(2)} = 10(2 - 1) + j_2 = 10 + 3 = 13,$$

$$N^{(3)} = 2 \cdot 10 + 1(3 - 1) + j_3 = 20 + 2 + 1 = 23,$$

что совпадает с визуальным результатом по графу (см. рисунок).

7. Вероятностное распределение исходов схемы. По п. 2.7 предварительно переводим исходы нашей схемы из цикловой формы (в порядке отображений ее элементов) в матричную форму — перестановок нижних строк подстановок.

Для определения вероятностей на множестве исходов нашей схемы строим итерационный граф перечисления исходов схемы перестановок нижних строк подстановок без ограничений с принятыми вероятностями итерационных переходов в ней. Удаляем «лишние» для нашей схемы траектории, не ведущие к ее исходам, с пропорциональным пересчетом вероятностей оставшихся итерационных переходов в графе. Это значит, что в каждой пучке каждой итерации (где суммы переходных вероятностей равны единице) делим их первоначально заданные вероятности (в схеме перестановок без ограничений) на свои суммы вероятностей оставшихся итерационных переходов в пучке нашей изучаемой схемы.

Для определения вероятностей итоговых исходов нашей схемы вычисляем вероятности соответствующих оставшихся траекторий перемножением пересчитанных вероятностей составляющих их итерационных переходов.

8. Моделирование исходов схемы. Для моделирования исходов схемы предлагается использовать УМ, состоящий в разыгрывании случайного номера исхода схемы с его вероятностным распределением, по которому из результата решения ПЗН находится его смоделированный вид.

Для применения УМ в схеме должны быть известны число исходов, их вероятностное распределение, и для исходов должна быть решена ПЗН.

Считаем, что для нашей схемы все эти исследования проведены.

Заключение. В работе проведено комплексное исследование комбинаторных схем подстановок с различными ограничениями на размеры циклов. Разработанный перечислительный метод позволяет единообразно подходить к анализу широкого класса комбинаторных конфигураций, возникающих в задачах дискретной математики и ее приложениях.

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом.

1. Представлен авторский перечислительный метод, позволяющий рассматривать схемы подстановок в случаях разных ограничений на размеры циклов.

2. Исследованы схемы подстановок с ранее не изучаемыми ограничениями на размеры их циклов: верхним, нижним и двусторонним как стандарты для конструирования анализа содержащих их новых комбинаторных схем.
3. При изучении схем используется их интерпретация размещения различных частиц по неразличимым ячейкам с учетом порядка частиц начиная с минимальной в каждой ячейке.
4. Различие анализа схем при разных ограничениях на размеры циклов подстановок проявляется только в проведении разных процедур перечисления их допустимых исходов. А исследования схем по остальным направлениям перечислительного метода проводятся общими для них приемами по обобщенной схеме последовательных действий и алгоритму (см. п. 3).
5. Вероятностные распределения исходов схем определяются по графам из заданных вероятностей итерационных переходов процесса перечисления исходов схем подстановок (соответствующих исходам всех схем перестановок) без ограничений.
6. Моделирование исходов схем предложено проводить в перечислительном методе универсальным моделированием с ранее определенным вероятностным распределением и по результату решения прямой задачи нумерации для исходов каждой изучаемой схемы.

Конкурирующие интересы. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Авторская ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи и одобряет ее к публикации.

Финансирование. Исследование выполнено без привлечения внешнего финансирования.

Библиографический список

1. Goncharov V. L. Sur la distribution des cycles dans les permutations // *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, 1942. vol. 35. pp. 267–269 (in French).
2. Колчин В. Ф. Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок // *Теория вероятн. и ее примен.*, 1971. Т. 16, № 1. С. 67–81.
3. Тимашев А. Н. О распределении числа циклов заданной длины в классе подстановок с известным числом циклов // *Дискрет. матем.*, 2001. Т. 13, № 4. С. 60–72. DOI: <https://doi.org/10.4213/dm310>.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. О случайных подстановках / Тр. по дискр. матем., Т. 5. М.: Физматлит, 2002. С. 73–92.
5. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Случайные подстановки: общая параметрическая модель // *Дискрет. матем.*, 2006. Т. 18, № 4. С. 105–112. EDN: HYUWCT. DOI: <https://doi.org/10.4213/dm75>.
6. Якимив А. Л. Предельная теорема для средних членов вариационного ряда длин циклов случайной A-подстановки // *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009. Т. 54, № 1. С. 63–79. EDN: RLSBHZ. DOI: <https://doi.org/10.4213/tvp2499>.
7. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ подстановок с фиксированным числом циклов // *Тр. Карел. науч. центра РАН*, 2020. № 7. С. 110–119. EDN: QRNMPZ. DOI: <https://doi.org/10.17076/mat1171>.
8. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы подстановок с циклами заданных размеров // *Тр. Карел. науч. центра РАН*, 2023. № 4. С. 64–70. EDN: NEMEEZ. DOI: <https://doi.org/10.17076/mat1730>.

9. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning* / Adaptive Computation and Machine Learning. Cambridge, MA: MIT Press, 2016. xxii+775 pp.
10. Николаенко С., Кандурин А., Архангельская Е. *Глубокое обучение*. СПб.: Питер, 2018. 480 с.
11. Ясницкий Л. Н. *Введение в искусственный интеллект*. М.: Академия, 2005. 176 с.
12. Энатская Н. Ю. *Доасимптотический анализ комбинаторных схем*. М.: URSS, 2023. 536 с.

MSC: 60F15

Combinatorial analysis of n -sized k -cycle substitutions with restricted cycle sizes

N. Yu. Enatskaya

National Research University “Higher School of Economics”,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
34, Tallinskay st, Moscow, 123458, Russian Federation.

Abstract

This study is devoted to combinatorial substitution schemes with various constraints on cycle sizes: lower bounds, upper bounds, and two-sided bounds.

For the proposed schemes, we solve several enumerative combinatorics problems: determining the number of possible outcomes, constructing direct numbered enumerations, solving numbering problems (establishing bijective correspondences between indices and types of outcomes), deriving probability distributions over the outcome sets, and developing a universal modeling procedure with specified probabilities.

All investigations are conducted using by the author’s enumerative method (EM), based on constructing a random process for the iterative formation and non-repetitive numbered enumeration of scheme outcomes. The outcomes of the first iteration—enumerating all valid cycle size compositions under the given constraints—are determined via schemes for placing indistinguishable particles into distinguishable cells under equivalent constraints. Subsequent iterations account for the distinctive features of our schemes’ interpretation within the placement framework, which involves distinguishable particles, indistinguishable cells, and consideration of particle order within each cell (starting from the particle with the minimum number).

In addition to the direct analysis of the schemes following the EM framework, we propose deriving some results by recalculating them from the outcomes of a similar analysis of more general, previously studied schemes with fewer restrictions on the relevant characteristics.

Keywords: scheme of permutation, range of fixed elements of permutation, enumeration problem, modelling.

Received: 19th March, 2025 / Revised: 24th July, 2025 /

Accepted: 7th August, 2025 / First online: 11th September, 2025

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of n -sized k -cycle substitutions with restricted cycle sizes, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 538–553. EDN: MDNXJG. DOI: 10.14498/vsgtu2171 (In Russian).

Authors’ Details:

Nataliya Yu. Enatskaya  <https://orcid.org/0000-0003-1241-7543>
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: nat1943@mail.ru

Competing interests. The author declares no competing interests.

Author's Responsibilities. The author takes full responsibility for the final version of the manuscript and approves it for publication.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency.

References

1. Goncharov V. L. Sur la distribution des cycles dans les permutations, *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.*, 1942, vol. 35, pp. 267–269 (in French).
2. Kolchin V. F. A problem of the allocation of particles in cells and cycles of random permutations, *Theory Probab. Appl.*, 1971, vol. 16, no. 1, pp. 74–90. DOI: <https://doi.org/10.1137/1116005>.
3. Timashov A. N. On the distribution of the number of cycles of a given length in the class of permutations with known number of cycles.; *Discrete Math. Appl.*, 2001, vol. 11, no. 5, pp. 471–483. DOI: <https://doi.org/10.1515/dma.2001.11.5.471>.
4. Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I. On random permutations, *Tr. Diskr. Mat.*, 5. Moscow, Fizmatlit, 2002, pp. 73–92 (in Russian).
5. Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I. Random permutations: the general parametric model, *Discrete Math. Appl.*, 2006, vol. 16, no. 5, pp. 471–478. DOI: <https://doi.org/10.1515/156939206779238391>.
6. Yakymiv A. L. Limit theorem for the middle members of ordered cycle lengths in random A -permutations, *Theory Probab. Appl.*, 2010, vol. 54, no. 1, pp. 114–128. EDN: MXMBUB. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0040585X97984073>.
7. Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of substitutions with a fixed number of cycles, *Trans. Karelian Sci. Center Russ. Acad. Sci.*, 2020, no. 7, pp. 110–119 (in Russian). EDN: QRNMPZ. DOI: <https://doi.org/10.17076/mat1171>.
8. Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of a substitution scheme with cycles of given sizes, *Trans. Karelian Sci. Center Russ. Acad. Sci.*, 2023, no. 4, pp. 64–70 (in Russian). EDN: NEMEEZ. DOI: <https://doi.org/10.17076/mat1730>.
9. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*, Adaptive Computation and Machine Learning. Cambridge, MA, MIT Press, 2016, xxii+775 pp.
10. Nikolaenko S., Kandurin A., Arkhangelskaya E. *Glubokoe obuchenie* [Deep Learning]. St. Petersburg, Piter, 2018, 480 pp. (in Russian)
11. Yasnitsky L. N. *Vvedenie v iskusstvennyy intellekt* [Introduction to Artificial Intelligence]. Moscow, Akademiia, 2005 (in Russian).
12. Enatskaya N. Yu. *Doasimptoticheskii analiz kombinatornykh skhem* [Pre-Asymptotic Analysis of Combinatorial Schemes]. Moscow, URSS, 2023, 536 pp. (In Russian)



УДК 517.958:536.24

Начально-краевая задача для нестационарного уравнения теплопроводности в ограниченной области без тепловой изоляции боковой поверхности

В. Д. Бейбалаев^{1,2}, Т. И. Ибавов¹

¹ Дагестанский государственный университет,
Россия, 367000, Махачкала, ул. Магомета Гаджиева, 43а.

² Институт проблем геотермии и возобновляемых источников энергии –
филиал ОИВТ РАН в г. Махачкале,
Россия, 367030, Махачкала, пр-т Имама Шамиля, 39а.

Аннотация

Исследована начально-краевая задача для ограниченной области, находящейся в тепловом взаимодействии с внешней средой, учитывающая эффекты памяти посредством дробной производной Капуто по времени. Теплообмен через боковую поверхность тела с окружающей средой учтен в дифференциальном уравнении в виде отрицательного источника тепла. Получена априорная оценка решения начально-краевой задачи. Решение найдено операционным методом с использованием преобразования Лапласа по времени.

Ключевые слова: эффект памяти, преобразование Лапласа, нестационарное уравнение теплопроводности.

Получение: 17 февраля 2025 г. / Исправление: 10 июня 2025 г. /
Принятие: 17 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 7 августа 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бейбалаев В. Д., Ибавов Т. И. Начально-краевая задача для нестационарного уравнения теплопроводности в ограниченной области без тепловой изоляции боковой поверхности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 554–565. EDN: KNQSL0. DOI: 10.14498/vsgtu2155.

Сведения об авторах

Ветлугин Джабраилевич Бейбалаев <https://orcid.org/0000-0002-4881-9264>
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики¹; старший научный сотрудник; лаб. геотермомеханики²; e-mail: kasprij_03@mail.rul.ru

Темирлан Ильмутдинович Ибавов <https://orcid.org/0009-0006-8743-4304>
старший преподаватель; каф. дискретной математики и информатики¹;
e-mail: ibavov94@mail.ru

Введение. В настоящее время математические методы, основанные на интегро-дифференцировании дробного порядка, широко применяются при исследовании физических и химических процессов в средах с эффектами памяти и пространственными корреляциями. Как показано в работах [1–6], анализ процессов теплопереноса в средах с фрактальной структурой требует учета эффектов памяти. Их учет в рамках классических подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, ядро которого отражает природу нелокальности. В подобных системах физические величины, как правило, обладают дробной размерностью. В работе [7] рассмотрены различные модели, основанные на дифференциальных уравнениях с дробными производными, а в исследовании [8] изучены процессы промерзания грунта с учетом эффектов памяти. Работы [9, 10] посвящены анализу третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени на полуоси.

В данной работе исследуется начально-краевая задача для уравнения теплопроводности в ограниченной области с учетом эффектов памяти при отсутствии тепловой изоляции боковой поверхности, то есть в случае теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой по закону Ньютона. При этом температура окружающей среды предполагается постоянной и равной начальной температуре.

1. Вспомогательные утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [12]. Функция, задаваемая рядом

$$W(\alpha, \beta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)},$$

где $\alpha, \beta > 0$, называется функцией Райта.

ТЕОРЕМА 1 [12]. Пусть функции $F(p)$ и $G(p)$ аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > p_0$ и являются образами Лапласа функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно. Пусть также известно, что $F(\varphi(p)) = G(p)$. Тогда

$$G(p) = F(\varphi(p)) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \exp(-\varphi(p)\tau) d\tau$$

и выполняется равенство

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} F(\varphi(p)) \exp(tp) dp.$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область с эффектами памяти, находящуюся в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре $T_0(x)$. Таким образом, начальная температура области постоянна во всех точках и совпадает с температурой окружающей среды. В начальный момент времени границы области приводятся в контакт с окружающей средой, температура которой равна $T_c > T_0(x)$. Через боковую поверхность области происходит теплообмен со средой при температуре $T_0(x)$. Требуется определить распределение температуры в области в произвольный момент

времени. Теплообмен между областью и окружающей средой подчиняется закону Ньютона.

При расположении начала координат в центре области, т.е. для области $D = \{(x, t) : -R < x < R, 0 < t \leq T\}$, рассматриваемый процесс описывается дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто:

$$\partial_{0t}^{\alpha} T(x, t) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) - \frac{\beta}{\lambda h} [T(x, t) - T_0], \quad -R < x < R, t > 0, \quad (1)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha} T(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{T'(x, s)}{(t-s)^{\alpha}} ds$ — частная дробная производная Капуто порядка $0 < \alpha \leq 1$; $T(x, t)$ — температура; a — коэффициент температуропроводности; β — коэффициент теплообмена; λ — коэффициент теплопроводности материала; h — отношение площади сечения тела к его периметру. Отметим, что отношение β/λ характеризует относительную интенсивность теплообмена на границе.

Вводя безразмерное время $\tau = t/t_0$, производную Капуто можно представить в виде [17]

$$\partial_{0\tau}^{\alpha} T(x, \tau) = \frac{1}{t_0^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\tau} \frac{T'(x, s)}{(\tau-s)^{\alpha}} ds.$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\partial_{0\tau}^{\alpha} T(x, \tau) = \bar{a} \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, \tau) - \frac{\beta}{\lambda h} [T(x, \tau) - T_0(x)], \quad -R < x < R, \tau > 0, \quad (2)$$

где $\bar{a} = at_0^{\alpha}$.

Отметим, что переход к безразмерному времени влияет только на временную переменную. Однако, учитывая отсутствие характерного масштаба длины в полубесконечной среде, можно воспользоваться результатами работ [10], где масштаб длины для уравнения дробной диффузии определяется как $x_0 = \sqrt{at^{\alpha}}$ с размерностью длины [м]. При значении параметра $\alpha = 1$ данный масштаб длины переходит в классический случай уравнения диффузии. На этой основе вводится безразмерная переменная подобия $\eta_{\alpha} = x/\sqrt{at^{\alpha}}$, которая при $\alpha = 1$ соответствует переменной подобия Больцмана $\eta = x/\sqrt{at}$.

Для полной постановки задачи дополним систему начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_0(x), \quad T(0, \tau) = T_c, \\ -\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=R} + \beta [T_c - T(R, \tau)] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

3. Априорная оценка решения начально-краевой задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия

$$T(x, \tau) \in C^{2,0}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D}), \quad \partial_{0\tau}^{\alpha} T(x, \tau) \in C(\bar{D}).$$

Тогда для решения задачи (2)–(4) справедлива априорная оценка

$$\|T(x, \tau)\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha} \|T_x(x, \tau)\|_0^2 \leq M \|T_0(x)\|_0^2, \quad (5)$$

где M — постоянная, зависящая от входных данных задачи.

Доказательство. Поскольку $\bar{a} = \text{const}$, то без ограничения общности положим $\bar{a} = 1$. Умножая уравнение (2) скалярно на $T(x, \tau)$, получим

$$(\partial_{0\tau}^\alpha T(x, \tau), T(x, \tau)) = (T_{xx}(x, \tau), T(x, \tau)) - \frac{\beta}{\lambda h} ((T(x, \tau) - T_0(x)), T(x, \tau)), \quad (6)$$

где $(g, h) = \int_0^R gh dx$, $\|g\|_0^2 = (g, g)$ для функций, заданных на $[0, R]$.

Используя монотонность дробного интегрирования и тождество $2TT_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}(T^2)$, получаем

$$\begin{aligned} (\partial_{0\tau}^\alpha T(x, \tau), T(x, \tau)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^R T(x, \tau) dx \int_0^t T_\tau(x, t-\tau)^{-\alpha} d\tau \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (1, \partial_{0\tau}^\alpha T^2(x, \tau)) = \frac{1}{2} \partial_{0\tau}^\alpha \|T(x, \tau)\|_0^2. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям и учитывая граничные условия, получаем

$$\begin{aligned} (T_{xx}(x, \tau), T(x, \tau)) &= \int_0^R T_{xx}(x, \tau) T(x, \tau) dx = \\ &= T(x, \tau) T_x(x, \tau) \Big|_0^R - \int_0^R T_x^2(x, \tau) dx = \\ &= \frac{\beta}{\lambda} T(R, \tau) [T_c - T(R, \tau)] - \|T_x(x, \tau)\|_0^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для оценки первого слагаемого правой части равенства (7) применим неравенство Коши с ε [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\lambda} T(R, \tau) [T_c - T(R, \tau)] &= \frac{\beta}{\lambda} ((T_c - T(R, \tau)), T(R, \tau)) = \\ &= -\frac{\beta}{\lambda} \int_0^R T^2(x, \tau) dx + \frac{\beta}{\lambda} \int_0^R T(x, 0) T(x, \tau) dx \leq \\ &\leq M_1^\varepsilon \|T_0(x)\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|T_0(x)\|_0^2, \end{aligned}$$

где $M_1^\varepsilon = \frac{\beta}{\lambda} (1 + \varepsilon)$, $M_2^\varepsilon = \frac{\beta}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$. Таким образом,

$$(T_{xx}(x, \tau), T(x, \tau)) \leq M_1^\varepsilon \|T_0(x)\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|T_0(x)\|_0^2 = M \|T_0(x)\|_0^2.$$

Подставляя полученные оценки в равенство (6), получаем

$$\frac{1}{2} \partial_{0\tau}^\alpha \|T(x, \tau)\|_0^2 + \|T_x(x, \tau)\|_0^2 \leq M \|T_0(x)\|_0^2. \quad (8)$$

Применяя к обеим частям неравенства (8) оператор дробного интегрирования $D_{0\tau}^{-\alpha}$ и используя лемму 2 из [13], получаем искомую оценку (5):

$$\|T(x, \tau)\|_0^2 + D_{0\tau}^{-\alpha} \|T_x(x, \tau)\|_0^2 \leq M \|T_0(x)\|_0^2. \quad \square$$

4. Решение задачи. Рассмотрим случай, когда начальное распределение температуры постоянно: $T_0(x) = T_0 = \text{const}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия

$$T(x, \tau) \in C^{2,0}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D}), \quad \partial_{0\tau}^\alpha T(x, \tau) \in C(\bar{D}), \quad \beta/\lambda \rightarrow \infty,$$

тогда решение задачи (2)–(4) имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, \tau) = & T_0 + (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \\ & \times \left(\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{s^{3/2}} W\left(-\alpha, 1, -\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\right) \exp\left(-\frac{((2n-1)R-x)^2}{4s} - \frac{s\beta}{\lambda h}\right) ds + \right. \\ & \left. + \frac{(2n-1)R+x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{s^{3/2}} W\left(-\alpha, 1, -\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\right) \exp\left(-\frac{((2n-1)R+x)^2}{4s} - \frac{s\beta}{\lambda h}\right) ds \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Решение начально-краевой задачи (2)–(4) найдем методом интегральных преобразований. Применим преобразование Лапласа по временной переменной τ к уравнению (2). Тогда после приведения подобных членов для изображения Лапласа получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T_L''(x, p) - \left(\frac{p^\alpha}{\bar{a}} + \frac{\beta}{\lambda h}\right) T_L(x, p) + \left(\frac{p^\alpha}{\bar{a}} + \frac{\beta}{\lambda h}\right) \frac{T_0}{p} = 0 \quad (9)$$

с граничными условиями

$$-T_L'(R, p) + \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{T_c}{p} - T_L(R, p)\right) = 0, \quad T_L(0, p) = 0.$$

Характеристическое уравнение для (9) имеет вид

$$\mu^2 - q^2(p) = 0$$

с корнями $\mu_{1,2} = \pm q(p) = \pm \sqrt{\frac{p^\alpha}{\bar{a}} + \frac{\beta}{\lambda h}}$.

Тогда общее решение уравнения (9) записывается так:

$$T_L(x, p) = \frac{T_0}{p} + C_1 \text{ch}(q(p)x) + C_2 \text{sh}(q(p)x),$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

Используя условие симметрии (4), получаем $C_2 = 0$. Для определения постоянной C_1 воспользуемся граничным условием (3):

$$-C_1 q(p) \operatorname{sh}(q(p)R) + \frac{\beta T_c}{\lambda p} - \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{T_0}{p} + C_1 \operatorname{ch}(q(p)R) \right) = 0,$$

что приводит к выражению

$$C_1 = \frac{T_c - T_0}{p \left[\operatorname{ch}(q(p)R) + \frac{\lambda}{\beta} q(p) \operatorname{sh}(q(p)R) \right]}.$$

Таким образом, решение в пространстве изображений Лапласа принимает вид

$$T_L(x, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{(T_c - T_0) \operatorname{ch}(q(p)x)}{p \left[\operatorname{ch}(q(p)R) + \frac{\lambda}{\beta} q(p) \operatorname{sh}(q(p)R) \right]}.$$

Рассмотрим предельный случай идеального теплового контакта, когда $\beta/\lambda \rightarrow \infty$. Тогда

$$T_L(x, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{(T_c - T_0) \operatorname{ch}(q(p)x)}{p \operatorname{ch}(q(p)R)} = \frac{T_0}{p} + \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}. \quad (10)$$

Разложим $\operatorname{ch}^{-1}(q(p)R)$ в ряд:

$$\operatorname{ch}^{-1}(q(p)R) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp(-(2n-1)q(p)R). \quad (11)$$

Подставляя разложение (11) в (10), получаем

$$\begin{aligned} T_L(x, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{T_c - T_0}{p} [\exp(q(p)x) + \exp(-q(p)x)] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp(-(2n-1)q(p)R), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} T_L(x, p) = \frac{T_0}{p} + \frac{T_c - T_0}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [\exp(-q(p)((2n-1)R - x)) + \\ + \exp(-q(p)((2n-1)R + x))]. \quad (12) \end{aligned}$$

Применим обратное преобразование Лапласа к выражению (12):

$$T(x, \tau) = T_0 + (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} L^{-1} \left[\frac{1}{p} \exp(-q(p)((2n-1)R - x)) \right] +$$

$$+ (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} L^{-1} \left[\frac{1}{p} \exp(-q(p)((2n-1)R+x)) \right]. \quad (13)$$

Для нахождения оригинала решения воспользуемся теоремой 1 и свойством свертки преобразования Лапласа. В условиях теоремы 1 положим, что

$$\varphi(p) = q(p), \quad F(p) = \exp\left(-2\sqrt{\frac{p((2n-1)R-x)^2}{4}}\right).$$

Учитывая, что

$$L^{-1} \left[\sqrt{\frac{\pi}{k}} \exp(-2\sqrt{kp}) \right] = \frac{1}{s^{3/2}} \exp(-k/s),$$

найдем

$$\begin{aligned} & L^{-1} \left[\frac{1}{p} \exp(-q(p)((2n-1)R-x)) \right] = \\ &= L^{-1} \left[\frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-((2n-1)R-x)^2}{4s}\right) \cdot \frac{1}{p} \exp(q(p)s) ds \right] = \\ &= \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-((2n-1)R-x)^2}{4s}\right) \cdot L^{-1} \left[\frac{1}{p} \exp(q(p)s) \right] ds = \\ &= \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-((2n-1)R-x)^2}{4s}\right) \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{s\beta}{\lambda h}\right) L^{-1} \left[\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-sp^{\alpha})^n}{\bar{a}^n n!} \right] ds = \\ &= \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-((2n-1)R-x)^2}{4s}\right) \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{s\beta}{\lambda h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{\bar{a}^n n!} L^{-1} [p^{\alpha n-1}] ds = \\ &= \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-((2n-1)R-x)^2}{4s}\right) \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{s\beta}{\lambda h}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n t^{-\alpha n}}{\bar{a}^n n! \Gamma(-\alpha n + 1)} ds = \\ &= \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(\frac{-((2n-1)R-x)^2}{4s}\right) \times \\ & \quad \times \exp\left(-\frac{s\beta}{\lambda h}\right) W\left(-\alpha, 1, -\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\right) ds. \end{aligned}$$

Аналогичным образом найдем, что

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left[\exp(-q(p)((2n-1)R+x)) \right] = \\
= \frac{(2n-1)R+x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{((2n-1)R+x)^2}{4s}\right) \times \\
\times \exp\left(-\frac{s\beta}{\lambda h}\right) W\left(-\alpha, 1, -\frac{st^{-\alpha}}{\bar{a}}\right) ds.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (13), получаем окончательный вид функции $T(x, \tau)$. $\square$

5. Выводы. В работе исследована начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1]$ в ограниченной области, учитывающая теплообмен с внешней средой через боковую поверхность по закону Ньютона. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Построена математическая модель процесса теплопереноса, включающая эффекты памяти через дробную производную Капуто и учитывающая теплоотдачу через боковую поверхность в виде отрицательного источника тепла. Доказана корректность поставленной задачи — получена априорная оценка решения, устанавливающая его устойчивость по начальным данным и граничным условиям в соответствующих функциональных пространствах.
2. Операционным методом с использованием преобразования Лапласа получено аналитическое решение задачи для предельного случая идеального теплового контакта ($\beta/\lambda \rightarrow \infty$). Решение выражается через специальные функции (функции Райта) и позволяет исследовать особенности формирования температурных полей в средах с памятью.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются построение решения для произвольных значений отношения β/λ , проведение вычислительных экспериментов по анализу влияния дробного параметра α на динамику температурного поля, а также обобщение результатов на случай анизотропных сред и нелинейных задач.

Полученные результаты открывают возможности для разработки новых эффективных методов анализа краевых задач дробного порядка с учетом сложных граничных условий.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена без привлечения финансирования.

Библиографический список

1. Oldham K. B., Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 111. N.Y.: Academic Press, 1974. xiii+234 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(09\)x6012-1](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(09)x6012-1).

2. Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. N.Y.: Wiley, 1993. xiii+366 pp.
3. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego, CA: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp. EDN: YTYZD.
4. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с. EDN: QJVANP.
5. Тарасов В. Е. Дробные интегро-дифференциальные уравнения для электромагнитных волн в диэлектрических средах // *ТМФ*, 2009. Т. 158, № 3. С. 419–424. EDN: RLRQKD. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6324>.
6. Hristov J. The fading memory formalism with Mittag-Leffler-type kernels as a generator of non-local operators // *Appl. Sci.*, 2023. vol. 13, no. 5, 3065. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13053065>.
7. Жмакин А. И. Теплопроводность за пределами закона Фурье // *ЖТФ*, 2021. Т. 91, № 1. С. 5–25. EDN: CEWAFW. DOI: <https://doi.org/10.21883/jtf.2021.01.50267.207-20>.
8. Бейбалаев В. Д., Аливердиев А. А., Магомедов Р. А., Мейланов Р. Р., Ахмедов Э. Н. Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 376–387. EDN: ZHJLST. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1492>.
9. Бейбалаев В. Д., Ибавов Т. И., Аливердиев А. А. Об одной краевой задаче для нестационарного уравнения теплопроводности, включающей эффекты памяти через производную дробного порядка Капуто / *Математическое моделирование и краевые задачи*: Матер. XII Всерос. науч. конф. с междунар. участием (г. Самара, 17–19 сентября 2024 г.), 2024. С. 199–201.
10. Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Hristov J. Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: Analytical solutions with a Robin boundary condition // *Fractal Fract.*, 2023. vol. 7, no. 10, 770. EDN: SDKRZX. DOI: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770>.
11. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
12. Duffy D. G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. xvii+708 pp.
13. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // *Дифф. уравн.*, 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664. EDN: MSQVJX.
14. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с. EDN: QJPLZX.
15. Мамчуев М. О. *Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка*. Нальчик: КБНЦ РАН, 2013. 200 с. EDN: RPBVPV.
16. Лыков А. В. *Теория теплопроводности*. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
17. Hristov J. Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels // *Eur. Phys. J. Plus*, 2019. vol. 134, 283. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12697-7>.

MSC: 35R11, 35K05

Initial-boundary value problem for nonstationary heat conduction equation in a bounded domain with non-insulated lateral surface

V. D. Beybalaev^{1,2}, T. I. Ibavov¹

¹ Daghestan State University,
43a, Magomet Gadzhiev st., Makhachkala, 367000, Russian Federation.

² Institute of Geothermal Problems and Renewable Energy Sources,
Branch of the Joint Institute for High Temperatures
of the Russian Academy of Sciences in Makhachkala,
39a, Imam Shamil Avenue, Makhachkala 367030, Russian Federation.

Abstract

This study investigates an initial-boundary value problem for a bounded domain in thermal interaction with an external medium, incorporating memory effects through the Caputo time-fractional derivative. Heat transfer through the lateral surface is modeled as a negative heat source in the governing differential equation. An a priori estimate for the solution is established. The solution is derived by using an operational method based on the Laplace transform in time.

Keywords: memory effect, Laplace transform, nonstationary heat equation.

Received: 17th February, 2025 / Revised: 10th June, 2025 /

Accepted: 17th June, 2025 / First online: 7th August, 2025

Competing interests. We declare no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. All authors contributed to the conception and design of the article, and to manuscript preparation. The authors are responsible

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beybalaev V. D., Ibavov T. I. Initial-boundary value problem for nonstationary heat conduction equation in a bounded domain with non-insulated lateral surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 554–565. EDN: KNQSL0. DOI: 10.14498/vsgtu2155 (In Russian).

Authors' Details:

Vetlugin D. Beybalaev  <https://orcid.org/0000-0002-4881-9264>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics¹; Senior Researcher; Lab. of Geothermomechanics²; e-mail: kasprij_03@mail.rul.ru

Temirlan I. Ibavov  <https://orcid.org/0009-0006-8743-4304>

Senior Lecturer; Dept. of Discrete Mathematics and Computer Science¹;
e-mail: ibavov94@mail.ru

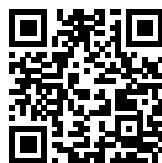
for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This study received no external funding.

References

1. Oldham K. B., Spanier J. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 111. N.Y., Academic Press, 1974, xiii+234 pp. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0076-5392\(09\)x6012-1](https://doi.org/10.1016/s0076-5392(09)x6012-1).
2. Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. N.Y., Wiley, 1993, xiii+366 pp.
3. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, CA, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp. EDN: YYTYZD.
4. Uchaykin V. V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ul'yanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian). EDN: QJVANP.
5. Tarasov V. E. Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media, *Theoret. Math. Phys.*, 2009, vol. 158, no. 3, pp. 355–359. EDN: LLPFCP. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11232-009-0029-z>.
6. Hristov J. The fading memory formalism with Mittag-Leffler-type kernels as a generator of non-local operators, *Appl. Sci.*, 2023, vol. 13, no. 5, 3065. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13053065>.
7. Zhmakin A. I. Heat conduction beyond the Fourier law, *Tech. Phys.*, 2021, vol. 66, no. 1, pp. 1–22. EDN: HWWCAD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063784221010242>.
8. Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Magomedov R. A., Meilanov R. R., Akhmedov E. N. Modeling of freezing processes by an one-dimensional thermal conductivity equation with fractional differentiation operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 376–387 (In Russian). EDN: ZHJLST. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1492>.
9. Beybalaev V. D., Ibavov T. I., Aliverdiev A. A. On a boundary value problem for non-stationary heat equation with memory effects via Caputo fractional derivative, In: *Mathematical Modeling and Boundary Value Problems*, Proc. XII All-Russ. Sci. Conf. with Int. Part. (Samara, September 17–19, 2024), 2024, pp. 199–201 (In Russian).
10. Beybalaev V. D., Aliverdiev A. A., Hristov J. Transient heat conduction in a semi-infinite domain with a memory effect: Analytical solutions with a Robin boundary condition, *Fractal Fract.*, 2023, vol. 7, no. 10, 770. EDN: SDKRZX. DOI: <https://doi.org/10.3390/fractalfract7100770>.
11. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
12. Duffy D. G. *Transform Methods for Solving Partial Differential Equations*. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2004, xvii+708 pp.
13. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. EDN: MXDCPJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266110050058>.
14. Pskhu A. V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian). EDN: QJPLZX.
15. Mamchuev M. O. *Kraevyye zadachi dlya uravneniy i sistem uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka* [Boundary Value Problems for Equations and Systems of Partial Differential Equations of Fractional Order]. Nal'chik, KBSC RAS, 2013, 200 pp. (In Russian). EDN: RBPVPV.

16. Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vyssh. shk., 1967, 600 pp. (In Russian)
17. Hristov J. Linear viscoelastic responses and constitutive equations in terms of fractional operators with non-singular kernels, *Eur. Phys. J. Plus*, 2019, vol. 134, 283. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12697-7>.



УДК 517.977.56

О нахождении градиента в задаче управления колебаниями механических систем без трения

А. С. Зинченко¹, А. А. Нехаев², А. М. Романенков^{1,2}

¹ Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук,
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44/2.

Аннотация

Исследуется задача вычисления градиента для алгоритма оптимального управления распределенной системой, математическая модель которой описывается начально-краевой задачей для линейного гиперболического уравнения в частных производных высокого порядка. Рассматривается колебательный процесс без диссипации энергии. Предлагаемая модель охватывает широкий класс прикладных задач, включая колебания струны, балки, стержня и других одномерных упругих механических систем, а также систем, допускающих редукцию к указанным случаям. С использованием метода интегральных оценок доказана теорема единственности решения и получено явное выражение для градиента минимизируемого квадратичного функционала.

Ключевые слова: оптимальное управление, гиперболические уравнения, колебательные системы, градиентный метод, начально-краевые задачи.

Получение: 13 ноября 2024 г. / Исправление: 23 мая 2025 г. /
Принятие: 2 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 3 июля 2025 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зинченко А. С., Нехаев А. А., Романенков А. М. О нахождении градиента в задаче управления колебаниями механических систем без трения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 566–578. EDN: VCVBSZ. DOI: 10.14498/vsgtu2133.

Сведения об авторах

Александр Сергеевич Зинченко ✉ <https://orcid.org/0000-0001-7971-4572>
кандидат экономических наук; доцент; каф. 916 математики¹; e-mail: zinchenkoas@mail.ru

Александр Андреевич Нехаев <https://orcid.org/0009-0004-2062-7967>
инженер-исследователь; отд. математического моделирования гетерогенных систем²;
e-mail: ganzol177@gmail.com

Александр Михайлович Романенков <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>
кандидат технических наук, доцент; каф. 916 математики¹; старший научный сотрудник; отд. математического моделирования гетерогенных систем²;
e-mail: romanaleks@gmail.com

Введение. Рассматриваются колебания одномерной механической системы, при этом допускается произвольная природа колебаний. Уравнение, описывающее колебательный процесс, может содержать производные высокого порядка по пространственной переменной (четвертого, шестого и выше). Проблема управления такими колебаниями активно исследуется в научной литературе.

В работе [1] разработан аналитический подход к построению оптимального граничного управления для одномерных неоднородных колебательных процессов со смещением на обоих концах, основанный на методе моментов. Исследование [2] посвящено системам с распределенными параметрами, описываемым гиперболическими уравнениями с переменными коэффициентами, где решается задача определения мгновенно-оптимального точечного управления с использованием интегрального закона сохранения энергии. В [3] рассматривается задача гашения колебаний системы, описываемой волновым уравнением и обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, причем функции состояния связаны через граничные условия линейным образом, что позволяет получить точный вид управляющей функции.

В [4] исследованы задачи гашения колебаний струны и балки (управление для гиперболических уравнений второго и четвертого порядков), где установлено точное время гашения колебаний и применен градиентный метод для численного решения. Работа [5] посвящена численному гашению колебаний балки с использованием нескольких неподвижных точечных актюаторов, при этом управление ищется в классе кусочно-постоянных функций.

Задачи с уравнениями высокого порядка представляют значительный научный интерес. В [7] исследуется динамическое поведение и солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза и уравнения иерархии Жолента–Миодека, имеющие приложения в распознавании образов, динамике жидкости, нейронных сетях, механических системах, экологии, теории управления, бифуркационном анализе и теории хаоса. Авторами получены точные решения в виде бегущей волны, содержащие рациональные, гиперболические и тригонометрические функции. В [8] рассмотрена задача оптимального управления для линейной системы гиперболических уравнений первого порядка, где правая часть определяется из управляемых билинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный подход основан на неклассических формулах приращения функционала стоимости.

Исследование [9] представляет метод автоматической временной сегментации видео, сочетающий многомасштабный анализ изображений, нелинейные уравнения в частных производных и сверточные нейронные сети. Для нелинейной гиперболической модели второго порядка доказаны корректность, существование и единственность слабого решения, для нахождения которого применен алгоритм на основе метода конечных разностей. В [10] установлена теорема существования и единственности для нелокальных нелинейных дифференциальных уравнений балки шестого порядка с четырьмя параметрами при определенных условиях роста функции f и ограничении на изгибную жесткость. Работа [11] посвящена изучению класса уравнений с двумя различными порядками типа Римана–Лиувилля разностных операторов набла, где доказано существование положительного решения с использованием теоремы о неподвижной точке.

В [12] рассмотрена задача граничного управления для гиперболического уравнения, характеристики которого имеют угловые коэффициенты одного знака, при этом управляющие функции построены в явном виде. В [13] исследована задача граничного управления для системы гиперболических уравнений, где с помощью метода Римана построены управляющие функции, переводящие систему из заданного начального состояния в финальное. Наконец, в [14] решается задача оптимального управления линейной системой гиперболических уравнений первого порядка с квадратичным целевым функционалом, осуществлена редукция к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений на основе неклассических формул приращения целевого функционала второго порядка.

1. Постановка задачи. Пусть $u = u(x, t)$, где $x \in [0, l]$, $l > 0$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, и пусть $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t), \quad (1)$$

где коэффициенты $a_k \in \mathbb{R}$ и $a_N \neq 0$. На границах области задаются либо условия шарнирного закрепления:

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \Big|_{x=l} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

либо условия нежесткого закрепления:

$$\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} \Big|_{x=l} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3)$$

Для функции $u(x, t)$ заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x), \quad (4)$$

согласованные с граничными условиями (2) или (3).

Отметим, что модели колебаний с силой трения, пропорциональной скорости, могут быть сведены к задаче (1)–(4). Действительно, пусть $\mu \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t),$$

где слагаемое $\mu \frac{\partial u}{\partial t}$ описывает силу трения. Замена переменной $u = e^{-\mu t/2} w$ позволяет исключить член с первой производной по времени, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}} + \left(\frac{\mu^2}{4} + a_0^2 \right) w = F(x, t),$$

где $F(x, t) = f(x, t)e^{\mu t/2}$. Полученное уравнение имеет вид (1), при этом граничные условия (2) или (3) для функции w сохраняются, а начальные условия принимают вид

$$w|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x) + \frac{\mu}{2}u_0(x).$$

2. Анализ однородного уравнения. Рассмотрим случай однородного уравнения (1), т.е. $f(x, t) \equiv 0$. Пусть $Q_\tau := [0, l] \times [0, \tau]$. Применим технику интегральных оценок, следуя [6]. Умножим уравнение (1) с нулевой правой частью на $\frac{\partial u}{\partial t}$ и, используя соотношения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^k \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2,$$

выделим полные производные по времени. Интегрируя полученное выражение по области Q_τ при $\tau > 0$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{Q_\tau} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^{2k}} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{k=0}^N a_k^2 \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2 \right) dx dt = E(\tau) - E(0), \end{aligned}$$

где введена функция $E(\tau)$, представляющая полную энергию колебательной системы и определяемая выражением

$$E(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{k=0}^N a_k^2 \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2 \right]_{t=\tau} dx. \quad (5)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для механической системы, описываемой уравнением (1) с краевыми условиями (2) или (3), выполняется закон сохранения энергии:

$$E(\tau) = E(0) \quad \forall \tau > 0.$$

Из закона сохранения энергии непосредственно вытекает следующая теорема единственности решения начально-краевой задачи.

ТЕОРЕМА. Пусть для однородного уравнения (1) ($f(x, t) \equiv 0$) с краевыми условиями (2) или (3) начальные функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ тождественно равны нулю. Тогда задача имеет единственное решение $u(x, t) \equiv 0$.

Доказательство. Из закона сохранения энергии следует, что $E(\tau) = E(0) \equiv 0$ для всех $\tau > 0$. Согласно формуле (5), получаем

$$0 \leq E(\tau) = 0,$$

что возможно только при $u(x, t) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь общий случай с произвольными начальными условиями $u_0(x)$ и $u_1(x)$. Предположим, что существуют два различных решения $w(x, t)$ и $v(x, t)$ начально-краевой задачи с одинаковыми краевыми и начальными условиями. Тогда функция $u(x, t) = w(x, t) - v(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) с $f(x, t) \equiv 0$, однородным краевым условиям (2) или (3), нулевым начальным условиям.

Согласно доказанному выше, $u(x, t) \equiv 0$, следовательно, $w(x, t) \equiv v(x, t)$, что доказывает единственность решения. $\square$

Рассмотрим дифференциальный оператор L , действующий на функции, дважды дифференцируемые по времени и $2N$ раз дифференцируемые по пространственной переменной, по следующему правилу:

$$L := \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

где $L_x = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}$ — дифференциальный оператор по пространственной переменной. В терминах введенного оператора уравнение (1) принимает компактный вид:

$$Lu = f.$$

ЛЕММА. *Оператор L_x , действующий на функции w, v , удовлетворяющие краевым условиям (2) или (3), является симметричным и положительно определенным:*

$$(L_x w, v) = (w, L_x v), \quad (L_x w, w) > 0 \quad \text{при} \quad w \neq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим стандартное скалярное произведение в $L_2[0, l]$. Применяя N раз интегрирование по частям и учитывая граничные условия (2) или (3), получаем

$$(L_x w, v) = \int_0^l \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} w}{\partial x^{2k}} \right) v dx = \int_0^l \sum_{k=0}^N a_k^2 \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^k v}{\partial x^k} dx = (w, L_x v).$$

Для доказательства положительной определенности положим $v = w \neq 0$:

$$(L_x w, w) = \int_0^l \sum_{k=0}^N a_k^2 \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right)^2 dx > 0,$$

поскольку $a_N \neq 0$ и не все производные $\frac{\partial^k w}{\partial x^k}$ могут быть тождественно нулевыми. $\square$

Исследуем действие оператора L_x на экспоненциальную функцию:

$$L_x e^{\lambda x} = \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \lambda^{2k} \right) e^{\lambda x} =: \mu(\lambda) e^{\lambda x},$$

где $\mu(\lambda)$ — многочлен от параметра λ . Заметим, что для чисто мнимых $\lambda = i\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$, этот многочлен принимает положительные значения:

$$\mu(i\varphi) = \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 (i\varphi)^{2k} = \sum_{k=0}^N (-1)^k (i^2)^k a_k^2 \varphi^{2k} = \sum_{k=0}^N (a_k \varphi^k)^2 > 0.$$

3. Градиент в задаче управления. Рассмотрим функцию $f(x, t)$ в качестве управляющего воздействия. Решение $u(x, t) = u(x, t, f)$ начально-краевой задачи (1)–(4) при этом зависит от выбора управления. Сформулируем задачу оптимального управления: найти такое управление $f(x, t)$, которое минимизирует функционал

$$J(f) = \int_0^l \left((u(x, T, f) - y_0(x))^2 + (u_t(x, T, f) - y_1(x))^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T f^2(x, t) dt \right) dx, \quad (6)$$

где $y_0(x)$, $y_1(x)$ — заданные целевые функции, определяющие желаемую конечную форму и скорость системы соответственно. Последнее слагаемое в функционале, содержащее норму управления, обеспечивает регуляризацию задачи [15]. Хотя функционалы вида (6) широко используются в теории управления, задача управления для гиперболического уравнения высокого порядка представляет собой новую постановку.

Для численного решения задачи применим градиентный метод. Следуя [3], построим итерационный процесс:

$$f_{k+1} = f_k - \alpha_k J'(f_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где f_0 — начальное приближение, $\alpha_k > 0$ — шаг градиентного метода. Шаг α_k выбирается из условия монотонного убывания функционала:

$$J(f_k - \alpha_k J'(f_k)) < J(f_k).$$

Итерационный процесс прекращается при выполнении критерия остановки:

$$\|J'(f_k)\|_{L_2} < \varepsilon.$$

Для вычисления градиента рассмотрим возмущенное управление $f(x, t) + h(x, t)$, где $h(x, t)$ — малая добавка. Обозначим через $W(x, t) = u_h(x, t) - u(x, t)$ соответствующее приращение решения, которое удовлетворяет задаче (1)–(4) с правой частью $h(x, t)$ и однородными граничными условиями (2) или (3). Согласно определению производной Фреше, приращение функционала имеет вид

$$\Delta J = J(f + h) - J(f) = (J'(f), h) + o(\|h\|_{L^2(Q_T)}^2),$$

где все функции зависят от переменных x и t .

Используя методику, изложенную в работах [16, 17], выпишем приращение функционала:

$$\Delta J = J(f + h) - J(f) = \int_0^l \left((2u(x, T, f) - 2y_0(x))W(x, T) + \right. \\ \left. + (2u_t(x, T, f) - 2y_1(x))W_t(x, T) + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T 2f(x, t)h(x, t)dt \right) dx + R(h), \quad (7)$$

где остаточный член $R(h)$ задается выражением

$$R(h) = \int_0^l (W^2(x, T) + W_t^2(x, T)) dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T h^2(x, t) dt dx.$$

Введем сопряженную функцию $\psi(x, t)$, удовлетворяющую конечным условиям:

$$\psi(x, T) = 2(u_t(x, T, f) - y_1(x)), \quad \psi_t(x, T) = -2(u(x, T, f) - y_0(x)).$$

Тогда приращение функционала (7) можно переписать в виде

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \left(-\psi_{tt}(x, t)W(x, t) + \psi(x, t)W_{tt}(x, t) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x, t)h(x, t) \right) dt dx + R(h). \quad (8)$$

Из уравнения для W выразим W_{tt} :

$$W_{tt} = h(x, t) - \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}}$$

и подставим в (8):

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \left(-\psi_{tt}(x, t)W(x, t) + \psi(x, t) \left(h(x, t) - \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x, t)h(x, t) \right) dt dx + R(h).$$

Потребуем, чтобы $\psi(x, t)$ удовлетворяла однородному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^{2k} \psi}{\partial x^{2k}} = 0,$$

где коэффициенты A_k подлежат определению из ограничений на ΔJ . Тогда

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \left(\left(\psi(x, t) + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x, t) \right) h(x, t) + \left(\sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^{2k} \psi}{\partial x^{2k}} \right) W(x, t) - \right. \\ \left. - \psi(x, t) \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}} \right) dt dx + R(h).$$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^T \sum_{k=0}^N \left(A_k \frac{\partial^{2k} \psi}{\partial x^{2k}} W(x, t) - \psi(x, t) (-1)^k a_k^2 \frac{\partial^{2k} W}{\partial x^{2k}} \right) dt dx = \\ = \sum_{k=0}^N \int_0^l \int_0^T (A_k - (-1)^k a_k^2) \frac{\partial^k \psi}{\partial x^k} \frac{\partial^k W}{\partial x^k} dt dx. \end{aligned}$$

Положим $A_k = (-1)^k a_k^2$, тогда получим

$$\Delta J = \int_0^l \int_0^T \left(\psi(x, t) + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x, t) \right) h(x, t) dt dx + R(h),$$

или в операторной форме $\Delta J(h) = (DJ, h) + R(h)$, где $DJ = \psi(x, t) + \frac{2}{\varepsilon^2} f(x, t)$. Далее необходимо показать, что остаточный член $R(h)$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с линейной частью.

Отметим, что в данном случае вычисление градиента существенно проще, чем в общем случае [17]. В отличие от общего подхода, здесь не потребовалось вводить мажорирующий функционал — удалось непосредственно вычислить градиент исходного квадратичного функционала. Предложенная методика выделения линейной части приращения функционала применима для начально-краевых задач порядка выше четвертого.

ТЕОРЕМА (ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА). *Для остаточного члена $R(h)$ справедлива оценка*

$$R(h) = O(\|h\|_{L^2(Q_T)}^2).$$

Доказательство. Рассмотрим энергетическое тождество

$$\left(LW, \frac{\partial W}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial W}{\partial t}, h \right).$$

Согласно лемме об энергии, имеем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}, h \right) = E(\tau) \geq \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=\tau} dx.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}, h \right) = \int_0^l \int_0^\tau \frac{\partial W}{\partial t} dt dx \leq \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^\tau \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^\tau h^2 dt dx.$$

Комбинируя эти оценки, приходим к неравенству

$$\int_0^l \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=\tau} dx \leq \int_0^l \int_0^\tau \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dt dx + \int_0^l \int_0^\tau h^2 dt dx. \quad (9)$$

Введем следующие обозначения:

$$b = \int_0^l \int_0^\tau h^2 dt dx, \quad \varphi(\tau) = \int_0^l \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=\tau} dx.$$

Тогда неравенство (9) принимает вид

$$\varphi(\tau) \leq \int_0^\tau \varphi(t) dt + b.$$

Применяя лемму Гронуолла, получаем оценку

$$\int_0^l \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx \leq e^\tau \int_0^l \int_0^\tau h^2 dt dx.$$

Учитывая нулевые начальные условия, имеем

$$W(x, T) = \int_0^T \frac{\partial W}{\partial t} dt,$$

откуда с помощью неравенства Гельдера получаем

$$\int_0^l W^2(x, T) dx \leq T \int_0^l \int_0^T \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dt dx \leq T e^T \int_0^l \int_0^T h^2 dt dx.$$

Окончательная оценка для $R(h)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R(h) &= \int_0^l (W^2(x, T) + W_t^2(x, T)) dx + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^l \int_0^T h^2(x, t) dt dx \leq \\ &\leq \left((Tl + 1)e^T + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \int_0^l \int_0^T h^2(x, t) dt dx = O(\|h\|_{L_2(Q_T)}^2). \end{aligned}$$

□

Заключение. В работе исследована задача оптимального управления колебательными процессами, описываемыми начально-краевой задачей для линейного гиперболического уравнения высокого порядка в частных производных. Основные результаты работы включают:

- 1) явное выражение для градиента минимизируемого квадратичного функционала, полученное с использованием метода интегральных тождеств и техники сопряженных задач;
- 2) доказательство теоремы единственности решения смешанной задачи на основе закона сохранения энергии и энергетических оценок;
- 3) обоснование корректности градиентного метода для рассматриваемого класса задач управления, включая оценку остаточного члена.

Полученные результаты расширяют классические подходы к задачам управления распределенными системами и могут быть применены к широкому классу механических систем, включая модели струн, балок и стержней.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2023. Т. 63, № 1. С. 74–84. EDN: LEONJD. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044466922120031>.
2. Кубышкин В. А. Подвижное управление колебаниями в системах с распределенными параметрами // *Автомат. и телемех.*, 2011. № 10. С. 117–128. EDN: ONJMTX.
3. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2005. Т. 45, № 10. С. 1766–1784. EDN: HSCIQD.
4. Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами // *Мехатрон., автомат., управ.*, 2016. Т. 17, № 9. С. 587–598. EDN: WMCIUZ. DOI: <https://doi.org/10.17587/mau.17.587-598>.
5. Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Таран Н. А. Гашение вынужденных поперечных колебаний упругой балки с помощью нескольких стационарных актюаторов // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 2. С. 5–15. EDN: XUGGAH. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.01>.
6. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными*. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 562 с.
7. Alraddadi I., Chowdhury M. A., Abbas M. S., et al. Dynamical behaviors and abundant new soliton solutions of two nonlinear PDEs via an efficient expansion method in industrial engineering // *Mathematics*, 2024. vol. 12, no. 13, 2053. EDN: AWHEGO. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12132053>.
8. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations // *Games*, 2021. vol. 12, no. 1, 23. EDN: IXNDSP. DOI: <https://doi.org/10.3390/g12010023>.
9. Barbu T. CNN-based temporal video segmentation using a nonlinear hyperbolic PDE-based multi-scale analysis // *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 1, 245. EDN: KEHSPX. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11010245>.
10. Khanfer A., Bougoffa L., Alhelali N. On the sixth-order beam equation of small deflection with variable parameters // *Mathematics*, 2025. vol. 13, no. 5, 727. EDN: AVNCCA. DOI: <https://doi.org/10.3390/math13050727>.
11. Dimitrov N. D., Jonnalagadda J. M. Existence of positive solutions for a class of nabla fractional boundary value problems // *Fractal Fract.*, 2025. vol. 9, no. 2, 131. EDN: SCNVOO. DOI: <https://doi.org/10.3390/fractalfract9020131>.
12. Козлова Е. А. Задача управления для гиперболического уравнения в случае характеристик с угловыми коэффициентами одного знака // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 1. С. 243–247. EDN: PAEJSX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1046>.
13. Козлова Е. А. Задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 1. С. 51–56. EDN: SMXXRV. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-51-56>.
14. Аргучинцев А. В., Кедрин В. С., Кедрина М. С. Вариационное условие оптимальности в задаче управления гиперболическими уравнениями с динамическими граничными условиями // *Вестн. Бурят. гос. ун-та. Матем., информ.*, 2021. № 1. С. 13–23. EDN: PMLLOO. DOI: <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2021-1-13-23>.
15. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Вычислительная теплопередача*. М.: Либроком, 2009. 782 с. EDN: QJVMAV.
16. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*. Кн. 2. М.: МЦНМО, 2011. 434 с.
17. Романенков А. М. Градиент в задаче управления процессами, описываемыми линейными псевдогиперболическими уравнениями // *Дифф. уравн.*, 2024. Т. 60, № 2. С. 224–236. EDN: QKNNLQ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0374064124020068>.

MSC: 49K20, 35Lxx

On determination of gradient in optimal control problems for frictionless mechanical oscillatory systems

A. S. Zinchenko¹, A. A. Nekhaev², A. M. Romanenkov^{1,2}

¹ Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

² Federal Research Center “Computer Science and Control”
of Russian Academy of Sciences,
44/2, Vavilova str., Moscow, 119333, Russian Federation.

Abstract

This paper investigates the problem of gradient computation for an optimal control algorithm applied to a distributed system. The mathematical model of the system is described by an initial-boundary value problem for a linear high-order hyperbolic partial differential equation. The study considers an oscillatory process without energy dissipation. The proposed model covers a wide class of applied problems, including vibrations of strings, beams, rods, and other one-dimensional elastic mechanical systems, as well as systems reducible to these cases. By using the method of integral estimates, we prove a uniqueness theorem for the solution and derive an explicit expression for the gradient of the minimized quadratic functional.

Keywords: optimal control, hyperbolic equations, oscillatory systems, gradient method, initial-boundary value problems.

Received: 13th November, 2024 / Revised: 23rd May, 2025 /

Accepted: 2nd June, 2025 / First online: 3rd July, 2025

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zinchenko A. S., Nekhaev A. A., Romanenkov A. M. On determination of gradient in optimal control problems for frictionless mechanical oscillatory systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 566–578. EDN: VCVBSZ. DOI: 10.14498/vsgtu2133 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander S. Zinchenko ✉ <https://orcid.org/0000-0001-7971-4572>

Cand. Econom. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics¹; e-mail: zinchenkoas@mai.ru

Aleksander A. Nekhaev <https://orcid.org/0009-0004-2062-7967>

Research Engineer; Dept. of Mathematical Modeling of Heterogeneous Systems²;

e-mail: ganzol177@gmail.com

Alexander M. Romanenkov <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mathematics¹; Senior Researcher; Dept. of Mathematical Modeling of Heterogeneous Systems²;

e-mail: romanaleks@gmail.com

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the conceptualization of the study and manuscript preparation. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Barseghyan V. R. Optimal boundary control of a distributed heterogeneous vibrating system with given states at intermediate times, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 12, pp. 2023–2032. EDN: RNFIXV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554252212003X>.
2. Kubyshkin V. A. Mobile control of vibrations in systems with distributed parameters, *Autom. Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 10, pp. 2112–2122. EDN: PEDUVV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0005117911100109>.
3. Egorov A. I., Znamenskaya L. N. Control of vibrations of coupled objects with distributed and lumped parameters, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 10, pp. 1701–1718. EDN: LJHACF.
4. Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A. The moment problem in control problems of elastic dynamic systems, *Mekhatron., Avtomat., Upravl.*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 587–598 (In Russian). EDN: WMCIUZ. DOI: <https://doi.org/10.17587/mau.17.587-598>.
5. Atamuratov A. Zh., Mikhailov I. E., Taran N. A. Numerical damping of oscillations of beams by using multiple point actuators, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 5–15 (In Russian). EDN: XUGGAH. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.01>.
6. Evans L. K. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Novosibirsk, Tamara Rozhkovskaya, 2003, 562 pp. (In Russian)
7. Alraddadi I., Chowdhury M. A., Abbas M. S., et al. Dynamical behaviors and abundant new soliton solutions of two nonlinear PDEs via an efficient expansion method in industrial engineering, *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 13, 2053. EDN: AWHEGO. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12132053>.
8. Arguchintsev A., Poplevko V. An optimal control problem by a hybrid system of hyperbolic and ordinary differential equations, *Games*, 2021, vol. 12, no. 1, 23. EDN: IXNDSP. DOI: <https://doi.org/10.3390/g12010023>.
9. Barbu T. CNN-based temporal video segmentation using a nonlinear hyperbolic PDE-based multi-scale analysis, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 1, 245. EDN: KEHSPX. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11010245>.
10. Khanfer A., Bougoffa L., Alhelali N. On the sixth-order beam equation of small deflection with variable parameters, *Mathematics*, 2025, vol. 13, no. 5, 727. EDN: AVNCCA. DOI: <https://doi.org/10.3390/math13050727>.
11. Dimitrov N. D., Jonnalagadda J. M. Existence of positive solutions for a class of nabla fractional boundary value problems, *Fractal Fract.*, 2025, vol. 9, no. 2, 131. EDN: SCNVOO. DOI: <https://doi.org/10.3390/fractalfract9020131>.
12. Kozlova E. A. Control problem for the hyperbolic equation with the characteristics having the angular coefficients of the same sign, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 1, pp. 243–247 (In Russian). EDN: PAEJSX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1046>.
13. Kozlova E. A. Boundary Control Problem for the Hyperbolic System, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 1, pp. 51–56 (In Russian). EDN: SMXXRV. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-1-2-51-56>.
14. Arguchintsev A. V., Kedrin V. S., Kedrina M. S. Variational optimality condition in the control problem of hyperbolic equations with dynamic boundary conditions, *Bull. Buryat*

State Univ. Math., Inform., 2021, no. 1, pp. 13–23 (In Russian). EDN: PMLLOO. DOI: <https://doi.org/10.18101/2304-5728-2021-1-13-23>.

15. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, Librokom, 2014, 784 pp. (In Russian). EDN: QJVMAV.
16. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods], Part 2. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2011, 434 pp. (In Russian)
17. Romanenkov A. M. Gradient in the problem of controlling processes described by linear pseudohyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2024, vol. 60, no. 2, pp. 215–226. EDN: FGNUMP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S001226612402006X>.



УДК 539.376:519.651; 519.248:531

Прогнозирование ползучести и длительной прочности наводороженного титанового сплава ВТ6 по изделию-лидеру

В. П. Радченко, Е. А. Афанасьева, М. Н. Саушкин

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Показано обобщение ранее разработанного метода прогнозирования ползучести и длительной прочности на основании известной информации о поведении заранее испытанного образца (образец-лидер, прототип) в условиях вязкого разрушения материала для случая воздействия на материал агрессивной среды — наводороживания металлических образцов и элементов конструкций с разной степенью внедренного водорода. Отмечены преимущества разработанного метода по сравнению с более сложными известными способами. Показаны результаты расчета ползучести и длительной прочности наводороженных образцов из сплава ВТ6 при температуре 600 °С. Результаты исследования демонстрируют, что разработанный метод позволяет не только прогнозировать кривые ползучести и длительной прочности, но и оптимально планировать эксперименты для получения серии кривых ползучести при постоянных напряжениях.

Ключевые слова: ползучесть, длительная прочность, наводороживание, прогнозирование, образец-лидер.

Получение: 1 мая 2025 г. / Исправление: 18 июня 2025 г. /

Принятие: 8 июля 2025 г. / Публикация онлайн: 8 сентября 2025 г.

Механика деформируемого твердого тела

Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. Прогнозирование ползучести и длительной прочности наводороженного титанового сплава ВТ6 по изделию-лидеру // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2025. Т. 29, № 3. С. 579–590. EDN: VDHDWM. DOI: 10.14498/vsgtu2202.

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Елена Андреевна Афанасьева <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>

кандидат физико-математических наук; младший научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

Михаил Николаевич Саушкин <https://orcid.org/0000-0002-8260-2069>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Введение и постановка задачи. Большинство исследований в области математического моделирования ползучести и длительной прочности металлов посвящено изучению деформации конструкционных элементов, эксплуатирующихся в нейтральных (неагрессивных) средах.

Более сложный характер поведения материала в агрессивных средах при высоких температурах подтверждается, например, исследованиями [1–4], в которых анализируется влияние водорода на ползучесть и длительную прочность титанового сплава ВТ6 при 600 °С в условиях одноосного растяжения [1–3] и сложного напряженного состояния [4].

Систематические научные исследования в области металловедения, металлофизики и технологий титана и его сплавов ведутся давно. Здесь можно отметить как фундаментальные монографии отечественных ученых [5, 6], так и зарубежную монографию энциклопедического типа [7] (перевод на русский язык [8]). Однако основной упор в этих монографиях (как и в огромном количестве других работ аналогичного типа) делается на оценку влияния агрессивных сред на параметры, описывающие металлофизическое состояние материалов. Что же касается изучения процесса ползучести в водородосодержащей среде при высоких температурах (выше 500 °С) с точки зрения построения феноменологических моделей ползучести и длительной прочности элементов конструкций, то здесь количество работ крайне ограничено. В этом направлении можно отметить публикации по исследованию реологического деформирования и разрушения наводороженного сплава ВТ6 при 600 °С в научных школах Института механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова [2, 4, 9–13] и научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского [3, 14], причем в [3, 14] впервые построены и исследованы модели ползучести и длительной прочности наводороженного сплава ВТ6 при температуре 600 °С для сложного напряженного состояния на основе обобщения более ранних результатов работ [15–18].

Одной из центральных задач построения модели ползучести и длительной прочности является наличие базового объема экспериментальных данных кривых ползучести и длительной прочности наводороженных образцов при различных напряженных состояниях. Однако свойства ползучести и длительной прочности для титановых сплавов при высоких температурах существенно зависят от многих факторов. Имеющаяся экспериментальная информация по титановым сплавам весьма противоречива, что обусловлено интенсивным влиянием водорода на процессы необратимой деформации, изменение объемного содержания α - и β -фаз, размеры и морфологию фаз, концентрацию в них легирующих элементов. Кроме этого, на деформацию ползучести оказывают существенное влияние режимы термообработки, размер зерен, уровень напряженного состояния и многие другие факторы [6–8]. Поскольку для механических испытаний в условиях ползучести, как правило, используются образцы в состоянии поставки, учесть все эти факторы (в рамках даже одной плавки они могут отличаться) невозможно, что, в свою очередь, приводит к большому разбросу экспериментальных данных [1–3], нехарактерному для испытаний в нейтральных средах.

Совокупность приведенных выше факторов приводит к существенным проблемам при проведении базовых экспериментальных исследований для

построения реологических моделей наводороженного титанового сплава ВТ6 при высоких температурах [1–3]. Поэтому для получения достоверных результатов влияния растворенного водорода на ползучесть водородосодержащего титанового сплава и их корректного анализа, во-первых, необходимы новые методические подходы для снижения влияния ряда перечисленных структурных факторов на механизм и параметры ползучести, что частично реализовано в работах [1, 2] при исследовании сплава ВТ6 при температуре 600 °С. Во-вторых, необходимо разрабатывать методику оптимального планирования экспериментальных исследований собственно для получения кривых ползучести при различных напряжениях и концентрации водорода, чтобы снизить трудоемкость получения базовой экспериментальной информации, необходимой для построения модели ползучести и длительной прочности. В этом направлении некоторые позитивные результаты получены в работах [19, 20] для прогнозирования деформации ползучести и длительной прочности образцов в нейтральных средах по известному реологическому поведению предварительно испытанного образца-лидера (прототипа) в условиях вязкого разрушения материала. В этом методе вводится предположение, что при отсутствии мгновенной пластической деформации и первой стадии ползучести, зная кривую ползучести образца-лидера при определенном напряжении и время его разрушения, можно определить кривые ползучести при других напряжениях, используя лишь начальные скорости деформации образцов при этих напряжениях, в отличие от работ [21–24], в которых прогнозируется лишь время до разрушения по начальной скорости ползучести.

На основе модели вязкого механизма разрушения в [19, 20] получено соотношение для времени достижения одного и того же значения деформации ползучести $p(\sigma, t)$ двумя реализациями: образцом-прототипом при напряжении σ_1 и исследуемым образцом при напряжении σ_2 :

$$t(p, \sigma_2) = t(p, \sigma_1) \cdot \frac{\dot{p}_0(\sigma_1)}{\dot{p}_0(\sigma_2)}, \quad \dot{p}_0(\sigma_i) = \dot{p}(\sigma_i, 0), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

из которого следует, что кривая ползучести исследуемого образца при номинальном напряжении σ_2 может быть получена с помощью преобразования подобия из кривой ползучести образца-лидера при номинальном напряжении σ_1 с коэффициентом подобия, который равен отношению начальных скоростей деформации образца прототипа и исследуемого образца, т. е. $\dot{p}_0(\sigma_1)/\dot{p}_0(\sigma_2)$.

В настоящей работе сделана попытка обобщения разработанного метода для нейтральной среды [19, 20] на случай воздействия на материал агрессивной среды — наводороживания металлических образцов и элементов конструкций с разной степенью внедренного водорода.

Результаты прогноза ползучести и длительной прочности наводороженных образцов из сплава ВТ6 при температуре 600 °С. Для анализа используются экспериментальные данные для наводороженного сплава ВТ6 при температуре 600 °С с концентрацией водорода $c_m \in [0.1; 0.2; 0.3]$ мас. %, представленные в работах [1, 25]. Испытания в [1, 25] выполнены в широком диапазоне номинальных напряжений $\sigma \in [47; 67; 117; 167; 217]$ МПа на сплошных цилиндрических образцах диаметром 5 мм и рабочей длиной $l_0 = 25$ мм, изготовленных из горячекатаного прутка. В исходном состоянии концентрация водорода не более 0.008 мас. %, поэтому в дальнейшем для

ненаводороженных образцов полагалось $c_m = 0\%$. В качестве характеристики деформированного состояния использована логарифмическая деформация

$$p(t) = \ln(l(t)/l_0),$$

где $l(t)$ — текущее удлинение образца в момент времени t .

Для иллюстрации метода в качестве образца-лидера использовалась реализация при $\sigma = 167$ МПа для всех уровней концентрации водорода c_m . В табл. 1 приведены экспериментальные [1, 2, 25] значения для начальной скорости установившейся ползучести $\dot{p}_0(\sigma)$ и времени до разрушения t_1^* для всех пяти уровней номинального напряжения σ . С использованием этих экспериментальных значений по формуле (1) получены прогнозируемые значения времени до разрушения t_2^* по разработанной методике (см. табл. 1). Для сравнения в табл. 1 приведены расчетные значения времени до разрушения t_3^* по модели авторов [1, 25]. В двух последних столбцах табл. 1 приведены значения относительных погрешностей Δ_2 и Δ_3 (%), вычисленных по формуле

$$\Delta_i = \left| \frac{t_i^* - t_1^*}{t_1^*} \right| \cdot 100\%, \quad i = 2, 3$$

для модели (1) и модели авторов [1, 25]. На рис. 1–4 штриховыми линиями показаны расчетные (прогнозируемые) зависимости для деформации ползучести, полученные на основании (1), при этом использовались лишь экспериментальные данные для образца-лидера ($\sigma = 167$ МПа) и начальные скорости деформации ползучести для реализаций при других уровнях напряжений.

Согласно полученным результатам, погрешность прогнозирования времени до разрушения по модели (1) для стационарных кривых ползучести сопоставима с результатами, полученными по более сложной модели [1, 25], построенной на основе кинетических уравнений ползучести разупрочняющегося материала, содержащей 8 параметров для всего спектра c_m и 4 параметра при фиксированном значении c_m . В модели же (1) всего один параметр — отношение скоростей ползучести образца-лидера и исследуемого образца в начальный момент времени.

Заключение. В работе показано, что метод прогнозирования по образцу-лидеру дает приемлемые результаты расчета кривых ползучести и времени до разрушения (с учетом большого разброса экспериментальных данных, отмеченных в [1, 25]) и для наводороженных конкретных образцов из титанового сплава ВТ6 при температуре 600 °С. При этом после внедрения водорода, вообще говоря, происходит частичное охрупчивание этого материала и ни о каком вязком механизме разрушения, в рамках которого и разработан метод [19, 20], здесь речи быть не может.

На основании результатов настоящей статьи появляется возможность оптимального планирования экспериментальных исследований для получения стационарных кривых ползучести и прогнозирования времени разрушения при постоянных напряжениях, в том числе и для наводороженного материала. Эти данные являются базовой информацией для построения феноменологических реологических моделей.

Для этого достаточно выполнить следующее: провести эксперименты при произвольном уровне напряжений на трех–пяти образцах (что необходимо

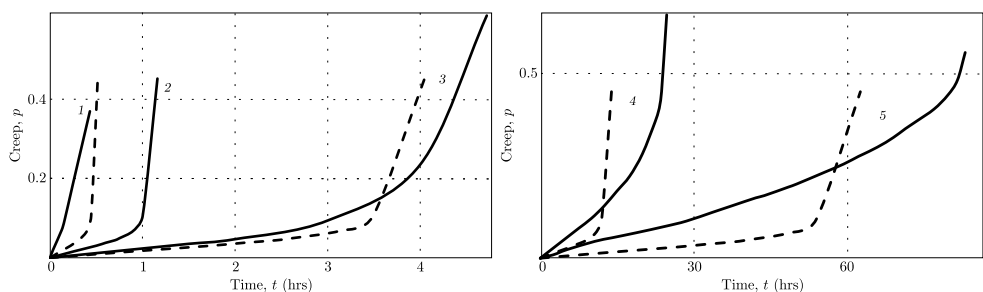


Рис. 1. Экспериментальные (сплошные) и прогнозируемые (штриховые) кривые ползучести сплава ВТ6 по образцу-лидеру 2 при температуре 600°C с содержанием водорода $c_m = 0\%$; маркеры: 1— $\sigma = 217$ МПа, 2— $\sigma = 167$ МПа, 3— $\sigma = 117$ МПа; 4— $\sigma = 67$ МПа, 5— $\sigma = 47$ МПа

[Figure. 1. Experimental (solid lines) and predicted (dashed lines) creep curves for the VT6 alloy based on leader specimen 2 at a temperature of 600 with a hydrogen-ion concentration by mass $c_m = 0\%$; markers: 1— $\sigma = 217$ МПа, 2— $\sigma = 167$ МПа, 3— $\sigma = 117$ МПа; 4— $\sigma = 67$ МПа, 5— $\sigma = 47$ МПа]

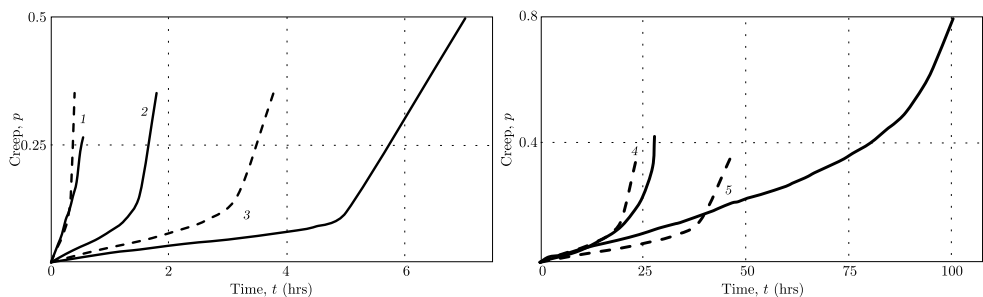


Рис. 2. Экспериментальные (сплошные) и прогнозируемые (штриховые) кривые ползучести сплава ВТ6 по образцу-лидеру 2 при температуре 600°C с содержанием водорода $c_m = 0.1\%$; маркеры: 1— $\sigma = 217$ МПа, 2— $\sigma = 167$ МПа, 3— $\sigma = 117$ МПа; 4— $\sigma = 67$ МПа, 5— $\sigma = 47$ МПа

[Figure. 2. Experimental (solid lines) and predicted (dashed lines) creep curves for the VT6 alloy based on leader specimen 2 at a temperature of 600 with a hydrogen-ion concentration by mass $c_m = 0.1\%$; markers: 1— $\sigma = 217$ МПа, 2— $\sigma = 167$ МПа, 3— $\sigma = 117$ МПа; 4— $\sigma = 67$ МПа, 5— $\sigma = 47$ МПа]

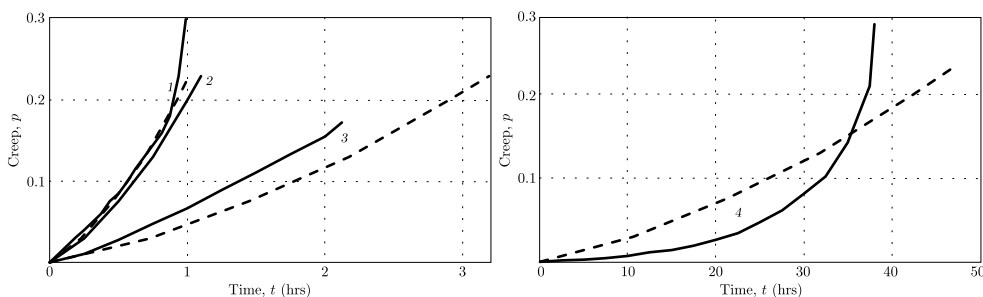


Рис. 3. Экспериментальные (сплошные) и прогнозируемые (штриховые) кривые ползучести сплава ВТ6 по образцу-лидеру 2 при температуре 600°C с содержанием водорода $c_m = 0.2\%$; маркеры: 1— $\sigma = 217$ МПа, 2— $\sigma = 167$ МПа, 3— $\sigma = 117$ МПа; 4— $\sigma = 67$ МПа

[Figure. 3. Experimental (solid lines) and predicted (dashed lines) creep curves for the VT6 alloy based on leader specimen 2 at a temperature of 600 with a hydrogen-ion concentration by mass $c_m = 0.2\%$; markers: 1— $\sigma = 217$ МПа, 2— $\sigma = 167$ МПа, 3— $\sigma = 117$ МПа; 4— $\sigma = 67$ МПа]

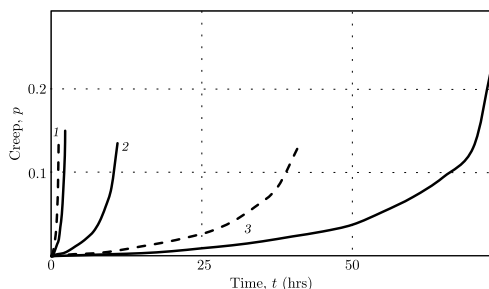


Рис. 4. Экспериментальные (сплошные) и прогнозируемые (штриховые) кривые ползучести сплава ВТ6 по образцу-лидеру 2 при температуре 600 °С с содержанием водорода $c_m = 0.3\%$; маркеры: 1 — $\sigma = 217$ МПа, 2 — $\sigma = 167$ МПа, 3 — $\sigma = 117$ МПа

[Figure. 4. Experimental (solid lines) and predicted (dashed lines) creep curves for the VT6 alloy based on leader specimen 2 at a temperature of 600 with a hydrogen-ion concentration by mass $c_m = 0.3\%$; markers: 1 — $\sigma = 217$ МПа, 2 — $\sigma = 167$ МПа, 3 — $\sigma = 117$ МПа]

Таблица 1

Значения длительной прочности сплава ВТ6 при температуре 600 °С с содержанием водорода c_m при различных уровнях напряжений [Long-term strength values of the VT6 alloy at a temperature of 600 °С with hydrogen-ion concentration by mass c_m at various stress levels]

Experimental data				Predicted data			
σ_0 , МПа	c_m , %	$\dot{p}_0(\sigma)$, h^{-1}	t_1^* , h	t_2^* , h	t_3^* , h	Δ_2 , %	Δ_3 , %
47	0	0.0036	83.1	62.5	57.97	24.8	30.2
	0.1	0.0038	100.36	46.6	80.27	53.6	20.0
67	0	0.0162	24.76	13.9	19.4	43.9	21.6
	0.1	0.0075	27.96	23.6	26.84	15.6	4.0
	0.2	0.0028	38	46.8	45.3	23.2	19.2
117	0	0.0556	4.72	4.05	3.45	14.2	26.9
	0.1	0.047	7.02	3.77	4.77	46.3	32.1
	0.2	0.041	2.12	3.19	7.83	50.5	269.3
	0.3	0.0008	73	41.25	40.9	43.5	44.0
167	0	0.194	1.16	—	1.14	—	1.7
	0.1	0.099	1.79	—	1.58	—	11.7
	0.2	0.119	1.1	—	2.55	—	131.8
	0.3	0.003	11	—	13.2	—	20.0
217	0	0.4374	0.43	0.51	0.51	18.6	18.6
	0.1	0.284	0.55	0.62	0.7	12.7	27.3
	0.2	0.129	0.99	1.01	1.17	2.0	18.2
	0.3	0.0275	2.31	1.2	5.77	48.1	149.8

из-за существенного разброса данных при реологическом деформировании), построить надежную усредненную кривую стационарной ползучести и использовать ее в качестве образца-лидера.

Далее, используя начальную скорость ползучести в испытаниях исследуемого образца при любом другом уровне напряжений, из (1) можно рассчитать и кривую ползучести, и время разрушения этого образца. При этом нет необходимости продолжения эксперимента вплоть до разрушения, достаточно ограничиться начальной скоростью установившейся ползучести. Учиты-

вая, что при отсутствии первой стадии ползучести (это необходимое условие использования модели (1)), на начальном участке кривой ползучести поврежденность (появление третьей стадии ползучести) еще отсутствует, можно на одном образце на начальном участке выполнить ступенчатое изменение напряжения и каждый раз, зафиксировав начальную скорость ползучести, дать прогноз кривой деформирования и времени до разрушения уже для серии различных напряжений.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что, во-первых, можно сократить объем экспериментальных исследований, а во-вторых, спрогнозировать время испытаний конкретного образца и тем самым оптимальным образом спланировать загрузженность испытательного оборудования и всего плана экспериментальных исследований в условиях ползучести и воздействия агрессивных сред (наводороживания). В качестве замечания отметим, что к результатам прогнозирования кривой ползучести и времени разрушения конкретного образца по изделию-лидеру нужно относиться как к первичным оценкам этих характеристик, но и эта информация является полезной при планировании экспериментальных исследований.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Конкурирующие интересы. Конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2023-0003) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Библиографический список

1. Локощенко А. М., Ильин А. А., Мамонов А. М., Назаров В. В. Экспериментально-теоретическое исследование влияния водорода на ползучесть и длительную прочность титанового сплава ВТ6 // *Металлы*, 2008. № 2. С. 60–66. EDN: IJPPCZ.
2. Локощенко А. М., Назаров В. В., Новотный С. В., Ковальков В. К. Экспериментальное исследование ползучести и длительной прочности титанового сплава ВТ6 при температуре 600°C // *Вестн. двигателестр.*, 2006. № 3. С. 56–59.
3. Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н. [и др.] Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 286–302. EDN: FNTAVO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1850>.

4. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 489 с.
5. Носов В. К., Калачев Б. А. *Водородное пластифицирование при горячей деформации титановых сплавов*. М.: Металлургия, 1986. 118 с.
6. Ильин А. А., Калачев Б. А., Носов В. К., Мамонов А. М. *Водородная технология титановых сплавов*. М.: МИСИС, 2002. 392 с.
7. Zwicker U. *Titan und Titanlegierungen*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1974. xi+717 pp. (In German). DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-80587-5>.
8. Цвиккер У. *Титан и его сплавы*. М.: Металлургия, 1979. 512 с.
9. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Третьяков П. М., Махов Д. Д. Ползучесть и длительная прочность водородсодержащего титанового сплава ВТ6 при кусочно-постоянной зависимости растягивающего напряжения от времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 179–188. EDN: NCUTFK. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1971>.
10. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Ларин Н. С. Длительная прочность стержней, растягиваемых в агрессивной среде, при различных двухсвязных формах их поперечных сечений // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 1. С. 66–88. EDN: VVUUCI. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521010045>.
11. Басалов Ю. Г., Локощенко А. М., Фомин Л. В. Ползучесть и длительное разрушение цилиндрической оболочки при нестационарном сложном напряженном состоянии в присутствии агрессивной окружающей среды // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 4. С. 109–120. EDN: MZUFSI. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921040048>.
12. Ларин Н. С., Локощенко А. М., Фомин Л. В. Зависимость времени до разрушения стержней, растягиваемых при ползучести в присутствии агрессивной среды, от формы односвязного поперечного сечения // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 5. С. 59–69. EDN: WCLABH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919050106>.
13. Фомин Л. В., Басалов Ю. Г. Длительное разрушение составного стержня при растяжении в условиях ползучести в присутствии активной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2024. Т. 28, № 2. С. 390–400. EDN: WXJJNS. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2018>.
14. Игумнов Л. А., Волков И. А., Казаков Д. А. [и др.] Численное моделирование процесса ползучести титанового сплава ВТ6 при многоосном напряженном состоянии с учетом влияния агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 435–456. EDN: E1PPKA. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1873>.
15. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с. EDN: RYRTNT.
16. Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. *Прикладная теория вязкопластичности*. Н. Новгород: Нижегородск. гос. ун-т, 2015. 318 с.
17. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А. [и др.] Уравнения состояния нестационарной ползучести при сложном нагружении // *ПМТФ*, 2018. Т. 59, № 3. С. 191–202. EDN: URHZBY. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20180320>.
18. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А. [и др.] Модель поврежденной среды для описания длительной прочности конструкционных материалов (металлов и их сплавов) // *Пробл. прочности пластич.*, 2017. Т. 79, № 3. С. 285–300. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300>.
19. Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. Прогнозирование высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязкопластического материала по образцу-лидеру // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 2. С. 292–308. EDN: EPOTNP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2001>.
20. Радченко В. П., Афанасьева Е. А., Саушкин М. Н. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материала по образцу-лидеру в условиях вязкого разрушения // *ПМТФ*, 2023. Т. 64, № 6. С. 199–209. EDN: JTYSNM. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF202315261>.

21. Lundin C. D., Aronson A. H., Jackman L. A., Clough W. R. Very-short-time, very-high-temperature creep rupture of type 347 stainless steel and correlation of data // *J. Basic Eng.*, 1969. vol. 91, no. 1. pp. 32–38. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3571023>.
22. Hoff N. J. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads // *J. Appl. Mech.*, 1953. vol. 20, no. 1. pp. 105–108. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4010601>.
23. Можаровская Т. Н. О зависимости времени до разрушения при длительном нагружении в условиях плоского напряженного состояния от минимальной скорости деформаций ползучести // *Пробл. прочн.*, 1982. № 12. С. 51–54.
24. Можаровская Т. Н., Можаровский В. Н., Штефан Н. И. О зависимости времени до разрушения и установившейся скорости деформаций ползучести конструкционных материалов // *Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Машинобудування*, 2010. Т. 59. С. 37–40.
25. Назаров В. В. *Экспериментально-теоретическое исследование ползучести и длительной прочности металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях*: Дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. М.: Моск. гос. индустриальный университет, 2008. 130 с.

MSC: 74S60, 74D10

Prediction of creep and long-term strength for hydrogen-charged VT6 Titanium alloy using a leader specimen

V. P. Radchenko, E. A. Afanaseva, M. N. Saushkin

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

An extension of a previously developed method for predicting creep and long-term strength is presented. The method is based on known information concerning the behavior of a pre-tested specimen (a leader specimen or prototype) under conditions of viscous material failure and is eventually generalized to the case of exposure to an aggressive environment—hydrogen charging of metallic specimens and structural components with varying degrees of introduced hydrogen. The advantages of the developed method over more complex known models are noted. Results of the calculation of creep and long-term strength for hydrogen-charged specimens made of VT6 alloy at a temperature of 600 °C are presented. The research results demonstrate that the developed method not only allows us to predict the creep and long-term strength curves but even enables to plan the optimal experiments to obtain a series of creep curves under constant stress.

Keywords: creep, long-term strength, hydrogen charging, prediction, leader specimen.

Received: 1st May, 2025 / Revised: 18th June, 2025 /

Accepted: 8th July, 2025 / First online: 8th September, 2025

Mechanics of Solids

Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Afanaseva E. A., Saushkin M. N. Prediction of creep and long-term strength for hydrogen-charged VT6 Titanium alloy using a leader specimen, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 579–590. EDN: VDHDWM. DOI: 10.14498/vsgtu2202 (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Elena A. Afanaseva  <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Junior Researcher; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

Mikhail N. Saushkin  <https://orcid.org/0000-0002-8260-2069>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: saushkin.mn@samgtu.ru

Competing interests. The authors declare that there is no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Author contributions and responsibility. All authors participated in the development of the article's concept and in writing the manuscript. The authors bear full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSSE-2023-0003) within the framework of the state assignment for the Samara State Technical University.

References

1. Lokoshchenko A. M., Il'in A. A., Mamonov A. M., Nazarov V. V. Experimental and theoretical study of the effect of hydrogen on the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy, *Russ. Metall.*, 2008, vol. 2008, no. 2, pp. 142–147. EDN: LLNZQN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029508020109>.
2. Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V., Novotny S. V., Kovalkov V. K. Experimental study of creep and long-term strength of titanium alloy VT6 at temperature 600°C, *Vestn. Dvigatelsestr.*, 2006, no. 3, pp. 56–59 (In Russian).
3. Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., et al. Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 286–302 (In Russian). EDN: FNTAVO. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1850>.
4. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. EDN: YKQNZJ. DOI: <https://doi.org/10.1201/b22242>.
5. Nosov V. K., Kalachev B. A. *Vodorodnoe plastifitsirovanie pri goriachei deformatsii titanovykh splavov* [Hydrogen Plasticization in Hot Deforming of Titanium Alloys]. Moscow, Metallurgiya, 1986, 118 pp. (In Russian)
6. Il'in A. A., Kalachev B.A., Nosov V. K., Mamonov A. M. *Vodorodnaia tekhnologiya titanovykh splavov* [Hydrogen Technology of Titanium Alloys]. Moscow, MISIS, 2002, 392 pp. (In Russian)
7. Zwicker U. *Titan und Titanlegierungen*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1974, xi+717 pp. (In German). DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-80587-5>.
8. Zwicker U. *Titan i ego splavy* [Titanium and Its Alloys]. Moscow, Metallurgiya, 1979, 512 pp. (In Russian)
9. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Tretyakov P. M., Makhov D. D. Creep and long-term strength of hydrogen-containing VT6 titanium alloy with a piecewise constant dependence of tensile stress on time, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 179–188 (In Russian). EDN: NCUTFK. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1971>.
10. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Larin N. S. Creep rupture strength of rods stretched in an aggressive medium with various two-connected forms of their cross-sections, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1277–1294. EDN: GGQXPT. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070177>.
11. Basalov Yu. G., Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Creep and long-term destruction of a cylindrical shell in a non-stationary complex stress state in the presence of an aggressive environment, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 4, pp. 523–533. EDN: UQMUCY. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565442104004X>.
12. Larin N. S., Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Dependence of creep-rupture lifetime for rods under tension in an aggressive environment on the shape of a single-cell cross-section, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 1042–1050. EDN: YTDVPN. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419070057>.

13. Fomin L. V., Basalov Y. G. Long-term fracture of a composite rod under tension in creep conditions in the presence of an active medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2024, vol. 28, no. 2, pp. 390–400 (In Russian). EDN: WXJJNS. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2018>.
14. Igumnov L. A., Volkov I. A., Kazakov D. A., et al. Numerical simulation of the creep process of titanium alloy VT6 under a multi-axis stress state taking into account the influence of an aggressive environment, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 435–456 (In Russian). EDN: EIPPKA. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1873>.
15. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of State for Viscoelastoplastic Media with Damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian). EDN: RYRTNT.
16. Volkov I. A., Igumnov L. A., Korotkikh Yu. G. *Prikladnaya teoriya vyazkoplasticheskosti* [Applied Theory of Viscoplasticity]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 2015, 318 pp. (In Russian)
17. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., et al. State equations of unsteady creep under complex loading, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 551–560. EDN: YBWOPB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894418030203>.
18. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., et al. A damaged medium model for describing the process of long-term strength of structural materials (metals and their alloys), *Probl. Prochn. Plast.*, 2017, vol. 79, no. 3, pp. 285–300 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300>.
19. Radchenko V. P., Afanaseva E. A., Saushkin M. N. Predicting high-temperature rheological deformation and long-term strength of a viscoplastic material using a leader sample, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 2, pp. 292–308 (In Russian). EDN: EPOTNP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu2001>.
20. Radchenko V. P., Afanaseva E. A., Saushkin M. N. Using a leader sample to predict the creep and long-term strength of a material during ductile fracture, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2024, vol. 64, no. 6, pp. 1119–1127. EDN: TEIHNL. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894423060238>.
21. Lundin C. D., Aronson A. H., Jackman L. A., Clough W. R. Very-short-time, very-high-temperature creep rupture of type 347 stainless steel and correlation of data, *J. Basic Eng.*, 1969, vol. 91, no. 1, pp. 32–38. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3571023>.
22. Hoff N. J. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads, *J. Appl. Mech.*, 1953, vol. 20, no. 1, pp. 105–108. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4010601>.
23. Mozharovskaya T. N. Relationship of the time until failure in long-term loading under conditions of the plane stressed state to the minimum rate of creep deformations, *Strength Mater.*, 1982, vol. 14, no. 12, pp. 1635–1639. EDN: XLUTEH. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00768650>.
24. Mozharovskaya T. N., Mozharovskii V. N., Shtefan N. I. Dependence between the time to fracture and the steady-state creep strain rate of structural materials, *Visnik NTUU KPI. Ser. Mashobuduvannya*, 2010, vol. 59, pp. 37–40 (In Russian).
25. *Experimental-Theoretical Study of Creep and Long-Term Strength of Metals under Uniaxial and Complex Stress States*, Cand. Sci. Dissertation in Phys. and Math. Moscow, Moscow State Industrial Univ., 2008, 130 pp. (In Russian)



УДК 517.958:[531.391+521.93+521.172]

Моделирование чандлеровского и годичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты

С. С. Крылов, З. А. Мьо, В. В. Перепелкин

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследовано влияние прецессии лунной орбиты (с периодом 18.6 года) на параметры основных составляющих движения земного полюса — чандлеровского и годичного колебаний. Разработана модифицированная модель движения полюса, включающая дополнительные слагаемые, учитывающие долгопериодическое лунное возмущение. Численные эксперименты демонстрируют, что учет данных возмущений в автономной модели без коррекции параметров позволяет повысить точность определения положения полюса в среднем на 5 см.

Ключевые слова: моделирование вращения Земли, движение полюса, лунное возмущение, чандлеровское колебание.

Получение: 1 марта 2025 г. / Исправление: 27 мая 2025 г. /
Принятие: 4 июня 2025 г. / Публикация онлайн: 14 июля 2025 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2025

© СамГТУ, 2025 (составление, дизайн, макет)

♾️ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Крылов С. С., Мьо З. А., Перепелкин В. В. Моделирование чандлеровского и годичного колебаний земного полюса с учетом прецессии лунной орбиты // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2025. Т. 29, № 3. С. 591–602. EDN: SPHAXK. DOI: 10.14498/vsgtu2168.

Сведения об авторах

Сергей Сергеевич Крылов <https://orcid.org/0000-0003-3267-6411>

кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. 806 вычислительной математики и программирования; e-mail: compgra@yandex.ru

Зо Аунг Мьо <https://orcid.org/0009-0009-8557-5965>

аспирант; e-mail: myozawaung53@gmail.com

Вадим Владимирович Перепелкин <https://orcid.org/0000-0002-9061-4991>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. 802 мехатроники и теоретической механики; e-mail: vadim802@gmail.com

Методы моделирования движения полюса. Задача моделирования движения земных полюсов (под которыми понимаются точки пересечения мгновенной оси вращения Земли с ее поверхностью) представляет значительный научный интерес в области теоретической и небесной механики, геофизики и астрономии. Исследование движения северного полюса имеет как фундаментальное значение для решения задач геофизики и небесной механики, так и практическую важность. Координаты земного полюса используются, прежде всего, для вычисления матрицы перехода между земной и небесной системами координат [1, 2].

Данный переход в упрощенном виде реализуется посредством композиции пяти поворотов на угловые величины — параметры ориентации Земли. Два из этих поворотов осуществляются вокруг экваториальных осей (оси, пересекающей гринвичский меридиан, и ортогональной ей оси) на координаты земного полюса, традиционно измеряемые в угловых миллисекундах. Особую актуальность приобретает проблема прогнозирования параметров ориентации Земли, включающая задачу предсказания движения земного полюса.

Для решения указанной задачи применяются различные методы математического моделирования. Сложный процесс колебаний полюса характеризуется составляющими с существенно различающимися частотными и амплитудными характеристиками. Математическое описание колебаний земного полюса осуществляется как с помощью детерминированных, так и стохастических или комбинированных подходов [2–17].

Детерминированные модели движения земного полюса основываются, как правило, на теоретических исследованиях Л. Эйлера, определившего 305-суточный период свободной нутации для недеформируемой Земли, и модели С. Чандлера (1891 г.), выявившего по результатам многочисленных наблюдений вариации широт обсерваторий с двумя периодическими компонентами движения полюса — 365 и 430–440 суток [3, 4].

Расхождение между чандлеровским периодом и периодом прецессии Эйлера (305 суток для недеформируемой фигуры Земли) исследовалось в работах С. Ньюкома, А. Пуанкаре, Г. Джеффриса, А. Лява, У. Манка, Г. Макдональда, Ф. А. Слудского, М. С. Молоденского (см. обзоры в [3, 4]). В исторической традиции движение земного полюса с периодом 430–440 суток принято называть свободной нутацией деформируемой Земли, или чандлеровскими колебаниями полюса.

Для описания свободной нутации деформируемой Земли также применяются методы аналитической механики движения деформируемого твердого тела относительно центра масс в переменных Андуайе, или в переменных «действие — угол» [5, 6].

Обзор ранних исследований влияния аддитивных стохастических возмущений, зависящих от времени, на колебания земного полюса представлен в [7]. В работе [8] содержится детальный анализ построения комбинированных стохастических моделей движения земного полюса. В частности, в [9, 10] на основе детерминированной модели движения земного полюса и данных Международной службы вращения Земли¹ (МСВЗ) разработана комбинированная небесномеханическая стохастическая корреляционная модель движения Земли относительно центра масс.

¹<https://www.iers.org/>

Сложная динамика гидросферы, включающая мелко- и крупномасштабные движения, а также широкий спектр турбулентных флуктуаций, свидетельствует о нелинейном характере момента сил диссипации. В [11] исследовано влияние нелинейных флуктуационно-диссипативных моментов сил на устойчивость режимов чандлеровских колебаний.

Однако в ранее разработанных моделях как период, так и амплитуда обоих колебаний (чандлеровского и годичного) предполагаются постоянными, несмотря на их известную изменчивость в определенных пределах [12, 13]. Современная проблема переменности параметров основных компонент колебаний земного полюса остается актуальной и недостаточно изученной [14].

С практической точки зрения решение данной задачи возможно по двум направлениям: повышение точности прогноза модели и увеличение ее автономности. Последнее связано с необходимостью увеличения времени автономной работы, например, при функционировании на борту космического аппарата [15].

Настоящая работа посвящена уточнению модели, функционирующей в автономном режиме без коррекции параметров. Повышение точности модели движения полюса в данном случае может быть достигнуто либо путем уточнения средних значений параметров модели, что, как показывают эксперименты, не дает значительного эффекта, либо за счет учета новых физических или эмпирических закономерностей.

1. Математическая модель и перспективы ее развития. Как известно, простейшая модель движения земного полюса описывает двухчастотный колебательный процесс [16, 17]:

$$x_p = c_x + a_{ch} \cos w_{ch} + a_h \cos w_h, \quad y_p = c_y + a_{ch} \sin w_{ch} + a_h \sin w_h. \quad (1)$$

Здесь c_x, c_y — координаты тренда, содержащие колебания с периодами свыше 6.45 лет; a_{ch}, a_h и w_{ch}, w_h — амплитуды и фазы чандлеровского и годичного колебаний соответственно.

При этом модель является двухчастотной в приближенном смысле — когда амплитуды и фазы основных составляющих постоянны. Применение такой двухчастотной модели имеет ограничения как по точности прогноза, так и по времени ее автономного использования. Как показано в [14, 18], на основании анализа длительных рядов наблюдений, амплитуды и фазы основных составляющих можно считать постоянными лишь на относительно небольших временных интервалах (до 20 лет). На таких интервалах параметры могут рассматриваться как квазипостоянные, определяемые на промежутках аппроксимации движения полюса, непосредственно предшествующих интервалам прогнозирования. В этом случае значения амплитуд и фаз основных составляющих колебаний полюса следует интерпретировать как средние величины, поскольку помимо медленных изменений на временных масштабах 40 лет и более эти параметры подвержены также незначительным вариациям с меньшими периодами.

Как было установлено в [14], в движении полюса можно выявить влияние долгопериодического лунного воздействия, а именно — связанного с изменением угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору, происходящим с периодом 18.6 года. Колебания угла наклона лунной орбиты к экватору Земли обусловлены ее прецессией вокруг нормали к плоскости эклиптики.

Для повышения точности модели в автономном режиме предлагается учесть указанное влияние в уравнениях движения полюса, оценить значения параметров дополнительных слагаемых расширенной модели и провести численный эксперимент по оценке точности такой модели.

2. Вариации параметров движения земного полюса с частотой прецессии орбиты Луны. В работе [14] предложено преобразование координат земного полюса, позволяющее выявить синфазность вариаций его движения с прецессией лунной орбиты. Переход от исходной земной системы координат (x_p, y_p) к новой системе (ξ_p, η_p) , в которой полюс совершает колебания, синфазные с прецессионным движением лунной орбиты, в матричной форме описывается выражением

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \Pi(w_2 - w_1) \left[\Pi(w_1) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (2)$$

$$w_2 = \begin{cases} w_h, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_{ch}, & \text{если } a_{ch} < a_h; \end{cases} \quad w_1 = \begin{cases} w_{ch}, & \text{если } a_h < a_{ch}, \\ w_h, & \text{если } a_{ch} < a_h; \end{cases}$$

$$\dot{w}_h = \nu\omega_*, \quad \dot{w}_{ch} = N\omega_*.$$

Здесь $\Pi(\alpha)$ — матрица плоского поворота на угол α ; a_0 — среднее значение амплитуды колебаний полюса при его движении вокруг «средней точки» за 6-летний цикл (без учета трендовой составляющей); c_x, c_y определяют положение «средней точки» полюса и содержат константы, вековые слагаемые и вариации с периодами более шести лет; a_{ch}, a_h — амплитуды чандлеровской и годичной гармоник с фазами w_{ch}, w_h соответственно; $N \cong 0.843$, $\nu = 1$ — чандлеровская и годичная частоты, измеряемые в циклах/год; ω_* — среднее движение барицентра системы «Земля — Луна» по орбите вокруг Солнца; $\dot{w}_2 - \dot{w}_1 = \pm\nu_T\omega_*$ — частота шестилетней цикличности движения полюса.

Отметим, что преобразование (2) представляет собой композицию преобразований «поворот» и «сдвиг», определяемую исключительно средними параметрами чандлеровской и годичной компонент. Как показано в [14], в системе координат (ξ_p, η_p) полюс совершает колебания, синфазные с колебаниями угла наклона плоскости лунной орбиты к земному экватору. При этом колебания координаты ξ_p синфазны с колебаниями угла наклона плоскости орбиты Луны к земному экватору, а фаза колебаний координаты η_p сдвинута на $\pi/2$.

В настоящей работе ставится задача учета выявленных ранее вариаций параметров колебательного движения земного полюса с периодом 18.6 года (соответствующим периоду прецессии лунной орбиты и устанавливаемых посредством преобразования (2)) в модели вида (1). Кроме того, требуется оценить точность полученной расширенной модели с учетом дополнительных слагаемых, обусловленных долгопериодическим влиянием Луны.

3. Вариации амплитуд и фаз чандлеровской и годичной компонент в колебательном процессе земного полюса. Примем следующие допущения: положим $\dot{a}_{ch} = 0$, $\dot{a}_h = 0$, $w_{ch} = Nt + \alpha_{ch}$, $w_h = \nu t + \alpha_h$, где α_{ch}, α_h — постоянные фазы. Таким образом, амплитуды a_{ch}, a_h будем считать квазипостоянными, а фазы w_{ch}, w_h — линейными функциями времени. Данные упрощения означают, что колебательный процесс земного полюса разделяется на тренд, чандлеровское и годичное колебания с квазипостоянными

амплитудами и линейными фазами, при этом менее значимые гармоники исключаются из рассмотрения.

Подставляя (1) в (2), преобразуем компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Pi(w_1) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix}$$

к следующему виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2} + \\ &\quad + \left[\frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \right] \cos(w_h - w_{ch}), \\ y_1 &= \left[\frac{a_h - a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h + a_{ch}}{2} \right] \sin(w_h - w_{ch}). \end{aligned}$$

Приняв

$$a_0 = \frac{a_h + a_{ch}}{2} + \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2},$$

из (2) получаем

$$\begin{pmatrix} \xi_p \\ \eta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_h + a_{ch}}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_h}{a_{ch}}\right) \frac{a_h - a_{ch}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из (3) следует, что $\xi_p = a_h$ при $a_h < a_{ch}$ и $\xi_p = a_{ch}$ при $a_h > a_{ch}$.

Отметим, что для построения ряда ξ_p по данным x_p, y_p не требуется разделения колебаний на чандлеровскую и годичную компоненты, что также продемонстрировано в работе [14].

На основании приведенных выкладок можно построить преобразование вида (2) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \xi'_p \\ \eta'_p \end{pmatrix} = \Pi(w_1 - w_2) \left[\Pi(w_2) \begin{pmatrix} x_p - c_x \\ y_p - c_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad (4)$$

при этом $\xi'_p = a_{ch}$ при $a_h < a_{ch}$ и $\xi'_p = a_h$ при $a_h > a_{ch}$.

Используя данные ряда C01 МСВЗ² о движении земного полюса за период 1900–2020 гг., построим ряд $\xi_p + \xi'_p$ с помощью (2) и (4). На рис. 1 представлен амплитудный спектр этого ряда. Значительная продолжительность интервала наблюдений позволяет выделить низкочастотные гармоники в окрестности рассматриваемой частоты. Наличие в спектре гармоники с периодом 18.6 года свидетельствует о том, что по крайней мере одна из амплитуд a_{ch}, a_h чандлеровской и годичной компонент содержит гармонику с периодом 18.6 года. Для точного установления этого факта необходимо выделить чандлеровское и годичное колебания в движении полюса.

Разделим спектр колебаний земного полюса на области. Для чандлеровской компоненты по каждой из координат выделим окрестность частоты 0.843 циклов/год с границами $0.843 \pm 0.157/2$ циклов/год. Аналогично, для годичной компоненты определим окрестность частоты 1 цикл/год с границами

²<https://datacenter.iers.org/products/eop/long-term/c01/>

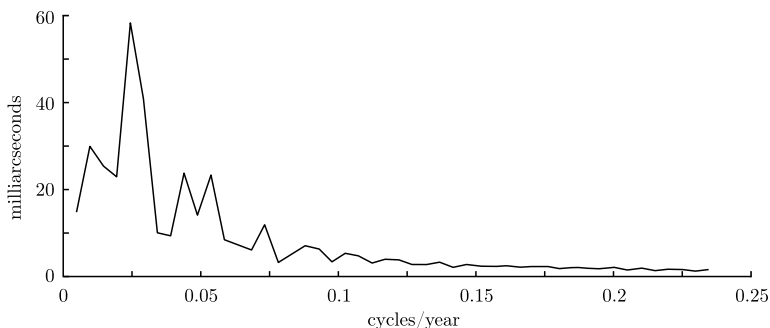


Рис. 1. Амплитудный спектр ряда $\xi_p + \xi'_p$
[Figure 1. The amplitude spectrum of the series $\xi_p + \xi'_p$]

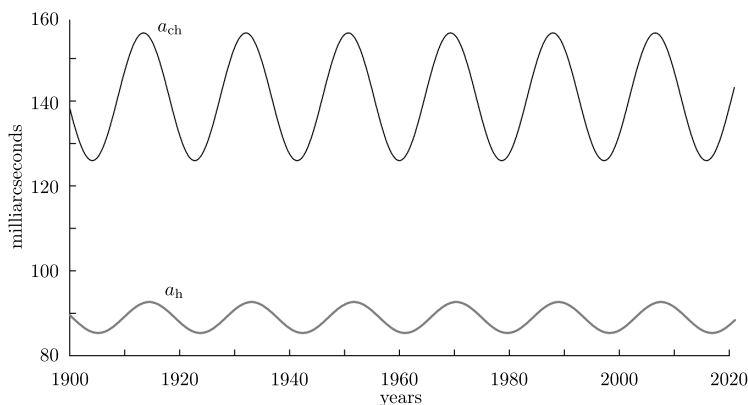


Рис. 2. Вариации амплитуд чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 года прецессии лунной орбиты (в угловых миллисекундах); по оси абсцисс — время (годы)
[Figure 2. Variations in the amplitudes of the Chandler and annual wobbles with the 18.6-year lunar orbital precession period (in milliarcseconds); the x-axis is time (years)]

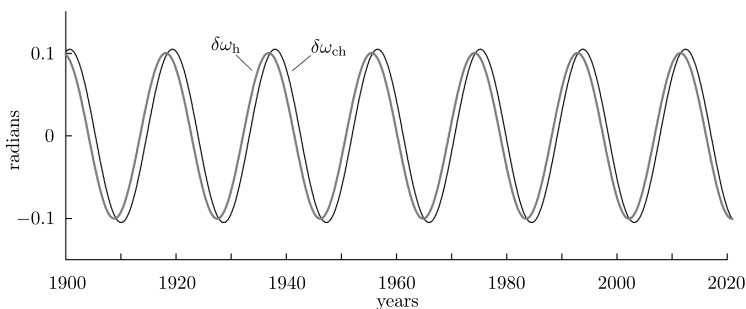


Рис. 3. Вариации фаз чандлеровской и годичной компонент с периодом 18.6 года прецессии лунной орбиты (в радианах); по оси абсцисс — время (годы)
[Figure 3. Variations in the phases of the Chandler and annual wobbles with the 18.6-year lunar orbital precession period (in radians); the x-axis is time (years)]

$1 \pm 0.157/2$ циклов/год. Совокупность чандлеровской и годичной компонент будет содержать все колебания из спектрального интервала $0.765 \div 1.0785$ циклов/год. Хотя такое разделение носит формальный характер, оно оправдано тем, что дополнительные гармоники, вызывающие 18-летнюю модуляцию основных компонент с частотой прецессии лунной орбиты, попадают в соответствующие области.

Для каждой компоненты можно построить ряды их амплитуд a_{ch} , a_h и вариаций фаз δw_{ch} , δw_h (в отличие от рассмотренного выше упрощенного случая линейных фаз, наблюдаемые фазы подвержены изменениям). Применение различных методов выделения гармоник приводит к согласующимся оценкам фаз и относительно небольшому разбросу в оценке средних амплитуд. Это позволяет аппроксимировать рассматриваемые 18-летние колебания параметров чандлеровской и годичной компонент стационарными гармониками, которые можно интерпретировать как гармоники со средними амплитудами.

На рис. 2 и 3 представлены стационарные гармоники со средними амплитудами, выделенные из спектров указанных параметров. Вариации амплитуд a_{ch} , a_h чандлеровской и годичной компонент синфазны, но различаются по величине, тогда как вариации полярных углов w_{ch} , w_h совпадают как по фазе, так и по амплитуде.

4. Численное моделирование колебаний земного полюса с учетом вариаций параметров чандлеровской и годичной компонент. Исследуем влияние учета обнаруженных гармоник на точность аппроксимации траектории полюса, уделяя особое внимание оценке точности экстраполяции.

Для этого необходимо аппроксимировать 18-летнюю цикличность параметров a_{ch} , w_{ch} , a_h , w_h гармониками $\cos \Omega$ и $-\sin \Omega$, где выражение для Ω имеет вид [1, р. 67]

$$\Omega \approx 125.04455501^\circ - 6962890.5431''t + 7.4722''t^2.$$

Здесь t — время в столетиях, отсчитываемое от 12 ч. 1 января 2000 года. После определения амплитуд этих гармоник выполним обратное преобразование для получения дополнительных слагаемых к модели (1) движения земного полюса:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{ch} \\ \Delta y_{ch} \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_{ch}) \begin{pmatrix} a_{ch} \cos \delta w_{ch} - a_{ch}^0 \\ a_{ch} \sin \delta w_{ch} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x_h \\ \Delta y_h \end{pmatrix} = \Pi^{-1}(w_h) \begin{pmatrix} a_h \cos \delta w_h - a_h^0 \\ a_h \sin \delta w_h \end{pmatrix},$$

где a_{ch}^0 , a_h^0 — средние значения амплитуд чандлеровской и годичной компонент соответственно. Их оценки могут быть получены, например, методом наименьших квадратов при аппроксимации (1) на длительном интервале наблюдений (с 1900 по 2020 гг.).

Модель колебаний полюса с учетом дополнительных слагаемых представляется в виде

$$\tilde{x}_p = x_p + \Delta x_{ch} + \Delta x_h, \quad \tilde{y}_p = y_p + \Delta y_{ch} + \Delta y_h. \quad (5)$$

Поскольку в результате обратного преобразования 18-летние колебания трансформируются в колебания с частотами, близкими к чандлеровской и годичной, наибольший эффект от их учета проявляется в автономной модели без коррекции параметров или при долгосрочном прогнозировании движения полюса.

Сравним точность экстраполяций моделей (1) и (5) с дополнительными слагаемыми. Верификация модели проводилась в автономном режиме без коррекции параметров.

В численном эксперименте параметры чандлеровской и годичной компонент определялись на заранее выбранном тестовом интервале с использованием двухчастотной модели (1).

Была проведена серия расчетов со сдвигом тестового интервала по временной шкале. Для определения параметров двухчастотной модели использовался фиксированный тестовый интервал длительностью 15 лет. Расчеты выполнялись итерационно со сдвигом начала тестового интервала с 1900 года до 2005 года с шагом 2 года. Как показали результаты, изменение длительности тестового интервала и увеличение шага не приводят к качественным различиям в результатах.

При оценке точности модели следует учитывать, что до 1962 года точность измерений была существенно ниже. Поэтому экстраполяции строились начиная с 1962 года. При этом низкая точность измерений до 1962 года не является критическим фактором при выборе тестового интервала, поскольку основной интерес представляет поведение среднеквадратического отклонения (СКО) экстраполяций при значительном разбросе возможных значений параметров чандлеровской и годичной компонент.

В численном эксперименте рассчитывались СКО двухлетних экстраполяций. Двухлетний интервал экстраполяции сдвигался с шагом 1 год от 1962 года до 2018 года. Каждому тестовому интервалу соответствовало среднее значение СКО двухлетних экстраполяций за указанный период. На рис. 4 представлена разность δ_σ средних СКО экстраполяций для моделей (1) и (5). Каждое значение среднего СКО отнесено к началу соответствующего тестового интервала.

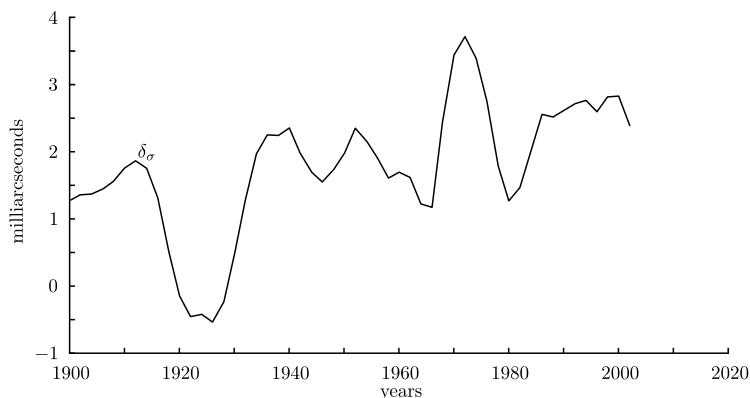


Рис. 4. Разность δ_σ средних квадратических отклонений экстраполяций для моделей (1) и (5) (в угловых миллисекундах); по оси абсцисс — время (годы)

[Figure 4. The difference δ_σ between the root-mean-square errors of extrapolations using models (1) and (5) (in milliarcseconds); the x-axis is time (years)]

Для тестовых интервалов после 1920 года, когда произошло изменение фазы чандлеровского колебания, точность определения положения полюса с помощью расширенной модели (5) повышается в среднем на 5 см при учете 18-летней цикличности.

Заключение. Проведенные исследования демонстрируют наличие квазистационарного колебательного процесса с устойчивыми частотными и фазовыми характеристиками в чандлеровской и годичной составляющих движения земного полюса. Установлена однозначная связь данного процесса с прецессионным движением лунной орбиты. Численный анализ подтверждает полученные результаты, показывая повышение точности аппроксимации траектории движения полюса в среднем на 5 см при учете выявленных закономерностей.

Конкурирующие интересы. У нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. *IERS Conventions*: IERS Technical Note; no. 36 / eds. G. Petit, B. Luzum. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 pp.
2. Жаров В. Е. *Сферическая астрономия*. Фрязино: Бек-2, 2006. 480 с. EDN: QJRJSZ.
3. Munk W. H., MacDonald G. J. F. *The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion* / Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ., 2009. xix+323 pp.
4. Moritz H., Müller I. I. *Earth Rotation: Theory and Observation*. New York: Ungar, 1987. xx+617 pp.
5. Марков Ю. Г., Миняев И. С. Пространственный вариант задачи «деформируемая планета – спутник» в поле притягивающего центра // *Косм. исслед.*, 1994. Т. 32, № 6. С. 89–98.
6. Перепелкин В. В., Скоробогатых И. В., Мью З. А. Динамический анализ установившегося колебательного процесса Земного полюса // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 5. С. 141–151. EDN: RSUHG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921050081>.
7. Arató M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach* / Lecture Notes in Control and Information Sciences. vol. 45. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1982. ix+309 pp.
8. Марков Ю. Г., Рыхлова Л. В., Сеницын И. Н. Развитие методов построения моделей движения полюса Земли // *Астрон. ж.*, 2010. Т. 87, № 9. С. 935–944. EDN: MUJYIV.
9. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Стохастическая модель движения полюса деформируемой Земли // *ДАН*, 2002. Т. 385, № 2. С. 189–192. EDN: J1TOLY.
10. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Влияние параметрических флуктуационно-диссипативных сил на движении полюса Земли // *ДАН*, 2004. Т. 395, № 1. С. 51–54. EDN: OQODVV.
11. Марков Ю. Г., Сеницын И. Н. Нелинейные стохастические корреляционные модели движения полюса деформируемой Земли // *Астрон. ж.*, 2003. Т. 80, № 2. С. 186–192. EDN: ONUDL.
12. Сидоренков Н. С. Природа амплитудной модуляции чандлеровского движения полюса // *Изв. Гл. астрон. observ. Пулково*, 2013. № 220. С. 143–148.
13. Сидоренков Н. С. Соизмеримости между частотами земных процессов и частотами системы Земля—Луна—Солнце // *Процессы в геосредах*, 2015. № 3. С. 88–99. EDN: VDGXWT.

14. Перепелкин В. В., Рыхлова Л. В., Сое В. Я. О синфазности вариаций параметров движения земного полюса и прецессии орбиты Луны // *Астрон. ж.*, 2022. Т. 99, № 1. С. 75–87. EDN: EHSYWI. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0004629922020086>.
15. Марков Ю. Г., Михайлов М. В., Перепелкин В. В. [и др.] Анализ влияния различных возмущающих факторов на высокоточный прогноз орбит космических аппаратов // *Косм. исслед.*, 2016. Т. 54, № 2. С. 164–172. EDN: VRXZIP. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0023420615060023>.
16. Акуленко Л. Д., Климов Д. М., Кумакшев С. А. Основные свойства и особенности движения Земли относительно центра масс // *ДАН*, 2014. Т. 458, № 5. С. 547–550. EDN: SNWVYL. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565214290131>.
17. Акуленко Л. Д., Перепелкин В. В. Движение земного полюса при нестационарных возмущениях // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 5. С. 142–149. EDN: BKTVMR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919050039>.
18. Акуленко Л. Д., Климов Д. М., Марков Ю. Г. [и др.] Численно-аналитическое моделирование возмущенных колебательных движений полюса Земли // *Изв. РАН. МТТ*, 2014. № 6. С. 105–119. EDN: TEFOVB.

MSC: 70F15, 70K40

Modeling Chandler and annual polar motion with account for lunar orbit precession

S. S. Krylov, Z. A. Myu, V. V. Perepelkin

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

This study examines the effect of lunar orbit precession (18.6-year period) on the principal components of Earth's polar motion—the Chandler wobble and annual wobble. We develop an enhanced polar motion model incorporating additional terms to represent long-period lunar disturbances. Numerical simulations show that accounting for these perturbations in an autonomous, uncorrected model enhances polar position determination accuracy by approximately 5 cm on average.

Keywords: Earth rotation modeling, polar motion, lunar perturbation, Chandler wobble.

Received: 1st March, 2025 / Revised: 27th May, 2025 /

Accepted: 4th June, 2025 / First online: 14th July, 2025

Competing interests. The authors declare that they have no competing interests regarding the authorship and publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in the conceptualization of the study and manuscript preparation. The authors take full responsibility for submitting the final manuscript. The final version of the manuscript has been approved by all authors.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© The Author(s), 2025

© Samara State Technical University, 2025 (Compilation, Design, and Layout)

♾️ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Krylov S. S., Myu Z. A., Perepelkin V. V. Modeling Chandler and annual polar motion with account for lunar orbit precession, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2025, vol. 29, no. 3, pp. 591–602. EDN: SPHAXK. DOI: 10.14498/vsgtu2168 (In Russian).

Authors' Details:

Sergey S. Krylov  <https://orcid.org/0000-0003-3267-6411>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Head of Department; Dept. of Computational Mathematics and Programming; e-mail: compgra@yandex.ru

Zo Aung Myo  <https://orcid.org/0009-0009-8557-5965>

Postgraduate Student; e-mail: myozawaung53@gmail.com

Vadim V. Perepelkin  <https://orcid.org/0000-0002-9061-4991>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mechatronics and Theoretical Mechanics; e-mail: vadim802@gmail.com

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. *IERS Conventions*, IERS Technical Note; no. 36, eds. G. Petit, B. Luzum. Frankfurt am Main, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010, 179 pp.
2. Zharov V. E. *Sfericheskaya astronomiya* [Spherical Astronomy]. Fryazino, Vek-2, 2006, 480 pp. (In Russian). EDN: QJRJSZ.
3. Munk W. H., MacDonald G. J. F. *The Rotation of the Earth. A Geophysical Discussion*, Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge, Cambridge Univ., 2009, xix+323 pp.
4. Moritz H., Müller I. I. *Earth Rotation: Theory and Observation*. New York, Ungar, 1987, xx+617 pp.
5. Markov Yu. G., Minyaev I. S. Spatial version of the “deformable planet – satellite” problem in the field of an attracting center, *Kosm. Issled.*, 1994, vol. 32, no. 6, pp. 89–98 (In Russian).
6. Perepelkin V. V., Skorobogatykh I. V., Myu Z. A. Dynamic analysis of the steady state oscillations of the Earth’s pole, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 727–736. EDN: MUWZNU. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421050162>.
7. Arató M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 45. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1982, ix+309 pp.
8. Markov Yu. G., Rykhlova L. V., Sinitsyn I. N. Some improved methods for modeling the Earth’s polar motion, *Astron. Rep.*, 2010, vol. 54, no. 9, pp. 861–870. EDN: MXPCTX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772910090106>.
9. Markov Yu. G., Sinitsyn I. N. Stochastic model of the motion of the deformable-earth pole, *Dokl. Phys.*, 2002, vol. 47, no. 7, pp. 531–534. EDN: LHFMOZ. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1499194>.
10. Markov Yu. G., Sinitsyn I. N. Effect of parametric dissipative fluctuation forces on the motion of the Earth’s pole, *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 3, pp. 179–182. EDN: LILRBB. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1710685>.
11. Markov Yu. G., Sinitsyn I. N. Nonlinear stochastic correlation models for the pole’s motion of a deformable earth, *Astron. Rep.*, 2003, vol. 47, no. 2, pp. 161–167. EDN: KENVRX. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1554519>.
12. Sidorenkov N. S. Nature of the amplitude modulation of Chandler polar motion, *Izv. Gl. Astron. Observ. Pulkovo*, 2013, no. 220, pp. 143–148 (In Russian).
13. Sidorenkov N. S. Synchronization of atmospheric processes with frequencies of the Earth–Moon–Sun system, *Processes in Geomedia*, 2015, no. 3, pp. 88–99 (In Russian). EDN: VDGXWT.
14. Perepelkin V. V., Soe W. Y., Rykhlova L. V. In-phase variations in the parameters of the Earth’s pole motion and the Lunar orbit precession, *Astron. Rep.*, 2022, vol. 66, no. 1, pp. 80–91. EDN: WADBCR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772922020081>.
15. Markov Yu. G., Perepelkin V. V., Mikhailov M. V., et al. Analysis of the effect of various disturbing factors on high-precision forecasts of spacecraft orbits, *Cosmic Res.*, 2016, vol. 54, no. 2, pp. 155–163. EDN: WSPYJL. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0010952515060015>.
16. Klimov D. M., Akulenko L. D., Kumakshev S. A. The main properties and peculiarities of the Earth’s motion relative to the center of mass, *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 10, pp. 472–475. EDN: UCKIOF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335814100073>.
17. Akulenko L. D., Perepelkin A. A. Earth pole motion due to nonstationary perturbations, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 1108–1114. EDN: JFRNFJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419070112>.
18. Akulenko L. D., Klimov D. M., Markov Yu. G., et al. Numerical-analytic modeling of perturbed oscillatory motions of the Earth pole, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 6, pp. 690–702. EDN: UZXDMB. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654414060119>.

Подписной индекс 18108

ISSN 1991-8615 (print)



9 771991 861253



Цена свободная