

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 23, № 4 – 2019

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Декабрь — 2019

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 23, № 4 – 2019)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- П. Б. Бабаджанов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н. проф. (Душанбе, Таджикистан)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)
- З. Д. Усманов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н., проф. (Душанбе, Таджикистан)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- А. А. Пимерзин — д.х.н., проф. (Самара, Россия)
- Е. Ю. Просвириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Белгород, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 23, № 4 – 2019)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Телефон: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Адрес типографии:

443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус 8

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 25 декабря 2019 г.

Дата выхода в свет 27 января 2020 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.

Тираж 500 экз. Рег. № 250/19.

Заказ № 962.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 05.13.18 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), на сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Самарский государственный технический университет, 2019 (составление)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в Каталоге Роспечать 18108

ISSN 1991–8615 (print), 2310–7081 (online)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 1996

4 issues per year

December — 2019

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2019, vol. 23, no. 4

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- P. B. Babadzhanov (Dushanbe, Tajikistan)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Z. D. Usmanov (Dushanbe, Tajikistan)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- A. A. Pimerzin (Samara, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radaev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Belgorod, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>) and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Samara State Technical University, 2019 (Compilation)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

The subscription index in Rospechat catalogue 18108
ISSN 1991–8615 (print), 2310–7081 (online)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Керефов М. А., Гекжиева С. Х. “Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова” 607

Сабитова Ю. К. “Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением” 622

Механика деформируемого твёрдого тела

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. “Об одном дифференциальном ограничении в континуальной механике растущих тел” 646

Устинов К. Б., Лисовенко Д. С., Ченцов А. В. “Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины” 657

Хохлов А. В. “Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости” 671

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Артемова О. И., Кревчик В. Д., Семенов М. Б. “Моделирование влияния экстраклеточного информационного поля в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли” 705

Семущин И. В., Цыганова Ю. В. “Активная адаптация распределенной мультисенсорной системы фильтрации” 724

Краткие сообщения

Коссович Л. Ю., Харламов А. В., Лысункина Ю. В., Шульга А. Е. “Математическое моделирование и прогнозирование эффективности оперативного лечения в хирургии позвоночно-тазового комплекса” 744

Museibli P. T. “О влиянии электростатического поля на динамику расширения газовых пузырьков” 756

Просвиряков Е. Ю. “Невинтовые точные решения уравнений Эйлера для закрученных осесимметричных течений жидкости” 764

Жегалов В. И. “Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска–Лява” 771

Киреев Т. Ф., Булгакова Г. Т. “Моделирование напряженного состояния перфорированного цементного кольца, примыкающего к скважине с трещиной гидроразрыва пласта” 777

Хубиев К. У. “Задача Бицадзе–Самарского для одного характеристически нагруженного уравнения гиперβολо-параболического типа” 789

Юлмухаметова Ю. В. “Решение уравнений идеального газа, описывающих галилеевы инвариантные движения с винтовыми линиями уровня, с коллагсом на геликоиде” 797

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

- Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh.* “Second boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov equation” 607
- Sabitova Yu. K.* “Dirichlet problem for a mixed type equation with characteristic degeneration” 622

Mechanics of Solids

- Murashkin E. V., Radayev Yu. N.* “On a differential constraint in the continuum theory of growing solids” 646
- Ustinov K. B., Lisovenko D. S., Chentsov A. V.* “Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip” . . . 657
- Khokhlov A. V.* “Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson’s ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory” 671

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Artemova O. I., Krevchik V. D., Semenov M. B.* “Modeling of the extracellular information field influence in dynamics of the formation and development risks of a cancer tumor” 705
- Semushin I. V., Tsyganova Yu. V.* “Active adaptation of a distributed multi-sensor filtering system” 724

Short Communications

- Kossovich L. Yu., Kharlamov A. V., Lysunkina Yu. V., Shulga A. E.* “Mathematical modeling and prediction of the effectiveness of surgical treatment in surgery of the spine and pelvic complex” 744
- Museibli P. T.* “On the electrostatic field in expansion dynamics of gas bubbles” 756
- Prosviryakov E. Yu.* “Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows” 764
- Zhegalov V. I.* “On a problem for generalized Boussinesq–Love equation” 771
- Kireev T. F., Bulgakova G. T.* “Modeling of stress state of a perforated cement sheath in a well with hydraulic fracture” 777
- Khubiev K. U.* “The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation” 789
- Yulmukhametova Yu. V.* “The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix” . . . 797

Дифференциальные уравнения и математическая физика



УДК 517.95

Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова

М. А. Керефов¹, С. Х. Геккиева²

¹ Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

² Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

При математическом моделировании сплошных сред с памятью возникают уравнения, описывающие новый тип волнового движения, занимающего промежуточное положение между обычной диффузией и классическими волнами. Имеются в виду дифференциальные уравнения дробного порядка, которые являются основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной геометрией. В работе представлено качественно новое уравнение влагопереноса, являющееся обобщением уравнения Аллера–Лыкова, посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности. Рассмотрена вторая краевая задача для уравнения Аллера–Лыкова с дробной производной Римана–Лиувилля. Существование решения задачи доказано методом Фурье. Для доказательства единственности решения методом энергетических неравенств получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана–Лиувилля.

Ключевые слова: вторая краевая задача, уравнение Аллера–Лыкова, метод Фурье, оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля, метод энергетических неравенств.

Получение: 5 апреля 2019 г. / Исправление: 22 августа 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 25 ноября 2019 г.

Научная статья

© © Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Керефов М. А., Геккиева С. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 607–621. doi: 10.14498/vsgtu1686.

Сведения об авторах

Марат Асланбиевич Керефов  <https://orcid.org/0000-0002-7442-5402>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. прикладной математики и информатики; e-mail: kerefov@mail.ru

Сакинат Хасановна Геккиева  <https://orcid.org/0000-0002-2135-2115>

кандидат физико-математических наук; ученый секретарь; e-mail: gekkieva_s@mail.ru

Введение. Вопросы теплового переноса в почвах являются фундаментальными при решении многих задач гидрологии, агрофизики, строительной физики и других областей науки. Исследователи при этом концентрируют свое внимание на возможности отражения в характере исходных уравнений специфических особенностей изучаемых массивов, их структуры, физических свойств, протекающих в них процессов [1, гл. 6]. В связи с этим возникает качественно новый класс дифференциальных уравнений состояния и переноса с дробной производной, являющихся основой большинства математических моделей, описывающих широкий класс физических и химических процессов в средах с фрактальной структурой и памятью [2, гл. 5].

В основе математических моделей, описывающих процессы переноса почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности, лежат уравнения в частных производных третьего порядка [3, §6.2.4, с. 261].

В данной работе рассмотрено уравнение вида

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} w + D_{0t}^{\alpha} w = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

где D_{0t}^{α} — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля [2, §0.1, с. 9], $0 < \alpha < 1$; $w(x, t)$ — влажность почвы в долях единицы на глубине x в момент времени t ; коэффициент A_1 принимает значение $A_1 = Cx^2$, где C — константа, зависящая от коэффициента диффузии, а также пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости [2, §5.9, с. 197]; $D(w)$ — коэффициент диффузии; A — варьируемый коэффициент Аллера.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением Аллера—Лыкова, которое впервые было предложено В. Я. Куликом в [4] для описания процессов испарения и инфильтрации влаги в почве. Такого рода уравнения в локальной постановке ($\alpha = 1$) рассматривались в работах многих авторов и решались методом разделения переменных, методом априорных оценок, а также численными методами. Среди последних отметим работы [5, 6], в которых получены априорные оценки для решения нелокальных задач для уравнения влагопереноса Аллера—Лыкова в дифференциальной и разностной трактовках, а также работы [7–9], в которых исследовано уравнение влагопереноса Аллера—Лыкова с дробной по времени производной.

Исследование уравнения (1) будем проводить методом Фурье и методом априорных оценок. Ранее методом Фурье краевые задачи для уравнений с дробной производной исследовались в работах С. Х. Геккиевой [10], О. Р. Aggarwal [11], В. А. Нахушевой [12], Б. Х. Турметова [13], О. Х. Масоевой [14] и других авторов, в том числе методом априорных оценок в работах [15, 16].

1. Постановка задачи. Рассмотрим соответствующее (1) однородное уравнение

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} w + D_{0t}^{\alpha} w = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

В целом ряде реальных ситуаций, как отмечает В. Я. Кулик в [4], зависимость A_1 и D от координаты x практически устраняется (например, когда влажность меняется в небольшом диапазоне). В дальнейшем будем предполагать, что $A_1 = \text{const}$, $D(w) = D = \text{const}$.

Определим распределение влаги $w(x, t)$ в среде $0 \leq x \leq l$ для всех моментов времени $t \in [0, T]$, если в начальный момент выполняются условия

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} w(x, t) = \tau(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} w(x, t) = \nu(x), \quad (3)$$

а распределение влаги на концах отрезка задается соотношениями

$$\left[D \frac{\partial w}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0} = -\mu(t), \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

Второе условие (4) означает отсутствие потока влаги через границу $x = l$. Что касается первого условия (4), к нему приводят следующие соображения. Обозначим через

$$B(t) = \int_0^l w(x, t) dx$$

влагосодержание слоя $[0, l]$ в момент времени t [17]. Интегрируя уравнение (2) в пределах от 0 до l и меняя слева порядок интегрирования и дифференцирования, получим

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} B(t) + D_{0t}^{\alpha} B(t) = \left[D \frac{\partial w}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l}.$$

Отсюда, учитывая второе условие (4), имеем

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} B(t) + D_{0t}^{\alpha} B(t) = - \left[D \frac{\partial w}{\partial x} + AD_{0t}^{\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}. \quad (5)$$

Из (5) получаем

$$D_{0t}^{\alpha} \mu_1(t) + \frac{D}{A} \mu_1(t) = -\frac{1}{A} \mu(t),$$

где

$$\mu_1(t) = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \mu(t) = A_1 D_{0t}^{\alpha+1} B(t) + D_{0t}^{\alpha} B(t).$$

В этом случае первое условие (4) заменяется более простым:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu_1(t), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1(t) = \tau'(0) t^{\alpha-1} & \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{D}{A} t^{\alpha} E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{D}{A} t^{\alpha}; 2\alpha \right) \right] - \\ & - \frac{1}{A} D_{0t}^{-\alpha} \mu(t) + \frac{D}{A^2} \Gamma(2\alpha) D_{0t}^{-2\alpha} \left(E_{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{D}{A} t^{\alpha}; 2\alpha \right) \mu(t) \right), \end{aligned}$$

а $\tau(x)$ определяется из первого условия (3) [2, §2.2, с. 93].

Предположим, что выполнены условия непрерывности предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \mu(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} \mu(t) = 0, \quad \tau'(0) = \nu'(0) = \tau'(l) = \nu'(l) = 0. \quad (7)$$

Тогда с помощью замены

$$w(x, t) = u(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \nu(x) + \mu_1(t) \left(x - \frac{x^2}{2l} \right)$$

условия (3), (6) и второе условие (4) можно свести к однородным.

Получим следующую постановку задачи: в области $Q = \{(x, t) : 0 < x < l, t > 0\}$ рассматривается уравнение

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (8)$$

где A_1, A, D — положительные константы,

$$f(x, t) = -A_1 \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) D_{0t}^{\alpha+1} \mu_1(t) - \left(x - \frac{x^2}{2l} - \frac{A}{l} \right) D_{0t}^{\alpha} \mu_1(t) + \\ + D \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau''(x) + D \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \nu''(x) - \frac{1}{l} \mu_1(t).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Регулярным решением уравнения (8) в области Q назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha} u(x, t) \in C(\bar{Q})$; $D_{0t}^{\alpha+1} u(x, t), u_{xx}(x, t), D_{0t}^{\alpha} u_{xx}(x, t) \in C(Q)$, которая удовлетворяет уравнению (8) во всех точках $(x, t) \in Q$.

Сформулируем вторую краевую задачу для уравнения (8).

ЗАДАЧА 1. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (8) в области Q , удовлетворяющее краевым условиям

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0$$

и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} u(x, t) = 0. \quad (9)$$

Решение соответствующего (8) однородного уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u + D_{0t}^{\alpha} u = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A D_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

ищем в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставляя эту форму решения в (10), для определения $X(x)$ получим:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0, \quad (11)$$

где $\lambda = \text{const}$.

Как известно, решения спектральной задачи (11) имеют вид

$$X_0(x) = \frac{1}{l}, \quad \lambda_0 = 0; \quad X_k(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right), \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Найдем решение неоднородного уравнения Аллера–Лыкова (8) в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$ задачи (11):

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \quad (13)$$

Предположим, что функцию $f(x, t)$ можно разложить в интервале $(0, l)$ в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right),$$

$$f_0(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) d\xi, \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \cos\left(\frac{\pi k}{l} \xi\right) d\xi. \quad (14)$$

В силу теоремы В. А. Стеклова [18, §22.3, с. 342] разложение (14) справедливо, если

$$f(x, t) \in C^2(\bar{Q}), \quad f(0, t) = f(l, t) = 0, \quad (15)$$

и при любом фиксированном $t \geq 0$ функция $f(x, t)$ имеет кусочно-непрерывную производную по x с точками разрыва первого рода.

Подставляя предполагаемую форму решения (13) в уравнение (8) и начальные условия (9), с учетом (12), (14) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{A_1}{l} D_{0t}^{\alpha+1} u_0(t) + \frac{1}{l} D_{0t}^{\alpha} u_0(t) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \left\{ A_1 D_{0t}^{\alpha+1} u_k(t) + D_{0t}^{\alpha} u_k(t) + D\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 u_k(t) + \right. \\ & \left. + A\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 D_{0t}^{\alpha} u_k(t) \right\} = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t) = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} u_k(t) = 0.$$

Эти равенства возможны тогда и только тогда, когда

$$D_{0t}^{\alpha+1} u_0(t) + \frac{1}{A_1} D_{0t}^{\alpha} u_0(t) = \frac{l}{2A_1} f_0(t), \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u_0(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} u_0(t) = 0 \quad (17)$$

и для всех $k = 1, 2, \dots$

$$D_{0t}^{\alpha+1}u_k(t) + a_k D_{0t}^{\alpha}u_k(t) + b_k u_k(t) = \frac{f_k(t)}{A_1}, \quad (18)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_k(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha}u_k(t) = 0, \quad (19)$$

где

$$a_k = \frac{1 + A\lambda_k}{A_1}, \quad b_k = \frac{\lambda_k D}{A_1}, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2.$$

Поддействовав на уравнение (16) оператором дробного интегрирования порядка α с учетом обобщенной формулы Ньютона—Лейбница [19, форм. (1.2.8), с. 15], получим

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} + \frac{1}{A_1}u_0(t) &= \frac{l}{2A_1}D_{0t}^{-\alpha}f_0(t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha}u_0(t) + \\ &+ \left(\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1}u_0(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Проинтегрируем неоднородное уравнение (20) с учетом начальных условий (17), в результате получим решение задачи (16), (17):

$$u_0(t) = \frac{l}{2A_1} \int_0^t e^{\frac{\xi-t}{A_1}} D_{0\xi}^{-\alpha} f_0(\xi) d\xi.$$

Прежде чем выписывать решение задачи (18), (19), отметим, что обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались достаточно интенсивно. Для них найдены явные представления начальных и краевых задач в терминах обобщенных функций Миттаг—Леффлера и функций Райта. Подробное изложение этих результатов и библиографию по теме можно найти в работах [20, 21].

Для нашей работы, чтобы избежать технически непростого аппарата теории специальных функций, возникающих при решении этих уравнений, позволим себе воспользоваться результатами работы [8], где решение однородного уравнения (10) получено путем редукции его к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода со степенным ядром и последующим решением его методом последовательных приближений.

Поддействовав на уравнение (18) оператором дробного интегрирования порядка $\alpha + 1$, получим

$$u_k(t) + \int_0^t u_k(\tau) \left[a_k + \frac{b_k}{\Gamma(\alpha+1)(t-\tau)^{-\alpha}} \right] d\tau = F_k(t), \quad (21)$$

где

$$F_k(t) = \frac{1}{A_1 \Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha} f_k(\tau) d\tau.$$

Найдем решение интегрального уравнения (21) аналогично тому, как это было сделано в [8]:

$$\begin{aligned}
 u_k(t) &= F_k(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(n+1+s\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n+s\alpha} F_k(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{A_1 \Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \frac{f_k(\tau)}{(t-\tau)^{-\alpha}} d\tau + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \times \\
 &\quad \times \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{A_1 \Gamma(\alpha+1) \Gamma(n+1+s\alpha)} \int_0^t \int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{n+s\alpha} f_k(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)^{-\alpha}} d\tau_1 d\tau, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где $\binom{n+1}{s} = \frac{(n+1)!}{s!(n+1-s)!}$.

В правой части (22) рассмотрим двойной интеграл. Поменяв порядок интегрирования и сделав замену $\tau = \tau_1 + z(t - \tau)$, находим

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_0^\tau \frac{(t-\tau)^{n+s\alpha} f_k(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)^{-\alpha}} d\tau_1 d\tau &= \int_0^t f_k(\tau_1) d\tau_1 \int_{\tau_1}^t (t-\tau)^{n+s\alpha} (\tau-\tau_1)^\alpha d\tau = \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(n+s\alpha+1)}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)} \int_0^t (t-\tau_1)^{n+s\alpha+\alpha+1} f_k(\tau_1) d\tau_1.
 \end{aligned}$$

Или окончательно

$$\begin{aligned}
 u_k(t) &= \frac{1}{A_1 \Gamma(\alpha+1)} \int_0^t \frac{f_k(\tau)}{(t-\tau)^{-\alpha}} d\tau + \\
 &+ \frac{1}{A_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n+s\alpha+\alpha+1} f_k(\tau) d\tau = \\
 &= \frac{1}{A_1} \int_0^t \left[\frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)} (t-\tau)^{n+s\alpha+\alpha+1} \right] f_k(\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (13), искомое решение задачи (8), (9) запишется в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{l}{2A_1} \int_0^t e^{\frac{1}{A_1}(\xi-t)} D_{0\xi}^{-\alpha} f_0(\xi) d\xi + \\
 &\quad + \frac{1}{A_1} \int_0^t \int_0^l G^\alpha(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$G^\alpha(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} E_k(t, \tau) \cos\left(\frac{\pi k}{l} x\right) \cos\left(\frac{\pi k}{l} \xi\right),$$

$$E_k(t, \tau) = \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{s=0}^{n+1} \binom{n+1}{s} \frac{a_k^{n+1-s} b_k^s (t-\tau)^{n+s\alpha+\alpha+1}}{\Gamma(n+2+s\alpha+\alpha)}.$$

Сходимость ряда (23) и рядов производных $D_{0t}^{\alpha+1}u(x, t)$, $D_{0t}^\alpha u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $D_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t)$ обеспечивается требованием соблюдения условий (15).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x, t) \in C^2(\bar{Q})$, $\tau \in C^3[0, l]$, $\nu \in C^2[0, l]$ и выполнены условия (7) и условия согласования $f(0, t) = f(l, t) = 0$. Тогда регулярное решение $u(x, t)$ задачи 1 представимо в виде (23).

2. Единственность решения задачи для неоднородного уравнения Аллера—Лыкова с дробной по времени производной. Обозначим $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$. В предположении, что $D(w) = k(x, t)$ — известная функция координаты и времени, рассмотрим в области Q_T вторую краевую задачу для неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (3) и однородными краевыми условиями

$$w_x(0, t) = w_x(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (24)$$

В дальнейшем будем предполагать существование регулярного решения задачи (1), (3), (24) и будем использовать обозначения

$$\|w\|_0^2 = \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad D_{0t}^\alpha w(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{w(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha},$$

$$\|D_{0t}^\alpha w\|_{2, Q_t}^2 = \int_0^t \|D_{0t}^\alpha w(x, \tau)\|_0^2 d\tau.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k_x(x, t)$, $k_t(x, t)$, $f(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $\nu(x) \in C[0, l]$, $\tau(x) \in C^2[0, l]$, $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$, $k_t(x, t) \leq 0$ всюду на \bar{Q}_T и выполнены условия $\tau(0) = \tau(l) = 0$, $\tau'(0) = \tau'(l) = 0$. Тогда для решения задачи (1), (3), (24) справедлива априорная оценка

$$\|D_{0t}^\alpha w\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha w_x\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha w\|_{2, Q_t}^2 \leq M_1(t) \left(\|f\|_{2, Q_t}^2 + \|\tau'(x)\|_0^2 + \|\tau''(x)\|_0^2 + \|\nu(x)\|_0^2 \right). \quad (25)$$

Доказательство. Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая

$$w(x, t) = v(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x)$$

так, что $v(x, t)$ представляет собой отклонение функции $w(x, t)$ от известной функции $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x)$. С учетом $D_{0t}^{\alpha+1} t^{\alpha-1} = 0$, $D_{0t}^\alpha t^{\alpha-1} = 0$ [19, §1.2, с. 15] имеем, что функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$A_1 D_{0t}^{\alpha+1} v + D_{0t}^\alpha v - (kv_x)_x - AD_{0t}^\alpha v_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (26)$$

с начальными условиями

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} \left(w(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) \right) =$$

$$= \tau(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} t^{\alpha-1} = 0, \quad (27)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} v(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} \left(w(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) \right) = \nu(x) - \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha} t^{\alpha-1} = \nu(x)$$

и граничными условиями

$$v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (28)$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (k_x \tau'(x) + k \tau''(x)).$$

Получим априорную оценку в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, для этого умножим уравнение (26) скалярно на $D_{0t}^{\alpha} v$:

$$A_1 (D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^{\alpha} v) + (D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha} v) - ((kv_x)_x, D_{0t}^{\alpha} v) - A (D_{0t}^{\alpha} v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v) = (F, D_{0t}^{\alpha} v), \quad (29)$$

где

$$(w, v) = \int_0^l w v dx, \quad (w, w) = \|w\|_0^2.$$

Преобразуем слагаемые тождества (29) с учетом (27), (28):

$$\begin{aligned} A_1 (D_{0t}^{\alpha+1} v, D_{0t}^{\alpha} v) &= \\ &= A_1 \int_0^l \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx = \\ &= \frac{A_1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} (D_{0t}^{\alpha} v)^2 dx = \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^{\alpha} v\|_0^2, \end{aligned}$$

$$(D_{0t}^{\alpha} v, D_{0t}^{\alpha} v) = \|D_{0t}^{\alpha} v\|_0^2,$$

$$\begin{aligned} ((kv_x)_x, D_{0t}^{\alpha} v) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l (kv_x)_x \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ kv_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \Big|_0^l - \int_0^l kv_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx \right\} = \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^l kv_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A (D_{0t}^{\alpha} v_{xx}, D_{0t}^{\alpha} v) &= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_{xx}(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} dx = \\ &= \frac{A}{\Gamma^2(1-\alpha)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} \Big|_0^l - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha} dx \Big\} = \\
 & = -A \int_0^l \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha} \right)^2 dx = -A \|D_{0t}^\alpha v_x\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Для оценки правой части воспользуемся неравенством Коши—Буняковского и ε -неравенством [22, §2.7, форм. (46), с. 86], которое справедливо для любого числа $\varepsilon > 0$:

$$(F, D_{0t}^\alpha v) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2.$$

С учетом полученных неравенств из (29) получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + \\
 & + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^l kv_x(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_x(x, \tau) d\tau}{(t - \tau)^\alpha} dx + A \|D_{0t}^\alpha v_x\|_0^2 \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_0^2 + \varepsilon \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2. \quad (30)
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем (30) по τ от 0 до t :

$$\begin{aligned}
 & \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \\
 & + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t d\tau \int_0^l kv_x(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{v_x(x, \tau_1) d\tau_1}{(\tau - \tau_1)^\alpha} dx + \\
 & + A \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v_x(x, \tau)\|_0^2 d\tau \leq \\
 & \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|F\|_{2, Q_t}^2 + \varepsilon \int_0^t \|D_{0t}^\alpha v(x, \tau)\|_0^2 d\tau + \frac{A_1}{2} \|D_{0t}^\alpha v(x, 0)\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Предположим, что $k_t \leq 0$, тогда неотрицательность тройного интеграла, стоящего в левой части последнего неравенства, доказывается так же, как в [2, §1.5, с. 43]. Усиливая последнее неравенство, получим

$$A_1 \|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + 2A \|D_{0t}^\alpha v_x\|_{2, Q_t}^2 + 2\varepsilon_1 \|D_{0t}^\alpha v\|_{2, Q_t}^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|F\|_{2, Q_t}^2 + A_1 \|\nu(x)\|_0^2,$$

где $\varepsilon_1 = 1 - \varepsilon$. Откуда следует оценка

$$\|D_{0t}^\alpha v\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha v_x\|_{2, Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha v\|_{2, Q_t}^2 \leq M(\|F\|_{2, Q_t}^2 + \|\nu(x)\|_0^2),$$

или, возвращаясь к $w(x, t)$, получим (25). Теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (25) следует единственность решения задачи (1), (3), (24).

Действительно, пусть w — решение однородной задачи, т. е. $f = \tau = \nu = 0$. Тогда из (25) имеем

$$\|D_{0t}^\alpha w\|_0^2 + \|D_{0t}^\alpha w_x\|_{2,Q_t}^2 + \|D_{0t}^\alpha w\|_{2,Q_t}^2 = 0.$$

Применяя обобщенную формулу Ньютона–Лейбница

$$D_{0t}^{-\alpha} D_{0t}^\alpha w(x, t) = w(x, t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} w(x, t),$$

в частности, получим

$$w(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} w(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tau(x) = 0 \text{ в } Q_T.$$

Учитывая произвольность T , получаем, что $w(x, t) = 0$ во всех точках $(x, t) \in Q$.

Заключение. В работе рассмотрены вопросы однозначной разрешимости второй краевой задачи для уравнения Аллера–Лыкова с дробной производной Римана–Лиувилля. Рассматриваемое уравнение является обобщением уравнения Аллера–Лыкова посредством введения понятия фрактальной скорости изменения влажности, которая объясняет наличие потоков против потенциала влажности. С помощью метода энергетических неравенств для решения задачи получена априорная оценка в терминах дробной производной Римана–Лиувилля, из которой следует единственность решения. Существование решения второй краевой задачи для случая с постоянными коэффициентами доказано методом Фурье.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Это исследование не получило специального финансирования.

Благодарность. Авторы выражают благодарность и глубокую признательность заведующему отделом дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН, д.ф.-м.н. Арсену Владимировичу Псху за советы и ценные замечания при работе над данной статьей.

Библиографический список

1. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв*. М.: Наука, 1976. 352 с.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 352 с.
3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
4. Кулик В. Я. Исследование движения почвенной влаги с точки зрения инвариантности относительно непрерывных групп преобразований / *Исследование процессов обмена энергией и веществом в системе почва-растение-воздух*. Л.: Наука, 1972.
5. Архестова С. М., Шхануков–Лафишев М. Х. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием // *Изв. КБНЦ РАН*, 2012. № 3. С. 7–16.
6. Лафишева М. М., Керефов М. А., Дышкекова Р. В. Разностные схемы для уравнения влагопереноса Аллера–Лыкова с нелокальным условием // *Владикавказ. матем. журн.*, 2017. Т. 19, № 1. С. 50–58.

7. Геккиева С. Х. Первая краевая задача для уравнения влагопереноса Аллера–Лькова с дробной по времени производной / *Устойчивое развитие: проблемы, концепции, модели*: Мат. Всерос. конф. с междунар. участием. Нальчик: КБНЦ РАН, 2017. С. 99–102.
8. Геккиева С. Х., Керефов М. А. Краевые задачи для обобщенного уравнения влагопереноса // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. № 1(21). С. 21–31. doi: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31.
9. Геккиева С. Х. Нелокальная краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера–Лькова // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. № 4(24). С. 19–28. doi: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28.
10. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени // *Докл. АМАН*, 1994. Т. 1, № 1. С. 17–18.
11. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // *Nonlinear Dynamics*, 2002. vol. 29, no. 1. pp. 145–155. doi: 10.1023/A:1016539022492.
12. Нахушева В. А. *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*. М.: Наука, 2006. 173 с.
13. Turmetov B. Kh., Torebek V. T. On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation // *New York J. Math.*, 2014. vol. 20. pp. 1237–1251, <http://nyjm.albany.edu/j/2014/20-57p.pdf>.
14. Masaeva O. Kh. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev–Bitsadze equations with a fractional derivative // *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017. vol. 2017. pp. 1–8, <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2017/74/masaeva.pdf>.
15. Шогенов В. Х., Кумыкова С. К., Шхануков–Лафишев М. Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // *Докл. НАН Украины*, 1997. № 12. С. 47–55.
16. Керефов М. А. *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 175 с.
17. Янгарбер В. А. О смешанной задаче для модифицированного уравнения влагопереноса // *ПМТФ*, 1967. № 1. С. 247–254.
18. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1981. 512 с.
19. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с.
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xv+523 pp.
21. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // *Матем. сб.*, 2011. Т. 202, № 4. С. 111–122. doi: 10.4213/sm7645.
22. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1971. 552 с.

MSC: 35R11, 35Q35, 35E99

Second boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov equation

*M. A. Kerefov*¹, *S. Kh. Gekkieva*²

¹ Kabardino–Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nal'chik, 360004, Russian Federation.

² Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin–Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The equations that describe a new type of wave motion arise in the course of mathematical modeling for continuous media with memory. This refers to differential equations of fractional order, which form the basis for most mathematical models describing a wide class of physical and chemical processes in media with fractal geometry. The paper presents a qualitatively new equation of moisture transfer, which is a generalization of the Aller–Lykov equation, by introducing the concept of the fractal rate of change in humidity clarifying the presence of flows affecting the potential of humidity. We have studied the second boundary value problem for the Aller–Lykov equation with the fractional Riemann–Liouville derivative. The existence of a solution to the problem has been proved by the Fourier method. To prove the uniqueness of the solution we have obtained an a priori estimate, in terms of a fractional Riemann–Liouville using the energy inequality method.

Keywords: second boundary-value problem, Aller–Lykov equation, Fourier method, fractional Riemann–Liouville operator of fractional integro-differentiation, method of energy inequalities.

Received: 5th April, 2019 / Revised: 22nd August, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 25th November, 2019

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kerefov M. A., Gekkieva S. Kh. Second boundary-value problem for the generalized Aller–Lykov equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 607–621. doi:10.14498/vsgtu1686 (In Russian).

Authors' Details:

Marat A. Kerefov ✉ <https://orcid.org/0000-0002-7442-5402>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: kerefov@mail.ru

Sakinat Kh. Gekkieva <https://orcid.org/0000-0002-2135-2115>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Scientific Secretary; e-mail: gekkieva_s@mail.ru

responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research did not funded by a specific project grant.

Acknowledgments. The authors express their gratitude and deep appreciation to the head of the Dept. of fractional calculus of the IAMA KBSC RAS, Dr. Phys. & Math. Sci. Arsen Vladimirovich Pskhu for advice and valuable comments at different stages of this work.

References

1. Chudnovsky A. F. *Teplofizika pochv* [Thermophysics of soils]. Moscow, Nauka, 1976, 352 pp. (In Russian)
2. Nakhshuev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional calculus and its applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 352 pp. (In Russian)
3. Nakhshuev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vysshaya Shkola, 1995, 301 pp. (In Russian)
4. Kulik V. Ya. The study of the soil moisture movement from the point of view of invariance of continuous groups of transformations, In: *Issledovanie processov obmena jenergiej i veshhestvom v sisteme pochva-rastenie-vozduh* [The Study of the Processes of Energy and Mass-Transfer in the System Soil-Plant-Air]. Leningrad, Nauka, 1972 (In Russian).
5. Arkhestova S. M., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. Difference schemes for the Aller-Lykov moisture transfer equation with a nonlocal condition, *Izvestiya KBSC RAS*, 2012, no. 3, pp. 7–16 (In Russian).
6. Lafisheva M. M., Kerefov M. A., Dyshekova R. V. Difference schemes for the Aller-Lykov moisture transfer equations with a nonlocal condition, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 50–58 (In Russian).
7. Gekkieva S. Kh. The first boundary-value problem for the Aller-Lykov moisture transfer equations with a fractional time derivative, In: *Ustoychivoe razvitie: problemy, kontseptsii, modeli* [Sustainable Development. Problems, Concepts, Models]. Nal'chik, KBSC RAS, 2017, pp. 99–102 (In Russian).
8. Gekkieva S. Kh., Kerefov M. A. The boundary-value problem for the generalized moisture transfer equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 1(21), pp. 21–31 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-21-31.
9. Gekkieva S. Kh. Nonlocal boundary-value problem for the generalized Aller-Lykov moisture transport equation, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2018, no. 4(24), pp. 19–28 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-19-28.
10. Gekkieva S. Kh. A boundary-value problem for the generalized transport equation with a fractional time derivative, *Dokl. Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 1994, vol. 1, no. 1, pp. 17–18 (In Russian).
11. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain, *Nonlinear Dynamics*, 2002, vol. 29, no. 1, pp. 145–155. doi: 10.1023/A:1016539022492.
12. Nakhshueva V. A. *Differentsial'nye uravneniia matematicheskikh modelei nelokal'nykh protsessov* [Differential Equations of Mathematical Models of Nonlocal Processes]. Moscow, Nauka, 2006, 173 pp. (In Russian)
13. Turmetov B. Kh., Torebek B. T. On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation, *New York J. Math.*, 2014, vol. 20, pp. 1237–1251, <http://nyjm.albany.edu/j/2014/20-57p.pdf>.
14. Masaeva O. Kh. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrent'ev-Bitsadze equations with a fractional derivative, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, vol. 2017, pp. 1–8, <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2017/74/masaeva.pdf>.
15. Shogenov V. Kh., Kumykova S. K., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. Generalized transport equations and fractional derivatives, *Dop. Nats. Akad. Nauk Ukr.*, no. 12, pp. 47–55 (In Russian).

16. Kerefov M. A. *Boundary-value problems for a modified moisture transfer equation with a fractional time derivative*, Cand. Phys. & Math. Sci. Diss.. Nal'chik, 2000, 175 pp. (In Russian)
17. Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 62–64. doi: 10.1007/BF00913245.
18. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1981, 512 pp. (In Russian)
19. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)
20. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp.
21. Pskhu A. V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order, *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 4, pp. 571–582. doi: 10.1070/SM2011v202n04ABEH004156.
22. Samarskiy A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1971, 552 pp. (In Russian)



УДК 517.956.6

Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением

Ю. К. Сабитова

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Россия, 453103, Стерлитамак, пр-т Ленина, 37.

Аннотация

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с характеристическим вырождением исследована первая граничная задача в прямоугольной области. Установлен критерий единственности решения задачи. Ранее при доказательстве единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа использовали принцип экстремума или метод интегральных тождеств. Единственность решения данной задачи установлена на основании полноты системы собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Решение задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций. При обосновании сходимости полученного ряда возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в известных работах, относительно параметра, зависящего от длин сторон прямоугольника из гиперболической части области и показателя степени вырождения уравнения. В связи с этим установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой в случаях, когда данный параметр представляет собой натуральное, рациональное и алгебраическое иррациональное число степени два. Если данный параметр не является алгебраическим иррациональным числом степени два, то решения задачи в виде суммы ряда не существует. С помощью полученных оценок обоснована равномерная сходимость построенного ряда в классе регулярных решений при некоторых достаточных условиях относительно граничных функций. Также доказана устойчивость решения задачи относительно граничных функций в нормах пространства суммируемых с квадратом функций и в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа с характеристическим вырождением, задача Дирихле, критерий единственности, существование, малые знаменатели.

Получение: 14 июля 2019 г. / Исправление: 23 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 12 декабря 2019 г.

Научная статья

© © © Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 622–645. doi: 10.14498/vsgtu1721.

Сведения об авторе

Юлия Камилевна Сабитова  <https://orcid.org/0000-0002-7969-007X>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. математического анализа;
e-mail: sabitovauk@rambler.ru

Введение. Для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) |y|^n u_{yy} + a |y|^{n-1} u_y - bu = 0 \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a < 1$, $0 < n < a + 1$, b — заданные действительные числа, поставим следующую граничную задачу.

Задача Дирихле. Найдти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^a u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^a u_y(x, y); \quad (3)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (4)$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \quad (5)$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad u(x, -\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $f(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$.

М. В. Келдыш [1] впервые исследовал более общее эллиптическое уравнение второго порядка от двух переменных, чем уравнение (1), при $y > 0$, с характеристическим вырождением. Он показал, что корректность первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и коэффициента при младшей производной u_y . Опираясь на эту работу, И. Л. Кароль [2] исследовал задачу Трикоми для уравнения смешанного типа (1) при $n = 1$ и $b = 0$, т.е. для уравнения

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y = 0 \quad (7)$$

в области G , где G — область плоскости XOY , ограниченная простой жордановой кривой Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$, характеристиками OC и AC уравнения, расположенными в полуплоскости $y < 0$. Им было доказано, что постановка краевых задач для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением (7) в области G зависит от коэффициента a и класса решений уравнения (7). Это является существенным отличием от постановки краевых задач для уравнений с нехарактеристическим вырождением. В качестве примера: задача Трикоми при значении коэффициента $a < 0$ недоопределена, а уже при $a > 0$ — переопределена.

И. Л. Кароль для уравнения (7) в области G при $0 < a < 1$ исследовал задачу Трикоми, где на линии перехода вводится условие сопряжения с весом:

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^a u_y(x, y) = k \lim_{y \rightarrow 0-0} y^a u_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

где $k = -1$ при $0 < a < 1/2$, $k = 1$ при $1/2 < a < 1$.

Задача Трикоми при $a < 0$ становится корректно поставленной, если условия склеивания ввести по-иному. С. С. Исамухамедов [3] впервые исследовал задачу Трикоми для уравнения (7) при $a = -n + a_0$, $a_0 \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$,

где эллиптический контур Γ предполагается «нормальным» по терминологии Трикоми, т.е. имеет вид $(x - 1/2)^2 + 4y = 1/4$. На линии вырождения кроме условия непрерывности решения также задавалось условие склеивания

$$\nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad (8)$$

где

$$\nu_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} y^a [u_y + B_a^+(u)], \quad \nu_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} (-y)^a [u - B_a^-(x, y, \tau)]_y,$$

$B_a^+(u)$ — некоторый дифференциальный оператор, $B_a^-(x, y, \tau)$ — решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям

$$B_a^-(x, 0, \tau) = \tau(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} (-y)^a \frac{\partial}{\partial y} B_a^-(x, y, \tau) = 0.$$

М. Ю. Крикунов [4] изучал задачу Трикоми для уравнения (7) при $a = -n + 1/2$. Р. С. Хайруллин [5] для уравнения (7) в случае когда $a \leq -1/2$ в смешанной области G , где кривая Γ является «нормальным» контуром, доказал однозначную разрешимость задачи Трикоми методом интегральных уравнений.

Р. И. Сохадзе [6] для уравнения (7) при $0 < a < 1$ исследовал первую краевую задачу в прямоугольной области D (где $l = 1$) при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$J_{a-1}(2\pi k\sqrt{\alpha})I_{1-a}(2\pi k\sqrt{\beta}) + J_{1-a}(2\pi k\sqrt{\alpha})I_{a-1}(2\pi k\sqrt{\beta}) \neq 0,$$

где $J_{1-a}(z)$ и $I_{1-a}(z)$ — функции Бесселя первого рода порядка $1-a$ с действительными и чисто мнимыми аргументами соответственно. А в другой работе этого же автора [7] для уравнения (7) при $a > 1$, где a — фиксированное целое число, изучена задача Дирихле со следующими весовыми условиями склеивания:

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^{a-1} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} (-y)^{a-1} u(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} y^a u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} (-y)^a u_y(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

В этих работах методом разделения переменных построены частные решения уравнения (7) при указанных значениях a . Решение задачи формально построено в виде суммы ряда, но отсутствуют четкие доказательства единственности поставленных задач и не приводятся обоснования сходимости рядов.

Для уравнения смешанного типа второго рода

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y |y|^m u_{yy} - b^2 u = 0, \quad 0 < m < 2, \quad b = \operatorname{const} \geq 0, \quad (9)$$

в прямоугольной области D в зависимости от значений параметра m К. Б. Сабитовым и А. Х. Трегубовой (Сулеймановой) [8] была решена первая граничная задача и видоизмененные задачи. Решение задач построено в виде суммы ряда Фурье. Доказаны теоремы единственности решения задач и найдены

достаточные условия сходимости рядов в соответствующих классах решений уравнения (9) при следующих значениях параметра m : $0 < m < 1$, $1 < m < 2$, $m = 1$.

Р. С. Хайруллин [9], используя методы работ [8–10], установил критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнения (7) в прямоугольной области D при отрицательных значениях параметра $a \leq -1/2$, при этом на линии изменения типа уравнения задаются неклассические условия сопряжения типа (8). Позже в работе [11] он показал существование решения этой задачи.

Отметим также работы А. И. Кожанова [12, 13], И. Е. Егорова [14, 15] и их учеников, где изучались краевые задачи для уравнений смешанного типа функциональными методами.

Автором [16] исследована нелокальная задача, близкая к задаче (2)–(6), для уравнения смешанного типа с нехарактеристическим вырождением вида

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{10}$$

где $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m > 0$. Уравнение (10) сводится к уравнению (7) путем замены $x = x$, $z = |y|^{m+2}/(m+2)^2$, где $a = (m+1)/(m+2) \in (1/2, 1)$.

Данная работа является продолжением исследований автора [16–18]. Здесь при всех $a \in (0, 1)$ и $0 < n < a + 1$ установлен критерий единственности решения задачи (2)–(6).

ТЕОРЕМА 1 (КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ). *Если существует решение задачи (2)–(6), то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнялись условия*

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(p_k \alpha^q) K_\nu(p_k \beta^q) + I_\nu(p_k \beta^q) \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) \neq 0,$$

где

$$\bar{Y}_\nu(p_k(-y)^q) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} (J_\nu(p_k(-y)^q) + J_{-\nu}(p_k(-y)^q)),$$

$J_\nu(p_k(-y)^q)$ и $Y_\nu(p_k(-y)^q)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно, $I_\nu(p_k y^q)$ и $K_\nu(p_k y^q)$ – модифицированные функции Бесселя, $\nu = (1-a)/2q$, $p_k = \lambda_k/q$, $q = (2-n)/2$, $\lambda_k = \sqrt{\mu_k^2 + b}$, $\mu_k = \pi k/l$.

В дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что $b \geq 0$, так как в противном случае начиная с некоторого номера k_0 при всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство $\mu_k^2 + b \geq 0$. Поэтому знак b не влияет на полученные результаты.

Отметим, что ранее при доказательстве единственности решений краевых задач для уравнений смешанного типа применяли принцип экстремума или метод интегральных тождеств ([19, с. 28–64], [20, с. 295–302], [21, с. 37–58]). В прямоугольной области эти методы не работают. Поэтому здесь единственность решения задачи (2)–(6) установлена на основании полноты системы собственных функций соответствующей спектральной задачи.

Решение задачи (2)–(6) построено в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin \mu_k x, \tag{11}$$

где функция $u_k(y)$ построена и приведена ниже формулой (39). Выражение $\Delta_k(\alpha, \beta)$ является знаменателем этих коэффициентов. Для обоснования сходимости ряда (39) в классе регулярных решений (2)–(4) доказаны следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Выражение $\Delta_k(\alpha, \beta)$ имеет счетное множество положительных нулей относительно параметра $\alpha_{ql} = \alpha^q/(ql)$.*

В силу этого утверждения возникает проблема малых знаменателей более сложной структуры, чем в известных работах В. И. Арнольда [22, 23].

Для исследования асимптотики нулей представим $\Delta_k(\alpha, \beta)$ в следующем виде:

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = I_\nu(p_k \beta^q) \delta_k(\alpha, \beta),$$

где

$$\begin{aligned} \delta_k(\alpha, \beta) &= J_\nu(p_k \alpha^q) \frac{K_\nu(p_k \beta^q)}{I_\nu(p_k \beta^q)} + \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) = \\ &= J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) \frac{K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}{I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})} + \bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = \delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql}), \end{aligned}$$

$$\tilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{bl}}{\pi k}\right)^2}, \quad \alpha_{ql} = \frac{\alpha^q}{ql}, \quad \beta_{ql} = \frac{\beta^q}{ql}.$$

Функция $K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})$ при больших k строго убывает по асимптотической формуле $k^{-1/2} e^{-\pi k \beta_{ql}}$, а функция $I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})$ строго возрастает по формуле $k^{-1/2} e^{\pi k \beta_{ql}}$, поэтому величина $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) \frac{K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}{I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ при больших k . Поэтому достаточно рассмотреть выражение

$$\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = \frac{2 \sin \pi \nu}{\pi} \bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) + J_{-\nu}(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}),$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_{ql} .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если выполнено одно из следующих условий:*

- 1) α_{ql} является произвольным натуральным числом;
- 2) $\alpha_{ql} = d/t$ является произвольным рациональным числом, $d, t \in \mathbb{N}$, $(d, t) = 1$, $(t, 4) = 1$, $d/t \notin \mathbb{N}$,

то существуют положительные постоянные C_0 и k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$), зависящие от α, l, a, q , такие, что для всех $k > k_0$ справедлива оценка

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geq \frac{C_0}{\sqrt{k}} > 0. \tag{12}$$

Если же

- 3) α_{ql} является иррациональным алгебраическим числом степени 2,

то существуют положительные постоянные C_1 и k_0 ($k_0 \in \mathbb{N}$), зависящие от $\alpha, l, a, q, b, \varepsilon_0$ и удовлетворяющие неравенству

$$\varepsilon_0 - 2\alpha_{ql} \left(\frac{2l\sqrt{b}}{\pi} \right)^2 > 0,$$

и для всех $k > k_0$ справедлива оценка

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geq \frac{C_1}{k^{3/2}}. \quad (13)$$

Если $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(6), которое определяется рядом (11).

На основании утверждения 2 при определенных условиях относительно граничных функций $f(x)$ и $g(x)$ доказана равномерная сходимость ряда (11) в классе регулярных решений (2)–(4), т.е. доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть число α_{ql} удовлетворяет условиям 1), 2) утверждения 2, т.е. выполнена оценка (12) при всех $k > k_0$, функции $f(x), g(x) \in C^3[0, l]$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(l) = g(l) = 0$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f''(l) = g''(l) = 0$. Тогда, если $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(6) и это решение определяется рядом (11). Если же $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = 0$ при некоторых $k = s_1, s_2, \dots, s_m \leq k_0$, то задача (2)–(6) разрешима только тогда, когда выполнены условия (59) и решение определяется рядом (60).

ТЕОРЕМА 3. Пусть число α_{ql} является иррациональным алгебраическим числом степени 2, т.е. выполнена оценка (13) при всех $k > k_0$, функции $f(x), g(x) \in C^4[0, l]$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(l) = g(l) = 0$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f''(l) = g''(l) = 0$. Тогда, если $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (2)–(6) и это решение определяется рядом (11). Если же $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = 0$ при некоторых $k = s_1, s_2, \dots, s_m \leq k_0$, то задача (2)–(6) разрешима только тогда, когда выполнены условия (59) и решение определяется рядом (60).

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$. Тогда для решения задачи (2)–(6) справедливы оценки

$$\|u(x, y)\|_{L_2} \leq \begin{cases} M_1(\|f\|_{L_2[0, l]} + \|g\|_{L_2[0, l]}) & \text{при } \nu \geq 1/2, \\ M_2(\|f'\|_{C[0, l]} + \|g'\|_{C[0, l]}) & \text{при } \nu < 1/2; \end{cases} \quad (14)$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq \begin{cases} M_3(\|f'\|_{C[0, l]} + \|g''\|_{C[0, l]}) & \text{при } \nu \geq 1/2, \\ M_4(\|f'\|_{C[0, l]} + \|g'\|_{C[0, l]}) & \text{при } \nu < 1/2, \end{cases} \quad (15)$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 — положительные постоянные, не зависящие от граничных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Ниже приводятся доказательства теорем 1–4.

1. Критерий единственности решения задачи. Пусть $u(x, y)$ является решением задачи (2)–(6). Подставляя произведение $u(x, y) = X(x)Y(y)$

в уравнение (1), относительно функции $X(x)$ получим спектральную самосопряженную задачу:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (16)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (17)$$

где μ — постоянная. Решение спектральной задачи (16), (17) имеет вид

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (18)$$

Тогда по системе (18) введем функции

$$u_k(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, y) \sin \mu_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

На основании (19) рассмотрим вспомогательные функции

$$u_{\varepsilon, k}(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x, y) \sin \mu_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Дифференцируя дважды равенство (20) при $y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{\varepsilon, k}(y) = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{yy}(x, y) \sin \mu_k x dx = (\operatorname{sgn} y) \left[\frac{b^2}{|y|^n} u_{\varepsilon, k}(y) - \frac{a}{|y|} u'_{\varepsilon, k}(y) - \frac{1}{|y|^n} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_{xx}(x, y) \sin \mu_k x dx \right]. \quad (21)$$

Интегрируя (21) по частям два раза с учетом условий (5) и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u''_k(y) + (\operatorname{sgn} y) \frac{a}{|y|} u'_k(y) - (\operatorname{sgn} y) \frac{b^2 + \mu_k^2}{|y|^n} u_k(y) = 0, \quad y \in (-\alpha, 0) \cup (0, \beta). \quad (22)$$

Произведя в уравнении (22) замену при $y > 0$

$$u_k^+(y) = W(pk y^q) y^{\frac{1-a}{2}}, \quad q = \frac{2-n}{2}, \quad pk = \frac{\lambda_k}{q}, \quad \lambda_k = \sqrt{\mu_k^2 + b}, \quad (23)$$

получим модифицированное уравнение Бесселя

$$W''(z) + \frac{1}{z} W'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) W(z) = 0, \quad z = pk y^q, \quad \nu = \frac{1-a}{2q}. \quad (24)$$

В дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что $b \geq 0$, так как в противном случае начиная с некоторого номера k_0 при всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство $\mu_k^2 + b \geq 0$.

Общее решение уравнения (24) определяется по формуле

$$W(z) = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z), \quad z > 0, \quad (25)$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — соответственно модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда на основании (23) и (25) общее решение уравнения (22) при $y > 0$ определяется по формуле

$$u_k^+(y) = y^{\frac{1-a}{2}} [a_k I_\nu(p_k y^q) + b_k K_\nu(p_k y^q)], \quad (26)$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

В уравнении (22) при $y < 0$ произведем замену

$$u_k^-(y) = Z(p_k(-y)^q)(-y)^{\frac{1-a}{2}}, \quad (27)$$

в результате получим уравнение Бесселя

$$Z''(z) + \frac{1}{z} Z'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z(z) = 0, \quad z = p_k(-y)^q. \quad (28)$$

Общее решение уравнения (28) определяется по формуле

$$Z(z) = C_3 J_\nu(z) + C_4 Y_\nu(z), \quad z < 0, \quad (29)$$

где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода, C_3 и C_4 — произвольные постоянные. Тогда на основании (27) и (29) общее решение уравнения (22) при $y < 0$ определяется по формуле

$$u_k^-(y) = (-y)^{\frac{1-a}{2}} [c_k J_\nu(p_k(-y)^q) + d_k Y_\nu(p_k(-y)^q)], \quad (30)$$

где c_k и d_k — произвольные постоянные.

Таким образом, функции (19) определяются с учетом формул (26) и (30):

$$u_k(y) = \begin{cases} u_k^+(y), & y > 0, \\ u_k^-(y), & y < 0. \end{cases} \quad (31)$$

С учетом класса решения (2) и (3) в (31) подберем постоянные a_k , b_k , c_k и d_k так, чтобы выполнялись условия сопряжения

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad \lim_{y \rightarrow 0+0} y^a u_k'(y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^a u_k'(y). \quad (32)$$

Первое из равенств (32) выполнено, если $d_k = -\pi b_k/2$ при любых a_k и c_k , а второе равенство будет иметь место при $n < a + 1$ и $c_k = \pi b_k \operatorname{ctg}(\pi\nu)/2 - a_k$, $d_k = -\pi b_k/2$.

Подставив полученные выражения для постоянных c_k и d_k в (31), будем иметь

$$u_k(y) = \begin{cases} y^{\frac{1-a}{2}} [a_k I_\nu(p_n y^q) + b_k K_\nu(p_k y^q)], & y \geq 0, \\ (-y)^{\frac{1-a}{2}} [-a_k J_\nu(p_k(-y)^q) + b_k \bar{Y}_\nu(p_k(-y)^q)], & y \leq 0, \end{cases} \quad (33)$$

где

$$\bar{Y}_\nu(p_k(-y)^q) = \frac{\pi}{2\sin \pi\nu} [J_\nu(p_k(-y)^q) + J_{-\nu}(p_k(-y)^q)].$$

На основании граничных условий (6) и формулы (19) справедливы равенства

$$u_k(\beta) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin \lambda_k x dx = f_k, \quad u_k(-\alpha) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g(x) \sin \lambda_k x dx = g_k. \quad (34)$$

Удовлетворяя функции (33) граничным условиям (34), получим систему для нахождения постоянных a_k и b_k :

$$\begin{cases} a_k I_\nu(p_k \beta^q) + b_k K_\nu(p_k \beta^q) = f_k \beta^{\frac{a-1}{2}}, \\ -a_k J_\nu(p_k \alpha^q) + b_k \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) = g_k \alpha^{\frac{a-1}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (35)$$

Если при всех $k \in \mathbb{N}$ определитель системы (35)

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(p_k \alpha^q) K_\nu(p_k \beta^q) + I_\nu(p_k \beta^q) \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) \neq 0, \quad (36)$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_k = \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} [f_k \beta^{\frac{a-1}{2}} \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) - g_k \alpha^{\frac{a-1}{2}} K_\nu(p_k \beta^q)], \quad (37)$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} [f_k \beta^{\frac{a-1}{2}} J_\nu(p_k \alpha^q) + g_k \alpha^{\frac{a-1}{2}} I_\nu(p_k \beta^q)]. \quad (38)$$

Подставляя (37) и (38) в (35), найдем функции

$$u_k(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \left[f_k \left(\frac{y}{\beta} \right)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(\alpha, y) + g_k \left(\frac{y}{\alpha} \right)^{\frac{1-a}{2}} A_k(y, \beta) \right], & y \geq 0, \\ \frac{1}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \left[f_k \left(\frac{-y}{\beta} \right)^{\frac{1-a}{2}} B_k(\alpha, -y) + g_k \left(\frac{-y}{\alpha} \right)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(-y, \beta) \right], & y \leq 0, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$\Delta_k(\alpha, y) = J_\nu(p_k \alpha^q) K_\nu(p_k y^q) + \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) I_\nu(p_k y^q),$$

$$A_k(y, \beta) = I_\nu(p_k \beta^q) K_\nu(p_k y^q) - I_\nu(p_k y^q) K_\nu(p_k \beta^q),$$

$$\begin{aligned} B_k(\alpha, -y) &= J_\nu(p_k \alpha^q) \bar{Y}_\nu(p_k (-y)^q) - \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q) J_\nu(p_k (-y)^q) = \\ &= \frac{\pi}{2\sin \pi\nu} [J_\nu(p_k \alpha^q) J_\nu(p_k (-y)^q) - J_\nu(p_k \alpha^q) J_\nu(p_k (-y)^q)], \end{aligned}$$

$$\Delta_k(-y, \beta) = J_\nu(p_k (-y)^q) K_\nu(p_k \beta^q) + \bar{Y}_\nu(p_k (-y)^q) I_\nu(p_k \beta^q).$$

Доказательство теоремы 1. Если существует решение задачи (2)–(6), то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (36) при всех $k \in \mathbb{N}$.

Достаточность. Пусть $f(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$ на $[0, l]$ и выполнены условия (36) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $f_k \equiv 0$, $g_k \equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, согласно формуле (39) при $y \in [-\alpha, \beta]$ функции $u_k(y) \equiv 0$ и в силу (19) имеем

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, y) \sin \mu_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда в силу полноты системы (18) в пространстве $L_2[0, l]$ следует, что функция $u(x, y) = 0$ почти всюду на $[0, l]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x, y)$ непрерывна в \bar{D} , то $u(x, y) \equiv 0$ в \bar{D} .

Необходимость. Пусть существует единственное решение задачи (2)–(6). Надо показать, что при этом выполняются условия (36) при всех $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что при некотором $k = d$ выражение $\Delta_d(\alpha, \beta) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(6), где $f(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_d(x, y) = \begin{cases} \frac{y^{\frac{1-a}{2}} A_d(y, \beta)}{I_\nu(p_d \beta^q)} \sin \mu_d x, & y \geq 0, \\ \frac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_d(-y, \beta)}{I_\nu(p_d \beta^q)} \sin \mu_d x, & y \leq 0, \end{cases}$$

что противоречит условию.

Выясним, при каких α , β , l , a и k выражение $\Delta_k(\alpha, \beta)$ равно нулю. Для этого представим знаменатель $\Delta_k(\alpha, \beta)$ в следующем виде:

$$\Delta_k(\alpha, \beta) = I_\nu(p_k \beta^q) \delta_k(\alpha, \beta),$$

где

$$\delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(p_k \alpha^q) \frac{K_\nu(p_k \beta^q)}{I_\nu(p_k \beta^q)} + \bar{Y}_\nu(p_k \alpha^q).$$

Представим аргументы функций Бесселя, входящих в формулу (20), в виде

$$p_k \alpha^q = \frac{\lambda_k}{q} \alpha^q = \frac{\sqrt{\mu_k^2 + b}}{q} \alpha^q = \frac{\pi k \alpha^q}{l q} \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{bl}}{\pi k}\right)^2} = \pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql},$$

где

$$\tilde{\lambda}_k = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{bl}}{\pi k}\right)^2}, \quad \alpha_{ql} = \frac{\alpha^q}{ql}, \quad \beta_{ql} = \frac{\beta^q}{ql}.$$

Тогда выражение $\delta_k(\alpha, \beta)$ будет определяться по формуле

$$\delta_k(\alpha, \beta) = J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) \frac{K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}{I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})} + \bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = \delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql}).$$

Существование нулей $\delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql})$ относительно α_{ql} следует из того, что функции $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ и $\bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя

$$y''(\alpha_{ql}) + \frac{1}{\alpha_{ql}} y'(\alpha_{ql}) + \left[(\pi k \tilde{\lambda}_k)^2 - \frac{\nu^2}{\alpha_{ql}^2} \right] y(\alpha_{ql}) = 0. \quad (40)$$

Поскольку функции $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ и $\delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql})$ являются линейно независимыми решениями уравнения (40), из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что нули двух линейно независимых решений уравнения Бесселя строго чередуются, т.е. на интервале между любыми последовательными нулями любого из этих решений содержится ровно один нуль другого решения. Функция $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ имеет счетное множество положительных нулей. Тогда функция $\delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql})$ также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_{ql} . Следовательно, для задачи (2)–(6) установлен критерий единственности. \square

2. Оценки малых знаменателей. Поскольку α_{ql} — любое положительное число, то при достаточно больших k выражение $\Delta_k(\alpha, \beta)$, которое входит в знаменатель формулы (39), может стать достаточно малым из-за существования счетного множества нулей $\delta_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql})$ относительно α_{ql} . Следовательно, возникает проблема малых знаменателей [10, 22, 23]. Функция $K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})$ при больших k строго убывает по асимптотической формуле $k^{-1/2} e^{-\pi k \beta_{ql}}$, а функция $I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})$ строго возрастает по формуле $k^{-1/2} e^{\pi k \beta_{ql}}$, поэтому величина

$$J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) \frac{K_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}{I_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \beta_{ql})}$$

есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql})$ при больших k . В связи с этим достаточно рассмотреть выражение

$$\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = \frac{2 \sin \pi \nu}{\pi} \bar{Y}_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) + J_{-\nu}(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}),$$

которое также имеет счетное множество положительных нулей относительно α_{ql} .

Функция $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = 0$ только в том случае, когда аргумент $\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}$ совпадает с нулями функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$, $\nu = (1 - a)/(2q)$, при $x > 0$. Известно [25, с. 70], что функция $J_\nu(x)$ при $\nu > -1$ и $x > 0$ имеет счетное множество изолированных нулей $x_{\nu, m}$, $m \in \mathbb{N}$. Значит, $J_\nu(\pi k \tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}) = 0$ только тогда, когда

$$\alpha_{ql} = \frac{x_{\nu, m}}{\pi k \tilde{\lambda}_k}, \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

Поскольку α_{ql} — любое положительное число, оно может принимать значения, близкие к нулям $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql})$. Поэтому при больших k выражение $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}, \beta_{ql})$ может стать достаточно малым.

Выражение $\tilde{\lambda}_k$, которое зависит от \sqrt{bl} , при условии

$$\frac{\sqrt{bl}}{\pi} < 1 \quad \text{или} \quad k > \frac{\sqrt{bl}}{\pi} = k_1$$

можно представить в виде

$$\tilde{\lambda}_k = \left(1 + \left(\frac{\sqrt{bl}}{\pi k}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \theta_k,$$

при этом для θ_k справедлива оценка

$$\frac{3}{8} \left(\frac{\sqrt{bl}}{\pi k} \right)^2 < \theta_k < \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{bl}}{\pi k} \right)^2. \quad (41)$$

Используя асимптотическую формулу [25, с. 98]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4} \right) + O(z^{-5/2}), \quad z \rightarrow \infty,$$

при $k > k_0$, где k_0 — достаточно большое натуральное число, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{k} \tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \left[\cos \left(\pi k \alpha_{ql} + \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\pi k \alpha_{ql} + \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \cos \frac{\pi \nu}{2} \sin \left(\pi k \alpha_{ql} + \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} \right), \quad \tilde{\theta}_k = \pi k \theta_k. \end{aligned} \quad (42)$$

1. Пусть $\alpha_{ql} = p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда, поскольку

$$\tilde{\lambda}_k \rightarrow 1 \quad \text{и} \quad \tilde{\theta}_k \rightarrow 0, \quad (43)$$

при всех $k > k_0$ из (44) получим оценку

$$\left| \sqrt{k} \tilde{\delta}_k(p) \right| = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{p}} \left| \sin \left(\pi k p + \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi \nu}{2} \right| \geq \frac{1}{\pi \sqrt{p}} \left| \cos \frac{\pi \nu}{2} \right| = \tilde{C}_1 > 0. \quad (44)$$

2. Пусть $\alpha_{ql} = d/t$ — рациональное число, где $d, t \in \mathbb{N}$, $(d, t) = 1$, $(t, 4) = 1$, $d/t \notin \mathbb{N}$. Разделим kd на t с остатком: $kd = st + r$, $s, t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < t$. Тогда соотношение (42) принимает вид

$$\sqrt{k} \tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = (-1)^s \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \sin \left[\frac{\pi r}{t} + \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} \right] \cos \frac{\pi \nu}{2}. \quad (45)$$

Если $r = 0$, то из представления (45) получим

$$\sqrt{k} \tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = (-1)^s \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \sin \left[\tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} \right] \cos \frac{\pi \nu}{2}. \quad (46)$$

Поскольку последовательность $\tilde{\theta}_k$ в силу оценки (41) является бесконечно малой при $k \rightarrow +\infty$, существует число $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

на основании (41), (46) получим оценку

$$\begin{aligned} \sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) &> \frac{4}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \left| \cos \frac{\pi\nu}{2} \right| \left(\tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \left| \cos \frac{\pi\nu}{2} \right| \left(\frac{3}{2} \left(\frac{bl}{\pi} \right)^2 + 1 \right) \geq \tilde{C}_2 > 0 \end{aligned}$$

при $k \geq \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть $r > 0$, тогда $1 < r < t - 1$, $t \geq 2$. Поскольку выражение $\sin \left[\frac{\pi r}{t} + \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} + \frac{\pi}{4} \right]$ имеет конечный предел при $k \rightarrow \infty$, существует $k_3 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > k_3$ из (45) будем иметь

$$\left| \sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \right| \geq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha_{ql}}} \left| \cos \frac{\pi\nu}{2} \right| \cdot \left| \sin \pi \left(\frac{r}{t} + \frac{1}{4} \right) \right| = \tilde{C}_3. \quad (47)$$

В силу последней оценки следует исключить случай, когда $\frac{r}{t} + \frac{1}{4} = 1$, то есть число $\frac{r}{t}$ надо взять так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{r}{t} \neq \frac{3}{4}$. Если числа t и 4 взаимно простые, то постоянная \tilde{C}_3 из (47) всегда больше нуля.

Из полученных выше неравенств (44) и (47) следует справедливость оценки

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geq \frac{C_0}{\sqrt{k}} > 0$$

при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$, где $C_0 = \min\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $(t, 4) > 1$, т.е. пусть $t = 4t_1$, $t_1 \in \mathbb{R}$, тогда из оценки (47) следует, что

$$\sin \pi \left(\frac{r}{t} + \frac{1}{4} \right) = \sin \pi \left(\frac{r}{t} + \frac{1}{4} \right) = \sin \pi \left(\frac{r}{4t_1} + \frac{1}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{t_1} + 1 \right).$$

Отсюда, например, при $r = 3t_1$ последнее равенство будет равно нулю.

3. Рассмотрим случай, когда α_{ql} является алгебраическим иррациональным числом степени 2. Тогда соотношение (42) представим в виде

$$\sqrt{k}\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) = (-1)^m \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tilde{\lambda}_k \alpha_{ql}}} \cos \frac{\pi\nu}{2} \sin \left(\frac{\pi k}{4} \left(4\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{k} \right) + \tilde{\theta}_k \alpha_{ql} \right), \quad (48)$$

где m — произвольное натуральное число.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует нечетное число $m' = 4m - 1 = 2m'' - 1$, $m'' = 2m$ [26] такое, что имеет место неравенство

$$\left| 4\alpha_{ql} - \frac{m'}{k} \right| < \frac{1}{k}. \quad (49)$$

Действительно, для этого достаточно положить

$$m' = \begin{cases} [4k\alpha_{ql}], & \text{если } [4k\alpha_{ql}] - \text{нечетное,} \\ [4k\alpha_{ql}] + 1, & \text{если } [4k\alpha_{ql}] - \text{четное,} \end{cases}$$

где $[4k\alpha_{ql}]$ — целая часть иррационального числа $4k\alpha_{ql}$.

Число $m \in \mathbb{N}$ возьмем таким, чтобы в силу неравенства (49) выполнялось неравенство

$$\pi k \left| \alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right| < \frac{\pi}{4}. \quad (50)$$

Если α_{ql} является алгебраическим числом степени два, то в силу теоремы Лиувилля [27, с. 60] существует положительное число ε_0 , зависящее от α_{ql} , такое, что при любых целых $4k$ и $4m-1$, $k > 0$, выполняется неравенство

$$\left| \alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right| \geq \frac{\varepsilon_0}{16k^2}. \quad (51)$$

В силу оценок (41) имеем

$$0 < \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k < \frac{\alpha_{ql}(bl)^2}{2\pi k} = \frac{\tilde{C}_4}{k}. \quad (52)$$

Тогда с некоторого номера k_0 при всех $k > k_0$ выполняется условие

$$\frac{\alpha_{ql}(bl)^2}{2\pi} < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда из (50) и (52) возможны два случая:

- 1) $\frac{\pi}{2} \leq \pi k \left(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right) + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{4} + \tilde{C}_4 < \pi,$
- 2) $-\frac{\pi}{2} \leq \pi k \left(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right) + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}.$

В первом случае

$$\left| \sin \left[\pi k \left(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right) + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k \right] \right| \geq \sin \left(\frac{\pi}{4} + \tilde{C}_4 \right) > \sin \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} \geq \frac{\tilde{C}_5}{k}.$$

Во втором случае с учетом неравенств (51) и

$$|\sin x| > \frac{2}{\pi}|x|, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \sin \left[\pi k \left(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right) + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k \right] \right| &> \frac{2}{\pi} \left| \pi k \left(\alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right) + \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k \right| \geq \\ &\geq 2k \left| \alpha_{ql} - \frac{4m-1}{4k} \right| - \alpha_{ql} \tilde{\theta}_k \frac{2}{\pi} \geq \frac{\varepsilon_0}{8k} - \frac{2C_4}{\pi k} = \frac{1}{k} \left(\varepsilon_0 - \frac{2C_4}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Потребуем, чтобы постоянные α_{ql} , l , \sqrt{b} и ε_0 удовлетворяли неравенству

$$\varepsilon_0 - 2\alpha_{ql} \left(\frac{2l\sqrt{b}}{\pi} \right)^2 > 0,$$

которое, например, при малых l , или \sqrt{b} , или α всегда имеет место.

Тогда из (48) и (53) при $k > k_0$ следует

$$|\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql})| \geq \frac{C_1}{k^{3/2}}.$$

Тем самым нами *доказано утверждение 2.*

3. Обоснование существования решения задачи. Если $\tilde{\delta}_k(\alpha_{ql}) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$ и выполнена оценка (12), то на основании частных решений (18) и (39) решение задачи (2)–(6) представим в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) X_k(x). \quad (54)$$

Покажем, что при определенных условиях на числа $\alpha_{ql} = \alpha^q/(ql)$ и функции $f(x)$, $g(x)$ ряд (54) сходится равномерно в замкнутой области \overline{D} и можно применить дважды почленное дифференцирование по переменным x и y соответственно в замкнутых областях $\overline{D}_{+\varepsilon}$ и $\overline{D}_{-\varepsilon}$, где $\overline{D}_{+\varepsilon} = \overline{D}_+ \cap \{y > \varepsilon\}$ и $\overline{D}_{-\varepsilon} = \overline{D}_- \cap \{y < -\varepsilon\}$, где ε — достаточно малое положительное число.

Рассмотрим следующие отношения:

$$\begin{aligned} R_k(y) &= \frac{y^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(\alpha, y)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & T_k(y) &= \frac{y^{\frac{1-a}{2}} A_k(y, \beta)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & y &\in [0, \beta], \\ M_k(y) &= \frac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} B_k(\alpha, -y)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & L_k(y) &= \frac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(-y, \beta)}{\Delta_k(\alpha, \beta)}, & y &\in [-\alpha, 0]. \end{aligned} \quad (55)$$

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие (12) при всех $k > k_0$. Тогда для таких k справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |R_k(y)| &\leq C_2, \quad y \in [0, \beta]; & |R'_k(y)| &\leq C_3 k, & |R''_k(y)| &\leq C_4 k^{\frac{5}{2}-\nu}, \quad y \in [\varepsilon, \beta]; \\ |T_k(y)| &\leq C_5 k^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad y \in [0, \beta]; & |T'_k(y)| &\leq C_6 k, & |T''_k(y)| &\leq C_7 k^{\frac{5}{2}-\nu}, \quad y \in [\varepsilon, \beta]; \\ |M_k(y)| &\leq C_8, \quad y \in [-\alpha, 0]; & |M'_k(y)| &\leq C_9 k, & |M''_k(y)| &\leq C_{10} k^{\frac{5}{2}-\nu}, \quad y \in [-\alpha, -\varepsilon]; \\ |L_k(y)| &\leq C_{11} k^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad y \in [-\alpha, 0]; & |L'_k(y)| &\leq C_{12} k, & |L''_k(y)| &\leq C_{13} k^{\frac{5}{2}-\nu}, \quad y \in [-\alpha, -\varepsilon]. \end{aligned}$$

Здесь и далее C_i — положительные постоянные.

Доказательство. Рассмотрим функции $R_k(y)$. На основании асимптотических формул поведения функций Бесселя в окрестности бесконечно удаленной точки [29, с. 227] и в окрестности нуля [25, с. 98–99] из (55) при $0 \leq y \leq \beta$ и больших k имеем

$$\begin{aligned}
 |R_k(y)| &\leq \frac{\sqrt{k}}{I_\nu(p_k\beta^q)C_0} \left[|J_\nu(p_k\alpha^q)| y^{\frac{1-a}{2}} K_\nu(p_k y^q) + y^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_k y^q) |\bar{Y}_\nu(p_k\alpha^q)| \right] \leq \\
 &\leq \tilde{C}_6 + \frac{\sqrt{k} y^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_k y^q)}{C_0 I_\nu(p_k\beta^{\frac{1}{2}})} |\bar{Y}_\nu(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})| \leq C_2,
 \end{aligned}$$

Используя формулы [25, с. 90], вычислим производную

$$R'_k(y) = \frac{p_k q y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}}{\Delta_k(\alpha, \beta)} \left[I_{\nu-1}(p_k y^q) \bar{Y}_\nu(p_k\alpha^q) - J_\nu(p_k\alpha^q) K_{\nu-1}(p_k y^q) \right].$$

Отсюда на основании оценки (12) и асимптотических формул функций Бесселя в окрестности бесконечно удаленной точки при $y \in [\varepsilon, \beta]$ получим

$$\begin{aligned}
 |R'_k(y)| &\leq \frac{p_k \sqrt{k}}{I_\nu(p_k\beta^q)C_0} \left[|J_\nu(p_k\alpha^q)| y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} K_{\nu-1}(p_k y^q) + \right. \\
 &\quad \left. + y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} I_{\nu-1}(p_k y^q) |\bar{Y}_\nu(p_k\alpha^q)| \right] \leq \\
 &\leq \tilde{C}_7 k + \frac{\sqrt{k} p_k y^{q-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}} I_{\nu-1}(p_k y^q)}{C_0 I_\nu(p_k\beta^q)} |\bar{Y}_\nu(p_k\alpha^q)| \leq C_3 k. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Для производной второго порядка функции $R_k(y)$ имеет место представление

$$R''_k(y) = p_k^2 q^2 y^{2q-2} R_k(y) - \frac{a}{y} R'_k(y), \quad 0 < y \leq \beta.$$

Из данного равенства в силу оценки (56) следует, что

$$|R''_k(y)| \leq C_4 k^2, \quad \varepsilon \leq y \leq \beta. \quad \square$$

Аналогично получаем оценки для функций $T_k(y)$, $K_k(y)$ и $L_k(y)$ и их производных первого и второго порядков.

ЛЕММА 2. Пусть выполнено условие (12) при всех $k > k_0$. Тогда для таких k справедливы следующие оценки:

$$|u_k(y)| \leq C_{14} (|f_k| + k^{\frac{1}{2}-\nu} |g_k|), \quad y \in [-\alpha, \beta];$$

$$|u'_k(y)| \leq C_{15} k (|f_k| + |g_k|), \quad |u''_k(y)| \leq C_{16} k^2 (|f_k| + |g_k|), \quad y \in [-\alpha, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \beta].$$

Доказательство. На основании формулы (39) с учетом функций (34), (35) получим представление для функции

$$u_k(y) = \begin{cases} f_k \beta^{\frac{a-1}{2}} R_k(y) + g_k \alpha^{\frac{a-1}{2}} T_k(y), & y \geq 0, \\ f_k \beta^{\frac{a-1}{2}} M_k(y) + g_k \alpha^{\frac{a-1}{2}} L_k(y), & y \leq 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя лемму 1, нетрудно получить указанные оценки для функции $u_k(y)$ и ее производных первого и второго порядка. \square

ЛЕММА 3. Пусть $f(x), g(x) \in C^3[0, l]$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(l) = g(l) = 0$, $f''(0) = g''(0) = 0$, $f''(l) = g''(l) = 0$. Тогда справедливы представления

$$f_k = \frac{f_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad g_k = \frac{g_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \quad (57)$$

где

$$f_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f'''(x) \cos \mu_k x dx, \quad g_k^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g'''(x) \cos \mu_k x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k^{(3)}|^2 \leq \|f'''(x)\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |g_k^{(3)}|^2 \leq \|g'''(x)\|_{L_2[0, l]}^2. \quad (58)$$

Доказательство. Интегрируя по частям три раза интегралы в (34) с учетом условий леммы, получим представления (57). Оценки (58) являются неравенствами Бесселя для системы косинусов $\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}}, \frac{2}{\sqrt{l}} \cos \mu_k x \right\}$. \square

Таким образом, в силу лемм 2, 3, ряд (54) при любом (x, y) из \bar{D} мажорируется сходящимся рядом

$$C_{17} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \left(|f_k^{(3)}| + |g_k^{(3)}| \right),$$

поэтому ряд (54) сходится равномерно в замкнутой области \bar{D} . Ряды из производных первого и второго порядка мажорируются соответственно на замкнутых областях $\bar{D}_{+\varepsilon}$ и $\bar{D}_{-\varepsilon}$ сходящимся числовым рядом

$$C_{18} \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(|f_k^{(3)}| + |g_k^{(3)}| \right),$$

поэтому сумма $u(x, y)$ ряда (54) принадлежит классу (2) и удовлетворяет уравнению (1) на множестве $D_+ \cup D_-$.

Если для указанных в утверждении 2 значений α_{ql} из случаев 1), 2) выполняется равенство $\Delta_s(\alpha, \beta) = 0$, где $s = s_1, s_2, \dots, s_m$ и m — заданные натуральные числа ($1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m \leq k_0$), то для разрешимости задачи (2)–(6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f_s \alpha^{\frac{1-a}{2}} J_\nu(p_s \alpha^q) + g_s \beta^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_s \beta^q) = 0, \quad (59)$$

где f_s, g_s определены ниже формулами (34). Тогда решение этой задачи определяется в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{s_1-1} + \sum_{s_1+1}^{s_2-1} + \dots + \sum_{s_m+1}^{+\infty} \right) u_k(y) \sin \mu_k x + \sum_q u_q(x, y), \quad (60)$$

где в последней сумме q принимает значения s_1, s_2, \dots, s_m и функции $u_s(x, y)$ определяются по формуле

$$u_s(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{f_s y^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_s y^q)}{\beta^{\frac{1-a}{2}} I_\nu(p_s \beta^q)} + C_s \frac{y^{\frac{1-a}{2}} A_s(y, \beta)}{I_\nu(p_s \beta^q)} \right) \sin \mu_s x, & y \geq 0, \\ \left(\frac{g_s(-y)^{\frac{1-a}{2}} J_\nu(p_s(-y)^q)}{\alpha^q J_\nu(p_s \alpha^q)} + \frac{(-y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_s(-y, \beta)}{I_\nu(p_s \beta^q)} \right) \sin \mu_s x, & y \leq 0. \end{cases}$$

Здесь C_s — произвольная постоянная; конечные суммы в (60) следует считать нулями при условии, когда верхний предел меньше нижнего.

Таким образом, доказана теорема 2.

Если α_{ql} является алгебраическим числом степени 2, тогда будут справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 4. Пусть выполнено условие (13) при всех $k > k_0$. Тогда для таких k справедливы следующие оценки:

$$|u_k(y)| \leq C_{19}(k|f_k| + k^{\frac{3}{2}-\nu}|g_k|), \quad y \in [-\alpha, \beta];$$

$$|u'_k(y)| \leq C_{20}k^2(|f_k| + |g_k|), \quad |u''_k(y)| \leq C_{21}k^3(|f_k| + |g_k|), \quad y \in [-\alpha, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \beta].$$

Доказательство леммы 4 проводится аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 5. Пусть $f(x), g(x) \in C^4[0, l]$, $f(0) = g(0) = 0$, $f(l) = g(l) = 0$, $f'''(0) = g'''(0) = 0$, $f'''(l) = g'''(l) = 0$. Тогда справедливы оценки

$$f_k = \frac{f_k^{(4)}}{\mu_k^4}, \quad g_k = \frac{g_k^{(4)}}{\mu_k^4},$$

где

$$f_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f^{(4)}(x) \sin \mu_k x dx, \quad g_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g^{(4)}(x) \sin \mu_k x dx,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_k^{(4)}|^2 \leq \|f^{(4)}(x)\|_{L_2[0, l]}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |g_k^{(4)}|^2 \leq \|g^{(4)}(x)\|_{L_2[0, l]}^2.$$

Доказательство леммы 5 проводится аналогично доказательству леммы 3.

На основании лемм 4, 5 по аналогии с доказательством теоремы 2 доказывается теорема 3.

5. Устойчивость решения задачи. Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0, l]} = \|u(x, y)\|_{L_2} = \left(\int_0^l |u(x, y)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x, y)|.$$

Доказательство теоремы 4. Поскольку система собственных функций (18) является ортонормированной, из формулы (54) и леммы 2 имеем

$$\|u(x, y)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(y) \leq 2\tilde{C}_{14}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + |k^{\frac{1}{2}-\nu} g_k|^2). \quad (61)$$

Если $\nu < 1/2$, то из неравенства (61) имеет место оценка

$$\|u(x, y)\|_{L_2}^2 \leq 2\tilde{C}_{14}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |k^{\frac{1}{2}} g_k|^2) \right). \quad (62)$$

Учитывая, что при $g(0) = g(l) = 0$ коэффициент g_k можно представить в виде

$$g_k = \frac{l}{\pi} \frac{g_k^{(1)}}{k}, \quad \text{где } g_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g'(x) \cos \mu_k x dx, \quad (63)$$

из неравенства (62) получим

$$\|u(x, y)\|_{L_2}^2 \leq \tilde{C}_8^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |g_k^{(1)}|^2) \right) \leq M_1 (\|f\|_{L_2}^2 + \|g'\|_{L_2}^2). \quad (64)$$

Если $\nu \geq 1/2$, то из оценки (61) имеем

$$\|u(x, y)\|_{L_2}^2 \leq 2\tilde{C}_{14}^2 \sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + |g_k|^2) = M_2 (\|f\|_{L_2}^2 + \|g\|_{L_2}^2). \quad (65)$$

Тогда из неравенств (64) и (65) следует справедливость оценки (14).

Пусть (x, t) — любая точка из \bar{D} . Тогда из ряда (54) в силу леммы 2 имеем

$$|u(x, y)| \leq \tilde{C}_9 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{1}{2}-\nu} |g_k| \right). \quad (66)$$

При $f(0) = f(l) = 0$, $g(0) = g(l) = 0$ коэффициенты f_k и g_k можно представить в виде

$$f_k = \frac{l}{\pi} \frac{f_k^{(1)}}{k}, \quad f_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f'(x) \cos \mu_k x dx, \quad (67)$$

$$g_k = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{g_k^{(2)}}{k^2}, \quad g_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g''(x) \sin \mu_k x dx. \quad (68)$$

Тогда из оценки (66) при $\nu < 1/2$ с учетом (67) и (68) на основании неравенства Коши—Буняковского будем иметь

$$|u(x, y)| \leq \tilde{C}_{10} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |f_k^{(1)}| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |g_k^{(2)}| \right] \leq$$

$$\leq \tilde{C}_{11} \frac{l}{\pi} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|f_k^{(1)}|)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|g_k^{(2)}|)^2 \right)^{1/2} \right].$$

Отсюда с учетом равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

получим

$$|u(x, y)| \leq \tilde{C}_{12} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (|f_k^{(1)}|)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (|g_k^{(2)}|)^2 \right)^{1/2} \right] \leq \tilde{C}_{12} (\|f'\|_{L_2[0,l]} + \|g''\|_{L_2[0,l]}) \leq M_3 (\|f'\|_{C[0,l]} + \|g''\|_{C[0,l]}).$$

Если $\nu \geq 1/2$, то из неравенства (66) с учетом (68) и (67) получим

$$|u(x, y)| \leq \tilde{C}_{13} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (|f_k^{(1)}| + |g_k^{(1)}|) \leq \tilde{C}_{14} (\|f'\|_{L_2[0,l]} + \|g'\|_{L_2[0,l]}) \leq M_4 (\|f'\|_{C[0,l]} + \|g''\|_{C[0,l]}).$$

Из полученных неравенств следует справедливость оценки (15). □

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18-31-00111).

Библиографический список

1. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // *Докл. АН СССР*, 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. Кароль И. Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // *Докл. АН СССР*, 1953. Т. 88, № 2. С. 197–200.
3. Исамухамедов С. С. Краевая задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1970. № 4. С. 9–12.
4. Крикунов Ю. М. *Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа*. Казань: Казан. гос. ун-т, 1986. 150 с.
5. Хайруллин Р. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 8. С. 1396–1407.
6. Сохадзе Р. С. О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 127–134.
7. Сохадзе Р. С. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения // *Диффер. уравн.*, 1981. Т. 17, № 1. С. 150–156.
8. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 4. С. 45–53.

9. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // *Диффер. уравн.*, 2013. Т. 49, № 4. С. 528–534. doi: 10.1134/S0374064113040122.
10. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26.
11. Хайруллин Р. С. О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 684–692. doi: 10.1134/S0374064117050119.
12. Кожанов А. И. Краевые задачи для ультрапараболических и квазиультрапараболических уравнений с меняющимся направлением эволюции / *Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» Кабардино-Балкария, Нальчик, 17–21 мая 2017 г.* / Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 149. М.: ВИНТИ РАН, 2018. С. 56–63.
13. Кожанов А. И., Потапова С. В. Краевые задачи для двумерных по временным переменным дифференциальных уравнений нечетного порядка с меняющимся направлением эволюции // *Сиб. матем. журн.*, 2018. Т. 59, № 5. С. 1098–1115. doi: 10.17377/smzh.2018.59.511.
14. Егоров И. Е. Применение модифицированного метода Галеркина к первой краевой задаче для уравнения смешанного типа // *Матем. заметки СВФУ*, 2015. Т. 22, № 3. С. 3–10.
15. Егоров И. Е., Ефимова Е. С., Тихонова И. М. Фредгольмова разрешимость первой краевой задачи для уравнения смешанного типа второго порядка со спектральным параметром // *Матем. заметки СВФУ*, 2018. Т. 25, № 1. С. 15–24. doi: 10.25587/SVFU.2018.1.12765.
16. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 3. С. 393–406. doi: 10.4213/mzm9135.
17. Сабитова Ю. К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 12. С. 49–58.
18. Сабитова Ю. К. Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 8. С. 1205–1208.
19. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1970. 296 с.
20. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
21. Сабитов К. Б. *К теории уравнений смешанного типа*. М.: Физматлит, 2014. 304 с.
22. Арнольд В. И. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1961. Т. 25, № 1. С. 21–86.
23. В. И. Арнольд Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics // *УМН*, 1963. Т. 18, № 6(114). С. 91–192.
24. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1951. Т. 77, № 5. С. 11–14.
25. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.
26. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного парабологиперболического типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. № 4. С. 55–62.
27. Хинчин А. Я. *Цепные дроби*. М.: Наука, 1978. 112 с.
28. Бухштаб А. А. *Теория чисел*. СПб.: Лань, 2008. 384 с.
29. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики*. М.: Физматлит, 2013. 312 с.

MSC: 35M10

Dirichlet problem for a mixed type equation with characteristic degeneration

*Yu. K. Sabitova*Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
37, Lenina prosp., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

For a mixed elliptic-hyperbolic type equation with characteristic degeneration, the first boundary value problem in a rectangular region is investigated. The criterion for the uniqueness of the solution of the problem is established. Earlier, in proving the uniqueness of solutions of boundary value problems for equations of mixed type, the extremum principle or the method of integral identities was used. The uniqueness of the solution to this problem is established on the basis of the completeness of the system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. The solution of the problem is constructed as a sum of a series in the system of eigenfunctions. When we proved the convergence of the obtained series, the problem of small denominators of a more complicated structure than in other known works arose. These denominators contain a parameter depending on the lengths of the sides of the rectangle in the hyperbolic part of the domain and the exponent of the degree of degeneration. In this connection, estimates are established about separation from zero with the corresponding asymptotics, in cases where this parameter is a natural, rational and algebraic irrational number of degree two. If this parameter is not an algebraic irrational number of degree two, then the solution of the problem as a sum of a series does not exist. Using the obtained estimates, the uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions is justified under certain sufficient conditions with respect to the boundary functions. The stability of the solution of the problem with respect to the boundary functions in the norms of the space of summable functions and in the space of continuous functions is also proved.

Keywords: equation of mixed type with characteristic degeneration, Dirichlet problem, criterion of uniqueness, existence, small denominator.

Received: 14th July, 2019 / Revised: 23rd October, 2019 /Accepted: 11th November, 2019 / First online: 12th December, 2019

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sabitova Yu. K. Dirichlet problem for a mixed type equation with characteristic degeneration, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 622–645. doi: 10.14498/vsgtu1721 (In Russian).

Author's Details:

Yulia K. Sabitova  <https://orcid.org/0000-0002-7969-007X>

Cand Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: sabitovauk@rambler.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-31-00111).

References

1. Keldysh M. V. On some cases of degeneration of an equation of elliptic type on the domain boundary, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183 (In Russian).
2. Karol I. L. On a boundary value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 2, pp. 197–200 (In Russian).
3. Isamukhamedov S. S. The Tricomi boundary value problem for a mixed type equation of the second kind, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1970, no. 4, pp. 9–12 (In Russian).
4. Krikunov Yu. M. *Kraevye zadachi dlia model'nykh uravnenii smeshannogo tipa* [Boundary Value Problems for Model Mixed-Type Equations]. Kazan', Kazan' State Univ., 1986, 150 pp. (In Russian)
5. Khairullin R. S. The Tricomi problem for an equation of mixed type of the second kind in the case of a normal domain, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 8, pp. 1031–1039.
6. Sokhadze R. I. The first boundary value problem for an equation of mixed type in a rectangle, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 127–134 (In Russian).
7. Sokhadze R. I. The first boundary value problem for an equation of mixed type with weighted glueing conditions along a line of parabolic degeneration, *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 1, pp. 150–156 (In Russian).
8. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. doi: 10.3103/S1066369X07040068.
9. Khairullin R. S. On the Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind with strong degeneration, *Differ. Equ.*, 2013, vol. 49, no. 4, pp. 510–516. doi: 10.1134/S0012266113040113.
10. Sabitov K. B. The Dirichlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 2, pp. 193–196. doi: 10.1134/S1064562407020056.
11. Khairullin R. S. Solvability of the Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind, *Diff Equ.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 677–685. doi: 10.1134/S0012266117050111.
12. Kozhanov A. I. Boundary value problems for ultraparabolic and quasi-ultraparabolic equations with a varying direction of evolution, In: *Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Physics", Kabardino-Balkaria, Nalchik, May 17–21, 2017*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 149. Moscow, VINITI, 2018, pp. 56–63 (In Russian).
13. Kozhanov A. I., Potapova S. V. Boundary value problems for odd order forward-backward-type differential equations with two time variables, *Siberian Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 5, pp. 870–884. doi: 10.1134/S0037446618050117.
14. Egorov I. E. Application of the modified Galerkin method for the first boundary problem for mixed type equation, *Math. Notes NEFU*, 2015, vol. 22, no. 3, pp. 3–10 (In Russian).
15. Egorov I. E., Efimova E. S., Tikhonova I. M. On Fredholm solvability of first boundary value problem for mixed-type second-order equation with spectral parameter, *Math. Notes NEFU*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 15–24 (In Russian).
16. Sabitova Yu. K. Boundary-value problem with nonlocal integral condition for mixed-type equations with degeneracy on the transition line, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 454–465. doi: 10.1134/S0001434615090114.
17. Sabitova Yu. K. Nonlocal initial-boundary-value problems for a degenerate hyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 12, pp. 41–49. doi: 10.3103/S1066369X09120068.

18. Sabitova Yu. K. Criterion for the uniqueness of a solution of a nonlocal problem for a degenerate equation of the mixed type in a rectangular domain, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 8, pp. 1215–1218. doi: 10.1134/S001226611008015X.
19. Smirnov M. M. *Urvneniia smeshannogo tipa* [Mixed Type Equations]. Moscow, Nauka, 1970, 296 pp. (In Russian)
20. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
21. Sabitov K. B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the Theory of Equations of Mixed Type]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 304 pp. (In Russian)
22. Arnol'd V. I. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1961, vol. 25, no. 1, pp. 21–86 (In Russian).
23. Arnol'd V. I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russian Math. Surveys*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191. doi: 10.1070/RM1963v018n06ABEH001143.
24. Keldysh M. V. On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-self-adjoint equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1951, vol. 77, no. 5, pp. 11–14 (In Russian).
25. Bateman H., Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions], vol. 2, Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials. Moscow, Nauka, 1966, 296 pp. (In Russian)
26. Sabitov K. B., Safin E. M. The inverse problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 4, pp. 48–54. doi: 10.3103/S1066369X10040067.
27. Khinchin A. Ya. *Tsepnye drobi* [Continued Fraction]. Moscow, Nauka, 1978, 112 pp. (In Russian)
28. Bukhshtab A. A. *Teoriia chisel* [Number Theory]. St. Petersburg, Lan', 2008, 384 pp. (In Russian)
29. Sabitov K. B. *Urvneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013, 312 pp. (In Russian)

Mechanics of Solids



MSC: 74A20, 74A60

On a differential constraint in the continuum theory of growing solids

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The present paper is devoted to the problem of boundary conditions formulation for asymmetric problems in the mechanics of growing solids (MGS). The boundary conditions on the propagating growing surface (PGS) is the fundamental problem of this branch of mechanics. Results from the algebra of rational invariants are used for deriving constitutive equations on PGS. Geometrically and mechanically consistent differential constraints are obtained on PGS. Those are valid for a wide range of materials and metamaterials. A number of constitutive equations on PGS of different complexity levels are proposed. The boundary conditions simultaneously can be treated as differential constraints within the frameworks of variational formulations. The differential constraints imply an experimental identification of constitutive functions. For this reason, the obtained results furnish a general ground in applied problems of the MGS.

Keywords: 3D printing, surface growth, stress, constitutive equation, rational invariant, differential constraint, complete system.

Received: 30th April, 2019 / Revised: 12th August, 2019 /

Accepted: 16th September, 2019 / First online: 18th November, 2019

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. doi: 10.14498/vsgtu1696.

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@google.com

Yuri N. Radayev <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

1. Introduction

Traditional methods of manufacturing products of complex shape imply a variety of technological processes. Such processes are coupled with the removal of material and based on the synthesis of products by successively adding material to a surface of complex shape. Manufacturing products by adding new material is widely used in modern engineering [1]. Such additive manufacturing methods include: laser stereolithography [2], selective laser sintering [3], electron beam melting [4], fusion simulation, multi-jet modeling method [5], manufacturing by lamination, 3D printing [6–8], computer axial lithography [9], layer-by-layer concreting [10].

3D printing (3DP) is similar to selective laser sintering technology, but melting isn't used here. An object is formed from powder material by gluing, using inkjet printing to apply liquid glue. 3D printing technology allows color modeling by adding dyes to the adhesive (directly during printing), or by using multiple printheads with color glue [6–8].

Layer-by-layer concreting of constructions also belongs to the methods of additive technologies [10]. Layer-by-layer concreting can be divided into two types, depending on the time between layer fills. In the case of a “hot seam,” the break between the layers is less than 12 hours. The second type of layer-by-layer filling is a “cold seam.” In this case, it is necessary to wait for the complete hardening of the previous layer to exclude the possible cracking of the non-hardened part under the action of the newly added material.

The additive manufacturing techniques described above basically use well-known ideas from natural processes: accretion of space objects, the formation of avalanches and glaciers, crystal growth processes, the growth of atherosclerotic plaques [11, 12]. All these phenomena are characterized by presence of PGS. The growth of atherosclerotic plaque can be described as the process of initial infiltration of blood plasma components into a thin surface layer of the inner wall of the artery. The growth of a crystal nucleus occurs by adding individual atoms or their groups to crystal surface.

A solution of applied problem of growing solids mechanics is sometimes a sophisticated and time-consuming procedure [13–19]. An substantial feature of the formulation of boundary value problems of the MGS is the formulation of boundary conditions on the interface between the source material and the added part [20–22]. In this paper, several variants of the constitutive equations on the growing surface are discussed, starting from the simplest relations (see the book by G.I. Bykovtsev: [22, Pp. 288–292]) to some significant generalizations of the theory. Throughout the paper the terminology and notations adopted in the publications [16–19, 22, 24] are used.

2. Rate equations of mechanics of growing solids (MGS)

The governing equations in MGS are often conveniently furnished as the rate equations. In this case, the equilibrium equation formulated in an arbitrary spatial system of curvilinear coordinates x^k ($k = 1, 2, 3$) for the asymmetric stress tensor can be presented as partial differential equation

$$\nabla_j(\partial.\sigma^{ji}) + \partial.X^i = 0,$$

where σ^{ij} is the Cauchy force stress tensor, X^i is the volume forces, ∇_j is the covariant differential operator with respect to a given spatial metrics, ∂_t is the time derivative take with fixed spatial coordinates x^k .

In order to close the system of differential equations, it is required to specify constitutive equations according to the constitutive law which is an intrinsic characteristics of a particular solid/process. A model of growing solid should also be supplemented by boundary conditions on PGS.

Growing surface Σ propagating in space is determined by an implicit form equation:

$$t = \tau^*(x^i).$$

In this case, the unit normal vector \mathbf{n} on the surface Σ directed towards its propagation is given by the spatial gradient as follows

$$n_i = c \partial_i^* \tau, \quad c = |\nabla \tau^*|^{-1}, \quad (1)$$

where c is the linear velocity of PGS in the normal direction \mathbf{n} , which is defined according to

$$c = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta t}.$$

Here $|\overrightarrow{PP'}|$ is the length of normal vector directed from an arbitrary point P on PGS at time t to point P' which is intersection of normal vector \mathbf{n} and PGS at time $t + \delta t$.

To find out the force stress tensor by the given rates of stresses, one can employ the formulae given in [22]:

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= \int_{\tau^*+0}^t [\partial_t \sigma^{ij}(x^k, t')] dt' + \mathfrak{J}^{ij} + \overset{*}{\sigma}^{ij}(x^k), \\ \mathfrak{J}^{ij} &= \int_{\tau^*-0}^{\tau^*+0} [\partial_t \sigma^{ij}(x^k, t')] dt', \end{aligned} \quad (2)$$

where \mathfrak{J}^{ij} — stress jump related integral, $\overset{*}{\sigma}^{ij}(x^k) = \sigma^{ij}(x^k, t)|_{t=\tau^*(x^s)-0}$ are the force stress tensor components at the time $t = \tau^*(x^s) - 0$ right before an element starting formation of the main solid. The time $t = \tau^*(x^s) + 0$ corresponds to moment right after an element has been attached to PGS. In order to simplify script of formulas we retain $t = \tau^*(x^s)$ instead of a more correct $t = \tau^*(x^s) + 0$.

After substituting of actual stresses (2) into the equilibrium equation

$$\nabla_j \sigma^{ji} + X^i = 0 \quad (3)$$

one can readily come to

$$\nabla_j \left\{ \int_{\tau^*}^t [\partial_t \sigma^{ji}(x^k, t')] dt' + \mathfrak{J}^{ij} + \overset{*}{\sigma}^{ji}(x^k) \right\} + X^i = 0 \quad (t \geq \tau^* + 0). \quad (4)$$

After transformations according to the rule of differentiation of the integral depending on a parameter¹, the equation (4) is turned to

$$\int_{\tau}^t \nabla_j [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t')] dt' + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} - (\nabla_j \tau^*) [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)} + \nabla_j \sigma^{*ji}(x^k) + X^i = 0. \quad (5)$$

Upon substituting the Eq. (1) in Eq. (5)

$$\int_{\tau}^t \nabla_j [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t')] dt' + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} - c^{-1} n_j [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)} + \nabla_j \sigma^{*ji}(x^k) + X^i = 0. \quad (6)$$

The following equation can be obtained by integrating (6) and taking account of (3), then changing the order of derivatives

$$-X^i + X^i \Big|_{t=\tau^*(x^s)} + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} - c^{-1} n_j [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)} + \nabla_j \sigma^{*ji}(x^k) + X^i = 0. \quad (7)$$

After rearrangement of terms Eq. (7) reads

$$c \left[\nabla_j \sigma^{*ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} + X^i \Big|_{t=\tau^*(x^s)} \right] - n_j [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t)] \Big|_{t=\tau^*(x^s)} = 0. \quad (8)$$

Hereinafter the notation $(\cdot) \Big|_{t=\tau^*(x^s)}$ will be dropped out for values calculated on PGS.

Finally, the constitutive boundary condition on PGS can be formulated in form

$$c[\nabla_j \sigma^{*ji}(x^k) + \nabla_j \mathfrak{J}^{ji} + X^i] - n_j [\partial. \sigma^{ji}(x^k, t)] = 0 \quad (t \geq \tau^* + 0). \quad (9)$$

The Eq. (9) should be considered as a differential constraint for stresses on PGS. If it is possible to express the stresses σ^* in terms of the actual stresses $\sigma \Big|_{t=\tau^*(x^s)}$, then from the equation (8) we can derive the differential equation for stresses. Alternative approaches to the boundary conditions derivation are discussed in detail, for example, in [20, 21].

In the general case, the stresses σ^* are to be expressed in terms of the actual stresses on PGS by a tensor constitutive equation

$$\sigma^* = \mathfrak{F}(\sigma, \mathbf{n}, \dots). \quad (10)$$

Omitted arguments of the function \mathfrak{F} in the Eq. (10) stand as additional parameters characterizing the growth process. Those can be related to multiphysics phenomena. In a simple model, list of additional parameters may be empty. In particular, the function \mathfrak{F} may depend on the microstructural directors and the thermophysical hidden variables associated with PGS. The physical sense of the

¹The spatial coordinates x^k are the parameters, and the lower limit of integration depends on x^k .

additional directors [23–26] may be associated with the characteristic directions of the fibers laying in woven composite materials, reinforcement in concrete structures, winding of threads in a bobbin, etc. The function \mathfrak{F} , in fact, should depend on combinations of arguments which are invariant under coordinate-frame rotations around of the director \mathbf{n} .

3. A simple formulation of differential constraint on PGS

Consider in further details a geometric interpretation of the case discussed earlier in [22]. Let traction vector \mathbf{t} be known or prescribed on PGS:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

In this case, we introduce the following notation $\overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}_{2d}$ for the reduced tensor $\overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}$ to the two-dimensional plane element T and assume a simple form of the Eq. (10) as follows

$$\overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}_{2d} = \mathfrak{F}_{2d}(\mathbf{t}, \mathbf{n}).$$

Tensors $\overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}_{2d}$ and \mathfrak{F}_{2d} are represented in the Cartesian coordinate frame by 2×2 matrices

$$\overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}_{2d} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}_{2d} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{12} \\ \mathfrak{F}_{21} & \mathfrak{F}_{22} \end{pmatrix}.$$

Hereafter, it is convenient to use the decomposition of the traction vector \mathbf{t} into the parts

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\perp} + \mathbf{t}_{\parallel}.$$

Here \mathbf{t}_{\perp} is the projection of the traction vector on the tangent plane T to the instantaneous PGS, \mathbf{t}_{\parallel} denotes the projection on the normal direction.

As for arguments of the tensor function \mathfrak{F} , we choose the joint rational invariants of the second-rank tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and the unit vector \mathbf{n} , which are unchanged under coordinate frame rotations around the director \mathbf{n} . In this case, we write the rationally independent system of invariants [27] in the following form

$$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \quad |\mathbf{t}_{\parallel}| = |\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2. \tag{11}$$

There is an obvious rational syzygy in the system of invariants (11)

$$|\mathbf{t}|^2 = |\mathbf{t}_{\parallel}|^2 + |\mathbf{t}_{\perp}|^2.$$

After eliminating the first invariant from (11) the system of independent rational invariants takes the following form

$$|\mathbf{t}_{\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_{\perp}|^2. \tag{12}$$

The constitutive equation on PGS, taking account of (12), can be furnished in the form

$$\overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}_{2d} = \mathfrak{F}_{2d}(|\mathbf{t}_{\parallel}|, |\mathbf{t}_{\perp}|^2). \tag{13}$$

The equation (13) has a clear mechanical sense. We choose a Cartesian coordinate system so that the unit vector \mathbf{k} is directed along the normal \mathbf{n} to PGS,

and for the projection of the traction vector \mathbf{t} in the tangent plane T to PGS, the following equation is valid

$$|\mathbf{t}_\perp|^2 = |\mathbf{t}_\perp \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 + |\mathbf{t}_\perp \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}}|^2. \quad (14)$$

Then the projections of the vector \mathbf{t} onto the unit vectors of the specified coordinate system can be expressed in terms of actual stresses by

$$|\mathbf{t}_\parallel| = |\sigma_{\langle 33 \rangle}|, \quad |\mathbf{t}_\perp \cdot \boldsymbol{\nu}|^2 = \sigma_{\langle 31 \rangle}^2, \quad |\mathbf{t}_\perp \cdot \boldsymbol{\mathcal{J}}|^2 = \sigma_{\langle 32 \rangle}^2.$$

As a result, the constitutive equation (13) is rewritten in the form

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2d} = \underset{2d}{\mathfrak{F}}(|\sigma_{\langle 33 \rangle}|, \sigma_{\langle 31 \rangle}^2 + \sigma_{\langle 32 \rangle}^2). \quad (15)$$

Note that the equation (15) is similar to those discussed in [22]. However, contrary to the work of [22], the tensor $\underset{2d}{\mathfrak{F}}$ is not isotropic, i.e. four constitutive functions are to be determined on PGS.²

Substituting the Eq. (15) into the equation (8), keeping in mind that $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ and introducing notation $\langle \dots \rangle$ for indices in the specific coordinate frame, we obtain the differential constraints on PGS in coordinate form

$$c[d_{\langle j \rangle} \underset{2d}{\mathfrak{F}}_{\langle j i \rangle} + X_{\langle i \rangle}] - \partial \cdot \sigma_{\langle 3 i \rangle}(x_{\langle k \rangle}, t) = 0 \quad (\langle i \rangle, \langle j \rangle = 1, 2, 3), \quad (16)$$

In Eq. (16) values $X_{\langle i \rangle}$ and $\partial \cdot \sigma_{\langle 3 i \rangle}$ must be considered on PGS. Furthermore, $d_{\langle j \rangle}$ denotes the directional derivatives:

$$d_{\langle 3 \rangle} = \mathbf{n} \cdot \nabla, \quad d_{\langle 1 \rangle} = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla, \quad d_{\langle 2 \rangle} = \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \nabla. \quad (17)$$

In Eq. (17) index $\langle 3 \rangle$ corresponds to the direction of the normal, and indices $\langle 1 \rangle$ and $\langle 2 \rangle$ to the tangent directions to PGS. Indepth discussion of directional operators $d_{\langle j \rangle}$ apparatus see in monograph [28].

Note that the system of independent joint rational invariants (12) is not complete. It does not take account of joint invariants containing the squares of the force stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$.

4. A full invariant formulation of differential constraint on PGS

A complete system of joint rational invariants of the second-rank tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and the vector \mathbf{n} , in addition to the invariants (12), includes invariants

$$|\mathbf{t}_2| = |\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}|, \quad |\mathbf{t}_2|_2^2, \quad |\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2|_2^2. \quad (18)$$

In the equation (18), the vector \mathbf{t}_2 is defined according to

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2, \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad t_s = n_j \sigma^{j i} \sigma_{i s} = t^i \sigma_{i s}.$$

²There will be three constitutive functions in the symmetric case. Only one constitutive function remains for the isotropic symmetric case.

Following to the discussion in the previous section, for the vector \mathbf{t}_2 we adopt the decomposition

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_{2\parallel} + \mathbf{t}_{2\perp}.$$

As (ϖ is the angle determined by directions \mathbf{t}_\perp and $\mathbf{t}_{2\perp}$)

$$|\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}|^2 = |\mathbf{t}_\perp|^2 |\mathbf{t}_{2\perp}|^2 \cos^2 \varpi$$

then one can replace the invariant $|\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}|^2$ in (18) by $\cos^2 \varpi$.

The complete system of joint rational invariants of the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and the vector \mathbf{n} takes the form

$$|\mathbf{t}_{\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_\perp|^2, \quad |\mathbf{t}_{2\parallel}|, \quad |\mathbf{t}_{2\perp}|^2, \quad |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}|^2. \quad (19)$$

The constitutive equation (10) on PGS in terms of the complete system of joint rational invariants (19) of the asymmetric second-order tensor $\boldsymbol{\sigma}$ and the vector \mathbf{n} for reduced tensors onto the two-dimensional plane element T takes the form

$$\boldsymbol{\sigma}_{2d}^* = \mathfrak{F}_{2d}(|\mathbf{t}_{\parallel}|, |\mathbf{t}_\perp|^2, |\mathbf{t}_{2\parallel}|, |\mathbf{t}_{2\perp}|^2, |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}|^2). \quad (20)$$

We choose, as in the previous case, the Cartesian rectangular coordinate system so that the unit vector \mathbf{k} is directed along the normal \mathbf{n} to PGS. For the projection of the traction vector \mathbf{t} in the tangent plane T , we assume (14) to PGS, and for the vector $\mathbf{t}_{2\perp}$ obvious equality is satisfied

$$|\mathbf{t}_{2\perp}|^2 = |\mathbf{t}_{2\perp} \cdot \mathbf{i}|^2 + |\mathbf{t}_{2\perp} \cdot \mathbf{j}|^2. \quad (21)$$

The invariants (12) and (19) and projection lengths (14) and (21) are calculated via the actual stresses $\boldsymbol{\sigma}$ on the surface Σ according to

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{i}|^2 &= \sigma_{(31)}^2, \quad |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{j}|^2 = \sigma_{(32)}^2, \quad |\mathbf{t}_{\parallel}| = |\sigma_{(33)}|, \\ |\mathbf{t}_{2\perp} \cdot \mathbf{i}|^2 &= |\sigma_{(31)}\sigma_{(11)} + \sigma_{(32)}\sigma_{21} + \sigma_{(33)}\sigma_{(31)}|^2, \\ |\mathbf{t}_{2\perp} \cdot \mathbf{j}|^2 &= |\sigma_{(31)}\sigma_{(12)} + \sigma_{(32)}\sigma_{(22)} + \sigma_{(33)}\sigma_{(32)}|^2, \\ |\mathbf{t}_{2\parallel}| &= |\sigma_{(31)}\sigma_{(13)} + \sigma_{(32)}\sigma_{(23)} + \sigma_{(33)}^2|, \\ |\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}|^2 &= |\sigma_{(31)}^2\sigma_{(11)} + \sigma_{(31)}\sigma_{(32)}\sigma_{21} + \sigma_{(31)}^2\sigma_{(33)} + \\ &\quad + \sigma_{(32)}\sigma_{(31)}\sigma_{(12)} + \sigma_{(32)}^2\sigma_{(22)} + \sigma_{(32)}^2\sigma_{(33)}|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

The latter equation containing cubics in stresses should be classified as never discussed and used in the mechanics of solids.

The constitutive equation on PGS (20) taking account of the expressions (22) after introducing following notation

$$\begin{aligned} \text{I} &= |\sigma_{\langle 33 \rangle}|, & \text{II} &= \sigma_{\langle 31 \rangle}^2 + \sigma_{\langle 32 \rangle}^2, & \text{III} &= |\sigma_{\langle 31 \rangle} \sigma_{\langle 13 \rangle} + \sigma_{\langle 32 \rangle} \sigma_{\langle 23 \rangle} + \sigma_{\langle 33 \rangle}^2|, \\ \text{IV} &= |\sigma_{\langle 31 \rangle} \sigma_{\langle 11 \rangle} + \sigma_{\langle 32 \rangle} \sigma_{\langle 21 \rangle} + \sigma_{\langle 33 \rangle} \sigma_{\langle 31 \rangle}|^2 + |\sigma_{\langle 31 \rangle} \sigma_{\langle 12 \rangle} + \sigma_{\langle 32 \rangle} \sigma_{\langle 22 \rangle} + \sigma_{\langle 33 \rangle} \sigma_{\langle 32 \rangle}|^2, \\ \text{V} &= |\sigma_{\langle 31 \rangle}^2 \sigma_{\langle 11 \rangle} + \sigma_{\langle 31 \rangle} \sigma_{\langle 32 \rangle} \sigma_{\langle 21 \rangle} + \sigma_{\langle 31 \rangle}^2 \sigma_{\langle 33 \rangle} + \sigma_{\langle 32 \rangle} \sigma_{\langle 31 \rangle} \sigma_{\langle 12 \rangle} + \\ & \qquad \qquad \qquad + \sigma_{\langle 32 \rangle}^2 \sigma_{\langle 22 \rangle} + \sigma_{\langle 32 \rangle} \sigma_{\langle 33 \rangle}|^2. \end{aligned}$$

can be rewritten in functional form

$$\sigma_{2d}^* = \mathfrak{F}_{2d}(\text{I, II, III, IV, V})$$

or in a simplified variant

$$\sigma_{2d}^* = \mathfrak{F}_{2d}(\text{I, II, III, IV}).$$

The boundary conditions in the form of differential constraints on PGS (8), in the case when the added material has microstructural features, can be generalized by introducing in arguments of the function (10) the additional microstructural directors associated with the characteristic directions of the laying of the material in the processes of winding threads or the production of woven composites.

5. Conclusion

1. In present study, geometrically and mechanically consistent boundary conditions on PGS in the form of differential constraints have been obtained and discussed.
2. A general form of the mentioned constraints for the asymmetric force stress tensor has been obtained. It is valid for a wide range of materials and metamaterials.
3. The arguments of the constitutive tensor function on PGS have been determined by a set of invariants that are constant with respect to the rotations of the coordinate frame.
4. A geometric interpretation of the simplest variant of the differential constraint has been considered. A full invariant formulation has been proposed.
5. The developed approach must involve the experimental identification of the constitutive tensor functions on PGS.
6. The obtained results afford a general ground in applied studies on the MGS with an asymmetric force stress tensor.

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-19-01257).

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewer for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution, *Business Horizons*, 2012, vol. 55, no. 2, pp. 155–162. doi: 10.1016/j.bushor.2011.11.003.
2. Mankovich N. J., Cheeseman A. M., Stoker N. G. The display of three-dimensional anatomy with stereolithographic models, *J. Digit. Imaging*, 1990, vol. 3, no. 3, pp. 200–203. doi: 10.1007/bf03167610.
3. Stampfl J., Baudis S., Heller C., et al. Photopolymers with tunable mechanical properties processed by laser-based high-resolution stereolithography, *J. Micromech. Microeng.*, 2008, vol. 18, no. 12, 125014. doi: 10.1088/0960-1317/18/12/125014.
4. Murr L. E., Gaytan S. M., Ceylan A., et al. Characterization of titanium aluminide alloy components fabricated by additive manufacturing using electron beam melting, *Acta Materialia*, 2010, vol. 58, no. 5, pp. 1887–1894. doi: 10.1016/j.actamat.2009.11.032.
5. Bauer W., Knitter R., Emde A., et al. Replication techniques for ceramic microcomponents with high aspect ratios, *Microsystem Technologies*, 2002, vol. 9, no. 1–2, pp. 81–86. doi: 10.1007/s00542-002-0200-z.
6. Rengier F., Mehndiratta A., von Tengg-Kobligh H., et al. 3D printing based on imaging data: review of medical applications, *Int. J. Comput. Assist. Radiol. Surg.*, 2010, vol. 5, no. 4, pp. 335–341. doi: 10.1007/s11548-010-0476-x.
7. Lipson H., Kurman M. *Fabricated: The new world of 3D printing*. Indiana, John Wiley & Sons, 2013.
8. Ventola C. L. Medical applications for 3D printing: current and projected uses, *Pharmacy and Therapeutics*, 2014, vol. 39, no. 10, pp. 704–711.
9. Ozel T., Bourret G. R., Mirkin C. A. Coaxial lithography, *Nature Nanotechnology*, 2015, vol. 10, no. 4, pp. 319–324. doi: 10.1038/nnano.2015.33.
10. Panda B., Paul S. C., Hui L. J., et al. Additive manufacturing of geopolymer for sustainable built environment, *Journal of Cleaner Production*, 2017, vol. 167, pp. 281–288. doi: 10.1016/j.jclepro.2017.08.165.
11. Stadnik N. E., Dats E. P. Continuum mathematical modelling of pathological growth of blood vessels, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 991, 012075. doi: 10.1088/1742-6596/991/1/012075.
12. Stadnik N. E., Murashkin E. V., Dats E. P. Residual stresses in blood vessel wall during atherosclerosis, *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2116, no. 1, 380013. doi: 10.1063/1.5114394.
13. Southwell R. V. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*, Oxford Engineering Science Series. London, Oxford Univ. Press, 1936.
14. Rashba E. I. Stresses computation in massive construction under their own weight taking into account the construction sequence, *Proc. Inst. Struct. Mech. Acad. Sci. Ukrainian SSR*, 1953, no. 18, pp. 23–27 (In Russian).
15. Charlab V. D. Linear creep theory of the build-up body. Mechanics of rod systems and solid mediums, In: *The Proceedings of the Leningrad Construction Institute*, vol. 49. Leningrad, Leningrad Construction Institute, 1966, pp. 93–119 (In Russian).
16. Arutyunyan N. Kh., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Dynamic expansion of an elastic layer. Part 1. Motion of a flow of precipitated particles at a variable rate, *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1992, no. 5, pp. 6–24 (In Russian).
17. Arutyunyan N. Kh., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Dynamical expansion of an elastic layer. Part 2. The case of drop of accreted particles at a constant rate, *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1992, no. 6, pp. 99–112 (In Russian).
18. Naumov V. E., Radayev Yu. N. *Thermomechanical model of an growing solids: Variational formulation*, Preprint no. 527. Moscow, IPMech RAS, 1993, 39 pp. (In Russian)
19. Dmitrieva A. M., Naumov V. E., Radayev Yu. N. *Growth of thermoelastic spherical layer: Application of the variational approach*, Preprint no. 528. Moscow, IPMech RAS, 1993, 64 pp. (In Russian)

20. Arutyunyan N. Kh., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging, *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 1, pp. 1–10. doi: 10.1016/0021-8928(84)90099-6.
21. Trinchler V. K. On the formulation of the problem of stresses calculation in the gravitational state of a growing solid, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1984, no. 2, pp. 119–124 (In Russian).
22. Bykovtsev G. I. *Izbrannye problemnye voprosy mekhaniki deformiruemykh sred* [Selected Problems from Solid Mechanics. Collection of articles]. Vladivostok, Dal'nauka, 2002 (In Russian).
23. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Mathematical models and contemporary theories of physical fields, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, no. 4(2), pp. 41–94 (In Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-41-94.
24. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polia i termomekhanika* [Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics]. Saratov, Saratov State Univ., 2010 (In Russian).
25. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On precisely conserved quantities of coupled micropolar thermoelastic field, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 4, pp. 71–79 (In Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2012-12-4-71-79.
26. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Covariant field equations and d -tensors of hyperbolic thermoelastic continuum with fine microstructure, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 2(1), pp. 60–68 (In Russian). doi: 10.18500/1816-9791-2013-13-2-1-60-68.
27. Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Groningen, P. Noordhoff, 1964.
28. Radayev Yu. N. *Prostranstvennaia zadacha matematicheskoi teorii plastichnosti* [Three-dimensional Problem of the Mathematical Theory of Plasticity]. Samara, Samara State Univ., 2007 (In Russian).

УДК 539.319

Об одном дифференциальном ограничении в континуальной механике растущих тел

*Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Предлагается один общий принцип постановки граничных условий в краевых задачах механики растущих тел. При выводе определяющих соотношений на поверхности наращивания используется аппарат алгебры рациональных инвариантов. Проведен вывод различных вариантов физически непротиворечивых дифференциальных ограничений на поверхности наращивания. Полученные условия справедливы для весьма широкого круга материалов и метаматериалов. Для использования сформулированных дифференциальных ограничений в конкретных приложениях необходима их экспериментальная идентификация. По этой причине полученные результаты могут служить общей основой в прикладных исследованиях по механике растущих тел.

Ключевые слова: 3D-печать, поверхностный рост, напряжение, определяющее уравнение, рациональный инвариант, дифференциальное ограничение, полная система.

Получение: 30 апреля 2019 г. / Исправление: 12 августа 2019 г. /

Принятие: 16 сентября 2019 г. / Публикация онлайн: 18 ноября 2019 г.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01257).

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Научная статья

©  Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. doi: 10.14498/vsgtu1696.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

к.ф.-м.н.; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@google.com

Юрий Николаевич Радаев  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com



УДК 539.421

Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины

К. Б. Устинов, Д. С. Лисовенко, А. В. Ченцов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Проблемы распространения трещин в полосах привлекают внимание в основном из-за их важности для приложений: вычисление коэффициентов интенсивности напряжений для стандартных тестов, таких как трех- и четырехточечный изгиб; изучение разрушения в тонких слоистых структурах; изучение отслоения покрытий. Задача о нагружении полосы с центральной трещиной особенно интересна из-за ее относительной простоты, позволяющей анализировать и выделять существенные особенности процессов распространения трещин в структурах подобного типа. В работе получено точное аналитическое решение для задачи об ортотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной, нормально нагруженной самоуравновешенной системой сил. Нагрузки приложены достаточно далеко от вершины трещины, что позволяет рассматривать нагрузку, как приложенную на бесконечности. Общее решение представлено как суперпозиция решений для двух случаев: симметрично приложенными моментами и поперечными силами с компенсирующими их моментами. Цель исследования состоит в нахождении коэффициентов при сингулярностях поля напряжений вблизи вершины трещины, то есть коэффициентов интенсивности напряжений. Решение задачи о раскрытии трещины получено для произвольного значения параметра анизотропии с помощью преобразований Лапласа для уравнений, связывающих усилия, действующие вдоль линии трещины, и производные относительных смещений берегов трещины. Коэффициент интенсивности напряжений для нагружения моментами совпадает

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Устинов К. Б., Лисовенко Д. С., Ченцов А. В. Ортотропная полоса с центральной полубесконечной трещиной под произвольными нормальными нагрузками, приложенными вдали от вершины трещины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 657–670. doi: 10.14498/vsgtu1736.

Сведения об авторах

Константин Борисович Устинов <https://orcid.org/0000-0001-5852-3355>
доктор физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; лаб. геомеханики; e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Дмитрий Сергеевич Лисовенко <https://orcid.org/0000-0003-0485-3433>
доктор физико-математических наук; заведующий лабораторией; лаб. механики технологических процессов; e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Александр Викторович Ченцов <https://orcid.org/0000-0003-4760-1738>
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. механики технологических процессов; e-mail: chentsov@ipmnet.ru

с элементарным решением теории пластин. Коэффициент интенсивности напряжений для нагружения силами получен в виде функции одного параметра, выраженного в виде однократного интеграла. Сравнение с имеющимися численными результатами продемонстрировало хорошее согласование решения в диапазоне параметра анизотропии, для которого были получены численные решения. Полученное решение охватывает все термодинамически допустимые значения параметров анизотропии.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, отслоение, интегральное преобразование, метод Винера–Хопфа.

Получение: 13 августа 2019 г. / Исправление: 4 ноября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 14 декабря 2019 г.

Введение. Проблемы распространения трещин в полосах привлекают внимание в основном из-за их важности для приложений: вычисление коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для стандартных тестов, таких как трех- и четырехточечный изгиб; изучение разрушения в тонких слоистых структурах; изучение отслоения покрытий. Задача о нагружении полосы с центральной трещиной особенно интересна из-за ее относительной простоты, позволяющей анализировать и выделять существенные особенности процессов распространения трещин в структурах подобного типа. В реальных ситуациях внешние нагрузки приложены на некоторых конечных расстояниях от вершины трещины. Однако если эти расстояния намного больше, чем толщина слоя, согласно принципу Сен–Венана их можно рассматривать как приложенные на бесконечности. Точность такого упрощения тем лучше, чем больше расстояние между точкой приложения нагрузки и вершиной трещины по сравнению с толщиной слоя.

Рассматриваемая задача исследовалась многими авторами как численно [1–7], так и аналитически [8]. Она является обобщением подобной задачи для изотропного слоя [9–12].

В частности, в работах [9, 10] показано, что произвольная нагрузка может быть разложена на четыре независимые моды, например: (i) моменты, симметрично приложенные к отделяющимся частям; (ii) продольные силы, приложенные в центральных точках отделяющихся частей, с компенсирующим моментом, приложенным к нижней части; (iii) поперечные силы с компенсирующими моментами, симметрично приложенные к отделяющимся частям; (iv) поперечные силы с компенсирующими моментами, приложенными к верхней отделяющейся части и к нерасслоившейся части. Такое разложение применимо как для изотропных, так и для анизотропных слоев, а также для составных слоев при различных упругих свойствах и толщинах слагающих слоев. Для рассматриваемой задачи существование симметрии позволяет выбирать четыре моды нагружения так, чтобы каждая из них вызывала бы либо раскрытие, либо сдвиг (для коэффициентов интенсивности напряжений K_I и K_{II} соответственно) [3]. В случае изотропии для каждой моды нагружения коэффициенты K_I , K_{II} являются константами, причем две из них могут быть определены из элементарных решений, а две другие — численно [9] либо аналитически [12]. В случае кубической анизотропии коэффициенты K_I и K_{II} становятся функциями единственного параметра анизотропии — конкретной

безразмерной комбинации упругих констант [3]. В случае ортотропии коэффициенты K_I и K_{II} становятся функциями двух параметров анизотропии: того же, что и для кубической анизотропии $\rho = (\beta_{66} + 2\beta_{12}) / (2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}})$, где β_{ij} — коэффициенты податливости; $\lambda = \beta_{11}/\beta_{22}$. В [3] показано, что влияние последнего коэффициента может быть получено масштабированием результатов для кубической анизотропии, что выражается в появлении в выражениях для K_I и K_{II} степенных функций от параметра λ . Требование термодинамической устойчивости приводит к ограничениям $-1 < \rho < \infty$, $0 < \lambda < \infty$; значение $\rho = 1$ соответствует случаю изотропии и «вырожденной» анизотропии для ортогруппных кристаллов; величина $\lambda = 1$ — для кубических кристаллов и изотропных сред.

Точное аналитическое решение сформулированной задачи получено в [2] для случая нагружения сбалансированной парой сконцентрированных нормальных сил, приложенных на берегах трещины. С его помощью могут быть получены решения для двух рассматриваемых мод нагружения. Однако представленная форма решения делает затруднительным параметрический анализ.

В работе [3] численное решение получено для $0 < \rho < 4$ — диапазона, покрывающего большинство реальных кристаллов. Однако анализ параметров кристаллов выявил существование кристаллов с параметром ρ , выходящим далеко за пределы этого диапазона. На рис. 1 показана гистограмма распределения параметра ρ , вычисленного для плоского деформированного состояния реальных кристаллов кубической сингонии (данные получены на основе экспериментальных данных для коэффициентов податливости из [13]). В справочном издании Landolt–Börnstein [13] приводятся экспериментальные данные коэффициентов податливости для более чем 1100 кристаллов с кубической сингонией. В таблице представлены некоторые кристаллы кубической сингонии, для которых параметр ρ сильно отличается от единицы.

В настоящей работе точное аналитическое решение задачи о раскрытии трещины получено для двух мод нагружения и произвольного значения параметра ρ с помощью преобразований Лапласа для уравнений, связывающих усилия, действующие вдоль линии трещины, и производные относительных смещений берегов трещины.

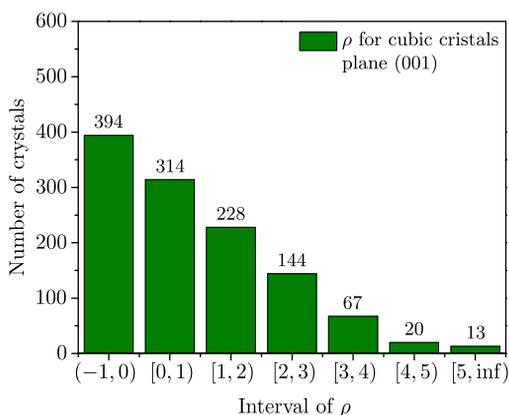


Рис. 1. Гистограммы распределения параметра ρ для кристаллов кубической сингонии

[Figure 1. The histograms of parameter ρ for cubic crystals]

Значения параметра ρ (для плоского деформированного состояния) для реальных кристаллов кубической сингонии [The values of parameter ρ (for plane strain) for some real cubic crystals]

Crystal	ρ	Crystal	ρ
InTl (27 at %Tl)	-0.91	Li	-0.63
CuZn(45 at %Zn) (β -brass)	-0.70	AlNi (63.2 at %Ni)	-0.63
CuAlNi(14 wt %Al, 4.1 wt %Ni)	-0.69	K	-0.57

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую ортотропную полосу $-h < y < h$ с центральной полубесконечной трещиной $y = 0, x < 0$ (рис. 2). Соотношение между напряжениями и производными перемещения на границе полосы приведено в Приложении А. Предполагается, что удовлетворяются условия плоской деформации (или плоского напряженного состояния), механическое поведение определяется системой двумерных уравнений упругости (А.1)–(А.4). Границы $y = \pm h$ и $y = 0, x < 0$ предполагаются свободными от напряжений: $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ для $y = \pm h$ и для $y = 0, x < 0$.

Предполагается, что нагрузка приложена на бесконечности в виде двух моментов M поперечных сил V (рис. 2). Для компенсации моментов, создаваемых поперечными силами, прикладываются дополнительные моменты Vl ($l \rightarrow \infty$). Задача состоит в нахождении коэффициентов при сингулярностях поля напряжений вблизи вершины трещины, то есть коэффициентов интенсивности напряжений.

Из глобальных условий равновесия следует, что введенные параметры соответствуют интегральным силовым параметрам [12, 16]

$$M = - \int_0^\infty x\sigma_{yy}(x, 0)dx, \quad V = \int_0^\infty \sigma_{yy}(x, 0)dx. \quad (1)$$

В силу симметрии задачи касательные напряжения на продолжении трещины отсутствуют:

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0.$$

В точке изменения типа граничных условий (около нуля) напряжения

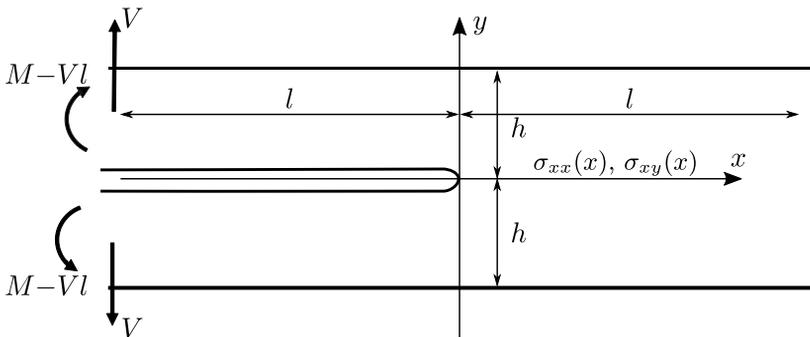


Рис. 2. Геометрия и система приложенных нагрузок
[Figure 2. The geometry and the applied loads]

должны быть интегрируемыми:

$$\sigma_{yy} = O(x^{-\nu}), \quad \nu < 1. \quad (2)$$

Рассмотрим преобразования Лапласа (A.11) следующих величин:

$$F_+(p) = \int_0^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0)e^{-px} dx, \quad (3)$$

$$F_-(p) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial x}(v^+(x, 0) - v^-(x, 0))e^{-px} dx. \quad (4)$$

Здесь интервалы интегрирования были уменьшены за счет обращения в ноль напряжений для отрицательных аргументов и разрыва смещений для положительных аргументов. Равенство нулю подынтегральных выражений в (3), (4) для отрицательных и положительных аргументов следует из того факта, что $F_+(p)$, $F_-(p)$ являются аналитическими функциями в правой ($\text{Re } p > 0$) и левой ($\text{Re } p < 0$) полуплоскостях комплексной переменной соответственно. Индексы «плюс» и «минус» в (4) соответствуют верхней и нижней граням трещины. Соотношения между производной смещений и напряжениями для верхней части задаются (A.16), аналогичные соотношения для нижней части можно получить из (A.16) заменив h на $-h$. Таким образом, получаем скалярное уравнение для нормальной и сдвиговой компонент соответственно (контур L соответствует мнимой оси и может быть преобразован в соответствии с правилами интегрирования контурных интегралов в комплексной плоскости):

$$F_-(p) = K(p)F_+(p), \quad p \in L, \quad (5)$$

$$K(p) = \frac{4\beta_{11}\lambda^{-1}\sqrt{\rho^2-1}[(k_1+k_2)\sin(hp(k_1-k_2)) + (k_1-k_2)\sin(hp(k_1+k_2))]}{-(k_1-k_2)^2\cos(hp(k_1+k_2)) + (k_1+k_2)^2\cos(hp(k_1-k_2)) - 4k_1k_2}, \quad (6)$$

где параметры k_1 и k_2 описаны в формуле (A.13).

Кроме того, должны выполняться условия в ключевых точках (ноль и бесконечность), вытекающие из (1), (2):

$$F_+(p) = N + Mp + o(p), \quad \text{Re } p \rightarrow 0+, \quad (7)$$

$$F_+(p) = O(p^{1-\nu}), \quad \nu < 1, \quad \text{Re } p \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

2. Решение задачи о раскрытии трещины. Ключевой этап решения (5) состоит в факторизации функции $K(p)$, т.е. ее представлении в виде произведения (отношения) двух функций, голоморфных в левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости:

$$K(p) = \Lambda_-^{-1}(p)\Lambda_+(p). \quad (9)$$

После нахождения $\Lambda_{\pm}(p)$ решение получается с помощью теоремы Ливилля [15]

$$F_{\pm}(p) = \Lambda_{\pm}^{-1}(p)\Pi(p). \quad (10)$$

Здесь $\Pi(p)$ — функция с возможными полюсами и нулями в нуле и бесконечности, которая должна быть определена из условий (7), (8) в этих точках.

Используя (A.13), (6), уравнение (9) можно записать следующим образом:

$$\Lambda_{-}^{-1}(p)\Lambda_{+}(p) = -\frac{4s_{11}}{\lambda^{3/4}}\sqrt{\frac{\rho+1}{2}}\operatorname{ctg}^3(ph\lambda^{-1/4})G(p), \quad (11)$$

$$G(p) = \sqrt{\rho-1}\operatorname{tg}^3(ph\lambda^{-1/4})\times \\ \times \frac{\sqrt{\rho+1}\sin(ph\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1}\sin(ph\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1)\cos(ph\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1)\cos(ph\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho-1)}) + 2}. \quad (12)$$

Здесь коэффициент при $G(p)$ в (11) выбирается таким образом, чтобы функция $G(p)$ была голоморфна вдоль мнимой оси и приближалась к единице при стремлении p к бесконечности вдоль мнимой оси.

Формально для $-1 < \rho < 1$ радикалы $\sqrt{\rho-1}$ в (12) и других формулах становятся чисто мнимыми, однако они всегда появляются в мультипликативных парах, так что конечные выражения остаются действительными. Поэтому нет необходимости отдельно с самого начала рассматривать случай $-1 < \rho < 1$, поскольку представление части тригонометрических функций как гиперболических и наоборот приводит к одному и тому же конечному результату.

Используя представление $G(p)$ через интеграл Коши и стандартное представление котангенса в виде комбинации гамма-функций Эйлера $\Gamma(p)$ [15], факторизацию можно провести в следующей форме:

$$\Lambda_{+}(p) = \frac{\Gamma^3(1+ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})}{\Gamma^3(1/2+ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})}J_{+}(p), \quad (13)$$

$$\Lambda_{-}(p) = -\frac{\lambda^{3/4}}{4s_{11}}\sqrt{\frac{2}{\rho+1}}\frac{\Gamma^3(1/2-ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})}{\Gamma^3(-ph\lambda^{-1/4}\pi^{-1})}J_{-}(p), \quad (14)$$

$$J_{\pm}(p) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\sqrt{\rho-1}\operatorname{th}^3(hs\lambda^{-1/4})\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\frac{\sqrt{\rho+1}\operatorname{sh}(hs\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1}\operatorname{sh}(hs\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1)\operatorname{ch}(hs\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1)\operatorname{ch}(hs\lambda^{-1/4}\sqrt{2(\rho-1)}) + 2}\right]\frac{ds}{is-p}\right\} \quad (15)$$

с асимптотиками

$$\Lambda_{+}^{-1}(p) = \frac{\pi^{3/2}(\rho+1)^{1/4}}{2^{3/4}3^{1/2}}\left[1 - \frac{ph}{\lambda^{1/4}}Y_1(\rho)\right] + O(p^2), \quad (16)$$

$$\Lambda_{+}^{-1}(p) = \left(\frac{ph}{\lambda^{1/4}\pi}\right)^{-3/2} + O(p^{-1/2}), \quad \operatorname{Re} p \rightarrow +\infty. \quad (17)$$

Здесь

$$Y(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dL_1(s)}{ds}\frac{ds}{s} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[L(s) - L(0)]\frac{ds}{s^2},$$

$$L(s) = \ln\left[s^3\sqrt{\rho-1}\frac{\sqrt{\rho+1}\operatorname{sh}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + \sqrt{\rho-1}\operatorname{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1)\operatorname{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1)\operatorname{ch}(s\sqrt{2(\rho-1)}) + 2}\right].$$

Для $-1 < \rho < 1$ эта формула может быть переписана так:

$$L(s) = \ln \left[s^3 \sqrt{1-\rho} \frac{\sqrt{\rho+1} \sin(s\sqrt{2(1-\rho)}) + \sqrt{1-\rho} \operatorname{sh}(s\sqrt{2(\rho+1)})}{(\rho-1) \operatorname{ch}(s\sqrt{2(\rho+1)}) - (\rho+1) \cos(s\sqrt{2(1-\rho)}) + 2} \right].$$

Анализ (10), (16), (17) совместно с (7), (8) приводит к представлению

$$\Pi(p) = \frac{2^{3/4} 3^{1/2}}{\pi^{3/2} (\rho+1)^{1/4}} \left[N + \left(M + \frac{h}{\lambda^{1/4}} Y(\rho) N \right) p \right]. \quad (18)$$

Появление в (18) членов с отрицательной степенью p нарушило бы условие (8), в то время как появление членов со степенью p , большей единицы, нарушило бы условие (7).

Таким образом, (10), (13), (14), (15), (18) дают решение задачи.

Рассмотрим асимптотику для $p \rightarrow +\infty$. Подстановка (17), (18) в (10) приводит к соотношению

$$F_+(p) = 6^{1/2} \lambda^{3/8} \left(\frac{2}{\rho+1} \right)^{1/4} \left(M + \frac{h}{\lambda^{1/4}} Y_1(\rho) N \right) h^{-3/2} p^{-1/2} + o(p^{-1/2}),$$

$\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Использование теоремы Абея [15] дает асимптотику напряжений для $x \rightarrow 0+$:

$$\sigma_{yy} = 6^{1/2} \pi^{-1/2} \lambda^{3/8} \left(\frac{2}{\rho+1} \right)^{1/4} \left(M + \frac{h}{\lambda^{1/4}} Y(\rho) N \right) h^{-3/2} x^{-1/2} + o(x^{-1/2}).$$

Коэффициент интенсивности напряжений тогда выражается так:

$$K_I h^{3/2} = 12^{1/2} \lambda^{3/8} \left(\frac{2}{\rho+1} \right)^{1/4} \left(M + \lambda^{-1/4} Y(\rho) N h \right). \quad (19)$$

Форма (19) совпадает с формой из [1, 3], где результаты были получены с использованием масштабирования [2], а функции $Y(\rho)$ были рассчитаны методом конечных элементов.

3. Численные результаты и сравнение с предыдущими исследованиями. Коэффициент интенсивности напряжений (19) при $V = 0$ совпадает с элементарным решением, полученным при рассмотрении энергий изгиба и растяжения ортогрозных балок и нахождении коэффициентов интенсивности напряжений с использованием их соотношений с выделением энергии [17].

Решение для $M = 0$, $V \neq 0$ хорошо согласуется с решением [3]

$$Y(\rho) = 0.677 + 0.146(\rho - 1) - 0.0178(\rho - 1)^2 + 0.00242(\rho - 1)^3, \quad (20)$$

полученным путем интерполяции результатов МКЭ (рис. 3). Отметим, что формулы (20) были получены для области «типичных значений» $0 \leq \rho \leq 4$ [3] и они не обязаны давать приемлемые результаты вне этой области. Значения $Y(\rho)$, а также численное решение (20) [3] представлены на рис. 3.

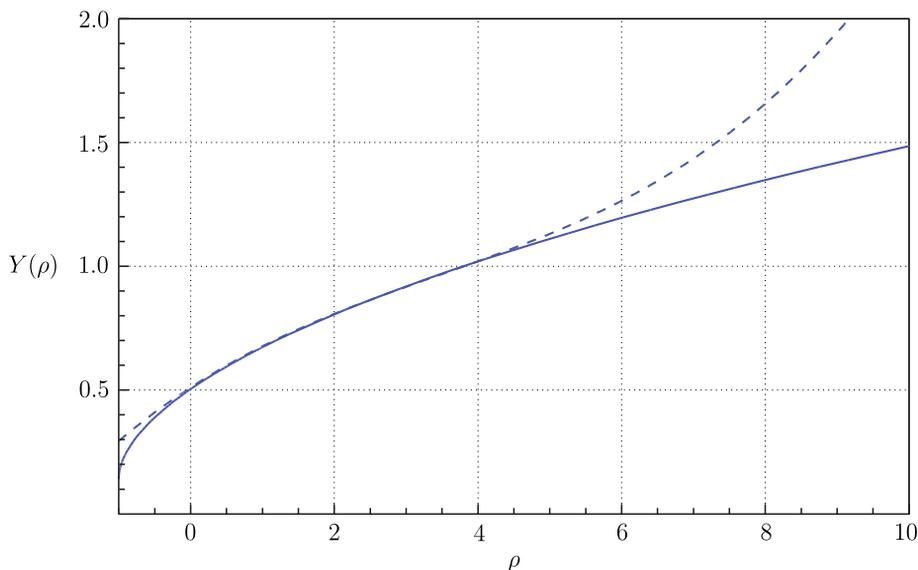


Рис. 3. Зависимость $Y(\rho)$; сплошные линии соответствуют полученному решению, пунктирные линии соответствуют решению из [3]

[Figure 3. The $Y(\rho)$ compared. Solid line correspond to the obtained solution, dashed line is according to the solution from [3]]

Функция $Y(\rho)$ близка к квадратно-корневым зависимостям, по крайней мере, для экстремальных значений ρ . Для промежуточных значений $0 \leq \rho \leq 4$ зависимости из [3] с достаточной точностью совпадают с полученным решением.

Выводы. Для задачи об ортотропной полосе с центральной полубесконечной трещиной, нагруженной самоуравновешенной системой нормальных усилий, получено точное аналитическое решение. Нагрузка приложена достаточно далеко от вершины трещины, чтобы рассматривать ее как приложенную на бесконечности. Общее решение выражается в виде суперпозиции решений для двух типов нагружения, соответствующих паре симметрично приложенных моментов и паре сил с компенсирующими моментами. Коэффициент интенсивности напряжений для первого случая совпадает с элементарным решением теории пластин. Коэффициент интенсивности напряжений для второго случая получен в виде двух функций одного параметра, выраженного в виде однократного интеграла. Сравнение с имеющимися численными результатами демонстрирует хорошее согласование решения в диапазоне параметра анизотропии, для которого были получены численные решения. Полученное решение охватывает все термодинамически допустимые значения параметров анизотропии.

Приложение. Соотношения между напряжениями и производными перемещения на границе полосы. Система двумерных уравнений упругости для ортотропных сред в декартовых координатах $xу$, совпадающих с главными осями напряжений, может быть написана следующим образом:

1. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Здесь σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} — компоненты тензора напряжений.

2. Соотношения Коши между деформациями ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} и перемещениями u , v :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (\text{A.2})$$

3. Уравнение совместности, связывающее компоненты тензора деформации, непосредственно следующее из (A.2):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon_{xx} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon_{xy}. \quad (\text{A.3})$$

4. Закон Гука для кристаллов с кубической анизотропией для плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= s_{11} \sigma_{xx} + s_{12} \sigma_{yy}, \\ \varepsilon_{yy} &= s_{12} \sigma_{xx} + s_{22} \sigma_{yy}, \\ 2\varepsilon_{xy} &= s_{66} \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Здесь s_{jk} — коэффициенты податливости. Для плоского деформированного состояния коэффициенты податливости s_{jk} должны быть заменены модифицированными коэффициентами β_{jk} :

$$\beta_{jk} = s_{jk} - \frac{s_{j3}s_{k3}}{s_{33}}.$$

Введение функции напряжений Эйри F в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.5})$$

позволяет автоматически удовлетворить уравнениям равновесия (A.1). Замена (A.5) в (A.4) и затем в (A.3) сокращает систему уравнений упругости для плоской деформации до одного уравнения относительно одного неизвестного (функция напряжения) [14]:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (\beta_{66} + 2\beta_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Из (A.5), (A.6) следует, и на этот факт указывают много исследований, например [14], что для предписанной геометрии и граничных условий (заданных в терминах напряжений) поле напряжений определяется двумя безразмерными комбинациями упругих констант. В качестве этих комбинаций мы

выбрали используемые в работе [2] величины:

$$\lambda = \frac{\beta_{11}}{\beta_{22}}, \quad \rho = \frac{\beta_{66} + 2\beta_{12}}{2\sqrt{\beta_{11}\beta_{22}}}.$$

Ограничения для этих величин накладываются положительной определенностью упругой энергии

$$0 < \lambda < \infty, \quad -1 < \rho < \infty.$$

Тогда уравнение (А.6) представляется в виде

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\sqrt{\lambda}\rho \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Рассмотрим вспомогательную двумерную задачу об ортотропной упругой полосе $0 \leq y \leq h$ с верхней границей, свободной от напряжений:

$$\sigma_{yy}(x, h) = \sigma_{xy}(x, h) = 0, \quad (\text{A.8})$$

и нижней границей — под действием поля напряжений:

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, 0) = q_y(x). \quad (\text{A.9})$$

Здесь $q_y(x)$ — известная функция.

Найдем соотношение между напряжениями, действующими вдоль нижней границы и производной компонент смещений $\frac{\partial v}{\partial x}(x, 0)$, которая выражается в терминах функции напряжений F с использованием (А.5), (А.2), (А.4) следующим образом:

$$v' = \frac{\partial v}{\partial x} = -(\beta_{66} + \beta_{12}) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \beta_{11} \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx. \quad (\text{A.10})$$

Общее решение (А.6) для бесконечной полосы может быть получено с помощью двустороннего преобразования Лапласа:

$$\hat{f}(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-px} dx \quad (\text{A.11})$$

и обратного преобразования:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \hat{f}(p, y) e^{px} dp,$$

где контур L соответствует мнимой оси, а направление интегрирования — сверху вниз.

Применение (А.11) к (А.7) приводит к уравнению

$$p^4 \hat{F}(p, y) + 2\sqrt{\lambda}\rho p^2 \frac{\partial^2 \hat{F}(p, y)}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^4 \hat{F}(p, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Общее решение (A.12) запишется так:

$$\hat{F}(p, y) = C_1 \cos(k_1 py) + C_2 \cos(k_2 py) + C_3 \sin(k_1 py) + C_4 \sin(k_2 py),$$

где

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \lambda^{-1/4} \sqrt{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}, \quad k_1 \pm k_2 = \lambda^{-1/4} \sqrt{2} \sqrt{\rho \pm 1}, \\ k_1 k_2 &= \lambda^{-1/2}, \quad k_1^2 + k_2^2 = 2\lambda^{-1/2} \rho, \quad k_1^2 - k_2^2 = 2\lambda^{-1/2} \sqrt{\rho^2 - 1}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Применение (A.11) к (A.5), (A.10) дает соотношения для преобразования для следующих величин:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial y^2}, \quad \hat{\sigma}_{yy} = p^2 \hat{F}, \quad \hat{\sigma}_{xy} = -p \frac{\partial \hat{F}}{\partial y}; \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{v}' = -(\beta_{66} + \beta_{12}) p \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} - \frac{1}{p} \beta_{11} \frac{\partial^3 \hat{F}}{\partial y^3}. \quad (\text{A.15})$$

Подстановка последних двух формул (A.14) в преобразования (A.8), (A.9):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{xy}(p, 1) &= \hat{\sigma}_{yy}(p, 1) = 0, \\ \hat{\sigma}_{xy}(p, 0) &= 0, \quad \hat{\sigma}_{yy}(p, 0) = \hat{q}_y(p) \end{aligned}$$

позволяет выразить константы C_1 через \hat{q}_y , подстановка которых в (A.15) приводит к искомому соотношению:

$$\hat{v}' = \frac{\beta_{22}(k_1^2 - k_2^2)(k_1 \cos(hk_2 p) \sin(hk_1 p) - k_2 \sin(hk_2 p) \cos(hk_1 p))}{k_1 k_2 ((k_1^2 + k_2^2) \sin(hk_1 p) \sin(hk_2 p) + 2k_1 k_2 (\cos(hk_1 p) \cos(hk_2 p) - 1))} \hat{q}_y(p). \quad (\text{A.16})$$

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 18-79-10270).

Библиографический список

1. Suo Z., Bao G., Fan B., Wang T. C. Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites // *Int. J. Solids Struct.*, 1991. vol. 28, no. 2. pp. 235–248. doi: 10.1016/0020-7683(91)90208-W.
2. Suo Z. Domination specimens for orthotropic materials // *J. Appl. Mech. – T. ASME*, 1990. vol. 57, no. 3. pp. 627–634. doi: 10.1115/1.2897068.
3. Bao G., Ho S., Suo Z., Fan B. The role of material orthotropy in fracture specimens for composites // *Int. J. Solids Struct.*, 1992. vol. 29, no. 9. pp. 1105–1116. doi: 10.1016/0020-7683(92)90138-J.

4. Li S., Wang J., Thouless M. D. The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Sol.*, 2004. vol. 52, no. 1. pp. 193–214. doi: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X.
5. Massabo R., Brandinelli L., Cox B. N. Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam // *Int. J. Eng. Sci.*, 2003. vol. 41, no. 13–14. pp. 1497–1518. doi: 10.1016/S0020-7225(03)00029-6.
6. Brandinelli L., Massabo R. Mode II weight functions for isotropic and orthotropic double cantilever beams // *Int. J. Fract.*, 2006. vol. 139, no. 1. pp. 1–25. doi: 10.1007/s10704-006-6358-0.
7. Thouless M. D. Phase angles and delamination of layered materials // *Eng. Fract. Mech.*, 2018. vol. 191. pp. 153–167. doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.01.033.
8. Georgiadis H. G., Papadopoulos G. A. Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen // *Z. angew. Math. Phys.*, 1990. vol. 41, no. 6. pp. 889–899. doi: 10.1007/BF00945841.
9. Suo Z., Hutchinson J. W. Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.*, 1990. vol. 43, no. 1. pp. 1–18. doi: 10.1007/BF00018123.
10. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials // *Adv. Appl. Mech.*, 1991. vol. 29. pp. 63–191. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70164-9.
11. Begley M. R., Hutchinson J. W. *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge Univ. Press, 2017. x+278 pp. doi: 10.1017/9781316443606.
12. Ustinov K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A-Solid.*, 2019. vol. 75. pp. 56–69. doi: 10.1016/j.euromechsol.2019.01.013.
13. *Low Frequency Properties of Dielectric Crystals. Second and Higher Order Elastic Constants* / Landolt-Börnstein — Group III Condensed Matter. vol. 29A / ed. D. F. Nelson, 1992. doi: 10.1007/b44185.
14. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 416 с.
15. Noble B. *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. New York: Chelsea Publ., 1988. x+246 pp.
16. Устинов К. Б. Об отслоении слоя от полуплоскости; условия упругой заделки для пластины, эквивалентной слою // *Изв. РАН. МТТ*, 2015. № 1. С. 75–95.
17. Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // *Int. J. Fract. Mech.*, 1965. vol. 1, no. 3. pp. 189–203. doi: 10.1007/BF00186854.

MSC: 74R10; 47A68

Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip

*K. B. Ustinov, D. S. Lisovenko, A. V. Chentsov*A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The exact analytical solution has been obtained for a problem of orthotropic strip with central semi-infinite crack loaded normally with self-balanced system of forces applied far enough from the crack tip to be considered as applied at infinity. The general solution is expressed as a superposition of solutions for two modes of loading: (i) symmetrically applied moments; (ii) symmetrically applied transverse forces with compensating moments. The exact expressions for stress intensity factor (SIF) have been obtained. Due to symmetry only the opening mode of SIF is present for each case of loading. For both cases of loading the stress states are determined by two dimensionless parameters composed by four elastic constants. Expression for SIF for the case of loading with symmetrically applied moments is obtained in terms of elementary functions and coincides with the elementary solution due to beam theory. Expression for SIF for the case of loading with symmetrically applied transverse forces with compensating moments has been obtained in terms of one function of one of the parameters expressed as a single integral, multiplied by a power function of the second parameter. The solution for this case demonstrated good agreement with the existing numerical solution for the range of parameters, for which the latter had been obtained. The obtained solution covers all possible range of parameters.

Keywords: stress intensity factor, delamination, integral transform, Wiener-Hopf technique.

Received: 13th August, 2019 / Revised: 4th November, 2019 /Accepted: 11th November, 2019 / First online: 14th December, 2019

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Ustinov K. B., Lisovenko D. S., Chentsov A. V. Orthotropic strip with central semi-infinite crack under arbitrary loads applied far apart from the crack tip, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 657–670. doi: 10.14498/vsgtu1736 (In Russian).

Authors' Details:

Konstantin B. Ustinov  <https://orcid.org/0000-0001-5852-3355>

Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Lab. of Geomechanics;
e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Dmitry S. Lisovenko  <https://orcid.org/0000-0003-0485-3433>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Lab.; Lab. of Mechanics of Technological Processes;
e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Alexander V. Chentsov  <https://orcid.org/0000-0003-4760-1738>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Lab. of Mechanics of Technological Processes; e-mail: chentsov@ipmnet.ru

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-79-10270).

References

1. Suo Z., Bao G., Fan B., Wang T. C. Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites, *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol.28, no. 2, pp. 235–248. doi: 10.1016/0020-7683(91)90208-W.
2. Suo Z. Domination specimens for orthotropic materials, *J. Appl. Mech. – T. ASME*, 1990, vol. 57, no. 3, pp. 627–634. doi: 10.1115/1.2897068.
3. Bao G., Ho S., Suo Z., Fan B. The role of material orthotropy in fracture specimens for composites, *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol.29, no.9, pp. 1105–1116. doi: 10.1016/0020-7683(92)90138-J.
4. Li S., Wang J., Thouless M. D. The effects of shear on delamination in layered materials, *J. Mech. Phys. Sol.*, 2004, vol.52, no. 1, pp. 193–214. doi: 10.1016/S0022-5096(03)00070-X.
5. Massabo R., Brandinelli L., Cox B. N. Mode I weight functions for an orthotropic double cantilever beam, *Int. J. Eng. Sci.*, 2003, vol. 41, no.13–14, pp. 1497–1518. doi: 10.1016/S0020-7225(03)00029-6.
6. Brandinelli L., Massabo R. Mode II weight functions for isotropic and orthotropic double cantilever beams, *Int. J. Fract.*, 2006, vol.139, no.1, pp. 1–25. doi: 10.1007/s10704-006-6358-0.
7. Thouless M. D. Phase angles and delamination of layered materials, *Eng. Fract. Mech.*, 2018, vol. 191, pp. 153–167. doi: 10.1016/j.engfracmech.2018.01.033.
8. Georgiadis H. G., Papadopoulos G. A. Elastostatics of the orthotropic double-cantilever-beam fracture specimen, *Z. angew. Math. Phys.*, 1990, vol. 41, no. 6, pp. 889–899. doi: 10.1007/BF00945841.
9. Suo Z., Hutchinson J. W. Interface crack between two elastic layers, *Int. J. Fract.*, 1990, vol. 43, no. 1, pp. 1–18. doi: 10.1007/BF00018123.
10. Hutchinson J. W., Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials, *Adv. Appl. Mech.*, 1991, vol. 29, pp. 63–191. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70164-9.
11. Begley M. R., Hutchinson J. W. *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings*. Cambridge, United Kingdom, Cambridge Univ. Press, 2017, x+278 pp. doi: 10.1017/9781316443606.
12. Ustinov K. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer, *Eur. J. Mech. A – Solid.*, 2019, vol. 75, pp. 56–69. doi: 10.1016/j.euromechsol.2019.01.013.
13. *Low Frequency Properties of Dielectric Crystals. Second and Higher Order Elastic Constants*, Landolt-Börnstein — Group III Condensed Matter, vol. 29A, ed. D. F. Nelson, 1992. doi: 10.1007/b44185.
14. Lekhnitsky S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. Moscow, Mir, 1981, 430 pp.
15. Noble B. *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. New York, Chelsea Publ., 1988, x+246 pp.
16. Ustinov K. B. On separation of a layer from the half-plane: Elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer, *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 1, pp. 62–80. doi: 10.3103/S0025654415010070.
17. Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *Int. J. Fract. Mech.*, 1965, vol. 1, no. 3, pp. 189–203. doi: 10.1007/BF00186854.



УДК 539.37

Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости

А. В. Хохлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Аналитически исследуется способность линейного интегрального определяющего соотношения вязкоупругости Больдмана–Вольтерры с двумя произвольными материальными функциями (сдвиговой и объемной ползучести) для изотропных реономных материалов описывать разнообразные эффекты, связанные с возможными (наблюдаемыми в испытаниях) типами поведения осевой и поперечной деформаций, в частности, эффекты немонотонности, знакопеременности и отрицательности коэффициента поперечной деформации («коэффициента Пуассона»). Изучены общие качественные свойства и характерные особенности семейств кривых объемного, осевого и поперечного деформирования и зависимости коэффициента Пуассона от времени, порождаемых этим соотношением при одноосном растяжении/сжатии с постоянной скоростью и влияние на них характеристик обеих функций ползучести (они предполагаются возрастающими и выпуклыми вверх). Доказано, что линейная теория вязкоупругости способна моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации и коэффициента Пуассона во времени, найдены критерии их монотонности, критерии наличия у них точек экстремума и точек перегиба, критерий отрицательности коэффициента Пуассона на некотором интервале времени (в зависимости от качественных свойств функций объемной и сдвиговой ползучести). Показано, что учет объемной ползучести может оказывать сильное влияние на качественное поведение поперечной деформации и коэффициента Пуассона. Обнаружены несколько характерных общих свойств семейств кривых осевого и поперечного деформирования и коэффициента Пуассона, которые удобно контролировать в испытаниях материалов при растяжении/сжатии с постоянной скоростью и использовать как маркеры границы области линейного поведения и как индикаторы

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хохлов А. В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 671–704. doi: 10.14498/vsgtu1710.

Сведения об авторе

Андрей Владимирович Хохлов  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности;
e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

неприменимости линейной теории вязкоупругости для моделирования в случае их нарушения в испытаниях (в интересующем диапазоне времен, деформаций и скоростей нагружения).

Исследованы специфические свойства кривых нагружения, порождаемых линейной теорией вязкоупругости в сочетании с постулатами о линейно-упругом изменении объема или о постоянстве коэффициента Пуассона, найдены дополнительные индикаторы неприменимости подобных моделей (с одной материальной функцией). В частности доказано, что пренебрежение объемной ползучестью хотя и не сужает диапазон возможных значений коэффициента Пуассона и не лишает линейное определяющее соотношение способности описывать смену знака коэффициента Пуассона и поперечной деформации и ее немонотонность, но все же заметно ограничивает эту способность и существенно обедняет спектр возможных типов изменения поперечной деформации и коэффициента Пуассона (сужает область применимости модели). У модели с объемной упругостью (в отличие от общего случая) зависимость от времени поперечной деформации не может иметь точки минимума и точки перегиба (она всегда выпукла вверх) и менять знак с положительного на отрицательный, а зависимость коэффициента Пуассона не может иметь точки экстремума и перегиба, участки убывания или выпуклости вниз и не может менять знак с «плюса» на «минус».

Ключевые слова: вязкоупругость, объемная ползучесть, нагружение с постоянной скоростью, немонотонность и знакопеременность поперечной деформации, коэффициент поперечной деформации, немонотонность и отрицательность коэффициента Пуассона, вязкоупругие ауксетики, индикаторы области (не)линейности, идентификация.

Получение: 7 июня 2019 г. / Исправление: 17 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 28 ноября 2019 г.

Введение. Подавляющее большинство (пожалуй, более 90%) аналитических и частично аналитических представлений решений краевых задач линейной теории вязкоупругости (например, сведенных к задаче восстановления оригиналов по изображениям или к интегральным уравнениям, требующим численного решения) и методов их приближенного решения опираются на одно из трех дополнительных предположений:

- 1) о несжимаемости материала,
- 2) о линейно-упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (т. е. об отсутствии объемной ползучести),
- 3) о независимости от времени коэффициента (коэффициентов) Пуассона.

Каждый из этих трех упрощающих постулатов, ставших уже классическими (и порой воспринимаемых как само собой разумеющиеся), порождает некоторую связь между материальными функциями определяющего соотношения (ОС), уменьшает количество независимых функций (для изотропной линейно-вязкоупругой среды с двух до одной) и тем самым сужает многообразие качественных свойств теоретических кривых деформирования, релаксации и ползучести, порождаемых данным ОС при нагружениях по разным типовым программам, сужает круг эффектов (наблюдаемых в испытаниях реономных материалов), которые ОС способно адекватно описывать, сужает область применимости ОС и, как правило, снижает точность моделирова-

ния (хотя и облегчает идентификацию ОС по данным испытаний). Важный вопрос о том, как именно сужает, в чем и насколько, остается открытым и системному аналитическому исследованию в общем виде не подвергался.

Между тем анализ данных механических испытаний, микроскопии и рентгенографии разнообразных (даже изначально изотропных) материалов показывает, что изменение объема при нагружении, объемная ползучесть и релаксация, вид напряженно-деформированного состояния и его эволюция, влияние среднего напряжения и его истории (в частности, внешнего гидростатического давления и его скачков) на осевые и сдвиговые деформации и связанные с ними механические эффекты весьма существенны при описании деформирования и прочности многих реономных материалов [1–61]. На макроуровне они заметно влияют на проявление свойств материалов в одноосных испытаниях, на кривые релаксации и ползучести при растяжении–сжатии и сдвиге, кривые длительной прочности, кривые нагружения с постоянной скоростью и циклического нагружения. Регистрация и адекватный учет подобных эффектов (или пренебрежение ими) влияют на результаты обработки и интерпретации данных испытаний, достоверность определения механических свойств материалов, оценку прочности и долговечности элементов конструкций. К материалам, у которых эти эффекты влияния среднего напряжения и объемной ползучести ярко выражены (даже при малых деформациях), относятся, прежде всего, многие полимеры (полиэтилены, полипропилены, фторопласты и т. п.), дисперсно наполненные полимеры (твердые топлива, асфальтобетоны, ударопрочный полистирол, АБС-пластики), прессованные порошковые композиты, сплавы, металлические и полимерные пены, льды, грунты, горные породы и т. п. [2, 5–7, 14–20, 23–52]. Для них стандартные гипотезы о несжимаемости или упругой связи объемной деформации со средним напряжением, о независимости этой связи от второго и третьего инварианта тензора напряжения и вида напряженного состояния, о постоянстве коэффициента Пуассона оказываются непригодными [2, 5–7, 14, 15, 18, 26, 29–34, 37, 38, 41, 61], для таких материалов особенно сложно найти (маркировать) границу области линейного поведения.

Коэффициент поперечной деформации (КПД) $\nu = -\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}$ изотропных упруго-вязкопластичных материалов при одноосном нагружении не постоянен, а зависит от времени (от продольной деформации $\varepsilon_{\parallel}(t)$) и программы нагружения. Зависимости поперечной и объемной деформаций (ε_{\perp} и θ) от времени и осевой деформации ε_{\parallel} , характер изменения и диапазоны значений КПД для упомянутых классов реономных материалов весьма разнообразны даже при малых деформациях, даже в стандартных испытаниях на ползучесть, релаксацию или нагружение с постоянной скоростью [1–61]. У большинства металлов, многих стекол, полимеров (например полиэтиленов высокой плотности, полипропиленов, ПММА, эпоксидных смол) и порошковых композитов наблюдается монотонное возрастание ν с ростом $\varepsilon_{\parallel}(t)$ [12, 13, 16, 22, 27, 28, 30, 33, 36, 51]. У многих реономных материалов, как достаточно хрупких, так и высокоэластичных (твердые топлива, асфальтобетоны, АБС-пластики, полипропилены, чугун и т. п.) наблюдается убывание $\nu(t)$, свидетельствующее, как правило, о необратимом изменении объема при растяжении или сжатии [2, 6, 7, 15, 18, 26, 29, 31, 37, 47, 48]. У некоторых материалов объемная деформация и КПД меняются немонотонно и меня-

ют знак [6, 7, 14, 30, 32, 34, 56]. Объемные и поперечные деформации, поведение кривых ползучести, диаграмм нагружения и КПД изотропных композитных материалов зависят от объемной доли дисперсного наполнителя (в частности пузырьков газа в пенах), от форм и размеров его частиц (ячеек в пенах), свойств адгезионных связей с матрицей, степени кристалличности матрицы, текущего уровня поврежденности, предыстории нагружения и термообработки и многих иных факторов (включая, к сожалению, сложности реализации экспериментов, достаточно точных измерений и качественной обработки результатов, приводящих порой к противоречащим друг другу выводам разных исследователей о характере поведения КПД одного и того же материала в аналогичных условиях испытаний). В последние три десятилетия обнаружены, активно конструируются, исследуются и синтезируются новые материалы (и конструкции, метаматериалы) с отрицательными КПД (“auxetics”) [39–53]; в большинстве статей изучаются упругие (вообще говоря, анизотропные) огзетики («ауксетики»), особенности эффекта смены знака и эволюции отрицательного КПД во времени системному анализу не подвергались. В ряде работ исследуется (экспериментально и теоретически) влияние на КПД вязкоупругих материалов программы одноосного нагружения [20–23, 25, 27, 32, 33, 35, 38, 54–58], в частности зависимость КПД от скорости нагружения, а также влияние на кривые деформирования и ползучести и на эволюцию КПД наложения всестороннего давления на одноосное растяжение или сдвиг [2, 5–7, 18, 29, 59–62] (подробнее см. обзоры в [2, 5–7, 62]).

Объемную ползучесть, изменение КПД, вида деформированного состояния и типичные механические эффекты, связанные с ними, следует учитывать при обработке и интерпретации кривых испытаний наследственных материалов (в частности методами индентирования) и при выборе и идентификации определяющего соотношения (ОС) для моделирования их поведения. Для выбора того или иного ОС для описания поведения некоторого материала (и дальнейшего совершенствования и обобщения ОС) важно знать, какие механические эффекты оно способно моделировать и при каких требованиях к материальным функциям, в частности, какие из упомянутых эффектов, связанных с объемной и поперечной деформациями. Для этого необходимо системное *аналитическое* исследование общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, которые порождает применяемое ОС с произвольными материальными функциями при разных типовых программах нагружения, и их зависимости от параметров программ нагружения и характеристик материальных функций. В частности, требуется системное исследование арсенала возможностей линейного ОС Больцмана–Вольтерры

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Pi s_{ij}(t), \quad \theta = \Pi_0 \sigma_0, \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = \sigma_{ii}(t)/3, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \theta(t) = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t),$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t - \tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t - \tau) dy(\tau), \quad t > 0, \quad (2)$$

с двумя произвольными материальными функциями $\Pi(t)$ и $\Pi_0(t)$ (функциями сдвиговой и объемной ползучести) [1–3], изучение общих свойств порождаемых им базовых теоретических кривых, вытекающих из постулатов о наследственности, линейности и инвариантности относительно сдвигов по

времени операторов (2), связывающих истории изменения компонент девиаторов $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$ и шаровых частей тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в произвольной точке тела, и постулата об отсутствии перекрестного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ друг на друга. Это полезно для выбора или построения более сложных и точных нелинейных моделей поведения реономных материалов, использующих линейную теорию наследственности и обобщающих ее в определенных аспектах, для их идентификации, аттестации и сопоставления, а также для контроля данных испытаний материалов и адекватной интерпретации наблюдаемых эффектов. Ведь линейное ОС (1) играет роль своеобразного «окуляра» для наблюдения и отсчетной базы для сопоставления (и идентификации), по отношению к которой естественно изучать эффекты нелинейного поведения материалов (отклонения от предсказаний линейной теории как начального приближения), наблюдаемые в испытаниях и описываемые различными нелинейными ОС (но не описываемые линейным). Нередко случается, что нелинейности поведения материала приписывают эффекты, адекватно описываемые в рамках линейной теории, вытекающие лишь из наличия наследственности и присущие *всем* (почти всем) линейно-вязкоупругим материалам (при достаточно малых деформациях и скоростях).

Данная статья продолжает цикл работ [62–71] (и др.) по системному исследованию комплекса моделируемых реологических эффектов, сфер влияния материальных функций, границ области применимости и удобных для проверки по данным испытаний материалов индикаторов (на) применимости линейного ОС (1) и физически нелинейного ОС

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) &= \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \\ L(t) &= \mathbf{\Pi} \boldsymbol{\sigma}, \quad L_0(t) = \mathbf{\Pi}_0 \sigma_0, \end{aligned} \quad (3)$$

с четырьмя произвольными материальными функциями $\mathbf{\Pi}(t)$, $\Phi(x)$, $\mathbf{\Pi}_0(t)$, $\Phi_0(x)$. Здесь $\sigma_0(t)$ — среднее напряжение, $\sigma(t)$ — интенсивность напряжений. ОС (3) — один из вариантов распространения на трехосный случай нелинейного уравнения

$$\phi(\varepsilon_{11}(t)) = \int_0^t \mathbf{\Pi}(t - \tau) d\sigma_{11}(\tau), \quad \text{или} \quad \varepsilon_{11}(t) = \Phi(L(t)), \quad \Phi := \phi^{-1},$$

предложенного Ю. Н. Работновым [72, 73] в качестве обобщения одноосного линейного ОС (1) путем введения второй материальной функции $\phi(u)$ (подробную библиографию по этим темам см. в работах [62, 64–66, 69, 71]). ОС (1) и (3) описывают процессы изотермического деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих сред. Они связывают истории изменения тензоров (малых) деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ в произвольной точке тела в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$ и $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$ (т. е. независимости объемной деформации $\theta(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций от среднего напряжения $\sigma_0(t)$) и отсутствия влияния третьих инвариантов тензоров [1–3, 62]. Множитель $3/2$ вынесен из функции ползучести ($\Phi\Pi$) $\mathbf{\Pi}(t)$ в (1) для удобства сравнения с результатами анализа нелинейного ОС (3) с $\Phi(x) = x$.

Конкретные задачи данной статьи — изучение общих качественных свойств семейств кривых объемного, осевого и поперечного деформирования и зависимости КПД от времени, которые порождает ОС (1) с произвольными ФП $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$ при одноосном нагружении

$$\sigma_{11}(t) = bth(t), \quad \sigma_{ij}(t) \equiv 0 \text{ при } i + j > 2, \quad (4)$$

с постоянной скоростью $b \neq 0$ (здесь $h(t)$ — функция Хевисайда), анализ влияния на них свойств объемной функции ползучести, в частности, пренебрежения объемной ползучестью, а также их сопоставление с типичными свойствами кривых испытаний реономных материалов и поиск индикаторов неприменимости ОС (1) (индикаторов границы области линейности).

1. Минимальные ограничения на функции ползучести линейного ОС (1). Обращение ОС (1), как известно [1–4], имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \mathbf{R}_0 \theta, \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \\ \mathbf{R} y &:= \int_0^t R(t-\tau) dy(\tau), \quad \mathbf{R}_0 y := \int_0^t R_0(t-\tau) dy(\tau), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где функции релаксации $R(t)$ и $R_0(t)$ связаны с ФП Π и Π_0 интегральными уравнениями

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau = t, \quad \int_0^t R_0(t-\tau)\Pi_0(\tau)d\tau = t, \quad t > 0,$$

выражающими условия взаимной обратности операторов $\mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{\Pi}_0\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{I}$. Функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ в ОС (1), (5) предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, функции Π и Π_0 — возрастающими и выпуклыми вверх [63–67], а R и R_0 — убывающими и выпуклыми вниз на $(0; \infty)$, R и R_0 могут иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в т. $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ — дельта-функция). Из этих условий следует, в частности, существование пределов $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$, $R(0) = \sup R(t) > 0$ ($y(0) := y(0+)$ — обозначение для предела функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$; $R(0) = +\infty$, если $R(t)$ не ограничена) и $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$.

Если $\Pi(0) \neq 0$ и $\Pi_0(0) \neq 0$ (такие модели будем называть регулярными), то $R(0) = 1/\Pi(0) < \infty$ и $R_0(0) = 1/\Pi_0(0) < \infty$ (т. е. мгновенный модуль сдвига $2G = \frac{2}{3}R(0)$ и объемный модуль $K = R_0(0)$ конечны) и на линейном пространстве непрерывных кусочно гладких при $t \geq 0$ функций операторы ОС (2) и (5) представимы в виде операторов Вольтерры второго рода

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi} y &= \Pi(0)y(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)y(\tau)d\tau, \\ \mathbf{R} y &= R(0)y(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Все структурные реологические модели, полученные последовательными и параллельными соединениями линейных пружин и демпферов, описываются ОС (1). Например, ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (6)$$

удовлетворяет всем требованиям к ФП и в случае $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, порождает все четыре структурно различные (но эквивалентные [64]) четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны, $R = E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$ и $R(+\infty) = 0$), а при $\alpha = 0$ — трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга—Томпсона с одним демпфером (они регулярны и эквивалентны, $R = E e^{-\mu t} + r$ и $R(+\infty) = r > 0$). Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, семейство (6) порождает нерегулярные модели лишь в случае $\gamma = \beta$:

- при $\lambda\beta = 0$ ньютоновскую жидкость ($R = \eta\delta(t)$),
- при $\alpha = 0$ модель Фойгта ($R = \eta\delta(t) + r$),
- при $\alpha > 0$ обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами ($R = \eta\delta(t) + E e^{-\mu t}$, $R(+\infty) = 0$).

При $\gamma = 0$ (6) дает модель Максвелла ($R = E e^{-\mu t}$).

2. Свойства кривых деформирования ОС (1) при растяжении с постоянной скоростью. Для одноосного нагружения вида (4) среднее напряжение $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11} = \frac{1}{3}bt h(t)$, а девиатор напряжений — диагональный тензор $\mathbf{s}(t) = \frac{1}{3}bt \mathbf{diag}(2, -1, -1)$.¹ Из (1) следует, что девиатор деформаций $\mathbf{e} = \frac{1}{2}bQ(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$ диагонален, а объемная деформация

$$\theta(t; b) = \Pi_0 \sigma_0 = \frac{1}{3}bQ_0(t), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$Q(t) := \int_0^t \Pi(\tau) d\tau, \quad Q_0(t) := \int_0^t \Pi_0(\tau) d\tau. \quad (8)$$

У тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta \mathbf{I}$ тоже отличны от нуля только диагональные элементы:

$$\varepsilon_{11}(t; b) = bQ(t) + \frac{1}{9}bQ_0(t), \quad (9)$$

$$\varepsilon_{22}(t; b) = \varepsilon_{33}(t; b) = -\frac{1}{2}bQ(t) + \frac{1}{9}bQ_0(t). \quad (10)$$

Интенсивности напряжений и деформаций: $\sigma(t) = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2} = |b|t = 3|\sigma_0|$, $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{1/2} = |b|Q(t)$.

Для любой скорости $b > 0$ объемная и осевая деформации (7), (9) и интенсивность деформаций — положительные, возрастающие и выпуклые вниз функции времени, поскольку

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \frac{1}{3}b\Pi_0(t) > 0, & \ddot{\theta}(t) &= \frac{1}{3}b\dot{\Pi}_0(t) > 0, \\ \dot{\varepsilon}_{11}(t) &= b\Pi(t) + \frac{1}{9}b\Pi_0(t) > 0, & \ddot{\varepsilon}_{11}(t) &= b\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}b\dot{\Pi}_0(t) > 0 \end{aligned}$$

(в силу положительности и возрастания ФП).

Отметим, что (материальная) функция Q задает семейство диаграмм деформирования (ДД) $\sigma - \varepsilon$ в интенсивностях (в параметрической форме:

¹Функцию Хевисайда $h(t)$ будем опускать, полагая, что $t > 0$, время и компоненты напряжений считаем безразмерными.

$\sigma(t) = |b|t$, $\varepsilon = |b|Q(t)$ и сдвиговых диаграмм $\sigma_{12} - \varepsilon_{12}$ с постоянными скоростями нагружения (если задана программа нагружения $\sigma_{12}(t) = bth(t)$), а функция Q_0 (и формула (7)) — объемных диаграмм $\sigma_0 - \theta$. Свойства объемных и сдвиговых ДД (11), зависящих только от одной ФП, фактически изучены в работах [63, 73].

Чтобы получить явное уравнение (в форме $\varepsilon = \varepsilon(\sigma; b)$), следует исключить параметр $t = \sigma/b$ или $t = \sigma_{11}/b = 3\sigma_0/b$:

$$\varepsilon(\sigma, b) = |b|Q(\sigma/|b|), \quad \sigma > 0, \quad \theta(\sigma_0, b) = \frac{1}{3}bQ_0(3\sigma_0/b) \quad (11)$$

(в дальнейшем будем для определенности рассматривать случай $b > 0$).

Уравнение семейства ДД можно записать в форме $\varepsilon(\sigma, b) = \sigma\Theta(\sigma/b)$, где $\Theta(t) := t^{-1}Q(t)$ осреднение ФП. Свойства $\Theta(t)$ аналогичны свойствам ФП [63]: $\Theta(t)$ возрастающая гладкая функция при $t > 0$, $\frac{1}{2}\Pi(t) < \Theta(t) < \Pi(\frac{1}{2}t) < \Pi(t)$ (ибо $\Pi(t)$ возрастает и выпукла вверх), $\Theta(0+) = \Pi(0)$, $\Theta(\infty) = \Pi(\infty)$, а Q обладает следующими свойствами: $Q(0) = 0$, $Q(\infty) = \infty$, $\dot{Q}(t) = \Pi(t) > 0$, $\ddot{Q}(t) = \dot{\Pi}(t) > 0$, $\ddot{Q}(t) = \ddot{\Pi}(t) \leq 0$ и $\frac{1}{2}(\Pi(t) + \Pi(0)) < t^{-1}Q(t) < \Pi(\frac{1}{2}t) < \Pi(t)$ при $t > 0$.

Аналогично, уравнения (9) и (10) совместно с $\sigma_{11} = bt$ задают семейства ДД $\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b)$ и $\varepsilon_{\perp}(\sigma_{11}, b)$ при растяжении, где $\varepsilon_{\perp} := \varepsilon_{22}$ поперечная деформация:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b) &= bQ(\sigma_{11}/b) + \frac{1}{9}bQ_0(\sigma_{11}/b), \\ \varepsilon_{\perp}(\sigma_{11}, b) &= -\frac{1}{2}bQ(\sigma_{11}/b) + \frac{1}{9}bQ_0(\sigma_{11}/b). \end{aligned} \quad (12)$$

Чтобы получить уравнения ДД (11) в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$, следует ввести в рассмотрение функции $F(x)$ и $F_0(x)$, $x > 0$, обратные к возрастающим функциям (8):

$$\sigma(\varepsilon, b) = |b|F(\varepsilon/|b|), \quad \sigma_0(\theta, b) = \frac{1}{3}bF_0(3\theta/b). \quad (13)$$

Свойства функций F и F_0 изучены в [71] (в частности доказано, что из положительности и возрастания ФП следует, что F (и F_0) возрастающая выпуклая вверх функция, $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$, $F'(0+) = 1/\Pi(0)$ (в частности $F'(0+) = \infty$, если $\Pi(0) = 0$), $F'(\infty) = 1/\Pi(\infty)$, функция $F(x)/x$ убывает и $F(x)/x > F'(x)$ при $x > 0$. Из ограничений $\dot{\Pi} > 0$, $\dot{\Pi}_0 > 0$, $\ddot{\Pi} \leq 0$, $\ddot{\Pi}_0 \leq 0$ на ФП и свойств функций Q , Q_0 , F , F_0 вытекают следующие общие свойства ДД (13).

Секущий и касательный модули ДД (13): $\sigma/\varepsilon = 1/\Theta(\sigma/b)$ и $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = 1/\varepsilon'_\sigma(\sigma, b) = 1/\Pi(\sigma/b)$. Так как $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b) > 0$ и $\sigma'_\varepsilon > 0$, любая ДД (11) возрастает по σ , а ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ возрастает по ε при любом b . Так как ФП возрастает, то $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b)$ возрастает по σ и убывает по b , а $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$ убывает по ε и возрастает по b . Поэтому для любого $b > 0$ ДД (11) выпуклы вниз, а ДД в форме (13) выпуклы вверх на луче $\varepsilon > 0$. Семейство ДД (11) убывает по b , поскольку $\dot{\Theta}(t) > 0$ и $\Theta(\sigma/b)$ убывает по b , а семейство ДД в форме (13) возрастает по b (чем больше скорость, тем выше лежит ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$), т. е. ОС (1) моделирует только положительную скоростную чувствительность. ДД (11) зависит от b , но мгновенный модуль (сдвига G или

объемный K) не зависит от скорости нагружения: $G := \sigma'_\varepsilon(0, b) = 1/\Pi(0)$ (для моделей с $\Pi(0) = 0$ будет $G = \infty$). При $\varepsilon \rightarrow \infty$ касательный и секущий модули стремятся к общему пределу $G_\infty = R(\infty) = 1/\Pi(\infty) \geq 0$ (если ФП ограничена, то $G_\infty > 0$; если же ФП не ограничена, то $G_\infty = 0$); длительный модуль G_∞ тоже не зависит от скорости нагружения.

Любая ДД (7) лежит «выше» (по оси ε) прямой $\varepsilon = \Pi(0)\sigma$, так как $\Theta(t) > \Theta(0+) = \Pi(0)$, а все ДД в форме $\sigma(\varepsilon, b)$ лежат ниже (по оси σ) этой прямой. Точнее, в случае $\Pi(0) \neq 0$ (для регулярных моделей) справедливы двусторонние оценки для всех ДД (11) и (13):

$$\begin{aligned} \Pi(0)\sigma < \varepsilon(\sigma; b) < \Pi(\infty)\sigma, \quad G_\infty\varepsilon < \sigma(\varepsilon, b) < G\varepsilon; \\ \Pi_0(0)\sigma_0 < \theta(\sigma_0, b) < \Pi_0(\infty)\sigma_0, \quad K_\infty\theta < \sigma_0(\theta, b) < K\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

При $b \rightarrow +\infty$ семейство ДД $\varepsilon(\sigma; b)$ любой регулярной модели сходится сверху (а семейство $\sigma(\varepsilon, b)$ снизу) к прямой $\varepsilon = \sigma/G$ равномерно на любом отрезке оси σ [63]. Поэтому прямая $\sigma = G\varepsilon$ — мгновенная ДД ОС (1) в случае $\Pi(0) \neq 0$. К ней же сходится и семейство ДД при постоянной скорости деформирования [63]. Если $\Pi(0) = 0$, то $G = \infty$, касательная к любой ДД (11) в нуле, горизонтальна, а к ДД в форме (13) — вертикальна, и семейство ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ равномерно сходится при $b \rightarrow +\infty$ к прямой $\varepsilon = 0$. При $b \rightarrow 0$ семейство ДД (11) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = G_\infty\varepsilon$ (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$. Это верно и в случае неограниченных или сингулярных функций релаксации. Для семейства объемных ДД $\sigma_0(\theta, b)$ все свойства сохраняются с заменой G на K .

ДД $\varepsilon(\sigma; b)$ имеет асимптоту при $\sigma \rightarrow \infty$ лишь тогда, когда ФП ограничена и сходится интеграл

$$Y := \int_0^{+\infty} [\Pi(\infty) - \Pi(\tau)]d\tau$$

(очевидно, $Y > 0$) [63], ее уравнение: $\varepsilon = \Pi(\infty)\sigma - bY$, или $\sigma = G_\infty(\varepsilon + Yb)$. Все ДД (11) стремятся к асимптоте снизу. Угловой коэффициент асимптоты равен длительному модулю G_∞ и не зависит от b . Вопрос о существовании асимптот у ДД не чисто абстрактный, поскольку выход на асимптоту (спрямление ДД, режим «линейного упрочнения») может происходить быстро в рабочем диапазоне деформаций и напряжений.

Например, у моделей с ФП (6) $Q = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t - \gamma\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$ и семейство ДД (11) задается уравнением $\varepsilon(\sigma, b) = \frac{1}{2}\alpha b^{-1}\sigma^2 + \beta\sigma - \gamma\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b})$, $\sigma > 0$. Мгновенный модуль $G = (\beta - \gamma)^{-1}$; у моделей с $\gamma = \beta$ (сингулярных) $G = \infty$. Если $\alpha = 0$, т. е. у моделей Фойгта (с $\gamma = \beta$) и Кельвина ($\gamma \in (0; \beta)$), то $\Pi(\infty) = \beta < \infty$, $Y = \gamma/\lambda$, $G_\infty = \beta^{-1}$, и ДД имеет асимптоту $\sigma = \beta^{-1}(\varepsilon + \gamma\lambda^{-1}b)$.

На рис. 1 приведены ДД модели Кельвина (ФП (6) с $\alpha = 0$) при $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.009$ (тогда $G = (\beta - \gamma)^{-1} = 1000$, $G_\infty = \beta^{-1} = 100$, время ретардации $\tau = \lambda^{-1} = 10$) для скоростей $b = 0.01; 0.1; 1; 10$ (кривые 1–4). Штрих-пунктирные прямые — мгновенная и равновесная ДД $\sigma = G\varepsilon$ и $\sigma = G_\infty\varepsilon$, фигурирующие в оценке (14), к ним сходится при $b \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow 0$ семейство ДД с любым λ . Для сравнения приведены ДД модели с $\lambda = 0.05$ (штриховые кривые 1'–4').

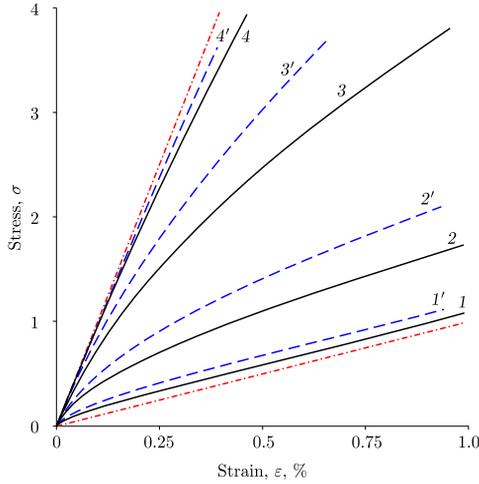


Рис. 1. Диаграммы деформирования двух моделей Кельвина с $\lambda = 0.1$ (кривые 1–4) и $\lambda = 0.05$ (кривые 1'–4')

[Figure 1. Stress-strain curves generated by the standard linear solid models (models (6) with $\alpha = 0$) with $\lambda = 0.1$ (curves 1–4) or $\lambda = 0.05$ (curves 1'–4') at stress rates $b = 0.01; 0.1; 1; 10$]

Осевые деформации (9) и ДД (12) при растяжении $\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b)$ зависят от обеих ФП, но все качественные свойства у них такие же, как у сдвиговых и объемных ДД, поскольку обозначением $\Pi_1(t) := \Pi + \frac{1}{9}\Pi_0$ (тогда $Q_1 = Q + \frac{1}{9}Q_0$) они приводятся к виду

$$\varepsilon_{11}(t; b) = bQ_1(t), \quad \varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b) = bQ_1(\sigma_{11}/b),$$

совпадающему по форме с (7) и (11), где функция $\Pi_1(t)$ обладает теми же свойствами, что и ФП Π и Π_0 : $\Pi_1(t) > 0$, $\dot{\Pi}_1(t) > 0$, $\ddot{\Pi}_1(t) \leq 0$ при $t > 0$. В частности, для любого $b > 0$ функции $\varepsilon_{11}(t, b)$ и $\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b)$ *положительны, возрастают и выпуклы вниз, любая ДД в форме $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ возрастает и выпукла вверх по ε_{11} и удовлетворяет оценке*

$$\Pi_1(0)\sigma_{11} < \varepsilon_{11}(\sigma_{11}, b) < \Pi_1(\infty)\sigma_{11}, \quad E_\infty\varepsilon_{11} < \sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b) < E\varepsilon_{11}, \quad (15)$$

где $E := 1/\Pi_1(0)$, $E_\infty := 1/\Pi_1(\infty) \geq 0$, а семейство ДД $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ возрастает по b и сходится при $b \rightarrow 0$ к прямой $\sigma_{11} = E_\infty\varepsilon_{11}$, а при $b \rightarrow \infty$ — к прямой $\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}$ (при условии $E < \infty$, т. е. когда $\Pi(0) \neq 0$ или $\Pi_0(0) \neq 0$). Кроме того, семейство ДД $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$, как и семейства сдвиговых, объемных и поперечных ДД (11), (12), обладает свойством самоподобия (инвариантности относительно однопараметрической группы растяжений плоскости $\sigma - \varepsilon$): любая ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ получается из одной ДД $\sigma(\varepsilon, b_0)$ растяжением вдоль осей σ и ε с коэффициентом b/b_0 . Нарушение любого из этих свойств ДД в испытаниях материала (см., например, выпуклые вниз ДД в [40, 41, 45–48]) — явный признак нелинейности его поведения.

Поперечная деформация (10) не обязана быть ни монотонной, ни выпуклой вверх функцией, поскольку функция $\Pi_\perp := -\frac{1}{2}\Pi + \frac{1}{9}\Pi_0$ не подчиняется ограничениям на ФП: $\varepsilon_\perp := \varepsilon_{22}(t, b)$ может убывать или возрастать на

всем интервале $t > 0$, может иметь точки экстремума и перегиба и менять знак. Так как

$$\dot{\varepsilon}_{\perp} = -\frac{1}{2}b\dot{Q}(t) + \frac{1}{9}b\dot{Q}_0(t) = -\frac{1}{2}b\Pi(t) + \frac{1}{9}b\Pi_0(t), \quad \ddot{\varepsilon}_{\perp} = -\frac{1}{2}b\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}b\dot{\Pi}_0(t), \quad (16)$$

при $b > 0$ критерии (нестромого) возрастания и выпуклости вниз $\varepsilon_{\perp}(t)$ на некотором интервале времени имеют вид $\Pi_0(t) \geq \frac{9}{2}\Pi(t)$ или $\dot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$, а уравнения для точек экстремума и перегиба $-\Pi_0(t) = \frac{9}{2}\Pi(t)$ или $\dot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$. Поскольку они не зависят от скорости b , точки экстремума или перегиба всех кривых $\varepsilon_{\perp}(t, b)$ синхронны (если они есть).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим модель (1) с ФП модели Кельвина

$$\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0 = \beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \lambda, \beta, \lambda_0, \beta_0 > 0, \quad \gamma \in (0; \beta), \quad \gamma_0 \in (0; \beta_0). \quad (17)$$

Здесь $\tau = \lambda^{-1}$ и $\tau_0 = \lambda_0^{-1}$ — времена ретардации при сдвиге и изменении объема; $G = 1/\Pi(0) = (\beta - \gamma)^{-1}$, $G_{\infty} = 1/\Pi(\infty) = \beta^{-1}$, $K = 1/\Pi_0(0) = (\beta_0 - \gamma_0)^{-1}$, $K_{\infty} = 1/\Pi_0(\infty) = \beta_0^{-1}$ — мгновенный и длительный модули сдвига и объемные модули. Для модели (17)

$$\begin{aligned} Q &= \beta t - \gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}), \quad Q_0 = \beta_0 t - \gamma_0 \lambda_0^{-1}(1 - e^{-\lambda_0 t}), \\ \varepsilon_{11} &= \frac{1}{9}b[(9\beta + \beta_0)t - 9\gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}) + \gamma_0 \lambda_0^{-1}(1 - e^{-\lambda_0 t})], \\ \varepsilon_{\perp} &= \frac{1}{18}b[(2\beta_0 - 9\beta)t + 9\gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}) - 2\gamma_0 \lambda_0^{-1}(1 - e^{-\lambda_0 t})]. \end{aligned}$$

Согласно (16), условие экстремума для $\varepsilon_{\perp}(t)$ имеет вид $2(\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}) = 9(\beta - \gamma e^{-\lambda t})$. В общем случае это уравнение имеет не более двух корней.

При $\lambda = \lambda_0$ $\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b[(9\gamma - 2\gamma_0)e^{-\lambda t} + 2\beta_0 - 9\beta]$ и условие экстремума имеет вид $e^{-\lambda t} = C$, $C := (9\beta - 2\beta_0)/(9\gamma - 2\gamma_0)$. Если $C \in (0; 1)$, то на полуоси $t > 0$ существует единственная точка экстремума $t_m = -\lambda^{-1} \ln C$ (точка максимума, если $9\gamma > 2\gamma_0$, и минимума, если $9\gamma < 2\gamma_0$), в противном случае $\varepsilon_{\perp}(t)$ монотонна при всех b . Отметим, что в условиях ползучести деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ модели с $\lambda = \lambda_0$ не может иметь точки экстремума [67].

При $\lambda \neq \lambda_0$ и $\gamma_0 \neq 0$ $\varepsilon_{\perp}(t)$ модели (17) может иметь и две точки экстремума, поскольку $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t)$ может быть немонотонной: $\ddot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b[2\gamma_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} - 9\gamma \lambda e^{-\lambda t}]$, $\ddot{\varepsilon}_{\perp} = 0$ при $e^{(\lambda - \lambda_0)t} = 9\gamma \lambda / (2\gamma_0 \lambda_0)$, и $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t)$ имеет (единственную) точку экстремума на полуоси $t > 0$ в двух случаях: $\lambda > \lambda_0$ и $9\gamma \lambda > 2\gamma_0 \lambda_0$ или $\lambda < \lambda_0$ и $9\gamma \lambda < 2\gamma_0 \lambda_0$. В случае $\gamma_0 = 0$, когда $\Pi_0(t) = \text{const}$ (нет объемной ползучести), имеем $\theta = \beta_0 \sigma_0(t)$, $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}b[(2\beta_0 - 9\beta)t + 9\gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})]$, $\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b[(9\gamma e^{-\lambda t} + 2\beta_0 - 9\beta)]$, и (единственная) точка экстремума $\varepsilon_{\perp}(t)$ существует при условии $H := (9\beta - 2\beta_0)/(9\gamma) \in (0; 1)$, а в противном случае $\varepsilon_{\perp}(t)$ монотонна при всех b .

На рис. 2, а приведены графики деформаций $\varepsilon_{11}(t)$ (кривые 1–3), $\theta(t)/3$ (кривые 4–6) и $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$ (кривые 7–9) для скорости нагружения $b = 0.01$, порожденные (см. (7), (9), (10)) тремя моделями вида (17) с одинаковыми сдвиговыми ФП $\Pi(t)$ ($\lambda = 0.1$, $\beta = 0.010$, $\gamma = 0.008$ и $\tau = \lambda^{-1} = 10$) и разными объемными ФП $\Pi_0(t)$, отличающимися временами ретардации $\tau_0 = \lambda_0^{-1}$:

- 1) с $\lambda_0 = 0.01 < \lambda$ – кривые 1, 4, 7;
- 2) с $\lambda_0 = \lambda = 0.1$ – кривые 2, 5, 8;
- 3) с $\lambda_0 = 1 > \lambda$ – кривые 3, 6, 9.

Значения $\beta_0 = 0.035$ и $\gamma_0 = 0.015$ одинаковы у всех моделей. Примечательны немонотонность (наличие точки максимума) и смена знака поперечной деформации $\varepsilon_{\perp}(t)$ (кривые 7–9, 13). Штрих-пунктирные линии 11, 12, 13 – деформации для модели с $\lambda = 0$, т. е. модели с упругим объемным деформированием и тем же мгновенным объемным модулем $K = (\beta_0 - \gamma_0)^{-1} = 50$, а линии 11', 12', 13' – для модели с $\gamma_0 = 0$, т. е. объемно-упругой модели с тем же длительным модулем $K_{\infty} = \beta_0^{-1} \approx 29$. Кривые деформирования этих двух моделей дают нижнюю и верхнюю оценки снизу для деформаций всех моделей с $\lambda > 0$, а также минимальный и максимальный интервалы положительности $\varepsilon_{\perp}(t)$ в окрестности нуля.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим фрактальную модель Максвелла со степенными ФП и непрерывными спектрами ретардации и релаксации:

$$\Pi = B + At^u, \quad \Pi_0 = B_0 + A_0t^w, \quad u, w \in (0; 1), \quad B, B_0 \geq 0, \quad A, A_0 > 0, \quad (18)$$

Здесь $G = 1/\Pi(0) = B^{-1}$, $G_{\infty} = 1/\Pi(\infty) = 0$, $K = 1/\Pi_0(0) = B_0^{-1}$, $K_{\infty} = 1/\Pi_0(\infty) = 0$. Так как $Q = Bt + A(u+1)^{-1}t^{u+1}$ и $Q_0 = B_0t + A_0(w+1)^{-1}t^{w+1}$, согласно (10) имеем

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}b(2B_0t - 9Bt + 2A_0(w+1)^{-1}t^{w+1} - 9A(u+1)^{-1}t^{u+1}),$$

$$\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b(2B_0 - 9B + 2A_0t^w - 9At^u).$$

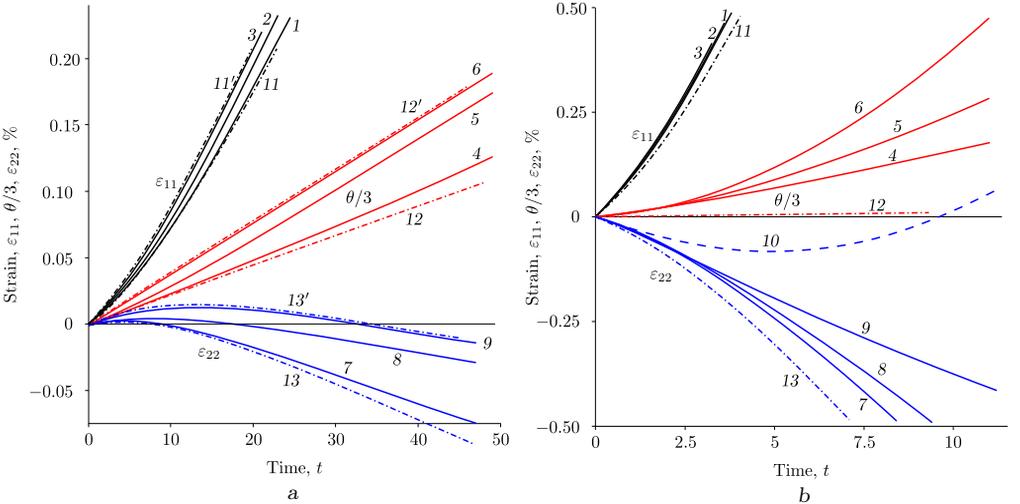


Рис. 2. Графики деформаций, вычисленные по формулам (7), (9), (10): а) для моделей вида (17); б) для моделей вида (18)

[Figure 2. Strains (7), (9), (10) as functions of time at stress rate $b = 0.01$: (a) curves $\varepsilon_{11}(t)$ (1–3), $\theta(t)/3$ (4–6), and $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}$ (7–9) generated by the models (17) with different bulk compliances (with various retardation times); (b) curves generated by the model (18) with different bulk compliances which differ in the exponent value: curves 1, 4, 7 ($w = 0.2 < u$), curves 2, 5, 8 and 3, 6, 9 ($w = u = 0.5$), curves 11, 12, 13 ($w = 0.8 > u$) are strains ε_{11} , $\theta(t)/3$ and ε_{\perp} generated by the model with $A_0 = 0$ neglecting bulk creep (i.e. simulating elastic bulk deformation)]

Очевидно, если $w > u$, то при $t \rightarrow \infty$ поперечная деформация $\varepsilon_{\perp}(t) \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon_{\perp}(t)$ возрастает при достаточно больших t , а если $w < u$, то $\varepsilon_{\perp}(t) \rightarrow -\infty$ и убывает. Если $w = u$, то $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18}bt[2B_0 - 9B + (2A_0 - 9A)(u + 1)^{-1}t^u]$, уравнение для точек экстремума $(2A_0 - 9A)t^u = 9B - 2B_0$ имеет единственное решение $\hat{t} = C^{1/u}$, $C := (9B - 2B_0)/(2A_0 - 9A)$ при условии $C > 0$ (\hat{t} точка максимума $\varepsilon_{\perp}(t)$, если $9B - 2B_0 < 0$ и $2A_0 - 9A < 0$, и точка минимума, если $9B - 2B_0 > 0$ и $2A_0 - 9A > 0$), а при $C \leq 0$ деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ — монотонная функция на полуоси $t > 0$: убывающая при $2A_0 - 9A < 0$ и возрастающая при $2A_0 - 9A > 0$. При $w \neq u$ $\varepsilon_{\perp}(t)$ может иметь и две точки экстремума, поскольку $\dot{\varepsilon}_{\perp} = \frac{1}{18}b(2A_0wt^{w-1} - 9Aut^{u-1})$ и $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t)$ имеет ровно одну точку экстремума $t = (9Au/2A_0w)^{1/(w-u)}$.

На рис. 2, *b* приведены графики деформаций $\varepsilon_{11}(t)$ (кривые 1–3), $\theta(t)/3$ (кривые 4–6) и $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22}$ (кривые 7–9), для $b = 0.01$, порожденных тремя моделями вида (18) с одинаковыми сдвиговыми ФП $\Pi(t)$ ($c u = 0.5$, $A = 0.05$, $B = 0.05$) и разными объемными ФП $\Pi_0(t)$:

- 1) с $w = 0.2 < u$ — кривые 1, 4, 7;
- 2) с $w = u = 0.5$ — кривые 2, 5, 8;
- 3) с $w = 0.8 > u$ — кривые 3, 6, 9.

Параметры $A_0 = 0.1$, $B_0 = 0.01$ фиксированы. В случае $w = 0.8 > u$ деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ имеет точку минимума (кривая 9 — при $t \approx 25$, т.е. за пределами рисунка), далее возрастает и становится положительной. Чтобы проиллюстрировать этот эффект, приведена деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ модели с $A_0 = 0.2$ (вместо $A_0 = 0.1$), $B_0 = 0.01$ и $w = 0.8$ (штриховая кривая 10). Отметим, что $\varepsilon_{\perp}(t)$ меняет знак с плюса на минус, в отличие от $\varepsilon_{\perp}(t)$ модели (17), меняющей знак с минуса на плюс (рис. 2, *a*). Штрих-пунктирные линии 11, 12, 13 — деформации ε_{11} , $\theta/3$ и ε_{\perp} для модели с $A_0 = 0$ (и $B_0 = 0.01$), т.е. модели с линейно-упругим объемным деформированием.

На рис. 3, *a* приведены диаграммы объемного, осевого и поперечного деформирования (11), (12) для тех же моделей (18) (и с той же нумерацией кривых 1–13), что и на рис. 2, *b*, но в форме зависимостей осевого напряжения $\sigma_{11} = bt$ (при $b = 0.01$) от деформаций ε_{11} , ε_{\perp} и θ . Точкам экстремума кривых $\varepsilon_{\perp}(t)$ с рис. 2, *b* соответствуют точки с вертикальной касательной на кривых на 9, 10, 20 рис. 3, *a*. Дополнительная штриховая кривая 20 — диаграмма $\sigma_{11}(\varepsilon_{\perp}, b)$ модели с $A_0 = 0.2$, $B_0 = 0.01$ и $w = 0.8$ (как и 10), но для скорости нагружения $b = 0.02$.

На рис. 3, *b* приведены диаграммы осевого и поперечного деформирования (12) модели (18) с $w = 0.8$, $A_0 = 0.1$, $B_0 = 0.01$ (кривые 1–5 и 6–10) и модели с $A_0 = 0$, т.е. без объемной ползучести (штрих-пунктирные линии 1'–5' и 6'–10') для разных скоростей нагружения: кривые 1–5 и 1'–5' — ДД $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ для $b = 0.001; 0.01; 0.1; 1; 10$, а кривые 6–10 и 6'–10' — поперечные ДД $\sigma_{11}(\varepsilon_{\perp}, b)$ для $b = 0.001; 0.005; 0.010; 0.015; 0.020$. Для осевых ДД скорости пробегают четыре порядка, а не один, поскольку скоростная чувствительность поперечных ДД 6–10 значительно выше. Осевые ДД двух моделей схожи по форме, а их отклонение друг от друга уменьшается с ростом b . Поперечные ДД 6'–10' модели без объемной ползучести качественно совершенно иные — все они однозначны, монотонны и выпуклы вверх ($\varepsilon_{\perp}(t)$ не меняет знак и не имеет точки минимума), в отличие от ДД 6–10 модели с объемной ползучестью.

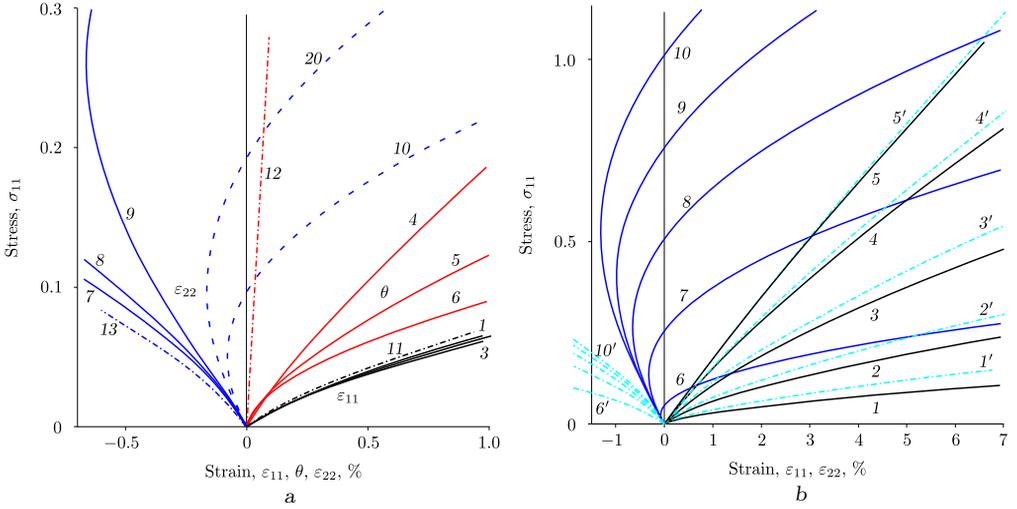


Рис. 3. Диаграммы осевого и поперечного деформирования: а) для четырех моделей (18) при $b = 0.01$; б) для модели (18) с $w = 0.8$ и модели без объемной ползучести при разных скоростях нагружения

[Figure 3. Stress-strain curves for axial and lateral strains: (a) dependences of strains ε_{11} , ε_{\perp} and θ on stress $\sigma_{11} = bt$ generated by four models (17) at stress rate $b = 0.01$; numeration of curves coincides with the numeration on Fig. 2, b; (b) stress-strain curves $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ and $\sigma_{11}(\varepsilon_{\perp}, b)$ generated by the model (18) with $w = 0.8$ (curves 1–5 and 6–10) or by the model neglecting bulk creep (dot-dashed curves 1'–5' and 6'–10') at different stress rates ($b = 0.001; 0.01; 0.1; 1; 10$ for axial strains and $b = 0.001; 0.005; 0.01; 0.015; 0.02$ for lateral strains)]

3. Коэффициент поперечной деформации при растяжении с постоянной скоростью. Поделив (10) на (9), найдем КПД при нагружении (4):

$$\nu(t) = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{11}} = \frac{1}{2} \frac{9bQ(t) - 2bQ_0(t)}{9bQ(t) + bQ_0(t)} = \frac{1}{2} - \frac{3Q_0(t)}{18Q(t) + 2Q_0(t)}, \quad (19)$$

или

$$\nu(t) = f(z\xi), \quad f(x) := \frac{1}{2} - \frac{3x}{6 + 2x} = -1 + \frac{9}{6 + 2x}, \quad (20)$$

$$\xi(t) := \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\theta}{\varepsilon} = \frac{z}{3} \frac{Q_0(t)}{Q(t)}. \quad (21)$$

Здесь $\xi(t)$ – параметр вида деформированного состояния, $z = \text{sgn } b = \pm 1$, $\varepsilon = (\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij})^{1/2} = |b|Q(t)$ – интенсивность деформаций. Аналогичный параметр вида напряженного состояния $\xi_{\sigma} := 3\sigma_0(t)/\sigma(t) = bt/(|b|t) = z$ не зависит от времени. Независимость КПД (и параметра (21)) от скорости нагружения и ее знака – существенное отличие линейного ОС (1) от нелинейных ОС вязкоупругости. Это свойство, если оно не выполняется в испытаниях некоторого материала на нагружение с разными скоростями, можно использовать как индикатор нелинейности его поведения и неприменимости линейного ОС (1). Если же оно выполняется (см., например, [20]), то это аргумент в пользу гипотезы о линейно-вязкоупругом поведении материала.

Так как $Q(t) > 0$ и $Q_0(t) > 0$ при $t > 0$, то $\theta \geq 0$, $\xi \geq 0$ и $\nu(t) \leq 0.5$. Из $Q(t) > 0$ (т. е. из $\Pi(t) > 0$) следует оценка снизу: $\nu(t) > -1$. Таким образом,

для любых ФП в ОС (1) верна оценка

$$-1 < \nu(t) < 0.5, \quad t > 0. \quad (22)$$

Покажем, что она точна. Так как $\dot{Q} = \Pi$ и $\dot{Q}_0 = \Pi_0$, по правилу Лопиталя пределы $\xi(0+)$ и $\xi(\infty)$ при $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow +\infty$ совпадают с пределами отношения $P := \frac{1}{3}z\Pi_0(t)/\Pi(t)$:

$$\xi(0+) = P(0), \quad \xi(\infty) = P(\infty), \quad \nu(0+) = f(P(0)), \quad \nu(\infty) = f(P(\infty)). \quad (23)$$

Поэтому для моделей с $\Pi_0(0) = 0$ (объемно нерегулярных) и $\Pi(0) \neq 0$ формула (21) дает в пределе при $t \rightarrow 0+$ величину $\xi(0+) = 0$ и по (20) $\nu(0+) = 0.5$ для любого $b > 0$, а для моделей с $\Pi(0) = 0$ и $\Pi_0(0) \neq 0$ $\xi(0+) = \infty$ и по (20) $\nu(0+) = -1$.

Из (23) следует, что функция $\nu(t)$ всегда имеет горизонтальную асимптоту при $t \rightarrow +\infty$, поскольку предел $\nu(\infty)$ (равновесное значение КПД) всегда конечен: $\nu(\infty) = -1$, если $P(\infty) = \infty$, и $\nu(\infty) \in (-1; 0.5]$, если $P(\infty) < \infty$. Кроме того, начальное и равновесное значения КПД при нагружении (4) такие же, как в условиях ползучести при постоянном напряжении [67].

КПД (19) при нагружении (4) может быть отрицательным, поскольку возможно $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$. Критерий отрицательности $\nu(t)$ на некотором интервале времени при растяжении имеет вид

$$Q_0(t) > \frac{9}{2}Q(t). \quad (24)$$

В зависимости от конкретных свойств ФП (от структуры множества нулей $Z := \{t \mid t > 0, Q_0(t) = 4.5Q(t)\}$ функции $\varepsilon_{\perp}(t)$) эта область (24) может быть пустой, может совпадать с полуосью $t > 0$, а может состоять из нескольких компонент связности (интервалов). Если $\Pi(\infty) < \infty$ и $\Pi_0(\infty) > 4.5\Pi(\infty)$, то область (24) содержит луч $t > t_*$, где $t_* = \sup Z < \infty$. Если $\Pi_0(0) > 4.5\Pi(0)$, то область (24) содержит правую окрестность нуля $(0; t_0)$, где $t_0 = \inf Z > 0$.

Из (19) следует, что КПД $\nu(t)$, вообще говоря, не постоянен. Критерий независимости КПД от времени при растяжении с постоянной скоростью (т. е. критерий постоянства $\xi(t) = k$, $k > 0$, в силу (20) налагает связь на сдвиговую и объемную ФП ОС (1): $Q_0(t) = 3kQ(t)$ при $t > 0$, т. е.

$$\Pi_0(t) = 3k\Pi(t), \quad t > 0. \quad (25)$$

В силу (20) $k = 3(0.5 - \nu)/(1 + \nu)$. Очевидно, тождество (25) обеспечивает (в силу ОС (1)) постоянство КПД при одноосном нагружении по любой программе $\sigma_{11}(t)$. В частности, тождество (25) выполняется для несжимаемого материала (с $\Pi_0(t) \equiv 0$), когда $\nu(t) \equiv 0.5$ по (19).

КПД (19) при нагружении (4) не обязан быть монотонной функцией. Поскольку из (20) имеем

$$\dot{\nu}(t) = -3 \frac{\dot{\xi}(t)(6 + 2\xi(t)) - 2\dot{\xi}(t)\xi(t)}{(6 + 2\xi(t))^2} = -\frac{18\dot{\xi}(t)}{(6 + 2\xi(t))^2},$$

то знаки $\dot{\nu}(t)$ и $-\dot{\xi}(t)$ одинаковы, и поэтому совпадают интервалы монотонности $\nu(t)$ и $-\xi(t)$:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{1}{3}Q(t)^{-2}y(t), \quad y(t) := \Pi_0(t)Q(t) - Q_0(t)\Pi(t). \quad (26)$$

Критерий возрастания КПД (убывания $\xi(t)$) на некотором интервале времени имеет вид $y(t) \leq 0$, т. е. $Q_0(t)/\Pi_0(t) \geq Q(t)/\Pi(t)$, а необходимое условие экстремума $-y(t) = 0$, т. е.

$$Q_0(t)/\Pi_0(t) = Q(t)/\Pi(t). \quad (27)$$

Если равенство (27) выполняется на некотором интервале времени (не обязательно совпадающем с полуосью $t > 0$), то $\dot{\nu} = 0$ и $\nu(t) = \text{const}$ на этом интервале.

ПРИМЕР 3. Для модели (18) по формуле (23) имеем $\xi(0) = B_0/(3B)$, $\nu(0) = -1 + 27[18 + 2B_0/B]^{-1}$, а при $t \rightarrow \infty$ графики $\nu(t)$ обладают горизонтальными асимптотами:

- $\xi(\infty) = 0$, $\nu(\infty) = 0.5$ при $u > w$;
- $\xi(\infty) = +\infty$, $\nu(\infty) = -1$ при $u < w$;
- $\xi(\infty) = A_0/(3A)$, $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1}$ при $u = w$

(в первых двух случаях асимптоты не зависят от параметров модели, и при больших временах моделируемый материал ведет себя как несжимаемый или как не меняющий форму). Функцию

$$y(t) = (B_0 + A_0t^w)[Bt + A(u + 1)^{-1}t^{u+1}] - [B_0t + A_0(w + 1)^{-1}t^{w+1}](B + At^u)$$

из (26) можно привести к виду

$$y = AB_0[(u + 1)^{-1} - 1]t^{u+1} - A_0B[(w + 1)^{-1} - 1]t^{w+1} + A_0A[(u + 1)^{-1} - (w + 1)^{-1}]t^{u+w+1}.$$

Если $w = u$, то $y = (A_0B - AB_0)u(u + 1)^{-1}t^{u+1}$, и потому КПД — монотонная функция:

- при $A_0B > AB_0$ $y(t) > 0$ и КПД убывает на всем луче $t > 0$;
- при $A_0B < AB_0$ $y(t) < 0$ и КПД возрастает на луче $t > 0$;
- при $A_0B = AB_0$ $\nu(t) = \text{const}$.

В частности, если $A_0 = 0$ и $\Pi_0(t) = B_0 = \text{const}$ (такая ФП моделирует упругое изменение объема), то функция $\xi(t) = ct/[3Q(t)]$ убывает, а КПД

$$\nu(t) = 0.5 - 3B_0[18(B + A(u + 1)^{-1}t^u) + 2B_0]^{-1}$$

возрастает на полуоси $t > 0$, $\nu(\infty) = 0.5$, $\nu(0+) = -1 + \frac{27}{2}(9 + B_0/B)^{-1}$ и $\nu(0+) < 0$ при $B_0/B > 4.5$. Если $w \neq u$ и $A_0 \neq 0$, то $y(t)$ и $\dot{\nu}(t)$ могут менять знак и КПД может быть немонотонным.

На рис. 4 приведены графики КПД $\nu(t)$ при нагружении (4) трех моделей семейства (18) с одинаковыми сдвиговыми ФП Π ($u = 0.5$, $A = 0.5$, $B = 1$) и разными объемными ФП Π_0 : с $w = u = 0.5$ (штриховые кривые 0, 1, 2, 3, 5, 7), с $w = 0.2 < u$ (кривые 0', 1', 2', 3', 5', 7') и с $w = 0.8 > u$ (кривые 0'', 1'',

2'', 3'', 5'', 7''). Параметр $A_0 = 1$ фиксирован, а номера кривых соответствуют разным значениям $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$ для каждой из трех моделей (с ростом B_0 , т. е. с уменьшением мгновенного объемного модуля $K = B_0^{-1}$, график $\nu(t)$ смещается вниз). При каждом B_0 начальные значения $\nu(0)$ одинаковы у всех трех моделей (и убывают с ростом B_0), а горизонтальные асимптоты при $t \rightarrow \infty$ различны (и не зависят от B_0): $\nu(\infty) = 0.5$ у всех моделей с $w < u$, $\nu(\infty) = -1$ у всех моделей с $w > u$ и $\nu(\infty) = -1 + 27[18 + 2A_0/A]^{-1} = 5/22$ при $w = u$. Асимптота штриховых кривых 0–7 $\nu = 5/22$ совпадает с кривой (прямой) 2, поскольку при $w = u$ и $B_0 = 2$ будет $A_0B = AB_0$ и $\nu(t) = \text{const}$. Примечательны перемены знака и немонотонность $\nu(t)$ (кривая 5'' меняет знак даже дважды). Для сравнения приведены два графика $\nu(t)$ модели с линейно-упругим изменением объема, т. е. с $A_0 = 0$ (штрих-пунктирные кривые 11 и 17): они монотонно возрастают и $\nu(\infty) = 0.5$. На рис. 4, b приведены те же графики КПД, что и на рис. 4, a, но на большем интервале времени.

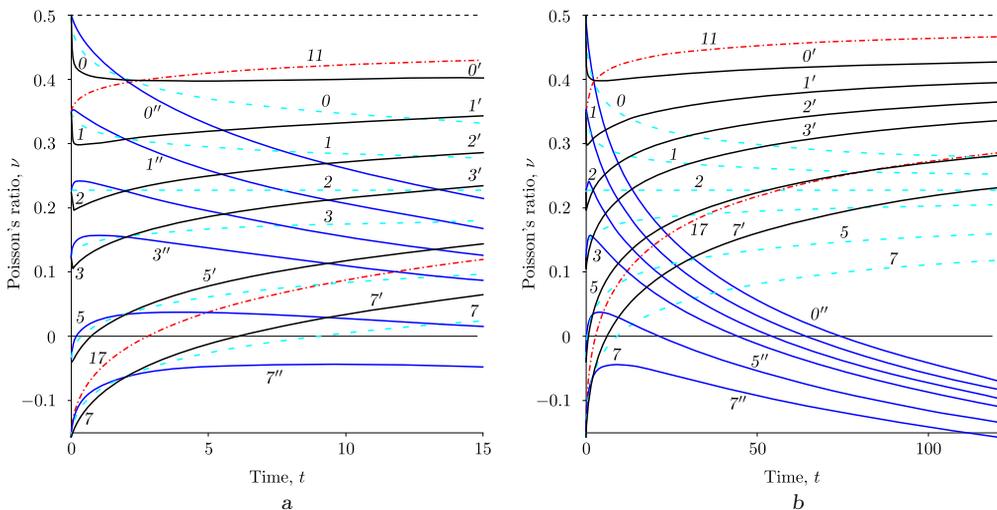


Рис. 4. Графики коэффициента Пуассона моделей семейства (18) с одинаковыми сдвиговыми функциями ползучести $\Pi(t)$ и разными значениями параметров w и B_0

[Figure 4. Dependence of the Poisson's ratio on time generated by the models (18) with the same shear compliance $\Pi(t)$ (with $u = 0.5$, $A = 0.5$, $B = 1$) and different bulk compliances varying in values of parameters B_0 and w : $w = u = 0.5$ (dashed curves 0, 1, 2, 3, 5, 7 for $B_0 = 0; 1; 2; 3; 5; 7$), $w = 0.2 < u$ (curves 0', 1', 2', 3', 5', 7') and $w = 0.8 > u$ (curves 0'', 1'', 2'', 3'', 5'', 7''); red dot-dashed curves 11 and 17 depict the Poisson's ratio generated by the model with $A_0 = 0$ neglecting bulk creep (i.e. simulating elastic bulk deformation) for $B_0 = 1$ and $B_0 = 7$; Fig. b shows the same curves on a larger interval of time than Fig. a]

4. Об индикаторах (не)применимости и способах идентификации ОС (1) по испытаниям на нагружение с постоянной скоростью. Выше найдены несколько характерных качественных свойств кривых деформирования и коэффициента Пуассона, которые удобно контролировать в испытаниях материалов и использовать как индикаторы границы области линейного поведения материала (индикаторы неприменимости линейного ОС (1)) по данным серии нагружений с постоянной скоростью. К ним, конечно, следует добавить количественные индикаторы. Один из них — независимость КПД (19) от скорости нагружения. Из (9), (10) также следует, что

отношения $\varepsilon_{11}(t, b_2)/\varepsilon_{11}(t, b_1)$ и $\varepsilon_{\perp}(t, b_2)/\varepsilon_{\perp}(t, b_1)$ в испытаниях с разными скоростями нагружения b_i не зависят от времени:

$$\varepsilon_{11}(t, b_2)/\varepsilon_{11}(t, b_1) = b_2/b_1, \quad \varepsilon_{\perp}(t, b_2)/\varepsilon_{\perp}(t, b_1) = b_2/b_1. \quad (28)$$

Если анализ данных испытаний материала показывает, что все необходимые индикаторы применимости линейного ОС (1) выполняются с удовлетворительной точностью и потому нет «противопоказаний» к его использованию для моделирования, то можно идентифицировать ОС (1) по данным всего одного испытания по программе (4) с некоторой (малой) скоростью b , в котором регистрируются как продольная, так поперечная деформации $\varepsilon_{11}(t, b)$ и $\varepsilon_{\perp}(t, b)$. В самом деле, можно найти обе ФП $\Pi(t)$ и $\Pi_0(t)$ (на интервале времени, равном времени испытаний), определив сначала их первообразные Q и Q_0 из системы уравнений (9), (10):

$$\varepsilon_{11}(t, b) - \varepsilon_{\perp}(t, b) = \frac{3}{2}bQ(t), \quad \varepsilon_{11}(t; b) + 2\varepsilon_{\perp}(t; b) = bQ_0(t). \quad (29)$$

Повысить точность определения $\Pi(t)$ и $\Pi_0(t)$ можно стандартным способом: осреднив результаты, полученные по испытаниям при нескольких значениях $b = b_i$ в интересующем диапазоне скоростей нагружения. Можно также исключить процедуру численного дифференцирования функции Q и Q_0 и расширить интервал времени, на котором определяются ФП, если напрямую определить $\Pi(t)$ и $\Pi_0(t)$ из одного испытания на ползучесть при некотором уровне напряжения $\bar{\sigma}$ по измеренным деформациям [67]:

$$\Pi(t) = \frac{2}{3}(\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}) - \varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}))/\bar{\sigma}, \quad \Pi_0(t) = 3(\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}) + 2\varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}))/\bar{\sigma}. \quad (30)$$

Целесообразно сочетание испытаний этих двух типов (например, в одном испытании на ползучесть с начальной стадией нагружения с постоянной скоростью до заданного уровня напряжения), поскольку испытания на ползучесть позволяют найти ФП на достаточно длительных интервалах времени (но не позволяют найти их в окрестности нуля), а испытания на нагружение с постоянными скоростями позволяют найти мгновенные сдвиговые и объемный модули и уточнить значения ФП при малых (не слишком) временах, тех, которые приходится отсекаать в данных испытаний на ползучесть и релаксацию по правилу “ten times rule”.

5. Свойства модели с условием постоянства коэффициента Пуассона. Постулат о независимости КПД от времени очень часто применяется для существенного упрощения решения краевых задач вязкоупругости. Критерий независимости КПД от времени (25) налагает связь $\Pi_0(t) = 3k\Pi(t)$ на ФП ОС (1), управляющие сдвиговыми и объемными деформациями, и превращает ОС (1) в модель с одной материальной функцией $\Pi(t)$ и одним параметром $\nu \in (-1; 0.5)$ (или параметром $k = 3(0.5 - \nu)/(1 + \nu)$, его физический смысл — отношение сдвигового и объемного модулей: $k = G/K = \frac{1}{3}\Pi_0(\infty)/\Pi(\infty)$). В этом случае выражения (9) и (10) для деформаций при нагружении (4) принимают вид

$$\varepsilon_{11}(t; b) = b\left(1 + \frac{k}{3}\right)Q(t), \quad \varepsilon_{\perp}(t; b) = b\left(-\frac{1}{2} + \frac{k}{3}\right)Q(t), \quad (31)$$

т. е. осевые и поперечные кривые деформирования оказываются подобными (отношение любых двух из них не зависит от времени и скорости нагружения), а $\varepsilon_{\perp}(t)$ не имеет ни точек экстремума, ни точек перегиба (в отличие от общего случая ОС (1) с двумя ФП): если $k < 3/2$ (т. е. $\nu > 0$), то ε_{\perp} отрицательна, убывает и выпукла вверх при $t > 0$, а если $k > 3/2$ (т. е. $\nu < 0$), ε_{\perp} положительна, возрастает и выпукла вниз при $t > 0$ (как и осевая деформация ε_{11}).

Таким образом, постулат о постоянстве КПД не только игнорирует всю специфику эволюции КПД реономных материалов во времени (которую, как доказано выше, способно качественно описывать ОС (1) с двумя ФП), но и радикально обрезает спектр возможных форм кривых поперечного деформирования $\varepsilon_{\perp}(t)$ (и кривых релаксации и ползучести [67]): они не могут иметь ни точек экстремума, ни точек перегиба, ни перемен знака.

Указанные специфические свойства семейств кривых деформирования (31) удобно проверять в испытаниях материалов по программам (4) с разными скоростями нагружения b , в которых регистрируются продольная и поперечная деформации, и использовать как индикаторы (не)применимости постулата о постоянстве коэффициента Пуассона в сочетании с ОС (1) (перед этим, конечно, следует еще проверить выполнение базовых индикаторов применимости линейного ОС (1) с двумя ФП, например, независимость КПД от скорости b и независимость отношений (28) от времени). Их нарушение в интересующем диапазоне времен и скоростей нагружения свидетельствует о неприемлемости этого постулата. Отметим, что при $t \rightarrow +\infty$ КПД $\nu(t)$, как было доказано для ОС (1) в общем случае, стремится к горизонтальной асимптоте, и потому при достаточно больших временах за пределами некоторого начального интервала времени модель с постоянным КПД может оказаться удовлетворительной (и важный вопрос, требующий исследования и четких формулировок в конкретных задачах — надежная оценка длительности этого «интервала неадекватности» постулата о постоянстве КПД).

6. Свойства модели, пренебрегающей объемной ползучестью, индикаторы ее неприменимости. Исследуем характерные особенности ОС (1) с $P_0(t) = c = \text{const}$ и произвольной сдвиговой ФП $\Pi(t)$, т. е. модели с линейно-упругой зависимостью объемной деформации (УОД) от среднего напряжения: $\theta = c\sigma_0$ (параметр $c > 0$ задает объемный модуль $K = c^{-1}$). В этом случае для нагружения (4) имеем $Q_0 = ct$,

$$\theta = \frac{1}{3}bct, \quad \varepsilon_{11}(t; b) = bQ(t) + \frac{1}{9}bct, \quad \varepsilon_{\perp}(t, b) = -\frac{1}{2}bQ(t) + \frac{1}{9}bct, \quad (32)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{3} \frac{zct}{Q(t)}, \quad \nu(t) = -1 + \frac{27}{2} \left[9 + \frac{ct}{Q(t)} \right]^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}c \left[9 \frac{Q(t)}{t} + c \right]^{-1}. \quad (33)$$

При $c = 0$ получим модель несжимаемого материала: $\nu(t) \equiv 0.5$, $\varepsilon_{11} = bQ(t)$, $\varepsilon_{\perp} = -0.5bQ(t)$ и поперечная деформация всегда отрицательна, убывает и выпукла вверх на всей полуоси $t > 0$.

При $c > 0$ из (32) следует, что для любого $b > 0$ осевая деформация $\varepsilon_{11}(t)$ возрастает и выпукла вниз при $t > 0$ (как и в общем случае), а поперечная деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ выпукла вверх (в отличие от общего случая, когда она может иметь точки перегиба), но не обязана быть монотонной и может

менять знак. Действительно,

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}b\Pi(t) + \frac{1}{9}bc, \quad \ddot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}b\dot{\Pi}(t) < 0,$$

уравнение для точек экстремума $\varepsilon_{\perp}(t)$ имеет вид $\Pi(t) = 4.5c$, и в силу возрастания $\Pi(t)$ возможны только три случая:

- 1) если $\Pi(0) < \frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$, то $\varepsilon_{\perp}(t)$ имеет (единственную) точку максимума t_m на полуоси $t > 0$ и положительна в некоторой правой окрестности нуля (а $\nu(t) < 0$ в этой окрестности);
- 2) если $\frac{2}{9}c \geq \Pi(\infty)$, то $\varepsilon_{\perp}(t)$ возрастает и $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ (а $\nu(t) < 0$) при $t > 0$;
- 3) если $\frac{2}{9}c \leq \Pi(0)$, то $\varepsilon_{\perp}(t)$ убывает на полуоси $t > 0$ и $\varepsilon_{\perp}(t) < 0$.

Второй случай реализуем только для моделей с ограниченной ФП (и нереализуем, например, для ФП вида (18) или вида (6) с $\alpha > 0$ и для параллельных соединений любого числа моделей Максвелла). Третий случай невозможен для моделей с $\Pi(0) = 0$ (например, с ФП $\Pi = At^u$ или для последовательных соединений моделей Фойгта); у таких моделей всегда $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ и $\nu(t) < 0$ в интервале $(0; t_0)$, где $t_0 = \infty$, если $\frac{2}{9}c \geq \Pi(\infty)$, и t_0 корень уравнения $Q(t)t^{-1} = \frac{2}{9}c$, если $\frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$ (очевидно, существует единственный корень, поскольку функция $\Theta = Qt^{-1}$ возрастает и $\Theta(\infty) = \Pi(\infty)$, $t_0 > t_m$). Отметим, что в условиях ползучести модель с УОД (и произвольной ФП Π) порождает монотонную поперечную деформацию [67], а в случае нагружения (4) $\varepsilon_{\perp}(t)$ может иметь точку максимума.

В общем случае ОС (1) с $\Pi_0(t) \neq \text{const}$ поперечная деформация (10), как было доказано выше, может иметь не только точки максимума, но и точки минимума, может менять знак не только с «плюса» на «минус», но и с «минуса» на «плюс» (рис. 2) и не обязана быть выпуклой вверх функцией: она может иметь точки перегиба. Таким образом, *главные качественные отличия модели с УОД — отсутствие точек перегиба и точек минимума у $\varepsilon_{\perp}(t)$, неспособность описывать материалы, у экспериментальных кривых $\varepsilon_{\perp}(t)$ которых такие точки есть.*

Докажем, что для любой допустимой ФП $\Pi(t)$ (подчиняющейся ограничениям $\Pi(t) > 0$, $\dot{\Pi}(t) > 0$, $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$, наложенным на ФП) и любого $c > 0$ КПД (33) модели с УОД возрастающая выпуклая вверх функция на полуоси $t > 0$ (а $\xi(t)$ — убывающая выпуклая вниз функция), т. е. $\nu(t)$ не может иметь точек экстремума и перегиба (в отличие от ОС (1) общего вида). По (26) $\dot{\xi}(t) = \frac{1}{3}Q(t)^{-2}y(t)$, $y(t) = cQ - ct\Pi$ и $\dot{y} = -ct\dot{\Pi} < 0$, поскольку $\Pi(t)$ возрастает. Т. к. $y(0) = 0$, то $y(t) < 0$ при всех $t > 0$, $\dot{\xi}(t) < 0$, $\xi(t)$ убывает, а $\nu(t)$ возрастает. Согласно (33)

$$\dot{\nu}(t) = 54c \frac{t\Pi - Q}{(18Q + 2ct)^2}, \quad \ddot{\nu}(t) = 108c \frac{t(9Q + ct)\dot{\Pi} - 2(9\Pi + c)(t\Pi - Q)}{(18Q + 2ct)^3}.$$

Докажем, что числитель второй дроби $g(t) := t(9Q + ct)\dot{\Pi} - 2(9\Pi + c)(t\Pi - Q)$ отрицателен при $t > 0$, т. е. $\ddot{\nu}(t) < 0$. Поскольку $g(0) = 0$, достаточно доказать, что $g(t)$ убывает, т. е. $\dot{g}(t) < 0$. Выражение для $\dot{g}(t)$ приводится к виду $\dot{g} = t(9Q + ct)\ddot{\Pi} - 27(t\Pi - Q)\dot{\Pi}$. Так как $Q(t) < t\Pi(t)$ при $t > 0$, то в силу

ограничений $\Pi(t) > 0$, $\dot{\Pi}(t) > 0$, $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ и $Q(t) > 0$ оба слагаемых формулы для $\dot{g}(t)$ отрицательны, и потому $\ddot{v}(t) < 0$. Аналогично доказывается, что $\ddot{\xi}(t) > 0$.

Пределы функций $\xi(t)$ и $\nu(t)$ при $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow +\infty$ (т. е. их верхние и нижние грани на интервале $t > 0$ в силу монотонности) вычисляются по (23) или непосредственно из (33) с учетом того, что $Qt^{-1} \rightarrow \Pi(0)$ при $t \rightarrow 0+$ и $Qt^{-1} \rightarrow \Pi(\infty)$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$\xi(0) = \frac{1}{3} \frac{c}{\Pi(0)}, \quad \xi(\infty) = \frac{1}{3} \frac{c}{\Pi(\infty)},$$

$$\nu(0) = -1 + \frac{27}{2} \left(9 + \frac{c}{\Pi(0)}\right)^{-1}, \quad \nu(\infty) = -1 + \frac{27}{2} \left(9 + \frac{c}{\Pi(\infty)}\right)^{-1}.$$

В зависимости от величин отношений $c/\Pi(0)$ и $c/\Pi(\infty)$ (мгновенного и длительного модулей сдвига к объемному модулю упругости) оба предельных значения $\nu(0+)$ и $\nu(\infty)$ КПД (33) могут пробегать весь интервал значений КПД $(-1; 0.5)$ (см. (22)), в частности, если $\Pi(0) = 0$, то $\nu(0) = -1$. Таким образом, пренебрежение объемной ползучестью не сужает диапазон возможных значений КПД и, в частности, диапазон его равновесных значений $\nu(\infty)$. Очевидно, $\nu(\infty) = 0.5$ тогда и только тогда, когда $\Pi(\infty) = \infty$, т. е. ФП не ограничена, а в случае $\Pi(\infty) < \infty$ $\nu(\infty) < 0.5$ и $\nu(\infty) \rightarrow -1$ при $c/\Pi(\infty) \rightarrow \infty$. Например, для модели (18) с $A_0 = 0$, $B_0 = c$ и любыми параметрами сдвиговой ФП имеем $\nu(\infty) = 0.5$, $\nu(0+) = -1 + \frac{27}{9}(9 + c/B)^{-1}$ и $\nu(0+) < 0$ при $B_0/B > \frac{9}{2}$ (см. штрих-пунктирные кривые 11 и 17 на рис. 4).

Критерий (24) отрицательности $\nu(t)$ на некотором интервале времени принимает вид $c > \frac{9}{2}Q(t)t^{-1}$. В отличие от общего случая, область отрицательности КПД модели с УОД не может состоять из нескольких компонент связности: поскольку функция $Q(t)t^{-1}$ возрастает и уравнение $\frac{9}{2}Qt^{-1} = c$ имеет не более одного решения t_0 при $t > 0$, то эта область либо пуста (в случае $c \leq \frac{9}{2}\Pi(0)$), либо совпадает с интервалом $(0; t_0)$ ($t_0 = \infty$, если $c \geq \frac{9}{2}\Pi(\infty)$).

Таким образом, пренебрежение объемной ползучестью хотя и не сужает диапазон возможных значений КПД (и диапазон его мгновенных и равновесных значений) и не лишает ОС (1) способности описывать смену знака КПД и поперечной деформации и немонотонность $\varepsilon_{\perp}(t)$ (в случае $\Pi(0) < \frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$), но все же заметно ограничивает эту способность и сильно обедняет спектр возможных типов изменения $\varepsilon_{\perp}(t)$ и КПД (и ограничивает сферу применимости модели):

- 1) $\varepsilon_{\perp}(t)$ не может иметь точки перегиба (всегда выпукла вверх);
- 2) $\varepsilon_{\perp}(t)$ может иметь не более одной точки экстремума и она может быть лишь точкой максимума;
- 3) $\varepsilon_{\perp}(t)$ не может менять знак с «минуса» на «плюс» (см. рис. 2), а КПД (33) с «плюса» на «минус»;
- 4) КПД не может иметь точки экстремума и перегиба и участки убывания или выпуклости вниз (см. штрих-пунктирные кривые 11 и 17 на рис. 4).

Их наличие у экспериментальной кривой $\nu(t)$ — индикаторы неприменимости модели с УОД.

В силу (32) модель с УОД обладает еще одним весьма специфичным свойством: при нагружениях вида (4) (в точке рабочей части образца) функция

$V(t; b) := \varepsilon_{11}(t; b) + 2\varepsilon_{\perp}(t; b)$ линейно зависит не только от скорости нагружения b , но и от времени:

$$\varepsilon_{11}(t; b) + 2\varepsilon_{\perp}(t; b) = \frac{1}{3}bct. \quad (34)$$

Поскольку функцию $V(t; b)$ (в случае малых деформаций она, очевидно, совпадает с объемной деформацией θ) удобно измерять в испытаниях материалов, это простое свойство можно (и удобно) использовать как один из основных индикаторов применимости гипотезы об отсутствии объемной ползучести в сочетании с ОС (1) по результатам нескольких испытаний материала по программам (4) с разными скоростями нагружения b , в которых регистрируются продольная и поперечная деформации. Его нарушение свидетельствует о неприемлемости постулата о линейно-упругой связи между объемной деформацией и средним напряжением. Перед этим, конечно, следует еще проверить выполнение базовых индикаторов применимости линейного ОС (1) в общем виде (с двумя ФП), например, независимость КПД от скорости b и независимость отношений (28) от времени.

Если эти необходимые признаки линейности и отсутствия объемной ползучести выполняются в испытаниях с удовлетворительной точностью, можно идентифицировать модель без объемной ползучести по данным всего одного испытания по программе (4) с некоторым b : найти параметр c (т. е. объемный модуль K) по (34), а сдвиговую ФП $\Pi(t)$ можно найти, определив сначала $Q(t)$ из уравнения (32) для $\varepsilon_{11}(t, b)$ или из тождества (29). Конечно, определить ФП можно и по формуле (30), используя данные одного испытания на ползучесть.

Заключение. В работе изучены возможности линейного ОС вязкоупругости (1) с двумя произвольными материальными функциями для изотропных материалов по описанию комплекса реологических эффектов, связанных с поведением поперечной деформации при одноосных нагружениях с постоянной скоростью. При минимальных ограничениях на функции объемной и сдвиговой ползучести аналитически исследованы общие свойства кривых объемного, осевого и поперечного деформирования (7), (9), (10) (и в форме диаграмм $\sigma - \varepsilon$ (13), (12)), порождаемых ОС (1) при нагружениях (4), и зависимости коэффициента поперечной деформации (КПД) (19) от времени, изучено влияние на них характеристик обеих функций ползучести. В частности доказано, что ОС (1) способно моделировать немонотонность и знакопеременность поперечной деформации $\varepsilon_{\perp}(t)$ и КПД, получены критерии отрицательности КПД при нагружении (4), критерий его постоянства и критерий его возрастания, убывания и немонотонности. Основные доказанные утверждения собраны в теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть функции ползучести $\Pi(t)$ и $\Pi_0(t)$ в ОС (1) положительны, непрерывно дифференцируемы, возрастают и (нестрого) выпуклы вверх при $t > 0$. Тогда семейства кривых объемного, осевого и поперечного деформирования (7), (9), (10) и (11)–(13), порождаемые ОС (1) при нагружениях вида (4), и коэффициент Пуассона (19) обладают следующими свойствами.

1. Для любой скорости нагружения $b > 0$ объемная и осевая деформации (7), (9) и интенсивность деформаций $\varepsilon = |b|Q(t)$ положительные, возрастающие и выпуклые вниз функции времени на полуоси $t > 0$.

2. При любом $b > 0$ диаграммы объемного и осевого деформирования (ДД) $\sigma_0(\theta, b)$ и $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ возрастают и выпуклы вверх при $\theta > 0$ и $\varepsilon_{11} > 0$, и удовлетворяют двусторонним оценкам (14), (15), где $K = 1/\Pi_0(0)$, $K_\infty = 1/\Pi_0(\infty)$, $E = [\Pi(0) + \frac{1}{9}\Pi_0(0)]^{-1}$, $E_\infty = [\Pi(\infty) + \frac{1}{9}\Pi_0(\infty)]^{-1}$.
3. Семейства ДД $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$ и $\sigma_0(\theta, b)$ возрастают по b (положительная скоростная чувствительность) и сходятся при $b \rightarrow 0$ к прямым $\sigma_{11} = E_\infty \varepsilon_{11}$ или $\sigma_0 = K_\infty \theta$ (равновесным ДД), а при $b \rightarrow \infty$ (и условии $\Pi_0(0) \neq 0$) к прямым $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$ или $\sigma_0 = K \theta$ (мгновенным ДД).
4. Поперечная деформация (10) (и ДД $\varepsilon_\perp(\sigma_{11}, b)$) не обязана быть ни монотонной, ни выпуклой вверх функцией: $\varepsilon_\perp(t, b)$ может убывать или возрастать на всем интервале $t > 0$, может иметь точки экстремума и перегиба и менять знак; уравнения для точек экстремума и перегиба имеют вид $\Pi_0(t) = \frac{9}{2}\Pi(t)$ или $\dot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$ и не зависят от b .
5. Отношения $\varepsilon_{11}(t, b_2)/\varepsilon_{11}(t, b_1)$, $\varepsilon_\perp(t, b_2)/\varepsilon_\perp(t, b_1)$ и $\theta(t, b_2)/\theta(t, b_1)$ деформаций (9), (10) и (7) для разных скоростей нагружения b_i не зависят от времени и равны друг другу (см. (28)).
6. Семейства осевых, поперечных и объемных ДД $\sigma_{11}(\varepsilon_{11}, b)$, $\sigma_{11}(\varepsilon_\perp, b)$ и $\sigma_0(\theta, b)$ (см. (12), (13)) — инвариантны относительно однопараметрической группы растяжений плоскости $\sigma - \varepsilon$: любая ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ получается из ДД $\sigma(\varepsilon, b_0)$ растяжением вдоль осей σ и ε с коэффициентом b/b_0 .
7. Коэффициент поперечной деформации (КПД) выражается формулами (19) и (20), зависит лишь от отношения $Q_0(t)/Q(t)$ материальных функций (8) и не зависит от скорости нагружения.
8. КПД меняется в диапазоне $-1 < \nu(t) < 0.5$ и может менять знак; критерий отрицательности $\nu(t)$ на некотором интервале времени — неравенство (24): $Q_0(t) > 4.5Q(t)$.
9. КПД не обязан быть монотонной функцией времени: он может убывать или возрастать при $t > 0$ и может иметь точки максимума и минимума; точки экстремума являются корнями уравнения (27).
10. Существуют пределы $\nu(t)$ при $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow +\infty$ (начальное и равновесное значения КПД), они определяются по формуле (23) и могут принимать все значения из отрезка $[-1; 0, 5]$.
11. Критерий независимости КПД от времени при нагружениях (4) — тождество (25), связывающее ФП; для такой модели (с одной материальной функцией и параметром $\nu \in (-1; 0.5)$) осевые и поперечные деформации выражаются формулами (31) и все осевые и поперечные кривые деформирования оказываются подобными (отношение любых двух из них не зависит от времени и скорости нагружения); поперечная деформация $\varepsilon_\perp(t, b)$ (и ДД $\varepsilon_\perp(\sigma_{11}, b)$) не может иметь ни точек экстремума, ни точек перегиба, ни перемен знака: если $\nu > 0$ (и $b > 0$), то $\varepsilon_\perp(t, b)$ отрицательна, убывает и выпукла вверх при $t > 0$, а если $\nu < 0$, то $\varepsilon_\perp(t, b)$ положительна, возрастает и выпукла вниз.
12. В случае модели с $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$, т.е. в случае модели с упругой зависимостью объемной деформации от среднего напряжения, формулы для осевых и поперечных деформаций и КПД принимают вид (32)

и (33); поперечная деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ не имеет точек перегиба и выпукла вверх при $t > 0$ (для любой скорости $b > 0$), но может менять знак и не обязана быть монотонной: если $\Pi(0) < \frac{2}{9}c < \Pi(\infty)$, то $\varepsilon_{\perp}(t)$ имеет единственную точку максимума на полуоси $t > 0$, если $\frac{2}{9}c \geq \Pi(\infty)$, то $\varepsilon_{\perp}(t)$ возрастает и $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ при $t > 0$, а если $\frac{2}{9}c \leq \Pi(0)$, то $\varepsilon_{\perp}(t)$ убывает на полуоси $t > 0$ и $\varepsilon_{\perp}(t) < 0$. КПД такой модели (33) — возрастающая и выпуклая вверх на полуоси $t > 0$ функция, т.е. $\nu(t)$ не может иметь точек экстремума и перегиба, но пренебрежение объемной ползучестью не сужает диапазон возможных значений КПД и диапазон его начальных и равновесных значений $\nu(0)$ и $\nu(\infty)$; КПД может менять знак: критерий отрицательности $\nu(t)$ на некотором интервале времени — неравенство $c > \frac{9}{2}Q(t)t^{-1}$. При любом $t > 0$ КПД (33) меньше КПД этой модели при ползучести.

13. Если $\Pi_0(t) \equiv 0$ (постулируется несжимаемость материала), то $\varepsilon_{\perp}(t) = -0.5\varepsilon_{11}(t)$, поперечная деформация $\varepsilon_{\perp}(t)$ отрицательна, убывает и выпукла вверх (при $b > 0$) на полуоси $t > 0$, а КПД $\nu(t) \equiv 0.5$.

Обнаруженные свойства кривых деформирования и КПД (прежде всего, пп. 1, 2, 5–7 теоремы) удобно проверять в испытаниях материалов и использовать как маркеры границы области линейного поведения материалов при анализе данных испытаний по программам нагружения (4): нарушение любого из этих свойств в испытаниях некоторого материала — признак нелинейности его поведения и индикатор неприменимости ОС (1) для моделирования (в этом диапазоне времен, деформаций и скоростей нагружения).

Указан простой способ идентификации определяющего соотношения (1), позволяющий определить обе функции ползучести по экспериментальным кривым продольной и поперечной деформаций при нагружении (4), если анализ данных испытаний показывает, что все указанные необходимые признаки применимости линейного ОС (1) выполняются, т. е. нет «противопоказаний» к его использованию для моделирования.

Исследованы специфические свойства кривых деформирования, порождаемых линейным ОС (1) в сочетании с постулатами о линейно-упругом изменении объема или о постоянстве коэффициента Пуассона (пп. 5, 6), найдены дополнительные индикаторы неприменимости подобных моделей с одной материальной функцией. Постулат о постоянстве КПД не только игнорирует всю специфику эволюции КПД реономных материалов с течением времени (которую, как доказано, способно качественно описывать ОС (1) с двумя ФП), но и радикально обрезает спектр возможного поведения кривых поперечного деформирования $\varepsilon_{\perp}(t)$: они не могут иметь ни точек экстремума, ни точек перегиба, ни перемен знака и должны быть пропорциональны кривым осевой деформации (возрастающим и выпуклым вверх). Пренебрежение объемной ползучестью хотя и не сужает диапазон возможных значений КПД (и диапазон его мгновенных и равновесных значений) и не лишает ОС (1) способности описывать смену знака КПД и поперечной деформации и немонотонность $\varepsilon_{\perp}(t)$, но все же заметно ограничивает эту способность, существенно обедняет спектр возможных типов изменения поперечной деформации и КПД и тем самым сужает область применимости модели: КПД (33) (в отличие от общего случая ОС (1) с учетом объемной ползучести) не может иметь точки экстремума и перегиба, участки убывания или выпуклости вниз и не может менять

знак с «плюса» на «минус», а поперечная деформация не может иметь точки минимума или точки перегиба (всегда выпукла вверх) и не может менять знак с «минуса» на «плюс». Для описания материалов, проявляющих подобные свойства (в интересующем диапазоне времен, деформаций и скоростей нагружения), вообще говоря, нельзя использовать предположения об упругом изменении объема, о несжимаемости или о постоянстве коэффициента Пуассона.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-01146_a).

Библиографический список

1. Ильющин А. А., Победря Б. Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. Москвитин В. В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе)*. М.: Наука, 1972. 328 с.
3. Cristensen R. M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. New York: Academic Press, 1971. xii+364 pp. doi: 10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7.
4. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
5. Айнбиндер С. Б., Тюнина Э. Л., Цируле К. И. *Свойства полимеров в различных напряженных состояниях*. М.: Химия, 1981. 232 с.
6. Гольдман А. Я. *Объемная деформация пластмасс*. Л.: Машиностроение, 1984. 232 с.
7. Гольдман А. Я. *Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов*. Л.: Химия, 1988. 272 с.
8. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin: Springer-Verlag, 1989. xxv+769 pp. doi: 10.1007/978-3-642-73602-5.
9. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. xvi+461 pp. doi: 10.1017/CB09780511626722.
10. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York: Dover Publ., 2012. 384 pp.
11. Bergström J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. San Diego: William Andrew, 2015. xiv+509 pp. doi: 10.1016/C2013-0-15493-1.
12. Брехова В. Д. Исследование коэффициента Пуассона при сжатии некоторых кристаллических полимеров постоянной нагрузкой // *Механика полимеров*, 1965. № 4. С. 43–46.
13. Дзене И. Я., Путанс А. В. Коэффициент Пуассона при одномерной ползучести полиэтилена // *Механика полимеров*, 1967. № 5. С. 947–949.
14. Дзене И. Я., Крегерс А. Ф., Вилкс У. К. Особенности процесса деформирования при ползучести и повторной ползучести полимеров в условиях одноосного растяжения. Часть 1 // *Механика полимеров*, 1974. № 3. С. 399–405.
15. Щербак В. В., Гольдман А. Я. Объемные изменения дисперсно наполненных композитов при испытании в условиях ползучести // *Механ. композит. матер.*, 1982. № 3. С. 549–552.
16. Калинин А. Е., Вахрушев А. В. О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов // *Механ. композит. матер.*, 1985. № 2. С. 351–354.

17. Naqui S. I., Robinson I. M. Tensile dilatometric studies of deformation in polymeric materials and their composites // *J. Mater. Sci.*, 1993. vol. 28, no. 6. pp. 1421–1429. doi: 10.1007/BF00363333.
18. Özüpek S., Becker E. B. Constitutive equations for solid propellants // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1997. vol. 119, no. 2. pp. 125–132. doi: 10.1115/1.2805983.
19. Tschoegl N. W. Time dependence in material properties: An overview // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 1997. vol. 1, no. 1. pp. 3–31. doi: 10.1023/A:1009748023394.
20. Okoli O. I., Smith G. F. The effect of strain rate and fibre content on the Poisson's ratio of glass/epoxy composites // *Composite Structures*, 2000. vol. 48, no. 1–3. pp. 157–161. doi: 10.1016/S0263-8223(99)00089-6.
21. Hilton H. H. Implications and constraints of time-independent Poisson's ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity // *J. Elasticity*, 2001. vol. 63, no. 3. pp. 221–251. doi: 10.1023/A:1014457613863.
22. Tschoegl N. W., Knauss W. G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – A critical review // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2002. vol. 6, no. 1. pp. 3–51. doi: 10.1023/A:1014411503170.
23. Arzoumanidis G. A., Liechti K. M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003. vol. 7, no. 3. pp. 209–250. doi: 10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13.
24. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers // *Int. J. Plasticity*, 2003. vol. 19, no. 7. pp. 1069–1095. doi: 10.1016/S0749-6419(03)00002-0.
25. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests // *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004. vol. 91, no. 3. pp. 1784–1791. doi: 10.1002/app.13313.
26. Ломакин Е. В. Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Физ. мезомех.*, 2007. Т. 10, № 5. С. 41–52.
27. Pandini S, Pegoretti A. Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins // *Polym. Eng. Sci.*, 2008. vol. 48, no. 7. pp. 1434–1441. doi: 10.1002/pen.21060.
28. O'Brien D. J., Sottos N. R., White S. R. Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy // *Exp. Mech.*, 2007. vol. 47, no. 2. pp. 237–249. doi: 10.1007/s11340-006-9013-9.
29. Быков Д. Л., Пелешко В. А. Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения в различных баротермических условиях // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 6. С. 40–65.
30. Grassia L., D'Amore A., Simon S. L. On the viscoelastic Poisson's ratio in amorphous polymers // *J. Rheology*, 2010. vol. 54, no. 5. pp. 1009–1022. doi: 10.1122/1.3473811.
31. Shekhar H., Sahasrabudhe A. D. Longitudinal strain dependent variation of Poisson's ratio for HTPB based solid rocket propellants in uni-axial tensile testing // *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2011. vol. 36, no. 6. pp. 558–563. doi: 10.1002/prep.200900079.
32. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R. W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011. vol. 15, no. 1. pp. 15–28. doi: 10.1007/s11043-010-9121-x.
33. Emad K., Grasley Z. C., Masad E. Viscoelastic Poisson's ratio of asphalt mixtures // *Int. J. Geomechanics*, 2011. vol. 13, no. 2. pp. 162–169. doi: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000199.
34. Guo J. X., Luigi G., Simon S. L. Bulk and shear rheology of a symmetric three-arm star polystyrene // *J. Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2012. vol. 50, no. 17. pp. 1233–1244. doi: 10.1002/polb.23113.
35. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers — Experimental characterization, formulation and implementation of a material model // *Mech. Mater.*, 2012. vol. 52. pp. 40–57. doi: 10.1016/j.mechmat.2012.04.011.

36. Кожевникова М. Е. Характер изменения границы зоны пластичности и коэффициента Пуассона в зависимости от пластического разрыхления // *Физ. мезомех.*, 2012. Т. 15, № 6. С. 59–66.
37. Cui H. R., Tang G. J., Shen Z. B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method // *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2016. vol. 41, no. 5. pp. 835–843. doi: 10.1002/prep.201500313.
38. Aurangzeb Q., Ozer H., Al-Qadi I. L., Hilton H. H. Viscoelastic and Poisson's ratio characterization of asphalt materials: Critical review and numerical simulations // *Mater. Struct.*, 2017. vol. 50, no. 1, 49. doi: 10.1617/s11527-016-0881-x.
39. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio // *Science*, 1987. vol. 235, no. 4792. pp. 1038–1040. doi: 10.1126/science.235.4792.1038.
40. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials // *J. Mater. Sci.*, 1988. vol. 23, no. 12. pp. 4406–4414. doi: 10.1007/BF00551939.
41. Caddock B. D., Evans K. E. Microporous materials with negative Poisson's ratios. I: Microstructure and mechanical properties // *J. Physics D: Applied Physics*, 1989. vol. 22, no. 12. pp. 1877–1882. doi: 10.1088/0022-3727/22/12/012.
42. Берлин Ал. Ал., Ротенбург Л., Басэрт Р. Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел // *Высокомолек. соед. А*, 1992. Т. 34, № 7. С. 6–32.
43. Milton G. W. Composite materials with Poisson's ratios close to -1 // *J. Mech. Phys. Solids*, 1992. vol. 40, no. 5. pp. 1105–1137. doi: 10.1016/0022-5096(92)90063-8.
44. Alderson K. L., Evans K. E. The fabrication of microporous polyethylene having negative Poisson's ratio // *Polymer*, 1992. vol. 33, no. 20. pp. 4435–4438. doi: 10.1016/0032-3861(92)90294-7.
45. Lakes R. S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams // *J. Compos. Mater.*, 1993. vol. 27, no. 12. pp. 1193–1202. doi: 10.1177/002199839302701203.
46. Chan N., Evans K. E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams // *J. Cell. Plastics*, 1998. vol. 34, no. 3. pp. 231–260. doi: 10.1177/0021955X9803400304.
47. Chan N., Evans K. E. The mechanical properties of conventional and auxetic foams. Part 1: Compression and tension // *J. Cell. Plastics*, 1999. vol. 35, no. 2. pp. 130–165. doi: 10.1177/0021955X9903500204.
48. Alderson K. L., Fitzgerald A., Evans K. E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene // *J. Mater. Sci.*, 2000. vol. 35, no. 16. pp. 4039–4047. doi: 10.1023/A:1004830103411.
49. Конек Д. А., Войцеховский К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (Обзор) // *Мех. композ. матер. констр.*, 2004. Т. 10, № 1. С. 35–69.
50. Liu Y., Hu H. A review on auxetic structures and polymeric materials // *Sci. Res. Essays*, 2010. vol. 5, no. 10. pp. 1052–1063, <http://hdl.handle.net/10397/27029>.
51. Greaves G. N., Greer A. L., Lakes R. S., Rouxel T. Poisson's ratio and modern materials // *Nature Materials*, 2011. vol. 10, no. 11. pp. 823–837. doi: 10.1038/nmat3134.
52. Huang C., Chen L. Negative Poisson's ratio in modern functional materials // *Advanced Materials*, 2016. vol. 28, no. 37. pp. 8079–8096. doi: 10.1002/adma.201601363.
53. Volokh K. Yu. On arterial fiber dispersion and auxetic effect // *J. Biomech.*, 2017. vol. 61. pp. 123–130. doi: 10.1016/j.jbiomech.2017.07.010.
54. van der Varst P. G. Th., Kortsmits W. G. Notes on the lateral contraction of linear isotropic viscoelastic materials // *Arch. Appl. Mech.*, 1992. vol. 62, no. 5. pp. 338–346. doi: 10.1007/BF00788641.
55. Hilton H. H., Sung Y. The significance of (an)isotropic viscoelastic Poisson ratio stress and time dependencies // *Int. J. Solids Structures*, 1998. vol. 35, no. 23. pp. 3081–3095. doi: 10.1016/S0020-7683(97)00357-0.
56. Lakes R. S., Wineman A. S. On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids // *J. Elasticity*, 2006. vol. 85, no. 1. pp. 45–63. doi: 10.1007/s10659-006-9070-4.

57. Abudushalamu A., Vandamme M., Torrenti J. M., Benoit M. Theoretical and practical differences between creep and relaxation Poisson's ratios in linear Viscoelasticity // *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2015. vol. 19, no. 4. pp. 537–555. doi: 10.1007/s11043-015-9277-5.
58. Hilton H. H. Elastic and viscoelastic Poisson's ratios: The theoretical mechanics perspective // *Mater. Sci. Appl.*, 2017. vol. 8, no. 4. pp. 291–332. doi: 10.4236/msa.2017.84021.
59. Айнбиндер С. Б., Алксне К. И., Тюнина Э. Л., Лака М. Г. *Свойства полимеров при высоких давлениях*. М.: Химия, 1973. 192 с.
60. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. Изменчивость коэффициента Пуассона для гексагональных кристаллов под давлением // *Труды МАИ*, 2016. № 87. С. 1–22.
61. Векилов Ю. Х., Красильников О. М., Луговской А. В. Упругие свойства твердых тел при высоких давлениях // *УФН*, 2015. Т. 185, № 11. С. 1215–1224. doi: 10.3367/UFNr.0185.201511f.1215.
62. Хохлов А. В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова // *Мех. композ. матер. констр.*, 2018. Т. 24, № 3. С. 407–436. doi: 10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407_436.07.
63. Хохлов А. В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости // *Проблемы прочности и пластичности*, 2015. Т. 77, № 2. С. 139–154. doi: 10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154.
64. Хохлов А. В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 65–95. doi: 10.14498/vsgtu1543.
65. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 326–361. doi: 10.14498/vsgtu1533.
66. Хохлов А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамр-деформировании и методики ее идентификации // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 3. С. 81–104. doi: 10.7868/S0572329918030108.
67. Хохлов А. В. Анализ возможностей описания влияния гидростатического давления на кривые ползучести при растяжении и коэффициент Пуассона реономных материалов в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 2. С. 304–340. doi: 10.14498/vsgtu1654.
68. Хохлов А. В. Асимптотика кривых ползучести, порождённых нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти // *Вестник Московского университета. Математика. Механика*, 2017. № 5. С. 26–31.
69. Хохлов А. В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гамр-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова // *Мех. композ. матер.*, 2018. Т. 54, № 4. С. 687–708.
70. Хохлов А. В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления // *Мех. композ. матер. констр.*, 2019. Т. 25, № 2. С. 259–280. doi: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09.
71. Хохлов А. В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 2. С. 29–47. doi: 10.1134/S0572329919020077.
72. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
73. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.

MSC: 74D05

Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory

A. V. Khokhlov

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

The Boltzmann–Volterra linear constitutive equation for isotropic non-aging viscoelastic materials is studied analytically in order to elucidate its abilities to provide a qualitative simulation of rheological effects related to different behavior types of lateral strain and the Poisson's ratio (i.e. lateral contraction ratio) observed in uni-axial tests under tension or compression at constant stress rate. The viscoelasticity equation is controlled by two material functions of a positive real argument (that is shear and bulk creep compliances); they are implied to be positive, differentiable, increasing and convex up functions. General properties of the volumetric, longitudinal and lateral strain-time curves, stress-strain curves and the Poisson's ratio evolution in time generated by the viscoelasticity relation (with an arbitrary shear and bulk creep functions) are examined, their dependence on stress rate and on qualitative characteristics of two creep functions are analyzed, conditions for their monotonicity and convexity or for existence of extrema, inflection points and sign changes are studied. Taking into account compressibility and volumetric creep (governed by a time-dependent bulk creep function) is proved to affect strongly the qualitative behavior of lateral strain and the Poisson's ratio. In particular, it is proved that the linear theory can reproduce increasing, decreasing or non-monotone and convex up or down dependencies of lateral strain and Poisson's ratio on time under tension or compression at constant stress rate, it can provide existence of minimum, maximum or inflection points and sign changes from minus to plus and vice versa. It is shown, that the Poisson's ratio at any moment of time is confined in the interval from -1 to 0.5 and the restriction on creep compliances providing negative values of the Poisson's ratio is derived. Criteria for the Poisson's ratio increase or decrease and for extrema existence are obtained. The analysis revealed the set of characteristic features of the theoretic volumetric, axial and lateral strain-time curves, stress-strain curves families

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khokhlov A. V. Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 671–704. doi: 10.14498/vsgtu1710 (In Russian).

Author's Details:

Andrew V. Khokhlov ✉ <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>
Cand. Techn. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Elasticity and Plasticity;
e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

and the Poisson's ratio dependence on time which are convenient to check in tensile tests at constant stress rates and should be employed as indicators of the linear viscoelasticity theory applicability (or non-applicability) for simulation of a material behavior before identification.

The specific properties of the two models are considered based on the assumption that the Poisson's ratio is time-independent or the assumption that bulk creep function is constant which neglects bulk creep and simulates purely elastic volumetric strain dependence on a mean stress. These assumptions reduce the number of material functions to the single one and one scalar parameter and are commonly (and very often) used for simplification of viscoelasticity problems solutions. A number of restrictions and additional applicability indicators are found for these models. In particular, it is proved that elastic volumetric deformation assumption does not cut the overall range of the Poisson's ratio values and does not demolish the Boltzmann–Volterra relation ability to describe non-monotonicity and sign changes of lateral strain and to produce negative values of the Poisson's ratio, but neglecting bulk creep restricts this ability significantly and reduces drastically the variety of possible behavior modes of lateral strain-time curves and the Poisson's ratio evolution and so contracts applicability field of the model. The model with constant bulk compliance generates only convex-up lateral strain-time curves which can not have minima or inflection points and can change sign from minus to plus only and the Poisson's ratio is increasing convex-up function of time (without any extrema or inflection points which are possible in general case) and can not change sign from positive to negative.

Keywords: viscoelasticity, volumetric creep, tensile tests at constant stress rates, non-monotone lateral strain-time curves, sign changes of lateral strain, lateral contraction ratio, non-monotone Poisson's ratio, negative Poisson's ratio, viscoelastic auxetics, evolution of auxetic behavior, indicators of linear range limits, identification.

Received: 7th June, 2019 / Revised: 17th October, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 28th November, 2019

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-01146_a).

References

1. Il'yushin A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkoupругostii* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 280 pp. (In Russian)
2. Moskvitin V. V. *Soprotivlenie viazkoupругikh materialov* [Strength of Viscoelastic Materials]. Moscow, Nauka, 1972, 328 pp. (In Russian)
3. Cristensen R. M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. New York, Academic Press, 1971, xii+364 pp. doi: 10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7.
4. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1980, 388 pp.
5. Ainbinder S. B., Tiunina E. L., Tsirole K. I. *Svoistva polimerov v razlichnykh napriazhennykh sostoianiyakh* [Properties of Polymers in Different Stress State]. Moscow, Khimiya, 1981, 232 pp. (In Russian)

6. Gol'dman A. Ya. *Ob'emnaia deformatsiia plastmass* [Volumetric Deformation of Plastics]. Leningrad, Mashinostroenie, 1984, 232 pp. (In Russian)
7. Gol'dman A. Ya. *Prediction of the deformation properties of polymeric and composite materials*. Washington, DC, American Chemical Society, 1994, xiii+349 pp.
8. Tschoegl N. W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin, Springer-Verlag, 1989, xxv+769 pp. doi: 10.1007/978-3-642-73602-5.
9. Lakes R. S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, xvi+461 pp. doi: 10.1017/CB09780511626722.
10. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York, Dover Publ., 2012, 384 pp.
11. Bergström J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. San Diego, William Andrew, 2015, xiv+509 pp. doi: 10.1016/C2013-0-15493-1.
12. Brekhova V. D. Investigation of the Poisson's ratio of certain crystalline polymers under a constant compressive load, *Polymer Mechanics*, 1965, no. 4, pp. 23–24. doi: 10.1007/BF00858886.
13. Dzene I. Ya., Putans A. V. Poisson's ratio of polyethylene in one-dimensional creep, *Polymer Mechanics*, 1967, no. 5, pp. 626–627. doi: 10.1007/BF00859258.
14. Dzene I. Ya., Kregers A. F., Vilks U. K. Characteristic features of the deformation process on creep and secondary creep of polymers under conditions of uni-axial tension. Part I, *Polymer Mechanics*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 337–342. doi: 10.1007/BF00865585.
15. Shcherbak V. V., Gol'dman A. Ya. Volume changes in dispersely filled composites under creep tests, *Mekh. Kompozit. Mater.*, 1982, no. 3, pp. 549–552 (In Russian).
16. Kalinnikov A. E., Vakhrushev A. V. On a ratio between lateral and longitudinal strains in heteroresistant materials under uniaxial creep conditions, *Mekh. Kompozit. Mater.*, 1985, no. 2, pp. 351–354 (In Russian).
17. Naqui S. I., Robinson I. M. Tensile dilatometric studies of deformation in polymeric materials and their composites, *J. Mater. Sci.*, 1993, vol. 28, no. 6, pp. 1421–1429. doi: 10.1007/BF00363333.
18. Özüpek S., Becker E. B. Constitutive equations for solid propellants, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1997, vol. 119, no. 2, pp. 125–132. doi: 10.1115/1.2805983.
19. Tschoegl N. W. Time dependence in material properties: An overview, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 1997, vol. 1, no. 1, pp. 3–31. doi: 10.1023/A:1009748023394.
20. Okoli O. I., Smith G. F. The effect of strain rate and fibre content on the Poisson's ratio of glass/epoxy composites, *Composite Structures*, 2000, vol. 48, no. 1–3, pp. 157–161. doi: 10.1016/S0263-8223(99)00089-6.
21. Hilton H. H. Implications and constraints of time-independent Poisson's ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity, *J. Elasticity*, 2001, vol. 63, no. 3, pp. 221–251. doi: 10.1023/A:1014457613863.
22. Tschoegl N. W., Knauss W. G., Emri I. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – A critical review, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2002, vol. 6, no. 1, pp. 3–51. doi: 10.1023/A:1014411503170.
23. Arzoumanidis G. A., Liechti K. M. Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2003, vol. 7, no. 3, pp. 209–250. doi: 10.1023/B:MTDM.0000007357.18801.13.
24. Krempl E., Khan F. Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers, *Int. J. Plasticity*, 2003, vol. 19, no. 7, pp. 1069–1095. doi: 10.1016/S0749-6419(03)00002-0.
25. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests, *J. Appl. Polym. Sci.*, 2004, vol. 91, no. 3, pp. 1784–1791. doi: 10.1002/app.13313.
26. Lomakin E. V. Mechanics of media with stress-state dependent properties, *Phys. Mesomech.*, 2007, vol. 10, no. 5–6, pp. 255–264. doi: 10.1016/j.physme.2007.11.004.

27. Pandini S, Pegoretti A. Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins, *Polym. Eng. Sci.*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1434–1441. doi: 10.1002/pen.21060.
28. O'Brien D. J., Sottos N. R., White S. R. Cure-dependent viscoelastic Poisson's ratio of epoxy, *Exp. Mech.*, 2007, vol. 47, no. 2, pp. 237–249. doi: 10.1007/s11340-006-9013-9.
29. Bykov D. L., Peleshko V. A. Constitutive relations for strain and failure of filled polymer materials in dominant axial tension processes under various barothermal conditions, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 6, pp. 870–891. doi: 10.3103/S0025654409050070.
30. Grassia L., D'Amore A., Simon S. L. On the viscoelastic Poisson's ratio in amorphous polymers, *J. Rheology*, 2010, vol. 54, no. 5, pp. 1009–1022. doi: 10.1122/1.3473811.
31. Shekhar H., Sahasrabudhe A. D. Longitudinal strain dependent variation of Poisson's ratio for HTPB based solid rocket propellants in uni-axial tensile testing, *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2011, vol. 36, no. 6, pp. 558–563. doi: 10.1002/prop.200900079.
32. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R. W. Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2011, vol. 15, no. 1, pp. 15–28. doi: 10.1007/s11043-010-9121-x.
33. Emad K., Grasley Z. C., Masad E. Viscoelastic Poisson's ratio of asphalt mixtures, *Int. J. Geomechanics*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 162–169. doi: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000199.
34. Guo J. X., Luigi G., Simon S. L. Bulk and shear rheology of a symmetric three-arm star polystyrene, *J. Polymer Science. Part B: Polymer Physics*, 2012, vol. 50, no. 17, pp. 1233–1244. doi: 10.1002/polb.23113.
35. Kästner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. Inelastic material behavior of polymers — Experimental characterization, formulation and implementation of a material model, *Mech. Mater.*, 2012, vol. 52, pp. 40–57. doi: 10.1016/j.mechmat.2012.04.011.
36. Kozhevnikova M. E. Plastic zone boundary and Poisson's ratio depending on plastic loosening, *Phys. Mesomech.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 162–169. doi: 10.1134/S1029959913020070.
37. Cui H. R., Tang G. J., Shen Z. B. Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method, *Propellants Explosives Pyrotechnics*, 2016, vol. 41, no. 5, pp. 835–843. doi: 10.1002/prop.201500313.
38. Aurangzeb Q., Ozer H., Al-Qadi I. L., Hilton H. H. Viscoelastic and Poisson's ratio characterization of asphalt materials: Critical review and numerical simulations, *Mater. Struct.*, 2017, vol. 50, no. 1, 49. doi: 10.1617/s11527-016-0881-x.
39. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio, *Science*, 1987, vol. 235, no. 4792, pp. 1038–1040. doi: 10.1126/science.235.4792.1038.
40. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials, *J. Mater. Sci.*, 1988, vol. 23, no. 12, pp. 4406–4414. doi: 10.1007/BF00551939.
41. Caddock B. D., Evans K. E. Microporous materials with negative Poisson's ratios. I: Microstructure and mechanical properties, *J. Physics D: Applied Physics*, 1989, vol. 22, no. 12, pp. 1877–1882. doi: 10.1088/0022-3727/22/12/012.
42. Berlin Al. Al., Rotenburg L., Basert R. Specific features of deformation of non-ordered polymeric and non-polymeric solids, *Vysokomolek. Soed. A*, 1992, vol. 34, no. 7, pp. 6–32 (In Russian).
43. Milton G. W. Composite materials with Poisson's ratios close to -1 , *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, vol. 40, no. 5, pp. 1105–1137. doi: 10.1016/0022-5096(92)90063-8.
44. Alderson K. L., Evans K. E. The fabrication of microporous polyethylene having negative Poisson's ratio, *Polymer*, 1992, vol. 33, no. 20, pp. 4435–4438. doi: 10.1016/0032-3861(92)90294-7.
45. Lakes R. S., Elms K. Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams, *J. Compos. Mater.*, 1993, vol. 27, no. 12, pp. 1193–1202. doi: 10.1177/002199839302701203.
46. Chan N., Evans K. E. Indentation resilience of conventional and auxetic foams, *J. Cell. Plastics*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 231–260. doi: 10.1177/0021955X9803400304.

47. Chan N., Evans K. E. The mechanical properties of conventional and auxetic foams. Part 1: Compression and tension, *J. Cell. Plastics*, 1999, vol. 35, no. 2, pp. 130–165. doi: 10.1177/0021955X9903500204.
48. Alderson K. L., Fitzgerald A., Evans K. E. The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene, *J. Mater. Sci.*, 2000, vol. 35, no. 16, pp. 4039–4047. doi: 10.1023/A:1004830103411.
49. Konek D. A., Voitsekhovski K. V., Pleskachevsky Yu. M., Shil'ko S. V. Materials with negative Poisson's ratio. A review, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2004, vol. 10, no. 1, pp. 35–69 (In Russian).
50. Liu Y., Hu H. A review on auxetic structures and polymeric materials, *Sci. Res. Essays*, 2010, vol. 5, no. 10, pp. 1052–1063, <http://hdl.handle.net/10397/27029>.
51. Greaves G. N., Greer A. L., Lakes R. S., Rouxel T. Poisson's ratio and modern materials, *Nature Materials*, 2011, vol. 10, no. 11, pp. 823–837. doi: 10.1038/nmat3134.
52. Huang C., Chen L. Negative Poisson's ratio in modern functional materials, *Advanced Materials*, 2016, vol. 28, no. 37, pp. 8079–8096. doi: 10.1002/adma.201601363.
53. Volokh K. Yu. On arterial fiber dispersion and auxetic effect, *J. Biomech.*, 2017, vol. 61, pp. 123–130. doi: 10.1016/j.jbiomech.2017.07.010.
54. van der Varst P. G. Th., Kortsmits W. G. Notes on the lateral contraction of linear isotropic viscoelastic materials, *Arch. Appl. Mech.*, 1992, vol. 62, no. 5, pp. 338–346. doi: 10.1007/BF00788641.
55. Hilton H. H., Sung Y. The significance of (an)isotropic viscoelastic Poisson ratio stress and time dependencies, *Int. J. Solids Structures*, 1998, vol. 35, no. 23, pp. 3081–3095. doi: 10.1016/S0020-7683(97)00357-0.
56. Lakes R. S., Wineman A. S. On Poisson's ratio in linearly viscoelastic solids, *J. Elasticity*, 2006, vol. 85, no. 1, pp. 45–63. doi: 10.1007/s10659-006-9070-4.
57. Abudushalamu A., Vandamme M., Torrenti J. M., Benoit M. Theoretical and practical differences between creep and relaxation Poisson's ratios in linear Viscoelasticity, *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2015, vol. 19, no. 4, pp. 537–555. doi: 10.1007/s11043-015-9277-5.
58. Hilton H. H. Elastic and viscoelastic Poisson's ratios: The theoretical mechanics perspective, *Mater. Sci. Appl.*, 2017, vol. 8, no. 4, pp. 291–332. doi: 10.4236/msa.2017.84021.
59. Ainbinder S. B., Alksne K. I., Tiunina E. L., Laka M. G. *Svoistva polimerov pri vysokikh davleniakh [Properties of Polymers under High Pressure]*. Moscow, Khimiya, 1973, 192 pp. (In Russian)
60. Gol'dshtein R. V., Gorodtsov V. A., Lisovenko D. S. Variability of Poisson's ratio for hexagonal crystals under pressure, *Trudy MAI*, 2016, vol. 87, pp. 1–22 (In Russian).
61. Vekilov Yu. Kh., Krasilnikov O. M., Lugovskoy A. V. Elastic properties of solids at high pressure, *Phys. Usp.*, 2015, vol. 58, no. 11, pp. 1106–1114. doi: 10.3367/UFNe.0185.201511f.1215.
62. Khokhlov A. V. Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 407–436 (In Russian). doi: 10.33113/mkmk.ras.2018.24.03.407_436.07.
63. Khokhlov A. V. Specific features of stress-strain curves at constant stress rate or strain rate yielding from linear viscoelasticity, *Problems of Strength and Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 2, pp. 139–154 (In Russian). doi: 10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154.
64. Khokhlov A. V. Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2018, vol. 22, no. 1, pp. 65–95 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1543.
65. Khokhlov A. V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326–361 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1533.

66. Khokhlov A. V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 307–328. doi: 10.3103/S0025654418070105.
67. Khokhlov A. V. Analysis of the linear viscoelasticity theory capabilities to simulate hydrostatic pressure influence on creep curves and lateral contraction ratio of rheonomous materials, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 304–340 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1654.
68. Khokhlov A. V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2017, vol. 72, no. 5, pp. 103–107. doi: 10.3103/S0027133017050016.
69. Khokhlov A. V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory, *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 473–486. doi: 10.1007/s11029-018-9757-1.
70. Khokhlov A. V. Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure, *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 259–280 (In Russian). doi: 10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09.
71. Khokhlov A. V. Properties of stress-strain curves family generated by the Rabotnov non-linear relation for viscoelastic materials, *Mech. Solids*, 2019, no. 2, pp. 29–47 (In Russian). doi: 10.1134/S0572329919020077.
72. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696 doi: 10.2478/s13540-014-0193-1; original paper: Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 1, pp. 53–62 (In Russian).
73. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.



Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:57

Моделирование влияния экстраклеточного информационного поля в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли

*О. И. Артемова, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов*Пензенский государственный университет,
Россия, 440026, Пенза, ул. Красная, 40.

Аннотация

Рассматривается динамическая нелинейная 2D-модель влияния экстраклеточного информационного поля в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли. В качестве основных внешних параметров, формирующих информационный метаболический потенциал, рассматриваются физические свойства экстраклеточной матрицы, доступность питательных веществ, концентрация кислорода, pH экстраклеточной матрицы, взаимодействие со стромальными клетками и др. В рамках построенной аналитической 2D-модели показано, что микровзаимодействие через экстраклеточную матрицу возникающих раковых клеток посредством динамического информационного метаболического профиля существенно влияет на динамику рисков формирования и развития раковой опухоли. Показано, что в зависимости от структуры 2D-информационного метаболического профиля возникает ряд характерных нелинейных особенностей типа 2D-бифуркаций, биений, хаотизации, накладываемых на интегральные динамические кривые, напоминающие по виду функцию Гомпертца и описывающие вероятные

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Артемова О. И., Кревчик В. Д., Семенов М. Б. Моделирование влияния экстраклеточного информационного поля в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 705–723. doi: 10.14498/vsgtu1701.

Сведения об авторах

Ольга Игоревна Артемова  <https://orcid.org/0000-0003-4555-2792>
ассистент; каф. акушерства и гинекологии; Медицинский институт;
e-mail: Artyomovaolg@gmail.com

Владимир Дмитриевич Кревчик  <https://orcid.org/0000-0002-3522-8326>
заслуженный деятель науки РФ; доктор физико-математических наук, профессор; декан; факультет приборостроения, информационных технологий и электроники; Политехнический институт; e-mail: physics@pnzgu.ru

Михаил Борисович Семенов  <https://orcid.org/0000-0003-4348-0000>
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой физики; факультет приборостроения, информационных технологий и электроники; Политехнический институт; e-mail: Misha29.02.1@gmail.com

риски формирования и развития раковой опухоли. Проводится сравнение результатов рассматриваемой аналитической модели с результатами моделирования других авторов по изучению хаотической и бифуркационной динамики в системе «опухоль – иммунный кластер – вирус». В результате проведенных количественных оценок в рамках предложенной теоретической модели сформулирован способ оценки рисков развития злокачественных новообразований, в котором в качестве факторов риска предложено выделять субфебрильную температуру, уровень каспаз, кольпоскопический индекс Рейда, определяющих порог вероятности формирования злокачественных новообразований.

Ключевые слова: экстраклеточное информационное поле, бифуркационная и хаотическая динамика, модели формирования и развития раковой опухоли.

Получение: 8 мая 2019 г. / Исправление: 5 ноября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 5 декабря 2019 г.

Введение. Проблема оценки рисков возникновения и последующей динамики развития раковых опухолей различных типов по своей сложности вполне сравнима со сверхзадачей в биологии — решением проблемы морфогенеза. Среди существующих подходов к решению данной актуальной проблемы в последние годы начинает выделяться оценка влияния экстраклеточной матрицы и факторов микроокружения возникающих взаимодействующих раковых клеток на последующие риски формирования и динамики развития раковой опухоли [1–11]. При этом существенное влияние на эту динамику может оказать информационный потенциал, обуславливающий взаимодействие раковых клеток при изменении таких «внешних» параметров, как физические свойства экстраклеточной матрицы [1], доступность питательных веществ, концентрация кислорода, рН экстраклеточной матрицы, взаимодействие со стромальными клетками [1] и др.

В настоящей статье предпринята попытка ввести представление об информационном метаболическом потенциале (ИМП), который позволяет количественно определить вероятность возникновения и развития раковой опухоли с учетом подвижности раковых клеток в зависимости от перечисленных внешних параметров.

Среди существующих математических моделей роста и прогрессии опухоли с учетом ее пролиферативной и пространственной гетерогенности [2, 3, 5–8, 9] выделяются эмпирические, структурные и кинетические модели роста, приводящие к динамическим интегральным кривым, напоминающим логистическую функцию или функцию Гомпертца.

Среди микромоделей рисков возникновения и развития опухоли начинают появляться модели бифуркационного анализа с учетом хаотической динамики, в частности для систем «опухоль – иммунный кластер – вирус» [2]. Но при этом в данных моделях практически не учитывается динамическое влияние ИМП в оценке влияния микроокружения на метаболизм и динамику развития, подвижность раковых клеток.

Целью данной работы является исследование влияния экстраклеточного информационного поля ИМП на антипараллельную и параллельную подвижность взаимодействующих раковых клеток в зависимости от внешних параметров экстраклеточной матрицы и параметров профиля ИМП в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли.

Предложенные теоретические параметры, такие как температура, параметр асимметрии метаболического потенциала и параметр, определяющий интенсивность взаимодействия раковых клеток, предлагается сопоставить с такими факторами риска формирования и развития раковой опухоли, как субфебрильная температура пациента, кольпоскопический индекс Рейда и уровень каспаз, что в свою очередь может позволить сформулировать способ оценки рисков развития злокачественных новообразований.

1. Описание модели. При построении динамической нелинейной 2D-модели влияния экстраклеточного информационного поля в динамике рисков формирования и развития раковой опухоли вводится понятие параллельных и антипараллельных координат информационных метаболических путей роста [1, 11]. Аналитически вводится 2D-потенциал экстраклеточного информационного поля для случаев параллельного и антипараллельного 2D-переноса пары раковых клеток с учетом их взаимодействия через микроокружение. Направление этих координат коррелирует с наличием (или отсутствием в случае антипараллельного переноса) характерных градиентов информационного поля [1], связанных с наличием клеточных пищевых ресурсов и т.д.

В качестве одного из существенных внешних параметров, влияющих на динамику топологии 2D-потенциала экстраклеточного информационного поля, рассматривается фактор взаимодействия со стромальными клетками из-за конкуренции за ограниченные пищевые ресурсы и т.д.

В результате подобного взаимодействия в микроокружение вбрасываются секреты [1], влияющие на поведение стромальных клеток с формированием условий, подавляющих или ускоряющих возможное развитие опухоли.

Среди модельных параметров экстраклеточной матрицы, обеспечивающих условия взаимодействия раковых клеток, вводятся колебательные моды экстраклеточной матрицы, обуславливающие ее физические свойства, коэффициенты взаимодействия с этими колебательными модами в линейном приближении, а также параметр квазиравновесной температуры экстраклеточной матрицы, влияющий на динамику рисков формирования и развития раковой опухоли.

При моделировании параллельного 2D-переноса в экстраклеточном информационном поле рассматриваются два типа экстраклеточной матрицы, отличающихся знаком коэффициента взаимодействия раковых клеток, что существенно влияет на динамику рисков возникновения и формирования раковой опухоли.

2. Хаотизация подвижности раковых клеток в 2D-модели антипараллельного переноса в экстраклеточном информационном поле. Рассматриваются особенности 2D-антипараллельной динамики подвижности раковых клеток в экстраклеточном информационном поле (ИМП) с учетом режимов неустойчивых бифуркаций и хаотизации, влияющих на динамику рисков возникновения и формирования раковой опухоли.

Двухклеточную подвижность в синхронном и асинхронном режимах предлагается рассмотреть в рамках теории 2D-подбарьерного переноса в одноинстантонном приближении с учетом достаточно успешной адаптации к системам типа порфиринов. Использование такой модели оправдано для случая 2D-антипараллельного протонного переноса с учетом неустойчивой точки бифуркации на температурной зависимости для этих соединений [12]. Далее определяется критическая температура T_c , соответствующая бифуркации подбарьерной траектории. Также исследуется эффект влияния локальной моды экстраклеточной матрицы-термостата на вероятность двумерного переноса

са в ИМП. При определенных значениях параметров оказывается важным вырождение траекторий антипараллельного переноса. Таким образом, следует учитывать эффект каскада бифуркаций, т.е. появление четырех, шести, двенадцати и т.д. пар траекторий.

Для случая параллельного переноса клеток бифуркация напоминает фазовый переход первого рода, тогда как для случая антипараллельного клеточного переноса бифуркационное поведение напоминает фазовый переход второго рода.

Следует отметить, что предложенная модель позволяет объяснить экспериментальные данные по квантовым флуктуациям в двухпротонном туннелировании в порфиринах вблизи критической температуры, а также предсказать вероятные особенности рисков формирования и развития раковой опухоли в определенных условиях и при определенном профиле ИМП.

Рассмотрим две клетки, которые осуществляют перенос по метаболическим информационным путям роста в независимых двухъямных потенциалах $U(q_1)$ и $U(q_2)$, которые в обезразмеренном виде представляются так:

$$\tilde{U}(q_i) = \frac{1}{2}\omega^2(q_i + a)^2\theta(-q_i) + \left[-\Delta I + \frac{1}{2}\omega^2(q_i - b)^2\right]\theta(q_i), \quad i = 1, 2.$$

Здесь параметры a и b определяют положения минимумов ИМП вдоль «координаты реакции» каждой из двух взаимодействующих клеток¹, сумма $a + b$ определяет длину связи в соответствующем фрагменте экстраклеточной матрицы, $\Delta I = \frac{1}{2}\omega^2(b^2 - a^2)$ является смещением (параметром асимметрии ИМП), $\theta(q_i)$ — ступенчатая функция, а ω — частота. Масса клетки входит в определение q (формально мы полагаем массу равной 1).

Взаимодействие между двумя клетками рассматривается в «диполь-дипольном приближении»:

$$V_{\text{int}}(q_1, q_2) = -\frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2, \quad (1)$$

где α является положительной константой.

Для антипараллельного переноса двумерная поверхность ИМП с учетом члена взаимодействия клеток может быть определена так:

$$\begin{aligned} U_a(q_1, q_2) &= \frac{2\tilde{U}_a(q_1, q_2)}{\omega^2} = \\ &= (q_1 + a)^2\theta(-q_1) + [-(b^2 - a^2) + (q_1 - b)^2]\theta(q_1) + (q_2 - a)^2\theta(q_2) + \\ &\quad + [-(b^2 - a^2) + (q_2 + b)^2]\theta(-q_2) - \frac{\alpha^{*2}}{2}(q_1 - q_2)^2. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{U}_a(q_1, q_2)$ — обезразмеренная функция ИМП; $\alpha^* = 2\alpha/\omega^2$ — безразмерный параметр, $\alpha^* < 1$; q_1 и q_2 — координаты информационных метаболических путей роста клеток. Потенциал (2) изображен на рис. 1.

¹Отметим, что «реальные» значения параметров a и b в модель не закладывались, а в подписи к рис. 1 приводятся «относительные» единицы значений этих параметров. При численном решении системы уравнений (4) вместо этих двух «линейных» параметров использовался один обезразмеренный параметр $b^* = b/a$, что, по существу, является параметром асимметрии ИМП.

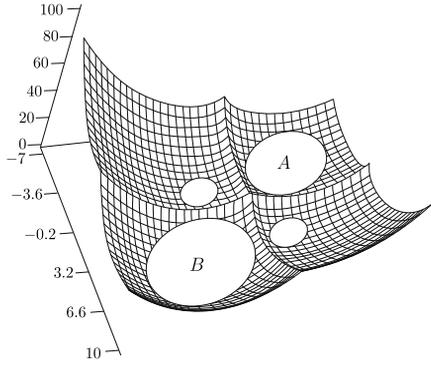


Рис. 1. Асимметричная поверхность ИМП (2) для случая антипараллельного клеточного переноса ($a = 2$, $b = 2.3$, $\alpha^* = 0.1$) [12]; A и B обозначают исходное и конечное состояния взаимодействующих клеток [12]

[Figure 1. The asymmetric surface of the informational metabolic potential (2) for the case of antiparallel cell transfer ($a = 2$, $b = 2.3$, $\alpha^* = 0.1$) [12]; A and B denote the initial and final states of interacting cells]

При антипараллельном переносе двух клеток (см. формулу (2) для поверхности ИМП) инстантонное действие, которое зависит от двух параметров ε и τ (определяющих моменты времени прохождения клетками вершин ИМП по параллельным координатам метаболических путей роста), в случае пренебрежения взаимодействием с экстраклеточной матрицей вычисляется с помощью выражения

$$S = -\frac{\omega\tau(b^2 - a^2)}{1 - \alpha^*} - \frac{\omega(a + b)^2}{2} \left\{ |\varepsilon| \left(1 - \frac{1}{1 - \alpha^*} \right) + \frac{\text{sh}(|\varepsilon|\sqrt{1 - \alpha^*})}{(1 - \alpha^*)^{3/2}} - \text{sh}|\varepsilon| + \right. \\ \left. + \frac{\text{ch}(\varepsilon\sqrt{1 - \alpha^*} + 1)}{(1 - \alpha^*)^{3/2}} [\text{sh}(\beta^*\sqrt{1 - \alpha^*})]^{-1} [\text{ch}((\beta^* - \tau)\sqrt{1 - \alpha^*}) - \right. \\ \left. - \text{ch}(\beta^*\sqrt{1 - \alpha^*})] + \frac{\text{ch}\varepsilon - 1}{\text{sh}\beta^*} [\text{ch}(\beta^* - \tau) + \text{ch}\beta^*] \right\}. \quad (3)$$

Здесь $\beta^* = \hbar\omega/(2kT) = \omega\beta/2$, β – обратная температура экстраклеточной матрицы. Параметры ε и τ находятся из следующей системы уравнений:

$$-\text{sh}\varepsilon[\text{ch}\beta^* + \text{ch}\tau\text{ch}\beta^* - \text{sh}\tau] + \frac{1}{1 - \alpha^*} \text{sh}(\varepsilon\sqrt{1 - \alpha^*}) \times \\ \times [\text{ch}(\beta^*\sqrt{1 - \alpha^*}) - \text{ch}(\tau\sqrt{1 - \alpha^*})\text{ch}(\beta^*\sqrt{1 - \alpha^*}) + \text{sh}(\tau\sqrt{1 - \alpha^*})] = 0, \\ -1 - \frac{4}{(1 + b^*)(1 - \alpha^*)} + \frac{1}{1 - \alpha^*} + (\text{ch}\varepsilon - 1)(\text{sh}\tau\text{cth}\beta^* - \text{ch}\tau) + \text{ch}\varepsilon + \quad (4) \\ + \frac{1}{1 - \alpha^*} \left\{ [\text{ch}(\varepsilon\sqrt{1 - \alpha^*}) + 1][\text{sh}(\tau\sqrt{1 - \alpha^*})\text{cth}(\beta^*\sqrt{1 - \alpha^*}) - \right. \\ \left. - \text{ch}(\tau\sqrt{1 - \alpha^*})] - \text{ch}(\varepsilon\sqrt{1 - \alpha^*}) \right\} = 0.$$

Для $\omega\beta \gg 1$ (предел сравнительно низких температур экстраклеточной матрицы) решение системы уравнений (4) может быть найдено с использованием теории возмущений (для малых параметров ε) при заданных величинах

параметров асимметрии ИМП $-(b-a)/(b+a)$ и α^* . Для $\varepsilon = 0$ действие (3) примет вид

$$S = \frac{\omega(b^2 - a^2)}{(1 - \alpha^*)^{3/2}} \operatorname{arch} \left[\frac{b-a}{b+a} \operatorname{sh} \frac{\omega\beta\sqrt{1-\alpha^*}}{2} \right] - \frac{\omega^2\beta(a+b)^2}{2(1-\alpha^2)} + \frac{\omega(b+a)^2}{(1-\alpha^*)^{3/2}} \left[\operatorname{cth} \frac{\omega\beta\sqrt{1-\alpha^*}}{2} - \left(\operatorname{sh}^{-2} \frac{\omega\beta\sqrt{1-\alpha^*}}{2} + \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2} \right)^{1/2} \right].$$

Так же как и для случая параллельного переноса при $\beta > \beta_c$ (β_c — критическое значение параметра β , соответствующее точке бифуркации), происходит смена режимов клеточной подвижности — с синхронного переноса (с одной экстремальной траекторией) на асинхронный (которому отвечают две отщепленные траектории). Однако в отличие от параллельного переноса, данное отщепление происходит для любых значений параметров ИМП. При условии $\beta > \beta_c$ имеем $S|_{\varepsilon \neq 0} > S|_{\varepsilon=0}$. Тогда величина $S|_{\varepsilon=0}$ будет определять скорость переноса (или вероятного риска перспективного развития опухоли). А для $\beta < \beta_c$ будем иметь преобразование двух вырожденных отщепленных траекторий в единичную ($q_1 = -q_2$), которая соответствует синхронному антипараллельному переносу клеток.

Для случая одноклеточного переноса существует только одна траектория, которая минимизирует действие. Для переноса двух клеток, взаимодействующих друг с другом, существует два типа подбарьерных траекторий. А точнее, в зависимости от величины параметра β , основной вклад в инстантонное действие определяется либо двукратно вырожденной, либо единичной траекториями. Также отметим, что при параллельном переносе для $\beta > \beta_c$ перенос оказывается асинхронным ($\tau_1 \neq \tau_2$), то есть клетки проходят верхушки барьера не одновременно. Расщепления единичной клеточной траектории ($q_1 = q_2$) не происходит для малых значений параметров взаимодействия α^* и для температур экстраклеточной матрицы, которые удовлетворяют условию $\beta < \beta_c$. То есть клетки проходят верхушки барьера по своим координатам информационных метаболических путей роста ИМП в один момент времени ($\tau_1 = \tau_2$), и перенос оказывается синхронным.

Тип взаимодействия, задаваемый соотношениями (1), (2), оказывается таким, что не влияет на движение вдоль координаты центра масс клеток ($q_1 = q_2$). По этой причине евклидово действие оказывается не зависящим от параметра взаимодействия, как для случая параллельного переноса. Численный анализ системы трансцендентных уравнений (4) выявил интересные особенности для переходной области между режимами переноса клеток, т.е. тонкую структуру вблизи первой бифуркационной точки для антипараллельного переноса. Результаты численного анализа представлены на рис. 2. Установлено, что в добавление к первой бифуркационной точке, характеризуемой двумя решениями (рис. 2, а), существуют дополнительные бифуркационные точки при более «низких» температурах экстраклеточной матрицы, т.е., например, 4 пары (рис. 2, б), 6 пар (рис. 2, в) и даже двенадцать пар дополнительных решений при $\beta^* = 19.2009$ ($\alpha^* = 0.05$) и т.д. Это явление походит на множественные бифуркации или *каскад бифуркаций*. Такой эффект напоминает один из сценариев перехода к хаосу.

Хотя синхронный режим оказывается предпочтительным, благодаря тому, что в этом случае действие принимает минимальное значение, в определенном диапазоне температур экстраклеточной матрицы эта величина действия оказывается сравнимой с теми значениями, что соответствуют каскад-

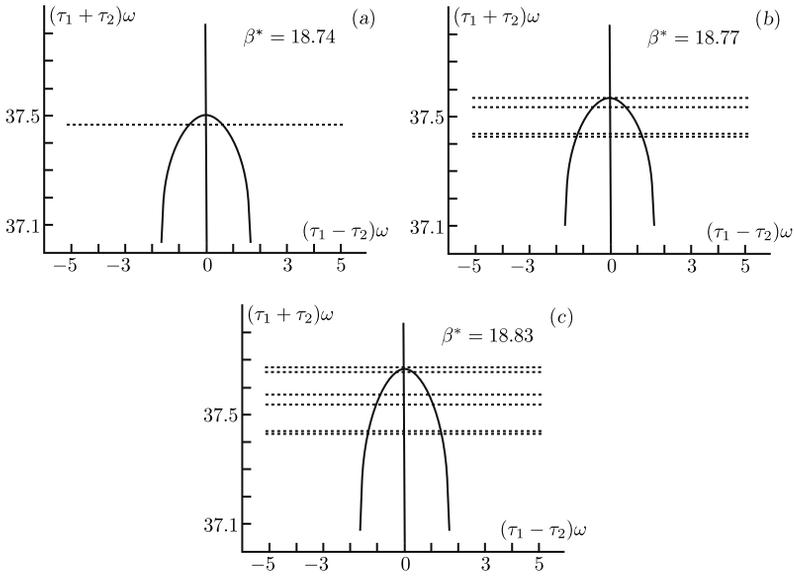


Рис. 2. Численное решение трансцендентных уравнений (4), отвечающее режиму каскада бифуркаций, или хаотизации [12]
 [Figure 2. Numerical solution of transcendental equations (4) corresponding to the regime of a cascade of bifurcations or randomization [12]]

ным решениям. В результате происходят флуктуации, или биения, нерегулярного характера в противоположность тому, что наблюдается для параллельного переноса. Антипараллельный 2D-клеточный перенос, таким образом, характеризуется неустойчивостью перехода от синхронного к асинхронному поведению. Такие неустойчивости напоминают непрерывный фазовый переход второго рода, тогда как при параллельном переносе раковых клеток бифуркационный режим напоминает ступенчатый процесс типа фазового перехода первого рода. Найдено, что зависимости для $\beta_c(\alpha)$ и $\alpha_c(\beta)$ в случае антипараллельного переноса имеют тот же самый характер, что и в случае параллельного переноса. Здесь нижний индекс «с» означает критическое значение параметра, соответствующего точке бифуркации.

Таким образом, выявлена достаточно сложная тонкая структура перехода для параллельного и антипараллельного переноса двух клеток с различными вырожденными подбарьерными траекториями, приводящими к биениям, каскадам бифуркаций.

Эффекты нарушения симметрии могут иметь место при сравнительно высоких температурах экстраклеточной матрицы, зависящих от частоты барьера ИМП. Например, для порфиринов критическая температура T_c составляет 200 К. Для раковых клеток она окажется заметно выше (до 310 К).

3. Режимы бифуркаций и биений подвижности раковых клеток в 2D-модели параллельного переноса в экстраклеточном информационном поле с учетом двух типов экстраклеточной матрицы. Рассматриваются особенности 2D-параллельной динамики в экстраклеточном информационном поле (ИМП) с учетом режимов устойчивых бифуркаций и биений двух типов, влияющих на динамику рисков возникновения и формирования раковой опухоли. Как и в предыдущем разделе, рассмотрим подвижность двух раковых клеток, которые осуществляют перенос по

параллельным координатам информационных метаболических путей роста ИМП q_1 и q_2 клеток.

Двумерная поверхность ИМП для случая параллельного клеточного переноса, ортонормированная на ω^2 , задается соотношением (см. рис. 3)

$$U_p(q_1, q_2) = \frac{2\tilde{U}_p(q_1, q_2)}{\omega^2} = (q_1 + a)^2\theta(-q_1) + [-(b^2 - a^2) + (q_1 - b)^2]\theta(q_1) + (q_2 + a^2)\theta(-q_2) + [-(b^2 - a^2) + (q_2 - b)^2]\theta(q_2) - \frac{\alpha^*}{2}(q_1 - q_2)^2, \quad (5)$$

где $\tilde{U}_p(q_1, q_2)$ — безразмерная функция ИМП; параметры a и b потенциала перенормируются во внешнем поле ИМП:

$$a = a_0 - \lambda/\omega_0^2, \quad b = b_0 + \lambda/\omega_0^2,$$

либо перенормируется безразмерный параметр $b^* = b/a$, который слабо нелинейно зависит от напряженности ИМП. Здесь a_0 и b_0 — параметры, конкретизирующие положения минимумов 2D ИМП, определяющего взаимодействие раковых клеток в отсутствие внешнего экстраклеточного поля ИМП; λ — параметр, определяющий напряженность ИМП, связанную с особенностями взаимодействия раковых и стромальных клеток.

Квазиклассическое (инстантонное) действие, которое с экспоненциальной точностью определяет вероятность 2D-параллельного клеточного переноса, рассчитывается по формуле

$$S = 2a(a+b)(\tau_1 + \tau_2)\omega^2 - \frac{1}{\beta}\omega^2(a+b)^2(\tau_1 + \tau_2)^2 - \frac{\omega^4(a+b)^2(\tau_1 - \tau_2)^2}{(\omega^2 - 2\alpha)\beta} - \frac{2\omega^4(a+b)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin^2 \nu_n \tau_1 + \sin^2 \nu_n \tau_2}{\nu_n^2(\nu_n^2 + \omega^2 + \zeta_n)} + \frac{(\sin \nu_n \tau_1 - \sin \nu_n \tau_2)^2}{\nu_n^2(\nu_n^2 + \omega^2 - 2\alpha)} \right]. \quad (6)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\varepsilon = \varepsilon^* \omega = (\tau_1 - \tau_2)\omega, \quad \tau = 2\tau^* \omega = (\tau_1 + \tau_2)\omega,$$

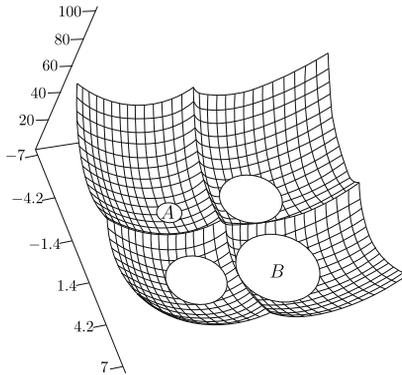


Рис. 3. Асимметричная поверхность ИМП (5) [12] для случая параллельного переноса (подвижности) раковых клеток; A и B обозначают исходное и конечное состояния клеток [Figure 3. The asymmetric surface of the informational metabolic potential (5) [12] for the case of parallel transfer (mobility) of cancer cells; A and B denote the initial and final state of the cells]

$$\beta^* = \beta\omega/2, \quad \alpha^* = 2\alpha/\omega^2, \quad b^* = b/a;$$

τ_1 и τ_2 — центры 2D-инстантона, т. е. моменты мнимого времени проскока параллельно перемещающимися клетками в поле ИМП вершины потенциального барьера ИМП (точки с нулевой координатой) вдоль соответствующей координаты информационных метаболических путей роста; ζ_n — коэффициенты Фурье при разложении «вязкого ядра» в квазиклассическом уравнении движения, описывающего процесс «диссипации» клетки в экстраклеточной матрице; $\nu_n = 2\pi n/\beta$ — мацубаровские частоты; β — обратная температура экстраклеточной матрицы.

В пределе слабой диссипации, когда взаимодействие с локальными колебательными модами экстраклеточной матрицы предполагается пренебрежимо малым, получим следующие результаты для вероятности 2D-параллельного клеточного переноса. В случае пренебрежения взаимодействием с экстраклеточной матрицей (т.е. при $\zeta_n = 0$) действие (6) как функция параметров ε и τ принимает вид

$$S = \frac{(a+b)^2\omega}{2} \left\{ \frac{4a\tau}{a+b} - \frac{\tau}{a+b} \left(1 + \frac{1}{1-\alpha^*} \right) + \frac{(\tau - |\varepsilon|)\alpha^*}{1-\alpha^*} + \text{cth } \beta^* - \right. \\ \left. - \text{sh}^{-1} \beta^* \left[\text{ch}(\beta^* - \tau) \text{ch } \varepsilon + \text{ch}(\beta^* - \tau) - \text{ch}(\beta^* - |\varepsilon|) \right] - \right. \\ \left. - (1 - \alpha^*)^{-3/2} \left(-\text{cth}(\beta\sqrt{1-\alpha^*}) + \text{sh}^{-1}(\beta\sqrt{1-\alpha^*}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \text{ch}[(\beta^* - \tau)\sqrt{1-\alpha^*}] [\text{ch}(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}) - 1] + \text{ch}[(\beta^* - |\varepsilon|)\sqrt{1-\alpha^*}] \right\} \right) \right\}. \quad (7)$$

Как только траектория найдена, уравнения $q_1(\tau_1) = 0$, $q_2(\tau_2) = 0$ могут быть представлены в следующей форме:

$$\text{sh } \varepsilon [\text{ch } \tau \text{cth } \beta^* - \text{sh } \tau - \text{cth } \beta^*] + \\ + \frac{1}{1-\alpha^*} \text{sh}(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}) [\text{ch}(\tau\sqrt{1-\alpha^*}) \text{cth}(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}) - \\ - \text{sh}(\tau\sqrt{1-\alpha^*}) + \text{cth}(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*})] = 0, \quad (8) \\ 3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} + \text{ch } \varepsilon [\text{sh } \tau \text{cth } \beta^* - \text{ch } \tau - 1] + \text{sh } \tau \text{cth } \beta^* - \text{ch } \tau + \\ + \frac{1}{1-\alpha^*} \text{ch}(\varepsilon\sqrt{1-\alpha^*}) [\text{sh}(\tau\sqrt{1-\alpha^*}) \text{cth}(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}) - \text{ch}(\tau\sqrt{1-\alpha^*}) + 1] - \\ - \frac{1}{1-\alpha^*} [\text{sh}(\tau\sqrt{1-\alpha^*}) \text{cth}(\beta^*\sqrt{1-\alpha^*}) - \text{ch}(\tau\sqrt{1-\alpha^*})] = 0.$$

Численное решение системы (8) позволяет выявить бифуркацию 2D-клеточных траекторий, т.е. при определенном значении обратной температуры β^* экстраклеточной матрицы либо параметра асимметрии ИМП, связанного с величиной напряженности приложенного поля ИМП $b^* = b/a$, либо коэффициента взаимодействия $\alpha^* = 2\alpha/\omega^2$ (где знак коэффициента взаимодействия раковых клеток α зависит, в частности, от типа и параметров экстраклеточной матрицы). Численный анализ системы (8) позволяет также выявить тонкую структуру перехода в окрестности точки бифуркации, а именно режим биений для параллельного переноса (подвижности) раковых клеток. В итоге вероятность 2D-параллельного клеточного переноса с экспоненциальной точностью определяется как $\Gamma = \exp(-S)$, где S задается выражением (7), с учетом решения системы (8).

Простые аналитические решения уравнений (8) получаются в частном случае [12], когда $\varepsilon = (\tau_1 - \tau_2)\omega = 0$ для любых β и $\alpha < \omega^2/2$:

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{\tau}{2\omega} = \frac{1}{2\omega} \operatorname{arch} \left[\frac{1 - b^*(\lambda)}{1 + b^*(\lambda)} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} \right] + \frac{\beta}{4}.$$

Однако полный их анализ требует громоздких численных вычислений.

При достаточно низких температурах ($\omega\beta \gg 1$) при $1 < b/a < 3$ и

$$\frac{b - a}{2(b + a)} \leq \frac{2\alpha}{\omega^2} < \alpha_c^* \equiv \frac{2(b - a)}{3b - a}$$

мы, наконец, с экспоненциальной точностью получим решение

$$\begin{aligned} \exp(-\tau\sqrt{1 - \alpha^*}) &\simeq \left[3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} \right] (1 - \alpha^*)^{1/(1-\sqrt{1-\alpha^*})} \times \\ &\times \left\{ 1 + (1 - \alpha^*)^{1/(1-\sqrt{1-\alpha^*})} \left[-\frac{1}{1-\alpha^*} + \left(3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} \right) (1 - \sqrt{1 - \alpha^*})^{-1} \right] \right\}^{-1}, \\ \exp(-\varepsilon) &\simeq \left[3 - \frac{4}{1+b^*} - \frac{1}{1-\alpha^*} \right] \exp(\tau\sqrt{1 - \alpha^*}) + \frac{1}{1-\alpha^*}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (9) справедливо при

$$\beta > \beta_c \equiv \frac{\tau\sqrt{1-\alpha^*}}{\omega}.$$

Согласно предлагаемой модели оценивается пороговая вероятность формирования раковой опухоли, при этом параметрам модели в соответствие могут быть поставлены реальные наблюдаемые в медицинской практике параметры (см. таблицу). При реализации критических значений параметров β_c , α_c^* , λ_c осуществляется переход через точку бифуркации с последующим лавинообразным ростом подвижности раковых клеток с вероятностью 0.7 (70 %).

Полученная зависимость вероятности 2D-параллельного клеточного переноса от напряженности поля ИМП с учетом влияния двух локальных колебательных мод экстраклеточной матрицы позволяет проанализировать режим 2D-клеточных бифуркаций (смена режима переноса (клеточной подвижности) с синхронного на асинхронный), а также биений в окрестности точки бифуркации. Так, на рис. 4 после режима синхронного параллельного клеточного переноса с двумя характерными пиками точка излома отвечает точке бифуркации, а последующие осцилляции — биениям.

Наряду с режимом биений с «провалами» на зависимости вероятности 2D-параллельного клеточного переноса от напряженности поля ИМП (см. рис. 4) при увеличении температуры экстраклеточной матрицы и при частотах колебательных локальных мод, значительно меньших характерных частот двухъямного ИМП, может иметь место режим биений с резонансной структурой (см. рис. 5), связанной с интерференцией различных каналов клеточного переноса.

В следующем разделе будут представлены результаты модели параллельного 2D-клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице при изменении условий клеточной конкуренции за источники питания. Также будет проведено сравнение результатов представленного модельного рассмотрения с результатами моделирования других авторов.

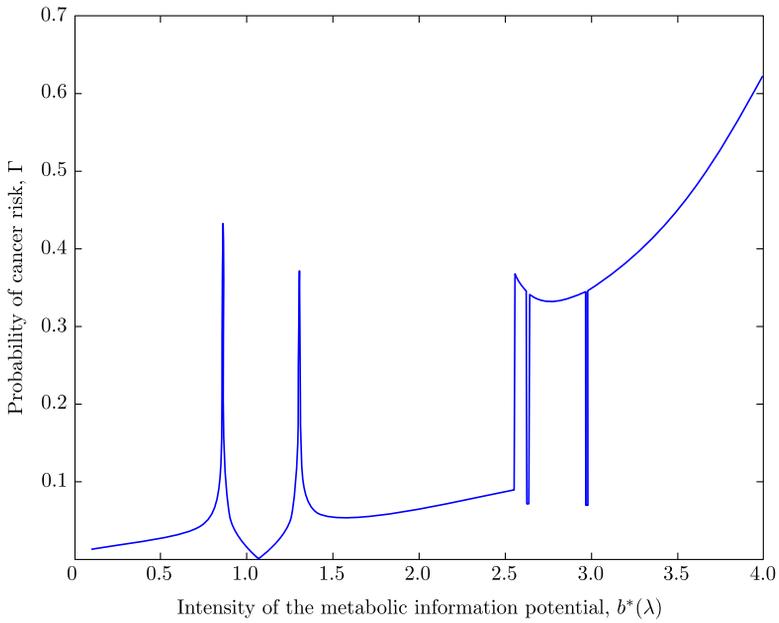


Рис. 4. Зависимость вероятности 2D-параллельного клеточного переноса от напряженности поля ИМП с учетом точки бифуркации и режима биений
 [Figure 4. Dependence of the 2D parallel cell transfer probability on the intensity of the metabolic informational potential taking into account the bifurcation point and the beat mode]

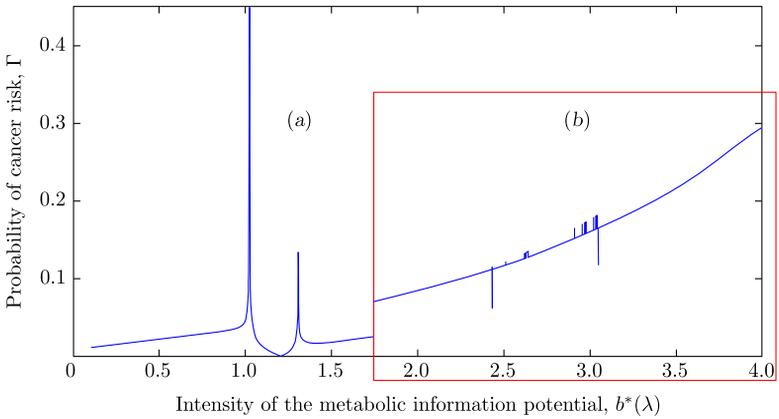


Рис. 5. Режим биений на зависимости вероятности 2D-параллельного клеточного переноса от напряженности поля ИМП: а) резонансы до точки бифуркации; б) резонансы и провалы выше точки бифуркации
 [Figure 5. The beat mode on the 2D parallel cell transfer probability dependence on the intensity of the metabolic information potential: (a) resonances to the bifurcation point; (b) resonances and dips above the bifurcation point]

<i>Факторы рисков формирования раковых опухолей</i>	<i>Теоретические параметры</i>	<i>Теоретическая зависимость</i>
Повышенная субфебрильная температура (выше 37°C)	$\beta_c \sim T^{-1}$, $\beta_c^* > 4$	Критическая температура, определяющая точку бифуркации, с последующим лавинообразным ростом подвижности раковых клеток
Уровень каспаз (3, 6, 8), увеличение активности на 25 %	$\alpha_c^* > 0.3$ ($1 > \alpha_c^* > 0$)	Параметр, определяющий интенсивность взаимодействия раковых клеток
Кольпоскопический индекс Рейда (выше 3)	λ_c («напряженность» ИМП), $b^*(\lambda) > 1.5$	Параметр асимметрии метаболического потенциала $b^*(\lambda)$

<i>Cancer Risk Factors</i>	<i>Theoretical Parameters</i>	<i>Theoretical Dependence</i>
Elevated low-grade fever (above 37°C)	$\beta_c \sim T^{-1}$, $\beta_c^* > 4$	The critical temperature determining the bifurcation point, with followed by an avalanche-like increase in the motility of cancer cells
Caspase levels (3, 6, 8), increased activity by 25 %	$\alpha_c^* > 0.3$ ($1 > \alpha_c^* > 0$)	Parameter that determines intensity of the cancer cells interaction
Reid's Colposcopic Index (above 3)	λ_c ("intensity" of the metabolic information potential), $b^*(\lambda) > 1.5$	The asymmetry parameter of the metabolic potential, $b^*(\lambda)$

4. Сравнение результатов аналитических моделей 2D-антипараллельной и параллельной динамики (разделы 2 и 3) с результатами моделирования других авторов по рассмотрению хаотической и бифуркационной динамики в системе «опухоль – иммунный кластер – вирус». В рамках модели, рассмотренной в разделе 3, в режиме слабого взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей в левой части кривой зависимости вероятности 2D-параллельного переноса (клеточной подвижности) от напряженности ИМП наблюдается единичный пик (см. рис. 6), отвечающий случаю, когда ИМП при некотором значении параметра напряженности ИМП (λ) становится симметричным. Излом в правой части модельной кривой отвечает устойчивой точке бифуркации при 2D-параллельном переносе в режиме слабой диссипации, или пренебрежении взаимодействием раковых клеток с экстраклеточной матрицей.

Ниже представлены (рис. 7) результаты моделирования параллельного 2D-клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице при изменении условий клеточной конкуренции за источники питания. Рассмотрен режим двойной бифуркации (на модельной кривой обозначены стрелками 1).

На рис. 8 представлены эффекты биений в окрестностях точек двойной бифуркации в случае смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице (обозначены стрелками 2).

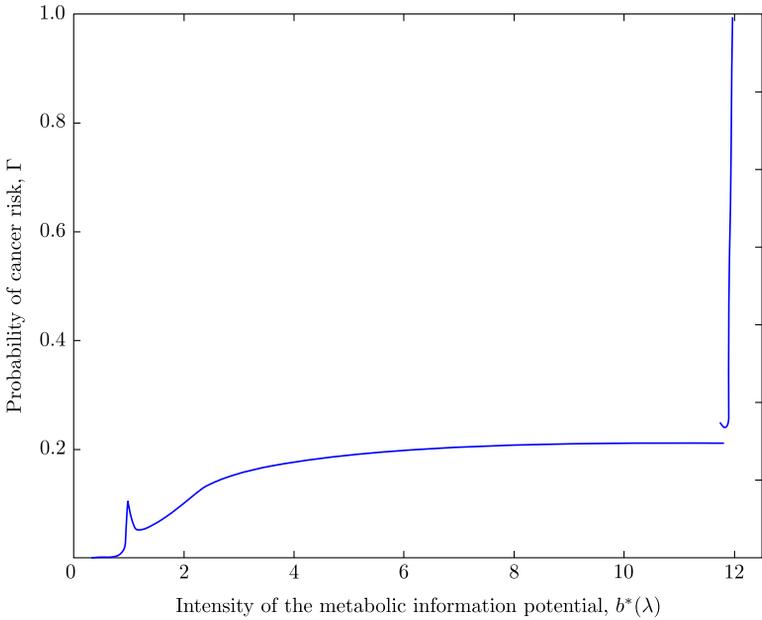


Рис. 6. Зависимость вероятности 2D-параллельного переноса (клеточной подвижности) от напряженности ИМП в пределе слабого взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей

[Figure 6. The 2D parallel transfer (cell motility) probability dependence on the intensity of the metabolic information potential in the limit of weak interaction of cancer cells with the extracellular matrix]

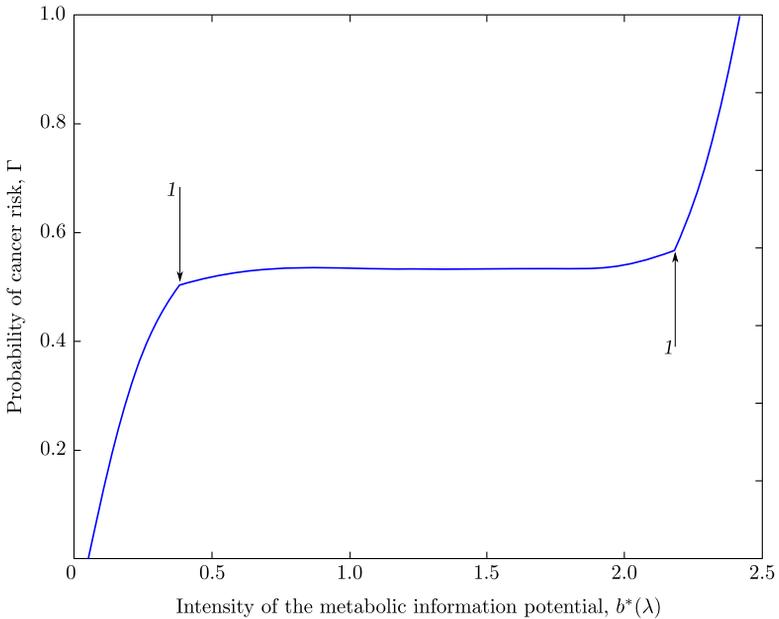


Рис. 7. Режим двойной бифуркации (на модельной кривой точки бифуркаций обозначены стрелками I) на зависимости вероятности параллельного 2D-клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице

[Figure 7. Double bifurcation mode (bifurcation points on the model curve are indicated by arrows I) on the parallel 2D cell transfer probability dependence taking into account change in the sign of cell interaction in the extracellular matrix]

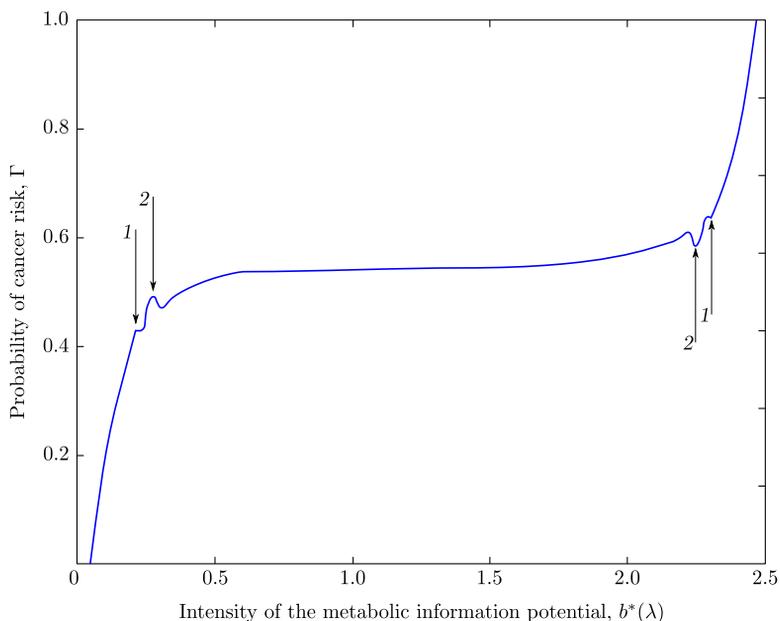


Рис. 8. Режимы биений (обозначены стрелками 2) на фоне двойной бифуркации (на модельной кривой точки бифуркаций обозначены стрелками 1) на зависимости вероятности параллельного 2D-клеточного переноса с учетом смены знака взаимодействия клеток в экстраклеточной матрице

[Figure 8. The beat modes (indicated by arrows 2) on the background of double bifurcation (on the model curve, the bifurcation points are indicated by arrows 1) on the parallel 2D cell transfer probability dependence taking into account change in the sign of cell interaction in the extracellular matrix]

В пределе сильного взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей (раздел 3) с учетом влияния на их подвижность двух локальных колебательных мод экстраклеточной матрицы получим модельную зависимость вероятности 2D-параллельного клеточного переноса с учетом режима бифуркации и биений, представленную на рис. 4 и 5. Правый фрагмент этой модельной зависимости (правее точки бифуркации) частично напоминает результат моделирования временной динамики плотности раковой опухоли с учетом режима бифуркаций (см. рис. 9 и 10 в сравнении с результатами работы [2]).

Хаотизация клеточной подвижности, представленная в работе [2], напоминает режим антипараллельной подвижности раковых клеток в пределе слабой диссипации, представленной в разделе 2.

Заключение. Теоретически исследован эффект неустойчивого излома в температурной зависимости антипараллельной динамики двух раковых клеток в 2D-информационном метаболитическом потенциале. Показано, что эффект нарушения симметрии оказывается устойчивым для параллельного и неустойчивым для антипараллельного переноса. Выявлена сложная тонкая структура в бифуркационной области, обусловленная флуктуациями (биениями) для параллельного двумерного переноса раковых клеток. Для случая антипараллельного переноса в бифуркационной области становится существенным вклад 4, 6, 12 и т.д. пар траекторий, что напоминает один из режимов перехода к хаосу. Дополнительно исследовано взаимодействие пары

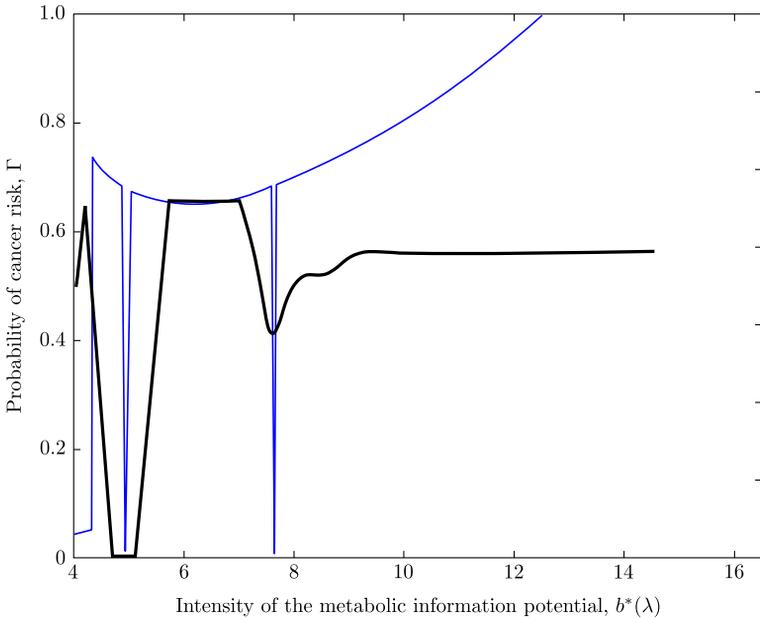


Рис. 9. Сравнение полевой зависимости вероятности 2D-параллельного клеточного переноса с учетом режима бифуркации и биений в случае более сильного взаимодействия раковых клеток с экстраклеточной матрицей с учетом влияния на их подвижность двух локальных колебательных мод экстраклеточной матрицы (синяя верхняя кривая, см. также рис. 4) с результатом моделирования временной динамики плотности раковой опухоли с учетом режима бифуркаций (черная нижняя кривая) [2]

[Figure 9. Comparison of the 2D parallel cell transfer probability field dependence taking into account the bifurcation and beating regimes in the case of a stronger interaction of cancer cells with the extracellular matrix taking into account the effect of two local vibrational modes of the extracellular matrix on their mobility (blue upper curve, see also Fig. 4) with the result modeling the temporal dynamics of the cancerous tumor density taking into account the bifurcation regime (black lower curve) [2]

клеток с колебательными модами экстраклеточной матрицы. Такое взаимодействие значительно и различным образом модифицирует процессы антипараллельного и параллельного двумерного переноса раковых клеток. Взаимодействие с экстраклеточной матрицей не меняет динамики центра масс пары раковых клеток для случая антипараллельного переноса, но вносит существенный вклад в динамику для случая параллельного переноса. Определена граница диапазона температур экстраклеточной матрицы, начиная с которой реализуются устойчивые двумерные синхронные корреляции всех рассмотренных типов. Найдено, что переход от синхронного к асинхронному режиму 2D-антипараллельного переноса раковых клеток в экстраклеточной матрице в условиях 2D-информационного метаболического потенциала напоминает фазовый переход второго рода.

Показано, что на риски возникновения и формирования раковой опухоли существенное влияние оказывает взаимодействие с экстраклеточной матрицей, т.е. реализуется предел сильной диссипации, что совпадает с выводом работ [1, 11]. В рамках проведенного моделирования установлено, что взаимодействие раковых и стромальных клеток, существенно перенормирующее ИМП и способное менять знак взаимодействия раковых клеток между собой, при определенном критическом значении величины этого взаимодействия приводит к режиму бифуркаций подвижности раковых клеток и, как след-

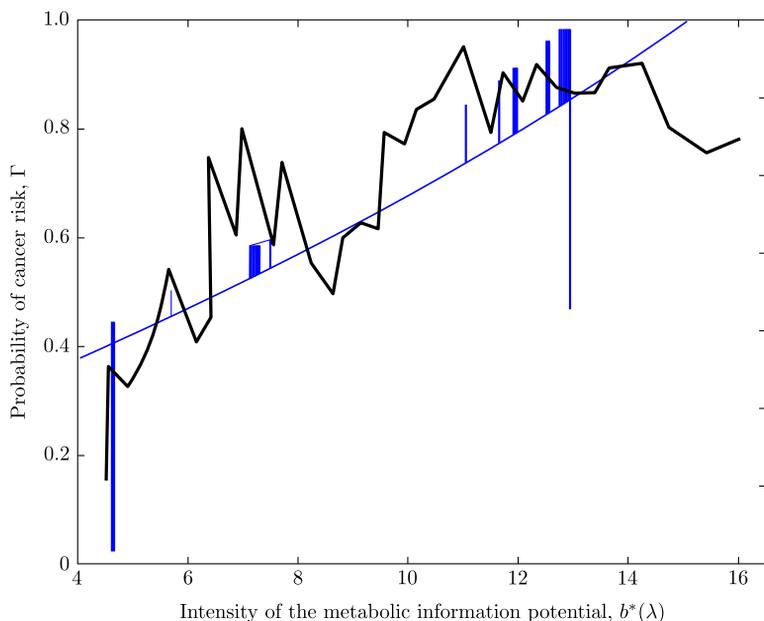


Рис. 10. Сравнение режима биений на зависимости вероятности 2D-параллельного клеточного переноса от напряженности поля ИМП (рис. 5) с модельной кривой динамики роста раковой опухоли по результатам работы [2]

[Figure 10. Comparison of the beat mode regime on the 2D parallel cell transfer probability dependence from the intensity of the metabolic information potential (Fig. 5) with the model curve of the cancer tumor growth dynamics according to the results of [2]

ствие, к лавинообразному росту раковой опухоли. Показано, что параметры ИМП и характеристики экстраклеточной матрицы (в том числе физические, что соответствует выводам работы [1]) в значительной степени определяют как риски возникновения, так и характерную динамику роста раковой опухоли.

В результате проведенных количественных оценок в рамках предложенной теоретической модели сформулирован способ оценки рисков развития злокачественных новообразований, в котором в качестве факторов риска предложено выделять субфебрильную температуру, уровень каспаз, кольпоскопический индекс Рейда, порог вероятности формирования злокачественных новообразований. Рассчитана вероятность подвижности взаимодействующих раковых клеток в экстраклеточной матрице в информационном метаболическом потенциале, зависящим от параметров, связанных с определяемыми факторами риска, при значениях которых (кольпоскопический индекс Рейда от 3 и более; уровень активности каспаз от 25 % и более; субфебрильная температура выше 37°C; порог вероятности формирования злокачественных новообразований более 70 %; параметр взаимодействия раковых клеток между собой от 0.3 и более) может быть диагностирован ускоренный рост злокачественных новообразований.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Это исследование не получило специального финансирования.

Библиографический список

1. Muir A., Danai L. V., Vander Heiden M. G. Microenvironmental regulation of cancer cell metabolism: implications for experimental design and translational studies // *Disease Models & Mechanisms*, 2018. vol. 11, no. 8, dmm035758. doi: 10.1242/dmm.035758.
2. Eftimie R., Macnamara C. K., Dushoff J., Bramson J. L., Earn D.J.D. Bifurcations and chaotic dynamics in a tumour-immune-virus system // *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2016. vol. 11, no. 5. pp. 65–85. doi: 10.1051/mmnp/2016111505.
3. Al-Mahdi A. M., Khirallah M. Q. Bifurcation analysis of a model of cancer // *Eur. Sci. J.*, 2016. vol. 12, no. 3. pp. 67–83. doi: 10.19044/esj.2016.v12n3p67.
4. Fadaka A., Ajiboye B., Ojo O. et al. Biology of glucose metabolism in cancer cells // *J. Oncology Sci.*, 2017. vol. 3, no. 2. pp. 45–51. doi: 10.1016/j.jons.2017.06.002.
5. Колобов А. В., Анашкина А. А., Губернов В. В., Полежаев А. А. Математическая модель роста опухоли с учетом дихотомии миграции и пролиферации // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2009. Т. 1, № 4. С. 415–422. doi: 10.20537/2076-7633-2009-1-4-415-422.
6. Жукова И. В., Колпак Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр.*, 2014. № 3. С. 5–18.
7. Kolobov A. V., Gubernov V. V., Polezhaev A. A. Autowaves in the model of infiltrative tumour growth with migration-proliferation dichotomy // *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2011. vol. 6, no. 7. pp. 27–38. doi: 10.1051/mmnp/20116703.
8. Altrock P. M., Liu L. L., Michor F. The mathematics of cancer: integrating quantitative models // *Nature Reviews Cancer*, 2015. vol. 15, no. 12. pp. 730–745. doi: 10.1038/nrc4029.
9. Кучумов А. Г. Математическое моделирование и биомеханический подход к описанию развития, диагностики и лечения онкологических заболеваний // *Российский журнал биомеханики*, 2010. Т. 14, № 4. С. 42–69.
10. Anastasiou D. Tumour microenvironment factors shaping the cancer metabolism landscape // *British Journal of Cancer*, 2017. vol. 116, no. 3. pp. 277–286. doi: 10.1038/bjc.2016.412.
11. Borouh L. K., DeBerardinis R. J. Metabolic pathways promoting cancer cell survival and growth // *Nature Cell Biology*, 2015. vol. 17, no. 4. pp. 351–359. doi: 10.1038/ncb3124.
12. Aringazin A. K., Dahnovsky Y., Krevchik V. D., Semenov M. B., Ovchinnikov A. A., Yamamoto K. Two-dimensional tunnel correlations with dissipation // *Phys. Rev. B*, 2003. vol. 68, 155426, arXiv: cond-mat/0212623 [cond-mat.mes-hall]. doi: 10.1103/PhysRevB.68.155426; Aringazin A. K., Dahnovsky Yu., Krevchik V. D., Semenov M. B., Veremyev V. A., Ovchinnikov A. A., Yamamoto K. Two-dimensional tunnel correlations with dissipation // *Nadronic Journal*, 2004. vol. 27, no. 2. pp. 115–150; русск. перевод: Арынгазин А. К., Веремьев В. А., Дахновский Ю. И., Кревчик В. Д., Овчинников А. А., Семенов М. Б., Ямамото К. Двумерные туннельные корреляции с диссипацией / *Управляемое диссипативное туннелирование. Туннельный транспорт в низкоразмерных системах*; ред. Э. Д. Леггет. М.: Физматлит, 2011. С. 262–287, https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_491815.

MSC: 37N25, 92C17, 37H20

Modeling of the extracellular information field influence in dynamics of the formation and development risks of a cancer tumor

*O. I. Artemova, V. D. Krevchik, M. B. Semenov*Penza State University,
40, Krasnaya str., Penza, 440026, Russian Federation.

Abstract

The dynamic nonlinear 2D model of the extracellular information field influence in the dynamics of risks of the cancer tumor formation and development has been considered. Physical properties of the extracellular matrix, availability of nutrients, oxygen concentration, pH of the extracellular matrix, interaction with stromal cells, and etc. are considered as the main external parameters forming the informational metabolic potential. Within the framework of the constructed 2D analytical model, it has been shown that microinteraction through the extracellular matrix of emerging cancer cells through a dynamic informational metabolic profile significantly influences the risk dynamics of the formation and development of a cancer tumor. It is shown that, depending on the structure of the 2D informational metabolic profile, a number of characteristic nonlinear features such as 2D bifurcations, beats, chaos, imposed on integral dynamic curves resembling by the Gompertz function, describing the probable risks of the formation and development of a cancerous tumor, are appeared. A comparison of the results of our analytical model under consideration with the results of the modeling of other authors on the consideration of chaotic and bifurcation dynamics in the “tumor–immune cluster–virus” system has been made. As a result of the quantitative estimations carried out within framework of the proposed theoretical model, we can formulate a method for assessing the risks of developing malignant neoplasms, characterized in that subfebrile temperature,

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Artemova O. I., Krevchik V. D., Semenov M. B. Modeling of the extracellular information field influence in dynamics of the formation and development risks of a cancer tumor, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 705–723. doi: 10.14498/vsgtu1701 (In Russian).

Authors' Details:

Olga I. Artemova  <https://orcid.org/0000-0003-4555-2792>
Assistant; Dept. of Obstetrics and Gynecology; Medical Institute;
e-mail: Artyomovaolg@gmail.com

Vladimir D. Krevchik  <https://orcid.org/0000-0002-3522-8326>
Honoured Scientists of the Russian Federation; Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dean; Faculty of Instrument Engineering, Information Technology and Electronics; Polytechnical Institute;
e-mail: physics@pnzgu.ru

Mikhail B. Semenov  <https://orcid.org/0000-0003-4348-0000>
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of the Physics Dept.; Faculty of Instrument Engineering, Information Technology and Electronics; Polytechnical Institute;
e-mail: Misha29.02.1@gmail.com

caspase level, colposcopic Raid index, which determine the threshold for the formation of malignant neoplasms, and identified as the risk factors.

Keywords: extracellular information field, bifurcation and chaotic dynamics, models of the formation and development of a cancer tumor.

Received: 8th May, 2019 / Revised: 5th November, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 5th December, 2019

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research did not funded by a specific project grant.

References

1. Muir A., Danai L. V., Vander Heiden M. G. Microenvironmental regulation of cancer cell metabolism: implications for experimental design and translational studies, *Disease Models & Mechanisms*, 2018, vol. 11, no. 8, dmm035758. doi: 10.1242/dmm.035758.
2. Eftimie R., Macnamara C. K., Dushoff J., Bramson J. L., Earn D.J.D. Bifurcations and chaotic dynamics in a tumour-immune-virus system, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2016, vol. 11, no. 5, pp. 65–85. doi: 10.1051/mmnp/201611505.
3. Al-Mahdi A. M., Khirallah M. Q. Bifurcation analysis of a model of cancer, *Eur. Sci. J.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 67–83. doi: 10.19044/esj.2016.v12n3p67.
4. Fadaka A., Ajiboye B., Ojo O. et al. Biology of glucose metabolism in cancer cells, *J. Oncology Sci.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 45–51. doi: 10.1016/j.jons.2017.06.002.
5. Kolobov A. V., Anashkina A. A., Gubernov V. V., Polezhaev A. A. Mathematical model of tumor growth with migration and proliferation dichotomy, *Computer Research and Modeling*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 415–422 (In Russian). doi: 10.20537/2076-7633-2009-1-4-415-422.
6. Zhukova I. V., Kolpak E. P. Mathematical models of malignant tumour, *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2014, no. 3, pp. 5–18 (In Russian).
7. Kolobov A. V., Gubernov V. V., Polezhaev A. A. Autowaves in the model of infiltrative tumour growth with migration-proliferation dichotomy, *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2011, vol. 6, no. 7, pp. 27–38. doi: 10.1051/mmnp/20116703.
8. Altrock P. M., Liu L. L., Michor F. The mathematics of cancer: integrating quantitative models, *Nature Reviews Cancer*, 2015, vol. 15, no. 12, pp. 730–745. doi: 10.1038/nrc4029.
9. Kuchumov A. G. Mathematical modelling and biomechanical approach to describe the development, the diagnostics, and the treatment of oncological diseases, *Russian Journal of Biomechanics*, 2010, vol. 14, no. 4, pp. 42–69 (In Russian).
10. Anastasiou D. Tumour microenvironment factors shaping the cancer metabolism landscape, *British Journal of Cancer*, 2017, vol. 116, no. 3, pp. 277–286. doi: 10.1038/bjc.2016.412.
11. Boroughs L. K., DeBerardinis R. J. Metabolic pathways promoting cancer cell survival and growth, *Nature Cell Biology*, 2015, vol. 17, no. 4, pp. 351–359. doi: 10.1038/ncb3124.
12. Aringazin A. K., Dahnovsky Y., Krevchik V. D., Semenov M. B., Ovchinnikov A. A., Yamamoto K. Two-dimensional tunnel correlations with dissipation, *Phys. Rev. B*, 2003, vol. 68, 155426, arXiv: cond-mat/0212623 [cond-mat.mes-hall]. doi: 10.1103/PhysRevB.68.155426; Aringazin A. K., Dahnovsky Yu., Krevchik V. D., Semenov M. B., Veremyev V. A., Ovchinnikov A. A., Yamamoto K. Two-dimensional tunnel correlations with dissipation, *Hadronic Journal*, 2004, vol. 27, no. 2, pp. 115–150.



УДК 681.5.015

Активная адаптация распределенной мультисенсорной системы фильтрации

И. В. Семушин, Ю. В. Цыганова

Ульяновский государственный университет,
факультет математики, информационных и авиационных технологий,
Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Аннотация

Мультисенсорная система фильтрации характеризуется математически как результат решения задачи синтеза многомерной дискретной системы фильтрации одного сигнала по данным от множества разнородных датчиков (сенсоров). В стационарной постановке этой задачи приведены три варианта ее решения: Колмогорова–Винера, Калмана в ковариационной форме и Калмана в информационной форме. Осуществлен переход к постановке этих задач в условиях параметрической неопределенности. В целях реализации активного принципа адаптации найден метод формирования инструментального функционала качества для эквивалентной замены недоступного исходного функционала качества — среднеквадратической ошибки фильтрации. Показано, что эта замена создает возможность применять для адаптации системы весь аппарат и средства практических методов оптимизации, прежде всего, методов градиентного и ньютоновского типов.

Предложенное теоретическое решение задачи формирования инструментального функционала качества осуществимо при достаточно общих условиях исходной задачи синтеза многомерной дискретной системы фильтрации при бесконечном времени наблюдения.

Выявлено следующее:

- Достаточно сложные операции одношагового предсказания и затем обновления оценок в двухэтапном алгоритме фильтрации целесообразно выполнять в центре принятия решений; здесь же должны выполняться вычислительные операции по минимизации инструментального функционала качества.
- Несложные операции адаптивного масштабирования данных целесообразно оставить в местах нахождения сенсоров.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Семушин И. В., Цыганова Ю. В. Активная адаптация распределенной мультисенсорной системы фильтрации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 724–743. doi: 10.14498/vsgtu1704.

Сведения об авторах

Иннокентий Васильевич Семушин  <https://orcid.org/0000-0002-3687-1110>
доктор технических наук, профессор; профессор каф. информационных технологий;
e-mail: kentvsem@yandex.ru

Юлия Владимировна Цыганова   <https://orcid.org/0000-0001-8812-6035>
доктор физико-математических наук, доцент; профессор каф. информационных технологий; e-mail: tsyganovajv@gmail.com

- Алгоритмы адаптации могут быть реализованы для базовых алгоритмов фильтрации, взятых в различных формах: в форме фильтра Колмогорова–Винера, в ковариационной форме фильтра Калмана или в информационной форме фильтра Калмана.
- Вычислительные операции по минимизации инструментального функционала качества целесообразно разрабатывать как варианты реализации современных практических методов оптимизации различного уровня сложности.

Ключевые слова: активная адаптация, мультисенсорная система, распределенная фильтрация Калмана, инструментальный критерий качества оптимизации.

Получение: 18 мая 2019 г. / Исправление: 19 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 16 декабря 2019 г.

Введение. Мультисенсорная (многоканальная) задача выделения полезной информации о состоянии сложного объекта не является принципиально новой [1]. Наглядным примером может служить любая комплексная навигационная система. Построение фильтра, выделяющего информацию о движении объекта из данных не одного, а многих разнородных измерителей, позволяет не только обеспечивать критически важное свойство наблюдаемости системы «объект+сенсоры», но — что важнее — получать существенный выигрыш в точности по сравнению с односенсорной системой. В последнее время эта задача получила развитие, связанное с пространственным разнесением сенсоров, — возможностью децентрализации вычислений. Поднимаются новые вопросы: какую часть таких вычислений целесообразно передавать аппаратуре, размещенной в местах нахождения сенсоров (МНС), а какую — оставлять в центре принятия решений (ЦПР)? Как согласовывать между собой обработку информации «на местах» и в центре? Как могут отдельные сенсоры взаимодействовать между собой, чтобы улучшать генеральный показатель качества решения задачи оценивания состояний наблюдаемого и/или управляемого объекта?

В математическом смысле синтез *стационарного* оптимального фильтра в мультисенсорном классе линейных систем является частным случаем общей задачи Колмогорова–Винера при бесконечном времени работы системы. Показателем качества решения служит сумма дисперсий ошибок всех каналов фильтрации J_e , где e — вектор ошибок (разность желаемого сигнала и выхода фильтра) [1, с. 218]. Классический подход рассматривает J_e как исходный функционал качества (ИФК) от передаточных функций $G(z)$ многоканальной системы дискретных фильтров: $J_e = J_e[G(z)]$. Многомерный фильтр $G_*(z)$ называют оптимальным, если он минимизирует ИФК: $G_*(z) \triangleq \operatorname{argmin}_{G(z)} J_e[G(z)]$. Задача отыскания $G_*(z)$ является вариационной задачей, и ее решение хорошо известно [1, с. 219–253].

Теория фильтрации Калмана учитывает эффекты нестационарности и конечности времени работы фильтров. Вывод алгоритма фильтрации Калмана в этой более общей теории базируется на байесовской постановке задачи оценивания, где за показатель качества принимают совместную плотность распределения вероятностей (ПРВ) измерений и оцениваемой величины и макси-

мизируют эту функцию плотности, что выражает собой «*принцип безусловного максимума правдоподобия*» [2, с. 51]. Когда условная ПРВ оцениваемой величины при учете полученных измерений является гауссовской плотностью, то оптимальная оценка дается условным математическим ожиданием, поскольку гауссовская ПРВ достигает максимума именно в точке среднего значения [3, с. 217]. Отметим, что байесовская задача в этом случае снова сводится к минимизации среднеквадратического функционала [4, с. 179].

Фильтр Калмана особо важен в *стационарном случае*: (1°) параметры задачи постоянны, (2°) модель стохастического сигнала (объекта) обладает свойством стабилизируемости, (3°) добавление к ней сенсоров придает этой системе свойство наблюдаемости, (4°) сенсоры обладают ненулевыми погрешностями и (5°) время наблюдения бесконечно. В этом случае решение задачи Калмана совпадает с решением задачи Колмогорова—Винера [4, с. 185].

Наряду с классическим фильтром Калмана в настоящее время разработаны различные методы калмановской фильтрации для распределенных мультисенсорных систем. Наиболее известными являются параллельный информационный фильтр [5], распределенный информационный фильтр [6], распределенный фильтр Калмана с консенсусным фильтром [7], распределенный фильтр Калмана со взвешенным усреднением [8].

Термин «распределенная фильтрация» означает, что средства измерения разнесены в пространстве. В распределенной сети сенсоров может присутствовать ЦПР, в котором вычисляется оптимальная оценка вектора состояния системы. Отдельные сенсоры (узлы сети) могут обмениваться данными как с ЦПР, так и со своими соседями в соответствии с топологией сети, которая может быть задана заранее либо может изменяться во времени.

Задача децентрализованной фильтрации Калмана отличается тем, что в ней отсутствует ЦПР, а каждый сенсор содержит свой локальный процессор для вычисления оптимальной оценки вектора состояния. Эта задача впервые была решена в [5] в 1979 г., а также ее независимое решение представлено в [9]. Подробный обзор современных методов распределенной фильтрации Калмана можно найти в [10]. В настоящее время теория распределенной фильтрации Калмана для мультисенсорных систем продолжает активно развиваться, о чем свидетельствует большое число недавних публикаций, среди которых отметим [11–15].

Однако известные решения указанных задач опираются на полное знание моделей и числовых значений параметров, характеризующих движение объекта и свойства сенсоров. Такое знание возможно лишь теоретически. Его отсутствие на практике вынуждает: либо (А) удовлетворяться субоптимальными решениями, либо (В) прибегать к адаптивным решениям, либо (С) имитировать более сложные (высокоинтеллектуальные) действия человека по извлечению недостающих знаний (или по компенсации их неполноты) в классе самоорганизующихся — *самооптимизирующихся* — систем.

Предпринятое исследование мотивировано целями (В) и (С). Их может объединить вопрос данной статьи: как применять *активный принцип адаптации* (самооптимизации) к мультисенсорной системе фильтрации? Пассивный принцип адаптации означает опору на предварительное оценивание неизвестных параметров с тем, чтобы затем эти оценки подставлять в классические решения задач фильтрации в *пассивном* ожидании, что это даст поло-

жительный эффект.

Активный же принцип адаптации (АПА) означает критериальную самооптимизацию системы [16]. Средняя норма ошибок фильтрации как исходный функционал качества (ИФК) не может служить инструментом самооптимизации. АПА ищет ответ на вопрос: как построить такой вспомогательный функционал качества (ВФК), который эквимодален ИФК, но доступен как инструмент самооптимизации?. При этом *эквимодальность* ИФК и ВФК означает: *аргументы, доставляющие им минимум, совпадают, и поэтому их минимальные значения достигаются синхронно.*

Раздел 1 содержит строгие формулировки решаемой задачи. В разд. 2 приведен компактный вид оптимального фильтра Колмогорова—Винера, чтобы обособить ту часть вычислений, которая одинакова для всех каналов. Раздел 3 дает запись этого решения в ковариационной форме фильтра Калмана и явный вид решения алгебраического уравнения Риккати, что позволяет знать заранее те пределы, к которым должны сходиться соответствующие характеристики адаптивного фильтра. Информационный фильтр Калмана приведен в разд. 4 ввиду перспективы использования в режиме адаптации. Раздел 5 конкретизирует модель адаптивного фильтра и алгоритмы ее оптимизации. В разд. 6 сформирован вспомогательный функционал качества, позволяющий реализовать алгоритмы, приведенные в разд. 5. Численный пример помещен в разд. 7 для экспериментального подтверждения полезности найденного решения. Заключение сообщает, какие выводы дает и какие возможности открывает эта работа.

1. Характеристики задачи: исходные предположения и формальные обозначения. Мультисенсорность означает, что измеряемые сигналы $\{y^{(i)}(t) \mid i = \overline{1, m}\}$ от $m > 1$ сенсоров находятся в функциональной зависимости от одного полезного сигнала $x(t)$, где t — непрерывное время [1, с. 223]. Практическим примером может быть обработка данных множества радиодоплеровских измерителей скорости движения летательного аппарата (ЛА). В этом контексте скорость движения ЛА является тем полезным сигналом $x(t)$, который нужно оценивать по данным измерений $y_i(kT)$, доступным от $i = 1, 2, \dots, m$ сенсоров в дискретные моменты времени $t_k \triangleq kT$, $k = 1, 2, \dots$, где T обозначает заданный темп измерений.

Типична ситуация, когда $x(t)$ моделирует не саму скорость, а отклонение скорости от некоторого известного (программного) режима движения объекта. Эти отклонения вызваны реальными возмущениями со стороны той стохастической среды, в которой происходит физическое движение. Для ЛА это — воздушная среда, для морского объекта — водная среда. Ситуация, когда среда стационарна (нормальный режим функционирования), дает основание принять первое базовое предположение: полезный сигнал $x(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $R_{xx}(\tau)$.

Второе базовое предположение задачи фильтрации характеризует сенсоры — источники первичной (измерительной) информации. Исходим из типовых предположений о том, что погрешности $v_i(kT)$ присутствуют в измерениях аддитивно:

$$y_i(kT) = x(kT) + v_i(kT), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

что они не коррелированы между собой и с полезным сигналом и что сенсоры работают с таким темпом T дискретизации времени, который позволяет применять для их погрешностей гипотезу дискретного белого шума с нулевым средним значением $E\{v_i(kT)\} = 0$ и с ненулевыми дисперсиями $B_{\star,i}^2$:

$$E\{v_i(kT)v_j(lT)\} = \begin{cases} B_{\star,i}^2, & i = j \ \& \ k = l, \\ 0, & i \neq j \vee k \neq l. \end{cases}$$

Обозначим векторы поступающих данных и ошибок наблюдений в момент kT как $y(kT)$ и $v(kT)$:

$$\left. \begin{aligned} y(kT) &\triangleq [y_1(kT) \mid y_2(kT) \mid \dots \mid y_m(kT)]^\top = Hx(kT) + v(kT), \\ H &= [1 \mid 1 \mid \dots \mid 1]^\top, \\ v(kT) &= [v_1(kT) \mid v_2(kT) \mid \dots \mid v_m(kT)]^\top, \\ R_\star &= E\{v(kT)v^\top(kT)\} = \text{diag} [B_{\star,1}^2 \mid B_{\star,2}^2 \mid \dots \mid B_{\star,m}^2]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Введем составной вектор, который объединяет всю историю наблюдений, доступных к настоящему моменту времени kT , и обозначим его как

$$Y(kT) \triangleq [y(kT)^\top \mid y(kT - T)^\top \mid \dots \mid y(kT - jT)^\top]_{j \rightarrow \infty}^\top.$$

Это случайный вектор растущей со временем размерности $m \times (j + 1)$ | $j = 0, 1, \dots$, чье реализованное значение обозначим соответственно:

$$Y_k \triangleq [y_k^\top \mid y_{k-1}^\top \mid \dots \mid y_{k-j}^\top]_{j \rightarrow \infty}^\top. \quad (2)$$

Предполагаем (для определенности), что для $x(t)$ приемлема $R_{xx}(\tau)$ в простом виде:

$$R_{xx}(\tau) = A_\star^2 e^{-\alpha_\star |\tau|}, \quad (3)$$

чтобы в последующем анализе суть решения оказалась проявлена не в технических деталях, вызванных более сложной моделью, а в принципиальных особенностях мультисенсорной постановки. Этой функции (3) соответствует следующая дискретная спектральная плотность сигнала [1, с. 232]:

$$\Phi_{xx}(z) \triangleq \mathcal{Z}_{II}\{R_{xx}(\tau)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} R_{xx}(kT) = \frac{A_\star^2(1 - d_\star^2)}{(1 - d_\star z)(1 - d_\star z^{-1})}, \quad (4)$$

где $d_\star \triangleq e^{-\alpha_\star T}$, $z = e^{pT}$ — переменная z -преобразования, p — переменная преобразования Лапласа, $\mathcal{Z}_{II}\{\cdot\}$ обозначает двустороннее z -преобразование, применяемое к $\{\cdot\}$, в данном случае к $\{R_{xx}(\tau)\}$.

Перейдем к бескобочным обозначениям $x_k \triangleq x(kT)$, $y_k^{(i)} \triangleq y_i(kT)$, $y_k \triangleq y(kT)$ и т. п. для функций дискретного времени kT и будем применять соответствующие им односторонние z -преобразования

$$\begin{aligned} x(z) &\triangleq \mathcal{Z}_I\{x(kT)\} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} x_j, \\ y^{(i)}(z) &\triangleq \mathcal{Z}_I\{y_i(kT)\} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} y_j^{(i)}, \\ y(z) &\triangleq \mathcal{Z}_I\{y(kT)\} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} y_j. \end{aligned}$$

Факторизация $\Phi_{xx}(z) = F_\star(z^{-1})\Phi_{ww}(z)F_\star(z)$ спектральной плотности (4) при задании $\Phi_{ww} = 1$ означает, что стационарный процесс x_k может быть рассмотрен как сформированный устойчивым дискретным фильтром с передаточной функцией

$$F_\star(z) = \frac{A_\star \sqrt{1 - d_\star^2}}{1 - d_\star z^{-1}}$$

из дискретного белого шума w_k с единичной дисперсией [1, р. 209]. Это означает, что

$$\left. \begin{aligned} x_k &= d_\star x_{k-1} + A_\star \sqrt{1 - d_\star^2} w_k, \\ y_k^{(i)} &= x_k + v_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В гауссовской трактовке имеем ПРВ в явном виде [3, с. 209, 215]:

$$\left. \begin{aligned} f_{x(kT) | Y(kT-T)}(\xi | Y_{k-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{p}_k^-}} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \hat{x}_k^-)^2}{2\hat{p}_k^-} \right\}, \\ &(\text{первый этап — прогноз на 1 шаг}), \\ f_{x(kT) | Y(kT)}(\xi | Y_k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{p}_k^+}} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \hat{x}_k^+)^2}{2\hat{p}_k^+} \right\}, \\ &(\text{второй этап — обновление}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где присутствуют: \hat{x}_k^- — оптимальное предсказание значения x_k , сформированное сразу после учета измерения y_{k-1} вперед κ приходу измерения y_k ; \hat{p}_k^- — дисперсия ошибки оценки \hat{x}_k^- ; \hat{x}_k^+ — оптимальная оценка значения x_k , обновленная в момент прихода и учета y_k ; \hat{p}_k^+ — дисперсия ошибки оценки \hat{x}_k^+ . Как отмечено выше, для их вычисления нужно иметь полное знание всех параметров: $\{d_\star, A_\star^2, B_{\star,i}^2 \mid i = 1, 2, \dots, m\}$. Если их не имеем, то возможны лишь субоптимальные (или адаптивные) оценки, которые будем обозначать, соответственно, так: \hat{x}_k^- вместо \hat{x}_k^- ; \hat{p}_k^- вместо \hat{p}_k^- ; \hat{x}_k^+ вместо \hat{x}_k^+ ; \hat{p}_k^+ вместо \hat{p}_k^+ . Они будут возникать из-за того, что вместо точных $\{d_\star, A_\star^2, B_{\star,i}^2 \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ приходится применять неточные значения $\{d, A^2, B_i^2 \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, чем и вызываются субоптимальные (или адаптивные) значения параметра фильтра, обозначаемые обобщенно как θ вместо его оптимального значения $\hat{\theta}_\star$. Субоптимальные (или адаптивные) оценки ставятся в зависимость от θ так же, как ИФК, в роли которого равноправно пригоден любой из среднеквадратических критериев:

$$\left. \begin{aligned} J_e^-(\theta) &\triangleq \mathbf{E} \{ [\hat{e}_k^-(\theta)]^2 \} & \text{или} & & J_e^+(\theta) &\triangleq \mathbf{E} \{ [\hat{e}_k^+(\theta)]^2 \}, \\ \hat{e}_k^-(\theta) &\triangleq x_k - \hat{x}_k^-(\theta) & \text{или} & & \hat{e}_k^+(\theta) &\triangleq x_k - \hat{x}_k^+(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2. Задача Колмогорова—Винера в мультисенсорной постановке.

Минимизация критерия $J_e^+(\theta) = J_e^+[G(z)]$, который сейчас определяется как функционал от вектора $G(z) = [G^{(1)}(z) \mid G^{(2)}(z) \mid \dots \mid G^{(m)}(z)]^\top$ передаточных функций m -канальной системы с выходом $\hat{x}^+(z) \triangleq G(z)^\top y(z)$, дает оптимальное значение $G_\star(z) = [G_\star^{(1)}(z) \mid G_\star^{(2)}(z) \mid \dots \mid G_\star^{(m)}(z)]^\top$ с передаточными

функциями $G_{\star}^{(i)}(z) = \hat{a}_{\star}^{(i)} / [1 - \hat{\mu}_{\star} z^{-1}]$, $i = 1, 2, \dots, m$ для формирования оптимальной оценки $\hat{x}^+(z) = G_{\star}(z)^{\top} y(z)$, причем коэффициент $\hat{a}_{\star}^{(i)}$ в числителе i -той передаточной функции индивидуален, а коэффициент $\hat{\mu}_{\star}$ в знаменателе у всех передаточных функций один и тот же [1, с. 241–245]:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_{\star}^{(i)} &= K_i^{\star} \hat{a}_{\star}, \quad K_i^{\star} \triangleq B_{\star}^2 / B_{\star,i}^2, \quad B_{\star}^2 \triangleq 1 / \sum_{l=1}^m (1/B_{\star,l}^2), \quad \sum_{l=1}^m K_l^{\star} = 1, \\ \hat{a}_{\star} &= 1 - \hat{\mu}_{\star} d_{\star}^{-1}, \quad \hat{\mu}_{\star} \triangleq e^{-\hat{\alpha}_{\star} T}, \quad \text{ch } \hat{\alpha}_{\star} T = \text{ch } \alpha_{\star} T + \frac{A_{\star}^2}{B_{\star}^2} \text{sh } \alpha_{\star} T. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Соответственно, во временной области получаем частные оценки $\hat{x}_k^{+(i)}$ и итоговую оценку \hat{x}_k^+ :

$$\left. \begin{aligned} (9)^a \quad \hat{x}_k^{+(i)} &= \hat{\mu}_{\star} \hat{x}_{k-1}^{+(i)} + \hat{a}_{\star}^{(i)} y_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ (9)^b \quad \hat{x}_k^+ &\triangleq \sum_{i=1}^m \hat{x}_k^{+(i)} = \hat{\mu}_{\star} \hat{x}_{k-1}^+ + \hat{a}_{\star} \sum_{i=1}^m K_i^{\star} y_k^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Это решение представим оптимальной моделью $\mathfrak{M}(\hat{\theta}_{\star})$ (10) и ее вектор-параметр обозначим $\hat{\theta}_{\star}$, (10)^g:

$$\left. \begin{aligned} (10)^a \quad \hat{x}_k^+ &= \hat{\mu}_{\star} \hat{x}_{k-1}^+ + \hat{a}_{\star} y_k^{\star}, \quad y_k^{\star} \triangleq \sum_{i=1}^m y_k^{(\star,i)}, \\ (10)^b \quad y_k^{\star} &= x_k + v_k^{\star}, \quad v_k^{\star} = \sum_{i=1}^m K_i^{\star} v_k^{(i)}, \\ (10)^c \quad \hat{\mu}_{\star} &\triangleq e^{-\hat{\alpha}_{\star} T}, \quad \text{ch } \hat{\alpha}_{\star} T = \text{ch } \alpha_{\star} T + \frac{A_{\star}^2}{B_{\star}^2} \text{sh } \alpha_{\star} T, \\ (10)^d \quad \hat{a}_{\star} &= 1 - \hat{\mu}_{\star} d_{\star}^{-1}, \\ (10)^e \quad B_{\star}^2 &\triangleq 1 / \sum_{l=1}^m (1/B_{\star,l}^2), \quad B_{\star}^2 = \text{E} \{ [v_k^{\star}]^2 \}, \\ (10)^f \quad K_i^{\star} &\triangleq B_{\star}^2 / B_{\star,i}^2, \quad \sum_{l=1}^m K_l^{\star} = 1, \\ (10)^g \quad \hat{\theta}_{\star} &\triangleq \{ \hat{\mu}_{\star}, \hat{a}_{\star}, B_{\star,i}^2 \mid i = 1, 2, \dots, m \} = \underset{\hat{x}_k^+}{\text{argmin}} J_e^+(\theta), \\ (10)^h \quad \min [J_e^+(\theta)]_{\hat{x}_k^+} &= B_{\star}^2 \hat{a}_{\star} \triangleq J_e^+(\hat{\theta}_{\star}) = \text{E} \{ [\hat{e}_k^+]^2 \}, \\ \hat{e}_k^+ &\triangleq x_k - \hat{x}_k^+(\theta). \end{aligned} \right\} : \mathfrak{M}(\hat{\theta}_{\star}) \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теории синтеза стационарных фильтров при бесконечном времени наблюдения (задача Колмогорова–Винера для многомерных

систем) решение отыскивают в m -канальной системе [1, рис. 5.5, с. 223], где каждое i -тое измерение $y_k^{(i)}$ проходит обработку в i -том фильтре непосредственно в МНС i -того сенсора для генерирования частной оценки $\hat{x}_k^{+(i)}$ (9)^a. Затем частные оценки суммируют для получения итоговой оценки \hat{x}_k^+ (9)^b. В отличие от этого модель $\mathfrak{M}(\hat{\theta}_\star)$ (10) применяет единственный фильтр (10)^a в ЦПР. В МНС i -того сенсора остается простая операция масштабирования данных: умножение измеренной величины на весовой коэффициент K_i^\star по формуле (10)^b для передачи в ЦПР. Вычисления в ЦПР сводятся к суммированию переданных данных для образования эквивалентного входа y_k^\star , (10)^a, и к его обработке в единственном фильтре по первой формуле (10)^a. Это делает модель $\mathfrak{M}(\hat{\theta}_\star)$ практичной, значительно снижающей общий объем вычислений.

Уравнения (10)^a, (10)^b определяют параметрический вид фильтра Колмогорова—Винера для данных условий. Если $\theta \triangleq \{\mu, a, B_i^2 \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, то получим условное обозначение $\mathfrak{M}(\theta)$ этой субоптимальной (или адаптивной) структуры. Если, варьируя этот θ , минимизировать ИФК $J_e^+(\theta) \triangleq E\{[\hat{e}_k^+(\theta)]^2\}$ (7), то результатом будет параметр $\hat{\theta}_\star \triangleq \{\hat{\mu}_\star, \hat{a}_\star, B_{\star,i}^2 \mid i = 1, 2, \dots, m\}$, (10)^g, определяемый через посредство формул (10)^c–(10)^f и доставляющий этому ИФК минимальное значение (10)^h.

3. Задача Калмана в мультисенсорной постановке: ковариационная форма. Согласно «принципу безусловного максимума правдоподобия» (см. разд. 1), искомые оптимальные оценки определены теоретически как первый и второй моменты соответствующих ПРВ (6):

$$\left. \begin{aligned} (11)^a \quad \hat{x}_k^- &\triangleq E\{x(kT) \mid Y(kT - T) = Y_{k-1}\}, \\ (11)^b \quad \hat{p}_k^- &\triangleq E\{[x(kT) - \hat{x}_k^-]^2 \mid Y(kT - T) = Y_{k-1}\}, \\ (11)^c \quad \hat{x}_k^+ &\triangleq E\{x(kT) \mid Y(kT) = Y_k\}, \\ (11)^d \quad \hat{p}_k^+ &\triangleq E\{[x(kT) - \hat{x}_k^+]^2 \mid Y(kT) = Y_k\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Их практическое вычисление составляет алгоритм Калмана [3, с. 217]. Запишем его в ковариационной форме для данной задачи как два чередующихся этапа (12) и (13):

Этап I — прогноз от $(k - 1)T$ к моменту kT , $k = 1, 2, \dots$; $\hat{x}_0^+ \triangleq E\{x_0\}$, $\hat{p}_0^+ \triangleq E\{(x_0 - \hat{x}_0^+)^2\}$:

$$\left. \begin{aligned} (12)^a \quad \hat{x}_k^- &= d_\star \hat{x}_{k-1}^+, \\ (12)^b \quad \hat{p}_k^- &= d_\star^2 \hat{p}_{k-1}^+ + A_\star^2(1 - d_\star^2). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Этап II — обновление в момент kT , $k = 1, 2, \dots$, благодаря измерению y_k :

$$\left. \begin{aligned} (13)^a \quad \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + \hat{K}_k (y_k - H \hat{x}_k^-), \\ (13)^b \quad \hat{K}_k &= \hat{p}_k^- H^\top \left(H \hat{p}_k^- H^\top + R_\star \right)^{-1}, \\ (13)^c \quad \hat{p}_k^+ &= \hat{p}_k^- - \hat{K}_k H \hat{p}_k^-. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В начале итераций этого алгоритма по $k = 1, 2, \dots$ (при малых значениях k) фильтр Калмана нестационарен. Однако эффекты начальных условий $\hat{x}_0^+ \triangleq \mathbb{E}\{x_0\}$ и $\hat{p}_0^+ \triangleq \mathbb{E}\{(x_0 - \hat{x}_0^+)^2\}$, входящих в (12) для $k = 1$, при возрастании $k \rightarrow \infty$ исчезают, и фильтр стабилизируется (тем быстрее, чем меньше значение $|d_\star| < 1$). Строго стационарную (предельную) версию ковариационного алгоритма (12), (13) получим в виде:

Этап I — прогноз оценки сигнала на 1 шаг:

$$\left. \begin{aligned} (14)^a \quad \hat{x}_k^- &= d_\star \hat{x}_{k-1}^+, \\ (14)^b \quad \hat{p}_\star^- &= d_\star^2 \hat{p}_\star^+ + A_\star^2 (1 - d_\star^2). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Этап II — обновление оценки сигнала благодаря измерению y_k , при этом $\hat{K}_\star = [\hat{K}_{\star,1} \mid \hat{K}_{\star,2} \mid \dots \mid \hat{K}_{\star,m}]$:

$$\left. \begin{aligned} (15)^a \quad \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + \hat{K}_\star (y_k - H \hat{x}_k^-), \\ (15)^b \quad \hat{K}_\star &= \hat{p}_\star^- H^\top (H \hat{p}_\star^- H^\top + R_\star)^{-1}, \\ (15)^c \quad \hat{p}_\star^+ &= \hat{p}_\star^- - \hat{K}_\star H \hat{p}_\star^-. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подстановка выражений (15)^b в (15)^c и затем в (14)^b даст формальное алгебраическое уравнение Риккати (или Лурье, как его называют в [4, с. 185]), но выписывать его нет смысла, поскольку решать его можно лишь многочисленными итерациями по k в алгоритме (12)^b, (13)^b, (13)^c, пока процесс не стабилизируется по значению \hat{p}_k^- . Обнаружив стабилизацию, считают, что процесс сошелся: $\hat{p}_k^- \rightarrow \hat{p}_\star^-$ и $\hat{K}_k \rightarrow \hat{K}_\star$. При этом выражение (15)^c приобретает вид: $\hat{p}_\star^+ = \left(1 - \sum_{i=1}^m \hat{K}_{\star,i}\right) \hat{p}_\star^-$. Однако явных формул для предельных значений \hat{p}_\star^- , \hat{K}_\star и \hat{p}_\star^+ таким методом получить невозможно.

ТЕОРЕМА 1. Установившиеся коэффициенты Калмана в оптимальном фильтре (14), (15) имеют следующие явные выражения:

$$\hat{K}_\star = [\hat{K}_{\star,1} \mid \hat{K}_{\star,2} \mid \dots \mid \hat{K}_{\star,m}] = \hat{a}_\star [K_1^\star \mid K_2^\star \mid \dots \mid K_m^\star], \quad (16)$$

в которых участвуют формулы: (10)^f для K_i^\star , (10)^e для B_\star^2 , (10)^d для \hat{a}_\star и (10)^c для $\hat{\mu}_\star$.

Доказательство. Перепишем (9)^a в форме фильтра Калмана. Для этого в i -том фильтре Колмогорова–Винера введем обозначение прогнозной оценки $\hat{x}_k^{-(i)} = d_\star \hat{x}_{k-1}^{+(i)}$ — наподобие (12)^a — и подставим сюда $\hat{\mu}_\star = d_\star - d_\star \hat{a}_\star$ из (10)^d. Учитывая $\hat{a}_\star^{(i)} = K_i^\star \hat{a}_\star$ в (8), найдем $\hat{x}_k^{+(i)} = \hat{x}_k^{-(i)} + \hat{a}_\star [K_i^\star y_k^{(i)} - \hat{x}_k^{-(i)}]$. Суммирование по $i = 1, 2, \dots, m$ дает

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \hat{a}_\star \left[\sum_{i=1}^m K_i^\star y_k^{(i)} - \hat{x}_k^- \right].$$

С первым обозначением в (1) имеем $\sum_{i=1}^m K_i^* y_k^{(i)} = K^* y_k$, где

$$K^* \triangleq [K_1^* \mid K_2^* \mid \dots \mid K_m^*].$$

Теперь обратимся к фильтру Калмана, раскрывая скобки в (15)^a. Зная, что фильтр Колмогорова—Винера является стационарной версией фильтра Калмана, требуем почленного совпадения этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (17)^a \quad \dot{\hat{x}}_k^+ &= \dot{\hat{x}}_k^- + \dot{a}_* K^* y_k - \dot{a}_* \dot{\hat{x}}_k^-, \\ (17)^b \quad \dot{\hat{x}}_k^+ &= \dot{\hat{x}}_k^- + \dot{K}_* y_k - \dot{K}_* H \dot{\hat{x}}_k^-. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Совпадение $\dot{a}_* K^* = \dot{K}_*$ означает $\dot{a}_* K_i^* = \dot{K}_{*,i}$. Это совпадение и свойство суммы (10)^f приводят к результату: $\dot{K}_* H = \dot{a}_* K^* H = \dot{a}_* \sum_{i=1}^m K_i^* = \dot{a}_*$. \square

4. Задача Калмана в мультисенсорной постановке: информационная форма. Если строить адаптивный фильтр Калмана на основе ковариационной формы (разд. 3), то вычисления могут оказаться излишне сложными. Приведем теоретически эквивалентное решение в информационной (инверсной относительно предыдущего варианта) форме оптимального фильтра Калмана.

Вводим обозначения инверсных величин:

$$\dot{\lambda}_k^- \triangleq 1/\dot{p}_k^-, \quad \dot{\lambda}_k^+ \triangleq 1/\dot{p}_k^+, \quad \dot{s}_k^- \triangleq \dot{\lambda}_k^- \dot{x}_k^-, \quad \dot{s}_k^+ \triangleq \dot{\lambda}_k^+ \dot{x}_k^+.$$

Тогда из (12) и (13) получаем следующее.

Этап I — прогноз от $(k-1)T$ к моменту kT , $k = 1, 2, \dots$; $\dot{s}_0^+ \triangleq \dot{\lambda}_0^+ \dot{x}_0^+$, $\dot{\lambda}_0^+ \triangleq 1/\dot{p}_0^+$:

$$\left. \begin{aligned} (18)^a \quad \dot{s}_k^- &= \frac{\dot{\lambda}_k^-}{\dot{\lambda}_{k-1}^+} d_* \dot{s}_{k-1}^+, \\ (18)^b \quad \dot{\lambda}_k^- &= \frac{\dot{\lambda}_{k-1}^+}{d_*^2 + \dot{\lambda}_{k-1}^+ A_*^2 (1 - d_*^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Этап II — обновление в момент kT , $k = 1, 2, \dots$, благодаря измерению y_k :

$$\left. \begin{aligned} (19)^a \quad \dot{s}_k^+ &= \dot{s}_k^- + H^\top R_*^{-1} y_k = \dot{s}_k^- + \Delta \dot{s}_k^+, \\ (19)^b \quad \Delta \dot{s}_k^+ &\triangleq \sum_{i=1}^m \frac{y_k^{(i)}}{B_{*,i}^2}, \quad \Delta \dot{\lambda}_k^+ \triangleq (B_*^2)^{-1}, \\ (19)^c \quad \dot{\lambda}_k^+ &= \dot{\lambda}_k^- + \Delta \dot{\lambda}_k^+. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Запись стационарной версии информационной формы (18), (19) опускаем как очевидную. Вычислять слагаемые для суммы в (19)^b можно в МНС, остальные действия — в ЦПР.

5. Параметрическая неопределенность усложняет задачу. В общем случае априорной неопределенности всех параметров $\{d_*, A_*^2, B_{*,i}^2 \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ задач Колмогорова—Винера или Калмана их решения (10), или

(14), (15), или (18), (19) не могут быть реализованы. Вместо каждого из этих оптимальных решений возможно иметь лишь множество аналогов: либо субоптимальных фильтров, либо адаптивных фильтров.

Если любое из оптимальных решений обозначать $\mathfrak{M}(\hat{\theta}_*)$, то соответствующее множество субоптимальных (адаптивных) решений следует обозначать как $\mathfrak{M}(\theta)$, где θ — субоптимальное либо настраиваемое значение параметра. Например, в качестве адаптивной версии фильтра Колмогорова—Винера или, что равнозначно, стационарного фильтра Калмана (в ковариационной форме) следует брать $\mathfrak{M}(\theta)$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (20)^a \quad \hat{x}_k^- &= d\hat{x}_{k-1}^+, \\ (20)^b \quad \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + a(Ky_k - \hat{x}_k^-) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \mathfrak{M}(\theta) \text{ — адаптивная модель:} \\ \theta = \{a, d, K_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}, \\ K = [K_1 \mid K_2 \mid \dots \mid K_m]. \end{array} \quad (20)$$

Каждое пробное значение $\theta := \theta[n] \in \Theta \subset \mathbb{R}^{m+2}$, где $n = 1, 2, \dots$ — номер пробного значения, создает n -ную параметрическую версию $\mathfrak{M}(\theta[n])$ субоптимального фильтра $\mathfrak{M}(\theta)$ (20) в некотором допустимом множестве Θ . Каждая n -ная версия $\mathfrak{M}(\theta[n])$ формирует свою пару оценок: экстраполяционную $\hat{x}_k^- \triangleq \hat{x}_k^-(\theta[n])$ и отфильтрованную $\hat{x}_k^+ \triangleq \hat{x}_k^+(\theta[n])$, обе страдающие погрешностями: $\hat{e}_k^-(\theta[n]) \triangleq x_k - \hat{x}_k^-(\theta[n])$ и $\hat{e}_k^+(\theta[n]) \triangleq x_k - \hat{x}_k^+(\theta[n])$, с соответствующими значениями ИФК: $J_e^-(\theta[n]) \triangleq E \left\{ [\hat{e}_k^-(\theta[n])]^2 \right\}$ и $J_e^+(\theta[n]) \triangleq E \left\{ [\hat{e}_k^+(\theta[n])]^2 \right\}$, т. е. значениями дисперсий ошибок (7) в параметрическом пространстве Θ при работе этой n -ной версии на всех наличных данных $y_j^{(i)} \triangleq y_i(jT)$, $i = 1, 2, \dots, m$, где $j = k, k-1, \dots, l$ ($l \rightarrow -\infty$ теоретически).

Минимизация любого критерия (7) влечет достижение минимума другим критерием из этой пары, поэтому достаточно заниматься одним из них. Однако любой ИФК (7) может быть минимизирован лишь теоретически, так как ошибки оценивания $\hat{e}_k^-(\theta[n])$, $\hat{e}_k^+(\theta[n])$ не являются доступными величинами. Если бы любой критерий $J_e^\pm(\theta[n]) \triangleq E \left\{ [\hat{e}_k^\pm(\theta[n])]^2 \right\}$ из (7) был доступен, то для его численной минимизации в пространстве параметров фильтра (20) можно было бы пытаться применять стандартные методы, например, метод скорейшего спуска [17, р. 22]:

$$\left. \begin{aligned} (21)^a \quad g(\theta[n]) &= \nabla_\theta J_e^\pm(\theta[n]), \\ (21)^b \quad \theta[n+1] &= \theta[n] - \gamma[n]g(\theta[n]) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

с величиной n -ного шага $\gamma[n]$ (хотя это не лучший выбор), или более надежный метод Ньютона [17, р. 44]:

$$\left. \begin{aligned} (22)^a \quad g(\theta[n]) &= \nabla_\theta J_e^\pm(\theta[n]), \\ (22)^b \quad G(\theta[n]) &= \nabla_\theta^2 J_e^\pm(\theta[n]), \\ (22)^c \quad \text{solve } G(\theta[n])\delta &= -g(\theta[n]) \text{ for } \delta \triangleq \delta[n], \\ (22)^d \quad \theta[n+1] &= \theta[n] + \delta[n], \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или другие методы этого типа [17, р. 49–57]. При их сходимости к точке минимума ИФК можно было бы рассчитывать, что $\theta[n] \rightarrow \hat{\theta}_* = \{\hat{a}_*, d_*, K_i^* \mid i = 1, 2, \dots, m\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существенно, что итерации по номерам версий субоптимального фильтра (при $n = 1, 2, \dots$) можно выполнять не в реальном, а в ускоренном (компьютерном) темпе времени на одном и том же множестве $y_j^{(i)} \triangleq y_i(jT)$, $i = 1, 2, \dots, m$, где $j = k, k - 1, \dots, l$, экспериментальных данных, если они сохранены для этого: *меньшее компьютерное время поиска лучшей версии в обмен на большие затраты компьютерной памяти.*

6. Построение вспомогательного (инструментального) функционала качества. Однако реализация таких идей невозможна. Поскольку в задаче фильтрации ошибки $\hat{\varepsilon}_k^\pm(\theta)$ (вторая строка в (7)) не могут быть известны, любой исходный функционал ошибки (первая строка в (7)) не может быть практическим инструментом оптимизации фильтра.

Задача формирования ВФК, эквимодального исходному функционалу качества, поставлена [18] как задача *Активного Принципа Адаптации* (АПА).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два функционала *эквимодальны друг другу*, если совпадают аргументы, доставляющие им минимум, а именно: минимум одного функционала влечет минимум другого функционала; в вычислительном процессе минимизации одного из них, доступного для реализации, минимум другого, не доступного для реализации, достигается автоматически.

Обозначим доступный для реализации ВФК обобщенно как $J_a(\theta)$, следуя термину *Auxiliary Performance Index*. Не доступный для реализации ИФК обозначим $J_o(\theta)$ — *Original Performance Index*. Потребуем свойство:

$$J_a(\theta) = J_o(\theta) + \text{const}_\theta. \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть за $J_o(\theta)$ принят первый из критериев (7) и доступный для реализации процесс $\varepsilon_k^-(\theta)$ определен выражением

$$\varepsilon_k^-(\theta) \triangleq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_k^{(i)} - \hat{x}_k^-(\theta).$$

Тогда (23) выполнено для $J_a(\theta) \triangleq \mathbb{E} \{[\varepsilon_k^-(\theta)]^2\}$ при $\text{const}_\theta = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m B_{*,i}^2$.

Доказательство. Домножим первое выражение в (1) слева на H^\top , поделим на m и затем вычтем $\hat{x}_k^-(\theta)$. Получаем результат:

$$\varepsilon_k^-(\theta) = [x_k - \hat{x}_k^-(\theta)] + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_k^{(i)} = e_k^-(\theta) + \bar{v}_k, \quad \bar{v}_k \triangleq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_k^{(i)}. \quad (24)$$

Возводя (24) в квадрат, усредняя и учитывая $\mathbb{E} \{[e_k^-(\theta)][\bar{v}_k]\} = 0$, находим

$$\mathbb{E} \{[\varepsilon_k^-(\theta)]^2\} = \mathbb{E} \{[e_k^-(\theta)]^2\} + \mathbb{E} \{[\bar{v}_k]^2\}, \quad \mathbb{E} \{[\bar{v}_k]^2\} = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m B_{*,i}^2. \quad (25)$$

Сопоставляя (25) с (23), убеждаемся в справедливости утверждения. \square

Благодаря этому результату задача активной адаптации применительно к мультисенсорной фильтрации получает инструментальное решение (рис. 1). Это означает, что в практических методах (21) или (22) в качестве рабочего критерия самооптимизации может быть взят $\min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\varepsilon_k^-(\theta)]^2$, где N — интервал осреднения для приближенного оценивания математического ожидания $J_a(\theta) \triangleq E \{[\varepsilon_k^-(\theta)]^2\}$.

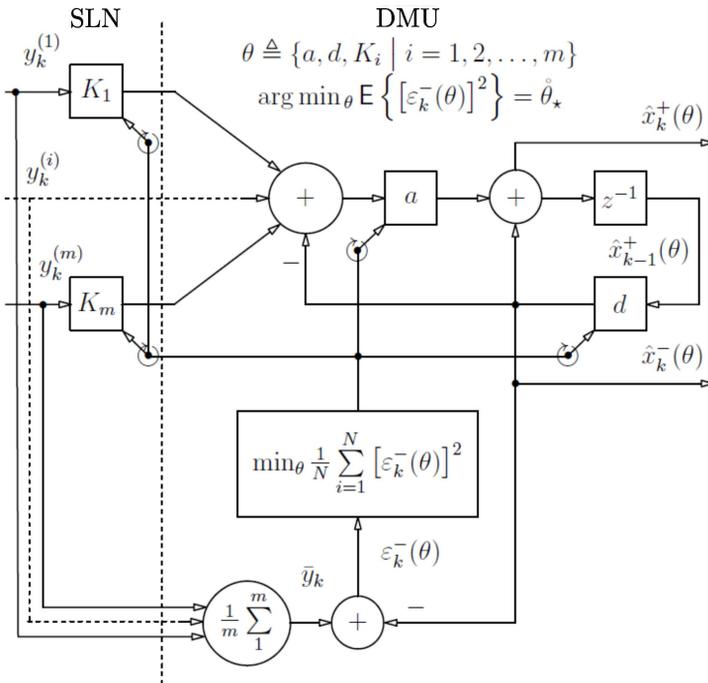


Рис. 1. Активный принцип адаптации фильтра в мультисенсорной постановке: z^{-1} — блок задержки на время такта T ; SLN — место нахождения сенсоров; DMU — центр принятия решений. Теоретическая сходимость при $n \rightarrow \infty$: $\theta[n] \rightarrow \hat{\theta}_* = \{\hat{a}_*, d_*, K_i^* \mid i = 1, 2, \dots, m\}$

[Figure 1. Active principle of adaptation in the multi-sensor problem statement: z^{-1} — a one-step delay unit; SLN — sensors' location in the network; DMU — Decision Making Unit. Theoretical convergence at $n \rightarrow \infty$: $\theta[n] \rightarrow \hat{\theta}_* = \{\hat{a}_*, d_*, K_i^* \mid i = 1, 2, \dots, m\}$

7. Численный пример. Численные эксперименты проведем в системе MATLAB в режиме двумерной настройки. Для этого считаем, что входные данные содержат сигнал $x(t)$ с двумя неизвестными параметрами A_*^2 и α_* корреляционной функции (3). Будем генерировать отсчеты x_k сигнала по алгоритму (5), в котором зададим точные значения двух параметров модели: $d_* \triangleq e^{-\alpha_* T} = 3/5$ и $A_*^2 = \rho_*^2 B_*^2$. Здесь используем обозначение $\rho_*^2 \triangleq A_*^2 / B_*^2$ для отношения мощностей “сигнал/шум”, где B_*^2 взято из (8). Для модельного случая четырех сенсоров ($m = 4$) с известными мощностями шумов измерения $B_{*,i}^2 = 1$ ($i = \overline{1, 4}$) имеем $B_*^2 = 1/4$, при этом формула (16) Теоремы 1 дает установившиеся значения коэффициентов фильтра Калмана:

$\hat{K}_* = \hat{a}_* [0.25 \mid 0.25 \mid 0.25 \mid 0.25]$. Его параметр \hat{a}_* удовлетворяет выражению (10)^d, а $\hat{\mu}_*$ — выражению (10)^c, которому придадим удобный для вычислений вид:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_* &= \beta_* - \sqrt{\beta_*^2 - 1}, \\ \beta_* &\triangleq (1/2) [(d_*^{-1} + d_*) + \rho_*^2 (d_*^{-1} - d_*)]. \end{aligned}$$

Таким образом, адаптивному фильтру (см. рис. 1) неизвестен двумерный $\hat{\theta}_* = \{\hat{a}_*, d_*\}$. В адаптивном фильтре его должен заменять настраиваемый параметр $\theta \triangleq \{a, d\}$. Параметры $\{K_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ настраивать не нужно, поскольку их точные значения $\{K_i^* = 0.25 \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ известны.

План вычислительных экспериментов следующий. Будем сохранять N последних значений из серии измерений (2) при значении $\hat{\theta}_* = \{\hat{a}_*; d_*\}$. Зададим интервал измерений $N = 500$. Накопленные измерения используем для вычисления значений исходного и вспомогательного функционалов качества $J_o(\theta)$ и $J_a(\theta)$, заменяя оператор математического ожидания $E\{\cdot\}$, предполагаемый в ключевом соотношении (23), оператором текущего среднего. Делая это при изменяющихся значениях параметров a и d фильтра для разных значений ρ_*^2 , построим графики.

Результаты, полученные при этих условиях эксперимента, показывают процесс оптимальной фильтрации сигнала на рис. 2 для соотношений сигнал/шум $\rho_*^2 = 1$ (графики слева) и $\rho_*^2 = 100$ (графики справа).

Возможность сопоставить значения ИФК и ВФК при тех же условиях эксперимента дает следующие результаты (рис. 3 и 4). Из рис. 3 видно, что точки минимума $J_o(\theta)$ и $J_a(\theta)$ по a и d совпадают и соответствуют оптимальным значениям $\hat{a}_* = 4/9 \approx 0.44$ и $d_* = 3/5 = 0.6$. Рис. 4 также показывает, что минимумы критериев $J_o(\theta)$ и $J_a(\theta)$ достигаются в точке оптимальных значений параметров для данного $\rho_*^2 = 100$: при $\hat{a}_* = -808/9 + (8/9)\sqrt{10426} \approx 0.98$ и $d_* = 3/5 = 0.6$.

Таким образом, проведенные вычислительные эксперименты подтверждают полученные в работе теоретические результаты.

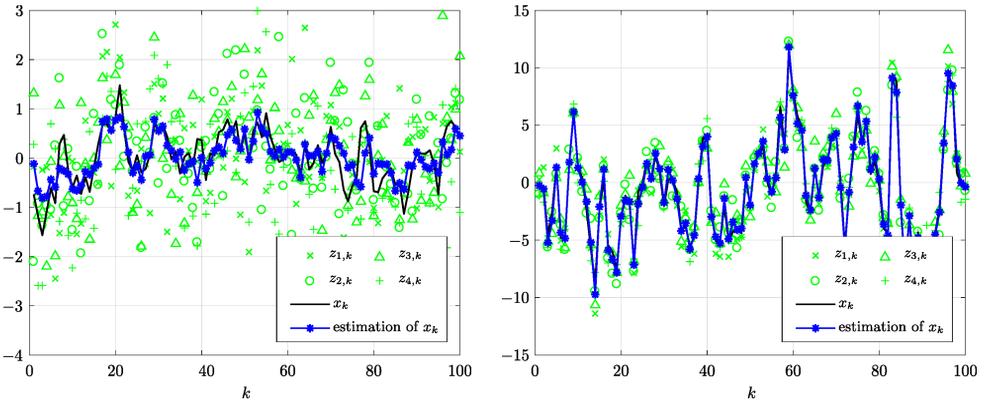


Рис. 2. Оптимальная фильтрация сигнала x_k ($k = 1, \dots, 100$) по данным четырех сенсоров при различных отношениях сигнал/шум: $\rho_*^2 = 1$ (слева) и $\rho_*^2 = 100$ (справа)

[Figure 2. Optimal filtering process of signal x_k ($k = 1, \dots, 100$) given data from the four sensors at different signal-to-noise ratios: $\rho_*^2 = 1$ (left) and $\rho_*^2 = 100$ (right)]

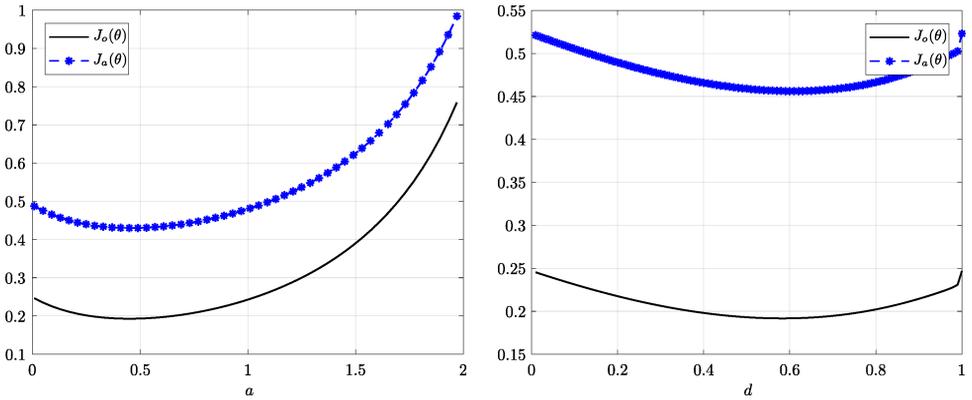


Рис. 3. Значения исходного функционала качества $J_o(\theta)$ и вспомогательного функционала качества $J_a(\theta)$, вычисленные по $N = 500$ данным измерений от четырех сенсоров для отношения сигнал/шум $\rho_*^2 = 1$ при изменении параметров адаптивного фильтра $\theta = \{a, d\}$

[Figure 3. Values of $J_o(\theta)$ (OPI – Original Performance Index) and $J_a(\theta)$ (API – Auxiliary Performance Index) calculated based on $N = 500$ measurement data from four sensors at signal-to-noise ratio $\rho_*^2 = 1$ vs the adaptive filter parameter $\theta = \{a, d\}$

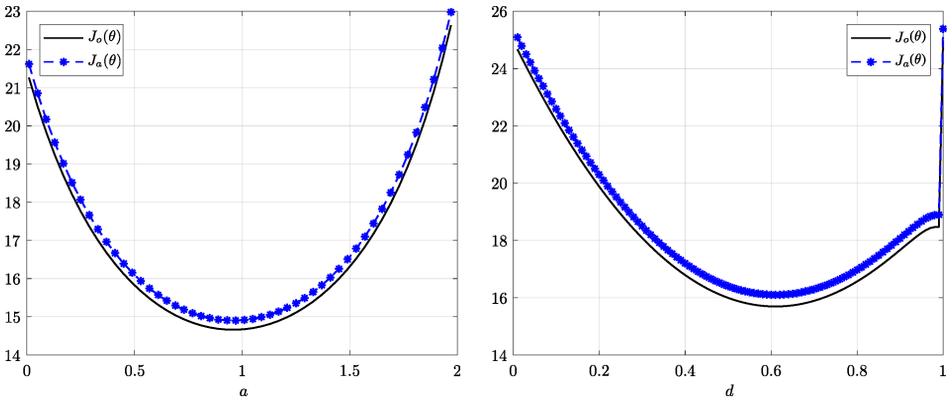


Рис. 4. Значения исходного функционала качества $J_o(\theta)$ и вспомогательного функционала качества $J_a(\theta)$, вычисленные по $N = 500$ данным измерений от четырех сенсоров для отношения сигнал/шум $\rho_*^2 = 100$ при изменении параметров адаптивного фильтра $\theta = \{a, d\}$

[Figure 4. Values of $J_o(\theta)$ (OPI – Original Performance Index) and $J_a(\theta)$ (API – Auxiliary Performance Index) calculated based on $N = 500$ measurement data from four sensors at signal-to-noise ratio $\rho_*^2 = 100$ vs the adaptive filter parameter $\theta = \{a, d\}$

Закключение. Установлена возможность формирования и использования инструментального функционала качества для задачи самооптимизации систем мультисенсорного выделения одного полезного сигнала из зашумленных показаний множества датчиков, отличительной особенностью которой является невозможность использования исходного функционала ошибки фильтрации для решения этой задачи.

Данный инструментальный функционал отличается от исходного функционала ошибки фильтрации на постоянную величину, не зависящую от параметров системы обработки поступающей от датчиков измерительной инфор-

мации. В силу этой связи минимум инструментального функционала влечет минимум исходного функционала, но, в отличие от последнего, может быть найден применением к нему всего аппарата и средств оптимизации.

Предложенное решение осуществимо при достаточно общих условиях:

- модель сигнала ($\mathcal{M}_{\text{signal}}$) есть обоснованное представление случайного полезного сигнала в виде стационарного марковского процесса p -го порядка как решения линейного устойчивого стохастического дифференциального уравнения p -го порядка с неизвестными параметрами уравнения и ковариаций порождающих шумов;
- модель сенсоров ($\mathcal{M}_{\text{sensors}}$) есть представление измерительных данных как поступающих дискретно во времени линейных комбинаций сигнала и дискретных белых шумов с неизвестными ковариациями.

В результате детального анализа этого решения на частном примере адаптивного оценивания марковского процесса 1-го порядка выявлено следующее:

- Модель сигнала ($\mathcal{M}_{\text{signal}}$) диктует достаточно сложные операции одношагового предсказания и затем обновления оценок в двухэтапном алгоритме фильтрации; их целесообразно выполнять в одном месте — в центре принятия решений; здесь же должны выполняться вычислительные операции по минимизации инструментального функционала качества.
- Модель сенсоров ($\mathcal{M}_{\text{sensors}}$) диктует несложные операции адаптивного масштабирования данных; их целесообразно оставлять в местах нахождения сенсоров (датчиков первичной измерительной информации).
- Базовые алгоритмы фильтрации нуждаются в придании им алгоритмов адаптации параметров; они могут быть взяты в различных формах: (а) в форме фильтра Колмогорова—Винера, (б) в ковариационной форме фильтра Калмана или (в) в информационной форме фильтра Калмана.
- Вычислительные операции по минимизации инструментального функционала качества должны быть найдены как варианты эффективных алгоритмов различного уровня сложности, изученные, например, в [19].

Теоретическая разработка, предпринятая в данной работе, открывает возможности развития этой темы в следующих направлениях:

- 1) Применение модели сигнала ($\mathcal{M}_{\text{signal}}$) как процесса порядка $p > 1$.
- 2) Сравнение методов минимизации инструментального функционала качества по вычислительным затратам, скорости сходимости и точности.
- 3) Анализ эффекта модельных неточностей в системе мультисенсорного выделения сигнала, действующей по активному принципу адаптации.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований и Правительства Ульяновской области в рамках научных проектов № 18–41–732002 и № 18–47–730001.

Библиографический список

1. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. *Многомерные дискретные системы управления*. М.: Наука, 1966. 416 с.
2. Балакришнан А. *Теория фильтрации Калмана*. М.: Мир, 1988. 168 с.
3. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*. vol. 1 / Mathematics in Science and Engineering. vol. 141. New York: Academic Press, Inc, 1979. xix+423 pp.
4. Фомин В. Н. *Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация*. М.: Наука, 1984. 288 с.
5. Speyer J. Computation and transmission requirements for a decentralized linear-quadratic-Gaussian control problem // *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979. vol. 24, no. 2. pp. 266–269. doi: 10.1109/TAC.1979.1101973.
6. Rao B. S., Durrant-Whyte H. F. Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering // *IEE Proc.—Control Theory Appl.*, 1991. vol. 138, no. 5. pp. 413–420. doi: 10.1049/ip-d.1991.0057.
7. Olfati-Saber R. Distributed Kalman filtering and sensor fusion in sensor networks / *Networked Embedded Sensing and Control* / Lecture Notes in Control and Information Science, 331; eds. P. J. Antsaklis, P. Tabuada. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. pp. 157–167. doi: 10.1007/11533382_10.
8. Alriksson P., Rantzer A. Model based information fusion in sensor networks // *IFAC Proceedings Volumes*, 2008. vol. 41, no. 2. pp. 4150–4155. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00698.
9. Rao B. S. Y., Durrant-Whyte H. F., Sheen J. A. A fully decentralized multi-sensor system for tracking and surveillance // *Int. J. Robot. Res.*, 1993. vol. 12, no. 1. pp. 20–44. doi: 10.1177/027836499301200102.
10. Mahmoud M. S., Khalid H. M. Distributed Kalman filtering: a bibliographic review // *IET Control Theory and Applications*, 2013. vol. 7, no. 4. pp. 483–501. doi: 10.1049/iet-cta.2012.0732.
11. Marelli D., Zamani M., Fu M., Ninness B. Distributed Kalman filter in a network of linear systems // *Systems Control Letters*, 2018. vol. 116, no. 6. pp. 71–77. doi: 10.1016/j.sysconle.2018.04.005.
12. Wu Z., Fu M., Xu Yo., Lu R. A distributed Kalman filtering algorithm with fast finite-time convergence for sensor networks // *Automatica*, 2018. vol. 95, no. 9. pp. 63–72. doi: 10.1016/j.automatica.2018.05.012.
13. Dormann K., Noack B., Hanebeck U. D. Optimally distributed Kalman filtering with data-driven communication // *Sensors*, 2018. vol. 18, no. 4. pp. 1034. doi: 10.3390/s18041034.
14. Badyn M. H., Mesbahi M. Large-scale distributed Kalman filtering via an optimization approach // *IFAC PapersOnLine*, 2017. vol. 50, no. 1. pp. 10742–10747. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2268.
15. Govaers F. Distributed Kalman filter (Chapter 13) / *Kalman Filters – Theory for Advanced Applications*; eds. Ginalber Luiz de Oliveira Serra. London: IntechOpen, 2018. pp. 253–272. doi: 10.5772/intechopen.71941.
16. Semushin I. V. The APA based time-variant system identification / *53rd IEEE Conference on Decision and Control* (15–17 December 2014, Los Angeles, CA, USA), 2014. pp. 4137–4141. doi: 10.1109/CDC.2014.7040033.
17. Fletcher R. *Practical Methods of Optimization*. Chichester, Great Britain: John Wiley & Sons Ltd. xiv+436 pp. doi: 10.1002/9781118723203.
18. Semushin I. V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results II // *Int. J. Communications, Network, and System Sciences*, 2011. vol. 4, no. 4. pp. 266–285. doi: 10.4236/ijcns.2011.44032.
19. Цыганова Ю. В. *Ортогонализированные блочные методы для параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем*. Дис. . . д-ра физ.-мат. наук: 05.13.18. Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2017. 400 с.

MSC: 93E35, 93A30, 65C20

Active adaptation of a distributed multi-sensor filtering system

I. V. Semushin, Yu. V. Tsyganova

Ulyanovsk State University,
Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technologies,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Abstract

A multi-sensor filtering system is characterized mathematically as a result of the solution to the problem of synthesizing the multi-dimensional discrete system of filtering a single signal from heterogeneous data sources. The stationary problem statement has three variants of its solution: by Kolmogorov–Wiener, Kalman covariance, and Kalman information forms. In the body of the paper, we actualize a problem of these solutions under uncertainty conditions. Aimed at the Active Principle of Adaptation, we have found a method to form an instrumental performance index to substitute the inaccessible original performance index (filtering error mean square) by that criterion functional we created. This substitution makes it possible to apply for system adaptation all apparatus and tools of practical optimization methods, first of all, the gradient and Newton-like methods.

Our findings follow:

- Stretching one-step prediction and measurement update operations are wise to perform at the Decision Making Center; computation operations aimed to minimize the instrumental performance index are to be done in this place, too.
- Uncompounded procedures of adaptive data scaling are advisable to complete at the sensors' location in the network.
- Adaptation algorithms may be implemented based for filter structures taken in different forms: Kolmogorov–Wiener, Kalman covariance, or Kalman information forms.
- Computational operations for minimizing the instrumental performance index would be beneficial to develop as versions to implement the modern practical optimization methods of different levels of complexity.

Research Article

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Semushin I. V., Tsyganova Yu. V. Active adaptation of a distributed multi-sensor filtering system, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 724–743. doi:10.14498/vsgtu1704 (In Russian).

Authors' Details:

Innokentiy V. Semushin  <https://orcid.org/0000-0002-3687-1110>

Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology; e-mail: kentvsem@yandex.ru

Yulia V. Tsyganova  <https://orcid.org/0000-0001-8812-6035>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology;

e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Keywords: active adaptation, multi-sensor system, distributed Kalman filtering, instrumental optimization performance criterion.

Received: 18th May, 2019 / Revised: 19th October, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 16th December, 2019

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The reported study has been funded by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of Ulyanovsk region according to the research projects nos. 18-41-732002 and 18-47-730001.

References

1. Katkovnik V. Ya., Poluektov R. A. *Mnogomernye diskretnye sistemy upravleniia* [Multidimensional Discrete Control Systems]. Moscow, Nauka, 1966, 416 pp. (In Russian)
2. Balakrishnan A. *Kalman filtering theory*. New York, Optimization Software, Inc., Publications Division, 1984, xii+222 pp.
3. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 1, Mathematics in Science and Engineering, vol. 141. New York, Academic Press, Inc, 1979, xix+423 pp.
4. Fomin V. N. *Rekurrentnoe otsenivanie i adaptivnaia fil'tratsiia* [Recurrent Estimation and Adaptive Filtering]. Moscow, Nauka, 1984, 288 pp. (In Russian)
5. Speyer J. Computation and transmission requirements for a decentralized linear-quadratic-Gaussian control problem, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1979, vol. 24, no. 2, pp. 266–269. doi: 10.1109/TAC.1979.1101973.
6. Rao B. S., Durrant-Whyte H. F. Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering, *IEE Proc.–Control Theory Appl.*, 1991, vol. 138, no. 5, pp. 413–420. doi: 10.1049/ip-d.1991.0057.
7. Olfati-Saber R. Distributed Kalman filtering and sensor fusion in sensor networks, In: *Networked Embedded Sensing and Control*, Lecture Notes in Control and Information Science, 331; eds. P. J. Antsaklis, P. Tabuada. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006, pp. 157–167. doi: 10.1007/11533382_10.
8. Alriksson P., Rantzer A. Model based information fusion in sensor networks, *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 41, no. 2, pp. 4150–4155. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.00698.
9. Rao B. S. Y., Durrant-Whyte H. F., Sheen J. A. A fully decentralized multi-sensor system for tracking and surveillance, *Int. J. Robot. Res.*, 1993, vol. 12, no. 1, pp. 20–44. doi: 10.1177/027836499301200102.
10. Mahmoud M. S., Khalid H. M. Distributed Kalman filtering: a bibliographic review, *IET Control Theory and Applications*, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 483–501. doi: 10.1049/iet-cta.2012.0732.
11. Marelli D., Zamani M., Fu M., Ninness B. Distributed Kalman filter in a network of linear systems, *Systems Control Letters*, 2018, vol. 116, no. 6, pp. 71–77. doi: 10.1016/j.sysconle.2018.04.005.
12. Wu Z., Fu M., Xu Yo., Lu R. A distributed Kalman filtering algorithm with fast finite-time convergence for sensor networks, *Automatica*, 2018, vol. 95, no. 9, pp. 63–72. doi: 10.1016/j.automatica.2018.05.012.
13. Dormann K., Noack B., Hanebeck U. D. Optimally distributed Kalman filtering with data-driven communication, *Sensors*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 1034. doi: 10.3390/s18041034.

14. Badyn M. H., Mesbahi M. Large-scale distributed Kalman filtering via an optimization approach, *IFAC PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 10742–10747. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2268.
15. Govaers F. Distributed Kalman filter (Chapter 13), In: *Kalman Filters – Theory for Advanced Applications*; eds. Ginalber Luiz de Oliveira Serra. London, IntechOpen, 2018, pp. 253–272. doi: 10.5772/intechopen.71941.
16. Semushin I. V. The APA based time-variant system identification, In: *53rd IEEE Conference on Decision and Control* (15–17 December 2014, Los Angeles, CA, USA), 2014, pp. 4137–4141. doi: 10.1109/CDC.2014.7040033.
17. Fletcher R. *Practical Methods of Optimization*. Chichester, Great Britain, John Wiley & Sons Ltd, xiv+436 pp. doi: 10.1002/9781118723203.
18. Semushin I. V. Adaptation in stochastic dynamic systems — Survey and new results II, *Int. J. Communications, Network, and System Sciences*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 266–285. doi: 10.4236/ijcns.2011.44032.
19. Tsyganova Yu. V. *Othogonalized array methods for parametric identification of linear stochastic systems*, Dissertation (Doct. Phys.-Math. Sci.; 05.13.18). Ulyanovsk, Ulyanovsk State University, 2017, 400 pp. (In Russian)



Short Communications

MSC: 62P10

Mathematical modeling and prediction of the effectiveness of surgical treatment in surgery of the spine and pelvic complex

L. Yu. Kossovich¹, A. V. Kharlamov¹,
Yu. V. Lysunkina¹, A. E. Shulga²

¹ N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University), 83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

² Research Institute of Traumatology, Orthopedics, and Neurosurgery, Saratov State Medical University named after V. I. Razumovsky, 112, Bolshaya Kazachya str., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

Based on the study of the literature on the quality assessment of operative treatment in reconstructive surgery of the spine and pelvic complex, it can be concluded that, as a rule, multiple linear or logistic regression, a decision tree, is used to predict the quality of operative treatment. Neural networks are less commonly used.

Forecasting is performed on the basis of a comparison of the pre- and postoperative condition of the patient, assessed according to various ordinal and quantitative scales as a result of interviewing the patient.

With a relatively small number of analyzed cases of the disease (several tens or hundreds) and a small number of indicators (no more than two or three dozen), the use of neural networks seems premature for two reasons: a small amount of data allows analyzing them with classical methods of mathematical statistics, and identifying dependencies on a given stage requires constant “manual” intervention, taking into account information from the subject area.

The application of statistical analysis methods to data on the treatment of chronic injuries showed the presence of standard problems for medical

Short Communication

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kossovich L. Yu., Kharlamov A. V., Lysunkina Yu. V., Shulga A. E. Mathematical modeling and prediction of the effectiveness of surgical treatment in surgery of the spine and pelvic complex, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 744–755. doi: 10.14498/vsgtu1702.

Authors' Details:

Leonid Yu. Kossovich <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics; e-mail: president@sgu.ru

Alexander V. Kharlamov <https://orcid.org/0000-0002-1709-6518>

Cand. Economics Sci.; Associate Professor; Dept. of Foundations of Mathematics and Computer Science; e-mail: harlamov@info.sgu.ru

data. This is the presentation of the initial information in nominal or ordinal scales, the subjective nature of some indicators, as well as the interdependence of the presented characteristics, which reduces the quality of research.

The search for the objective function that characterizes the quality of surgical treatment has shown the ambiguity of solving this problem even for a highly specialized situation.

The identification of objectively present relationships also revealed a large number of problems, especially related to the choice of the type of surgical treatment, which is largely determined by the experience of the surgeon.

Based on the study, it was proposed to build a model for predicting the quality of surgical treatment, based on expert assessments in the form of a forecast tree with recommended surgical treatment options and a statistical forecast based on the available experience. It is assumed that the model will be dynamic with feedback and be able to self-update.

To predict the quality of surgical treatment in reconstructive surgery of the spine and pelvic complex, it is advisable to use a forecast tree, which allows us to recommend the type of surgery for a specific case of injury or disease and calculate the predicted values of quality of life indicators.

Keywords: evaluation of the effectiveness of treatment, prognosis of treatment, decision support.

Received: 13th May, 2019 / Revised: 16th September, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 20th December, 2019

1. Introduction. The task of predicting the results of surgical treatment is becoming increasingly relevant in the conditions of accumulating practical experience and the ever accelerating introduction of IT technologies in medicine. Prediction based on statistical data on the results of previous similar operations contributes to the informed choice of surgical reconstructive treatment. Statistical analysis allows to take into account difficultly formalizable factors describing diseases or injuries, as well as data from ordinal and nominal scales. Therefore, when developing clinical decision support system, along with planning and modeling, it is necessary to apply the prediction of treatment results based on statistical analysis.

2. Theoretical analysis. The search for criteria for the effectiveness of treatment, identifying dependencies of the quality of treatment on the type of diseases, injuries and patient characteristics has been the subject of many scientific studies. Sufficient attention is paid to building clinical decision support systems (Clinical DSS) in general, and in surgery in particular.

As a rule, Clinical DSS find effective application in diagnostics. For example, A. B. Goncharova, E. I. Sergeeva [1] described the use of the Clinical DSS model when making a diagnosis of patients based on the knowledge base of the expert

Yuliya V. Lysunkina  <https://orcid.org/0000-0002-6633-0980>

Assistant; Dept. of Mathematical Theory of Elasticity and Biomechanics;
e-mail: lysunkina@yandex.ru

Alexey E. Shulga; Cand. Medical Sci.; Senior Researcher; Dept. of of Innovative Management Technologies in Treatment and Rehabilitation; e-mail: doc.shulga@yandex.ru

system, presented in the form of a table of values based on the notion/absence of symptoms.

The work of A. A. Litvin, V. A. Litvin [2] presents a review of the literature on the use of DSS in surgery. Noted, in particular, that the article by P. Davuluri et al. [3] developed and applied a computer DSS for patients with pelvic injuries. An automated system for analyzing the results of examining patients using statistical tests is used for calculations.

A. A. Egorov and V. S. Mikshina [4] developed a DSS based on artificial neural networks to determine the possible outcomes and ways to complete the surgical treatment of peritonitis. Three variants of the outcome of operations are considered.

R. Mofidi et al. [5] developed a DSS for classifying the severity of acute pancreatitis and predicting the possibility of death with the use of artificial neural networks for classification. The following parameters are taken into account as significant indicators: age, hypotension, two or more signs of SIRS, PaO₂ levels, lactate dehydrogenase, glucose, urea, calcium, hematocrit, and the number of leukocytes in the blood.

B. Andersson et al. [6] conducted a study in which developed DSS on the basis of artificial neural networks for early prediction of acute pancreatitis exacerbation.

N. A. Korenevsky et al. [7] developed and used DSS using fuzzy logic to control decision-making processes in the treatment of patients with acute cholecystitis. The authors also solve the problem of forecasting with the use of expert assessments in the development of rules.

The selection of the objective function in the DSS is a key task. A sufficient number of studies are also devoted to the definition of target functions as an indicator of the effectiveness of surgical treatment and the identification of factors affecting its value.

A. V. Krut'ko, E. S. Baikov [8] presented a review of the current literature analyzing the criteria for predicting the results of surgical treatment of herniated intervertebral disks.

In the work of J. Doring et al. [9] the connection of lumbar lordosis with the pelvic geometrical parameters established by X-ray studies was revealed.

In the work of G. Duval-Beaupere et al. [10] it was revealed that a decrease in the angle of inclination of the pelvis and the sacrum correlates with a higher frequency of recurrence of hernias of the lumbar spine.

Y. J. Sur, C. G. Kong, and J. B. Park [11] found that the presence of the transitional lumbosacral vertebra correlates significantly with the frequency of hernia relapses.

In the work of M. Shen, A. Razi [12] it was revealed that the possibility of recurrence is associated with retrolisthesis, which is defined as a vertebral displacement by more than 8%.

In the thesis, S. I. Ovcharenko [13], on the basis of the quantitative significance of clinical factors due to the intensity of pain syndrome and the number of affected vertebral motor segments, developed a technology for predicting the outcome of surgical treatment of lumbar osteochondrosis based on the use of polyfactorial correlation analysis and tabular prediction.

In the thesis, A. Antipko [14], based on discriminant analysis using data on the duration of conservative treatment, a model was developed for assessing the risk of recurrence of intervertebral hernia in the lumbosacral spine.

A. V. Krut'ko, E. S. Baikov [15] developed guidelines for "Predicting the results

of surgical treatment of patients with hernias of lumbar intervertebral disks” and created a software product for prediction based on the results of MRI and X-ray of the likelihood of recurrence of intervertebral hernia after its deletion.

The thesis of A. G. Nazarenko [16] considers various types of operations and indications for their use. The creation of a vertebral register of patients is described.

J. D. Berne, A. Cook, S. A. Rowe, and S. H. Norwood in the article [17] applied logistic regression to analyze for the presence or absence of arterial damage. To identify patterns, a retrospective database was used, containing about 10,000 records for the period 2000–2009.

In articles [18] and [19], in the course of thematic cohort studies, regression models for additive-multiplicative hazards in multiple outcomes of the disease are constructed and evaluated.

Multiple linear regression was constructed in [20], according to a prospective observational study of 424 patients with severe trauma, devoted to traumatic endotheliopathy. Mortality is considered as a function of the following indicators - adrenaline, norepinephrine syndecan-1, thrombomodulin and selectin, demography, type and severity of injury, physiology, treatment.

Hae-Dong Jang et al. [21], in the article, devoted to the risk factor analysis for predicting vertebral body re-collapse after posterior instrumented fusion in thoracolumbar burst fracture, explores data for 10 years to build a logistic regression: the probability of a reoperation is analyzed.

In work [22] the problem of sagittal alignment is considered. Multiple regression is constructed, the resulting variable is the level of residual curvature. Self-learning computer programs are used for surgical planning and prediction of postoperative alignment.

In [23], logistic regression is used to determine the risk factors for cage subsidence in patients with ossification of the posterior longitudinal ligament (OPLL) after anterior cervical discectomy.

In [24], preoperative leg pain assessment is used to predict transforaminal lumbar interbody fusion. The dependence of the success of the operation on preoperative indicators such as clinical evaluations, age and body mass index is analyzed.

The analysis of the studied sources led to the following conclusions. Each study presents a solution to a particular task, usually determined by the type of disease, injury or line of research, within which a specific objective function is selected and statistical models are built. Usually it is a classification or regression. Forecasting is reduced to the classification of patients according to indicators before and after surgery. Multiple linear or logistic regression, a decision tree are applied for forecasting. More rarely it is neural networks. Statistical indicators of interrelations are used for their identification.

3. Empirical analysis. A study of empirical data obtained from one of the authors’ own studies on the results of surgical treatment chronic injury with the use of multidimensional statistical analysis was conducted to build a forecast model for the clinical decision support system in surgery of spine and pelvic complex implemented under the project of Advanced Research Foundation.

Data of 80 patients, including the following indicators: gender and age, type of injury, quality of life indicators before and after surgery, type of operation were investigated. Baseline data and their designations are presented in Table 1.

To determine the criterion of success of treatment (objective function), various

Table 1

Designations of patient indicators

Designation	Indicators
x_1	Gender
x_2	Age
x_3	Injury Level
x_4	Primary Injury Type
x_5	Stability
x_6	Deformation Character
x_7	Group
x_8	Surgery Type
y_1	Correction Result
x_9	Kyphosis Degree Before Surgery
y_9	Kyphosis Degree After Surgery
y_{11}	Correction Measure Percentage
y_{111}	Correction Measure In Degrees
z_1	Correction Loss Degree
x_{10}	VAS before Surgery
y_{10}	VAS after Surgery
x_{12}	ODI before Surgery
y_{12}	ODI after Surgery
r_{12}	Relative Modify ODI

methods of multivariate statistical analysis were applied to the existing empirical data.

A feature of research in medicine is the interdependence of indicators, which complicates the specification of forecast models. Correlation, factor and component analysis were used to identify relationships.

So the method of principal components showed that almost all the initial data are associated with the first principal component, which may indicate interdependencies of the initial data. This fact has been confirmed in the calculations of the pair correlations of the initial indicators. The component itself explains 53% variation. “The type of Surgery” and “Measure of correction in degrees” correlate significantly with the second component, it explains 16% of the variation, the third is related to “Age” and “Level of injury”, it accounts for about 7% of the explained variation. The fourth component is due to the “Gender” of the patient. The first six main components account for more than 90% of the variation of indicators. The results of the application of the principal component method are partially given in Table 2.

The factor analysis, after rotation of the factor axes, made it possible to single out three significant factors explaining 76% of the total variation of indicators. The identified factors have a more meaningful interpretation than the main components. The first is associated with postoperative patient characteristics, the second with preoperative characteristics. The corresponding factor loads are shown in Table 3.

Cluster and discriminant analyzes were used to group patients. The results of the use of cluster analysis are not given, since they did not allow to unambiguously interpret the resulting partitions. The use of discriminant analysis has allowed for some indicators to build effective discriminatory functions. For example, discrimination in terms of the “Correction result” (y_1) indicator made it possible to obtain a 100% separation of the initial data for the training sample. Some baselines do

Table 2

Correlations of indicators with four main components

Variables	Factor 1	Factor 2	Factor3	Factor4	...
x_1	-0.269	0.197	0.196	0.820	...
x_2	0.135	-0.139	-0.778	-0.182	...
x_3	0.019	0.258	-0.660	0.393	...
x_4	-0.888	0.161	-0.008	-0.070	...
x_5	-0.830	0.259	-0.116	0.012	...
x_6	-0.842	0.243	-0.103	-0.058	...
x_7	-0.850	0.191	-0.031	-0.031	...
x_8	-0.048	0.679	-0.180	0.081	...
y_1	-0.759	-0.587	-0.049	0.016	...
x_9	-0.819	0.402	0.058	-0.105	...
y_9	-0.862	-0.368	-0.014	0.019	...
y_{11}	0.849	0.439	0.025	-0.004	...
y_{111}	-0.356	0.842	0.088	-0.152	...
z_1	-0.798	-0.375	-0.003	0.087	...
x_{10}	-0.828	0.363	0.060	-0.176	...
y_{10}	-0.893	-0.317	-0.031	0.012	...
x_{12}	-0.865	0.279	0.071	-0.008	...
y_{12}	-0.889	-0.312	-0.038	0.074	...

Table 3

Factor loads

Variables	Factor 1	Factor 2	Factor3
x_1	0.079	0.324	0.196
x_2	0.027	-0.206	-0.774
x_3	-0.130	0.181	-0.673
x_4	0.603	0.671	0.019
x_5	0.504	0.711	-0.096
x_6	0.523	0.706	-0.082
x_7	0.556	0.671	-0.007
x_8	-0.365	0.563	-0.213
y_1	0.961	0.001	0.012
x_9	0.397	0.821	0.069
y_9	0.906	0.236	0.039
y_{11}	-0.940	-0.173	-0.031
y_{111}	-0.239	0.885	0.058
z_1	0.860	0.192	0.047
x_{10}	0.428	0.796	0.074
y_{10}	0.901	0.296	0.020
x_{12}	0.507	0.751	0.091
y_{12}	0.895	0.297	0.014
Expl.Var	7.000	5.364	1.182
Prp.Totl	0.388	0.298	0.065

not affect the outcome of discrimination. The results of the use of discriminant analysis are shown in Table 4.

Table 4

The results of the analysis of the discriminant function

Variables	Wilks' Lambda	Partial Lambda	F-remove (2,62)	p-level	Toler.	1-Toler. (R-Sqr.)
x_1	0.056	0.995	0.292	0.590	0.832	0.167
x_2	0.057	0.979	1.309	0.256	0.788	0.211
x_3	0.057	0.982	1.150	0.287	0.835	0.164
x_4	0.059	0.952	3.129	0.081	0.116	0.883
x_5	0.060	0.938	4.146	0.045	0.094	0.905
x_6	0.059	0.954	3.036	0.086	0.136	0.863
x_7	0.063	0.896	7.286	0.008	0.094	0.905
x_8	0.057	0.976	1.530	0.220	0.528	0.471
y_1	0.058	0.967	2.117	0.150	0.012	0.987
x_9	0.059	0.953	3.098	0.083	0.167	0.832
y_9	0.060	0.932	4.542	0.036	0.016	0.983
y_{11}	0.056	0.996	0.194	0.660	0.554	0.445
y_{111}	0.056	0.999	0.015	0.900	0.160	0.839
z_1	0.056	0.999	0.039	0.842	0.213	0.786
x_{10}	0.056	0.994	0.336	0.563	0.194	0.805
y_{10}	0.066	0.850	11.075	0.001	0.222	0.777

In other cases, discrimination seemed less successful, and for a number of indicators it was not possible.

To predict the results of treatment, linear regression models were constructed and investigated. At the same time, various postoperative characteristics were selected as the resulting function characterizing the quality of treatment.

Regression analysis allowed us to build several models with varying degrees of compliance with the initial data. Below are some of the results. All indicators in the models are statistically significant at less than 5%.

$$y_{111} = 4.1 - 2.3x_4 + 1.7x_8 + 0.73y_9, \quad R^2 = 0.71.$$

Here the dependent variable is "Measure of correction in degrees." The model adequately describes the results of treatment, but the indicator "Degree of kyphosis after surgery" (y_9) is not a preoperative characteristic and its participation in the model is very doubtful.

In the next model, the dependent variable is "The degree of correction loss"; the value of the coefficient of determination shows a good adequacy to the initial data model. It is obvious that the loss of correction is influenced by both preoperative and postoperative indicators.

$$z_1 = 6.94 + 1.03x_5 - 0.06y_{11} - 0.4x_{10} + 0.95y_{10}, \quad R^2 = 0.76.$$

In the third model, the dependent variable is "ODI after Surgery". The large value of the coefficient of determination may be due to the mutual influence of ODI before and after the surgery. Interpreting the coefficients at the "Correction result" causes some difficulties. This may be due to the interdependencies between the regressors, as previously identified.

$$y_{12} = -30.78 + 1.74x_8 + 20.89y_1 - 4.68z_1 + 0.64x_{12}, \quad R^2 = 0.88.$$

In the fourth model, the calculated characteristic, “Relative ODI change after surgery”, obtained as the ratio of the ODI difference before and after the surgery to the corresponding ODI value before the surgery, was used as the dependent variable. This index can serve as an indicator of the effectiveness of surgical treatment—the higher the value of this indicator, the more effective the result of surgical treatment can be considered.

$$r_{12} = 0.94 - 0.14y_1 - 0.059x_8 + 0.035x_{10} - 0.099y_{10}, \quad R^2 = 0.89.$$

4. Discussion. The results of the analysis of empirical data show that even when solving the problem of predicting the effectiveness of treatment of chronic injury, it is impossible to unambiguously choose the objective function of the quality of surgical treatment. The exceptions are the last two models, where the dependent variable is the indicator of quality of life, and the value of the coefficient of determination is 90% or close.

In this case, the problem remains the representation of the characteristics of patients in an ordinal scale, the gradations in which are subjective in nature as patients and physicians. Perhaps this is the reason for the impossibility to build a model and determine significant factors to substantiate the choice of the type of operation.

The question of choosing one or another type of surgical treatment is more a result of the surgeon’s experience than objective dependencies on trauma characteristics and patient data. Algorithmization of this experience is not yet possible due to the mixing of the experience of different specialists and the lack of scientifically proven methods of formalizing medical experience. Discussions regarding the type of surgical treatment in one case or another are an integral part of scientific publications and conferences. It also indicates that the choice of treatment is largely due to the set of practices of a particular doctor. Multiple surgical treatments can pursue specific, private results that cannot be predicted as a single statistical model. The complexity of building models is exacerbated by the lack of prerequisites for their use (independence of indicators, normal distribution of characteristics, etc.), as well as the need to use different statistically significant indicators in each case, the search for which represents a separate task.

5. Conclusions. Based on the results of the analysis of theoretical material and empirical data, it was considered appropriate to build a forecast model for each patient taking into account the following provisions.

The model is based on expert assessments that take into account the diverse experience of surgical treatment.

The implementation of the model supposes the possibility of choosing from several options according to the types of operations based on the existing practices in the use of surgical treatment techniques.

The forecast model for the type of surgery and quality of treatment is implemented in the form of a tree, the branch points of which are determined by the type of injury (disease) and the patient’s anthropometric properties. Leaves characterize the quality of treatment for the appropriate type of disease and treatment method.

To characterize the quality of surgical treatment, use an indicator (index) calculated as a relative change in ODI after surgery and VAS after surgery. The

relative change in ODI is calculated as the difference between the ODI values before and after the surgery divided by the ODI value after the surgery.

The quality of the whole treatment is characterized by the absolute ODI value immediately after the surgery, as well as 3, 6 and 12 months after the surgery.

All forecasts are presented in the form of probabilistic (interval) characteristics.

The model has feedback and improved, accumulating new treatment experience.

The step-by-step algorithm for constructing a forecast tree for the examined empirical data on the treatment of chronic injury can be represented by the following branch points:

1. Disease: acute injury, chronic injury, degenerative changes.
2. The level of injury: chest, lumbar, pelvis, hip joint.
3. Type of primary injury: A, B or C.
4. Stability: stable or unstable.
5. The nature of the deformation: single-plane or multi-plane.
6. Treatment options—the choice of implants and structures, type of operation: ventral surgery, dorsal surgery, one-time two-stage intervention, etc.
7. Results of treatment: a prognosis is given on the likelihood of a patient falling into one or another range by ODI levels.

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study performed with the financial support of the Advanced Research Foundation.

References

1. Goncharova A. B., Sergeeva E. I. Decision support system in medicine for diagnosing diseases, *Innovation in Science*, 2017, no. 1(62), pp. 23–25 (In Russian).
2. Litvin A. A., Litvin V. A. Decision support systems in surgery, *Novosti Khirurgii*, 2014, vol. 22, no. 1, pp. 96–100 (In Russian).
3. Davuluri P., Wu J., Ward K. R., Cockrell C. H., Najarian K., Hobson R. S. An automated method for hemorrhage detection in traumatic pelvic injuries, In: *Conf. Proc. IEEE Eng. Med. Biol. Soc.*, 2011, pp. 5108–5111. doi: 10.1109/IEMBS.2011.6091265.
4. Egorov A. A., Mikshina B. C. The model of surgeon's decision, *Vestn. Novykh Med. Tekhnol.*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 287–290 (In Russian).
5. Mofidi R., Duff M. D., Madhavan K. K., Garden O. J., Parks R. W. Identification of severe acute pancreatitis using an artificial neural network, *Surgery*, 2007, vol. 141, no. 1, pp. 59–66. doi: 10.1016/j.surg.2006.07.022.
6. Andersson B., Andersson R., Ohlsson M., Nilsson J. Prediction of severe acute pancreatitis at admission to hospital using artificial neural networks, *Pancreatology*, 2011, vol. 11, no. 3, pp. 328–335. doi: 10.1159/000327903.
7. Korenevskii N. A., Shekhine M. T., Pekhov D. A., Tarasov O. N. The forecasting and early recognition of the acute cholecystitis and the estimation of its severity degree on basis of fuzzy decision making logic, *Vestn. Voronezh. Gos. Tekhn. Univ.*, 2009, vol. 5, no. 11, pp. 150–155 (In Russian).
8. Krut'ko A. V., Baikov E. S. Analysis of the criteria for predicting the outcomes of surgery for intervertebral disc herniation: review of current literature, *Geniy Ortopedii*, 2012, no. 1, pp. 140–145 (In Russian).

9. During J., Goudfroofij H., Keessen W., Beeker T. W., Crowe A. Toward standards for posture. Postural characteristics of the lower back system in normal and pathologic conditions, *Spine*, 1985, vol. 10, no. 1, pp. 83–87. doi: 10.1097/00007632-198501000-00013.
10. Duval-Beaupere G., Boisaubert B., Hecquet J., Legaye J., Marty C., Montigny J. P. Sagittal profile of normal spine change in spondylolisthesis, In: *Severe Spondylolisthesis*; eds. J. Harms, H. Stürz. Darmstadt, Steinkopff, 2002, pp. 21–32. doi: 10.1007/978-3-642-57525-9_3.
11. Sur Y. J., Kong C. G., Park J. B. Survivorship analysis of 150 consecutive patients with DIAM (TM) implantation for surgery of lumbar spinal stenosis and disc herniation, *Eur. Spine J.*, 2011, vol. 20, no. 2, pp. 280–288. doi: 10.1007/s00586-010-1599-z.
12. Shen M., Razi A. Retrolisthesis and lumbar disc herniation: a preoperative assessment of patient function, *Spine J.*, 2007, vol. 7, no. 4, pp. 406–413. doi: 10.1016/j.spinee.2006.08.011.
13. Ovcharenko S. I. *Forecasting of volume and an outcome of surgical intervention at lumbar osteochondrosis*, Thesis of Dissertation (Cand. Medic. Sci.). Belgorod, 2007, 21 pp. (In Russian)
14. Antipko A. L. *Prediction of recurrence of hernias of intervertebral discs of the lumbar spine based on magnetic resonance imaging and mathematical modeling*, Thesis of Dissertation (Cand. Medic. Sci.). Voronezh, 2009, 18 pp. (In Russian)
15. Krut'ko A. V., Baikov E. S. *Prediction of the results of surgical treatment of patients with herniated lumbar intervertebral discs (M51.0, M51.2, M51.3, M51.8, M51.9)*, Clinical Guidelines. Novosibirsk, Association of Orthopaedists and Traumatologists of the Russian Federation, 2016, 16 pp. (In Russian)
16. Nazarenko A. G. *Selection of optimal surgical tactics in degenerative diseases of the lumbosacral spine using analytical information system and computer simulation*, Thesis of Dissertation (Dr. Medic. Sci.). Moscow, 2012, 50 pp. (In Russian)
17. Berne J. D., Cook A., Rowe S. A., Norwood S. H. A multivariate logistic regression analysis of risk factors for blunt cerebrovascular injury, *J. Vasc. Surg.*, 2010, vol. 51, no. 1, pp. 57–64. doi: 10.1016/j.jvs.2009.08.071.
18. Liu J.-e, Zhou J. Additive-multiplicative hazards model for case-cohort studies with multiple disease outcomes, *Acta Math. Appl. Sin.-Engl. Ser.*, 2017, vol. 33, no. 1, pp. 183–192. doi: 10.1007/s10255-017-0679-9.
19. Dong C.-l, Zhou J., Sun L.-q. A class of weighted estimators for additive hazards model in case-cohort studies, *Acta Math. Appl. Sin.-Engl. Ser.*, 2014, vol. 30, no. 4, pp. 1153–1168. doi: 10.1007/s10255-014-0440-6.
20. Johansson P. I. et al. Traumatic endotheliopathy: A prospective observational study of 424 severely injured patients, *Ann. Surg.*, 2017, vol. 265, no. 3, pp. 597–603. doi: 10.1097/SLA.0000000000001751.
21. Jang H.-D. et al. Risk factor analysis for predicting vertebral body re-collapse after posterior instrumented fusion in thoracolumbar burst fracture, *Spine J.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 285–293. doi: 10.1016/j.spinee.2017.07.168.
22. Lafage R. et al. Self-learning computers for surgical planning and prediction of post-operative alignment, *Eur. Spine J.*, 2018, vol. 27, no. 1, pp. 123–128. doi: 10.1007/s00586-018-5497-0.
23. Zhang B. et al. Risk factors of cage subsidence in patients with ossification of posterior longitudinal ligament (OPLL) after anterior cervical discectomy and fusion, *Med. Sci. Monit.*, 2018, vol. 24, pp. 4753–4759. doi: 10.12659/MSM.910964.
24. Beng J., Lim T., Yeo W., Chen J.L.T. Preoperative leg pain score predicts patient satisfaction after transforaminal lumbar interbody fusion surgery, *Global Spine J.*, vol. 8, no. 4, pp. 354–358. doi: 10.1177/2192568217723888.

УДК 519.248:[159.9+57+61]

Математическое моделирование и прогнозирование эффективности оперативного лечения в хирургии позвоночно-тазового комплекса

Л. Ю. Коссович¹, А. В. Харламов¹,
Ю. В. Лысункина¹, А. Е. Шульга²

¹ Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (национальный исследовательский университет), Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

² Научно-исследовательский институт травматологии, ортопедии и нейрохирургии, Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского, Россия, 410012, Саратов, ул. Большая Казачья, 112.

Аннотация

На основе изучения литературы, посвященной оценке качества оперативного лечения в реконструктивной хирургии позвоночно-тазового комплекса можно сделать вывод, что для прогнозирования качества оперативного лечения, как правило, применяется множественная линейная или логистическая регрессия, дерево решений. Реже применяются нейронные сети.

Прогнозирование выполняется на основе сравнения до- и послеоперационного состояния больного, оцениваемого по различным порядковым и количественным шкалам в результате опроса пациента.

При сравнительно небольшом количестве анализируемых случаев заболевания (несколько десятков или сотен) и незначительном количестве показателей (не более двух-трех десятков) применение нейронных сетей представляется преждевременным по двум причинам: небольшое количество данных позволяет анализировать их классическими методами математической статистики, и выявление зависимостей на данном этапе требует постоянного «ручного» вмешательства с учетом оценок и взаимосвязей из предметной области.

Применение методов статистического анализа к данным о лечении застарелой травмы показало наличие стандартных проблем для медицинских данных. Это представление исходной информации в номинальной или порядковой шкалах, субъективный характер некоторых показате-

Краткое сообщение

© © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Kossovich L. Yu., Kharlamov A. V., Lysunkina Yu. V., Shulga A. E. Mathematical modeling and prediction of the effectiveness of surgical treatment in surgery of the spine and pelvic complex, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 744–755. doi: 10.14498/vsgtu1702.

Сведения об авторах

Леонид Юрьевич Коссович  <https://orcid.org/0000-0002-4775-7348>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: president@sgu.ru

Александр Владимирович Харламов  <https://orcid.org/0000-0002-1709-6518>

кандидат экономических наук; доцент; каф. основ математики и информатики; e-mail: harlamovav@info.sgu.ru

телей, а также взаимозависимость представленных характеристик, что снижает качество исследования.

Поиск целевой функции, характеризующей качество оперативного лечения, показал неоднозначность решения этой задачи даже для узкоспециализированной ситуации.

Объективно присутствующие взаимосвязи также выявило обусловили количество проблем, особенно связанных с выбором типа оперативного лечения, которое в большей степени определяется опытом хирурга.

На основе проведенного исследования было предложено строить модель прогноза качества оперативного лечения с учетом экспертных оценок в виде прогнозного дерева с рекомендуемыми вариантами хирургического лечения и статистическом прогнозе, основанном на имеющемся опыте. Предполагается, что модель будет динамической с обратной связью и иметь возможность самообновления.

Для прогнозирования качества оперативного лечения в реконструктивной хирургии позвоночно-тазового комплекса целесообразно применять дерево прогноза, позволяющее рекомендовать тип операции для конкретного случая повреждения или заболевания и рассчитывающего прогнозные значения показателей качества жизни.

Ключевые слова: оценка эффективности лечения, прогнозирование лечения, поддержка принятия решений.

Получение: 13 мая 2019 г. / Исправление: 16 сентября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 20 декабря 2019 г.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда перспективных исследований.

Юлия Владимировна Лысункина  <https://orcid.org/0000-0002-6633-0980>
ассистент; каф. математической теории упругости и биомеханики;
e-mail: lysunkina@yandex.ru

Алексей Евгеньевич Шульга; кандидат медицинских наук; старший научный сотрудник; отд. инновационных технологий управления в лечении и реабилитации;
e-mail: doc.shulga@yandex.ru



MSC: 76T10

On the electrostatic field in expansion dynamics of gas bubbles

P. T. Museibli

Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
9, F. Agaev st., Baku, AZ1141, Azerbaijan.

Abstract

The work is devoted to the study of the dynamics of the formation of bubbles in a gas–liquid system taking into account the potential difference. The electrical conductivity of the fluid is determined depending on the concentration of the electrolyte and, accordingly, the electrostatic field that occurs when the fluid flows. The effect of the electrostatic field on the bubble formation dynamics has shown that the radius of the gas bubbles and the dynamics of its expansion, formed by the pressure difference, can be regulated by the potential difference parameter.

Depending on the electrolytic concentration, the electric conductivity of the liquid and, accordingly, the electrostatic field arising from friction in fluid are determined. The effect of the electrostatic field on the dynamics of the bubble formation has shown that the radius of gas bubbles and expansion dynamics formed by the pressure drop can be regulated by the potential difference parameter. It is presented that one of the main factors affecting the flow of two-phase fluids is the nature of the liquid phase and the concentration of electrolyte added. The results of regulation of the bubble formation dynamics in the gas–liquid system via the electrostatic field and a number of physical parameters can be applied in the oil and gas industry, chemical processes, biomechanics.

Keywords: gas bubble, electrostatic field, pressure drop, potential difference, expansion dynamics.

Received: 1st July, 2019 / Revised: 4th September, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 9th December, 2019

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Museibli P. T. On the electrostatic field in expansion dynamics of gas bubbles, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 756–763. doi: 10.14498/vsgtu1717.

Author's Details:

Parviz T. Museibli  <https://orcid.org/0000-0002-5133-7581>

Junior Researcher; Dept. of Fluid Mechanics; e-mail: pervizmuseyibli@gmail.com

Introduction. Bubbling and its expansion dynamics are the major components of a wide range of chemical, environmental processes and fluid, especially, oil mechanic. Bubbles generally have broad size distributions and complex property variations over time too [1–3]. Although changing of bubbles forms in gas–liquid systems can seem to be a simple phenomenon, it actually involves complex dynamical interactions. Characteristically, in gas–liquid systems, small bubbles have effective role at the interphase heat and mass transfer. Here, it is important to control bubble sizes and extensions.

Dynamics of the gas bubbles formation in liquids and viscous-elastic fluids has been studied for quite a long time [4]. Bubbling has been the topic of numerous studies [5–9]. Two main phenomena have been determined for bubble formation in the electric fields under electrical voltage of electrohydrodynamic flow: electrical voltage is directly present in the gas–liquid interphase and is directed inward. Under conditions of electrohydrodynamic flow, a significant decrease of nozzle pressure is caused by voltage increasing [10]. Because of the effects of electrostatic potential and pressure difference, the interaction effects of the bubble expansion dynamics are more complicated and important, so this is the subject of present research.

In [11], the authors have experimentally investigated the effects of electrostatic potential on the bubble dynamics, and tried to determine the value of the electrical potential used to control the process.

The results reflect that bubble formation dynamics have nonlinear dependence with increasing applied potential at the constant flow rate and bubble frequency increases as increasing voltage. Authors have shown also that external physics fields (electric, magnetic, etc.) should be used due to achieve more significant effects.

In [12], authors have established adiabatic two-phase flows by injecting gas (nitrogen) bubbles into a liquid (FC-72) separating mechanical effects from thermal and mass exchange ones in order to investigate effects of external electric fields on the bubble dynamics. Here is mainly investigated the effect of the electric field on the detachment frequency and velocity of bubbles. Other parameters (bubble shape and its oscillations, typical trajectory of a single bubble) are currently under study, both in normal and microgravity environments.

In [13], author considered formation of bubble in a rigid and elastic hole, taking into account the surface tension and obtained some meaningful results. Various surface active substances (SAM) have been used to control the surface tension. For the rigid hole, to study the relation between d_B (bubble diameter) and U_{OF} (flow velocity) for the different liquid phases. Firstly, for a hole gas velocity above 6 m/s, the effect of liquid surface tension on the bubble diameter have been investigated. The bubble diameter is significantly lower below 6 m/s in water solutions with surface active substances (SAM).

The lowest bubble diameters occur in solution of non-ionic surfactant ($\sigma_L = 30.4$ mN/m), then in the anionic surfactant solution ($\sigma_L = 40.7$ mN/m) and the cationic surfactant solution ($\sigma_L = 27.4$ mN/m); the butanol aqueous solution ($\sigma_L = 62.6$ mN/m) has no effect on the formation of bubbles [13]. These results limit the conception of static surface tension: the smallest bubbles are not formed with the liquid phase which has the lowest static surface tension [13].

To achieve better results we need to measure dynamic surface tension. To

investigate the relation between d_B and U_{OF} for the different liquid phases three general terms can be formulated for the flexible holes:

- 1) the bubble diameters are significantly reduced over the whole hole gas velocity range in comparison with water;
- 2) as with water the bubble diameter presents a less, than linear increase with velocity;
- 3) a special phenomenon occurs below 3 m/s, which did not exist in water: the bubble jet is divided into two jets.

Using the geometric characteristics of the apparatus and bearing in mind the nature of liquid, the surface tension of the solution for a given bubble formation time can be defined [14, 15]. By changing the concentration of surface active substances (SAM), it is possible to regulate the surface tension.

Authors [16] investigated the effect of time-variant temperature on the dynamics of a single gas bubble in a liquid. With changes in temperature, different physical parameters regulating bubble formations change including surface tension, diffusivity, vapour pressure and gas solubility. A single-bubble model formulated and a numerical simulation implemented to model the radius-time prole of a bubble, taking into account the above-mentioned parameter.

According to studies, Henry constant and diffusion coefficient depending on the temperature are included to the model. It is important in determining the bubble expansion process at any temperature field.

1. Materials and methods. In all of the above mentioned studies, the dynamics of bubbles in gas–liquid systems at Δp pressure difference, regulation of bubble radius and expansion dynamics by various physical parameters were studied. Similar problems have also been studied by many researchers applying the external electricity field. In contrast, the effect of the electrostatic field, arising during flow (the potential difference parameter) on the bubble radius and expansion dynamics were studied. Studies have shown that the radius of bubbles gradually decreases when the value of potential difference increases [17].

Taking into account the studies of the gas bubbles dynamics through various physical parameters, a regulation of process of bubble formation through the potential difference parameter was considered in present work. In spherical coordinates, a single bubble model was formulated to investigate the effects of electrostatic field on bubble expansion in fixed thermobaric conditions.

The following assumptions have been made to construct the model:

- bubble always remains spherical and allows the problem considering in a single dimension;
- temperature and pressure inside and outside of the bubble is stable.

2. Problem solution. The Rayleigh—Plesset equation is used to model the effect of electrostatic field on the change of bubble radius R with time t in fixed thermobaric conditions:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{2 \sigma E^2}{3 \rho_m} R \frac{dR}{dt} + 2 \frac{\Sigma}{R} = \frac{p_q - p_m}{\rho_m}. \quad (1)$$

Here R is the radius of the bubble; E — electrostatic field; Σ — the surface tensile coefficient; σ — electrical conductivity, ρ_m — the density of the liquid phase, and p_q, p_m — respectively, the pressure of the gas and liquid.

Note that the electrostatic field formed by friction in the liquid is defined as follows

$$e = \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Here gas pressure is expressed as follows

$$\frac{dp_2}{dt} = -3\gamma\frac{p_2}{R}\omega_R.$$

First, the dynamics of formation of gas bubbles at different values of the Δp pressure difference (at the smallest values of potential difference) were investigated. The equation (1) is solved by the Runge–Kutta numerical method, $\Delta\varphi = 0.5$ mV, $\Sigma = 0.0002$ N/m (Fig. 1).

The expansion radius of bubbles increases as the pressure difference increases. Then, this equation was solved by changing the potential difference in the constant value of the pressure drop Δp , and the following results were obtained (Figs. 2 and 3).

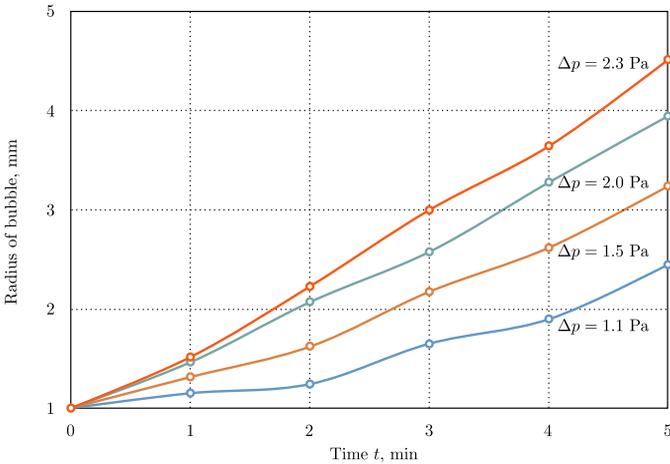


Figure 1. Radius of bubble vs. time under different pressure drop

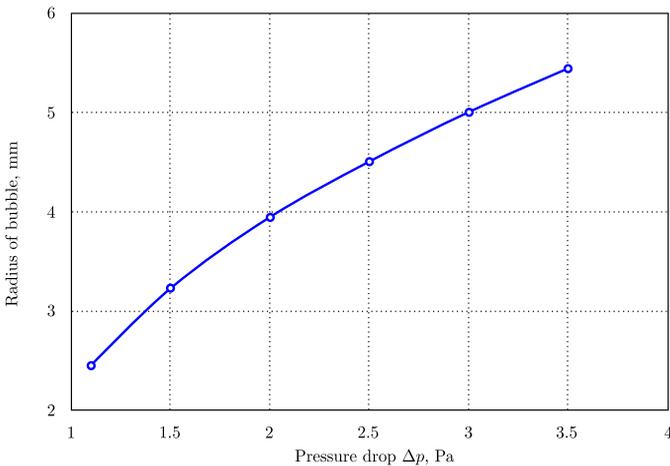


Figure 2. Radius of bubble vs. pressure drop

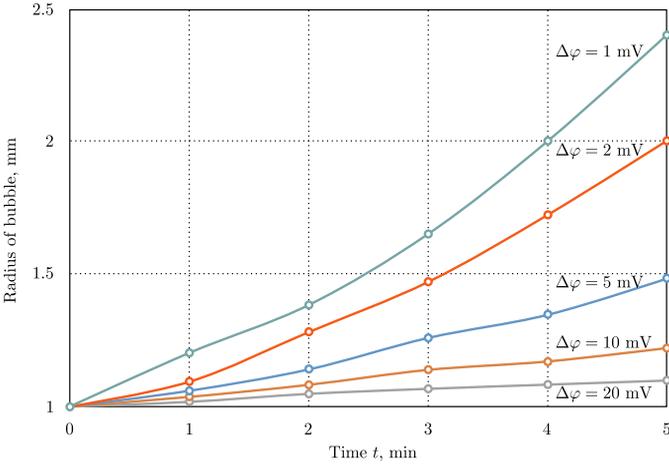


Figure 3. Radius of bubble vs. time under different electric potential differences

On the contrary, we can see from this that as the value of potential difference increases, the radius of the bubble decreases gradually. Given all this, it was found that the formation of gas bubbles under certain values of pressure difference can be regulated by the potential difference parameter

3. Methods. In [17], the electrical conductivity of the fluid under different concentrations of electrolytes is investigated. Depending on the concentration of electrolytes the value of potential difference arising in the fluid at different flow rates was determined. Considering the values of parameters obtained at the dynamic equation of bubble, we show the possibility of regulating expansion radius.

That is, the value of the potential difference in aqueous solutions of 0.1% NaCl (in a constant value of pressure difference) has been determined. The results obtained when regulating the dynamics of bubble formation through the potential difference parameter are shown in Fig. 4.

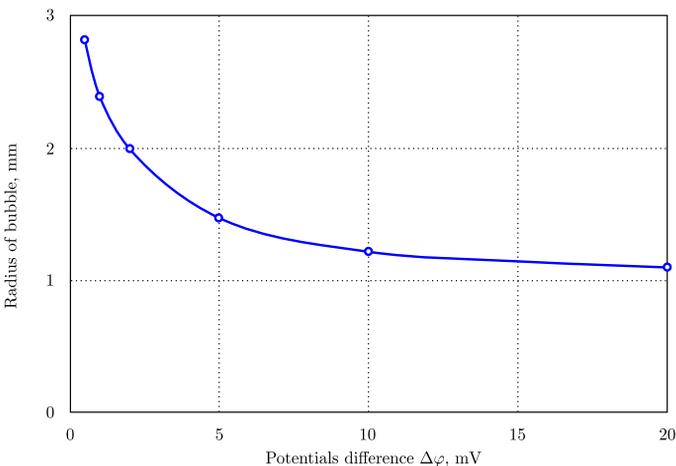


Figure 4. Dependence of bubble radius in aqueous solutions with 0.1% electrolyte vs. potentials difference

4. Results. In this research, the dynamics of bubble formation in the gas–liquid system was studied, taking into account the potential difference parameter. In experiments the aqueous solution of NaCl was investigated.

Depending on the electrolytic concentration, the electric conductivity of the liquid and, accordingly, the electrostatic field arising from friction in fluid are determined. The effect of the electrostatic field on the dynamics of the bubble formation showed that the radius of gas bubbles and its expansion dynamics formed by the pressure drop can be regulated by the potential difference parameter (Fig. 5). For this purpose, we must focus mainly on the nature of the liquid phase and concentration of the added electrolyte.

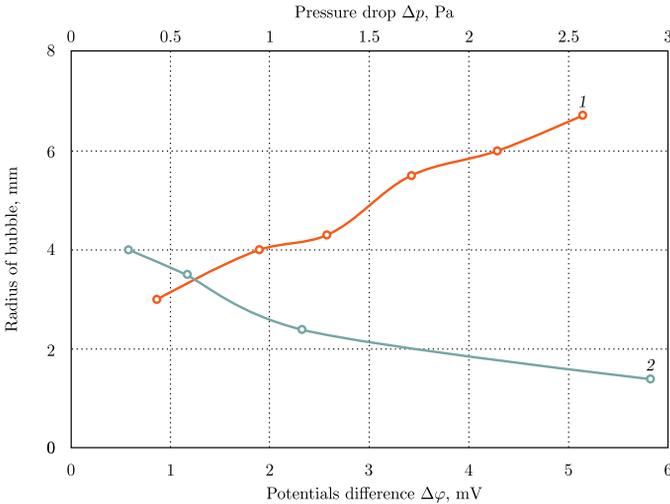


Figure 5. Dependence of bubble radius vs. pressure drop and potential difference

The results of regulation of the bubble formation dynamics in the gas–liquid system via the electrostatic field and a number of physical parameters can be applied in the oil and gas industry, chemical processes, biomechanics.

Competing interests. I have no competing interests.

Author’s Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

References

1. Femat R., Alvarez-Ramírez J., Soria A. Chaotic flow structure in a vertical bubble column, *Phys. Lett. A*, 2018, vol. 248, no. 1, pp. 67–79. doi: 10.1016/S0375-9601(98)00506-4.
2. Kikuchi R., Yano T., Tsutsumi A. et al. Diagnosis of chaotic dynamics of bubble motion in a bubble column, *Chem. Eng. Sci.*, 1997, vol. 52, no. 21–22, pp. 3741–3745. doi: 10.1016/S0009-2509(97)00220-0.
3. Luewisutthichat W., Tsutsumi A., Yoshida K. Chaotic hydrodynamics of continuous single-bubble flow systems, *Chem. Eng. Sci.*, 1997, vol. 52, no. 21–22, pp. 3685–3691. doi: 10.1016/S0009-2509(97)88927-0.
4. Lord Rayleigh O.M. F.R.S. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1917, vol. 34, no. 200, pp. 94–98. doi: 10.1080/14786440808635681.
5. Tsuge H. Hydrodynamics of bubble formation from submerged orifices, In: *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, vol. 3. Houston, TX, Gulf Publ., 1986, pp. 191–232.

6. Deshpande D. A., Deo M. D., Hanson F. V., Oblad A. G. A model for the prediction of bubble size at a single orifice in two-phase gas—liquid systems, *Chem. Eng. Sci.*, 1991, vol. 47, no. 7, pp. 1669–1676. doi: 10.1016/0009-2509(92)85014-3.
7. Longuet-Higgins M. S., Kerman B. R., Lunde K. The release of air bubbles from an underwater nozzle, *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 230, pp. 365–390. doi: 10.1017/S0022112091000836.
8. Drahoš J., Bradka F., Punčochář M. Fractal behaviour of pressure fluctuations in a bubble column, *Chem. Eng. Sci.*, 1992, vol. 47, no. 15–16, pp. 4069–4075. doi: 10.1016/0009-2509(92)85158-8.
9. Terasaka K., Tsuge H. Bubble formation under constant-flow conditions, *Chem. Eng. Sci.*, 1993, vol. 48, no. 19, pp. 3417–3422. doi: 10.1016/0009-2509(93)80159-n.
10. Tsouris C., Shin W.-T., Yiacomou S. Pumping, spraying, and mixing of fluids by electric fields, *Canad. J. Chem. Eng.*, 1998, vol. 76, no. 3, pp. 589–599. doi: 10.1002/cjce.5450760331.
11. Sarnobat S. U., Rajput S., Bruns D. D. et al. The impact of external electrostatic fields on gas–liquid bubbling dynamics, *Chem. Eng. Sci.*, 2004, no. 1, pp. 247–258. doi: 10.1016/j.ces.2003.09.001.
12. Danti M., Di Marco P., Grassi W., Memoli G. Effect of an external electric field on bubble dynamics: Preliminary study, In: *Proc. XVIII UIT National Conference* (Cernobbio, 28–30 June 2000), 2000, pp. 715–728, <http://www2.ing.unipi.it/~a006600/papers/uit00bolle-f.pdf>.
13. Loubière K., Hébrard G. Influence of liquid surface tension (surfactants) on bubble formation at rigid and flexible orifices, *Chem. Eng. Process.*, 2004, vol. 43, no. 11, pp. 1361–1369. doi: 10.1016/j.cep.2004.03.009.
14. Tauzin C. *Contribution à l'étude et à la recherche d'applications spécifiques de la technique de fractionnement par bulles*, Thesis dissertation no. 23. INSA Toulouse France, 1979 (In French).
15. Loubière K. *Croissance et détachement de bulles générées par des orifices rigides et flexibles dans des phases liquides newtoniennes: étude expérimentale et modélisation*, Thesis dissertation no. 663. INSA Toulouse France, 1979 (In French).
16. Webb I. R., Arora M., Roy R.A. et al. Dynamics of gas bubbles in time-variant temperature fields, *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 663, pp. 209–232. doi: 10.1017/S0022112010003472.
17. Panahov G. M., Museibli P. T. The study of internal exposure on the fluid hydrodynamics, *Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics*, 2017, vol. 37, no. 7, pp. 66–71.

УДК 532.529

О влиянии электростатического поля на динамику расширения газовых пузырьков

P. T. Museibli

Institute of Mathematics and Mechanics,
Azerbaijan National Academy of Sciences,
9, F. Agaev st., Baku, AZ1141, Azerbaijan.

Аннотация

Работа посвящена изучению динамики образования пузырьков в газожидкостной системе с учетом разности потенциалов. Электропроводность жидкости определяется в зависимости от концентрации электролита и, соответственно, от электростатического поля, возникающего при течении жидкости. Влияние электростатического поля на динамику образования пузырьков показало, что радиус пузырьков газа и динамика его расширения вследствие изменения перепада давления зависят от разности потенциалов протекания.

В зависимости от концентрации электролита определяется электрическая проводимость жидкости и, соответственно, электростатическое поле, возникающее в результате трения в жидкости. Влияние электростатического поля на динамику образования пузырьков показало, что радиус пузырьков газа и динамика его расширения, образованная падением давления, могут регулироваться параметром разности потенциалов. Показано, что одним из основных факторов, влияющих на течение двухфазных жидкостей, является природа жидкой фазы и концентрация электролита. Результаты регулирования динамики образования пузырьков в газожидкостной системе посредством электростатического поля и ряда физических параметров могут быть применены в процессах нефтегазовой отрасли, химического производства, биомеханике.

Ключевые слова: газовый пузырек, электростатическое поле, перепад давления, разность потенциалов, динамика расширения.

Получение: 1 июля 2019 г. / Исправление: 4 сентября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 9 декабря 2019 г.

Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Museibli P. T. On the electrostatic field in expansion dynamics of gas bubbles, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 756–763. doi: 10.14498/vsgtu1717.

Сведения об авторе

Parviz T. Museibli  <https://orcid.org/0000-0002-5133-7581>

Junior Researcher; Dept. of Fluid Mechanics; e-mail: pervizmuseyibli@gmail.com

MSC: 76F02, 76M45, 76F45, 76R05, 76U05

Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows



E. Yu. Prosviryakov^{1,2}

¹ Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

² Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

Abstract

Swirling axisymmetric stationary flows of an ideal incompressible fluid are considered within the framework of the Euler equations. A number of new exact solutions to the Euler equations are presented, where, as distinct from the known Gromeka–Beltrami solutions, vorticity is noncollinear with velocity. One of the obtained solutions corresponds to the flow inside a closed volume, with the nonpermeability condition fulfilled at its boundary, the vector lines of vorticity being coiled on revolution surfaces homeomorphic to a torus.

Keywords: Euler equations, ideal incompressible fluid, swirling axisymmetric flows, exact solutions.

Received: 23rd June, 2019 / Revised: 17th August, 2019 /

Accepted: 16th September, 2019 / First online: 6th December, 2019

Introduction. Due to the nonlinearity of isothermal fluid motion equations any patterns, that can be discovered when analytically studying velocity and pressure fields are of interest. These regularities are, e.g., streamline shape [1–3] and vortex line shape [4] properties. It was reported in [4] that “in the stationary axisymmetric flow of a viscous incompressible fluid, the existence of vortex lines lying on a revolution surface homeomorphic to a torus is impossible”. In other words, it was demonstrated that the vector lines of the vorticity projection on the meridional plane are nonclosed lines or points. That study offered an example of the stationary axisymmetric flow of an ideal incompressible fluid, where the above-mentioned vector lines either are closed (if they consist of more than one

Short Communication

© ⓘ ⓘ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Prosviryakov E. Yu. Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 764–770. doi: 10.14498/vsgtu1715.

Author’s Details:

Evgeniy Yu. Prosviryakov ✉ ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics¹; Professor; Dept. of Theoretical Mechanics²; e-mail: evgen_pros@mail.ru

point), or consist of one isolated point. To put it differently, that was an example of a flow in which the vortex lines lie on a revolution surface homeomorphic to a torus and they are not lathe objects (except one isolated streamline). Hereinafter, lathe objects are a figure of rotation around the axis of symmetry of the flow. That example was one of the Gromeka–Beltrami helical (vorticity is collinear with velocity) solutions [5, 6]. Here a question arises, whether there exist non-helical flows of an ideal fluid in with the vortex lines lying on a revolution surface homeomorphic to a torus, which are not lathe objects at that. In this paper we attempt to obtain an example of such a flow.

Among non-helical axisymmetric flows, examples of exact solutions can be easily obtain in the assumption that the radial velocity component is zero, all the parameters being dependent only on the distance to the symmetry axis (the subclass of cylindrical flows). However, in such flows the radial vorticity component is zero, and the vortex lines cannot lie on a revolution surface homeomorphic to a torus. Nonswirling axisymmetric flows are also unsuitable for an example, since in them the projection of the vector lines onto a meridional half-plane are points. We could attempt to seek a solution under other assumptions, simplifying the Euler equations. However, as was reported in [6, 7], simplifying assumptions may lead to equations for which vortex solutions are impossible. To avoid this situation, we decided to search for a suitable example of the stationary axisymmetric solution in in the most general form (without simplifying assumptions). To obtain a new solution, we used Meissel’s equation (known as Meissel’s formula in the world literature) [8]. This equation is discussed in what follows. Any solution to this equation yields a radial-axial stream function of some solution to the Euler equations. Two arbitrary functions are involved in Meissel’s equation, which depend only on the stream function. A special selection of these functions enables us to find solutions to Meissel’s equation and thus to find examples of exact solutions. The Gromeka–Beltrami helical solutions correspond to one function selection of the kind. Another one is mathed by the Batchelor solution [9] obtained under an additional simplifying assumption; namely, Batchelor sought a solution among functions independent of the axial coordinate. In this study we consider some other versions of the above-mentioned functions, which, after an appropriate argument substitution, allow Meissel’s equation to be solved by the variable separation method. This results in new non-helical and non-cylindrical solutions, this being of interest in itself. One of the solutions offers an example in which the vortex lines lie on revolution surfaces homeomorphic to a torus.

1. Motion equations. We consider the axisymmetric stationary flow of an ideal incompressible fluid. We use the following dimensionless variables: velocity, \mathbf{V} ; vorticity, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot} \mathbf{V}$; pressure related to density, p ; the potential of volume forces Π . Fluid motion is described by the Euler equations, which can be represented in the Gromeka–Lamb form [9,10] as

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla \left[p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \Pi \right], \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \tag{2}$$

We introduce a cylindrical coordinate system r, φ, z with the origin at point O so that the Oz axis coincides with the flow symmetry axis. The axisymmetric

flow parameters are independent of the circumferential coordinate φ . Assume that $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ is the right-hand system of unit vectors in the radial, circumferential and axial directions, respectively. The swirling flow velocity vector has the form $\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z$ and the functions V_r, V_φ, V_z and p depend only on r and z .

2. Meissel's equation. The theorem stating that all possible streamline functions for stationary axisymmetric flows obey some partial derivative equation is referred to as Meissel's theorem, the equation being termed Meissel's equation (formula). The proof of the theorem can be found in the original study [7] and in the textbook [8], where the name of Meissel is not mentioned. Let us now formulate this theorem. In cylindrical coordinates, in view of the fact that the flow parameters are independent of the circumferential coordinate φ , the continuity equation (2) is written as

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial z} V_z = 0.$$

It follows that there exists a streamline function $\psi = \psi(r, z)$ such that

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi, \quad V_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi. \quad (3)$$

We denote

$$g = rV_\varphi. \quad (4)$$

Meissel's theorem implies that, for regions without open zones with zero radial-axial velocity, there can exist such, and only such, axisymmetric solutions to the Euler equations in which Meissel's equation is fulfilled,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) + \frac{1}{r} g g' = r f, \quad (5)$$

where $g = g(\psi)$ and $f = f(\psi)$ are one-variable functions.

If $\psi = \psi(r, z)$ is a solution to Eq. (5) for some functions $g = g(\psi)$ and $f = f(\psi)$, then, for an arbitrary axisymmetric potential $\Pi = \Pi(r, z)$, the solution to Eqs. (1), (2) will be the functions V_r, V_φ, V_z determined by the equalities (3), (4) and the pressure

$$p = p_0 + F(\psi) - 0.5(V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2) - \Pi, \quad (6)$$

where F is the primitive function f (i.e. $f = F'$), p_0 is any constant ensuring that Eq. (6) will be positive in the flow region under study.

The solutions of Meissel's equations correspond to nonswirling flows ($V_\varphi = 0$) when $g = 0$ and to helical flows when $f = 0$, and they will be omitted here. In non-helical flows ($f \neq 0$), both the convective derivative of velocity and the vector product vorticity and velocity are not identically equal to zero, and the Bernoulli function has different values for different streamlines. In what follows we give examples of such exact solutions.

3. Three solution families. The equation

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) + \eta^2 \frac{\psi}{r} = -r\alpha^2 \psi, \tag{7}$$

where α, η are any constants, is a (5)-type equation. For this equation, $F(\psi) = -0.5\alpha^2\psi^2$, and one of the solutions is the function $\psi = -\sin(\alpha r^2/2) \cdot \cos(\eta z)$. In the partial case $\alpha = \eta = 1$, the following exact solution is obtained:

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{r} \sin(r^2/2) \cdot \sin(z), \\ V_\varphi &= -\frac{1}{r} \sin(r^2/2) \cdot \cos(z), \\ V_z &= \cos(r^2/2) \cdot \cos(z), \end{aligned} \tag{8}$$

$$p = p_0 - 0.5 \sin^2(r^2/2) \cdot \cos^2(z) - 0.5 (V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2) - \Pi.$$

The radial-axial projections of the streamlines of this cellular flow in the rectangle $\{r; z\} = [0; 2\pi] \times [0; \sqrt{6\pi}]$ are shown in Fig. 1. The arrows indicate the direction of the radial-axial velocity.

Figures 2 and 3 show the streamlines of radial-circumferential velocity for three planes perpendicular to the Oz axis.

The radial and circumferential velocities tend to zero as the symmetry axis is approached; this enables this solution to be considered in the region containing the symmetry axis. This solution describes the flow in cylindrical barrels (the axis of the cylindrical surface coincides with the Oz axis) with radii of $\sqrt{2\pi}$, $\sqrt{4\pi}$ and $\sqrt{6\pi}$, whose bottom and cover have the coordinates $\pi/2$ and $\pi/2 + m\pi$, $m = 1, 2, 3, \dots$, along the Oz axis. Indeed, it follows from the above expressions for velocity that the impermeability condition is met on the cylindrical walls, on the bottom, and on the cover.

The radial-axial vorticity component

$$\Omega_{rz} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} (rV_\varphi) \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial r} (rV_\varphi) \mathbf{e}_z \right\}$$

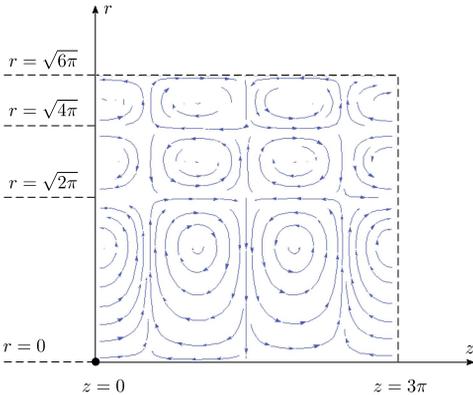


Figure 1. The radial-axial projections of the streamlines of the cellular flow

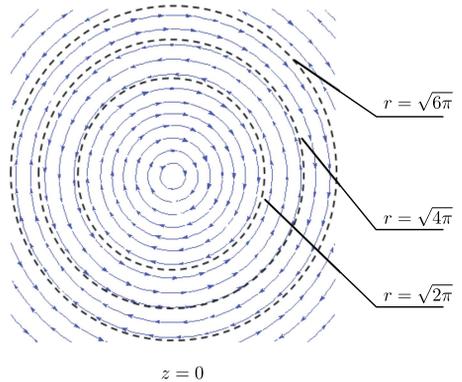


Figure 2. The streamlines of radial-circumferential velocity for $z = 0$

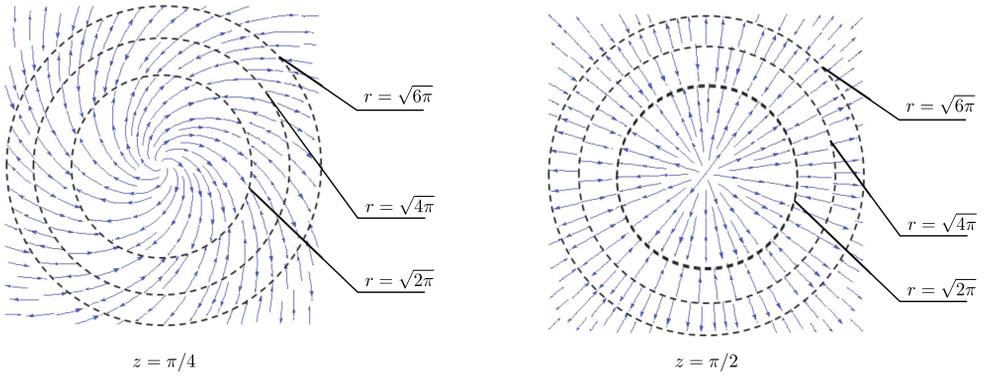


Figure 3. The streamlines of radial-circumferential velocity for $z = \pi/4$ and $z = \pi/2$

lies on the lines of the form $rV_\varphi = \text{const}$. It follows from Eq. (8) that, for the found solution, they are lines of the form $\sin(r^2/2) \cdot \cos(z) = \text{const}$. It can be easily believed that these lines are closed and that they once enclose the points with the coordinates $r_m = \sqrt{2m\pi + \pi}$, $z_j = j\pi$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. These points are isolated. Consequently, except the isolated vortex lines going through these points, the vortex lines (8) are not lathe objects, and they lie on revolution surfaces homeomorphic to a torus (the search for such a solution is the main aim of this study).

Another solution family is obtained if we consider the following (5)-type equation:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) + \eta^2 \frac{\psi}{r} = r\alpha^2 \psi,$$

where α, η are any constants. For this equation, $F(\psi) = \alpha^2 \psi^2/2$, the functions $\psi = \exp(\alpha r^2/2) \cdot \sin(\eta z)$ and $\psi = \exp(-\alpha r^2/2) \cdot \sin(\eta z)$ being the solutions. These solutions are unsuitable for studying flows in channels containing the Oz axis. The fact is that the radial velocities $V_r = \eta \frac{1}{r} \exp(\pm \alpha r^2/2) \cdot \cos(\eta z)$ corresponding to these solutions have a peculiarity on the Oz axis. However, due to the linearity of Eq. (7), the linear combination of these solutions $\psi = \sinh(\alpha r^2/2) \cdot \sin(\eta z)$ is also a solution to Eq. (7). The corresponding solution of the Euler equations has the form

$$\begin{aligned} V_r &= \eta \frac{1}{r} \sinh(\alpha r^2/2) \cdot \cos(\eta z), \\ V_\varphi &= \eta \frac{1}{r} \sinh(\alpha r^2/2) \cdot \sin(\eta z), \\ V_z &= -\alpha \cosh(\alpha r^2/2) \cdot \sin(\eta z), \\ p &= p_0 + 0.5\alpha^2 \sinh^2(\alpha r^2/2) \cdot \sin^2(\eta z) - 0.5(V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2) - \Pi. \end{aligned}$$

In this solution, all the parameters admit the continuation on the Oz axis; herewith, the radial and circumferential velocities tend to zero as the symmetry axis is approached, and this allows us to formulate a boundary problem with a known exact solution of the flow in an axisymmetric channel containing the symmetry axis. It seems excessive to illustrate this flow. The third solution family

is represented by solutions of the following (5)-type equation:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) + \lambda^2 \frac{\psi}{r} = r \lambda^2,$$

where λ is any constant. For this equation, $F(\psi) = \lambda^2 \psi$, and the solutions $\psi = \psi(r, z)$ will be all the known helical solutions with a constant coefficient λ relating velocity to vorticity if the function r^2 is added to them. This corresponds to the addition of constant velocity along the symmetry axis, and new solutions will no longer be helical.

Conclusion. Within the framework of the Euler equations, we have discussed swirling axisymmetric stationary flows of an ideal incompressible fluid in a potential field of external forces. Three new families of exact solutions have been obtained. As distinct from Gromeka's solution, vorticity is not parallel to fluid velocity in these families, and in contrast to cylindrical flows, the radial velocity component is not identically equal to zero. The solution (8) is a solution to the problem of motion inside a barrel (inside a portion of a straight cylinder), with the impermeability condition met on its walls. The vortex lines of this flow, not being lathe objects (except isolated lines), lie on revolution surfaces homeomorphic to a torus.

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was partially supported by the Complex Program of UB RAS, project no. 18-1-1-5.

References

1. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits, In: *Vladimir I. Arnold — Collected Works*, vol. 2; A. Givental, et all. Berlin, Heidelberg, Springer, 1965, pp. 15–18. doi: 10.1007/978-3-642-31031-7_3.
2. Kozlov V. V. Notes on steady vortex motions of continuous medium, *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, no. 2, pp. 288–289. doi: 10.1016/0021-8928(83)90020-5.
3. Kozlov V. V. *General Vortex Theory*. Izhevsk, Udmurtia Univ., 1998, 238 pp. (In Russian)
4. Sizykh G. B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1038–1042. doi: 10.1134/S0015462818060083.
5. Gromeka I. S. *Collected works*. Moscow, Acad. Sci. USSR, 1952, 296 pp. (In Russian)
6. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche, *Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett.*, 1889, vol. 22, pp. 122–131.
7. Sizykh G. B. Axisymmetric helical flows of viscous fluid, *Russian Mathematics*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 44–50. doi: 10.3103/S1066369X19020063.
8. Meissel E. Über den Ausfluss des Wassers aus Gefässen in zwei besonderen Fällen nach Eintritt des Beharrungszustandes, *Grunert Arch.*, 1873, vol. 55, pp. 241–252 (In German).
9. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999, xvii+615 pp. doi: 10.1017/CB09780511800955.
10. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford, Pergamon Press, 1972, xii+802 pp.

УДК 532.51, 517.958:531.3-324

Невинтовые точные решения уравнений Эйлера для закрученных осесимметричных течений жидкости

Е. Ю. Просвиряков^{1,2}¹ Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.² Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

Аннотация

В рамках уравнений Эйлера рассмотрены закрученные осесимметричные стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. Представлено несколько новых точных решений уравнений Эйлера, в которых, в отличие от известных решений Громеки–Бельтрами, завихренность неколлинеарна скорости. Одно из полученных решений соответствует течению внутри замкнутого объема, на границе которого выполнено условие непротекания, а векторные линии завихренности наматываются на гомеоморфные тору поверхности вращения.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, идеальная несжимаемая жидкость, закрученные осесимметричные течения, точные решения.

Получение: 23 июня 2019 г. / Исправление: 17 августа 2019 г. /

Принятие: 16 сентября 2019 г. / Публикация онлайн: 6 декабря 2019 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа частично поддержана Программой комплексных фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 18–1–1–5).

Краткое сообщение

© © 1 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Prosviryakov E. Yu. Non-helical exact solutions to the Euler equations for swirling axisymmetric fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 764–770. doi: 10.14498/vsgtu1715.

Сведения об авторе

Евгений Юрьевич Просвиряков ✉  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики¹; профессор; кафедра теоретической механики²;
e-mail: evgen_pros@mail.ru



УДК 517.956

**Об одной задаче для обобщенного уравнения
Буссинеска–Лява****В. И. Жегалов**Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
Россия, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35.**Аннотация**

Для уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными рассматривается вариант задачи Гурса с данными на двух пересекающихся характеристиках, включающий в себя не только построение искомой функции, но и определение коэффициентов уравнения. Таким образом, речь идет об обратной задаче с определением коэффициентов уравнения. Предложена методика построения условий, обеспечивающих выделение бесконечного числа наборов уравнений данного вида, для которых рассматриваемая задача разрешима в квадратурах. Вместо введения дополнительных граничных условий предлагаются ограничения на структуру уравнения, связанные с возможностями его факторизации.

Ключевые слова: задача Гурса, обратная коэффициентная задача, метод каскадного интегрирования, метод Римана, факторизация.

Получение: 14 июля 2019 г. / Исправление: 28 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 18 ноября 2019 г.

Указанное в названии сообщения уравнение Буссинеска–Лява имеет вид [1, формула (20)]

$$u_{xxyy} - u_{yy} + u_{xx} = 0.$$

Оно возникает при изучении движения волн в периодических слоистых средах [2], а также в упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции.

Нашей целью является отыскание условий разрешимости в квадратурах задачи Гурса для уравнения

$$u_{xxyy} + a_{21}u_{xxy} + a_{12}u_{xyx} + a_{11}u_{xy} + a_{20}u_{xx} + a_{02}u_{yy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = 0, \quad (1)$$

которое рассматривается в области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$. Гранич-

Краткое сообщение

© © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Zhegalov V. I. On a problem for generalized Boussinesq–Love equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 771–776. doi: 10.14498/vsgtu1720.

Сведения об авторе

Валентин Иванович Жегалов ✉ ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-3956-7026>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. математического анализа; e-mail: vizhegalov@mail.ru

ные условия для (1) имеют при этом вид

$$\begin{aligned} u(x_0, y) &= \varphi(y), & u_x(x_0, y) &= \varphi_1(y), \\ u(x, y_0) &= \psi(x), & u_y(x, y_0) &= \psi_1(x), \\ \varphi'(y_0) &= \psi_1(x_0), & \varphi(y_0) &= \psi(x_0), \\ \psi'(x_0) &= \varphi_1(y_0), & & \end{aligned} \quad (2)$$

при чем коэффициенты в (1) считаются неизвестными и вместе с $u(x, y)$ тоже подлежат определению.

С различных точек зрения уравнение (1) изучалось в работах Д. Манжерона, М. Огюсторели, С. Еасварана, В. Радочовы, Р. С. Жамалова, А. П. Солдатова и М. Х. Шханукова, Е. А. Уткиной (см. библиографию в книгах [3, 4]), а также в работах [5, 6]. В частности, в указанной монографии [3, с. 139–142] методом Римана построено решение задачи (1)–(2), но оно представляет собой лишь структурную формулу, поскольку используемая там функция Римана только существует, а конкретный вид ее неизвестен.

В данном сообщении изучается следующая

Задача. Определить коэффициенты уравнения (1), при которых его решение в области D , удовлетворяющее граничным условиям (2), оказывается разрешимым в квадратурах.

Имеется значительное количество работ, посвященных обратным коэффициентным задачам (см., например, работы [7–12] и литературу при них). Хорошо известен подход к определению в уравнении неизвестных коэффициентов, основанный на введении дополнительных граничных условий. Предлагаемый здесь подход к отысканию решения этой задачи основан на ограничениях, связанных с возможностями факторизации (1), то есть представлением этого уравнения либо в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \right) (u_{xy} + \lambda u_x + \mu u_y + \nu u) = 0. \quad (3)$$

либо в форме, получаемой из (3) путем подстановки операторов (второй оператор ставится на первое место, а первый — на второе).

Производя в левой части (3) указанные действия, потребуем совпадения полученного выражения с коэффициентами из (1). Для (3) найдем

$$\begin{aligned} \alpha + \lambda &= a_{21}, & \lambda_y + \alpha \lambda &= a_{20}, \\ \mu + \beta &= a_{12}, & \mu_x + \beta \mu &= a_{02}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lambda_x + \mu_y + \nu + \gamma + \mu \alpha + \beta \lambda &= a_{11}, \\ \mu_{xy} + \nu_x + \beta(\mu_y + \nu) + \alpha \mu_x + \gamma \mu &= a_{01}, \\ \lambda_{xy} + \nu_y + \alpha(\lambda_x + \nu) + \beta \lambda_y + \gamma \lambda &= a_{10}, \\ \nu_{xy} + \alpha \nu_x + \beta \nu_y + \gamma \nu &= a_{00}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для уравнения, получаемого из (3) перестановкой операторов, нужно в левой части соотношений (4) функции α, β, γ заменить на λ, μ, ν , а функции λ, μ, ν в (5) — на α, β, γ .

Мы не будем выписывать формулы для (3) с переставленными операторами, так как порядок рассуждений не изменится.

Система (4), (5), как система для отыскания $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, является переопределенной (8 уравнений, 6 неизвестных).

Сначала рассмотрим (4). Здесь первая пара уравнений — система для отыскания функций α , λ . Подставляя во второе уравнение $\alpha = a_{21} - \lambda$, или $\lambda = a_{21} - \alpha$, получим уравнения Риккати

$$\lambda_y + a_{21}\lambda - \lambda^2 = a_{20}, \quad \alpha_y - a_{21}\alpha + \alpha^2 = a_{20} - a_{21y},$$

которые в общем случае неразрешимы в квадратурах, но в случае нулевых правых частей являются уравнениями Бернулли, которые разрешимы в явном виде с точностью до произвольной функции от x .

Единственные решения выделяются при дополнительных условиях

$$\alpha(x, y_0) = \xi(x), \quad \lambda(x, y_0) = \eta(x), \quad (6)$$

где функции $\xi(x)$, $\eta(x)$ должны быть заданы.

Аналогично вторая пара из (4) редуцируется к уравнениям

$$\mu_x + a_{12}\mu - \mu^2 = a_{02}, \quad \beta_x - a_{12}\beta + \beta^2 = a_{02} - a_{12},$$

а роль (6) играют формулы

$$\beta(x_0, y) = \rho(y), \quad \mu(x_0, y) = \sigma(y). \quad (7)$$

Из изложенного вытекает

ЛЕММА. *В предположении, что*

$$a_{20} \equiv a_{02} \equiv a_{20} \equiv a_{20} - a_{21y} \equiv a_{02} - a_{12x} \equiv 0,$$

и дополнительных условиях (6), (7) функции α , β , λ , μ однозначно определяются в квадратурах.

В условиях данной леммы уравнения (5) превращаются в формулы для определения a_{11} , a_{01} , a_{10} , a_{00} через остающиеся пока неизвестными значениями γ , ν , которые могут быть найдены путем подбора. А именно, взяв в качестве одной из них определенную функцию, другую найдем из первого уравнения (5). Остальные три соотношения (5) предлагается рассматривать как дополнительные требования, достаточные для однозначной разрешимости всей системы (4), (5) в явном виде. Поскольку γ или ν можно фиксировать бесконечным числом способов, можно утверждать, что система (4), (5) допускает бесконечное число решений в достаточных для нас классах гладкости. Сведения об упомянутой гладкости можно найти в учебниках по дифференциальным уравнениям (например, в [13]).

Вышеизложенное позволяет представить рассматриваемую задачу в форме двух классических постановок задачи Гурса для уравнений второго порядка:

$$u_{xy} + \lambda u_x + \mu u_y + \nu u = v, \quad (8)$$

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \quad u(x, y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0);$$

$$v_{xy} + \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v = 0, \quad (9)$$

$$v(x_0, y) = \theta(y), \quad v(x, y_0) = \theta_1(x), \quad \theta(y_0) = \theta_1(x_0),$$

где функции $\theta(y)$, $\theta_1(x)$ в силу (2) легко вычисляются. Очевидно, что сначала находится решение задачи (9), а затем — задачи (8).

Известен целый ряд вариантов разрешимости подобных задач в квадратурах, записываемых в терминах коэффициентов уравнений. Например, работы [3, с. 19–20], [14, 15] содержат случаи, общее число вариантов разрешимости которых равно 16.

Из приведенных рассуждений следует

ТЕОРЕМА. *Предложенная методика позволяет выделить бесконечное множество вариантов разрешимости рассматриваемой задачи в квадратурах.*

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Библиографический список

1. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдогиперболических уравнений высокого порядка // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
2. Сердюкова С. И. Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения // *Докл. РАН*, 2003. Т. 389, № 3. С. 305–309.
3. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными*. Казань: Казанск. матем. об-во, 2001. 226 с.
4. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной*. Казань: Казанск. ун-т, 2014. 385 с.
5. Миронов А. Н. О методе Римана решения задачи Коши // *Изв. вузов. Матем.*, 2005. № 2. С. 34–44.
6. Миронов А. Н., Миронова Л. Б. Об инвариантах Лапласа для обобщенного уравнения Буссинеска–Лява // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 1. С. 131–135. doi: 10.1134/S0374064115010136.
7. Anikonov Yu. E., Belov Yu. Ya. Determining two unknown coefficients of parabolic type equation // *J. Inverse Ill-posed Probl.*, 2001. vol. 9, no. 5. pp. 469–487. doi: 10.1515/jiip.2001.9.5.469.
8. Anikonov Yu. E. Inverse problems and classes of solutions of evolution equations // *J. Inverse Ill-posed Probl.*, 2003. vol. 11, no. 1. pp. 1–26. doi: 10.1515/156939403322004900.
9. Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции-диффузии-реакции // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012. Т. 52, № 12. С. 2190–2205.
10. Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными // *Матем. заметки*, 2015. Т. 97, № 3. С. 368–381. doi: 10.4213/mzm10499.
11. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2017. Т. 57, № 6. С. 961–972. doi: 10.7868/S0044466917060096.
12. Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного смешанного парабола-гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 2017. Т. 102, № 3. С. 415–435. doi: 10.4213/mzm11521.
13. Сабитов К. Б. *Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения*. М.: Высш. шк., 2005. 670 с.
14. Жегалов В. И., Сарварова И. М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 3. С. 68–73.
15. Жегалов В. И., Созонтова Е. А. Дополнение к случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 2. С. 270–273. doi: 10.1134/S0374064117020133.

MSC: 35L25

On a problem for generalized Boussinesq–Love equation

V. I. Zhegalov

Kazan Federal (Volga Region) Federal University,
N. I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics,
35, Kremlyovskaya str., Kazan, 420008, Russian Federation.

Abstract

For a fourth-order equation with two independent variables a variant of the Goursat problem with data on two intersecting characteristics is considered. It includes not only the construction of the desired function, but also the coefficients of the equation. Thus, we are talking about the inverse problem of determining the coefficients of the equation. The method of construction of conditions providing allocation of infinite number of sets of this type equations is offered, for which the problem under consideration is solvable in quadratures. Instead of introducing additional boundary conditions, restrictions on the structure of the equation are proposed, related to the possibilities of its factorization.

Keywords: Goursat problem, inverse problem, method of cascade integration, Riemann method, factorization.

Received: 14th July, 2019 / Revised: 28th October, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 18th November, 2019

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author’s Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

References

1. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary-value-problems with a Samarsky, A. A. general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations, *Dokl. Math.*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511.
2. Serdyukova S. I. Exotic asymptotics for a linear hyperbolic equation, *Dokl. Math.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 203–207.

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zhegalov V. I. On a problem for generalized Boussinesq–Love equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 771–776. doi: 10.14498/vsgtu1720.

Author’s Details:

Valentin I. Zhegalov  <https://orcid.org/0000-0002-3956-7026>
Dokt. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis;
e-mail: vizhegalov@mail.ru

3. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Highest Partial Derivatives]. Kazan, Kazan Math. Society, 2001, 226 pp. (In Russian)
4. Zhegalov V. I., Mironov A. N., Utkina E. A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Dominant Partial Derivative]. Kazan, Kazan Univ., 2014, 385 pp. (In Russian)
5. Mironov A. N. On the Riemann method for solving the Cauchy problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, vol. 49, no. 2, pp. 32–41.
6. Mironov A. N., Mironova L. B. Laplace invariants for a generalized Boussinesq–Love equation, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 132–137. doi: 10.1134/S0012266115010139.
7. Anikonov Yu. E., Belov Yu. Ya. Determining two unknown coefficients of parabolic type equation, *J. Inverse Ill-posed Probl.*, 2001, vol. 9, no. 5, pp. 469–487. doi: 10.1515/jiip.2001.9.5.469.
8. Anikonov Yu. E. Inverse problems and classes of solutions of evolution equations, *J. Inverse Ill-posed Probl.*, 2003, vol. 11, no. 1, pp. 1–26. doi: 10.1515/156939403322004900.
9. Alekseev G. V., Vakhitov I. S., Soboleva O. V. Stability estimates in identification problems for the convection-diffusion-reaction equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 12, pp. 1635–1649. doi: 10.1134/S0965542512120032.
10. Kamynin V. L. The inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lowest coefficient in parabolic equations with many space variables, *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 3, pp. 349–361. doi: 10.1134/S0001434615030062.
11. Kozhanov A. I. Parabolic equations with unknown time-dependent coefficients, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2017, vol. 57, no. 6, pp. 956–966. doi: 10.1134/S0965542517060082.
12. Sabitov K. B. Initial boundary and inverse problems for the inhomogeneous equation of a mixed parabolic-hyperbolic equation, *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 3, pp. 378–395. doi: 10.1134/S0001434617090085.
13. Sabitov K. B. *Funktsional'nye, differentsial'nye i integral'nye uravneniia* [Functional, Differential and Integral Equations]. Moscow, Vysshaya Shkola, 2005, 670 pp. (In Russian)
14. Zhegalov V. I., Sarvarova I. M. Solvability of the Goursat problem in quadratures, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 3, pp. 56–59. doi: 10.3103/S1066369X13030080.
15. Zhegalov V. I., Sozontova E. A. An addition to the cases of solvability of the Goursat problem in quadratures, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 270–272. doi: 10.1134/S0012266117020124.



УДК 532.546:519.6

Моделирование напряженного состояния перфорированного цементного кольца, примыкающего к скважине с трещиной гидроразрыва пласта

Т. Ф. Киреев^{1,2}, Г. Т. Булгакова¹

¹ Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия, 450077, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

² Уфимский научно-технический центр, Россия, 450076, Уфа, ул. Аксакова, 59.

Аннотация

Проведено моделирование напряженного состояния перфорированного цементного кольца, примыкающего к скважине с трещиной гидроразрыва пласта. Для вычисления порового давления жидкости используется модель фильтрации несжимаемого флюида. Для вычисления напряженного состояния цементного кольца используется модель линейно-упругого тела и метод конечных объемов с многоточечной аппроксимацией напряжений. Проведена верификация численной модели с помощью сопоставления модельного расчета с расчетом в открытом пакете моделирования Fenics. Показано, что максимальное значение напряжения Мизеса приходится на зону перфораций на стыке цементного кольца и эксплуатационной колонны, а наличие трещины гидроразрыва пласта может снижать напряжение цементного кольца.

Ключевые слова: напряженное состояние, цементное кольцо, заколонные перетоки, трещина гидроразрыва пласта, многоточечная аппроксимация напряжений, сетка Вороного.

Получение: 13 сентября 2019 г. / Исправление: 28 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2019 г.

Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Kireev T. F., Bulgakova G. T. Modeling of stress state of a perforated cement sheath in a well with hydraulic fracture, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 777–788. doi: 10.14498/vsgtu1744.

Сведения об авторах

Тимур Фаритович Киреев  <https://orcid.org/0000-0002-2653-1059>

аспирант; каф. математики¹; ведущий инженер-аналитик; отд. математического моделирования²; e-mail: kireevtf@mail.ru

Гузель Талгатовна Булгакова  <https://orcid.org/0000-0001-8030-1791>

доктор физико-математических наук, профессор; каф. математики; e-mail: bulgakova.guzel@mail.ru

Введение. Одной из насущных проблем в нефтегазовой отрасли является разрушение цементного кольца между породой и эксплуатационной колонной скважины. Это приводит к преждевременному обводнению скважин и загрязнению окружающей среды. В данной работе проводится моделирование прочности цементного кольца с помощью вычисления напряжений Мизеса в каждой точке цементного кольца и эксплуатационной колонны. Области пласта с максимальным напряжением Мизеса являются наименее прочными.

Моделирование прочности цементного кольца проводится с помощью неполно связанных задач линейной упругости и фильтрации Дарси. Используются следующие предположения:

- 1) порода пласта является недеформируемой;
- 2) трещина гидроразрыва пласта (ГРП) примыкает к цементному кольцу, является бесконечнопроводимой и недеформируемой;
- 3) цементное кольцо и эксплуатационная колонна деформируемы и представляют собой линейно-упругое тело;
- 4) между цементным кольцом и эксплуатационной колонной выполняются условия идеального контакта;
- 5) забойное давление внутри скважины действует на внутреннюю стенку эксплуатационной колонны;
- 6) давление со стороны пласта на внешнюю стенку цементного кольца определяется только поровым давлением жидкости в пласте;
- 7) деформации цементного кольца и эксплуатационной колонны малы и не оказывают влияния на характер движения флюида в пласте и в скважине.

Алгоритм решения задачи состоит из двух последовательных шагов:

- 1) вычисление стационарного распределения пластового давления с помощью решения уравнения фильтрации несжимаемого флюида;
- 2) вычисление напряженного состояния цементного кольца и эксплуатационной колонны с помощью решения стационарного уравнения линейной упругости, в котором в качестве граничного условия задано пластовое давление, вычисленное в пункте 1.

Пространственная дискретизация уравнений осуществляется с помощью построения трехмерной расчетной сетки Вороного [1] для пласта, трещины ГРП, цементного кольца и эксплуатационной колонны. Для решения уравнения фильтрации применяется метод конечных объемов с двухточечной аппроксимацией потока, а для решения уравнения упругости — метод конечных объемов с многоточечной аппроксимацией напряжений [2, 3].

1. Задача фильтрации. Задача фильтрации описывается следующим образом:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k}{\mu} \operatorname{grad}(p)\right) = 0,$$

$$p|_{\text{perf}} = p_{\text{well}}, \quad p|_{\text{frac}} = p_{\text{well}}, \quad \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\text{boundary}} = 0.$$

Здесь p — пластовое давление, k — проницаемость пласта, μ — вязкость флюида, p_{well} — забойное давление скважины, perf — перфорации скважины, frac — трещина ГРП, boundary — граница пласта, которая включает в себя внутреннюю часть, внешнюю часть, а также кровлю и подошву пласта. Внешняя

часть границы пласта описывает границу области дренирования, а внутренняя часть границы пласта представляет собой внешнюю стенку цементного кольца скважины.

2. Задача упругости. Цементное кольцо и эксплуатационная колонна представляют собой единый полый цилиндр, как показано на рис. 1.

Напряженное состояние цементного кольца и эксплуатационной колонны описывается так:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \vec{f} = \vec{0}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^\top),$$

$$\vec{f}|_{S_1} = -p\vec{n}, \quad \vec{f}|_{S_2} = -p_{\text{well}}\vec{n}, \quad \vec{f}|_{S_3} = -p_{\text{well}}\vec{n}, \quad \vec{u}|_{S_4} = \vec{0}.$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — симметричный тензор напряжений (2 ранга); \vec{f} — внешние силы; \mathbf{C} — тензор жесткости (4 ранга); $\boldsymbol{\varepsilon}$ — симметричный тензор деформации (2 ранга); $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)^\top$ — вектор перемещений; u_x, u_y, u_z — перемещения вдоль осей x, y, z соответственно; S_1 — внешняя стенка цементного кольца (рис. 1); S_2 — внутренняя стенка эксплуатационной колонны; S_3 — стенки перфораций в цементном кольце и эксплуатационной колонне; S_4 — торцы цементного кольца и эксплуатационной колонны; \vec{n} — поле внешних нормалей к цементному кольцу и эксплуатационной колонне.

Продемонстрируем решение задачи упругости. Проинтегрируем уравнение упругости в ячейке i :

$$\int_{V_i} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_i} \vec{f} dV = \vec{0},$$

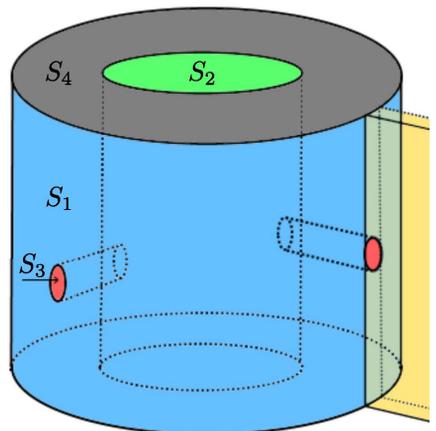
$$\int_{\partial V_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \vec{f}_i = \vec{0},$$

$$\sum_{j \in \Psi(i)} \int_{S_{ij}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \vec{f}_i = \vec{0}.$$

Здесь V_i — объем ячейки i ; f_i — среднее значение внешней силы, действующей на ячейку i . Интеграл по поверхности ∂V_i ячейки i представляется в виде

Рис. 1. Цементное кольцо и эксплуатационная колонна. Голубым цветом закрашена внешняя стенка цементного кольца, зеленым — внутренняя стенка эксплуатационной колонны, красным — стенки перфораций, серым — торцы цементного кольца и эксплуатационной колонны, желтым — трещина ГРП (онлайн в цвете)

[Figure 1 (color online). Cement sheath and production casing. The outer wall of the cement sheath is blue, the inner wall of the production casing is green, the perforation walls are red, the ends of the cement sheath and the production casing are gray, and the hydraulic fracture is yellow]



суммы поверхностных интегралов по каждой грани этой ячейки. Множество ячеек, смежных с i -той ячейкой, обозначается $\Psi(i)$; S_{ij} — грань между i -той и j -той ячейками.

Пусть $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_{ij}$ — среднее нормальное напряжение на грани между i -той и j -той ячейками. Тогда последнее уравнение будет иметь вид

$$\sum_{j \in \Psi(i)} |S_{ij}| (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_{ij} + \vec{f}_i = \vec{0}.$$

Введем также среднее значение \vec{u}_i перемещения в ячейке i . Метод много-точечной аппроксимации напряжений заключается в том, чтобы искать значение $|S_{ij}| (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_{ij}$ на грани между i -той и j -той ячейками в виде линейной комбинации некоторого набора \vec{u}_k :

$$|S_{ij}| (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_{ij} = \sum_{v \in V(i,j)} \sum_{k \in C(v)} \mathbf{t}_{ijkv} \vec{u}_k.$$

Здесь \mathbf{t}_{ijkv} — тензоры 2-го ранга; $V(i, j)$ — множество всех вершин грани ij ; $C(v)$ — множество всех ячеек, смежных с вершиной v ; $|S_{ij}|$ — площадь грани S_{ij} .

Каждой вершине v расчетной сетки соответствует одна ячейка дуальной сетки. Для каждой дуальной ячейки решается специальная локальная задача для определения коэффициентов \mathbf{t}_{ijkv} внутри этой дуальной ячейки. Когда все коэффициенты \mathbf{t}_{ijkv} будут вычислены, уравнения равновесия во всех ячейках можно будет представить в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных \vec{u}_i .

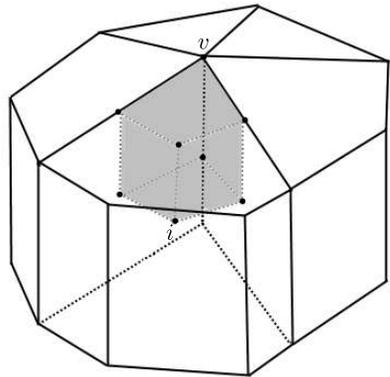
3. Решение локальной задачи упругости. Для каждой вершины сетки решается отдельная локальная задача. Рассмотрим вершину v и ячейку i , инцидентную этой вершине. Рассмотрим все ребра и все грани сетки, которые инциденты одновременно вершине v и ячейке i . Многогранник, натянутый на вершину v , центроид ячейки i и центроиды всех этих ребер и граней, называется мини-ячейкой и обозначается (i, v) (рис. 2). Грань мини-ячейки (i, v) , инцидентная какой-либо другой ячейке j , называется мини-гранью и обозначается (i, j, v) . Очевидно, что все ячейки сетки можно представить в виде объединения некоторого множества мини-ячеек, а все грани — в виде объединения некоторого множества мини-граней.

Пусть в каждой точке \vec{r} мини-ячейки (i, v) каждая компонента вектора перемещений $\vec{u}(\vec{r}) = (u_x(\vec{r}), u_y(\vec{r}), u_z(\vec{r}))^\top$ является линейной функцией координат:

$$\begin{aligned} u_x(\vec{r}) &= u_{i,x} + \nabla u_{iv,x} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i), \\ u_y(\vec{r}) &= u_{i,y} + \nabla u_{iv,y} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i), \\ u_z(\vec{r}) &= u_{i,z} + \nabla u_{iv,z} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i). \end{aligned}$$

Здесь $\vec{u}_i = (u_{i,x}, u_{i,y}, u_{i,z})^\top$ — среднее значение перемещения в i -той ячейке; $\nabla u_{iv,x}$, $\nabla u_{iv,y}$, $\nabla u_{iv,z}$ — градиенты компонент вектора перемещений (это векторы), \vec{r}_i — центр ячейки i . Считаем, что градиенты $\nabla u_{iv,x}$, $\nabla u_{iv,y}$, $\nabla u_{iv,z}$ в данной мини-ячейке — константы, т.е. они не зависят от координаты \vec{r} . Поэтому тензор напряжений σ_{iv} в мини-ячейке (i, v) тоже не зависит от \vec{r} .

Рис. 2. Несколько ячеек, инцидентных вершине v . Ребра ячеек изображены черными отрезками. Мини-ячейка (i, v) закрашена серым цветом



[Figure 2. Cells incident to the vertex v . Cell edges are depicted by black segments. The subcell (i, v) is shaded gray]

Пусть вершина v инцидентна N ячейкам и M граням. На каждой мини-границе m (меняется от 1 до M) задаем условие непрерывности напряжения (на всей мини-границе) и условие непрерывности перемещения (в единственной точке \vec{r}_m мини-границы):

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_{ijv} &= -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})_{jiv}, & (i, j) \in \text{Neighbours}(m), \\ \vec{u}_i + \nabla \vec{u}_{iv} \cdot (\vec{r}_m - \vec{r}_i) &= \vec{u}_j + \nabla \vec{u}_{jv} \cdot (\vec{r}_m - \vec{r}_j), & (i, j) \in \text{Neighbours}(m). \end{aligned}$$

Это $2M$ векторных уравнений, то есть $6M$ скалярных уравнений. Незвестные переменные — это градиенты $\nabla \vec{u}_{iv}$ в каждой мини-ячейке. В данной локальной задаче имеем N мини-ячеек — это N неизвестных градиентов, или $9N$ неизвестных скаляров. Эта система уравнений имеет единственное решение, если $2M = 3N$. Для простых трехмерных сеток, состоящих из параллелепипедов, призм или тетраэдров, это условие всегда выполняется. Но для сеток, состоящих из многогранников произвольной формы (в частности, для сетки Вороного в общем случае) это условие не выполняется.

Пусть $\boldsymbol{\sigma}_{iv} = \{\sigma_{iv,pq}\}$, $\mathbf{C}_{iv} = \{c_{iv,pqrs}\}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{iv} = \{\varepsilon_{iv,rs}\}$, где p, q, r, s — индексы компонент тензоров, принимающие значения от 1 до 3. Тогда

$$\sigma_{iv,pq} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 c_{iv,pqrs} \varepsilon_{iv,rs}.$$

Представим эту систему уравнений в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{iv} \cdot \vec{n}_{ijv} & 0 \\ (\vec{r}_m - \vec{r}_i) & \pm 1 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \vec{u}_{iv} \\ \vec{u}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

или

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}.$$

Вычислив псевдообратную матрицу \mathbf{A}^{-1} , мы сможем представить неизвестные градиенты $\nabla \vec{u}_{iv}$ в виде линейных комбинаций переменных \vec{u}_i :

$$\nabla u_{iv,rs} = \sum_{k=1}^N \vec{\alpha}_{iv,rs,k} \cdot \vec{u}_k,$$

где $\vec{\alpha}_{iv,rs,k}$ — вектор длины 3 (является блоком матрицы \mathbf{A}^{-1}). Таким образом, для произвольных трехмерных сеток градиенты $\nabla \vec{u}_{iv}$ выражаются через \vec{u}_i в смысле минимизации невязки $\|\mathbf{A}\vec{x} - \vec{b}\|$. Для простых трехмерных сеток, состоящих из параллелепипедов, призм или тетраэдров, $\nabla \vec{u}_{iv}$ выражаются через \vec{u}_i точно.

Подставляем полученные $\nabla \vec{u}_{iv}$ в выражение для напряжения на мини-грани, чтобы выразить это напряжение через неизвестные переменные \vec{u}_k :

$$\begin{aligned} \sigma_{iv} \cdot \vec{n}_{ijv} &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{r,s=1}^3 c_{iv,11rs} \varepsilon_{iv,rs} & \sum_{r,s=1}^3 c_{iv,12rs} \varepsilon_{iv,rs} & \sum_{r,s=1}^3 c_{iv,13rs} \varepsilon_{iv,rs} \right) \cdot \vec{n}_{ijv} \\ \left(\sum_{r,s=1}^3 c_{iv,21rs} \varepsilon_{iv,rs} & \sum_{r,s=1}^3 c_{iv,22rs} \varepsilon_{iv,rs} & \sum_{r,s=1}^3 c_{iv,23rs} \varepsilon_{iv,rs} \right) \cdot \vec{n}_{ijv} \\ \left(\sum_{r,s=1}^3 c_{iv,31rs} \varepsilon_{iv,rs} & \sum_{r,s=1}^3 c_{iv,32rs} \varepsilon_{iv,rs} & \sum_{r,s=1}^3 c_{iv,33rs} \varepsilon_{iv,rs} \right) \cdot \vec{n}_{ijv} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{r,s=1}^3 \sum_{k=1}^N (n_{ijv,1} c_{iv,11rs} + n_{ijv,2} c_{iv,12rs} + n_{ijv,3} c_{iv,13rs}) \frac{(\vec{\alpha}_{iv,rs,k} + \vec{\alpha}_{iv,sr,k})}{2} \cdot \vec{u}_k \\ \sum_{r,s=1}^3 \sum_{k=1}^N (n_{ijv,1} c_{iv,21rs} + n_{ijv,2} c_{iv,22rs} + n_{ijv,3} c_{iv,23rs}) \frac{(\vec{\alpha}_{iv,rs,k} + \vec{\alpha}_{iv,sr,k})}{2} \cdot \vec{u}_k \\ \sum_{r,s=1}^3 \sum_{k=1}^N (n_{ijv,1} c_{iv,31rs} + n_{ijv,2} c_{iv,32rs} + n_{ijv,3} c_{iv,33rs}) \frac{(\vec{\alpha}_{iv,rs,k} + \vec{\alpha}_{iv,sr,k})}{2} \cdot \vec{u}_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если в последнем выражении каждый вектор $\vec{\alpha}_{iv,rs,k}$ представить в виде строки, то получим представление напряжения на мини-грани в виде линейной комбинации \vec{u}_k :

$$\sigma_{iv} \cdot \vec{n}_{ijv} = \sum_{k=1}^N t_{ijkv} \vec{u}_k.$$

Напряжение на всей грани ij определяется так:

$$\sigma_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} = \sum_{v \in V(i,j)} \sigma_{iv} \cdot \vec{n}_{ijv} = \sum_{v \in V(i,j)} \sum_{k \in C(v)} t_{ijkv} \vec{u}_k.$$

В данной работе для решения локальных задач на границе сетки используется условие нулевого напряжения на границе. Для этого вокруг границы сетки создается слой вспомогательных ячеек с нулевым тензором жесткости, и все локальные задачи решаются описанным выше способом для внутренних вершин сетки.

4. Решение глобальной задачи упругости. Для каждой ячейки получаем линейное уравнение относительно неизвестных перемещений \vec{u}_i в каждой ячейке:

$$\sum_{j \in \Psi(i)} \sum_{v \in V(i,j)} \sum_{k \in C(v)} t_{ijkv} \vec{u}_k + \vec{f}_i = \vec{0}.$$

Поскольку градиент

$$\nabla u_{iv,rs} = \sum_{k=1}^N \vec{\alpha}_{iv,rs,k} \cdot \vec{u}_k$$

в каждой мини-ячейке известен, можно вычислить тензор напряжений σ_{iv} и напряжение Мизеса $\sigma_{m,iv}$ в каждой мини-ячейке:

$$\mathbf{S}_{iv} = \sigma_{iv} - \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma_{iv}) \mathbf{I},$$

$$\sigma_{m,iv} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{iv} : \mathbf{S}_{iv}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{iv,pq} S_{iv,pq}}.$$

Напряжение Мизеса в ячейке i принимается равным среднему значению напряжения Мизеса по всем мини-ячейкам (i, v) .

5. Вычислительный эксперимент. Рассмотрены добывающая и нагнетательная вертикальные скважины с трещинами ГРП, находящиеся друг от друга на расстоянии 500 м и работающие с постоянными забойными давлениями 50 и 150 атм соответственно. Вычисляется напряженное состояние цементного кольца и эксплуатационной колонны для добывающей скважины. Толщина пласта — 3 м, внутренний радиус эксплуатационной колонны — 6 см, толщина эксплуатационной колонны — 1.8 см, толщина цементного кольца — 3 см, полудлина трещин ГРП — 125 м, ширина раскрытия трещин ГРП — 1 см, проницаемость пласта — 100 миллидарси, вязкость флюида — 1, коэффициент Пуассона цементного кольца и эксплуатационной колонны — 0.25, модуль Юнга цементного кольца — 5 ГПа, модуль Юнга эксплуатационной колонны — 200 ГПа.

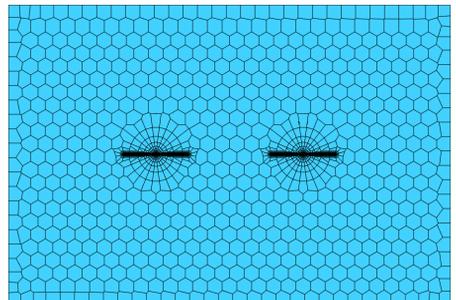
Расчетная сетка состоит из ячеек пласта, ячеек трещины ГРП, ячеек цементного кольца и ячеек эксплуатационной колонны для обеих скважин (рис. 3). Перфорации представляют собой пустоты в цементном кольце и эксплуатационной колонне, имеющие форму параллелепипедов со сторонами 5 см. Количество пластовых ячеек — 200 тысяч, количество ячеек цементного кольца и эксплуатационной колонны (для одной скважины) — 10 тысяч.

На рис. 4 показано распределение пластового давления около добывающей скважины при наличии и при отсутствии трещины ГРП.

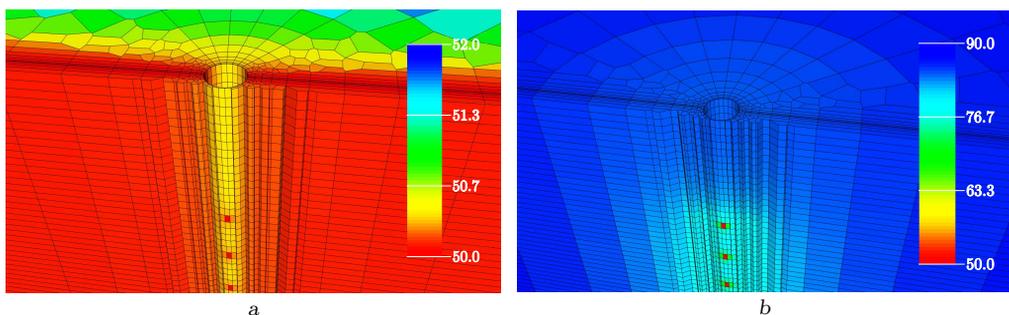
На рис. 5 видно, что смещения цементного кольца и эксплуатационной колонны в горизонтальной плоскости примерно одинаковы по всей высоте пласта (при наличии и при отсутствии трещины ГРП).

На рис. 6 и 7 показано напряжение Мизеса в цементном кольце и эксплуатационной колонне. Видно, что самое большое напряжение Мизеса приходится на зону перфораций на стыке цементного кольца и эксплуатационной

Рис. 3. Расчетная сетка с локальным измельчением вблизи двух скважин; слева — нагнетательная скважина, справа — добывающая скважина



[Figure 3. Voronoi grid with refinement near two wells; left — the injection well, right — the production well]



a

b

Рис. 4. Распределение пластового давления (атм) вблизи добывающей скважины при наличии (a) и при отсутствии (b) трещины ГРП (онлайн в цвете)

[Figure 4 (color online). The distribution of reservoir pressure (atm) near the production well with (a) and without (b) hydraulic fracture]

Рис. 5. Перемещение точек цементного кольца и эксплуатационной колонны вдоль горизонтальной оси (мкм) (онлайн в цвете)

[Figure 5 (color online). Displacements (μm) of the cement sheath and production casing along the horizontal axis]

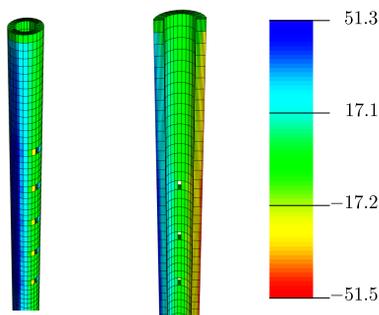


Рис. 6. Напряжение Мизеса (атм) в каждой точке цементного кольца и эксплуатационной колонны (при наличии трещины ГРП) (онлайн в цвете)

[Figure 6 (color online). Von Mises stress (atm) at each point of the cement sheath and production casing (in the presence of hydraulic fracture)]

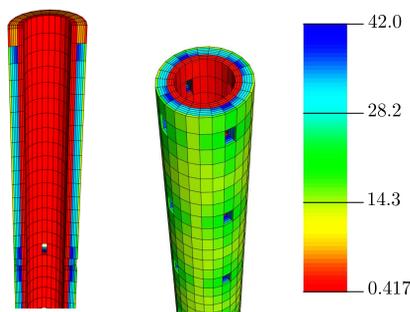
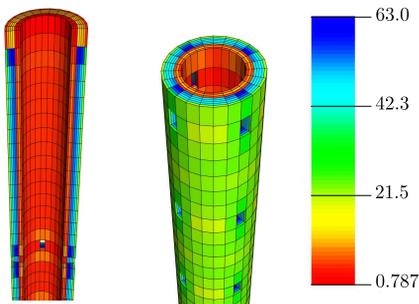


Рис. 7. Напряжение Мизеса (атм) в каждой точке цементного кольца и эксплуатационной колонны (при отсутствии трещины ГРП) (онлайн в цвете)

[Figure 7 (color online). Von Mises stress (atm) at each point of the cement sheath and production casing (in the absence of hydraulic fracture)]



колонны (синие области). Если напряжение Мизеса превысит предел прочности цемента, то цементное кольцо начнет разрушаться в этой зоне. Вдоль внутренней стенки цементного кольца от перфораций могут пойти трещины, которые в итоге станут причиной заколонных перетоков.

На торцевой части цилиндра также наблюдается высокое значение напряжения Мизеса, поскольку торцы закреплены и неподвижны. Напряжение в цементном кольце существенно выше напряжения в эксплуатационной колонне (это связано с тем, что цементное кольцо имеет меньший модуль Юнга).

Сравнивая рис. 6 и 7, можно заметить, что наличие трещины ГРП не меняет картину пространственного распределения напряжений в цементном кольце и эксплуатационной колонне, но уменьшает максимальное значение напряжения в 1.5 раза.

6. Верификация численного решения уравнения упругости. Для верификации численного метода рассмотрена задача деформации балки под собственной тяжестью. Балка состоит из изотропного материала и закреплена на одном конце. На каждую точку балки действует сила тяжести.

Проведено сравнение расчета, полученного с помощью разработанного численного метода, с расчетом в открытом пакете моделирования Fenics [4], в котором используется метод конечных элементов. В первом расчете использовалась структурированная сетка (hex mesh), состоящая из 3840 ячеек кубической формы, а во втором расчете — тетраэдральная сетка, состоящая из 3840×6 элементов.

На рис. 8 показаны деформированное состояние балки и напряжения Мизеса в каждой точке балки, полученные в двух расчетах. Видно, что деформация и напряжения Мизеса близки друг к другу в двух расчетах в каждой точке балки.

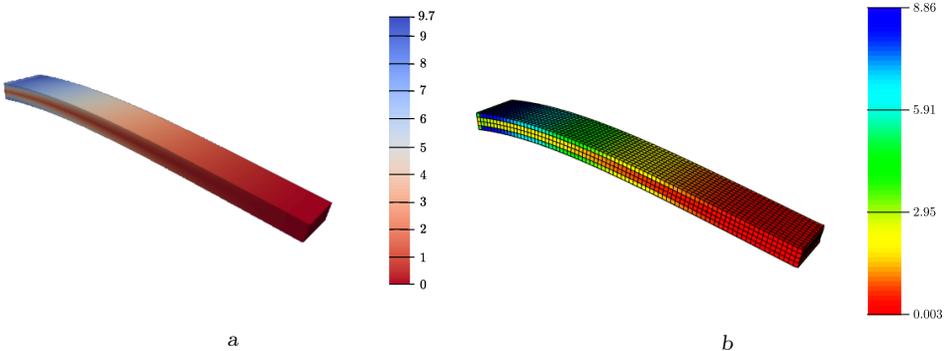


Рис. 8. Напряжение Мизеса в каждой точке деформированной балки: (а) расчет в пакете моделирования Fenics, (b) наш расчет

[Figure 8. Von Mises stress at each point of the deformed beam: (a) calculation in the Fenics package, (b) our calculation]

Закключение. Проведено моделирование напряженного состояния перфорированного цементного кольца, примыкающего к добывающей скважине. Показано, что максимальное значение напряжения Мизеса приходится на зону перфораций на стыке цементного кольца и эксплуатационной колонны, а наличие трещины гидроразрыва пласта может снижать напряжение цементного кольца.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке ООО «Уфимский НТЦ» и РФФИ (проект № 17-41-020226-р_а).

Библиографический список

1. Palagi C. L., Aziz K. Use of Voronoi grid in reservoir simulation // *SPE Advanced Technology Series*, 1994. vol. 20, no. 2. pp. 69–77. doi: 10.2118/22889-PA.
2. Nordbotten J. M. Cell-centered finite volume discretizations for deformable porous media // *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2014. vol. 100, no. 6. pp. 399–418. doi: 10.1002/nme.4734.
3. Keilegavlen E., Nordbotten J. M. Finite volume methods for elasticity with weak symmetry // *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2017. vol. 112, no. 8. pp. 939–962. doi: 10.1002/nme.5538.
4. Alnæs M. et al. The FEniCS Project Version 1.5 // *Archive of Numerical Software*, 2015. vol. 3, no. 100. doi: 10.11588/ans.2015.100.20553.

MSC: 76S05, 74A10

Modeling of stress state of a perforated cement sheath in a well with hydraulic fracture

T. F. Kireev^{1,2}, G. T. Bulgakova¹

¹ Ufa State Aviation Technical University,
12, K. Marx st., Ufa, 450077, Russian Federation.

² Ufa Scientific and Technical Center,
59, Aksakov st., Ufa, 450076, Russian Federation.

Abstract

Modeling of stress state of a perforated cement sheath in a well with hydraulic fracture is performed. The incompressible fluid flow model is used to calculate the pore pressure of a fluid. The linear-elastic body model and finite volume method with multipoint stress approximation are used to calculate the stress state of the cement sheath and production casing. The numerical model was verified by comparing the calculation results with a calculation in the Fenics open-source computing platform. It is shown that the maximum value of von Mises stress falls on the perforation zone at the junction of the cement sheath and the production casing. The presence of a hydraulic fracture can reduce the stress of the cement sheath.

Keywords: stress state, cement sheath, behind-the-casing flows, hydraulic fracture, multipoint stress approximation, Voronoi grid.

Received: 13th September, 2019 / Revised: 28th October, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 23rd December, 2019

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research was supported by UNTC LLC and RFBR (project no. 17–41–020226–r_a).

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kireev T. F., Bulgakova G. T. Modeling of stress state of a perforated cement sheath in a well with hydraulic fracture, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 777–788. doi: 10.14498/vsgtu1744.

Authors' Details:

Timur F. Kireev  <https://orcid.org/0000-0002-2653-1059>

Postgraduate Student; Dept. of Mathematics¹; Lead Engineer/Analyst; Dep. of Mathematical Modeling²; e-mail: kireevtf@mail.ru

Guzel T. Bulgakova  <https://orcid.org/0000-0001-8030-1791>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Mathematics; e-mail: bulgakova.guzel@mail.ru

References

1. Palagi C. L., Aziz K. Use of Voronoi grid in reservoir simulation, *SPE Advanced Technology Series*, 1994, vol. 20, no. 2, pp. 69–77. doi: 10.2118/22889-PA.
2. Nordbotten J. M. Cell-centered finite volume discretizations for deformable porous media, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2014, vol. 100, no. 6, pp. 399–418. doi: 10.1002/nme.4734.
3. Keilegavlen E., Nordbotten J. M. Finite volume methods for elasticity with weak symmetry, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2017, vol. 112, no. 8, pp. 939–962. doi: 10.1002/nme.5538.
4. Alnæs M. et al. The FEniCS Project Version 1.5, *Archive of Numerical Software*, 2015, vol. 3, no. 100. doi: 10.11588/ans.2015.100.20553.



УДК 517.958

Задача Бицадзе–Самарского для одного характеристически нагруженного уравнения гиперβολо-параболического типа

К. У. Хубиев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Рассматривается характеристически нагруженное уравнение смешанного гиперβολо-параболического типа. В гиперболической части области уравнение представляет собой нагруженное односкоростное уравнение переноса, известное в математической биологии как уравнение Мак-Кендрика, в параболической — нагруженное уравнение диффузии. Цель работы: исследование единственности и существования решения нелокальной внутренне-краевой задачи с условиями Бицадзе–Самарского в параболической части области и непрерывными условиями сопряжения, краевые условия в гиперболической части области не задаются.

Решение исследуемой задачи сводится к решению нелокальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно следа искомой функции на линии изменения типа. Доказана теорема существования и единственности решения задачи, в гиперболической части области выписано решение в явном виде. В параболической части области исследуемая задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, найдено представление решения.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперβολо-параболическое уравнение, нелокальная задача, задача Бицадзе–Самарского, внутренне-краевая задача.

Получение: 13 сентября 2019 г. / Исправление: 28 октября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2019 г.

Краткое сообщение

© © 1 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Khubiiev K. U. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 789–796. doi: 10.14498/vsgtu1677.

Сведения об авторе

Казбек Узейрович Хубиев  <https://orcid.org/0000-0003-0081-0276>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел уравнений смешанного типа; e-mail: khubiiev_math@mail.ru

Введение. Рассмотрим характеристически нагруженное уравнение смешанного гипероло-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y + \lambda_1 u(x, 0) = f_1(x, y), & y > 0, \\ u_x + u_y + cu + \lambda_2 u(x - y, 0) = f_2(x, y), & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T > 0$ при $y > 0$, и характеристиками $x - y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) при $y < 0$; λ_i, c — заданные постоянные; $f_i(x, y)$ — заданные функции, $i = 1, 2$. Через Ω_1 и Ω_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через J — интервал $0 < x < r$ прямой $y = 0$.

К краевым задачам для уравнений вида (1) при $y > 0$ сводятся многие задачи, связанные с прогнозированием и регулированием уровня грунтовых вод [1, с. 95], задачи описания процесса распространения тепла в одномерной ограниченной среде, в которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры [2], теории популяции [3, с. 128]. При $y < 0$ уравнение (1) является нагруженным односкоростным уравнением переноса, в математической биологии при $\lambda_2 = 0$ оно известно как уравнение Мак-Кендрика [3, с. 121, 179]. На основе уравнения Мак-Кендрика и его разновидностей строятся нелимитированные и лимитированные модели динамики возрастной структуры и численности популяции (см., например, [3, с. 244]).

1. Постановка задачи типа задачи Бицадзе—Самарского. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega_1)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

ЗАДАЧА BS. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad 0 \leq y \leq T, \quad (2)$$

$$u(x_0, y) = \alpha(y)u(r, y) + \beta(y), \quad 0 < x_0 < r, \quad 0 \leq y \leq T, \quad (3)$$

где $\varphi_0(y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ — заданные функции, $\alpha(y) \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $x_0 = 0$ при $\alpha(y) \neq 0$ или $x_0 = r$ при $\alpha(y) \neq 1$ задача (2), (3) переходит в локальную краевую задачу, которая для нехарактеристически нагруженного уравнения с вырождением порядка в области его гиперболичности была исследована в [4]. Если же при этом не выполнены условия относительно $\alpha(y)$, то задача становится некорректной.

Для параболического уравнения задача с нелокальным условием (3) была исследована в работе [5]. Внутренне-краевая задача типа задачи Бицадзе—Самарского для модельного уравнения смешанного гипероло-параболического типа второго порядка исследована в работе [6], а в [7] — для гипероло-параболического уравнения с нехарактеристической нагрузкой на линии изменения типа.

Задача с условиями (2), (3) относится к задачам типа задачи Бицадзе—Самарского и является частным случаем задачи с нелокальным условием А. М. Нахушева [8]. В работе [9] исследуются различные локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического типа,

и в том числе рассмотрена задача для модельного параболического уравнения с условиями, обобщающими условия (3), и ее практические приложения. В [10] для уравнения эллиптического типа общего вида в прямоугольной области рассмотрена нелокальная задача с условиями А. М. Нахушева на обеих боковых сторонах прямоугольника. Для уравнения (1) задача с нелокальным условием А. М. Нахушева исследована в [11].

2. Теорема существования и единственности решения. Для задачи BS справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если $f_1(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1)$ и удовлетворяет условию Гельдера по x , $\varphi_0(y) \in C[0, T]$, $\alpha(y), \beta(y) \in C[0, T] \cap C^1[0, T]$, $f_2(x, y) \in C(\Omega_2 \cup \bar{J})$,

$$\alpha(0) \neq \exp([r - x_0]/2) \frac{\operatorname{sh} px_0}{\operatorname{sh} pr},$$

$$p = \sqrt{1 - 4q}/2, \quad q \neq \pi^2 n^2 / r^2 + 1/4, \quad q = c + \lambda_1 + \lambda_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

то задача BS имеет, и притом единственное, решение.

Доказательство. Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи (1)–(3). Обозначим $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = u_y(x, 0)$, причем из условий задачи $\tau(x) \in C(\bar{J}) \cap C^1(J)$, $\nu(x) \in C(J)$. Тогда из (2) и (3) следует

$$\tau(0) = \varphi_0(0), \tag{4}$$

$$\tau(x_0) = \alpha(0)\tau(r) + \beta(0). \tag{5}$$

Переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$, получаем, что $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на линии изменения типа будут связаны следующим соотношением, принесенным из параболической части Ω_1 области Ω :

$$\tau''(x) - \nu(x) + \lambda_1 \tau(x) = f_1(x, 0), \quad 0 < x < r. \tag{6}$$

Также, переходя к пределу при $y \rightarrow -0$, в Ω_2 получим

$$\tau'(x) + \nu(x) + [c + \lambda_2]\tau(x) = f_2(x, 0), \quad 0 < x < r. \tag{7}$$

Из (6), (7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\tau''(x) + \tau'(x) + q\tau(x) = f(x), \tag{8}$$

где $q = c + \lambda_1 + \lambda_2$, $f(x) = f_1(x, 0) + f_2(x, 0)$.

Отсюда сразу видно, что при $\alpha(0) = 0$ и $0 < x_0 < r$ нарушается единственность решения задачи (4), (5) для уравнения (8). Введем обозначение

$$\varphi_r(y) = u(r, y), \tag{9}$$

тогда

$$\tau(r) = \varphi_r(0). \tag{10}$$

Решение задачи Дирихле (4), (10) для уравнения (8) имеет вид

$$\tau(x) = \int_0^r G(x, \xi) f(\xi) d\xi + G_\xi(x, r) \varphi_r(0) - G_\xi(x, 0) \varphi_0(0), \tag{11}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (8), (4), (10), имеющая вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\exp([\xi - x]/2) \operatorname{sh}(p\xi) \operatorname{sh}(p[x - r])}{p \operatorname{sh}(pr)}, & 0 \leq \xi \leq x, \\ \frac{\exp([\xi - x]/2) \operatorname{sh}(px) \operatorname{sh}(p[\xi - r])}{p \operatorname{sh}(pr)}, & x \leq \xi \leq r; \end{cases}$$

где $p = \sqrt{1 - 4q}/2$, $pr \neq \pi n$ ($q \neq \pi^2 n^2 / r^2 + 1/4$), $n = 1, 2, \dots$

Здесь надо отметить, что $G(x, \xi)$ является действительнoзначной функцией, зависящей от комплексного числа p .

Устремляя $x \rightarrow x_0$, из (11) получим

$$\tau(x_0) = \int_0^r G(x_0, \xi) f(\xi) d\xi + G_\xi(x_0, r) \varphi_r(0) - G_\xi(x_0, 0) \varphi_0(0),$$

откуда с учетом (5) при выполнении условия $\alpha(0) \neq G_\xi(x_0, r)$ получаем

$$\varphi_r(0) = \frac{1}{\alpha(0) - G_\xi(x_0, r)} \left[\int_0^r G(x_0, \xi) f(\xi) d\xi - G_\xi(x_0, 0) \varphi_0(0) - \beta(0) \right].$$

Из явного вида функции Грина получаем, что условие $\alpha(0) \neq G_\xi(x_0, r)$ можно переписать в виде $\alpha(0) \neq \exp([r - x_0]/2) \frac{\operatorname{sh} px_0}{\operatorname{sh} pr}$.

Таким образом, после нахождения $\varphi_r(0)$ функция $\tau(x)$ полностью определяется формулой (11), причем $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2]0, r[$. Далее $\nu(x)$ находим из (7), откуда видно, что $\nu(x) \in C^1]0, r[$.

В гиперболической части области Ω_2 решение задачи (1)–(3) сводится к решению задачи Коши для частного случая неоднородного уравнения Мак-Кендрика [3, с. 179]

$$u_x + u_y + cu = \rho(x, y), \quad (12)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (13)$$

где $\rho(x, y) = f_2(x, y) - \lambda_2 \tau(x - y)$.

Решение задачи (12), (13) дается формулой

$$u(x, y) = \tau(x - y) e^{-cy} + \int_0^y \rho(\eta + x - y, \eta) e^{c(\eta - y)} d\eta,$$

которая будет решением задачи BS в Ω_2 . После несложных преобразований ее можно переписать в виде

$$u(x, y) = \tau(x - y) \left[e^{-cy} (1 + \lambda_2/c) - \lambda_2/c \right] + \int_0^y f_2(\eta + x - y, \eta) e^{c(\eta - y)} d\eta,$$

если $c \neq 0$, а при $c = 0$

$$u(x, y) = \tau(x - y) [1 - \lambda_2 y] + \int_0^y f_2(\eta + x - y, \eta) d\eta.$$

Если $f_1(x, y) \in C(\bar{\Omega}_1)$ и удовлетворяет условию Гельдера по x , $\varphi_0(y) \in C[0, T]$, $\alpha(y), \beta(y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[$, то решение задачи BS в Ω_1 представимо в виде решения первой краевой задачи (2), (9), (13) для уравнения (1):

$$u(x, y) = \int_0^y \Gamma_\xi(x, y; 0, \eta) \varphi_0(\eta) d\eta - \int_0^y \Gamma_\xi(x, y; r, \eta) \varphi_r(\eta) d\eta + \int_0^r \Gamma(x, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi + \int_0^y \int_0^r \Gamma(x, y; \xi, \eta) [f_1(\xi, \eta) - \lambda_1 \tau(\xi)] d\xi d\eta, \quad (14)$$

где

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(y-\eta)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[\frac{(x-\xi+2k)^2}{4(\eta-y)} \right] - \exp \left[\frac{(x+\xi+2k)^2}{4(\eta-y)} \right] \right\}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения Фурье [3, с. 267].

Удовлетворяя (14) условию (3) с учетом того, что $\alpha(y) \neq 0$, получим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\varphi_r(y)$:

$$\varphi_r(y) + \int_0^y K(y, \eta) \varphi_r(\eta) d\eta = F(y), \quad (15)$$

где

$$K(y, \eta) = \frac{1}{\alpha(y)} \Gamma_\xi(x_0, y; r, \eta),$$

$$F(y) = \int_0^y \Gamma_\xi(x_0, y; 0, \eta) \varphi_0(\eta) d\eta + \int_0^r \Gamma(x_0, y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi + \int_0^y \int_0^r \Gamma(x_0, y; \xi, \eta) [f_1(\xi, \eta) - \lambda_1 \tau(\xi)] d\xi d\eta.$$

Так как функция $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ непрерывна в $\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1$, имеет непрерывную при $0 \leq x \leq r$, $0 < y \leq \eta < T$ и интегрируемую вдоль отрезков $\{x = 0, 0 \leq y \leq T\}$ и $\{x = r, 0 \leq y \leq T\}$ производную Γ_x (и, соответственно, Γ_ξ) [3, с. 267], то уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра II рода и имеет единственное решение $\varphi_r(y)$, причем $\varphi_r(y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[$. С учетом этого и условия теоремы $\alpha(y), \beta(y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[$ из (3) получим, что и $u(x_0, y) \in C[0, T] \cap C^1]0, T[$, т.е. полученное решение задачи будет в искомом классе. После нахождения функции $\varphi_r(y)$ единственное решение задачи (1)–(3) в Ω_1 задается формулой (14). \square

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов автор не имеет.

Авторская ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи автором одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, тема № АААА–А19–119013190078–8.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения*. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Дикинов Х. Ж., Кереев А. А., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 177–179.
3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
4. Хубиев К. У. Краевая задача для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа с вырождением порядка в области его гиперболичности // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2018. Т. 149. С. 113–117.
5. Напсо А. Ф. О задаче Бицадзе–Самарского для уравнения параболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1977. Т. 13, № 4. С. 761–762.
6. Напсо А. Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа // *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1. С. 185–186.
7. Хубиев К. У. Внутренне-краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа // *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*, 2008. № 6(148). С. 23–25.
8. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
9. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // *Диффер. уравн.*, 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
10. Нахушева З. А. Об одной нелокальной эллиптической краевой задаче типа задачи Бицадзе–Самарского // *Докл. АМАН*, 2013. Т. 15, № 1. С. 18–23.
11. Хубиев К. У. Задача типа задачи Бицадзе–Самарского для нагруженного уравнения гипербола-параболического типа // *Мат. заметки СВФУ*, 2019. Т. 26, № 2. С. 31–40. doi: 10.25587/SVFU.2019.102.31510.

MSC: 35M10, 35M12

The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation

K. U. Khubiev

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The paper considers a characteristically loaded equation of a mixed hyperbolic-parabolic type with degeneration of order in the hyperbolicity part of the domain. In the hyperbolic part of the domain, we have a loaded one-velocity transport equation, known in mathematical biology as the Mac Kendrick Von Forester equation, in the parabolic part we have a loaded diffusion equation. The purpose of the paper is to study the uniqueness and existence of the solution of the nonlocal inner boundary value problem with Bitsadze-Samarskii type boundary conditions and the continuous conjugation conditions in the parabolic domain; the hyperbolic domain is exempt from the boundary conditions.

The problem under investigation is reduced to a non-local problem for an ordinary second-order differential equation with respect to the trace of the unknown function in the line of the type changing. The existence and uniqueness theorem for the solution of the problem has been proved; the solution is written out explicitly in the hyperbolic part of the domain. In the parabolic part, the problem under study is reduced to the Volterra integral equation of the second kind, and the solution representation has been found.

Keywords: loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, nonlocal problem, Bitsadze–Samarskii problem, internal boundary value problem.

Received: 13th September, 2019 / Revised: 28th October, 2019 /

Accepted: 11th November, 2019 / First online: 23rd December, 2019

Competing interests. Author has no competing interests.

Author's Responsibilities. The author of this paper accept full responsibility for submitting the final manuscript for publication. The author have read and approved the final version submitted.

Short Communication

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khubiev K. U. The Bitsadze–Samarskii problem for some characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 789–796. doi: 10.14498/vsgtu1677.

Author's Details:

Kazbek U. Khubiev  <https://orcid.org/0000-0003-0081-0276>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Mixed Type Equations;

e-mail: khubiev_math@mail.ru

Funding. The work was done within the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, no. AAAA-A19-119013190078-8.

References

1. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniya* [Loaded Equations and their Applications]. Moscow, Nauka, 2012, 232 pp. (In Russian)
2. Dikinov Kh. Zh., Kerefov A. A., Nakhushev A. M. A boundary-value problem for a loaded heat-conduction equation, *Differ. Equ.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 125–126 (In Russian).
3. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. Shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
4. Khubiev K. U. Boundary-value problem for a loaded equation of hyperbolic-parabolic type with degeneracy of order in the domain of hyperbolicity, In: *Proceedings of the International Conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Physics"*, Kabardino-Balkaria, Nalchik, May 17–21, 2017, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 149. Moscow, VINITI, 2018, pp. 113–117 (In Russian).
5. Napso A. F. The Bitsadze–Samarskii problem for an equation of parabolic type, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 761–762 (In Russian).
6. Napso A. F. A nonlocal problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type, *Differ. Uravn.*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 185–186 (In Russian).
7. Khubiev K. U. Inner boundary value problem for the loaded equation of mixed type, *Izv. Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Estestvennye nauki*, 2008, no. 6(148), pp. 23–25 (In Russian).
8. Vogahova V. A. A boundary value problem with non-local A. M. Nakhushev condition for a certain pseudoparabolic moisture transfer equation, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285 (In Russian).
9. Nakhushev A. M. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of ground moisture, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 1, pp. 96–105 (In Russian).
10. Nakhusheva Z. A. On a Bitsadze–Samarsky type nonlocal elliptic boundary value problem, *Dokl. Adyg. (Cherkess.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2013, vol. 15, no. 1, pp. 18–23 (In Russian).
11. Khubiev K. U. A problem of the Bitsadze–Samarskii type for a loaded hyperbolic-parabolic equation, *Math. Notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 31–40 (In Russian). doi: 10.25587/SVFU.2019.102.31510.



УДК 517.958:531.3–1

Решение уравнений идеального газа, описывающих галилеевы инвариантные движения с винтовыми линиями уровня, с коллапсом на геликоиде

Ю. В. Юлмухаметова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
Россия, 450054, Уфа, Проспект Октября, 71.

Аннотация

Для уравнений идеальной газовой динамики в цилиндрической системе координат с произвольным уравнением состояния рассматривается одна двумерная подалгебра из оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли операторов дифференцирования первого порядка. Базис операторов рассматриваемой подалгебры состоит из оператора галилеева переноса и оператора движения по спиральным линиям. Инварианты операторов задают представление решения: вид компонент вектора скорости, функции плотности и функции энтропии. После подстановки представления решения в дифференциальные уравнения газовой динамики вводится предположение о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты. Записаны преобразования эквивалентности, которые допускает система уравнений газовой динамики после подстановки представления решения. Для уравнения состояния политропного газа найдены все четыре решения в зависимости от показателя адиабаты. Для каждого случая записаны уравнения мировых линий движения частиц газа. Найден якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым. По значению якобиана определены моменты времени коллапса частиц газа. В результате полученные решения описывают прямолинейный разлет частиц газа с поверхности геликоида. Движения частиц по логарифмическим спиральям, лежащим на параболоиде и движения по гиперболическим спиральям, лежащим на конусе.

Ключевые слова: газовая динамика, подмодель ранга два, линейное поле скоростей, политропный газ, поверхность коллапса, геликоид.

Получение: 14 мая 2019 г. / Исправление: 7 ноября 2019 г. /

Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 2 декабря 2019 г.

Краткое сообщение

© © 2019 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Yulmukhametova Yu. V. The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 797–808. doi: 10.14498/vsgtu1703.

Сведения об авторе

Юлия Валерьевна Юлмухаметова  <https://orcid.org/0000-0002-5127-4584>

кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; лаб. дифференциальных уравнений механики; e-mail: yulmukhametova.yulya@ya.ru

Введение. Для системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния известны все 27 инвариантных подмоделей ранга два [1]. Все перечисленные подмодели приводятся к системе эволюционного типа или к системе стационарного типа. В книге С. В. Хабирова [2] рассмотрены инвариантные подмодели, построенные на подалгебрах 2.17, 2.9, 2.2 (нумерация подалгебр из [1]). Решения подмоделей описывают соответственно двумерные установившиеся течения газа, одномерные движения газа с цилиндрическими волнами и закруткой, течения со спиральными поверхностями уровня. Классификация точных решений остальных подмоделей не завершена.

В данной работе рассматривается инвариантная подмодель ранга 2 эволюционного типа в цилиндрической системе координат, построенная на подалгебре 2.10 [1]. Ставится задача найти все решения для политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственной координаты. Аналогичная задача рассмотрена в работе [3], где изучено только одно точное решение с двумя линейными компонентами скорости подмодели ранга 3.

Классификация газодинамических подмоделей с линейным полем скоростей по трем координатам и по общему уравнению состояния была проделана в работе [4]. Полученные динамические системы большой размерности не поддаются простому интегрированию. Поэтому ставится аналогичная задача для инвариантных подмоделей. В работе С. В. Головина [5] решение поставленной задачи свелось к дифференциальному уравнению для функций одной переменной, но зависящих от различных независимых переменных. Чтобы его решить, необходимо разделить переменные в уравнении. В отличие от работы [5], в настоящей работе найдены все решения в явном виде. Найденные решения описывают коллапс на геликоиде и движения по спиральным линиям.

1. Постановка задачи. Уравнения газовой динамики (УГД) в цилиндрической системе координат (t, x, r, θ) имеют вид

$$\begin{aligned} U_t + UU_x + VU_r + r^{-1}WU_\theta + \rho^{-1}p_x &= 0, \\ V_t + UV_x + VV_r + r^{-1}WV_\theta + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}W^2, \\ W_t + UW_x + VW_r + r^{-1}WW_\theta + \rho^{-1}r^{-1}p_\theta &= -r^{-1}VW, \\ \rho_t + U\rho_x + V\rho_r + r^{-1}W\rho_\theta + \rho(U_x + V_r + r^{-1}V + r^{-1}W_\theta) &= 0, \\ S_t + US_x + VS_r + r^{-1}WS_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где U — скорость вдоль оси x , V — радиальная скорость, W — окружная скорость, ρ — плотность, S — энтропия, давление определяется по уравнению состояния $p = f(\rho, S)$.

Рассматривается подалгебра 2.10 оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли, допускаемой УГД с произвольным уравнением состояния [1]. Базис операторов подалгебры состоит из оператора галилеева переноса $X_4 = t\partial_x + \partial_U$ и оператора движения по спиральным линиям $\alpha X_1 + X_7 = \alpha\partial_x + \partial_\theta$. В оптимальной системе $\alpha = 1$. Для дальнейшего удобства взята подобная подалгебра с произвольным $\alpha \neq 0$. Инварианты этих операторов задают представление решения:

$$U = \frac{x - \alpha\theta}{t} + u(t, r), \quad V = V(t, r), \quad W = W(t, r), \quad \rho\theta = \rho(t, r), \quad S = S(t, r). \quad (2)$$

Подстановка представления (2) в УГД (1) дает систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_t + ut^{-1} + Vu_r = \alpha W(rt)^{-1}, \quad V_t + VV_r + p_r\rho^{-1} = W^2r^{-1}, \\ W_t + VW_r + VWr^{-1} = 0, \quad \rho_t + V\rho_r + \rho(t^{-1} + V_r + Vr^{-1}) = 0, \\ S_t + VS_r = 0, \quad p = f(\rho, S). \end{aligned} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Система уравнений (3) допускает следующие преобразования эквивалентности:

$$\begin{aligned} V \rightarrow \frac{R}{T}V, \quad W \rightarrow \frac{R}{T}W, \quad \rho \rightarrow \frac{PT^2}{R^2}\rho, \quad p \rightarrow Pp + p_0, \\ u \rightarrow uT^{-1}, \quad t \rightarrow Tt, \quad r \rightarrow Rr, \quad S \rightarrow h(S), \\ \bar{f}(\rho, S) = P^{-1}(f(PT^2R^{-2}\rho, h(S)) - p_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где R, T, P — постоянные, $h(S)$ — произвольная функция, а также инверсия

$$W \rightarrow -W, \quad u \rightarrow -u.$$

Решение УГД принято рассматривать [6] с точностью до преобразований эквивалентности (4).

Из первого уравнения системы (3) функция $u(t, r)$ может быть найдена после нахождения решения остальных уравнений. Уравнения системы (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} V_t + VV_r + p_r\rho^{-1} = W^2r^{-1}, \quad (rW)_t + V(rW)_r = 0, \\ (rt\rho)_t + (rtV\rho)_r = 0, \quad S_t + VS_r = 0. \end{aligned}$$

Вводится лагранжева координата $\xi = \xi(t, r)$ по правилу $\xi_t + V\xi_r = 0$ с точностью до взятия произвольной функции от ξ [6]. Тогда уравнение для W, ρ, S интегрируются:

$$S = S(\xi), \quad rW = g(\xi), \quad \rho = (rt)^{-1}\xi_r, \quad V = -(\xi_r)^{-1}\xi_t, \quad (5)$$

где $S(\xi), g(\xi)$ — произвольные функции, а функция $\xi(t, r)$ удовлетворяет уравнению

$$-\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_t + \frac{\xi_t}{\xi_r}\left(\frac{\xi_t}{\xi_r}\right)_r + f_\rho\left(\frac{\xi_{rr}}{\xi_r} - \frac{1}{r}\right) + f_S S_\xi rt = \frac{g^2(\xi)}{r^3}. \quad (6)$$

Из первого уравнения системы (3) следует интеграл

$$tu = \alpha g(\xi) \int \frac{dt}{r^2(t, \xi)} + U_1(\xi), \quad (7)$$

где $U_1(\xi)$ — произвольная функция. Газодинамические функции определены формулами (2), (5), (7), где лагранжева координата $\xi(t, r)$ удовлетворяет уравнению (6). Координата скорости V линейна по r тогда и только тогда, когда лагранжева координата линейна по r :

$$\xi = rb(t) + c(t), \quad b(t) \neq 0. \quad (8)$$

В этом случае уравнение (6) примет вид

$$-(\xi - c)^4 \left(\frac{b'}{b^2}\right)' - b \left(\frac{c'}{b^2}\right)' (\xi - c)^4 - f_\rho b (\xi - c)^2 + f_S S_\xi t \frac{(\xi - c)^4}{b} = g^2(\xi) b^3. \quad (9)$$

Замечание. Равенство (9) — тождество по независимым переменным ξ и t . При $\xi = c(t) \neq 0$ следует $g(c(t)) = 0$. Отсюда либо $g = 0$, либо c — постоянная, не равная нулю. Если c — постоянная, то преобразование эквивалентности сдвига по ξ делает $c = 0$. Противоречие. Если $g = 0$, то из (9) следует

$$(\xi - c)^2 \left[-\left(\frac{b'}{b^2}\right)' - b \left(\frac{c'}{b^2}\right)' + f_S S_\xi \frac{t}{b} \right] = f_\rho b.$$

При $\xi = c$ получаем $b = 0$, так как $f_\rho \neq 0$ для нормального газа. Противоречие. Значит, $c = 0$ и уравнение (9) примет вид

$$-\left(\frac{b'}{b^2}\right)' - \frac{b}{\xi^2} f_\rho + f_S S_\xi \frac{t}{b} = g^2(\xi) \frac{b^2}{\xi^4}, \quad f(\rho, S) = f\left(\frac{b^2}{t\xi}, S(\xi)\right). \quad (10)$$

Последнее равенство есть уравнение для определения уравнения состояния (УС) по известным функциям $b(t)$ и $S(\xi)$. По заданным решениям определяется УС. Если известно УС, то это уравнение задает переопределенное соотношение для нахождения функций $S(\xi)$ и $b(t)$.

2. Модель политропного газа. Уравнение состояния политропного газа имеет вид $p = h(S)\rho^\gamma$, $\gamma \neq 0$, где $h(S)$ — произвольная функция энтропии, γ — показатель адиабаты. С точностью до преобразования эквивалентности (4) системы (1) можно считать $S(\xi) = \xi$, то есть

$$p = \xi \rho^\gamma. \quad (11)$$

Уравнение (10) в силу (8), (11), (5) становится тождеством по t и ξ :

$$-\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-1}} \left(\frac{b'}{b^2}\right)' + (1 - \gamma) \text{sign } \xi |\xi|^{-\gamma} = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} \frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-4}}, \quad (12)$$

После дифференцирования тождества (12) по t

$$-\left(\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-1}} \left(\frac{b'}{b^2}\right)'\right)' = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} \left(\frac{|t|^{\gamma-1}}{b^{2\gamma-4}}\right)'$$

независимые переменные t и ξ разделяются. Возможны два случая:

- 1) $g = \xi^2$, $(|t|^{\gamma-1} b^{4-2\gamma})' \neq 0$;
- 2) $b = \pm |t|^{\frac{\gamma-1}{2\gamma-4}}$, $\gamma \neq 2$.

В первом случае из уравнения (12) с точностью до преобразования эквивалентности следует

$$\gamma = 1, \quad b = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$U = \frac{x - \alpha\theta + \alpha \arctg t + U_1(\xi)}{t}, \quad V = \frac{rt}{1 + t^2}, \quad W = \frac{r}{1 + t^2}, \quad (13)$$

$$\rho = \frac{\pm 1}{rt\sqrt{1+t^2}}, \quad \xi = \frac{\pm r}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Во втором случае после подстановки выражения для функции $b(t)$ в тождество (12) получаем

$$-\frac{(\gamma-1)(5-3\gamma)}{(2\gamma-4)^2} \operatorname{sign} t |t|^{\frac{6-4\gamma}{\gamma-2}} = \frac{g^2(\xi)}{\xi^4} - (1-\gamma) \operatorname{sign} \xi |\xi|^{-\gamma}. \quad (14)$$

Последнее тождество верно только в трех случаях: $\gamma = 3/2, 1, 5/3$.

Если $\gamma = 3/2$, то $b = \pm |t|^{-1/2}$, $\xi = \pm r|t|^{-1/2}$. Тождество (14) есть равенство для определения функции $g(\xi)$ только при $t < 0$ и $\xi = -r|t|^{-1/2}$:

$$g^2 = \frac{1}{4}\xi^4 + \frac{1}{2}|\xi|^{5/2}.$$

Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{x - \alpha\theta}{t} + \alpha \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{|t|^{3/4}}{r^{3/2}} \right)^{1/2} \frac{\ln |t|}{t} + \frac{U_1(\xi)}{t}, & V &= \frac{r}{2t}, \\ W &= \frac{1}{2r} \left(\frac{r^4}{t^2} + 2 \frac{r^{5/2}}{|t|^{5/4}} \right)^{1/2}, & \rho &= \frac{1}{|t|^{3/2}r}, \quad \xi = -\frac{r}{\sqrt{|t|}}, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $\gamma = 5/3$, то $b = t^{-1}$, $\xi = rt^{-1}$. Из тождества (14) следует выражение для функции $g(\xi)$ только при $t < 0$:

$$g = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} |\xi|^{7/6}.$$

Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$\begin{aligned} U &= \frac{x - \alpha\theta}{t} - \alpha \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{r^{5/6} |t|^{7/6}} + \frac{U_1(\xi)}{t}, & V &= \frac{r}{t}, \\ W &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{r^{1/6}}{|t|^{7/6}}, & \rho &= \frac{1}{rt^2}, \quad \xi = \frac{r}{t}, \quad t < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если $\gamma = 1$, то $b = \pm 1$, $\xi = \pm r$. В этом случае из тождества (14) следует $g(\xi) = 0$. Тогда компоненты вектора скорости (U, V, W) и плотность согласно формулам (2), (5), (7) имеют вид

$$U = \frac{x - \alpha\theta + U_1(\xi)}{t}, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad \rho = \pm \frac{1}{rt}. \quad (17)$$

Таким образом, модель политропного газа задается решениями (13), (15), (16) и (17). Далее рассматриваются траектории движения частиц и приводится описание полученных решений.

3. Примеры движения частиц газа. Мировые линии движения частиц газа в цилиндрической системе координат определяются как решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = U, \quad \frac{dr}{dt} = V, \quad r \frac{d\theta}{dt} = W.$$

3.1. Для решения (13) уравнения мировые линий задаются равенствами

$$x = u_0 t + \alpha \theta_0 - U_1(\pm r_0), \quad r = r_0 \sqrt{1 + t^2}, \quad \theta = \arctg t + \theta_0, \quad (18)$$

где u_0, r_0, θ_0 — лагранжевы координаты частиц в момент $t = 0$: $0 \leq r_0 < \infty$, $-\infty < \theta_0 < \infty$, $-\infty < u_0 < \infty$.

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный $t\sqrt{1+t^2}$, обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 2. Значит коллапс частиц происходит на поверхности. В момент времени $t = 0$ частицы занимают положение

$$x = \alpha \theta_0 - U_1(\pm r_0), \quad r = r_0, \quad \theta = \alpha \theta_0. \quad (19)$$

Поверхность коллапса задается уравнением

$$x = \theta - U_1(\pm r). \quad (20)$$

При $U_1 = 0$ поверхность коллапса есть прямой геликоид (рис. 1, а). Если $U_1 \neq \text{const}$, то поверхность коллапса есть наклонный геликоид (рис. 1, б). В каждой точке геликоида находится однопараметрическое семейство частиц, которые отличаются друг от друга скоростью u_0 вдоль оси x . Траектории движения частиц газа есть прямые линии.

Функция $U_1(\pm r)$ отвечает за форму образующей геликоида. Так, если $U_1(\pm r) > 0$, то геликоид раскручивается вдоль оси x в направлении убывания координаты x . Если $U_1(\pm r) < 0$, то геликоид раскручивается вдоль оси x в направлении возрастания координаты x .

На рис. 1, а изображен геликоид с функцией $U_1 = -r^2$. Если рассмотреть проекции траекторий на плоскость (y, z) , то это будут параллельные прямые для частиц с одинаковой лагранжевой координатой θ_0 и различной координатой r_0 . Если проекции траекторий частиц лежат на окружности радиуса r_0 (винтовые линии в пространстве), то проекциями траекторий будут прямые — касательные к этой окружности. Это следует из (18).

3.2. Для решения (15) уравнения мировых линий задаются равенствами

$$x = u_0 t + \alpha \theta_0 + U_1(-r_0), \quad r = r_0 \sqrt{|t|}, \quad \theta = \ln |t| \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{r_0^{3/2}} \right)^{1/2} + \theta_0.$$

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный $t\sqrt{|t|}$, обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 1. Коллапс частиц происходит на прямой

$$x = \alpha \theta_0 - U_1(-r_0), \quad y = z = 0. \quad (21)$$

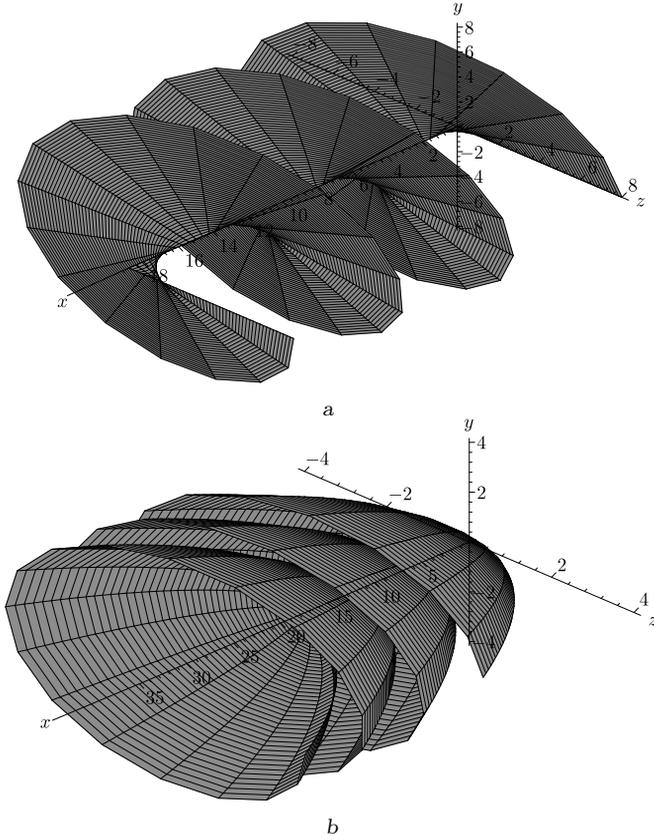


Рис. 1. Поверхности коллапса: а) прямой геликоид; б) наклонный геликоид
 [Figure 1. Collapse surfaces: (a) straight helix; (b) inclined helix]

Проекция траектории на плоскость (y, z) есть логарифмическая спираль (рис. 2, а):

$$r = r_0 \exp\left(\frac{\theta - \theta_0}{\kappa(r_0)}\right), \quad \kappa(r_0) = (1 + 2r_0^{-3/2})^{1/2}.$$

Траектории в пространстве лежат на параболоиде (рис. 2, б):

$$x = u_0(rr_0^{-1})^2 + \alpha\theta_0 + U_1(-r_0).$$

3.3. Для решения (16) уравнения мировых линий задаются равенствами

$$x = u_0 t + \alpha\theta_0 - U_1(-r_0), \quad r = r_0|t|, \quad \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{r_0^{5/6}|t|} + \theta_0.$$

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный $t|t|$, обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 1. Коллапс частиц происходит на прямой (21). Проекцией траекторий на плоскость (y, z) явля-

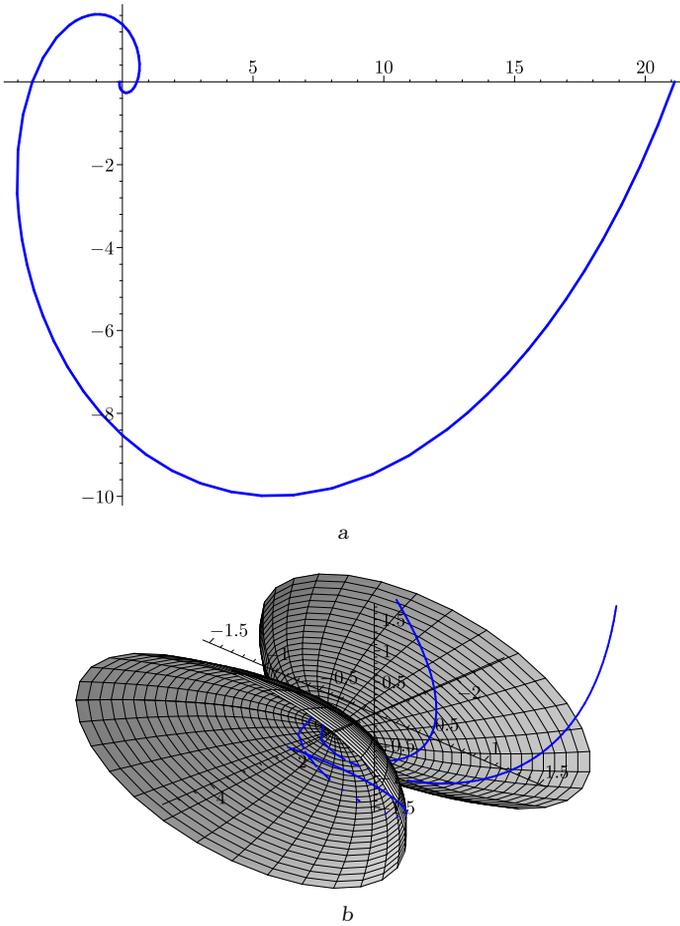


Рис. 2. Траектория движения частиц при $\gamma = 3/2$: а) логарифмическая спираль (проекция); б) логарифмическая спираль на параболоиде
 [Figure 2. The trajectory of motion of particles at $\gamma = 3/2$: (a) logarithmic spiral (a projection); (b) logarithmic spiral on a paraboloid]

ется гиперболическая спираль (рис. 3, а)

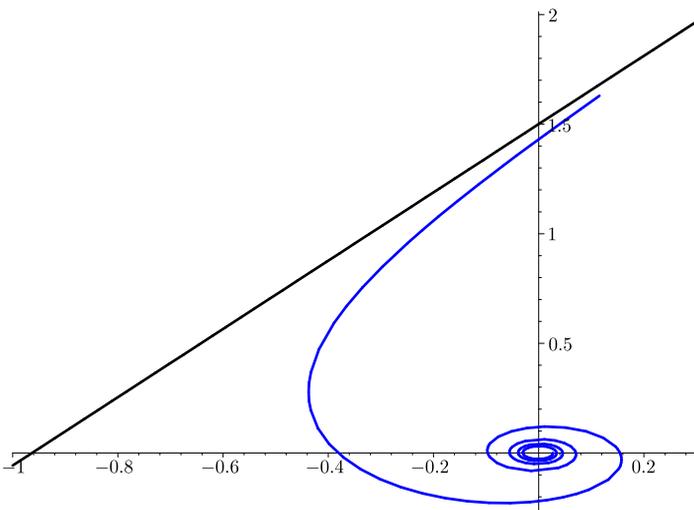
$$r = \frac{\kappa(r_0)}{\theta - \theta_0}, \quad \kappa(r_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} r_0^{1/6}.$$

В пространстве траектории являются винтовыми линиями на конусе (рис. 3, б).

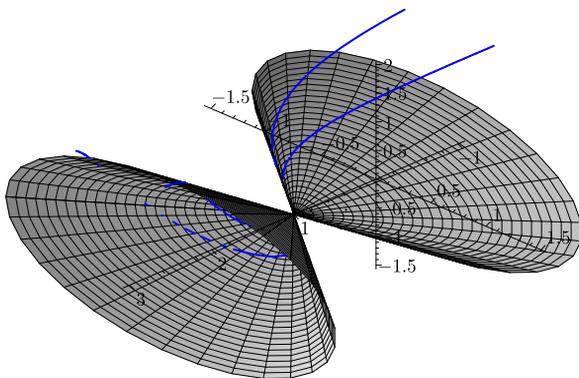
3.4. Для решения (17) уравнения мировых линий задаются равенствами

$$x = u_0 t + \theta_0 - U_1(r_0), \quad r = r_0, \quad \theta = \theta_0.$$

Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым, равный t , обращается в нуль при $t = 0$. Момент времени $t = 0$ является моментом коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при $t = 0$ равен 2. В момент времени $t = 0$ частицы занимают положение (19). Поверхность коллапса задается уравнением (20) геликоида. Траектории параллельны оси x .



a



b

Рис. 3. Траектория движения частиц при $\gamma = 5/3$: a) гиперболическая спираль (проекция);
b) гиперболическая спираль на конусе

[Figure 3. The trajectory of motion of particles at $\gamma = 5/3$: (a) hyperbolic spiral (a projection);
(b) hyperbolic spiral on a cone]

Закключение. Для инвариантной подмодели ранга 2 найдены решения в случае политропного газа с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости от пространственных координат. Полученные решения описывают прямолинейный разлет частиц газа с поверхности геликоидов различной конфигурации. Движения частиц по гиперболическим или логарифмическим спиральям, которые в пространстве лежат на конусе или параболоиде соответственно. В работе получены соотношения и уравнения (3), (5), (6), (7), которые позволяют найти точные решения не только для уравнения состояния политропного газа, но и для любого уравнения состояния. Требуется лишь подставить выбранное уравнение состояния в дифференциальное уравнение (6) и провести разделение переменных в уравнении.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–29–10071_мк) и частично поддержана средствами государственного бюджета по госзадаанию на 2019–2022 годы (№ 0246–2019–0052).

Благодарность. Автор благодарит анонимного рецензента за ценные предложения по улучшению этой статьи.

Библиографический список

1. Мамонтов Е. В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // *ПМТФ*, 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.
2. Хабиров С. В. *Аналитические методы в газовой динамике*. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.
3. Вишератин К. Н., Калашник М. В. Нелинейные акустические колебания в закрученных газовых потоках // *Изв. Акад. наук. МЖГ*, 2014. Т. 4. С. 125–135.
4. Юлмухаметова Ю. В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2012. № 9. С. 208–226.
5. Головин С. В. Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики // *ПМТФ*, 2002. Т. 43, № 4. С. 3–14.
6. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.: Наука, 1981. 368 с.
7. Хабиров С. В., Чиркунов Ю. А. *Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды*. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.

MSC: 35B35, 35B06

The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix

*Yu. V. Yulmukhametova*Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, RAS,
71, Oktyabr' av., Ufa, 450054, Russian Federation.

Abstract

We consider the equations of ideal gas dynamics in a cylindrical coordinate system with the arbitrary equation of state and one two-dimensional subalgebra from the optimum system of an 11-dimensional Lie algebra of differentiation operators of the first order. The basis of the subalgebra operators consists of the operator of Galilean transfer and the operator of movement on spiral lines. Invariants of operators set representation: type of speed, density and entropy. After substitution of the solution representation into the equations of gas dynamics the assumption of the linear relation of a radial component of speed and spatial coordinate is entered. Transformations of equivalence which are allowed by a set of equations of gas dynamics after substitution of the solution representation are written down. For the state equation of polytropic gas all four solutions depending on an isentropic exponent are found. For each case the equations of world lines of gas particles motion are written down. The transition Jacobian from Eulerian variables to Lagrangian is found. The instants of collapse of gas particles are determined by value of the Jacobian. As a result the solutions describe movement on straight lines from a helicoid surface. Movements of the particles on equiangular spirals lying on a paraboloid and on hyperbolic spirals, lying on a cone.

Keywords: gas dynamics, rank two submodel, linear velocity field, polytropic gas, collapse surface, helicoid.

Received: 14th May, 2019 / Revised: 7th November, 2019 /Accepted: 11th November, 2019 / First online: 2nd December, 2019

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yulmukhametova Yu. V. The solution of equations of ideal gas that describes Galileo invariant motion with helical level lines, with the collapse in the helix, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 797–808. doi: 10.14498/vsgtu1703.

Author's Details:

Yulya V. Yulmukhametova ✉ <https://orcid.org/0000-0002-8127-4584>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Differential Equation of Mechanics;

e-mail: yulmukhametova.yv@ya.ru

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–29–10071_mk) and supported by the state budget funds for the state assignments (no. 0246–2019–0052).

Acknowledgments. The author thanks anonymous reviewer for valuable suggestions to improve this paper.

References

1. Mamontov E. V. Invariant submodels of rank two to the equations of gas dynamics, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 232–237. doi: 10.1007/BF02468519.
2. Khabirov S. V. *Analiticheskie metody v gazovoi dinamike* [Analytical Methods in Gas Dynamics]. Ufa, Gilem, 2003, 192 pp. (In Russian)
3. Visheratin K. N., Kalashnik M. V. Nonlinear acoustic oscillations in swirling gas flows, *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 530–539. doi: 10.1134/S0015462814040139.
4. Yulmukhametova Yu. V. Submodels in gas dynamics with linear field of velocity, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2012, no. 9, pp. 208–226 (In Russian).
5. Golovin S. V. Exact solutions for evolutionary submodels of gas dynamics, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 493–502. doi: 10.1023/A:1016006110915.
6. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1981, 368 pp. (In Russian)
7. Khabirov S. V., Chirkynov Y. A. *Elementy simmetriinogo analiza differentsial'nykh uravnenii mekhaniki sploshnoi sredy* [Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Technical Univ., 2012, 659 pp. (In Russian)