ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 24, № 1 — 2020

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Март — 2020

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 24, № 1 – 2020)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 24, № 1 – 2020)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Телефон: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Адрес типографии:
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус 8

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 5 апреля 2020 г.
Дата выхода в свет 30 апреля 2020 г.
Формат 70 × 108 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 72/20.
Заказ № 243.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 05.13.18 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), на сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108
ISSN 1991–8615 (print), 2310–7081 (online)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
March — 2020

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2020, vol. 24, no. 1

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru) and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

ISSN 1991–8615 (print), 2310–7081 (online)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu/v224/i1

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Механика деформируемого твёрдого тела

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Краткие сообщения

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu/v224/i1

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Mechanics of Solids

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Short Communications

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 7–21
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1724

Differential Equations and Mathematical Physics

MSC: 81S40, 58D30

Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua

A. Yu. Samarin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Quantum particles are considered as continuous media having peculiar properties. These properties are formulated so that all main quantum mechanics postulates can be strictly derived from them. A deterministic description of the process of position measurement is presented. The mechanism of occurrence of randomness in the measurement process is shown and the Born rule is derived. A realistic interpretation of the wave function as a component of a peculiar variable force acting on the apparatus is introduced, and the wave equation is derived from the continuity equation of the peculiar continuum. The deterministic view on the phenomena of the microcosm allows us to eliminate the limitations caused by the uncertainty principle and to describe dynamically those processes that cannot be considered using conventional quantum mechanics.

Keywords: deterministic quantum description, continuous medium, local realism principle, matter field, continuity equation, wave function realistic interpretation, Born rule, uncertainty principle.

Received: 21st July, 2019 / Revised: 12th October, 2019 /
Accepted: 11th November, 2019 / First online: 7th February, 2020

Research Article

Please cite this article in press as:
Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 7–21. doi: 10.14498/vsgtu1724.

Author's Details:
Alexey Yu. Samarin https://orcid.org/0000-0001-7640-3875
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of General Physics and Physics of Oil and Gas Production; e-mail: samarin.ay@yahoo.com

Introduction

The solving problem of the local realism [1] is a prerequisite for any fundamental microcosm theory. We sure that the nonrealistic attitude is unacceptable for any physical theory and the wave function has to be interpreted, in accordance with Srödinger's view [2] "*... as giving somehow the density of the stuff of which the world is made*" [3]. This means, inter alia, that any physical quantity is an attribute of a material object (as material objects quantum particles[1] will be considered). Therefore the substance generating the wave function should be distributed in space. The type of this distribution, first of all, must satisfy the principle of locality. Then the simultaneous transformation of the wave function in the remote points in space, as the resulting of a local external effect on the quantum particle, forces us to suppose that there is no empty space between the parts of the substance. Thus, we have the continuum (hereinafter referred to as a physical continuum), which is not only a mathematical abstraction, but also a physical reality. In this sense, the concept of a material point (the term of individual particle will not be used here) of continuum mechanics should be taken literally as an element of the substance corresponding to a point in space, i.e. the set of the matter points that forms any particular body has the cardinality of the continuum. These material points can play the role of intermediaries in the instantaneous interaction between the material points that are remote in space. This assumption allows us to eliminate the violation of relativistic requirements [4] when interpreting the non-unitary processes (including the EPR paradox) while maintaining the principle of local realism.

1. Attributes of the physical continuum

The first property of the physical continuum is analogous to the classical one and consists in the fact that material points move in accordance with the principle of least action [5].

In addition, the physical continuum has some extraordinary properties. The second property is that there are no interaction forces between the material points forming the continuum of an elementary particle (there are no stresses within homogeneous physical continuum).[2] This means that more than one of the material points can have the same position, i.e. the continuous medium can be a collection of continuous media. Taking into account the quantum superposition principle, it is logical to assume that these continuous media are formed, ultimately, by material fields. The fact of the interaction of remote in space particles in entangled states gives each of these fields its own physical reality, i.e., they exist even in those spatial regions where the wave function is zero.

Suppose that a quantum particle (hereinafter referred to as a quantum object or simply an object) is a homogeneous, inseparable object within quantum mechanics. This gives rise to the following specific features of the dynamics:

– the inertia property of each material point is determined by the total mass of the object, and not by the mass density, as in classical continuum mechanics

[1] We suppose that a quantum particle obeys the laws of conventional quantum mechanics. Immediately after measuring position it is described by the wave function in the form of a position delta-function, but it is not a point-like particle.

[2] This does not mean that there is no interaction between the material points at all. In the paper [6], the normalizing procedure required to describe the non-unitary process is considered as a mathematical image of a real physical process. Such a process is impossible without a peculiar interaction between material points.

(the third property);
- any change in the measure of one of the material points subset in a local volume of space, instantly changes the measures of all the rest of other subsets in the whole space, which physically means that any local external effect on the quantum object result in the simultaneous transformation of the state of the entire continuous medium everywhere (this property have been considered in detail in [6]).

To introduce the spatial distribution of the physical continuum, define the measure dM of the material point set occupying an infinitesimal volume dV as

$$dM = \frac{dQ}{Q},$$

where Q is any additive conservative quantity such as electric charge, gravitational mass of the quantum object etc; dQ is the value of this quantity for a substance in the volume dV. Therefore, for the density of the measure, we have

$$\rho(x, y, z) = \frac{dM}{dV},$$

and for normalization condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 1. \tag{1}$$

Taking into account the forth property of the physical continuum, the formal normalisation procedure (1) should be considered as a mathematical image of the real transformation of a continuous medium that accompanies any non-unitary processes in conventional quantum mechanics, such as the wave function collapse in the measurement process. In accordance with the definition the measure M is an additive quantity having a positive real value.

Suppose, in accordance with the second property, that the continuous medium of any quantum object is formed by a set of the matter fields. Denote by $\xi_1 = x(0)$, $\xi_2 = y(0)$, $\xi_3 = z(0)$ are the referential coordinates of the material particle (hereinafter, the notation ξ_j will be used as material coordinates (in this case index j corresponds to the coordinate axes) whereas coordinate variables of the fields at time t_j will be denoted by x_j, y_j, z_j. In accordance with the second property, material points can not uniquely be identified only by material coordinates (in general, their initial velocities are necessary), however, in the case of matter fields, material coordinates uniquely identify material points. We introduce the notion of the complex density of a measure (or simply a complex density) as a characteristic of a material point, such that

$$\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vec{v}_0, t) = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vec{v}_0, t) \exp\frac{i}{\hbar} S[x(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vec{v}_0, t), t, t_0],$$

where the action $S[x(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vec{v}_0, t), t, t_0]$ is an attribute of the material point; material points move along the path $x(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \vec{v}_0, t)$ corresponding to the principle of least action; t_0 is an initial time. For the one-dimensional motion, which will only be considered, we have

$$\mu(\xi, v_0, t) = \rho(\xi, v_0, t) \exp\frac{i}{\hbar} S[x(\xi, v_0, t), t, t_0].$$

And for a closed system, we obtain

$$\mu(\xi, E, t) = \rho(\xi, E, t) \exp \frac{i}{\hbar} S[x(\xi, E, t), t, t_0]. \tag{2}$$

where E is the energy of the material point. If the material points of the matter field have the same moving direction and the same energy, then the continuity property conserves in time (see the next section for details). The function $\mu^{E,\alpha}(\xi, t)$ (the energy dependence and the motion direction are indicated by a superscript[3]) for a matter field can be rewritten in form of the field

$$\mu^{E,\alpha}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{E,\alpha}(\xi, t)\delta\big(x - x^{E,\alpha}(\xi, t)\big)\, d\xi,$$

where $x^{E,\alpha}(\xi, t)$ is the path corresponding to the least action of the material point ξ having the energy E and the motion direction α. Suppose that the complex density determines the summation law of the measure densities of those particles, that are in the same point in space in the form

$$\mu(x, t) = \int_0^{\infty} \sum_{\alpha} g_\alpha(E) \mu_\alpha^E(x, t)\, dE \tag{3}$$

$\mu(x, t)$ is a complex density of the measure. The complex weight $g_\alpha(E)$ of the fields forming a continuous medium is determined by the history of the formation of the continuum mechanical state. Thus, for the measure density, we obtain

$$\rho(x, t) = \big|\mu(x, t)\big|.$$

Since the measure (1) of objects conserves in the processes considering in quantum mechanics, for the measure density the continuity equation can be written. Dependence (2) allows us to write corresponding equation for the strength of a physical continuum μ.

2. The continuity equation

First of all, it is necessary to determine the conditions under which a continuous medium remains continuous in time. In accordance with the second property of the physical continuum, this means that the mater fields that formed it at some initial time remain fields in the subsequent time. Suppose $F(x)$ is a stationary external force field. By $\xi_1 = x_1(t_0)$ and $\xi_2 = x_2(t_0)$ ($x_2(t_0) > x_1(t_0)$) denote the material coordinates (Lagrange variables) of two specified material points of the continuous medium. At the time t their positions is expressed as

$$x(\xi_1, t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\xi_1, \tau) d\tau,$$

$$x(\xi_2, t) = x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\xi_2, \tau) d\tau.$$

[3]The direction index α has only two values "+" for the motion along the axis and "−" for the motion in the opposite direction. For brevity, it will be used only if necessary (in the cases of finite motion, when there are two continua moving in opposite directions).

where τ is a time variable; t denotes fixed points in time, such as the initial time t_0 and the current time t; $v(\xi_1,\tau)$, $v(\xi_2,\tau)$ are respectively the velocities of the first and the second material points. Then the distance between the considered points at an arbitrary time is determined by the expression

$$\Delta x = \Delta x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(v(\xi_2,\tau) - v(\xi_1,\tau)\big)\, d\tau =$$
$$= \Delta x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(v(\xi_2,t_0) - v(\xi_1,t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{\tau} \big(F(\xi_2,\theta) - F(\xi_1,\theta)\big)\, d\theta \right) d\tau,$$

where $\Delta x_0 = x_2(t_0) - x_1(t_0)$; θ is a time variable; $F(\xi_1,\theta)$, $F(\xi_2,\theta)$ are the forces acting on the points.[4] In order for the one-to-one correspondence between the material points ξ and positions x to take place all the time, it is necessary that

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \Delta x = 0. \tag{4}$$

Suppose, that the spatial interval Δx_0 is small. By ε denote the time interval $\Delta x_0 / v(\xi_1,t_0)$; by η denote the spatial variable. Then

$$\frac{1}{m}\int_{t_0}^{\tau} F(\xi_1,\theta) d\tau \approx \frac{1}{m}\left(\int_{t_0+\varepsilon}^{\tau} F(\xi_1,\theta) d\theta + \varepsilon F(\xi_1,t_0) \right) =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\int_{x(\xi_2,t_0)}^{x(\xi_1,\tau)} \frac{F(\eta)}{v(\xi_1,\eta)}\, d\eta + \frac{\Delta x_0}{v(\xi_1,t_0)} F\big(x(\xi_1,t_0)\big) \right)$$

and

$$\frac{1}{m}\int_{t_0}^{\tau} F(\xi_2,\theta) d\tau \approx \frac{1}{m}\left(\int_{t_0}^{\tau-\varepsilon} F(\xi_2,\theta) d\theta + \varepsilon F(\xi_2,\tau) \right) =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\int_{x(\xi_2,t_0)}^{x(\xi_1,\tau)} \frac{F(\eta)}{v(\xi_2,\eta)} d\eta + \frac{\Delta x_0}{v(\xi_1,t_0)} F\big(x(\xi_2,\tau)\big) \right).$$

Thus, for Δx we obtain

$$\Delta x = \left(1 + \frac{1}{mv(\xi_1,t_0)}\Big(F(x)_{x=x(\xi_2,t)}\varepsilon - F(x)_{x=\xi_1}(t-t_0) \Big)\right)\Delta x_0 +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(v(\xi_2,t_0) - v(\xi_1,t_0) + \frac{1}{m}\int_{x(\xi_2,t_0)}^{x(\xi_1,\tau)} \Big(\frac{F(\eta)}{v(\xi_2,\eta)} - \frac{F(\eta)}{v(\xi_1,\eta)} \Big) d\eta \right) d\tau,$$

To satisfy condition (4) it is necessary that

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \big((v_2(t_0) - v_1(t_0) \big) = 0$$

[4]These are concentrated forces which act on a matter point as a whole quantum object. This does not result in infinite acceleration, since, as supposed above, the inertia of each material point is characterized by the mass of the entire object.

(velocity field continuity), and

$$v(\xi_1, \eta) \equiv v(\xi_2, \eta)$$

(velocity field stationarity). For the last identity to be satisfied with the conditions under consideration, it is necessary and sufficient to have

$$v(\xi_2, \tau) = v(\xi_1, \tau + \varepsilon) = v(\xi_1, \tau) + \frac{F}{m}\frac{\Delta x(\tau)}{v(\xi_1, \tau)}.$$

As $\Delta x \to 0$, the last expression takes the form

$$\left(mv\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x}\right)dx = \frac{\partial E}{\partial x}dx = 0,$$

where E is the total mechanical energy of the material point. This means that the material points of the matter field involved in the formation of the physical continuum have the same energy.

Consider the one-dimensional motion of the matter field described above. The infinitesimal individual body having the volume $d\xi$ at time $t = 0$ and identified by the material coordinate $\xi = x(0)$ generates the density measure field at time t in the form

$$\rho^E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(x - x(\xi^E, t)\big)\, dm, \tag{5}$$

where $dm = \rho^E(\xi)d\xi$ is the measure of the matter particles set occupying the volume $d\xi$ at point in time t_0; $\delta(x - x^E(\xi, t)\big)$ is the Dirac's δ-function; $x^E(\xi, t)$ is the the least action path of a material particle having the energy E. This expression can be considered as a continuous equation, since together with the condition (4) it guarantees the conservation of the measure in the form

$$\rho^E(\xi, t)\, dx(\xi, t) = \rho^E(\xi, t_0)\, d\xi = \rho^E(\xi, t_0)\, dx(\xi, t_0),$$

where $dx(\xi, t)$ denote the volume occupying a particular set of the material particles at point of time t. In accordance with (2) the complex density $\mu^E(\xi, t)$ expressed in terms of the density measure as follows

$$\mu^E(\xi, t) = \rho^E(\xi, t) \exp \frac{i}{\hbar} S[x^E(\xi, t, t^p)].$$

The actions in the last expression depend on arbitrary point in time in the past t^p, which cancel in the continuity equation in the form (5). Then for the continuity equation in term of the complex density $\mu(x, t)$, we get

$$\mu^E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^E(x_0, t_0) \exp \frac{i}{\hbar}\Big(S^E(x, t, t^p) - S^E(x, t_0, t^p)\Big)\delta\big(x - x^E(x_0, t)\big)\, dx_0 =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu^E(x_0, t_0) \exp \frac{i}{\hbar} S^E(x, t, t_0)\delta\big(x - x^E(x_0, t)\big)\, dx_0,$$

where $x_0 = x^E(\xi, t_0) = \xi$ and for the complex density of an arbitrary physical continuum, as a set of the matter fields, we obtain

$$\mu(x,t) = \sum_\alpha \int_0^\infty g_\alpha(E) \left(\int_{-\infty}^\infty \mu^E(x_0,t_0) \exp \frac{i}{\hbar} S^E(x,t,t_0) \delta\big(x - x^E(x_0,t)\big)\, dx_0 \right) dE \tag{6}$$

If ambient conditions do not change with time, then the velocity fields corresponding to the matter fields forming a homogeneous (non-compound in terms of [7]) object are stationary. Therefore the field of Lagrangian is stationary too, and the field of the action $S^E(x,t)$ has the form

$$S^E(x,t) = L^E(x)t + S^E(x,t_0).$$

Then for the continuity equation for the field of the complex density $\mu_t^E(x)$, we obtain

$$\mu^E(x,t) = \int_{-\infty}^\infty \exp\Big(\frac{i}{\hbar} L^E(x)(t-t_0)\Big) \delta\big(x - x^E(x_0,t)\big) \mu^E(x_0,t_0)\, dx_0$$

and

$$\mu(x,t) = \int_0^\infty g_\alpha(E) \left(\int_{-\infty}^\infty \exp\Big(\frac{i}{\hbar} L^E(x)(t-t_0)\Big) \delta\big(x - x^E(x_0,t)\big) \mu^E(x_0,t_0)\, dx_0 \right) dE, \tag{7}$$

The equation (7) describes the evolution of the complex density $\mu(x,t)$ of a homogeneous object under stationary ambient conditions.

3. The wave function

The complex density μ was introduced regardless of the measurement process, and the classical quantities characterizing material points (and, therefore, determining the function μ) are not observables. The wave function is determined by observables generated during the special measurement process. On other hands, both the complex density and the wave function, in accordance with the assumption made, describe the same spatial distribution of the physical continuum. This means that the complex density is a more general quantity and it should display itself as a wave function in the measurement process.

According to the paper [6] the measurement process consists of two stages. On the first of them, the quantum object interacts with the active elements of the apparatus. As the result of this interaction, the energy of the active element increases up to a threshold value. Then a macroscopic registering process is initiated, and spatial distribution of the continuous medium instantly changes, what is formally expressed in the collapse of the wave function. Since the wave function of the of the system reveal itself at the first stage, we consider this stage only.

Let the system consisting of the object and one of the active element be closed (such a consideration is possible if the interaction energies of the active elements each others anothers are negligible compared with their interaction energies with the object). Then the interaction of the object with the active element must obey the equation (6). This equation will be used to determine the dependence of the energy transfer rate from the object to the active particle on the complex density.

Let x be the position of the object. In general the active element consist of a set of elementary particles. Since, the size of an element is assume to be small compared to the spatial size $\Delta x \sim \rho\, \partial x/\partial\rho$, the active element can be considered as a quantum particle, whose position we denote by X[5]. In the considered case, the active element is a composite continuous medium described by the function $\mu(X)$, which differs from zero inside a much smaller spatial volume than the function $\mu(x)$.

Let the active element be a harmonic oscillator. By $U(X)$ denote corresponding potential energy. By $U^{int}(x, X) \approx U^{int}(x, \overline{X})$ (here $\overline{X}$ a mean value of the active element position) denote the interaction energy of the object with the active element. We cannot use the equation (7) because of time dependence of the interaction energy $U^{int}(x - \overline{X})$, which depends on the position of the moving material points of the object. We have a non-homogeneous system. The equation (6) is usable in this case. It takes the form

$$\mu(x, X, t) = \int G(E^a)\bigg(\int \exp\frac{i}{\hbar}S^{E^a}(X, t, t_0) I[\overline{X}, \mu(x, \tau), t]\mu_{t_0}^{E^a}(X, t_0)\times \\ \times\, \delta\big(X - X^{E^a}(X_0, \tau)\big)\, dX_0\bigg)\, dE^a, \quad (8)$$

where E^a is the energy of the active element matter field; $G(E^a)$ is the complex weight of the fields forming the continuous medium of the active element; $X^{E^a}(X_0, \tau)$ is the least action path of the active element material point having the energy E^a; $S^{E^o}(X, t) = S^{E^o}[X^{E^a}(X_0, \tau), X, t]$ is the action on the paths of the active element, excluding the action part corresponding to interaction with the object. The functional

$$I[\overline{X}, \mu(x, \tau), t] = \int_0^\infty g(E^o)\bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\bigg(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\big(L^{E^o}(x) - U^{int}(x - \overline{X})\big)\, d\tau\bigg)\times \\ \times\, \delta\big(x - x^{E^o}(x_0, \tau)\big)\mu^{E^o}(x_0, t_0)\, dx_0\bigg)\, dE^o \quad (9)$$

describes the effect of the object on the active element; E^o is the total mechanical energy of the object material point; $L^{E^o}(x)$ is the spatial field of the object's Lagrangian; $g(E^o)$ is the complex weights of the matter fields of the object.

By $\varepsilon = (t - t_0)/N$ denote an infinitesimal time interval (N is an infinitely large integer); by $t_k = t_0 + k\varepsilon$ denote the digital time variable. By R denote interaction radius of the object with the active element and suppose that the interaction energy U^{int} differs from zero only for the range of positions of the object from $\overline{X} - R$ to $\overline{X} + R$. If the time integral on the right hand side of (9) is represented as an integral sum, then for the matter field having energy E^o we obtain

$$I[X, \mu^{E^o}(x, \tau), t] = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \mu^{E^o}(x_0, t_0)\times$$

[5]The condition limiting the size of the interaction field with the active element, expressed through a change in the density ρ is a considerably less strict than the similar condition expressed through a change in the complex density of μ. The last condition, practically, cannot be realised.

$$\times \prod_{j=0}^{N} \exp\Big(\frac{i}{\hbar} L_j(x_j)\varepsilon\Big) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} U_j^{int}(x_j)\varepsilon\Big)\delta(x_{j+1} - x_j)\, dx_j,$$

Expand the exponents containing the interaction energy in a Taylor series. Holding the first-order term, we get

$$I[X, \mu^{E^o}(x,\tau), t] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0^{E^o}(x_0) \times \\ \times \prod_{j=0}^{N} \mathsf{T}_j(x_j)\Big(1 - \frac{i}{\hbar} U_j^{int}(x_j)\varepsilon\Big)\delta(x_{j+1} - x_j)\, dx_j,$$

where $\mu_0^{E^o}(x_0) \equiv \mu^{E^o}(x_0, t_0)$; $\mathsf{T}_j(x_j) = \exp \dfrac{i}{\hbar} L_j(x_j)\varepsilon$.

Taking into account that

$$\mu_j(x_j) \approx \prod_{k=0}^{j} \mathsf{T}_k(x_k)\mu_0^{E^o}(x_0),$$

the last equation takes the form

$$I[X, \mu_j^{E^o}(x), N] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=0}^{N} \mu_j^{E^o}(x_j)\Big(1 - \frac{i}{\hbar} U_j^{int}(x_j)\varepsilon\Big)\delta(x_{j+1} - x_j)\, dx_j \approx \\ \approx \mu_N^{E_o}(x_N) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{N} \int_{\overline{X}-R}^{\overline{X}+R} \mu_j^{E_o} U^{int}(\overline{X} - x_j)\, dx_j\Big).$$

Integrating over all energies E^o for $\varepsilon \to 0$, we obtain

$$I[X, \mu(x,\tau), t] = \mu^o(x,t) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} \Big(\int_{\overline{X}-R}^{\overline{X}-R} \mu^o(x,\tau) U^{int}(\overline{X} - x)\, dx\Big)\, d\tau\Big).$$

Thus, according to (8), the complex density of the continuum of the active particle varies with time as

$$\mu^a(X,t) = \int_0^{\infty} G(E^a)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{i}{\hbar}\Big[\int_{t_0}^{t}\Big(T(\dot{X}) - U(X) - \\ - \int_{\overline{X}-R}^{\overline{X}-R} \mu^o(x,\tau) U^{int}(x - \overline{X})\, dx\Big)\, dt\Big] \times \\ \times \mu^{E^a}(X_0, t_0)\delta\big(X - X_0\big)\, dX_0\Big)\, dE^a.$$

From the classical point of view, the last term of the action in this equation is generated by the the work of the force with which the object acts on the active particle, having the position $\overline{X}$. For this force we have

$$F(\overline{X},\tau)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_{-R}^{R}\mu^o(\overline{X}+\zeta,\tau)U^{int}(\zeta)d\zeta=$$
$$=\Big(\mu^o(\overline{X}+R,\tau)-\mu^o(\overline{X}-R),\tau)\Big)U(R)\approx$$
$$\approx\rho^o(\overline{X})\Big(\exp\frac{i}{\hbar}S^o(\overline{X}+R)-\exp\frac{i}{\hbar}S^o(\overline{X}-R)\Big)U(R)\approx$$
$$\approx\rho^o(\overline{X})\exp\frac{i}{\hbar}\Big(p^o(\overline{X})\overline{X}-E^o\tau\Big)\Big(\exp\frac{i}{\hbar}p^o(\overline{X})R-\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}p^o(\overline{X})R\Big)\Big)U(R)=$$
$$=2iU(R)\sin\Big(\frac{2\pi R}{\lambda(\overline{X})}\Big)\mu(\overline{X},\tau),\quad(10)$$

where $\zeta=x-\overline{X}$; ρ^o, S^o, p^o, E^o are respectively the density, action, momentum and energy of the object (it is supposed, that the momentum p does not depend on the position in the interaction region); $\lambda(\overline{X})=h/p(\overline{X})$.

Let the active particle is a harmonic oscillator having the cyclic eigenfrequency ω_0. Material points of the oscillator move in accordance with the dynamic equation in the form
$$\ddot{X}+\omega_0^2X=\frac{1}{m}F(\overline{X},\tau).$$
In accordance with (10) the forces $F(\overline{X},\tau)$ are the same for all matter points of the active particle continuum and does not depend on the coordinate X. Then the energy received by a harmonic oscillator under the action of an external variable force is determined by the expression [8]

$$E(\omega_0)=\frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\exp i\omega_0\tau\,d\tau\right|^2.$$

Taking into account (10), we get

$$E(\omega_0)=\frac{1}{2m}\left|2iU(R)\sin\Big(\frac{2\pi R}{\lambda(\overline{X})}\Big)\right|^2\left|\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\overline{X},\tau)\exp i\omega_0\tau\,d\tau\right|^2.$$

Since the duration of the measurement process is less than the time T, when the complex density field is nonzero at the observation point, the energy E should be limited not by the time of the force (as in [8]), but by the interaction time $\Delta t=t-t_0$. Then the the last expression must be rewritten in the form

$$E(t,t_0,\omega_0)=\beta\left|\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)h(\tau-t_0)\mu(\overline{X},\tau)\exp i\omega_0\tau\,d\tau\right|^2,$$

where $h(t-\tau)$, $h(\tau-t_0)$ are Heaviside functions; t_0, t are the moments of the beginning and end of the interaction; β is a constant characterizing the sensitivity of the active particle. The time interval Δt must be large enough so that

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)h(\tau-t_0)\mu(\overline{X},\tau)\exp i\omega_0\tau\,d\tau\approx\lim_{T\to\infty}\frac{\Delta t}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\mu(\overline{X},\tau)\exp i\omega_0\tau\,d\tau,$$

where T is the time when the field of the function $\left|\mu(\overline{X},\tau)\right|$ does not depends on time. Then, for the rate of increase of an active particle energy, we have

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\beta}{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\overline{X},\tau)\exp\left(-i\omega_0\tau\right) d\tau\right|^2 .$$

The completion stage of the measurement process is the macroscopic registering process [6], which is initiated when the energy one of the active particles increases up to a threshold value.The values of the initiation threshold for the different active particles have a statistical straggling (as well as the sensitivity β). Macroscopic changes are initiated by only one active particle, for which the threshold is exceeded before the others. By E_n^{th} denote the threshold energy value for the the active element n. This is a random quantity. Then, the random time t_n of the "triggering" of the active particle n is determined by the condition

$$\frac{\beta_n}{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\overline{X_n},\tau)\exp\left(-i\omega_0\tau\right) d\tau\right|^2 t_n = E_n^{th}.$$

Thus, the registration process is initiated in that active particle for which the value of

$$\frac{1}{T}\frac{\beta_n}{E_n^{th}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\overline{X_n},\tau)\exp\left(-i\omega_0\tau\right) d\tau\right|^2$$

is maximum. The coefficient before the module in the last expression has a random value from 0 to ∞ with the probability density function $f(\frac{\beta_n}{E_n^{th}})$, which does not depend on the positions of active particles. This coefficient converts the measure into the registration probability P_n by the particle n having the eigenfrequency ω_0. This probability has the form

$$C\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\overline{X_n},\tau)\exp\left(-i\omega_0\tau\right) d\tau\right|^2 ,$$

where C is a normalization constant. Then, integrating over all ω_0, for the interaction radius $R \to 0$ and $N \to \infty$, the registration probability density $\rho^p(X)$[6] takes the form

$$\rho^p(X) \sim \left|\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu(X,\tau)\exp i\omega_0\tau\, d\tau\right) d\omega_0\right|^2 .$$

If to follow to the Born interpretation of the wave function, then we should suppose that

$$\rho^p(X) = \left|\Psi_\tau(X)\right|^2 \sim \left|\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mu(X,\tau)\exp i\omega_0\tau\, d\tau\right) d\omega_0\right|^2 . \qquad (11)$$

[6]However, there is a remark: the limit $R \to 0$ is incorrect physically for $R \ll \lambda\overline{X}$, because, in this case, the force (9) becomes zero; thus, we suppose that the Born interpretation has the corresponding spatial limit.

This equality will be satisfied if the wave function is the superposition of the harmonic components of the force (10). Supposing this and taking into account that

$$\Psi_\tau(X) = \int_0^\infty \psi^\epsilon(X)\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\epsilon\tau\Big)\,d\epsilon,$$

where ϵ is a observable energy($\hbar\omega_0 = \epsilon$), we obtain

$$\psi^\epsilon(X) = \int_{-\infty}^\infty \mu(x,\tau)\exp\frac{i}{\hbar}\epsilon\tau\,d\tau. \tag{12}$$

Using the expression for the complex density (3), we have

$$\psi^\epsilon(X) = \int_0^\infty\Big(\int_0^\infty\sum_\alpha g_\alpha(E)\mu_\alpha^E(x,\tau)\,dE\Big)\exp\frac{i}{\hbar}\epsilon\tau\,d\tau.$$

For infinite one-dimensional motion, the parameter α has a unique value. In this case, the spectral density of the complex measure $\mu^E(x,\tau)$ is a travelling wave, that is, $E=\epsilon$, and it is not quantized. In a finite one-dimensional motion, two waves travelling in opposite directions form a stationary wave only for the discrete energy values E_n. In this case, the superposition of travelling waves μ^E with energies close to E_n also contributes to the stationary wave function $\psi^\epsilon(X)$, so that $\psi^{E_n}\neq\mu^{E_n}$.

The proposed representation of the wave function (11) is based on the equality (12) and is not unique. To confirm this representation, we derive the quantum evolution law from the equation (6).

4. The wave equation

The continuity equation for the complex density according to eqrefeq:math:ex8 has the form

$$\mu_t(x) = \int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^\infty K_{t,t_0}^E(x,x_0)\mu_{t_0}^E(x_0)\,dx_0\Big)\,dE,$$

where for the kernel of the integral operator $K_{t,t_0}^E(x,x_0)$, we have

$$K_{t,t_0}^E(x,x_0) = \exp\frac{i}{\hbar}S_{t,t_0}^E(x,x_0)\delta\big(x-x(\xi^E,t)\big).$$

The wave function is expressed in terms of the complex density $\mu_\tau(x)$ as follows

$$\Psi_t(X) = \int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^\infty \mu_t(x)\exp\frac{i}{\hbar}\epsilon t\,dt\Big)\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t\Big)\,d\epsilon =$$

$$=\int_0^\infty\bigg(\int_{-\infty}^\infty\Big(\int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^\infty K_{t,t_0}^E(x,x_0)\mu_{t_0}^E(x_0)\,dx_0\Big)\,dE\Big)\exp\frac{i}{\hbar}\epsilon t\,dt\bigg)\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t\Big)\,d\epsilon.$$

For fixed final time, initial and final positions, t_0 is different for material fields corresponding to different energies and motion directions. Then, changing the order of integration with respect to the position x_0 and the energy E in the last expression, we obtain the convolution function $\big(K * \mu\big)(t)$. Using the convolution theorem, we finally obtain

$$\Psi_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{t,t_0}(x, x_0)\Psi_{t_0}(x_0)\, dx_0,$$

where

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \int_0^{\infty} \exp\frac{i}{\hbar} S^E_{t,t_0}(x)\delta\big(x - x(\xi^E, t)\big)\, dE.$$

In accordance with [5] this expression is equivalent to the path integral [9]

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \int \exp\Big(\frac{i}{\hbar} S[x_0(\tau)]\Big)\, [dx_0(\tau)].$$

Thus we obtained the integral wave equation with the kernel in the form of a path integral. For infinitesimal time intervals this equation takes the form of Schrödinger equation [10, 11]. Schrödinger steady-state equation is the direct consequence of the fact that the stationary wave function is factorized. This formal mathematical reason for quantization has a physical basis in the observability (in the sense of the possibility of macroscopic registration) of the physical continuum.

Conclusion

The approach to the description of the phenomena of the microcosm considered here is fundamentally different from the approach of conventional quantum mechanics. First of all is that the quantum mechanics assertion "*... all occurrences of an atomic and molecular order of magnitude, obey the "discontinuous" laws of quanta*" [7] is correct only for directly observable processes. Directly observable processes are those that can be detected at any stage by a macroscopic apparatus. As have been shone, this requirement implies a harmonic time dependence of the complex density at the detector location. In the case of finite motion, this, in turn, means that only such mechanical motion can be detected that generates a standing wave of complex density, which result in the quantization of energy. I.e. a superposition of only a stationary states is detectable. But it is not means that other mechanical states do not exist. Thus, there is no reason to consider quantum as a fundamental object and the principle of continuity "natura non facit saltus" is correct for microscopic phenomena.

If complex density waves is generated by the mechanical motion of physical continua definitely, then the set of the matter fields corresponding to the different energies of this motion has the cardinality of continuum. Like energy quantization, countability of the wave functions set is the result of the observability requirement.

Since the waves of complex density are generated by the movement of material fields, the latter can exist even if the superposition of these waves (the complex density μ of the continuous medium) is equal to zero and the concept of physical vacuum acquires a concrete mathematical image. In turn, the Fourier components of complex density μ^E becomes a mathematical image corresponding to the material waves in a physical vacuum. In accordance with [6] such a possibility is indirectly confirmed by the interaction of particles in entangled states.

Thus all main quantum mechanics phenomena can be described using the simple mechanical model based on the motion of a peculiar continuous medium.

Moreover, such a representation avoids the problems associated with causality principle, non-epistemic nature of quantum probability, contradiction with the special relativity and so on. This approach is based on the local reality principle.

However, the theory under consideration is not reduced to quantum mechanics representation. It can describe phenomena, that cannot be described by the methods of conventional quantum mechanics . These are, first of all, phenomena connected with the processes are “masked” by uncertainty principle. Really, subject to the description of micro-phenomena by the proposed method of mechanical motion of material fields, we proceed to a deterministic mechanical description and thereby avoid the quantum principle of uncertainty.

Another type of problem that can be solved by the theory under consideration is a description on the fundamental level of the dynamics of open quantum systems [6].

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

References

1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum mechanics description of physical reality be considered complete?, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 47, no. 10, pp. 777–780. doi: 10.1103/PhysRev.47.777.
2. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften*, 1926, vol. 14, no. 28, pp. 664–666. doi: 10.1007/BF01507634; eng. transl.: Schrödinger E. The continuous transition from micro- to macro mechanics, In: *Collected papers on wave mechanics*. New York, Chelsea Publishing Co., 1982, pp. 41–44.
3. Bell J. S. Against 'measurement', In: *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*. Oxford, Oxford Univ. Press, 2004, pp. 213–231. doi: 10.1017/CBO9780511815676.025.
4. Maudlin T. What Bell did, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2014, vol. 47, no. 42, 424010. doi: 10.1088/1751-8113/47/42/424010.
5. Samarin A. Yu. Quantum particle motion in physical space, *Adv. Studies Theor. Phys.*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 27–34, arXiv: 1407.3559 [quant-ph]. doi: 10.12988/astp.2014.311136.
6. Samarin A. Yu. Nonlinear dynamics of open quantum systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 214–224. doi: 10.14498/vsgtu1582.
7. von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 38. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1996, ix+262 pp. doi: 10.1007/978-3-642-61409-5.
8. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics*, vol. 1, Course of Theoretical Physics. Oxford, Pergamon Press, 1969, vii+165 pp., https://archive.org/details/Mechanics_541.
9. Feynman R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, 1948, vol. 20, no. 2, pp. 367–387. doi: 10.1103/RevModPhys.20.367.
10. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965.
11. Kac M. *Probability and related topics in physical sciences*, Lectures in Applied Mathematics. Proceedings of the Summer Seminar (Boulder, Colo., 1957), vol. 1. Lonodon, New York, Interscience Publ., 1959, xiii+266 pp.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 7–21
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1724

УДК 517.958:530.145

Механическое движение специфической сплошной среды как физическая основа квантовой эволюции

А. Ю. Самарин

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Квантовая частица рассматривается как сплошная среда, обладающая рядом специфических свойств. Эти свойства сформулированы так, чтобы основные постулаты традиционной квантовой механики были прямым следствием механического движения такой сплошной среды. Представлено детерминистическое описание процесса взаимодействия квантовой частицы с измерительным прибором при измерении координаты. Показана природа возникновения случайности в процессе измерения и выведено правило Борна для пространственной плотности вероятности. Волновая функция интерпретируется как специфическая объемная сила, с которой сплошная среда квантового объекта воздействует на измеритель, а квантовое волновое уравнение выводится из уравнения непрерывности для этой среды. Предложенный подход к представлению микроявлений позволяет исключить ограничения, связанные с принципом неопределённости, и описывать динамику процессов недоступных для рассмотрения методами квантовой механики.

Ключевые слова: детерминистическое описание квантовых явлений, сплошная среда, принцип локального реализма, материальное поле, уравнение непрерывности, реалистическое представление волновой функции, правило Борна, принцип неопределенности.

Получение: 21 июля 2019 г. / Исправление: 12 октября 2019 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 7 февраля 2020 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант рукописи.

Научная статья

Образец для цитирования
Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 7–21. doi: 10.14498/vsgtu1724.

Сведения об авторе
Алексей Юрьевич Самарин https://orcid.org/0000-0001-7640-3875
кандидат физико-математических наук, доцент; каф. общей физики и физики нефтегазового производства; e-mail: samarin.ay@yahoo.com

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 22–40
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1741

УДК 517.958:530.145

Скорость переноса энергии плоской монохроматической электромагнитной волной через слой вещества

М. В. Давидович

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
(национальный исследовательский университет),
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

Аннотация

Рассмотрены стационарные задачи для прохождения (туннелирования) плоской электромагнитной волны через слой вещества с диэлектрическими свойствами, а также и квантовой частицы через прямоугольный потенциальный барьер. Показано, что сверхсветовых движений не возникает, а время прохождения всегда больше времени при прохождении структуры со скоростью света.

Ключевые слова: скорость движения энергии, время туннелирования, частотная дисперсия, время Бома–Вигнера, парадокс Хартмана.

Получение: 22 августа 2019 г. / Исправление: 19 ноября 2019 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 1 апреля 2020 г.

Введение

Согласно СТО, скорость движения энергии всегда ограничена скоростью света c. Хорошо известно, что перенос энергии плоской монохроматической электромагнитной волной (ЭМВ) в вакууме $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{x}_0 E_x \exp\bigl(i\omega(t - z/c)\bigr)$, $\mathbf{H} = \varepsilon_0 c\, \mathbf{z}_0 \times \mathbf{E}(z,t)$ идет со скоростью света $v_{\mathrm{E}} = S_z/W = c$, поскольку усредненные за период плотность электромагнитной энергии W и z-компонента вектора Пойнтинга $S_z = \mathrm{Re}(E_x H_y^*)/2$ выражаются соответственно как $W = \varepsilon_0 |E_x|^2/2$ и $S_z = \varepsilon_0 c |E_x|^2/2$. Интересно отметить, что для такой волны в вакууме нет сдвига фаз между действительными полями $\mathrm{Re}(\mathbf{E})$ и $\mathrm{Re}(\mathbf{H})$, поэтому это единственный случай, когда скорость переноса c получается и для мгновенных значений без усреднения. Любая обладающая массой материальная частица имеет внутреннюю (собственную) энергию mc^2, поэтому движется всегда со скоростью $v < c$. Если имеется поток частиц с постоянной

Научная статья

Образец для цитирования
Давидович М. В. Скорость переноса энергии плоской монохроматической электромагнитной волной через слой вещества // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 22–40. doi: 10.14498/vsgtu1741.

Сведения об авторе
Михаил Владимирович Давидович https://orcid.org/0000-0001-8706-8523
доктор физико-математических наук, профессор; профессор; каф. радиотехники и электродинамики; e-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

плотностью, то эта скорость совпадает со скоростью переноса энергии частицами потока. Соответственно, прохождение частицей в потоке некоторой области d за «сверхсветовое время» $\tau < d/c$ означает сверхсветовой перенос энергии и противоречит СТО. Однако имеется большое количество публикаций в солидных журналах, где приводится утверждение о сверхсветовом туннелировании ЭМВ, а также и о сверхсветовом туннелировании частиц (см., например, [1–36] и ссылки на литературу там), в том числе о мгновенном туннелировании, и даже об отрицательном времени задержки (запаздывания) [37–42]. Отрицательная задержка (т. е. опережение следствием его причины) противоречит принципу причинности даже в предположении дальнодействия или бесконечной скорости распространения [43]. В подтверждение указанных утверждений приводятся эксперименты [20–23,30–36], поэтому теоретическое рассмотрение задач туннелирования весьма важно, как и объяснение (интерпретация) указанных экспериментов. Любой эксперимент всегда длится конечное время и связан с нестационарной постановкой, т. е. и с нестационарной задачей. Строгое экспериментальное измерение стационарной скорости $c = S_z/W$ невозможно, поскольку требует прерывания волны, а это уже нестационарный случай. Прерывание волны образует цуги, или волновые пакеты (ВП), и результат будет тем точнее, чем длиннее цуг. Поэтому точное подтверждение факта $v \leqslant c$ в монохроматической волне возможно только теоретически, благо для ЭМВ есть строгий и точный инструмент — уравнения Максвелла. Рассмотрение нестационарного квантового туннелирование как частиц с массой, так и фотонов усложняется тем, что имеет место нелокальность волновой функции и ВП [27]. Вопросы нестационарного туннелирования требуют отдельного рассмотрения и не исследуются в данной работе. Целью работы является определение скорости переноса энергии монохроматической ЭМВ через слой вещества и получение для нее условия $v_{\mathrm{E}} \leqslant c$.

В работе в строгой постановке на основе уравнений Максвелла с учетом материальной дисперсии рассмотрена и решена простая задача о дифракции падающей из вакуума плоской монохроматической ЭМВ на однородном слое вещества в области $0 \leqslant z \leqslant d$ с заданной диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon(\omega)$, на основе чего получена скорость переноса энергии такой волной через слой, которая меньше скорости света. Этот результат получен и для туннелирования через слой холодной столкновительной плазмы. При постановке задачи анизотропными, бианизотропными и магнитными свойствами слоя мы пренебрегаем, пространственную дисперсию не рассматриваем.

Постановка и решение задачи

При падении из вакуума ЭМВ с координатной зависимостью $\exp(-ik_x x - ik_{0z}z)$ под углом $\theta = \arctan(k_x/k_{0z})$ на слой имеют место соотношения $k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, $E_{0z} = |E|\sin(\theta)$, $E_x = \pm|E|\cos(\theta)$, где $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ — амплитуда ЭМВ. Знак «минус» соответствует отраженной волне. В слое величина $k_z = \sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2}$ может быть комплексной, поэтому для прошедшей волны $\theta' = \arctan(k_x/k_z)$, $E_x/E_z = k_z/k_x$, $|E| = |E_x|\sqrt{1 + |k_z|^2/k_x^2}$. Вводим, как обычно, нормированные волновые сопротивления $\rho_0^e = k_{0z}/k_0$, $\rho^e = k_z/(k_0\varepsilon)$ для E-мод, и $\rho_0^h = k_0/k_{0z}$, $\rho^h = k_0/k_z$ для H-мод соответственно в вакууме и в пластине. Первый случай соответствует p-поляризации $\rho^e = E_x/(Z_0 H_y)$, а второй — s-поляризации $\rho^h = -E_y/(Z_0 H_x)$. Здесь $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 1/(\varepsilon_0 c)$.

Далее будем использовать нормировку $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$. При нормальном падении $k_x = 0$, $\rho^e = \rho^h$ и $\tilde{\rho}^{(e,h)} = \rho^{(e,h)}$. При падении из вакуума всегда $k_x \leqslant k_0 = \omega/c$.

Для задач туннелирования ЭМВ при нарушенном полном внутреннем отражении [28, 29] интересен случай падении волны из диэлектрика на вакуумный зазор. Тогда $k_0 \leqslant k_x \leqslant k_0\varepsilon$, величина $k_z = \sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2}$ — действительная, а $k_{0z} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2} = -i\sqrt{k_x^2 - k_0^2}$ — мнимая. Решение стационарной (монохроматической) задачи для однородного слоя весьма простое — коэффициент прохождения дается формулой

$$T(\omega) = |T| \exp(j\phi) = \left[\cos(kd) + i\sin(kd)(\tilde{\rho} + \tilde{\rho}^{-1})/2\right]^{-1},$$

а коэффициент отражения имеет вид

$$R(\omega) = (Z-1)/(Z+1), \quad Z = \tilde{\rho}\alpha^+/\alpha^-, \quad \alpha^\pm = (1+\tilde{\rho}) \pm \exp(-2ikd)(1-\tilde{\rho}).$$

При этом внутри слоя $E(z) = A^+\exp(-ikz) + A^-\exp(ikz)$, где амплитуды имеют вид $A^\pm = |T|(1 \pm \tilde{\rho})\exp(\pm ikd)/2$.

Мы рассмотрим простой закон дисперсии Лоренца для однородного слоя

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_c}.$$

Для него обратное преобразование Фурье определяет ядро $\varepsilon(t)$ интегрального оператора, связывающего электрическое поле и индукцию во времени [44]:

$$\varepsilon(t) = \delta(t) + \chi(t)\frac{\omega_p^2\exp(-\omega_c t/2)}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2/4}}\sin\Big(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega_c^2/4}\Big). \tag{1}$$

Для реальных сред дисперсия ДП содержит несколько таких членов с учетом локального поля и нескольких частот ω_0, ω_p, ω_c. Величины ω_p^2 определяются через силы осцилляторов соответствующих квантовых переходов с частотами ω_0, а величины ω_c и $\tau_c = 1/\omega_c$ соответствуют ширинам соответствующих спектральных линий и временам жизни возбужденных состояний. Полагая $\omega_p = 0$ (несвязанные заряды диполя), получаем $\varepsilon(t) = \delta(t) + \omega_p^2\omega_c^{-1}\big[1 - \exp(-\omega_c t)\big]$, что совпадает с обратным преобразованием Фурье от дисперсии ДП $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L - \omega_p^2/(\omega^2 - j\omega\omega_c)$ Друде для плазмы. Для газовой плазмы $\varepsilon_L = 1$. Для плазмы в металле вклад в $\varepsilon_L \sim 10$ дают другие члены дисперсии Лоренца, взятые на низких частотах. В общем случае терм ε_L определяет вклад переходов уровней в валентной зоне и межзонных переходов. При $\omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L}$ и малой частоте столкновений $\omega_c \ll \omega$ ДП плазмы становится почти отрицательной, и возможно стационарное туннелирование ЭМВ. Для дисперсии Лоренца условие $\varepsilon'(\omega) = \mathrm{Re}\big(\varepsilon(\omega)\big) < 0$, при котором в соответствующем диапазоне имеет место стационарное туннелирование, также возможно. Нормируя все частоты на плазменную частоту и обозначая их большой буквой омега, видим, что оно при предельно малой частоте столкновений выполнено, если $\Omega_0 < \Omega < \sqrt{1+\Omega_0^2}$, а при конечном времени жизни это область нормированных частот $|\Omega^2 - \Omega_0^2 - (1-\Omega_c^2)/2| \leqslant \sqrt{(1-\Omega_c^2)^2/4 - \Omega_0^2\Omega_c^2}$.

В случае большой диссипации $\Omega_c > |1-\Omega_c^2|/(2\Omega_0)$ (малой силы осциллятора) область отрицательных значений ДП для дисперсии Лоренца отсутствует.

Рассматриваем туннелирование для слоя из газовой плазмы или плазмы металлов и полупроводников. Для последних в определении плазменной частоты следует использовать эффективные массы электронов и дырок. Туннелированию соответствует условие $\varepsilon'(\omega) < 0$ в ДП $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$, $\varepsilon''(\omega) > 0$, при этом в простейшем случае нормального падения $\rho = 1/\sqrt{\varepsilon}$, $k_z = k_0\sqrt{\varepsilon(\omega)} = k_z' - ik_z''$, где

$$k_z' = \frac{\sqrt{2}}{k_0}\sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon'}, \quad k_z'' = \frac{\sqrt{2}}{k_0}\sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}-\varepsilon'}. \tag{2}$$

При туннелировании всегда $k_z'' > k_z'$, а в приближении отсутствия диссипации $k_z' = 0$, т. е. прямая волна экспоненциально затухающая (эванесцентная), а обратная — экспоненциально нарастающая (антиэванесцентная). Ее амплитуда с ростом толщины d экспоненциально падает, но наличие этой волны и ее интерференция с прямой и приводят к туннелированию, т. е. к просачиванию энергии через слой.

Для случая падения под углом $k_z = k_0\sqrt{\varepsilon - (k_x/k_0)^2}$ формулы (2) следует модифицировать путем замены $\varepsilon' \to \varepsilon' - (k_x/k_0)^2$. При туннелировании удобно сделать замену $k_z = -ik_0\sqrt{(k_x/k_0)^2 - \varepsilon}$. Тогда при условии $\varepsilon' < 0$ и при пренебрежении диссипацией имеем $\rho = i/\sqrt{|\varepsilon|}$, $k_z = -ik_0\sqrt{(k_x/k_0)^2 + |\varepsilon|}$. В общем случае $k_z = k_z' - ik_z''$, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}' + i\tilde{\rho}''$, $k_z'' > 0$, $\tilde{\rho}' > 0$, а амплитуды волн обоих направлений в пластине выражаются в виде $A^{\pm} = \exp(\pm ikd)T(1\mp\tilde{\rho})/2$.

Для плоской волны в среде также вводим скорость движения энергии по формуле $v_{\mathrm{E}} = S_z/W$. Здесь также $S_z = \mathrm{Re}(E_x H_y^*)/2$, если энергия переносится вдоль оси z и выбрана поляризация $\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_x$. Заметим, что при движении под углом $v_{\mathbf{E}z} = v_{\mathbf{E}}\cos(\theta)$. Если в диссипативной среде нет накопленной кинетической энергии колебаний (например, в дистиллированной воде, описываемой формулой Дебая), то $W = \varepsilon_0\big(\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}\big)|E_x|^2/4$ [45], поэтому $v_{\mathrm{E}} = c\Big/\sqrt{(\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon')/2} < c$. Без диссипации $v_{\mathrm{E}} = c/\sqrt{\varepsilon'}$. Диссипация уменьшает $|T|$ и увеличивает замедление. Для столкновительной плазмы имеем [45–47]

$$W = \frac{1}{4}\varepsilon_0|E_x|^2\Big[2 - \varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}\Big], \tag{3}$$

$$S_z = \frac{1}{\sqrt{8}}c\varepsilon_0|E_x|^2\sqrt{\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon'}, \tag{4}$$

$$v_{\mathrm{E}} = \frac{c\big[(\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}+\varepsilon')/2\big]^{1/2}}{1 + (\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}-\varepsilon')/2}. \tag{5}$$

Для нее $\varepsilon' = 1 - \omega_p^2/(\omega^2+\omega_c^2)$, $\varepsilon'' = \omega_p^2\omega_c/(\omega^3+\omega\omega_c^2)$. Поэтому для плазмы без диссипации $W = \varepsilon_0|E_x|^2(1+\omega_p^2/\omega^2)/2$. В (3), (4) следует иметь в виду, что из-за диссипации амплитуда зависит от координаты как $|E_x(z)| = |E_x(0)|\exp(-k''z)$. Увеличение электрической энергии такой плазмы по сравнению с энергией в вакууме связано с кинетической энергией колебаний ее частиц с частотой ω [46]. На плазменной частоте электрическая часть энергии в два раза больше, чем в вакууме, а магнитная часть равна нулю. При пренебрежении диссипацией ниже плазменной частоты $v_{\mathrm{E}} = 0$, а выше нее $v_{\mathrm{E}} = c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}$, что совпадает с групповой скоростью (ГС). Ниже плазменной частоты ГС мнимая, а $v_{\mathrm{E}} = 0$, т. е. распространение невозможно. При малой диссипации разлагаем (3) и (4) по малому параметру ε''^2, считая $|\varepsilon'| \geqslant 1$. Тогда получаем

$$S_z = c\varepsilon_0|E_x|^2\varepsilon''/(4|\varepsilon'|), \quad W = \varepsilon_0|E_x|^2[1+|\varepsilon'|+\varepsilon''^2/(4|\varepsilon'|)]/2,$$

и в такой слабодиссипативной плазме $v_{\mathrm{E}} = c\varepsilon''/(2|\varepsilon'|+2|\varepsilon'|^2+\varepsilon''^2/2)$. Заметим, что слабая диссипация возможна только в области $\omega \gg \omega_c$. Вблизи плазменной частоты $\varepsilon' \approx 0$, применять разложение нельзя, и непосредственно из (3) и (4) имеем $v_{\boldsymbol{E}} = c\sqrt{\varepsilon''/2}/(1+\varepsilon''/2) \ll c$. Средой без накопления энергии колебаний можно считать и плазму на низких частотах $\omega \ll \omega_c$ [48]. Тогда $\varepsilon(\omega) = -i\omega_p^2/(\omega\omega_c) = -i\sigma\varepsilon_0/\omega$, и из (5) следует $v_{\mathrm{E}} \approx 2c\sqrt{\omega\omega_c}/\omega_p \ll c$. Дисперсия в такой среде обусловлена проводимостью σ. Можно получить аналогичное (5) выражение для v_{E} в случае дисперсии Лоренца, для которой также всегда $v_{\mathrm{E}} < c$. Соответствующее громоздкое выражение мы не приводим.

В области аномальной отрицательной дисперсии при малой диссипации для такой среды также возможен случай $\varepsilon' < 0$ и туннелирование. Отметим, что из дисперсии Лоренца при равной нулю резонансной частоте $\omega_0 = 0$ (свободные осцилляторы) следует дисперсия плазмы, а предельный переход $\omega_0 \to \infty$, $\omega_c \to \infty$, $\omega_p \to \infty$ (бесконечно жесткие диполи) при условии $\omega_p^2/\omega_0^2 = \kappa$, $\omega_c^2/\omega_0^4 = \tau^2$ дает формулу Дебая $\varepsilon' = 1+\kappa/(1+\omega^2\tau^2)$, $\varepsilon'' = (\varepsilon'-1)\omega\tau$ [45]. Отметим также, что при движении под углом скорость переноса энергии вдоль z всегда меньше, чем в направлении движения. Примером служат волны в волноводах, которые состоят из двигающихся под углом и отражающихся от стенок плоских волн.

Покажем, что туннелирование сквозь слой бесстолкновительной плазмы идет со скоростью меньше скорости света как ниже плазменной частоты, так и выше нее, при этом плотность потока мощности пропорциональна $|T|^2$ и непрерывна. При диссипации эта скорость уменьшается и более существенно зависит от координаты. ГС соответствует скорости распространения энергии только в монохроматической волне и только в абсолютно недиссипативных (консервативных или гамильтоновых) однородных системах и средах [5]. Только в этих случаях ГС есть величина действительная и преобразующаяся как полярный вектор, т. е. как скорость материальной точки. В полосах непрозрачности, в том числе и внутри барьеров, ГС есть величина кинематическая, определяющая скорость движения биений двух бесконечно близких по частоте волн и может быть любой — превышающей c, бесконечной и даже отрицательной (направленной против движения энергии) [50]. Это же относится и к групповому времени запаздывания, которое может стать нулевым и отрицательным [43]. Движение же ВП и скорость переноса пакетом энергии, особенно при достаточно широком спектре, не следует отождествлять с ГС. Очевидно, энергетическая скорость $v_{\mathrm{E}}(z) = S_z(z)/W(z)$ в неоднородной среде и при наличии границ раздела не является постоянной величиной. Наиболее простой вид она имеет для прозрачного диэлектрического слоя без дисперсии с ДП $\varepsilon = \mathrm{const} > 1$:

$$v_{\mathrm{E}}(z) = 2c/[\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\cos(2k_0\sqrt{\varepsilon}(z - d))] \leqslant c.$$

На границах слоя имеем

$$v_{\mathrm{E}}(d) = c/\varepsilon < c/\sqrt{\varepsilon}, \quad v_{\mathrm{E}}(0) = 2c/[\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\cos(2k_0\sqrt{\varepsilon}d)].$$

При длине $d = m\lambda/(2\sqrt{\varepsilon})$, т. е. кратной целому числу полуволн в среде, получаем $v_{\mathrm{E}}(0) = c/\varepsilon$. В этом случае при $m = 1$ имеем так называемую полуволновую «банку», известную из электроники СВЧ как полностью прозрачное устройство — для нее $T = 1$.

При длине $d = (2m - 1)\lambda/(4\sqrt{\varepsilon})$, т. е. кратной нечетному числу четвертьволновых длин в среде, имеем $v_{\mathrm{E}}(0) = c$. В точках, где косинус равен единице, имеем $v_{\mathrm{E}}(z) = c/\varepsilon$, в точках, где он равен минус единице, будет $v_{\mathrm{E}}(z) = c$, а в точках, где он равен нулю, получаем $v_{\mathrm{E}}(z) = 2c/(\varepsilon+1) < c/\sqrt{\varepsilon}$. При $\varepsilon = 1$ везде $v_{\mathrm{E}}(z) = c$.

В среде энергию переносят квазифотоны или поляритоны. Найдем усредненную скорость квазифотона через слой:

$$\bar{v}_{\mathrm{E}} = d^{-1}\int_0^d v_{\mathrm{E}}(z)dz = \frac{c}{k_0\sqrt{\varepsilon}d}\int_0^{2k_0d\sqrt{\varepsilon}} \frac{dx}{\varepsilon + 1 + (\varepsilon - 1)\cos(x)}. \tag{6}$$

При оптической толщине слоя $\theta = k_0d\sqrt{\varepsilon} \leqslant \pi/2$ интеграл (6) вычисляется (см. [51], формула 1.5.9.15) и имеет вид $\bar{v}_{\mathrm{E}} = c(k_0d\varepsilon)^{-1}\arctan(\varepsilon^{-1/2}\tan(k_0d\sqrt{\varepsilon}))$. При малой оптической толщине $\theta \ll 1$ получаем $\bar{v}_{\mathrm{E}} = c/\varepsilon$, а при большой оптической толщине пишем $\theta = m\pi/2 + \Delta\theta$, $d = (m\pi/2 + \Delta\theta)/(k_0\sqrt{\varepsilon})$, интеграл (6) разбиваем на m участков длины 2θ плюс интеграл по $2\Delta\theta$, и в пределе $m \to \infty$ получаем для толстого слоя также $\bar{v}_{\mathrm{E}} = c/\varepsilon$. Если рассмотреть «монохроматическую» волну $E(z,t) = \theta(\omega(t - z/c))\sin(\omega(t - z/c))$ с резким фронтом (θ — функция Хэвисайда), то скорость прохождения ее фронта в слое $v = c/\sqrt{\varepsilon}$. Бесконечно тонкая граница раздела не вносит задержку. Время прохождения фронта $\tau = d/v = d\sqrt{\varepsilon}/c$ и следует отождествлять с искомым временем. Реальная волна содержит высокие частоты, а в реальной среде есть дисперсия. Поэтому высокочастотные фотоны предвестника проходят слой за время $\tau_c = d/c$. Отражение от второй границы снижает среднюю скорость. Многократные отражения приводят к полученному результату. Время туннелирования для него определим как

$$\tau_{\mathrm{E}} = \int_0^d \frac{dz}{v_{\mathrm{E}}(z)} = \frac{d}{c}\frac{1 + \varepsilon + (\varepsilon - 1)\mathrm{sinc}(2k_0d\sqrt{\varepsilon})}{2}. \tag{7}$$

При предельно малой оптической толщине $\tau_{\mathrm{E}} = \varepsilon d/c$. При малой оптической толщине с учетом двух членов разложения в синусе $\tau_{\mathrm{E}} = (d/c) \times [\varepsilon - (k_0d)^2\varepsilon/3]$. При большой оптической толщине $\tau_{\mathrm{E}} = (d/c)(\varepsilon + 1)/2 > d/(c/\sqrt{\varepsilon})$, т. е. прохождение через слой занимает больше времени, чем движение волны на эквивалентном участке в вакууме. Отметим, что в полученные соотношения нельзя подставлять отрицательные ДП и получать комплексные времена.

В случае туннелирования через недиссипативный слой с отрицательной ДП пишем

$$E_x{=}A^+\exp(-k''z){+}A^-\exp(k''z),\ H_y{=}{-}ic\varepsilon_0\sqrt{|\varepsilon|}(A^+\exp(-k''z){-}A^-\exp(k''z)),$$

$$k''=k_0\sqrt{|\varepsilon|},\quad A^{\pm}=\exp(\pm k''d)T(1\pm i/\sqrt{|\varepsilon|})/2,$$

поэтому

$$S_z(z)=c\varepsilon_0|T|^2/2,\quad W=\varepsilon_0|E|^2(1+|\varepsilon|)/2,$$

$$|E|^2=[(|\varepsilon|+1)\cosh(2k''(z-d))+|\varepsilon|-1]|T|^2/(2/|\varepsilon|)$$

и для скорости энергии на частоте ниже плазменной

$$v_{\mathrm{E}}(\omega)=c\frac{(\omega_p^2/\omega^2-1)}{(\omega_p^2/\omega^2)[\omega_p^2/\omega^2\cosh^2(k''(z-d))-1]}.$$

При $z=d$ имеем $v_{\mathrm{E}}(\omega)=c\omega^2/\omega_p^2<c$. Имеем также $v_{\mathrm{E}}(\omega_p)=0$, а при $\omega\ll\omega_p$ получаем $v_{\mathrm{E}}(\omega)/c\approx\omega^2/[\omega_p^2\cosh^2(k''(z-d))-\omega^2]$. Эта скорость очень мала, особенно в начале широкого барьера, где она мала экспоненциально.

Рассмотрим время туннелирования

$$\tau_{\mathrm{E}}=\int_0^d\frac{dz}{v_{\mathrm{E}}(\omega)}=\frac{(\omega_p^2/\omega^2)}{\omega(\omega_p^2/\omega^2-1)^2}[\omega_p^2/\omega^2\sinh(2k''d)/4-k''d/2].\tag{8}$$

Для широких барьеров $\tau_{\mathrm{E}}=(\omega_p^4/\omega^5)\exp(2k_0d(\omega_p^2/\omega^2-1))/[2(\omega_p^2/\omega^2-1)^2]$, т. е. это время экспоненциально большое. Для узкого барьерного слоя $\tau_{\mathrm{E}}=$ $=(d/c)(\omega_p^2/\omega^2)/\sqrt{4(\omega_p^2/\omega^2-1)}$. На плазменной частоте оно бесконечное.

Для широких барьеров коэффициент $|T|^2$ экспоненциально мал, поэтому $|R|^2=1-|T|^2\approx1$. Это означает наличие в вакууме перед барьером двух приблизительно равных и противоположных потоков. Поскольку перед барьером $E=\exp(-jk_0z)+R\exp(jk_0z)$, то $|E|^2=1+|R|^2+2|R|\cos(2k_0z+\varphi)$, $S_z=c\varepsilon_0|T|^2/2$, и $v_{\mathrm{E}}(\omega)/c$ изменяется от $(1-|R|)/(1+|R|)$ до $(1+|R|)/(1-|R|)$. Здесь $R=|R|\exp(j\varphi)$. Очевидно, сверхсветовые значения здесь связаны с отражением от барьера и интерференцией. При отдельном рассмотрении потоков их скорость равна c. Усредним эту скорость по области между двумя ближайшими точками $-z_1$ и $-z_2$, для которых $l=z_1-z_2=\pi/k_0$. Выберем точку $-z_1$ так, что в ней косинус обращается в единицу. Тогда (см. [52], формула 3.792.1)

$$\frac{\pi\bar v_{\mathrm{E}}(\omega)}{ck_0}=\int_{-z_1}^{-z_1+\pi/k_0}\frac{(1-|R|^2)dz}{1+|R|^2+2|R|\cos(2k_0(z+z_1)+\pi)}=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(2k_0)^{-1}(1-|R|^2)dx}{1+|R|^2+2|R|\cos(x)}=\frac{\pi}{k_0},$$

или $\bar v_{\mathrm{E}}(\omega)=c$. В случае диссипативной пластины соотношения усложняются, и мы их не приводим. Но и в этом случае нет сверхсветовых скоростей. Слабая диссипация уменьшает скорость в высокопрозрачном слое.

Рассмотрим туннелирование через вакуумный зазор при условии НПВО. В этом случае для p-поляризации внутри зазора

$$W=\varepsilon_0|E_x|^2(1+k_x^2/|k_{0z}|^2)/4+\mu_0|H_y|^2/4,\quad |H_y|^2=(\varepsilon_0/\mu_0)|E_x|^2/|\rho_0|^2,$$

$$\rho_0=k_{0z}/k_0,\quad k_{0z}=\sqrt{k_0^2-k_x^2}=-i\sqrt{k_x^2-k_0^2}.$$

Очевидно,

$$|E_x|^2=\frac{|T|^2}{4}|(1-i|\rho_0|)\exp(-|k_{0z}|(z-d))+(1+i|\rho_0|)\exp(|k_{0z}|(z-d))|^2=$$
$$=\frac{|T|^2}{2}((1+|\rho_0|^2)\cosh(2|k_{0z}|(z-d))+1-|\rho_0|^2).$$

Вычисляем компоненту вектора Пойнтинга:

$$E_xH_y^*=\frac{c\varepsilon_0|T|^2}{4i|\rho_0|}[(1-i|\rho_0|)\exp(-|k_{0z}|(z-d))+(1+i|\rho_0|)\exp(|k_{0z}|(z-d))]\times$$
$$\times[(1+i|\rho_0|)\exp(-|k_{0z}|(z-d))-(1-i|\rho_0|)\exp(|k_{0z}|(z-d))],$$

имеем $S_z=|T|^2/2$. Отсюда получаем

$$v_{\mathrm{E}}(z)=\frac{2c}{((1+|\rho_0|^2)\cosh(2|k_{0z}|(z-d))+1-|\rho_0|^2)(1+k_x^2/(2|k_{0z}|^2))}.$$

При бесконечно малом зазоре заменяем косинус гиперболический единицей и получаем $v_{\mathrm{E}}(z)=c/(1+k_x^2/(2|k_{0z}|^2))<c$ или $v_{\mathrm{E}}(z)=c(2k_x^2-2k_0^2)/(3k_x^2-2k_0^2)$. Эта же скорость соответствует концу слоя $v_{\mathrm{E}}(d)$. При широком зазоре вдали от конца слоя скорость становится экспоненциально малой, а время туннелирования — экспоненциально большим. Не представляет труда получить аналогичные результаты для s-поляризованного туннелирования.

В ряде работ, например [53–56], получены решения для неоднородного слоя с ДП $\varepsilon(z)$. Такой слой можно представить как совокупность однородных слоев, определить скорость энергии в каждом слое и время по формулам типа (7), (8). Для плазмы следует предположить, что плазменная частота зависит от координаты. Поскольку для каждого из слоев скорость «досветовая», то и для всей структуры $v_{\mathrm{E}}\leqslant c$. Это, например, имеет место и для запрещенной зоны фотонного кристалла (ФК) с двумя прозрачными слоями в периоде и несколькими десятками периодов. Для такого ФК можно произвести гомогенизацию, и тогда в его запрещенной зоне эффективная ДП $\varepsilon_{\mathrm{eff}}<0$, поэтому задачу приближенно можно свести к задаче для одного слоя. Заметим, что отражения от границ раздела только замедляют передачу энергии. Для решения удобен метод матриц передачи [53]. Указанную задачу можно также решить и методом интегрального уравнения (ИУ) вида

$$E_x(z)=E_0\exp(-ik_0z)+\int_0^d G_\omega(z-z')(\varepsilon(z')-1)E_x(z')dz'. \tag{9}$$

В нем обозначено ядро $G_\omega(z)=-ik_0\exp(-ik_0|z|)/2$, удовлетворяющее уравнению $(\partial_z^2+k_0^2)G_\omega(z)=-k_0^2\delta(z)$, т. е. пропорциональное ФГ уравнения

Гельмгольца. Очевидно, решение ИУ (9) удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\partial_z^2 + k_0^2)E_x(z) = -k_0^2(\varepsilon(z) - 1)E_x(z)$ или $(\partial_z^2 + k_0^2\varepsilon(z))E_x(z) = 0$ как вне, так и внутри пластины. ИУ (9) можно решать методом последовательных приближений, но его хорошая сходимость гарантирована только при близких к единице ДП. Удобно искать решение (9) в виде

$$E_x(z) = E^+(z)\exp(-ik_0\sqrt{\varepsilon(z)}z) + E^-(z)\exp(ik_0\sqrt{\varepsilon(z)}z),$$

что сразу позволяет определить $v_{\mathrm{E}}(z)$, но требует численного вычисления амплитуд $E^{\pm}(z)$. Можно использовать и ВКБ приближение. Для нестационарного туннелирования также можно использовать ИУ, основанные на ФГ. Нестационарная одномерная функция Грина дается обратным Фурье-обращением функции $k_0^{-2}G_\omega(z)$ и пропорциональна функции Хэвисайда $\chi(t-|z|/c)$. Эта функция и определяет причинность: возникновение сигнала в точке z' в момент t' не может появится в точке z раньше времени $t = t' + |z - z'|/c$. Поляризацию в ИУ следует определять с учетом (1). Однако созданные локализованными источниками поля частот заменяют ВП. Если пакет имеет резкий фронт, проблем с определением времени его прохода какой-либо области не возникает: оно всегда не менее, чем d/c [56]. Но пакет может иметь нерезкий и даже бесконечный передний фронт [27], и тогда возникает проблема введения скорости и времени прохождения им заданной области [57], что является темой отдельного рассмотрения.

Одномерное стационарное уравнение Шредингера можно записать в виде $(\partial_z^2 + 2m\mathrm{E}(1 - V/\mathrm{E})/\hbar^2)\psi(z) = 0$. Обозначая $2mE/\hbar^2 = k^2$, $1 - V/\mathrm{E} = \varepsilon$, видим, что туннелирование ЭМВ при $\varepsilon < 0$ эквивалентно туннелированию частиц при $\mathrm{E} < V$, а потенциальной яме $V < 0$ соответствует пластина диэлектрика с $\varepsilon > 0$. Такая пластина, как известно, при достаточной толщине представляет собой открытый диэлектрический резонатор, имеющий комплексные частоты. Для матрицы рассеяния возникают полюса в комплексной области частот [58]. Зная $T(\omega)$ и спектр падающего ВП $\Phi(\omega)$, можно вычислить прошедшее поле, взяв обратное преобразование Фурье от $T(\omega)\Phi(\omega)$. В силу расположения полюсов у $T(\omega)$ сверхсветовых откликов не возникает [56]. Для квантовой частицы полюса соответствуют квазистационарным уровням энергии с конечным временем жизни. При рассеянии падающий поток частиц имеет вид $\psi^+(z) = A\exp(ikz)$. Величина $|\psi^+(z)|^2 = |A|^2$ дает плотность частиц в потоке. Ищем величины $\psi^-(z) = AR\exp(-ikz)$ слева и справа $\psi^+(z) = AT\exp(-ik(z-d))$, а также решение $\psi(z) = A^+\exp(ik\sqrt{\varepsilon}z) + A^-\exp(-ik\sqrt{\varepsilon}z)$. Очевидно, $|\psi(z)|^2$ дает плотность частиц внутри области. Она определяет плотность энергии. Величина $j = (\hbar/m)\mathrm{Im}(\psi^*\partial_z\psi)$ определяет поток плотности вероятности, поэтому $v_E = j/|\psi|^2$. Действительно, в падающем потоке $j^+ = k\hbar(2m)^{-1}|A|^2$ и величина $v_{\mathrm{E}} = \sqrt{\mathrm{E}/(2m)}$ определяет скорость частиц потока. Отметим, что в многоскоростных потоках происходит интерференция волн, поэтому энергетическая скорость изменяется. Многоскоростной поток характерен для ВП. Он также возникает при наличии обратного односкоростного потока, например, для волновой функции перед барьером $\psi(z) = A[\exp(ikz) + R\exp(-ikz)]$. Представим коэффициент отражения в показательной форме $R = |R|\exp(i\varphi)$. Для туннелирования обычно $|R| \approx 1$, поэтому $|\psi(z)|^2$ имеет минимумы и максимумы, тогда как поток постоянен — $j(z) = v_{\mathrm{E}}|AT|^2$. В точках минимума отношение $j(z)/|\psi(z)|^2$ может стать сверхсветовым, а в точках максимума оно меньше v_{E}. Нетрудно, однако, проверить, что усреднение на длине де-Бройля приведет к постоянному значению скорости v_{E}. Это же справедливо и для монохроматической ЭМВ, которая движется в вакууме. Таким образом, при наличии прямого и отраженного потоков необходимо провести усреднение и в пространстве по длине волны.

Вопрос о времени туннелирования встал после работ Г. А. Гамова (1928), Э. У. Кондона (1928, 1930), Ф. Т. Смита (1960), Т. Е. Хартмана (1962), Дж. Р. Флетчера (1985) и последующей лавины работ по туннелированию. Он открыт до сих пор, поскольку имеет место огромное число публикаций по сверхсветовому туннелированию ЭМВ, в том числе и в последнее время, а также и по сверхсветовому квантовому туннелированию. Известен парадокс Хартмана [2,4,23,27–38], заключающийся в насыщении с ростом толщины барьера d времени Бома—Вигнера (времени групповой задержки), получающейся из метода стационарной фазы для коэффициента пропускания T. В публикациях вводятся времена: Бома—Вигнера, или групповое время $\tau_{BW} = \partial_\omega \phi$, Буттикера—Ландауэра время $\tau_{BL} = -\hbar\partial_V \ln(|T|)$, ларморово время туннелирования $\tau_L = -\hbar\partial_V \phi$, время Поллака—Миллера $\tau_{PM} = \partial_\omega \ln(|T|)$ [26]. Вводятся и другие (в том числе комплексные) времена. Величина V соответствует величине потенциального барьера при туннелировании частицы. Применение вышеупомянутых времен к квантовому туннелированию с широким прямоугольным барьером высоты V дает

$$
\begin{gathered}
\tau_L = -\hbar\partial_V \phi = \frac{\hbar}{V\sqrt{V/\mathrm{E}-1}}, \\
\tau_{BL} = -\hbar\partial_V \ln(|T|) = \frac{(V/\mathrm{E}-1)(\hbar/V + d\sqrt{\mu_e/\mathrm{E}}) - \hbar/V}{2(V/\mathrm{E}-1)^{3/2}}, \\
\tau_{BW} = \tau_p = \hbar\partial_{\mathrm{E}}\phi = \hbar/(\sqrt{V\mathrm{E}-\mathrm{E}^2}), \\
\tau_{PM} = \hbar\partial_{\mathrm{E}} \ln(|T|) = \frac{(V/\mathrm{E}-1)(\hbar + d\sqrt{\mu_e \mathrm{E}}) - \hbar}{2\mathrm{E}(V/\mathrm{E}-1)^{3/2}},
\end{gathered}
\tag{10}
$$

что приводит к сверхсветовым скоростям [1–29]. Однако такие применения и соответствующие времена никак не отражают кинематику движения частиц в потоке и динамику движения ВП, поскольку изменение фазы коэффициента прохождения связано с интерференцией отраженных волн. В литературе нет предпочтения какому-либо из них. Часто времена (10) с указанными выше заменами и с учетом соотношения $\mathrm{E} = \hbar\omega$ применяют и к туннелированию ЭМВ. Очевидно, для квантового туннелирования электронов через прямоугольный барьер

$$
v_{\mathrm{E}}(z) = 2v/[(1+\kappa^2)\cosh(2\chi(z-d)) + (1-\kappa^2)], \tag{11}
$$

где $v = \sqrt{\mathrm{E}/\mu_e}$ — скорость частиц потока, $\kappa = \sqrt{\mathrm{E}/(V-\mathrm{E})}$, $\chi = \sqrt{\mu_e(V-\mathrm{E})/\hbar^2}$, μ_e — удвоенная масса. Вычисленное для (11) время, согласно (8), для широкого барьера экспоненциально большое. Для него пишем

$$
\tau = \int_0^d \frac{2v\,dz}{(1+\kappa^2)\cosh(2\chi(z-d)) + (1-\kappa^2)}.
$$

Интересно отметить, что $v_{\mathrm{E}}(d) = v_z$, т. е. электрон как бы проходит барьер, не теряя скорости и энергии. Это же значение $\tau_{\mathrm{E}} = d/v$ имеет место и для очень узкого барьера. За началом широкого барьера для малых z скорость (11) может быть очень малой, поскольку в этой области $|\psi(z)|^2$ максимальна внутри барьера. Действительно, амплитуда A^- экспоненциально мала. Пренебрегая нарастающей волной, имеем

$$|\psi(z)|^2 = |T|^2(1+\kappa^2)\exp(2\chi(d-z))/4.$$

Именно такая функция при отбрасывании A^- используется в ВКБ приближении для определения прозрачности барьера $|T|^2$.

Таким образом, парадокс Хартмана легко объясним. Сверхсветовых физических движений быть не может [57], хотя фазовые и групповые скорости могут быть сверхсветовыми. Ошибка Хартмана заключается в использовании узкого гауссова пакета волновых функций до барьера, внутри барьера и за барьером, причем раздельно (независимо) для каждой области так, как при решении методом сшивания для стационарного уравнения Шредингера с последующим применением метода стационарной фазы к выходному пакету. Такая ВФ практически соответствует стационарному туннелированию. Но волновая функция нестационарного уравнения Шредингера нелокальная и единая во всех областях. Она удовлетворяет интегральному уравнению, зависящему от потенциала, и изменяется во времени во всем пространстве [59]. Применять метод стационарной фазы в задачах туннелирования и прохождения волн при наличии отражений некорректно. При этом Хартман использовал узкий по спектру гауссов ВП, т.е. фактически задача была сведена к стационарному случаю, где время Бома—Вигнера не соответствует динамике процесса.

В последнее время в экспериментах по сверхсветовому туннелированию фотонов используют интерференцию узких ВП вместо детектирования фотонов. Например, в эксперименте в Беркли [30] использован двухфотонный распад, или параметрическое преобразование с понижением частоты в нелинейном кристалле и образованием двух пакетов. Прошедший среду ВП интерферирует с базовым в НОМ-интерферометре. Однако прошедший слой вещества ВП не является исходным фотоном: он взаимодействовал с веществом с образованием квазифотонов. В этих экспериментах использовался образец в виде многопериодного диэлектрического ФК с двумя слоями в периоде и получено сверхсветовое время. Интересно отметить, что в каждом слое скорость энергии существенно меньше c, а результат интерпретируется как распространение света быстрее света. Для определения времени туннелирования частиц в последнее время использованы методы фотоионизации атомов, в частности атомов водорода, методом attoclock [36]. Этот метод использован также в [31–35]. Для них получены весьма малые или даже нулевые времена возникновения частиц с энергиями континуума. Однако фотоионизация приводит к коллапсу волновой функции, что отмечали и авторы эксперимента, и ее трудно сопоставить с обычным туннелированием. Вообще определение времени в квантовом туннелировании связано с определением положения частицы, т. е. с коллапсом волновой функции. Любое такое детектирование связано с введением дополнительного потенциала.

Заключение

В стационарном случае времени нет, и некорректно говорить о времени туннелирования отдельной частицей. Для ЭВМ в среде это квазифотоны или поляритоны, соответствующие многофотонным и многочастичным взаимодействиям. Но скорости в потоке определить можно, и в этом смысле поставить их в соответствие частицам потока. В конечной области с изменяющимся потенциалом можно решать задачу, например, методом совместного решения уравнения Шредингера с уравнением Пуассона или методом теории функционала плотности, задавая граничные потоки. В нестационарном случае все величины зависят от времени, включая скорости и времена каких-то движений. Введение скоростей для ВП не является однозначным. Задачи нестационарного туннелирования весьма важны для определения переходных процессов в электронных устройствах, но представляют тему отдельного рассмотрения.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 16–19–10033.

Библиографический список

1. Smith F. T. Lifetime matrix in collision theory // *Phys. Rev.*, 1960. vol. 118, no. 6. pp. 349–356. `doi: 10.1103/PhysRev.119.2098.4`.
2. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet // *J. Appl. Phys.*, 1962. vol. 33, no. 12. pp. 3427–3433. `doi: 10.1063/1.1702424`.
3. Fletcher J. R. Time delay in tunnelling through a potential barrier // *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1985. vol. 18, no. 2. pp. L55–L59. `doi: 10.1088/0022-3719/18/2/004`.
4. Büttiker M., Landauer R. Traversal time for tunneling // *Phys. Rev. Lett.*, 1982. vol. 49, no. 23. pp. 1739–1742. `doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1739`.
5. Büttiker M. Larmor precession and the traversal time for tunneling // *Phys. Rev. B*, 1983. vol. 27, no. 10. pp. 6178–6188. `doi: 10.1103/PhysRevB.27.6178`.
6. Büttiker M., Landauer R. J. Comment on ‘The quantum mechanical tunnelling time problem-revisited’ // *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1988. vol. 21, no. 36. pp. 6207–6213. `doi: 10.1088/0022-3719/21/36/020`.
7. Steinberg A. M., Kwiat P. G., Chiao R. Y. Measurement of the single-photon tunneling time // *Phys. Rev. Lett.*, 1993. vol. 71, no. 5. pp. 708–711. `doi: 10.1103/PhysRevLett.71.708`.
8. Chiao R. Y. Superluminal (but causal) propagation of wavepackets in transparent media with inverted atomic populations // *Phys. Rev. A*, 1993. vol. 48, no. 1. pp. R34–R377. `doi: 10.1103/PhysRevA.48.R34`.
9. Hass K., Busch P. Causality of superluminal barrier traversal // *Phys. Lett. A*, 1994. vol. 185, no. 1. pp. 9–13. `doi: 10.1016/0375-9601(94)90979-2`.
10. Steinberg A. M. Conditional probabilities in quantum theory, and the tunneling time controversy // *Phys. Rev. A*, 1995. vol. 52, no. 1. pp. 32–42, arXiv: quant-ph/9502003. `doi: 10.1103/PhysRevA.52.32`.
11. Chiao R. Y. Tachyonlike excitations in inverted two-level media // *Phys. Rev. Lett.*, 1996. vol. 77, no. 7. pp. 1254–1957. `doi: 10.1103/PhysRevLett.77.1254`.
12. Olkhovsky V. S., Recami E., Raciti F., Zaichenko A. K. More about tunnelling times, the

dwell time and the "Hartman effect" // *J. Phys. I France*, 1995. vol. 5, no. 10. pp. 1351–1365, arXiv: quant-ph/9508010. doi: 10.1051/jp1:1995202.

13. Jakiel J., Olkhovsky V. S., Recami E. On superluminal motions in photon and particle tunnellings // *Phys. Lett. A*, 1998. vol. 248, no. 2–4. pp. 156–162, arXiv: quant-ph/9810053. doi: 10.1016/S0375-9601(98)00626-4.
14. Sassoli de Bianchi M. A simple semiclassical derivation of Hartman's effect // *Eur. J. Phys.*, 2000. vol. 21. pp. L21–L23. doi: 10.1088/0143-0807/21/4/101.
15. Longhi S., Marano M., Laporta P., Belmonte M. Superluminal optical pulse propagation at 1.5 μm in periodic fiber Bragg gratings // *Phys. Rev. E*, 2001. vol. 64, no. 5, 055602. doi: 10.1103/PhysRevE.64.055602.
16. Olkhovsky V. S., Recami E., Salesi G. Superluminal tunnelling through two successive barriers // *EPL – Europhys. Lett.*, 2002. vol. 57, no. 6. pp. 879–884, arXiv: quant-ph/0002022. doi: 10.1209/epl/i2002-00592-1.
17. Winful H. Delay time and the Hartman effect in quantum tunneling // *Phys. Rev. Lett.*, 2003. vol. 91, no. 26, 260401. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.260401.
18. Olkhovsky V. S., Recami E., Jakiel J. Unified time analysis of photon and particle tunnelling // *Phys. Rep.*, 2004. vol. 398, no. 3. pp. 133–178. doi: 10.1016/j.physrep.2004.06.001.
19. Martinez J. C., Polatdemir E. Origin of the Hartman effect // *Phys. Lett. A*, 2006. vol. 351, no. 1–2. pp. 31–36. doi: 10.1016/j.physleta.2005.10.076.
20. Enders A., Nimtz G. Evanescent-mode propagation and quantum tunneling // *Phys. Rev. E*, 1993. vol. 48, no. 1. pp. 632–634. doi: 10.1103/PhysRevE.48.632.
21. Nimtz G. On superluminal tunneling // *Progress in Quantum Electronics*, 2003. vol. 27, no. 6. pp. 417–450. doi: 10.1016/S0079-6727(03)00057-0.
22. Nimtz G. Superluminal signal velocity and causality // *Found. Phys.*, 2004. vol. 34, no. 12. pp. 1889–1903. doi: 10.1007/s10701-004-1625-2.
23. Nimtz G. Tunneling confronts special relativity // *Found. Phys.*, 2011. vol. 41, no. 7. pp. 1193–1199. doi: 10.1007/s10701-011-9539-2.
24. Hauge E. H., Støvneng J. A. Tunneling times: a critical review // *Rev. Mod. Phys.*, 1989. vol. 61, no. 4. pp. 917–936. doi: 10.1103/RevModPhys.61.917.
25. Winful H. G. Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox // *Phys. Rep.*, 2006. vol. 436, no. 1–2. pp. 1–69. doi: 10.1016/j.physrep.2006.09.002.
26. Yamada N. Unified derivation of tunneling times from decoherence functionals // *Phys. Rev. Lett.*, 2004. vol. 93, no. 17, 170401. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.170401.
27. Халфин Л. А. Квантовая теория рассеяния волновых пакетов, принцип причинности и сверхсветовое туннелирование // *УФН*, 1996. Т. 166, № 6. С. 688–690. doi: 10.3367/UFNr.0166.199606j.0688.
28. Шварцбург А. Б. Туннелирование электромагнитных волн — парадоксы и перспективы // *УФН*, 2007. Т. 177, № 1. С. 43–58. doi: 10.3367/UFNr.0177.200701b.0043.
29. Шварцбург А. Б., Ерохин Н. С. Резонансное туннелирование сверхкоротких электромагнитных импульсов в градиентных метаматериалах: парадоксы и перспективы // *УФН*, 2011. Т. 181, № 11. С. 1212–1217. doi: 10.3367/UFNr.0181.201111j.1212.
30. Chiao R. Y., Kwiat P. G., Steinberg A. M. Quantum nonlocality in two-photon experiments at Berkeley // *Quantum Semiclass. Opt.*. vol. 7, no. 3, arXiv: quant-ph/9501016. doi: 10.1088/1355-5111/7/3/006.
31. Eckle P., Pfeiffer A. N., Cirelli C., et al. Attosecond ionization and tunneling delay time measurements in Helium // *Science*, 2009. vol. 322, no. 5907. pp. 1525–1529. doi: 10.1126/science.1163439.
32. Pfeiffer A. N., Cirelli C., Smolarski M., et al. Attoclock reveals natural coordinates of the laser-induced tunnelling current flow in atoms // *Nat. Phys.*, 2012. vol. 8. pp. 76–80. doi: 10.1038/nphys2125.

33. Camus N., Yakaboylu E., Fechner L., et al. Experimental evidence for quantum tunneling time // *Phys. Rev. Lett.*, 2017. vol. 119, no. 2, 023201. `doi: 10.1103/PhysRevLett.119.023201`.
34. Landsman A. S., Weger M., Maurer J., et al. Ultrafast resolution of tunneling delay time // *Optica*, 2014. vol. 1, no. 5. pp. 343–349. `doi: 10.1364/OPTICA.1.000343`.
35. Sainadh U. S., Xu H., Wang X., et al. Attosecond angular streaking and tunnelling time in atomic hydrogen // *Nature*, 2019. vol. 568. pp. 75–77. `doi: 10.1038/s41586-019-1028-3`.
36. Mitchell M. W., Chiao R. Y. Causality and negative group delays in a simple bandpass amplifier // *Amer. J. Phys.*, 1998. vol. 66, no. 1. pp. 14–19. `doi: 10.1119/1.18813`.
37. Borjemscaia N., Polyakov S. V., Lett P. D., Migdall A. Single-photon propagation through dielectric bandgaps // *Optics Express*, 2010. vol. 18, no. 3. pp. 2279–2286. `doi: 10.1364/OE.18.002279`.
38. Muga J. G., Palao J. P. Negative time delays in one dimensional absorptive collisions // *Annalen der Physik*, 1998. vol. 7, no. 7–8. pp. 671–678. `doi: 10.1002/(SICI)1521-3889(199812)7:7/8<671::AID-ANDP671>3.0.CO;2-T`.
39. Muga J. G., Egusquiza I. L., Damborenea J. A., Delgado F. Bounds and enhancements for negative scattering time delays // *Phys. Rev. A*, 2002. vol. 66, no. 4, 042115. `doi: 10.1103/PhysRevA.66.042115`.
40. Dogariu A., Kuzmich A., Wang L. H. Transparent anomalous dispersion and superluminal light-pulse propagation at a negative group velocity // *Phys. Rev. A*, 2001. vol. 63, no. 5, 053806, arXiv: arXiv:physics/0012060 [physics.optics]. `doi: 10.1103/PhysRevA.63.053806`.
41. Wang L. J., Dogariu A., Kuzmich A. Superluminal light pulse propagation at a negative group velocity / *Coherence and Quantum Optics VIII*; eds. N. P. Bigelow, J. H. Eberly, C. R. Stroud, I. A. Walmsley. Boston, MA: Springer, 2003. pp. 619–620. `doi: 10.1007/978-1-4419-8907-9_35`.
42. Давидович М. В. Прохождение сигналов через фильтр с поглощением и отрицательное время задержки // *ЖТФ*, 2012. Т. 82, № 3. С. 15–22.
43. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982.
44. Давидович М. В. О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с аномальной положительной дисперсией // *Письма в ЖТФ*, 2006. Т. 32, № 22. С. 53–63.
45. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А. *Электромагнетизм и электромагнитные волны.* М.: Высш. шк., 1985. 504 с.
46. Давидович М. В. Законы сохранения и плотности энергии и импульса электромагнитного поля в диспергирующей среде // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*, 2012. Т. 12, № 1. С. 46–54.
47. Давидович М. В. О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с дисперсией, обусловленной проводимостью // *ЖТФ*, 2010. Т. 80, № 5. С. 40–44.
48. Рытов С. М. Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн // *ЖЭТФ*, 1947. Т. 176, № 10. С. 930–936.
49. Давидович М. В. Плазмоны в многослойных плоскослоистых структурах // *Квантовая электроника*, 2017. Т. 47, № 6. С. 567–579.
50. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* М.: Наука, 1981. 800 с.
51. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: ГИФМЛ, 1962. 1100 с.
52. Давидович М. В. Матрицы рассеяния и передачи неоднородного слоя // *Радиотехника и электроника*, 2010. Т. 55, № 1. С. 105–112.
53. Давидович М. В. О малоотражающих магнитодиэлектрических покрытиях с экспоненциально зависящими проницаемостями // *Радиотехника и электроника*, 2010. Т. 55, № 4. С. 492–496.
54. Давидович М. В., Стефюк Ю. В. Нелинейное прохождение электромагнитной волны через слой с квадратичной и дробно-полиномиальной зависимостями диэлектрической

проницаемости // *Известия вузов. ПНД*, 2010. Т. 18, № 3. С. 160–177. doi: 10.18500/0869-6632-2010-18-3-160-177.

55. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // *УФН*, 1976. Т. 118, № 2. С. 339–366. doi: 10.3367/UFNr.0118.197602h.0339.
56. Давидович М. В. О парадоксе Хартмана, туннелировании электромагнитных волн и сверхсветовых скоростях (отклик на статью Шварцбурга А. Б. “Туннелирование электромагнитных волн — парадоксы и перспективы”) // *УФН*, 2009. Т. 179, № 4. С. 443–446. doi: 10.3367/UFNr.0179.200904o.0443.
57. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.* М.: Наука, 1971. 530 с.
58. Грибов В. Н. *Квантовая электродинамика.* Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 288 с.
59. Гришаков К. С., Елесин В. Ф. Времена перехода резонансно-туннельного диода между экстремальными точками гистерезисной вольт-амперной характеристики // *Физика и техника полупроводников*, 2016. Т. 50, № 8. С. 1113–1117.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 22–40
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1741

MSC: 34B60, 35Q40, 81Q99

The energy transfer velocity by a plane monochromatic electromagnetic wave through a layer of matter

M. V. Davidovich

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

Stationary problems for the diffraction (tunneling) of a plane electromagnetic wave through a layer of matter with dielectric properties, as well as a quantum particle tunneling through a rectangular potential barrier are considered. It is shown that there are no superluminal motions, and the transit time is always longer when the wave passes the structure at the speed of light.

Keywords: energy velocity, tunneling time, frequency dispersion, Bohm–Wigner time, Hartman paradox.

Received: 22nd August, 2019 / Revised: 19th November, 2019 / Accepted: 10th February, 2020 / First online: 1st April, 2020

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported in part by a grant from the Russian Science Foundation, project no. 16–19–10033.

References

1. Smith F. T. Lifetime matrix in collision theory, *Phys. Rev.*, 1960, vol. 118, no. 6, pp. 349–356. doi: 10.1103/PhysRev.119.2098.4.
2. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet, *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 12, pp. 3427–3433. doi: 10.1063/1.1702424.
3. Fletcher J. R. Time delay in tunnelling through a potential barrier, *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1985, vol. 18, no. 2, pp. L55–L59. doi: 10.1088/0022-3719/18/2/004.
4. Büttiker M., Landauer R. Traversal time for tunneling, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 49, no. 23, pp. 1739–1742. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1739.

Research Article

Please cite this article in press as:
Davidovich M. V. The energy transfer velocity by a plane monochromatic electromagnetic wave through a layer of matter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 22–40. doi: 10.14498/vsgtu1741 (In Russian).

Author's Details:
Mikhail V. Davidovich https://orcid.org/0000-0001-8706-8523
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Radio Engineering and Electrodynamics; e-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

5. Büttiker M. Larmor precession and the traversal time for tunneling, *Phys. Rev. B*, 1983, vol. 27, no. 10, pp. 6178–6188. doi: 10.1103/PhysRevB.27.6178.
6. Büttiker M., Landauer R. J. Comment on 'The quantum mechanical tunnelling time problem-revisited', *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1988, vol. 21, no. 36, pp. 6207–6213. doi: 10.1088/0022-3719/21/36/020.
7. Steinberg A. M., Kwiat P. G., Chiao R. Y. Measurement of the single-photon tunneling time, *Phys. Rev. Lett.*, 1993, vol. 71, no. 5, pp. 708–711. doi: 10.1103/PhysRevLett.71.708.
8. Chiao R. Y. Superluminal (but causal) propagation of wavepackets in transparent media with inverted atomic populations, *Phys. Rev. A*, 1993, vol. 48, no. 1, pp. R34–R377. doi: 10.1103/PhysRevA.48.R34.
9. Hass K., Busch P. Causality of superluminal barrier traversal, *Phys. Lett. A*, 1994, vol. 185, no. 1, pp. 9–13. doi: 10.1016/0375-9601(94)90979-2.
10. Steinberg A. M. Conditional probabilities in quantum theory, and the tunneling time controversy, *Phys. Rev. A*, 1995, vol. 52, no. 1, pp. 32–42, arXiv: quant-ph/9502003. doi: 10.1103/PhysRevA.52.32.
11. Chiao R. Y. Tachyonlike excitations in inverted two-level media, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 7, pp. 1254–1957. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.1254.
12. Olkhovsky V. S., Recami E., Raciti F., Zaichenko A. K. More about tunnelling times, the dwell time and the "Hartman effect", *J. Phys. I France*, 1995, vol. 5, no. 10, pp. 1351–1365, arXiv: quant-ph/9508010. doi: 10.1051/jp1:1995202.
13. Jakiel J., Olkhovsky V. S., Recami E. On superluminal motions in photon and particle tunnellings, *Phys. Lett. A*, 1998, vol. 248, no. 2–4, pp. 156–162, arXiv: quant-ph/9810053. doi: 10.1016/S0375-9601(98)00626-4.
14. Sassoli de Bianchi M. A simple semiclassical derivation of Hartman's effect, *Eur. J. Phys.*, 2000, vol. 21, pp. L21–L23. doi: 10.1088/0143-0807/21/4/101.
15. Longhi S., Marano M., Laporta P., Belmonte M. Superluminal optical pulse propagation at 1.5 µm in periodic fiber Bragg gratings, *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 64, no. 5, 055602. doi: 10.1103/PhysRevE.64.055602.
16. Olkhovsky V. S., Recami E., Salesi G. Superluminal tunnelling through two successive barriers, *EPL – Europhys. Lett.*, 2002, vol. 57, no. 6, pp. 879–884, arXiv: quant-ph/0002022. doi: 10.1209/epl/i2002-00592-1.
17. Winful H. Delay time and the Hartman effect in quantum tunneling, *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 91, no. 26, 260401. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.260401.
18. Olkhovsky V. S., Recami E., Jakiel J. Unified time analysis of photon and particle tunnelling, *Phys. Rep.*, 2004, vol. 398, no. 3, pp. 133–178. doi: 10.1016/j.physrep.2004.06.001.
19. Martinez J. C., Polatdemir E. Origin of the Hartman effect, *Phys. Lett. A*, 2006, vol. 351, no. 1–2, pp. 31–36. doi: 10.1016/j.physleta.2005.10.076.
20. Enders A., Nimtz G. Evanescent-mode propagation and quantum tunneling, *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 48, no. 1, pp. 632–634. doi: 10.1103/PhysRevE.48.632.
21. Nimtz G. On superluminal tunneling, *Progress in Quantum Electronics*, 2003, vol. 27, no. 6, pp. 417–450. doi: 10.1016/S0079-6727(03)00057-0.
22. Nimtz G. Superluminal signal velocity and causality, *Found. Phys.*, 2004, vol. 34, no. 12, pp. 1889–1903. doi: 10.1007/s10701-004-1625-2.
23. Nimtz G. Tunneling confronts special relativity, *Found. Phys.*, 2011, vol. 41, no. 7, pp. 1193–1199. doi: 10.1007/s10701-011-9539-2.
24. Hauge E. H., Støvneng J. A. Tunneling times: a critical review, *Rev. Mod. Phys.*, 1989, vol. 61, no. 4, pp. 917–936. doi: 10.1103/RevModPhys.61.917.
25. Winful H. G. Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox, *Phys. Rep.*, 2006, vol. 436, no. 1–2, pp. 1–69. doi: 10.1016/j.physrep.2006.09.002.
26. Yamada N. Unified derivation of tunneling times from decoherence functionals, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, no. 17, 170401. doi: 10.1103/PhysRevLett.93.170401.

27. Khalfin L. A. The quantum theory of wave packet scattering, the causality principle, and superlight tunnelling, *Phys. Usp.*, 1996, vol. 39, no. 6, pp. 639–642. doi: 10.1070/PU1996v039n06ABEH001518.
28. Shvartsburg A. B. Tunneling of electromagnetic waves: paradoxes and prospects, *Phys. Usp.*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 37–51. doi: 10.1070/PU2007v050n01ABEH006148.
29. Shvartsburg A. B., Erokhin N. S. Resonant tunneling of ultrashort electromagnetic pulses in gradient metamaterials: paradoxes and prospects, *Phys. Usp.*, 2011, vol. 54, no. 11, pp. 1171–1176. doi: 10.3367/UFNe.0181.201111j.1212.
30. Chiao R. Y., Kwiat P. G., Steinberg A. M. Quantum nonlocality in two-photon experiments at Berkeley, *Quantum Semiclass. Opt.*, vol. 7, no. 3, arXiv: quant-ph/9501016. doi: 10.1088/1355-5111/7/3/006.
31. Eckle P., Pfeiffer A. N., Cirelli C., et al. Attosecond ionization and tunneling delay time measurements in Helium, *Science*, 2009, vol. 322, no. 5907, pp. 1525–1529. doi: 10.1126/science.1163439.
32. Pfeiffer A. N., Cirelli C., Smolarski M., et al. Attoclock reveals natural coordinates of the laser-induced tunnelling current flow in atoms, *Nat. Phys.*, 2012, vol. 8, pp. 76–80. doi: 10.1038/nphys2125.
33. Camus N., Yakaboylu E., Fechner L., et al. Experimental evidence for quantum tunneling time, *Phys. Rev. Lett.*, 2017, vol. 119, no. 2, 023201. doi: 10.1103/PhysRevLett.119.023201.
34. Landsman A. S., Weger M., Maurer J., et al. Ultrafast resolution of tunneling delay time, *Optica*, 2014, vol. 1, no. 5, pp. 343–349. doi: 10.1364/OPTICA.1.000343.
35. Sainadh U. S., Xu H., Wang X., et al. Attosecond angular streaking and tunnelling time in atomic hydrogen, *Nature*, 2019, vol. 568, pp. 75–77. doi: 10.1038/s41586-019-1028-3.
36. Mitchell M. W., Chiao R. Y. Causality and negative group delays in a simple bandpass amplifier, *Amer. J. Phys.*, 1998, vol. 66, no. 1, pp. 14–19. doi: 10.1119/1.18813.
37. Borjemscaia N., Polyakov S. V., Lett P. D., Migdall A. Single-photon propagation through dielectric bandgaps, *Optics Express*, 2010, vol. 18, no. 3, pp. 2279–2286. doi: 10.1364/OE.18.002279.
38. Muga J. G., Palao J. P. Negative time delays in one dimensional absorptive collisions, *Annalen der Physik*, 1998, vol. 7, no. 7–8, pp. 671–678. doi: 10.1002/(SICI)1521-3889(199812)7:7/8<671::AID-ANDP671>3.0.CO;2-T.
39. Muga J. G., Egusquiza I. L., Damborenea J. A., Delgado F. Bounds and enhancements for negative scattering time delays, *Phys. Rev. A*, 2002, vol. 66, no. 4, 042115. doi: 10.1103/PhysRevA.66.042115.
40. Dogariu A., Kuzmich A., Wang L. H. Transparent anomalous dispersion and superluminal light-pulse propagation at a negative group velocity, *Phys. Rev. A*, 2001, vol. 63, no. 5, 053806, arXiv: arXiv:physics/0012060 [physics.optics]. doi: 10.1103/PhysRevA.63.053806.
41. Wang L. J., Dogariu A., Kuzmich A. Superluminal light pulse propagation at a negative group velocity, In: *Coherence and Quantum Optics VIII*; eds. N. P. Bigelow, J. H. Eberly, C. R. Stroud, I. A. Walmsley. Boston, MA, Springer, 2003, pp. 619–620. doi: 10.1007/978-1-4419-8907-9_35.
42. Davidovich M. V. Propagation of signals through a dissipative filter and the negative time delay, *Tech. Phys.*, 2012, vol. 57, no. 3, pp. 328–335. doi: 10.1134/S1063784212030048.
43. Landau L. D., Lifshits E. M. *Electrodynamics of Continuous Media*, Course of Theoretical Physics, vol. 8. New York, Pergamon, 1984.
44. Davidovich M. V. Electromagnetic energy density and velocity in a medium with anomalous positive dispersion, *Tech. Phys. Lett.*, 2006, vol. 32, no. 22, pp. 982–986. doi: 10.1134/S106378500611023X.
45. Akhiezer A. I., Akhiezer I. A. *Elektromagnetizm i elektromagnitnye volny* [Electromagnetism and Electromagnetic Waves]. Moscow, Vyssh. shk., 1985, 504 pp. (In Russian)
46. Davidovich M. V. The conservation laws and the densities of electromagnetic field energy and momentum in dispersive media, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Physics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 46–54 (In Russian).

47. Davidovich M. V. On the electromagnetic energy density and energy transfer rate in a medium with dispersion due to conduction, *Tech. Phys.*, 2010, vol. 55, no. 5, pp. 630–635. doi: 10.1134/S1063784210050063.
48. Rytov S. M. Some theorems of the group velocity of electromagnetic waves, *JETP*, 1947, vol. 176, no. 10, pp. 930–936 (In Russian).
49. Davidovich M. V. Plasmons in multilayered plane-stratified structures, *Quantum Electronics*, 2017, vol. 47, no. 6, pp. 567–579. doi: 10.1070/QEL16272.
50. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series.* London, Routledge, 1992. doi: 10.1201/9780203750643.
51. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of Integrals, Series, and Products.* California, Academic Press, 1980. doi: 10.1016/c2013-0-10754-4.
52. Davidovich M. V. Scattering and transmission matrices of an inhomogeneous layer, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2010, vol. 55, no. 1, pp. 20–27. doi: 10.1134/S1064226910010031.
53. Davidovich M. V. On low-reflection magnetodielectric coatings with exponential dependences of permittivity and permeability, *J. Commun. Technol. Electron.*, 2010, vol. 55, no. 4, pp. 465–468. doi: 10.1134/S1064226910040133.
54. Davidovich M. V., Stefjuk J. V. Nonlinear electromagnetic wave passing through the layer with quadratic and fractionallypolynomial permittivity dependences on amplitude, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2010, vol. 18, no. 3, pp. 160–177 (In Russian). doi: 10.18500/0869-6632-2010-18-3-160-177.
55. Vainshtein L. A. Propagation of pulses, *Sov. Phys. Usp.*, 1976, vol. 19, no. 2, pp. 189–205. doi: 10.1070/PU1976v019n02ABEH005138.
56. Davidovich M. V. On the Hartman paradox, electromagnetic wave tunneling and supraluminal velocities (comment on the paper "Tunneling of electromagnetic waves: paradoxes and prospects" by A. B. Shvartsburg), *Phys. Usp.*, 2009, vol. 52, no. 4, pp. 415–418. doi: 10.3367/UFNe.0179.200904o.0443.
57. Baz' A. I., Zel'dovich Ia. B., Perelomov A. M. *Rasseianie, reaktsii i raspady v nereliativistskoi kvantovoi mekhanike* [Scattering, Reactions and Decay in Nonrelativistic Quantum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1971, 530 pp. (In Russian)
58. Gribov V. N. *Kvantovaia elektrodinamika* [Quantum Electrodynamics]. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 288 pp. (In Russian)
59. Grishakov K. S., Elesin V. F. Transition times between the extremum points of the current–voltage characteristic of a resonant tunneling diode with hysteresis, *Semiconductors*, 2016, vol. 50, no. 8, pp. 1092–1096. doi: 10.1134/S1063782616080121.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 41–55
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1685

УДК 517.95 + 517.584

Асимптотические оценки разностей произведений функций Бесселя на интеграл от этих функций

К. Б. Сабитов

[1] Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
факультет математики и информационных технологий,
Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 37.
[2] Институт стратегических исследований Республики Башкортостан,
Стерлитамакский филиал,
Россия, 453103, ул. Одесская, 68.

Аннотация

При исследовании прямых и обратных задач по отысканию правой части вырождающихся уравнений смешанного типа с различными граничными условиями возникает задача об установлении асимптотических оценок для разностей произведений цилиндрических функций на интеграл от этих функций. Предварительно на основании установленной новой формулы нахождения конечной биномиальной суммы вычислены разности произведений цилиндрических функций на определенный интеграл от этих функций через обобщенную гипергеометрическую функцию. С использованием асимптотической формулы при больших значениях аргумента для обобщенной гипергеометрической функции установлены асимптотические оценки при больших значениях параметра для указанных разностей функций Бесселя первого и второго рода, а также для модифицированных функций Бесселя.

Ключевые слова: функции Бесселя, модифицированные функции Бесселя, интегралы от функций Бесселя, конечная биномиальная сумма, обобщенная гипергеометрическая функция, асимптотические оценки.

Получение: 3 апреля 2019 г. / Исправление: 16 августа 2019 г. / Принятие: 16 сентября 2019 г. / Публикация онлайн: 21 ноября 2019 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Сабитов К. Б. Асимптотические оценки разностей произведений функций Бесселя на интеграл от этих функций // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 41–55. doi: 10.14498/vsgtu1685.

Сведения об авторе

Камиль Басирович Сабитов https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой, каф. математического анализа[1]; зав. лабораторией, лаб. прикладной математики и информатики[1];
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Введение. При исследовании обратных задач по отысканию правой части вырождающихся уравнений смешанного типа [1–10] возникает задача об установлении асимптотических оценок для следующих разностей:

$$N_\nu^{(1)}(y) = \sqrt{y} I_\nu(py^q) \int_0^y \sqrt{s} I_{-\nu}(ps^q)\, ds - \sqrt{y} I_{-\nu}(py^q) \int_0^y \sqrt{s} I_\nu(ps^q)\, ds, \quad (1)$$

$$N_\nu^{(2)}(y) = \sqrt{y} I_\nu(py^q) \int_0^y \sqrt{s} K_\nu(ps^q)\, ds - \sqrt{y} K_\nu(py^q) \int_0^y \sqrt{s} I_\nu(ps^q)\, ds, \quad y > 0; \quad (2)$$

$$S_\nu^{(1)}(y) = \sqrt{-y} J_\nu(p(-y)^q) \int_0^y \sqrt{-s} J_{-\nu}(p(-s)^q)\, ds -$$
$$- \sqrt{-y} J_{-\nu}(p(-y)^q) \int_0^y \sqrt{-s} J_\nu(p(-s)^q)\, ds, \quad (3)$$

$$S_\nu^{(2)}(y) = \sqrt{-y} J_\nu(p(-y)^q) \int_0^y \sqrt{-s} Y_\nu(p(-s)^q)\, ds -$$
$$- \sqrt{-y} Y_\nu(p(-y)^q) \int_0^y \sqrt{-s} J_\nu(p(-s)^q)\, ds, \quad y < 0, \quad (4)$$

при $p \to +\infty$, где $\nu = 1/(2q) = 1/(m+2)$, $m > 0$ — показатель степени вырождения уравнения, $J_{\pm\nu}(\,\cdot\,)$ и $Y_\nu(\,\cdot\,)$ — функции Бесселя соответственно первого и второго рода, $I_{\pm\nu}(\,\cdot\,)$ и $K_\nu(\,\cdot\,)$ — модифицированные функции Бесселя, $p = \mathrm{const} > 0$.

Предварительно заметим, что

$$\sqrt{y} I_{\pm\nu}(py^q) = p^{-1/(2q)} (py^q)^{1/(2q)} I_{\pm\nu}(py^q) = p^{-\nu} x^\nu I_{\pm\nu}(x),$$

$$\sqrt{s} I_{\pm\nu}(ps^q) = p^{-\nu} t^\nu I_{\pm\nu}(t),$$

где $x = p|y|^q$, $t = p|s|^q$,

$$\int_0^y \sqrt{s} I_{\pm\nu}(ps^q)\, ds = \frac{1}{qp^{3\nu}} \int_0^x t^{3\nu-1} I_{\pm\nu}(t)\, ds.$$

Тогда разность (1) принимает вид

$$N_\nu^{(1)}(y) = \frac{x^\nu}{qp^{4\nu}} \widetilde{N}_\nu^{(1)}(x). \quad (5)$$

Здесь

$$\widetilde{N}_\nu^{(1)}(x) = I_\nu(x) \int_0^x t^\mu I_{-\nu}(t)\, dt - I_{-\nu}(x) \int_0^x t^\mu I_\nu(t)\, dt, \quad \mu = 3\nu - 1. \quad (6)$$

Аналогично (5) разности (2)–(4) представим в следующем виде:

$$N_\nu^{(2)}(y) = \frac{x^\nu}{qp^{4\nu}} \widetilde{N}_\nu^{(2)}(x), \quad (7)$$

$$\widetilde{N}_\nu^{(2)}(x) = I_\nu(x) \int_0^x t^\mu K_\nu(t)\, dt - K_\nu(x) \int_0^x t^\mu I_\nu(t)\, dt, \quad (8)$$

$$S_\nu^{(1)}(y) = -\frac{x^\nu}{qp^{4\nu}} \widetilde{S}_\nu^{(1)}(x), \tag{9}$$

$$\widetilde{S}_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) \int_0^x t^\mu J_{-\nu}(t)\, dt - J_{-\nu}(x) \int_0^x t^\mu J_\nu(t)\, dt, \tag{10}$$

$$S_\nu^{(2)}(y) = -\frac{x^\nu}{qp^{4\nu}} \widetilde{S}_\nu^{(2)}(x), \tag{11}$$

$$\widetilde{S}_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) \int_0^x t^\mu Y_\nu(t)\, dt - J_\nu(x) \int_0^x t^\mu Y_\nu(t)\, dt, \;\; x \geqslant 0. \tag{12}$$

Отметим, что разность (10) представляет собой функцию Ломмеля [11], [12, §10.7], [13, §7.5.5].

В данной работе, с использованием разложения функций $I_{\pm\nu}(x)$ и $J_{\pm\nu}(x)$ в степенной ряд, аналогично работам [14, 15], найдены разности (6) и (10) на основании установленной нами новой формулы для вычисления конечной суммы (см. лемму ниже), затем на их основе найдены (8) и (12). Отсюда в силу представлений (5), (7), (9) и (11) получены окончательные результаты по разностям (1)–(4) и установлены асимптотические оценки при $p \to +\infty$.

1. Вычисление разностей (1)–(4). Используя разложения функций $I_{\pm\nu}(t)$ в степенной ряд, предварительно найдем

$$\int_0^x t^\mu I_{\mp\nu}(t)\, dt = \int_0^x t^\mu \sum_{k=0}^\infty \frac{(t/2)^{2k\mp\nu}\, dt}{k!\,\Gamma(\mp\nu+k+1)} = \\ = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k+\mu\mp\nu+1}}{2^{2k\mp\nu} k!\,\Gamma(\mp\nu+k+1)(2k+\mu\mp\nu+1)}$$

и вычислим произведение рядов

$$I_{\pm\nu}(x) \int_0^x t^\mu I_{\mp\nu}(t)\, dt = \\ = \sum_{k=0}^\infty \frac{(x/2)^{2k\pm\nu}}{k!\,\Gamma(\pm\nu+k+1)} \sum_{m=0}^\infty \frac{x^{\mu+1}\,(x/2)^{2m\mp\nu}}{m!\,\Gamma(\mp\nu+k+1)(2m+\mu\mp\nu+1)} = \\ = x^{\mu+1} \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k} \sum_{n=0}^k \frac{[2(k-n)+\mu+1\mp\nu]^{-1}}{n!\,(k-n)!\,\Gamma(\pm\nu+n+1)\,\Gamma(\mp\nu+k-n+1)},$$

где $\Gamma(\,\cdot\,)$ — гамма-функция Эйлера. Теперь составим их разность:

$$\widetilde{N}_\nu^{(1)}(x) = x^{\mu+1} \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k} (N_{1k} - N_{2k})\,. \tag{13}$$

Здесь

$$N_{1k} = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!(k-n)!\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(-\nu+k-n+1)(2k-2n+\mu+1-\nu)}, \tag{14}$$

$$N_{2k}=\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!(k-n)!\Gamma(-\nu+n+1)\Gamma(\nu+k-n+1)(2k-2n+\mu+1+\nu)}. \quad (15)$$

В силу формулы для биномиальных коэффициентов

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(\omega+1)\Gamma(z-\omega+1)}=\binom{z}{\omega}$$

конечные суммы (14) и (15) представим в виде

$$N_{1k}=\frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2(k-n)+\mu+1-\nu}\binom{k}{n}\binom{k}{n+\nu}, \quad (16)$$

$$N_{1k}=\frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2(k-n)+\mu+1+\nu}\binom{k}{n}\binom{k}{n-\nu}. \quad (17)$$

На основании равенства

$$\binom{a}{b}=\binom{a}{a-b}$$

преобразуем конечные суммы (16) и (17):

$$N_{1k}=\frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{2(k-n)+\mu+1-\nu}\binom{k}{k-n}\binom{k}{k-n-\nu}=$$

$$=\frac{1}{(k!)^2}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{2l+\mu+1-\nu}\binom{k}{l}\binom{k}{l-\nu},$$

$$N_{2k}=\frac{1}{(k!)^2}\sum_{l=0}^{k}\frac{1}{2l+\mu+1+\nu}\binom{k}{l}\binom{k}{l+\nu}.$$

Тогда

$$N_{1k}-N_{2k}=\frac{1}{(k!)^2}M_k. \quad (18)$$

Здесь

$$M_k=\sum_{l=0}^{k}\left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu}\binom{k}{l-\nu}-\frac{1}{2l+\mu+1+\nu}\binom{k}{l+\nu}\right]\binom{k}{l}. \quad (19)$$

Далее выведем формулу для вычисления суммы (19). Предварительно вычислим M_0, M_1, M_2 и M_3, затем определим общий вид этой формулы и методом индукции докажем ее справедливость.

При $k=0$ имеем

$$M_0=\frac{2}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\cdot\frac{1}{(\mu+1)^2-\nu^2}.$$

Если $k = 1$, то получим

$$M_1 = \frac{2}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{4}{[(\mu+1)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+2)^2-\nu^2]}.$$

Когда $k = 2$, вычисления дают следующий результат:

$$M_2 = \frac{2\cdot 4}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{16}{[(\mu+1)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+2)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+4)^2-\nu^2]}.$$

Приведенные выше вычисления для $k = 0, 1, 2$ не дают возможности написать общий вид формулы, поэтому дополнительно найдем

$$\begin{aligned} M_3 = \frac{2\cdot 36}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{64}{[(\mu+1)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+2)^2-\nu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(\mu+1+4)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+6)^2-\nu^2]} = \\ = \frac{2\cdot(3!)^2}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{2^{2\cdot 3}}{[(\mu+1)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+2)^2-\nu^2]} \times \\ \times \frac{1}{[(\mu+1+2\cdot 2)^2-\nu^2]\,[(\mu+1+2\cdot 3)^2-\nu^2]}. \end{aligned} \tag{20}$$

Из равенства (20) уже нетрудно записать общий вид формулы для нахождения

$$M_k = \frac{2(k!)^2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{2^{2k}}{[(\mu+1)^2-\nu^2]\,[(\mu+3)^2-\nu^2]\cdots[(\mu+1+2k)^2-\nu^2]}. \tag{21}$$

Предварительно, используя символ Похгаммера

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)},$$

преобразуем выражение, входящее в правую часть формулы (21):

$$\begin{aligned} (\mu+1\pm\nu)(\mu+1+2\pm\nu)\cdots(\mu+1+2k\pm\nu) = \\ = \frac{\mu+1\pm\nu}{2}\Big(\frac{\mu+1\pm\nu}{2}+1\Big)\cdots\Big(\frac{\mu+1\pm\nu}{2}+k\Big)2^{k+1} = \\ = \Big(\frac{\mu+1\pm\nu}{2}\Big)_{k+1} 2^{k+1} = \frac{\Gamma\Big(\frac{\mu+1\pm\nu}{2}+k+1\Big)2^{k+1}}{\Gamma\Big(\frac{\mu+1\pm\nu}{2}\Big)}. \end{aligned}$$

Тогда формула (21) принимает вид

$$M_k = \frac{(k!)^2}{2\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}+k+1\right)}. \tag{22}$$

Пусть формула (22) верна при произвольном k. Докажем ее справедливость при $k+1$. Для этого на основании (19) найдем M_{k+1} и, используя равенство

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1},$$

разобьем эту величину на четыре суммы:

$$\begin{aligned}
M_{k+1} &= \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu-1} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu-1} \right] \binom{k}{l-1} + \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k+1} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu} \right] \binom{k}{l-1} + \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k+1} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu-1} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu-1} \right] \binom{k}{l} + \\
&\quad + \sum_{l=0}^{k+1} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu} \right] \binom{k}{l} = \\
&= P_1 + P_2 + P_3 + P_4. \qquad (23)
\end{aligned}$$

В силу известных равенств

$$\binom{k}{-1} = 0 \quad \text{и} \quad \binom{k}{k+1} = 0,$$

$$P_1 = \sum_{l=0}^{k} \left[\frac{1}{2l+\mu+2+1-\nu} \binom{k}{l-\nu} - \frac{1}{2l+\mu+2+1+\nu} \binom{k}{l+\nu} \right] \binom{k}{l} =$$

$$= M_k \,(\text{здесь } \mu \text{ надо заменить на } \mu+2) = M_k\Big|_{\mu=\mu+2}, \qquad (24)$$

$$P_4 = \sum_{l=0}^{k} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu} \right] \binom{k}{l} \equiv M_k, \qquad (25)$$

$$P_2 = \sum_{l=1}^{k+1} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu} \right] \binom{k}{l-1} =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \left[\frac{1}{2l+\mu+3-\nu} \binom{k}{l+1-\nu} - \frac{1}{2l+\mu+3+\nu} \binom{k}{l+1+\nu} \right] \binom{k}{l}, \qquad (26)$$

$$P_3 = \sum_{l=0}^{k} \left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu} \binom{k}{l-\nu-1} - \frac{1}{2l+\mu+1+\nu} \binom{k}{l+\nu-1} \right] \binom{k}{l}. \qquad (27)$$

Предварительно на основании (26) и (27) найдем сумму

$$P_2+P_3=\sum_{l=0}^{k}\left[\frac{1}{2l+\mu+2+1-\nu}\binom{k}{l+1-\nu}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2l+\mu+2+\nu-1}\binom{k}{l+\nu-1}\right]\binom{k}{l}+$$
$$+\sum_{l=0}^{k}\left[\frac{1}{2l+\mu+2-1-\nu}\binom{k}{l-1-\nu}-\frac{1}{2l+\mu+2+1+\nu}\binom{k}{l+1+\nu}\right]\binom{k}{l}=$$
$$=-M_k\Big|_{\substack{\nu=1-\nu\\ \mu=\mu+1}}+M_k\Big|_{\substack{\nu=1+\nu\\ \mu=\mu+1}}. \quad (28)$$

Тогда, подставляя (24), (25) и (28) в (23), с учетом формулы (22) получим

$$M_{k+1}=M_k\Big|_{\mu=\mu+2}+M_k-M_k\Big|_{\substack{\nu=1-\nu\\ \mu=\mu+1}}+M_k\Big|_{\substack{\nu=1+\nu\\ \mu=\mu+1}}=$$
$$=\frac{(k!)^2}{2\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\left[\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}+k+1\Big)}+\right.$$
$$+\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}+k+1\Big)}-$$
$$-\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}+k+1\Big)}-$$
$$\left.-\frac{\Gamma\left(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}+k+1\right)}\right]=$$
$$=\frac{(k!)^2}{2\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\Big[S_{1k}-S_{2k}\Big]. \quad (29)$$

Используя формулу $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$, найдем суммы S_{1k} и S_{2k}:

$$S_{1k}=\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}+k+1\Big)}\times$$
$$\times\Big[(\mu+1)^2-\nu^2+(\mu+1+2k+2)^2-\nu^2\Big]=$$

$$= \frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)\Big[(\mu+1)^2-\nu^2+2(k+1)(\mu+k+2)\Big]}{2\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}+k+1\Big)}, \quad (30)$$

$$S_{2k} = \frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)\Big[(\mu+1)^2-\nu^2+2(k+1)(\mu+1)\Big]}{2\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}+k+1\Big)}. \quad (31)$$

Теперь, подставляя (30) и (31) в (29), находим

$$M_{k+1} = \frac{((k+1)!)^2}{2\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}+k+2\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}+k+2\Big)}.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Лемма. *Справедлива следующая формула вычисления конечной суммы*:

$$\sum_{l=0}^{k}\left[\frac{1}{2l+\mu+1-\nu}\binom{k}{l-\nu}-\frac{1}{2l+\mu+1+\nu}\binom{k}{l+\nu}\right]\binom{k}{l} =$$
$$= \frac{(k!)^2}{2\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}\cdot\frac{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}+k+1\Big)}. \quad (32)$$

Тогда с учетом установленной формулы (32) и соотношений (18), (13) имеем

$$\widetilde{N}_{\nu}^{(1)}(x) = \frac{x^{\mu+1}\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}\Big)}{2\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Big(\dfrac{x^2}{4}\Big)^k}{\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1+\nu}{2}+k+1\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\mu+1-\nu}{2}+k+1\Big)} =$$
$$= \frac{2\sin\nu\pi\cdot x^{1+\mu}}{\pi\big[(\mu+1)^2-\nu^2\big]}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Big(\dfrac{x^2}{4}\Big)^k}{\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}\Big)_k\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}\Big)_k} =$$
$$= \frac{2\sin\nu\pi\cdot x^{1+\mu}}{\pi\big[(\mu+1)^2-\nu^2\big]}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ \frac{x^2}{4}\Big), \quad (33)$$

где ${}_1F_2(\,\cdot\,)$ — обобщенная гипергеометрическая функция [13, §10.10(IV)].

Тем самым первая задача о вычислении разности (6) выполнена.

Теперь рассмотрим разность (10). Аналогично вычислению разности (6) с использованием разложения функций $J_{\pm\nu}(z)$ в обобщенный степенной ряд получим

$$\widetilde{S}_\nu^{(1)}(x) = x^{\mu+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}(N_{1k}-N_{2k}) = x^{\mu+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}M_k. \quad (34)$$

Подставляя (32) в (34), получим

$$\widetilde{S}_\nu^{(1)}(x) = \frac{2\sin\nu\pi\cdot x^{1+\mu}}{\pi\big[(\mu+1)^2-\nu^2\big]}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Big(\dfrac{x^2}{4}\Big)^k}{\Big(\dfrac{\mu+3+\nu}{2}\Big)_k\Big(\dfrac{\mu+3-\nu}{2}\Big)_k} =$$
$$= \frac{x^{1+\mu}2\sin\nu\pi}{\pi\big[(\mu+1)^2-\nu^2\big]}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ -\frac{x^2}{4}\Big). \quad (35)$$

Таким образом, полученный нами ряд (35) совпадает с рядом, найденным Ломмелем, как частное решение неоднородного уравнения Бесселя

$$x^2u''(x)+xu'(x)+(x^2-\nu^2)u(x) = x^{\mu+1}$$

с помощью обобщенного степенного ряда.

Далее вычислим разности (8) и (12). На основании формул

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\big[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\big],\quad Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin\nu\pi}\big[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)\big]$$

имеем

$$N_\nu^{(2)}(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[I_\nu(x)\int_0^x t^\mu I_{-\nu}(t)\,dt - I_{-\nu}(x)\int_0^x t^\mu I_\nu(t)\,dt\Big] =$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\widetilde{N}_\nu^{(1)}(x) = \frac{x^{1+\mu}}{(1+\mu)^2-\nu^2}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ \frac{x^2}{4}\Big), \quad (36)$$

$$S_\nu^{(2)}(x) = -\frac{1}{\sin\nu\pi}\Big[J_\nu(x)\int_0^x t^\mu J_{-\nu}(t)\,dt - J_{-\nu}(x)\int_0^x t^\mu J_\nu(t)\,dt\Big] =$$
$$= -\frac{1}{\sin\nu\pi}S_\nu^{(1)}(x) =$$
$$= -\frac{2x^{1+\mu}}{\pi\big[(1+\mu)^2-\nu^2\big]}\,{}_1F_2\Big(1;\frac{\mu+3+\nu}{2},\frac{\mu+3-\nu}{2};-\frac{x^2}{4}\Big). \quad (37)$$

Следовательно, установлено утверждение.

Теорема 1. *Справедливы следующие формулы:*

$$I_\nu(x)\int_0^x t^\mu I_{-\nu}(t)\,dt - I_{-\nu}(x)\int_0^x t^\mu I_\nu(t)\,dt =$$

$$= \frac{2x^{1+\mu}\sin\nu\pi}{\pi\big[(1+\mu)^2-\nu^2\big]}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ \frac{x^2}{4}\Big),$$

$$I_\nu(x)\int_0^x t^\mu K_\nu(t)\,dt - K_\nu(x)\int_0^x t^\mu I_\nu(t)\,dt =$$
$$= \frac{x^{1+\mu}}{(1+\mu)^2-\nu^2}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ \frac{x^2}{4}\Big),$$

$$J_\nu(x)\int_0^x t^\mu J_{-\nu}(t)\,dt - J_{-\nu}(x)\int_0^x t^\mu J_\nu(t)\,dt =$$
$$= \frac{2x^{1+\mu}\sin\nu\pi}{\pi\big[(1+\mu)^2-\nu^2\big]}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ -\frac{x^2}{4}\Big),$$

$$J_\nu(x)\int_0^x t^\mu Y_\nu(t)\,dt - Y_\nu(x)\int_0^x t^\mu J_\nu(t)\,dt =$$
$$= -\frac{2x^{1+\mu}}{\pi\big[(1+\mu)^2-\nu^2\big]}\,{}_1F_2\Big(1;\ \frac{\mu+3+\nu}{2},\ \frac{\mu+3-\nu}{2};\ -\frac{x^2}{4}\Big),$$

где $\mu\pm\nu>-1$.

Теперь на основании (33), (35)–(37) с использованием представлений (5), (7), (9) и (11) найдем первоначальные разности (1)–(4):

$$N_\nu^{(1)}(y) = \frac{y^2\sin\nu\pi}{2\nu\pi}\,{}_1F_2\Big(1;\ 1+2\nu,\ 1+\nu;\ \frac{p^2}{4}y^{1/\nu}\Big), \tag{38}$$

$$N_\nu^{(2)}(y) = \frac{y^2}{4\nu}\,{}_1F_2\Big(1;\ 1+2\nu,\ 1+\nu;\ \frac{p^2}{4}y^{1/\nu}\Big), \tag{39}$$

$$S_\nu^{(1)}(y) = -\frac{y^2\sin\nu\pi}{2\nu\pi}\,{}_1F_2\Big(1;\ 1+2\nu,\ 1+\nu;\ -\frac{p^2}{4}(-y)^{1/\nu}\Big), \tag{40}$$

$$S_\nu^{(2)}(y) = -\frac{y^2}{4\nu}\,{}_1F_2\Big(1;\ 1+2\nu,\ 1+\nu;\ -\frac{p^2}{4}(-y)^{1/\nu}\Big), \tag{41}$$

здесь $\nu=1/(2q)$.

2. Асимптотические оценки. Поскольку нам неизвестно асимптотическое разложение для функции ${}_1F_2(a;b,c;\pm z)$ при $z\to\infty$, воспользуемся ее интегральным представлением [16, форм. (28.96)]:

$${}_1F_2(a;b,c;-z) = \frac{2\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\,z^{\frac{1-b}{2}}\int_0^1 J_{b-1}(2t\sqrt{z})\,t^{2a-b}(1-t^2)^{c-a-1}\,dt, \tag{42}$$

а также вытекающей из (42) формулой

$${}_1F_2(a;b,c;z) = \frac{2\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\,z^{\frac{1-b}{2}}\int_0^1 I_{b-1}(2t\sqrt{z})\,t^{2a-b}(1-t^2)^{c-a-1}\,dt.$$

Здесь $a > 0$, $c - a > 0$. На их основе найдем интегральные представления для функций (38)–(41):

$$N_\nu^{(1)}(y)=\frac{2\nu\Gamma(2\nu)\sin\nu\pi}{\pi}y\Big(\frac{2}{p}\Big)^{2\nu}\int_0^1 I_{2\nu}(tpy^{\frac{1}{2\nu}})\,t^{1-2\nu}(1-t^2)^{\nu-1}\,dt,\ \ y>0,\quad (43)$$

$$N_\nu^{(2)}(y)=\nu\Gamma(2\nu)y\Big(\frac{2}{p}\Big)^{2\nu}\int_0^1 I_{2\nu}(tpy^{\frac{1}{2\nu}})\,t^{1-2\nu}(1-t^2)^{\nu-1}\,dt,\qquad y>0,\quad (44)$$

$$S_\nu^{(1)}(y)=\frac{2\nu\Gamma(2\nu)\sin\nu\pi}{\pi}y\Big(\frac{2}{p}\Big)^{2\nu}\int_0^1 J_{2\nu}(tp(-y)^{\frac{1}{2\nu}})t^{1-2\nu}(1-t^2)^{\nu-1}dt,\ \ y<0,\quad (45)$$

$$S_\nu^{(2)}(y)=\nu\Gamma(2\nu)y\Big(\frac{2}{p}\Big)^{2\nu}\int_0^1 J_{2\nu}(tp(-y)^{\frac{1}{2\nu}})\,t^{1-2\nu}(1-t^2)^{\nu-1}\,dt,\quad y<0.\quad (46)$$

В силу формулы асимптотического разложения интеграла, содержащего функцию Бесселя (см. [17, форм. (10.87)], а также [18]), при $b=1$, $h(t)=(1+t)^{\beta-1}$ имеем

$$\int_0^1 J_\mu(zt)\,t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}\,dt=$$
$$=\frac{2^{\alpha-1}z^{-\alpha}}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{2}{z}\Big)^k\sin\frac{\pi}{2}(\alpha-\mu-k)A_k(\beta)\Gamma\Big(\frac{\alpha+k-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha+k+\mu}{2}\Big)+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}z^{-\beta-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}D_k(\alpha,\beta,\mu)\cos\Big[z-\frac{\pi}{2}\Big(\mu+\beta-k+\frac{1}{2}\Big)\Big]z^{-k},\quad z\to+\infty,\quad (47)$$

где

$$D_k(\alpha,\beta,\mu)=\sum_{j=0}^{k}\frac{\Gamma(\beta+k-j)}{(k-j)!}\frac{\Gamma(1/2+\mu+j)}{j!\,\Gamma(1/2+\mu-j)}d_{j,k-j}(\alpha)2^{-j},$$

$$d_{ik}(\alpha)=\frac{d^k}{db^k}\Big[b^{\alpha-j-3/2}(1+b)^{\beta-1}\Big]\Big|_{b=1},$$

$$A_k(\beta)=\frac{d^k}{dt^k}\Big[(b-t)^{\beta-1}(1+b)^{\beta-1}\Big]\Big|_{\substack{b=1\\t=0}}.$$

Из формулы (47) при $z\to+\infty$ найдем оценку интегралов:

$$\int_0^1 J_\mu(zt)t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}dt=\frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\alpha-\mu)\Gamma\Big(\frac{\alpha-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha+\mu}{2}\Big)z^{-\alpha}+$$
$$+\frac{2^{\beta-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\beta)\cos\Big[z-\frac{\pi}{2}\Big(\mu+\beta+\frac{1}{2}\Big)\Big]z^{-\beta-\frac{1}{2}}+O\big(z^{-\min\{\alpha+1,\,\beta+\frac{3}{2}\}}\big),\quad (48)$$

$$\int_0^1 I_\mu(zt)t^{\alpha-1}(1-t^2)^{\beta-1}dt=\frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\alpha-\mu)i^{-\mu-\alpha}\Gamma\Big(\frac{\alpha-\mu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha+\mu}{2}\Big)z^{-\alpha}+$$
$$+\frac{2^{\beta-\frac{3}{2}}\Gamma(\beta)i^{-\mu-\beta-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Big[e^{-z}e^{-\frac{i\pi}{2}(\mu+\beta+\frac{1}{2})}+e^{z}e^{\frac{i\pi}{2}(\mu+\beta+\frac{1}{2})}\Big]z^{-\beta-\frac{1}{2}}+O\big(e^{z}z^{-\beta-\frac{3}{2}}\big)=$$

$$= \frac{2^{\beta-\frac{3}{2}}\Gamma(\beta)}{\sqrt{\pi}} \exp\Big[\frac{i\pi}{2}\Big(\mu+\beta+\frac{1}{2}\Big) - \Big(\mu+\beta+\frac{1}{2}\Big)\ln i\Big] e^z z^{-\beta-\frac{1}{2}} + \\ + O\Big(e^z z^{-\beta-\frac{3}{2}}\Big). \quad (49)$$

Тогда в силу оценок (49) и (48) из (43)–(46) при $p \to +\infty$ получим

$$N_\nu^{(1)}(y) = \frac{2^{3\nu-\frac{1}{2}}\nu\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\sin\nu\pi}{\pi\sqrt{\pi}} \exp\Big[\Big(3\nu+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{i\pi}{2}-\ln i\Big)\Big]\times \\ \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\nu}} p^{-3\nu-\frac{1}{2}} e^{py^{1/(2\nu)}} + O\Big(e^{py^{1/(2\nu)}} y^{-3\nu-\frac{3}{2}}\Big), \quad (50)$$

$$N_\nu^{(2)}(y) = \frac{2^{3\nu-\frac{3}{2}}\nu\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)}{\sqrt{\pi}} \exp\Big[\Big(3\nu+\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{i\pi}{2}-\ln i\Big)\Big]\times \\ \times y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\nu}} p^{-3\nu-\frac{1}{2}} e^{py^{1/(2\nu)}} + O\Big(e^{py^{1/(2\nu)}} y^{-3\nu-\frac{3}{2}}\Big), \quad (51)$$

$$S_\nu^{(1)}(y) = \pi^{-2}\, 2^{2+\nu}\, \nu^2\, \Gamma(2\nu)\Gamma(-2\nu)\sin\nu\pi\, \sin 2\nu\pi\, (-y)^{2-\frac{1}{\nu}} p^{-2} - \\ - \pi^{-\frac{3}{2}}\, 2^{3\nu+\frac{1}{2}}\, \nu\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\sin\nu\pi\, \cos\Big[p(-y)^{\frac{1}{2\nu}} - \frac{\pi}{2}\Big(3\nu+\frac{1}{2}\Big)\Big]\times \\ \times (-y)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\nu}} p^{-3\nu-\frac{1}{2}} + O\Big(p^{-\min\{3,\,3\nu+\frac{3}{2}\}}\Big) = \\ = -\pi^{-frac32}\, 2^{3\nu+\frac{1}{2}}\, \nu\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\sin\nu\pi\, \cos\Big[p(-y)^{\frac{1}{2\nu}} - \frac{\pi}{2}\Big(3\nu+\frac{1}{2}\Big)\Big]\times \\ \times (-y)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\nu}} p^{-3\nu-\frac{1}{2}} + O\Big(p^{-2}\Big), \quad (52)$$

$$S_\nu^{(2)}(y) = \pi^{-1}\, 2^{1+\nu}\, \nu^2\, \Gamma(2\nu)\Gamma(-2\nu)\sin 2\nu\pi\, (-y)^{2-\frac{1}{\nu}} p^{-2} - \\ - \pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{3\nu-\frac{1}{2}}\, \nu\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\cos\Big[p(-y)^{\frac{1}{2\nu}} - \frac{\pi}{2}\Big(3\nu+\frac{1}{2}\Big)\Big]\times \\ \times (-y)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\nu}} p^{-3\nu-\frac{1}{2}} + O\Big(p^{-\min\{3,\,3\nu+\frac{3}{2}\}}\Big) = \\ = -\pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{3\nu-\frac{1}{2}}\, \nu\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\cos\Big[p(-y)^{\frac{1}{2\nu}} - \frac{\pi}{2}\Big(3\nu+\frac{1}{2}\Big)\Big]\times \\ \times (-y)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\nu}} p^{-3\nu-\frac{1}{2}} + O\Big(p^{-2}\Big). \quad (53)$$

Таким образом, нами доказана следующая основная

Теорема 2. *Для разностей* (1)–(4) *при* $p \to +\infty$ *справедливы соответственно асимптотические оценки* (50)–(53).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17–41–020516).

Библиографический список

1. Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х. Начально-граничная задача для вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2008. Т. 44, № 9. С. 1175–1181.
2. Сабитова Ю. К. Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 12. С. 49–58.
3. Бурханова (Хаджи) И. А. Критерий единственности решения обратной задачи уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина / *Дифференц. уравнения и смежные проблемы*: Тр. междун. научн. конф.; в 2-х т. Т. 1. Уфа: БашГУ, 2013. С. 140–144.
4. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2014. Т. 50, № 3. С. 356–365.
5. Сабитова Ю. К. Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии // *Матем. заметки*, 2015. Т. 98, № 3. С. 393–406. `doi: 10.4213/mzm9135`.
6. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 1. С. 46–59.
7. Мартемьянова Н. В. Необходимое и достаточное условие единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения типа Чаплыгина / *Математическое моделирование процессов и систем*: Материалы V Всерос. науч.-практ. конф., приуроченной к 110-летию со дня рождения академика А. Н. Тихонова (17–19 ноября 2016 г., г. Стерлитамак), Ч. III. Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. С. 19–23.
8. Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 2. С. 228–238. `doi: 10.1134/S0374064118020097`.
9. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа / *Дифференциальные уравнения. Математическая физика* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 137. Москва: ВИНИТИ РАН, 2017. С. 26–60.
10. Сидоров С. Н. Обратные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с вырождающейся параболической частью // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2019. Т. 16. С. 144–157. `doi: 10.33048/semi.2019.16.007`.
11. Von Lommel E. Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function // *Math. Ann.*, 1875. vol. 9, no. 3. pp. 425–444. `doi: 10.1007/bf01443342`.
12. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1944. vi+804 pp.
13. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions.* vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co.. xvii+396 pp.
14. Сабитов К. Б. Вычисление определенных интегралов от произведения бесселевых функций // *Вестн. МГУ, Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 1992. № 1. С. 24–29.
15. Сабитов К. Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. II // *Диффер. уравн.*, 1992. Т. 28, № 7. С. 1138–1145.
16. Риекстыньш Э. Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 3. Рига: Зинатне, 1981. 370 с.
17. Риекстыньш Э. Я. *Асимптотические разложения интегралов.* Т. 1. Рига: Зинатне, 1974. 392 с.
18. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции // *Докл. АН СССР*, 1959. Т. 125, № 5. С. 982–985.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 41–55
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** `https://doi.org/10.14498/vsgtu1685`

MSC: 33C20

Asymptotic estimates of the difference of products of Bessel functions by the integral of these functions

K. B. Sabitov

[1] Sterlitamak branch of the Bashkir State University,
Faculty of Mathematics and Information Technology,
37, Lenina prospekt, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.
[2] Institute of Strategic Studies of Bashkortostan Republic, Sterlitamak Branch,
68, Odesskaya str., Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

Abstract

In the study of direct and inverse problems of finding the right-hand side of degenerate equations of mixed type with different boundary conditions, the problem arises of establishing asymptotic estimates for the differences of the products of cylindrical functions by the integral of these functions. Previously, on the basis of the established new formula for finding the finite binomial sum, the differences between the products of cylindrical functions and a definite integral of these functions are calculated through a generalized hypergeometric function. Using the asymptotic formula for large values of the argument for the generalized hypergeometric function, asymptotic estimates are established for large values of the parameter for the indicated differences of the Bessel functions of the first and second kind, as well as for modified Bessel functions.

Keywords: Bessel functions, modified Bessel functions, integrals of Bessel functions, finite binomial sum, generalized hypergeometric function, asymptotic estimates.

Received: 3rd April, 2019 / Revised: 16th August, 2019 /
Accepted: 16th September, 2019 / First online: 21st November, 2019

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17–41–020516).

Research Article

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B. Asymptotic estimates of the difference of products of Bessel functions by the integral of these functions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 41–55. doi: `10.14498/vsgtu1685` (In Russian).

Author's Details:
Kamil B. Sabitov `https://orcid.org/0000-0001-9516-2704`
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Mathematical Analysis Dept.[1]; Head of Applied Mathematics and Informatics Lab.[2]; e-mail: `sabitov_fmf@mail.ru`

References

1. Sabitov K. B., Rakhmanova L. Kh. Initial-boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain, *Differ. Equ.*, 2008, vol. 44, no. 9, pp. 1218–1224. doi: 10.1134/S0012266108090036.
2. Sabitova Yu. K. Nonlocal initial-boundary-value problems for a degenerate hyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 12, pp. 41–49. doi: 10.3103/S1066369X09120068.
3. Burkhanova (Khadzhi) I. A. An uniqueness criterion for solving of the inverse problem of mixed-type equation with Chaplygin type operator, In: *Differents. uravneniia i smezhnye problemy* [Differential Equations and Related Problems], vol. 1. Ufa, Bashkir State Univ., 2013, pp. 140–144 (In Russian).
4. Sabitov K. B., Sidorov S. N. On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 352–361. doi: 10.1134/S0012266114030094.
5. Sabitova Yu. K. Boundary-value problem with nonlocal integral condition for mixed-type equations with degeneracy on the transition line, *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 454–465. doi: 10.1134/S0001434615090114.
6. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 39–50. doi: 10.3103/S1066369X15010041.
7. Martem'yanova N. V. A necessary and sufficient condition for the uniqueness of a solution of nonlocal inverse problem for Chaplygin-type equation, In: *Matematicheskoe modelirovanie protsessov i sistem* [Mathematical modeling of processes and systems] (November 17–19, 2016, Sterlitamak), Part. III. Sterlitamak, Sterlitamak branch of Bashkir State Univ., 2016, pp. 19–23 (In Russian).
8. Sabitova Y. K. The Dirichlet problem for a hyperbolic-type equation with power degeneracy in a rectangular domain, *Differ. Equ.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 228–238. doi: 10.1134/S001226611802009X.
9. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, vol. 236, no. 6, pp. 603–640. doi: 10.1007/s10958-018-4136-y.
10. Sidorov S. N. Inverse problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part, *Sib. Elektron. Math. Reports*, 2019, vol. 16, pp. 144–157 (In Russian). doi: 10.33048/semi.2019.16.007.
11. Von Lommel E. Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function, *Math. Ann.*, 1875, vol. 9, no. 3, pp. 425–444. doi: 10.1007/bf01443342.
12. Watson G. N. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1944, vi+804 pp.
13. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., xvii+396 pp.
14. Sabitov K. B. Calculating definite integrals of products of Bessel functions, *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.*, 1992, vol. 47, pp. 26–32.
15. Sabitov K. B. Construction in explicit form of solutions of the Darboux problems for the telegraph equation and their application in the inversion of integral equations. II, *Differ. Equ.*, 1992, vol. 28, no. 7, pp. 901–908.
16. Riekstiņš E. J. *Asimptoticheskie razlozheniia integralov* [Asymptotic Expansions of Integrals], vol. 3. Riga, Zinatne, 1981, 370 pp. (In Russian)
17. Riekstiņš E. J. *Asimptoticheskie razlozheniia integralov* [Asymptotic Expansions of Integrals], vol. 1. Riga, Zinatne, 1974, 392 pp. (In Russian)
18. Tikhonov A. N. The asymptotic behaviour of integrals containing Bessel functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, vol. 125, no. 5, pp. 982–985 (In Russian).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 56–73
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1711

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение

В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, О. С. Новикова

Липецкий государственный технический университет,
Россия, 398055, Липецк, ул. Московская, 30.

Аннотация

Изучена возможность построения полнопараметрического аналитического решения задачи о напряженно–деформированном состоянии тела, вызванном воздействием объемных сил. В общем случае Чезаро перемещения в каждой точке тела определяются через объемные силы интегральным выражением с сингулярным ядром. Поэтому при произвольной форме тела его упругое состояние можно построить только численно. Строгое аналитическое решение выписывается в классическом варианте, соответствующем силам потенциального характера. Эти силы являются традиционными объектами механики, но их перечень весьма ограничен.

Современный уровень развития науки и техники в мире требует применения сил произвольного характера, которые могут порождаться как на уровне молекулярного взаимодействия, так и взаимодействием электромагнитных полей внутри тела. Они заведомо консервативными не являются. Кроме этого, применение методов возмущений при решении нелинейных задач эластостатики и задач термоупругости создает на

Научная статья

Образец для цитирования
Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новикова О. С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 56–73. doi: 10.14498/vsgtu1711.

Сведения об авторах

Виктор Борисович Пеньков https://orcid.org/0000-0002-6059-1856
доктор физико-математических наук; профессор; каф. общей механики;
e-mail: vbpenkov@mail.ru

Любовь Владимировна Левина https://orcid.org/0000-0002-7441-835X
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Ольга Сергеевна Новикова ✉ https://orcid.org/0000-0003-2577-4515
аспирант; каф. общей механики; e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru

каждой итерации асимптотического приближения искусственно порожденные объемные силы полиномиального характера либо силы, достаточно точно аппроксимируемые многочленами.

Возможность выписывания строгих или высокоточных частных решений в ходе выполнения итерации оказывает неоценимую услугу расчетчику. Для весьма широкого круга сил, приближаемых полиномами от пространственных координат или, еще у́же, для полиномиальных сил сформирован новый метод построения строгого решения задачи о соответствующем упругом состоянии тела, опирающийся на изоморфизм гильбертовых пространств сил такого рода и им соответствующих упругих состояний (наборов перемещений, деформаций, напряжений).

Доказана теорема о существовании изоморфных счетных базисов этих пространств, построены алгоритмы их наполнения. Частное решение задачи об упругом поле от полиномиальных сил строится разложением заданной нагрузки по ортонормированному базису и выписывается достаточно просто в конечном виде, причем в аналитической форме. Поправка от частного решения вносится в граничные условия однородной задачи упругости для тела, после чего строится решение. Его аналитический характер могут обеспечить вычислительные подходы, ориентирующиеся на компьютерные алгебры.

Удобным вариантом такого подхода является метод граничных состояний (МГС), имеющий ряд преимуществ перед широко используемыми численными (конечных элементов, граничных элементов, конечных разностей и др.), и один существенный недостаток: вычислительный комплекс МГС не получил конечного завершения. Коротко изложены достоинства МГС и дано его лаконичное описание.

Использование подхода МГС принципиально позволяет выписывать полнопараметрическую форму решений для тел произвольной геометрической формы. МГС применен для построения решения задачи о линейно-упругом сплюснутом сфероиде, нагруженном самоуравновешенной системой объемных сил. Решение строилось для двух вариантов нагружения, а именно потенциальными либо непотенциальными силами. Аналитический вариант решения приведен только для поля перемещений (остальные характеристики упругого состояния легко выписываются через определяющие соотношения). Определенный интерес представляет графическая иллюстрация полей напряжений, выполненная при фиксированных значениях параметров.

Ключевые слова: объемные силы, массовые силы, непотенциальные силы, неконсервативные силы, энергетические методы, метод Треффца, метод граничных состояний, пространство объемных сил, базис пространства сил, полнота базиса, аналитические решения, полнопараметрические решения, сфероид, сплюснутый сфероид.

Получение: 12 июня 2019 г. / Исправление: 19 ноября 2019 г. / Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 19 марта 2020 г.

Постановка и анализ проблемы исследования. Традиционные объемные силы, встречающиеся в исследованиях классической механики деформируемого твердого тела (МДТТ; силы инерции, тяжести, гравитационного взаимодействия и др.), имеют механическую природу и, как правило, являются потенциальными. В этом нетрудно убедиться, листая известные руководства по механике [1–6].

При реализации различных эффективных методов анализа НДС эластостатических тел учет влияния объемных сил остается на втором плане, поскольку ему соответствует частное решение неоднородных разрешающих систем уравнений. В общем случае объемных сил произвольного характера известно интегральное представление поля перемещений, определяемое в сингулярно-интегральной форме Чезаро:

$$u_i(\boldsymbol{r}_Q) = \int_V U_{ij}(\boldsymbol{r}_M, \boldsymbol{r}_Q) X_j(\boldsymbol{r}_M)\, dV, \tag{1}$$

$$U_{ij}(\boldsymbol{r}_M, \boldsymbol{r}_Q) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2}\right], \quad r^2 = x_k x_k,$$

где $X_j(\boldsymbol{r}_M)$ — компонента вектора объемных сил в точке воздействия M; Q — точка наблюдения; $\boldsymbol{r}_M$, $\boldsymbol{r}_Q$ — радиус-векторы точек M и Q; μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера.

Ядром этого интеграла служит тензор влияния Кельвина—Сомильяна с компонентами $U_{ij}(M, Q)$ [3]. Представление (1) эффективно используется при применении сугубо численных методов (метод конечных элементов, метод граничных элементов, конечно-разностных и др.), но не является удобной формой при аналитическом анализе, поскольку требует выполнения промежуточных шагов по проведению аппроксимации.

Вычислительные методы продолжают совершенствоваться [7–14] и возникает необходимость в построении иных подходов, поддерживающих или обеспечивающих решение в полнопараметрической аналитической форме (ППР) [15–17].

В случае потенциальных сил построен эффективный аппарат выписывания частного решения уравнения Ламе [2, 3], основывающийся на общем решении П. Ф. Папковича и Г. И. Нейбера [18]

$$u_i = \varphi_i - \frac{1}{4(1-\nu)}(\varphi_k x_k + \varphi_0)_{,i} + u_i^*, \quad i = 0, 1, 2, 3, \tag{2}$$

где φ_i — гармонические функции; x_k — декартовы координаты в области V; u_i^* — любое частное решение, отвечающее действию объемных сил. Практически вместо общего решения Папковича—Нейбера (2) более эффективно использовать общие решения И. С. Аржаных и М. Г. Слободянского для внутренности ограниченной области:

$$u_i = 4(1-\nu)\varphi_i + x_j \varphi_{i,j} - x_i \varphi_{j,j} + \chi_{,i} \tag{3}$$

или для внешности ограниченной полости:

$$u_i = 4(1-\nu)\varphi_i - (x_j \varphi_j)_{,i} + \chi_{,i}, \tag{4}$$

где χ — решение уравнения Пуассона

$$\chi_{,ii} = \frac{1-2\nu}{2\mu(1-\nu)}\Pi, \tag{5}$$

П — потенциал объемных сил. Композицией состояний (3), (4) можно обеспечить представление упругого поля для произвольного ограниченного или неограниченного многополостного тела.

В настоящее время постановка задач с консервативными объемными силами по-прежнему является актуальной и этому уделяется достаточно много внимания. Информация о НДС от объемных сил позволяет восстановить соответствующее механическое состояние на границе тела с последующей корректировкой ГУ при декомпозиции решения [19]. При канонических формах геометрии тела удается выписать аналитическое решение задачи [20], например, изучать влияние гравитационных сил в среде с незагруженной сферической полостью [21]. Для учета потенциальных сил в математических задачах теории упругости вводится третий комплексный потенциал [22]. Эта же идеология распространена на анизотропные среды [23–25], а также на предмет учета действующих или возникающих сингулярных эффектов в теле [26].

Наряду с физическими свойствами механического характера исследуемая среда может обладать иными: электромеханическими, электромагнитными. Например, направленный поток электрических зарядов, организованный в теле среды, создает во внешнем магнитном поле объемную силу Лоренца. Эта сила может быть организована по произвольному закону в области, занятой телом, и потенциальной считаться не может. Развитие исследований на нано-уровне строения вещества позволило обнаружить новую причину зарождения объемных сил, связанную с потерей межатомных связей при достижении критического состояния в окрестности некоторой точки твердого тела [27]. Важным моментом разработки нового метода является также то, что в случае решения задач механики среды итерационными методами в определяющих итерацию соотношениях порождаются массовые силы фиктивного характера [28]. Декомпозиция задачи требует отслеживания соответствующего напряженно-деформированного состояния. Таким образом, разработка быстрого эффективного метода анализа эластостатического поля внутри тела является задачей актуальной и на современном уровне развития науки и техники необходимой. В случае потенциальных сил им соответствующее упругое поле восстанавливается достаточно просто. В случае неконсервативных сил справедливо интегральное представление общего решения (1), но традиционно его использование «завязано» на численные процедуры, игнорирующее компьютерные алгебры.

Целью работы является теоретическое и алгоритмическое обеспечение возможности быстрого эффективного построения эластостатических полей от широкого класса объемных сил, допускающих полиномиальную аппроксимацию. Достижению цели сопутствует рассмотрение круга задач фундаментального и прикладного характера: 1) обоснование существование базиса пространств состояний для полиномиальных объемных сил; 2) разработка алгоритма назначения базиса гильбертова пространства состояний; 3) тестирование; 4) решение расчетной задачи для тела нетривиальной геометрии; 5) возможность построения полнопараметрического решения (ППР), содержащего все параметры геометрии и нагружения тела.

1. Теорема о полноте базиса полиномиальных объемных сил. Эластостатическое состояние среды, обусловленное объемными силами, должно отвечать всем требованиям, предписанным определяющим соотношениям.

Предполагая поле перемещений в области V ограниченного тела приближаемым системой многочленов от трех переменных, описываемых мономами $w = x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, \dots\}$, вектору перемещений

$$\{u_i\} \in \{\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{u}^{\mathrm{III}}\}, \quad \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \{w, 0, 0\},\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{II}} = \{0, w, 0\},\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{III}} = \{0, 0, w\}$$

можно поставить в соответствие тензоры деформаций $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}]$ и напряжений $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{ij}]$ в соответствии с формулой Коши

$$\varepsilon_{ij} = 0.5\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{6}$$

и обобщенным законом Гука в форме Ламе

$$\sigma_{ij} = \lambda\vartheta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \vartheta = \varepsilon_{kk}, \tag{7}$$

где λ, μ — объемный параметр Ламе и модуль сдвига; ϑ — объемная деформация. Уравнение равновесия замыкает систему определяющих соотношений, устанавливая значения объемных сил

$$X_i = -\sigma_{ij,j}, \tag{8}$$

обеспечивающих удовлетворение всех необходимых условий.

Таким образом, вектору

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{I}} = -w\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\alpha(\alpha-1)x^{-2} + \mu\beta(\beta-1)y^{-2} + \mu\gamma(\gamma-1)z^{-2} \\ (\lambda+\mu)\alpha\beta x^{-1}y^{-1} \\ (\lambda+\mu)\alpha\gamma x^{-1}z^{-1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

однозначно соответствует внутреннее состояние тела $\xi^{\mathrm{I}} = \{\boldsymbol{u}^{\mathrm{I}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{I}}\}$, где

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{I}} = \frac{w}{2}\begin{pmatrix} 2\alpha x^{-1} & \beta y^{-1} & \gamma z^{-1} \\ \beta y^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{I}} = w\begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\alpha x^{-1} & \mu\beta y^{-1} & \mu\gamma z^{-1} \\ \mu\beta y^{-1} & \lambda\alpha x^{-1} & 0 \\ \mu\gamma z^{-1} & 0 & \lambda\alpha x^{-1} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно, что круговая подстановка индексов с соответствующим перемещением монома w по позициям вектора $\boldsymbol{u}$ порождает еще два варианта состояний. Очевидно также, что все компоненты внутреннего состояния от объемных сил (8) в соответствии с цепочкой операций (6)–(8) имеют полиномиальное представление. Возникают следующие вопросы:

1) является ли полным множество векторов генерируемых таким способом объемных сил $X^{(\alpha\beta\gamma)}$?
2) содержит ли оно сепарабельный базис соответствующего пространства?

На эти вопросы удовлетворительно отвечает следующая

Теорема (о содержании базиса). *Множество векторов полиномиальных объемных сил, порожденное базисом пространства векторов полиномиальных упругих перемещений, содержит счетный базис Ψ_0 пространства Ψ объемных сил полиномиального характера.*

Конструктивное *доказательство* является одновременно рациональным алгоритмом формирования базиса.

Базисом равномерно-непрерывных функций от трех переменных x, y, z является счетное множество мономов $x^a y^b z^c$, где a, b, c — целые неотрицательные числа. Упорядоченное множество мономов удобно интерпретировать в форме трехгранной пирамиды мономов (каждому моному соответствует узел) с вершиной 1, ребрами — степенями переменных x, y, z, гранями — попарными произведениями их степеней. Мономы фиксированного порядка $a + b + c = k$ расположены в k-том слое, занимая совокупность узлов треугольника (рис. 1).

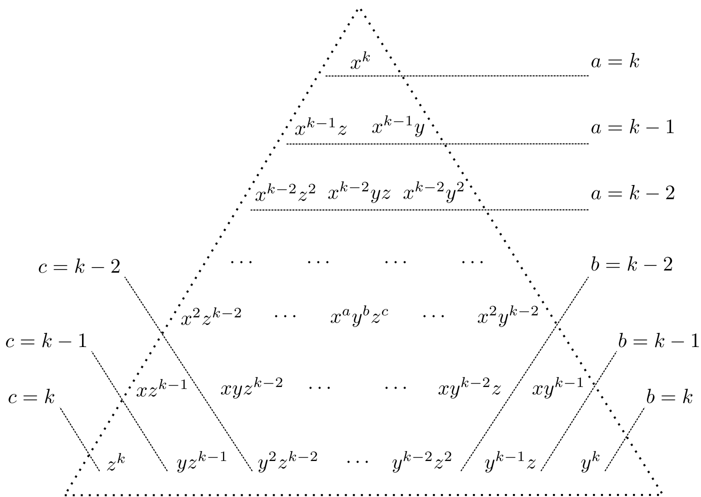


Рис. 1. k-тый слой пирамиды мономов
[Figure 1. The k-th layer of the monomial pyramids]

Формирование системы базисных элементов, генерируемых выражением (9) или его интерпретацией в форме линейной комбинации

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{I}\langle k\rangle} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_4, \boldsymbol{f}_5), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} x^{\alpha-2}y^{\beta}z^{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} x^{\alpha}y^{\beta-2}z^{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^{\alpha-1}y^{\beta}z^{\gamma-1} \end{pmatrix}$$

с известными коэффициентами удается проводить в последовательности, гарантирующей полноту и линейную независимость наполняемого базиса Ψ_0 пространства. Каждому элементу пирамиды мономов соответствуют три элемента базиса Ψ_0 в соответствии с занимаемыми позициями в векторах. Ψ_0 есть объединение счетного числа базисов $\Psi^{\langle k\rangle}$ конечномерных пространств (размерность $1.5(k+1)(k+2)$), порождаемых слоями $k = 0, 1, 2, \ldots$; линейная зависимость элементов множества Ψ_0 может наблюдаться только внутри слоя.

Обеспечивающий алгоритм опирается на следующие положения.

1. Перебор осуществляется по слоям $k = 0, 1, 2, \ldots$, соответствующим порядкам мономов. При $k = 0$ изначально пустой базис пополняется тремя векторами, отвечающими вершине пирамиды:

$$\Psi_0^{\langle 0\rangle} = \{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\}\}.$$

2. При произвольном k просмотр слоя осуществляется в последовательности, схематично обозначенной на рис. 2 ломаной спиралью.

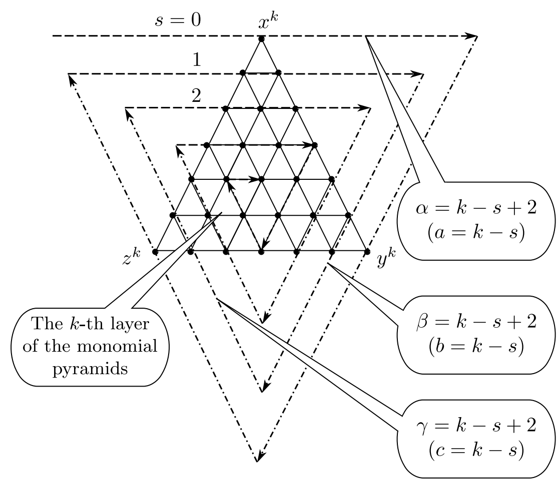


Рис. 2. Схема направленного перебора, обеспечивающего формирование базиса пространства объемных сил

[Figure 2. Diagram of directional enumeration ensuring the formation of the basis of the space forces volume]

Каждая ветвь спирали $s = 0, 1, 2, \ldots$ состоит из трех отрезков вариантов перебора показателей монома: 1) $\alpha = k - s + 2$, $(a = \alpha - 2,\ b = \beta,\ c = \gamma)$; 2) $\beta = k-s+2$, $(a = \alpha,\ b = \beta-2,\ c = \gamma)$; 3) $\gamma = k-s+2$, $(a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma-2)$. Через $\boldsymbol{X}^{\mathrm{I}\langle s\rangle}$ обозначен набор линейно-независимых векторов, получаемых по (11) на ветви s и заполненных только в первой позиции. Всегда по завершении каждой ветви круговая подстановка индексов (переменных x, y, z) с соответствующим изменением позиций в векторе $\boldsymbol{X}^{\mathrm{I}}$ пополняет базисный отрезок $\Psi_0^{\langle s\rangle}$ слоя. При $s = 0$ в соответствии с обозначенными отрезками ветви и «отключающими» коэффициентами в (9) последовательно происходит пополнение множества $\boldsymbol{X}^{\mathrm{I}\langle s\rangle}$ элементами $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$. В ветви $s = 1$ спирали участвуют такие же по структуре элементы, но в линейной комбинации с $\boldsymbol{f}_4$,

$\boldsymbol{f}_5$, уже построенными ранее круговой подстановкой для предыдущей ветви. Это позволяет представить соответствующие элементы $\boldsymbol{X}^{I\langle s\rangle}$ (как и им соответствующие по организации (9), (10) элементы пространства внутренних состояний) в виде, содержащем в позиции 1 вектора «чистые» мономы. Во всех последующих ветвях вплоть до исчерпывания возможностей перебора в слое ситуация такая же: кроме единственного нового элемента в формировании участвуют только уже созданные на предыдущих ветвях, чем обеспечивается линейная независимость. Полнота обеспечивается направленным перебором всех вариантов конечного множества мономов слоя k.

Конструктивизм доказательства теоремы содержит алгоритм, позволяющий эффективно наполнять базис Ψ_0 пространства Ψ. Однако его предназначение служит, в первую очередь, доказательству существования базиса, что и достигнуто: каждой вершине кластерного слоя (рис. 1) соответствует тройка линейно-независимых элементов пространства Ψ.

2. Сортировочный алгоритм. Для формирования базиса пространства X более удобным является иной алгоритм. Его суть коротко можно охарактеризовать следующими положениями.

1. Вершины пирамиды мономов $x^a y^b z^c$ перебираем по слоям. Каждому слою соответствует кластер $k = a + b + c$, отвечающий за порядок монома. Кластер 0 (вершина пирамиды) порождает три элемента базиса H, $\eta = \{\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{X}\} \in H$, построенного в соответствии с определяющими выражениями (6)–(8):

$$\eta^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -z/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -z/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu z \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\eta^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -x/2 & 0 \\ -x/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mu x & 0 \\ -\mu x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$\eta^{(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y^2/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y/2 \\ 0 & -y/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu y \\ 0 & -\mu y & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right\}.$$

   Далее слои пирамиды перебираются в порядке возрастания кластеров.
2. Перебор вершин мономов в кластере с номером k можно осуществлять в произвольном порядке. Каждой вершине (моному $x^a y^b z^c$) соответствует точка с условными координатами в плоскости слоя. Например, можно осуществить перебор в последовательности $a = 0 \ldots k$; $b = 0 \ldots k - a$; $c = k - a - b$ и помещать узлы слоя k в вершины, регулярно заполняющие правильный треугольник $O(0, 0)$, $A(k/2, \sqrt{3}k/2)$, $B(k, 0)$. Назначенная вершина для монома $x^a y^b z^c$ получает координаты точки $M(b + a/2, \sqrt{3}a/2)$ и ее положение от центра $C(k/2, k/\sqrt{3})$ слоя характеризуется вектором $\boldsymbol{CM} = \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_C$, определенным через радиус-векторы начала и конца. Векторы $\boldsymbol{OC}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{BC}$ также определяются легко.

Сортировка состоит в том, чтобы по проекциям вектора $\boldsymbol{CM}$ на эти направления определить его «склонность» к одной из вершин O, A, B и по этому признаку осуществлять назначение степеней монома, участвующих в формулах (6)–(8). А именно, если максимальное положительное значение проекции **CM** для каждого из трех направлений $\boldsymbol{OC}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{BC}$ соответствует какой-либо вершине O, A, B, то для использования выражений достаточно положить

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\begin{cases}\{a+2,b,c\}\,, & «A»,\\ \{a,b+2,c\}\,, & «B»,\\ \{a,b,c+2\}\,, & «O».\end{cases}$$

При равной «склонности» к двум вершинам выбор единственен, но безразличен. После назначения очередного базисного элемента два дополнительных осуществляются способом круговой подстановки.

3. Основные положения метода граничных состояний (МГС). МГС является одним из поздних энергетических методов математической физики. Он имеет общие черты с прямыми методами и специфические отличия от них. Классические методы (Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов, Канторовича) и их модификации (Треффца в числе прочих) оперируют элементами гильбертовых пространств, функций (векторов-функций), через которые в конечном итоге выражаются характеристики состояний исследуемой среды. Методы Ритца, Бубнова—Галеркина, наименьших квадратов используют при построении решения отрезки базисов пространства решений, позволяющие приводить задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье разложения решения по базису. Метод Канторовича осуществляет «градиентный спуск» по поверхности квадратичного функционала, подлежащего оптимизации в функциональном гильбертовом пространстве, и сводится к итерационному процессу. Вообще базисные элементы назначаются достаточно произвольно, но из некоторых классов функций, которые должны гарантировать построение приближенного решения. Подход Треффца, назначающий элементы из классов функций, которые удовлетворяют разрешающим уравнениям для среды, обеспечивает построение решения линейных задач при условии построения счетного базиса пространства решений, но иных особенностей, выделяющих новизну метода, не имеет.

МГС изначально оперирует объектами, имеющими отношение к двум изоморфным гильбертовым пространствам внутренних и граничных состояний объекта, занимающего некоторую область $V\subset\mathbb{R}^3$ и имеющего границу ∂V с нормалью $\{n_j\}$. Внутреннее состояние определяется набором $\xi=\{u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij}\}$. Граничное состояние есть $\gamma=\{u_i\big|_{\partial V},p_i\}$, где $u_i\big|_{\partial V}$ — перемещения на границе тела, p_i — поверхностные усилия на границе тела: $p_i=\sigma_{ij}\big|_{\partial V}n_j$. Множество внутренних (граничных) состояний образует пространство внутренних Ξ (граничных Γ) состояний. Гильбертовы пространства Ξ, Γ изоморфны:

$$\xi^{(1)}+\xi^{(2)}\leftrightarrow\gamma^{(1)}+\gamma^{(2)},\quad \alpha\xi\leftrightarrow\alpha\gamma,\quad \alpha\in\mathbb{R}^1,$$
$$(\gamma^{(1)},\gamma^{(2)})_\Gamma=(\xi^{(1)},\xi^{(2)})_\Xi.$$

Гильбертов изоморфизм позволяет восстанавливать НДС по граничному состоянию, так как базис пространства Ξ будет однозначно соответствовать базису пространства Г.

Наиболее трудоемкий процесс в МГС — построение ортонормированных базисов внутренних и граничных состояний, другими словами, построение «тела» в смысле МГС. Исходный базис внутренних состояний для односвязной конечной области набирается в соответствии с общим решением Аржаных—Слободянского (3), соотношением Коши, обобщенным законом Гука. Благодаря гильбертову изоморфизму восстанавливаются базисы перемещений на границе и усилий на границе. Ортогонализацию базисов выгоднее проводить через пространство граничных состояний Г.

При постановке исходной задачи с объемными силами требуется создать базис пространства объемных сил. Он может быть определен алгоритмами для потенциальных сил через частное решение уравнения Пуассона (5) или более общим алгоритмом для неконсервативных объемных сил. При этом необходимо корректировать граничные условия с учетом установленной поправки от сил. Например, в первой основной задаче на границе заданы усилия p_i. Скорректированные граничные условия рассчитываются следующим образом:

$$p_i^{\circ}\big|_{\partial V} = p_i\big|_{\partial V} - p_i^{*}\big|_{\partial V}, \quad p_i^{*}\big|_{\partial V} = \sigma_{ij}^{*}\big|_{\partial V} n_j, \quad \sigma_{ij}^{*} = \lambda_0 \vartheta^{*} \delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}^{*},$$

$$\vartheta^{*} = \varepsilon_{kk}^{*}, \quad \varepsilon_{ij}^{*} = 0.5(u_{i,j}^{*} + u_{j,i}^{*}).$$

Далее рассчитываются коэффициенты Фурье через квадратуры

$$c_k = \int_{\partial V} p_i^{\circ} u_i^{(k)} dS.$$

Внутреннее состояние без учета объемных сил является линейной комбинацией элементов базиса:

$$u_i^{\circ} = \sum_k c_k u_i^{(k)}, \quad \sigma_{ij}^{\circ} = \sum_k c_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij}^{\circ} = \sum_k c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}.$$

Результирующее внутреннее состояние получаем суммирование полей, помеченных символами «$*$» и «$\circ$».

4. Равновесие сплюснутого сфероида под действием объемных сил. Однородный изотропно-упругий сплюснутый сфероид (габаритные отношения $b \ll a$) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ со свободной границей $\partial V = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, |z| = b\sqrt{1 - r^2/a^2}, \varphi \in [-\pi,\pi], r \in [0,a]\right\}$ находится в равновесии под действием самоуравновешенных объемных сил X. Рассматриваются два варианта сил: a) потенциальные; b) непотенциальные. Требуется оценить НДС тела.

При обезразмеривании принято: параметр геометрии равен b, параметр напряжения — μ; при проведении расчетов удержано $b : a = 1 : 10$; коэффициент Пуассона $\nu = 1/4$. В варианте a безразмерные объемные силы подчинены закону $\boldsymbol{X} = X_0\{x, y, 0\}$, в «непотенциальном» варианте b — закону $\boldsymbol{X} = X_0\{3xz^2, 3yz^2, 4z^3\}$. В расчетах положено значение безразмерного масштабирующего множителя $X_0 = 1$, поэтому реальное поле отличается от расчетного варианта соответствующим образом.

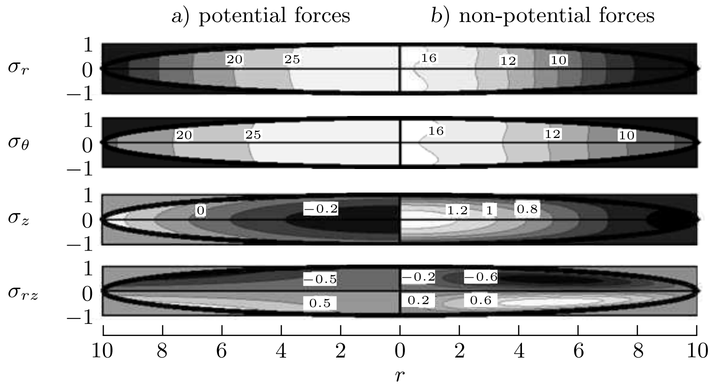


Рис. 3. Напряжения в осевом сечении сфероида в задачах a и b
[Figure 3. Stresses in the axial section of the spheroid in the problems a and b]

На рис. 3 нулевому уровню напряжений соответствует цветовой фон за пределами области. В силу растягивающего характера объемных сил радиальные σ_r и окружные σ_θ напряжения имеют существенные положительные значения в окрестности оси симметрии и довольно медленно снижаются до нуля по мере приближения к границе тела. Осевые усилия объемных сил в случае a заданы нулевыми, поэтому вертикальные волокна вблизи оси симметрии получают сжатие, а в приближении к ободу, напротив, растяжение. В варианте b осевые объемные силы X_z неоднородные, вызывают растяжение осевых волокон, которое компенсируется до нуля по мере приближения к ободу за счет влияния напряжений σ_r, σ_θ. В варианте a изменение формы тела заметно в приповерхностных слоях (см. рисунок для σ_{rz}). В варианте b, напротив, форма искажена в кольцевых симметричных слоях внутри сфероида.

5. Полнопараметрическое решение. Применение численно-аналитического МГС, опирающегося на компьютерные алгебры, привело к новому этапу в практике представления расчетных результатов. До появления вычислительной техники задачи математической физики решались исключительно в аналитическом виде, хотя и для областей простейшей геометрической формы и при малом количестве параметров, описывающих свойства среды и характер граничных условий. Широкое внедрение вычислительной техники привело к построению мощных средств анализа состояний сред, базирующихся на численных подходах (методы конечных элементов, граничных элементов, конечно-разностные и пр.). Современные вычислительные системы, оперирующие «компьютерными алгебрами», позволяют получить решения изначально в численно-аналитической форме, но также для широкого круга задач (в первую очередь линейных) дают возможность выписывать их в форме, содержащей все параметры задачи (параметры, обусловленные масштабированием в соответствии с П-теоремой [29], упругие параметры [30], параметры ГУ (метод эталонных решений [16, 31]), параметры геометрии [32]. Несколько в стороне оказались параметры, характеризующие разнообразие объемных сил, поэтому данному вопросу ниже уделено определенное внимание.

Пусть объемные силы заданы с точностью до конечного набора параметров $\mathrm{X}_0^{(i)}$, $i \in I$, где I — конечное множество параметров. Тогда

$$\boldsymbol{X} = \sum_i \mathrm{X}_0^{(i)} \boldsymbol{X}_i.$$

Полагая далее эти параметры безразмерными после применения П-теоремы, строго построим поочередно внутренние состояния для векторов-эталонов $\boldsymbol{X}_i$: $\xi^{(i)} = \{\boldsymbol{u}^{(i)}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{(i)}\}$ на основе разработанного выше алгоритма. Понятно, что результирующие состояния в силу линейности соотношений есть

$$\xi = \sum_i \mathrm{X}_0^{(i)} \xi^{(i)}.$$

Таким образом, задача включения параметров объемных сил в полнопараметрическое представление решается эффективно.

В рассматриваемом выше примере для эллипсоида ППР имеет форму (выписаны явные решения для компонент вектора перемещений) в задаче a:

$$\begin{aligned}
u_x &\approx X_0 x \left(8.734 - 0.034(x^2+y^2)/R^2 - 0.189z^2/R^2 \right)/\mu, \\
u_y &\approx X_0 y \left(8.734 - 0.034(x^2+y^2)/R^2 - 0.189z^2/R^2 \right)/\mu, \\
u_z &\approx X_0 z \left(-5.918 + 0.047(x^2+y^2)/R^2 + 0.074z^2/R^2 \right)/\mu;
\end{aligned}$$

в задаче b:

$$\begin{aligned}
u_x \approx X_0 x \big(&4.691 - 0.037(x^2+y^2)/R^2 + 0.369z^2/R^2 - \\
&- 0.004(x^2+y^2)z^2/R^4 - 0.246z^4/R^4 \big)/\mu, \\
u_y \approx X_0 y \big(&4.691 - 0.037(x^2+y^2)/R^2 + 0.369z^2/R^2 - \\
&- 0.004(x^2+y^2)z^2/R^4 - 0.246z^4/R^4 \big)/\mu, \\
u_z \approx X_0 z \big(&-2.688 + 0.039(x^2+y^2)/R^2 - 0.173z^2/R^2 + \\
&+ 0.003(x^2+y^2)z^2/R^4 - 0.001z^4/R^4 \big)/\mu.
\end{aligned}$$

Явные выражения для вектора перемещений позволяют сформулировать все внутренние состояния в такой же форме и, при желании, записать соответствующее граничное состояние.

Выводы.

1. Сформулирована и строго доказана теорема о существовании базиса сепарабельного пространства полиномиальных объемных сил.
2. Предложены конкретные алгоритмы наполнения счетного базиса пространства полиномиальных объемных сил.
3. Средствами МГС выполнено решение задачи о сплюснутом сфероиде в двух конкретных случаях относительно характера объемных сил: a) потенциальные, b) непотенциальные.
4. Обеспечено выполнение аналитического решения задачи о НДС тела, находящегося под действием суперпозиции полиномиальных сил, и выписано конкретное решение для сплюснутого сфероида.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научных проектов 19–41–480003 р_а, 19–48–480009 р_а.

Библиографический список

1. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1: General concepts* / Pure and Applied Mathematics. vol. 71. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977. xxiii+280 pp.
2. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела.* М.: Наука, 1988. 712 с.
3. Лурье А. И. *Теория упругости.* М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity.* New York: Dover Publications, 1992. xvi+457 pp.
6. Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists.* Amsterdam: Elsiver/Academic Press, 2005. xii+1182 pp.
7. Хайруллин Ф. С., Сахбиев О. М. Метод определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций сложной формы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2016. №1. С. 36–42.
8. Стружанов В. В. О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // *Математическое моделирование систем и процессов*, 2004. №12. С. 89–100.
9. Стружанов В. В. Об одном итерационном методе расчета напряжений в неодносвязных телах // *Вычислительные технологии*, 2006. Т. 11, №6. С. 118–124.
10. Пеньков В. Б., Саталкина Л. В. *Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости.* Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. 108 с.
11. Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Шульмин А. С. Применение метода граничных состояний для анализа упругой среды с полостями и включениями // *ПММ*, 2014. Т. 78, №4. С. 542–556.
12. Фирсанов В. В. Математическая модель напряжённо-деформированного состояния балки переменного сечения с учётом “Пограничного слоя” // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2015. №6. С. 63–69.
13. Волошин А. Г., Ступина М. В. Система расчета равновесного состояния упругой среды, ослабленной плоской симметричной трещиной // *Инженерный вестник Дона*, 2008. №2. С. 4–12.
14. Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Об определении напряженного состояния упругопористой среды // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2017. Т. 159, №2. С. 204–215.
15. Иваньшин П. Н. Сплайн-интерполяционное решение задач теории упругости // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2015. Т. 157, №4. С. 24–41.
16. Левина Л. В., Новикова О. С. Пеньков В. Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // *Вестник Липецкого государственного технического университета*, 2016. №2. С. 16–24.
17. Sachdeva C., Padhee S. S. Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations // *Applied Mathematical Modelling*, 2017. vol. 54. pp. 782–802. `doi: 10.1016/j.apm.2017.10.019`.

18. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel // *ZAMM*, 1934. vol. 14, no. 4. pp. 203–212. doi: 10.1002/zamm.19340140404.
19. Агаханов Э. К., Агаханов М. К. О возможности применения эквивалентности воздействий в аналитических решениях задач теории упругости // *Вестник МГСУ*, 2010. Т. 3, № 4. С. 144–148.
20. Матвеенко В. П., Шевелев Н. А. Аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния тел вращения, находящихся под действием массовых сил / *Напряженно-деформированное состояние конструкций из упругих и вязкоупругих материалов.* Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 54–60.
21. Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил // *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2016. Т. 71, № 4. С. 48–54.
22. Шарафутдинов Г. З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил // *ПММ*, 2009. Т. 73, № 1. С. 69–87.
23. Зайцев А. В., Фукалов А. А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики // *Математическое моделирование в естественных науках*, 2015. Т. 1. С. 141–144.
24. Фукалов А. А. Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложениях / *XI Всерос. съезд по фундамент. пробл. теор. и прикл. мех.* Казань, 2015. С. 3951–3953.
25. Игумнов Л. А., Марков И. П., Пазин В. П. Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропной теории упругости // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2013. № 1. С. 115–119.
26. Корепанова Т. О., Севодина Н. В. Метод и результаты расчета характера сингулярности напряжений в трехмерных задачах теории упругости // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2011. № 4. С. 1539–1541.
27. Пикуль В. В. К аномальному деформированию твердых тел // *Физическая мезомеханика*, 2013. Т. 16, № 2. С. 93–100.
28. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben // *J. Reine Angew. Math.*, 1869. vol. 70. pp. 105–120, http://eudml.org/doc/148076.
29. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике.* М.: Наука, 1977. 431 с.
30. Penkov V. B., Ivanychev D. A., Novikova O. S., Levina L. V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 973, 012015. doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012015.
31. Новикова О. С., Пеньков В. Б., Левина Л. В. Метод граничных состояний с возмущениями как способ организации полнопараметрического аналитического решения второй основной задачи линейной эластостатики // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2018. № 2. С. 26–37.
32. Левина Л. В., Новикова О. С., Пеньков В. Б., Поликарпов М. В. Оптимизация облегченных элементов крепления при варьировании геометрических параметров // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2017. № 4. С. 45–51.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1711

MSC: 74A10, 74S30

Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces. Theoretical and algorithmic support

V. B. Penkov, L. V. Levina, O. S. Novikova

Lipetsk State Technical University,
30, Moskovskaya st., 398055, Russian Federation.

Abstract

The possibility of constructing a full-parametric analytical solution of the stress-strain state problem for the body caused by the influence of volumetric forces is studied. In the general case of Cesaro, the displacements at each point of the body are determined through the volume forces by an integral expression with a singular nucleus. Therefore, with an arbitrary shape of the body, its elastic state can be constructed only numerically. A strict analytical solution is written in the classical version, corresponding to the potential forces. These forces are traditional objects of mechanics, but their list is quite limited.

The current level of development of science and technology in the world requires the use of forces of an arbitrary nature, which can be generated both at the level of molecular interaction, and the interaction of electromagnetic fields inside the body. They certainly are not conservative. In addition, the use of perturbation methods in solving nonlinear elastostatic problems and thermoelasticity problems creates, at each iteration of the asymptotic approximation, artificially generated volume forces of a polynomial nature or forces fairly accurately approximated by polynomials.

The ability to write out strict or highly accurate private decisions during the iteration provides an invaluable service to the calculator. New method of constructing a strict solution of the problem about the corresponding elastic state of the body for a very wide range of forces, approximated by polynomials from spatial coordinates or, even for a narrower class- polynomial forces, is formed. It is based on the isomorphism of Hilbert spaces of forces of this kind and their corresponding elastic states (sets of displacements, deformations, stresses).

Research Article

Please cite this article in press as:
Penkov V. B., Levina L. V., Novikova O. S. Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces. Theoretical and algorithmic support, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73. doi: 10.14498/vsgtu1711 (In Russian).

Authors' Details:

Viktor B. Penkov https://orcid.org/0000-0002-6059-1856
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of General Mechanics; e-mail: vbpenkov@mail.ru

Lyubov V. Levina https://orcid.org/0000-0002-7441-835X
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Olga S. Novikova https://orcid.org/0000-0003-2577-4515
Postgraduate Student; Dept. of General Mechanics; e-mail: _o_l_g_a_@bk.ru

The existence theorem of isomorphic countable bases of these spaces is proved, and algorithms for their filling are constructed. The particular solution of the problem about the elastic field from polynomial forces is constructed by decomposition of a given load on an orthonormal basis, written simply in the final form, and in the analytical form. The correction from the particular solution is made to the boundary conditions of the homogeneous elasticity problem for the body, after which its solution is constructed. Computational approaches, oriented to computer algebra, provide analytical form of solution.

A convenient variant of this approach is the method of boundary states (MBS), which has a number of advantages over widely used numerical (finite elements, boundary elements, finite differences, etc.) and one significant drawback: the MBS computational complex has not received a final completion. The advantages of MBS are briefly stated and its laconic description is given. The use of the MBS approach makes it possible to write out a full-parametric form of solutions for bodies of arbitrary geometric shape. MBS is used to construct a solution of the problem of linear-elastic flattened spheroid, loaded with a self-balanced system of volumetric forces. The solution was constructed for two variants of loading, namely potential, non-potential forces. The analytical version of the solution is given only for the displacement field (other characteristics of the elastic state are easily written out through the defining relations).Certain interest is the graphic illustration of stress fields, made at fixed values of parameters.

Keywords: volume forces, mass forces, non-potential forces, nonconservative forces, energy methods, the method of Trefftz, method of boundary states, space of volume forces, basis of the space forces, completeness of the basis, analytical solutions, full-parametric solution, spheroid, flattened spheroid.

Received: 12$^{\text{th}}$ June, 2019 / Revised: 19$^{\text{th}}$ November, 2019 /
Accepted: 10$^{\text{th}}$ February, 2020 / First online: 19$^{\text{th}}$ March, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Lipetsk Region (grant nos. 19–41–480003 r_a, 19–48–480009 r_a).

References

1. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics. Vol. 1: General concepts*, Pure and Applied Mathematics, vol. 71. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1977, xxiii+280 pp.
2. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable rigid body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 pp. (In Russian)
3. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 2005, iv+1050 pp. doi: 10.1007/978-3-540-26455-2.
4. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. (In Russian)

5. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. New York, Dover Publications, 1992, xvi+457 pp.
6. Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Amsterdam, Elsiver/Academic Press, 2005, xii+1182 pp.
7. Khayrullin F.S., Sahbiev O. M. A method of determination of stress-strain state of 3d structures of complex form, *Stroitelnaya mekhanika inzhenernykh konstruktsii i sooruzhenii*, 2016, no. 1, pp. 36–42 (In Russian).
8. Struzhanov V. V. On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections, *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov*, 2004, no. 12, pp. 89–100 (In Russian).
9. Struzhanov V. V. On one iteration method of stress calculation in non-simply connected-solids, *Computational Technologies*, 2006, vol. 11, no. 6, pp. 118–124 (In Russian).
10. Penkov V. B., Satalkina L. V. *Metod granichnykh sostoyaniy s vozmushcheniyami: neodnorodnyye i nelineynyye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publ., 2012, 108 pp. (In Russian)
11. Penkov V. B., Satalkina L. V., Shulmin A. S. The use of the method of boundary states to analyse an elastic medium with cavities and inclusions, *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 384–394. `doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.12.010`.
12. Firsanov V. V. Mathematical model of the stress-strain state of a beam with a variable section with an effect of "Boundary layer", *Stroitelnaya mekhanika inzhenernykh konstruktsii i sooruzhenii*, 2015, no. 6, pp. 63–69 (In Russian).
13. Voloshin A. G., Stupina M. V. System for calculating of the equilibrium state of an elastic medium weakened by a plane symmetric crack, *Inzhenernyi vestnik Dona*, 2008, no. 2, pp. 4–12 (In Russian).
14. Mikishanina E. A., Terentev A. G. On determination of the stress state of an elastic-porous medium, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 2, pp. 204–215 (In Russian).
15. Ivanshin P. N. Spline-interpolation solution of elasticity theory problems, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 24–41 (In Russian).
16. Levina L. V., Novikova O. S., Penkov V. B. Full-parameter solution to the problemof the theory of elasticity of a simply connected bounded body, *Vestnik Lipetskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2016, no. 2, pp. 16–24 (In Russian).
17. Sachdeva C., Padhee S. S. Functionally graded cylinders: Asymptotically exact analytical formulations, *Applied Mathematical Modelling*, 2017, vol. 54, pp. 782–802. `doi: 10.1016/j.apm.2017.10.019`.
18. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, *ZAMM*, 1934, vol. 14, no. 4, pp. 203–212. `doi: 10.1002/zamm.19340140404`.
19. Agahanov E. K., Agahanov M. K. About the possibility of the use of the effect ecuivalense in analytic solutions of the elastisity theory, *Vestnik MGSU*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 144–148 (In Russian).
20. Matveenko V. P., Schevelev N. A. Analytical study of the stress-strain state of rotation bodies under the action of mass forces, In: *Stress-strain State of Structures Made of Elastic and Viscoelastic Materials*. Sverdlovsk, 1977, pp. 54–60 (In Russian).
21. Vestyak V. A., Tarlakovsky D. V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic space with a spherical cavity under the action of bulk forces, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 4, pp. 87–92. `doi: 10.3103/S0027133016040038`.
22. Sharafutdinov G. Z. Functions of a complex variable in problems in the theory of elasticity with mass forces, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 69–87. `doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.008`.
23. Zaytsev A. V, Fukalov A. A. Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry, which are in the field of gravitational

forces, and their applications to the problems of geomechanics, *Matemat. Model. Estestv. Nauk.*, 2015, vol. 1, pp. 141–144 (In Russian).

24. Fukalov A. A. Problems of elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications, *All-Russian Congr. Fundam. Probl. Theoret. Appl. Mech.*, 2015, pp. 3951–3953 (In Russian).
25. Igumnov L. A., Markov I. P., Pazin V. P. Boundary-element analysis of boundary-value problems of 3d anisotropic elasticity, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2013, no. 1, pp. 115–119 (In Russian).
26. Korepanova T. O., Sevodina N. V. A method and results of calculation of the nature of stress singularities in three-dimensional elasticity problems, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4, pp. 1539–1541 (In Russian).
27. Pikul V. V. To anomalous deformation of solids, *Physical mesomechanics*, 2013, no. 2, pp. 93–100 (In Russian).
28. Schwarz H. A. Über einige Abbildungsaufgaben, *J. Reine Angew. Math.*, 1869, vol. 70, pp. 105–120, `http://eudml.org/doc/148076`.
29. Sedov L. I. *Metody podobiya i razmernosti v mekhanike* [Similarity and Dimensional Methods in Mechanics]. Moscow, Nauka, 1977, 431 pp. (In Russian)
30. Penkov V. B., Ivanychev D. A., Novikova O. S., Levina L. V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 973, 012015. `doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012015`.
31. Novikova O. S., Penkov V. B., Levina L. V. Method of boundary states with the perturbation as a way of organizing full parametric analytical solution solving of the second basic problem of linear elastostatics, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2018, no. 2, pp. 26–37 (In Russian).
32. Levina L. V., Novikova O. S., Penkov V. B., Polikarpov M. V. Optimization of lightweight fastening elements at avariation of geometrical parameters, *Vestnik Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2017, no. 4, pp. 45–51 (In Russian).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1737

УДК 539.3

Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений

А. Н. Прокудин

Институт машиноведения и металлургии
Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН,
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

Аннотация

Рассматривается упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра. Для постановки задачи используется теория малых деформаций и предположение о плоском деформированном состоянии в цилиндре. Пластические деформации определяются ассоциированным законом пластического течения и условием максимальных приведенных напряжений. Скорость вращения цилиндра монотонно возрастает от нуля до максимального значения, а затем монотонно убывает вплоть до полной остановки цилиндра. Предполагается, что скорость вращения медленно меняется со временем, поэтому угловым ускорением цилиндра можно пренебречь. При указанных предположениях в цилиндре остается одно нетривиальное уравнение равновесия.

Установлено, что в ходе нагрузки появляются четыре области пластического течения, которые соответствуют различным граням и ребрам поверхности текучести. При этом последняя из областей возникает уже после полного перехода цилиндра в состояние пластичности. Когда скорость вращения начинает уменьшаться, весь цилиндр вновь ведет себя, как упругое тело, а при определенной скорости в нем может начаться повторное (или вторичное) пластическое течение, характер которого зависит от максимальной скорости вращения. В общем случае появляются четыре вторичные пластические области. Напряженное состояние в первичных и вторичных пластических областях соответствует противоположным ребрам и граням поверхности текучести. В данной работе максимальная скорость вращения выбрана таким образом, чтобы в момент остановки весь цилиндр переходил в состояние повторного пластического течения. В этом случае возникают только две вторичные пластические области.

Найдены точные аналитические решения для всех стадий деформирования цилиндра. Сформулированы системы алгебраических уравнений для определения констант интегрирования и границ между областями. Полученные результаты проиллюстрированы графиками пере-

Научная статья

Образец для цитирования
Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94. doi: 10.14498/vsgtu1737.

Сведения об авторе
Александр Николаевич Прокудин https://orcid.org/0000-0002-5156-424X
кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

мещений, напряжений и пластических деформаций. Произведено сравнение с известными решениями, найденными с использованием условия Треска.

Ключевые слова: упругопластические деформации, точное решение, вращающийся цилиндр, условие максимальных приведенных напряжений.

Получение: 25 августа 2019 г. / Исправление: 12 декабря 2019 г. / Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 2 апреля 2020 г.

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния вращающихся цилиндров и дисков представляет значительный интерес по причине их широкого применения в машиностроении. В научной литературе опубликовано множество работ, посвященных решению данного класса задач в различной кинематической и физической постановке и с разными типами граничных условий. Обычно рассматриваются малые деформации и три варианта кинематики: цилиндр с закрепленными или свободными концами, а также диск различного профиля. В простейшей постановке рассматривается линейно-упругий материал, подчиняющийся закону Гука. Решение такой задачи входит во многие учебники по теории упругости, например [1, 2].

При достижении критической скорости вращения в цилиндре начинает развиваться пластическое течение. Первым задачу о пластическом деформировании вращающегося сплошного цилиндра решил А. Надаи [3]. В его решении учитывались только пластические деформации и использовалось условие несжимаемости. Упругопластические деформации во вращающемся цилиндре впервые изучались в [4], где использовалось условие пластичности Треска и ассоциированный закон пластического течения, а также отдельно рассматривался случай конечных деформаций. Однако, как позднее было показано в [5], расчеты [4] приводят к разрыву перемещений на упругопластической границе. Корректное решение упругопластической задачи для вращающегося цилиндра с закрепленными концами было получено в [6–8]; для цилиндра со свободными концами в [9]. Аналогичная задача для полого цилиндра решена в [10, 11]. Работы [12, 13] посвящены исследованию вращающихся цилиндров из упрочняющегося упругопластического материала. Цилиндры из функционально-градиентных материалов изучались в [14–18].

Большинство работ, посвященных упругопластическому анализу вращающихся цилиндров и дисков, основаны на условиях пластичности Треска или Мизеса. Несомненным достоинством условия Треска является возможность получения замкнутых аналитических решений начально-краевых задач теории пластичности. К недостаткам можно отнести тот факт, что в нем не учитывается влияние промежуточного главного напряжения. В условие Мизеса в явном виде входят все три главных напряжения, однако это условие является нелинейным и, как следствие, решение задач практически всегда сводится к использованию численных методов.

Условие максимальных приведенных напряжений [19–23] наряду с условиями Треска и Мизеса относится к классическим условиям пластичности. В российских публикациях также используется название «условие Ишлинского—Ивлева» [24–26]. В математическую запись этого условия входят все три главные напряжения и оно, как и условие Треска, является кусочно-линейным. Ранее [27] с помощью этого условия было получено распределение напряжений во вращающемся диске. Из последних работ также можно выделить [24–26, 28, 29]. Целью настоящей публикации является получение точного аналитического решения задачи об упругопластическом деформировании сплошного вращающегося цилиндра в условиях плоского деформированного состояния. Используются теория малых деформаций, условие максимальных приведенных напряжений и ассоциированный закон пластического течения. Полученные результаты дополняют работы [6–8, 12, 13], в которых для решения данной задачи использовались условия Треска и Мизеса.

1. Определяющие соотношения. Рассматривается сплошной цилиндр с закрепленными концами. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью ω, которая медленно меняется со временем, вследствие чего угловым ускорением можно пренебречь. В условиях плоской деформации и осевой симметрии вектор перемещений в цилиндре имеет только одну ненулевую компоненту u_r. Введены цилиндрическая система координат ρ, θ, z и безразмерные величины:

$$\beta = \frac{r}{b}, \quad u = \frac{u_r}{b},$$

где b — радиус цилиндра.

Предполагается, что деформации d_{ij} в цилиндре являются малыми и представляют собой сумму упругих e_{ij}, пластических деформаций p_{ij} и вторичных пластических деформаций s_{ij}:

$$\begin{aligned} d_{\beta\beta} &= e_{\beta\beta} + p_{\beta\beta} + s_{\beta\beta} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \\ d_{\theta\theta} &= e_{\theta\theta} + p_{\theta\theta} + s_{\theta\theta} = \frac{u}{\beta} \\ d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz} + s_{zz} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \frac{E}{\sigma_{\text{T}}} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \big((1-\nu)\, e_{\beta\beta} + \nu e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}\big), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_{\text{T}}} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \big(\nu e_{\beta\beta} + (1-\nu)\, e_{\theta\theta} + \nu e_{zz}\big), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_{\text{T}}} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \big(\nu e_{\beta\beta} + \nu e_{\theta\theta} + (1-\nu)\, e_{zz}\big), \end{aligned} \tag{2}$$

здесь E — модуль Юнга, σ_{T} — предел текучести, ν — коэффициент Пуассона.

Соотношения, обратные к (2), имеют вид

$$\begin{aligned} e_{\beta\beta} &= \frac{\sigma_{\text{T}}}{E} \left(\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{zz}\right), \\ e_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_{\text{T}}}{E} \left(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{zz}\right), \\ e_{zz} &= \frac{\sigma_{\text{T}}}{E} \left(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{\beta\beta} - \nu\sigma_{\theta\theta}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия в цилиндре

$$\frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta}}{\beta} = -\Omega\beta, \quad \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_{\text{T}}}, \tag{4}$$

где ρ — плотность материала.

Условие максимальных приведенных напряжений [23]:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = 1, \text{ если } \sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \\ &\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = 1, \text{ если } \sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения, упорядоченные по убыванию. Поверхность текучести, соответствующая условию (5), далее называется призмой Ивлева.

Использование условия (5) вместе с ассоциированным законом пластического течения приводит к пластической несжимаемости, поэтому объемная деформация является чисто упругой:

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{u}{\beta} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{E}(1 - 2\nu)(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}). \tag{6}$$

Граничные условия задачи следующие:

$$u(0) = 0, \quad \sigma_{\beta\beta}(1) = 0. \tag{7}$$

Параметр нагружения Ω цилиндра монотонно возрастает от 0 до некоторого $\Omega_{\max}$, а затем также монотонно убывает вплоть до полной остановки цилиндра. В начале нагружения цилиндр деформируется упруго. Затем при $\Omega = \Omega_{\text{p}}$ в центре цилиндра $\beta = 0$ впервые выполняется условие пластичности (5), в результате чего появляется область пластического течения, которая обозначается как `I`. Дальнейшее увеличение параметра нагружения Ω приводит к постепенному уменьшению области упругого деформирования и при $\Omega = \Omega_{\text{p2}}$ на поверхности $\beta = 1$ появляется пластическая область `II`. Напряженное состояние в областях `I` и `II` соответствует разным граням призмы Ивлева. Когда Ω достигает значения Ω_{fp}, упругая область исчезает, весь цилиндр переходит в состояние пластичности, а между областями `I` и `II` появляется пластическая область `III`, напряжения в которой лежат на ребре призмы Ивлева. Далее при $\Omega = \Omega_{\text{fp2}}$ напряжения на поверхности $\beta = 1$ переходят на ребро призмы Ивлева, в результате чего возникает пластическая область `IV`. При последующем увеличении параметра нагружения $\Omega > \Omega_{\text{fp2}}$ новые пластические области уже не появляются, но границы между существующими областями меняют свое положение, при этом увеличиваются области `III` и `IV`, соответствующие ребрам поверхности текучести (5). Величины Ω_{p}, Ω_{p2}, Ω_{fp}, Ω_{fp2} зависят от коэффициента Пуассона ν.

Как только параметр Ω начинает уменьшаться, весь цилиндр вновь ведет себя, как упругое тело, но с накопленными пластическими деформациями, которые в процессе разгрузки уже не меняются. Если максимальное значение параметра нагружения $\Omega_{\max}$ было достаточно высоким, то в ходе разгрузки при $\Omega = \Omega_{\mathrm{sp}}$ в центре цилиндра может начаться повторное (или вторичное) пластическое течение. В общем случае возможно появление четырех вторичных пластических областей V–VIII в том же порядке, в котором появлялись первичные области I–IV. Заметим, что области первичного и вторичного пластического течения соответствуют противоположным граням и ребрам призмы Ивлева. В настоящей работе значение $\Omega_{\max}$ выбрано таким образом, чтобы в момент остановки $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходил в состояние повторного пластического течения. Поэтому в цилиндре возникают только две из возможных четырех вторичных областей. При $\Omega = \Omega_{\mathrm{sp}}$ в центре цилиндра появляется область V, при $\Omega = \Omega_{\mathrm{sp2}}$ на поверхности цилиндра появляется область VI, а в момент остановки $\Omega = 0$ упругая область между вторичными областями V и VI исчезает.

В следующих разделах получено решение для каждой области. Символы D_i, C_i, B_i, A_i обозначают константы интегрирования.

2. Упругая область. Упругое решение для вращающегося цилиндра, в котором отсутствуют предварительные деформации, хорошо известно:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{D_1}{\beta} + D_2\beta - \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega\beta^3,\\
\sigma_{\beta\beta} &= -\frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{D_1}{1+\nu}\frac{1}{\beta^2} + \frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2,\\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{D_1}{1+\nu}\frac{1}{\beta^2} + \frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{D_2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1+2\nu}{8(1-\nu)}\Omega\beta^2,\\
\sigma_{zz} &= \nu\left(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Приведенное решение справедливо только для стадии нагрузки и параметра нагружения $0 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_{\mathrm{fp}}$. При чисто упругом деформировании ($0 \leqslant \Omega \leqslant \Omega_{\mathrm{p}}$) константы D_1, D_2 определяются из граничных условий (7):

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)(3-2\nu)}{8(1-\nu)}\Omega. \tag{9}$$

Пластическое течение зарождается в центре цилиндра $\beta = 0$, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\beta\beta} > \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz}$, а условие (5) имеет вид

$$\sigma_{\beta\beta}(0) + \sigma_{\theta\theta}(0) - 2\sigma_{zz}(0) = 2. \tag{10}$$

Используя (10) вместе с (8) и (9), найдем критическое значение параметра нагружения Ω_{p}, при котором начнется пластическое течение:

$$\Omega_{\mathrm{p}} = \frac{8(1-\nu)}{(1-2\nu)(3-2\nu)}. \tag{11}$$

Интересно отметить, что Ω_{p} имеет одно и то же значение для условий пластичности Треска [7], Мизеса [13] и (5).

В ходе разгрузки ($\Omega_{\max} \geqslant \Omega \geqslant 0$) в упругой области присутствуют первичные пластические деформации $\hat{p}_{ij} = p_{ij}(\Omega_{\max})$, распределение которых известно и не меняется. Тогда перемещение в упругой области можно найти из решения уравнения равновесия (4) с учетом (1), (2):

$$u = B_1\beta + \frac{B_2}{\beta} - \frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{8(1-\nu)}\frac{\sigma_{\text{T}}}{E}\Omega\beta + \\ + \frac{\beta}{2}\int \hat{p}\,(\beta)d\beta - \frac{1}{2\beta}\int \beta^2\hat{p}\,(\beta)d\beta, \qquad (12)$$

$$\hat{p}\,(\beta) = \frac{\partial \hat{p}_{\beta\beta}}{\partial\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\Big(\frac{\partial\hat{p}_{\theta\theta}}{\partial\beta} + \frac{\partial\hat{p}_{zz}}{\partial\beta}\Big) + \frac{1-2\nu}{\beta(1-\nu)}\left(\hat{p}_{\beta\beta} - \hat{p}_{\theta\theta}\right).$$

Константы B_1, B_2 и интегралы в (12) необходимо отдельно вычислять для каждой первичной области I–IV.

3. Область I. В области I пластического течения $\sigma_3 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \geqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и условие (5) принимает вид

$$\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta} - 2\sigma_{zz} = 2.$$

Отсюда осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta}) - 1. \qquad (13)$$

Из ассоциированного закона пластического течения и условия плоской деформации следует, что

$$p_{\beta\beta} = p_{\theta\theta}, \quad p_{zz} = -2p_{\beta\beta}, \quad e_{zz} = -p_{zz}.$$

С помощью последних выражений преобразуем кинематические соотношения (1) и получим

$$d_{\beta\beta} = e_{\beta\beta} + \frac{e_{zz}}{2}, \quad d_{\theta\theta} = e_{\theta\theta} + \frac{e_{zz}}{2}. \qquad (14)$$

Далее преобразуем (14) с помощью закона Гука (2) и выражения для осевого напряжения (13). Из полученной системы уравнений можно выразить радиальное и тангенциальное напряжения через полные деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\big((5-4\nu)\,d_{\beta\beta} - (1-8\nu)\,d_{\theta\theta}\big), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\big(6\,(1-8\nu)\,d_{\beta\beta} - (5-4\nu)\,d_{\theta\theta}\big). \end{aligned} \qquad (15)$$

Перемещение определяется из уравнения равновесия (4) с учетом соотношений (15):

$$u = \frac{C_1}{\beta} + C_2\beta - \frac{3}{4}\frac{\sigma_{\text{T}}}{E}\frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{5-4\nu}\Omega\beta^3. \qquad (16)$$

Оставшиеся неизвестные функции можно найти с помощью (13), (15) и (16). Полные деформации определяются из соотношений (1), а их упругие составляющие — через обратный закон Гука (3). Пластические деформации вычисляются как разница между полными и упругими деформациями.

4. Область II. Здесь $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, поэтому условие пластичности (5) примет вид

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{\beta\beta} = 2.$$

Осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = 2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\beta\beta} - 2.$$

Вследствие ассоциированного закона пластического течения найдем

$$p_{\beta\beta} = p_{zz}, \quad p_{\theta\theta} = -2p_{zz}.$$

Напряжения можно выразить через полные деформации, так же как это было сделано в области I:

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_\text{T}}\frac{1}{1-2\nu}\Big(\frac{5-4\nu}{1+\nu}d_{\beta\beta} + 2d_{\theta\theta}\Big), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_\text{T}}\frac{1}{1-2\nu}\left(d_{\beta\beta} + d_{\theta\theta}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Перемещение следует из уравнения равновесия (4) и соотношений (17):

$$u = C_3\beta^{-\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + C_4\beta^{\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}} + 2\frac{\sigma_\text{T}}{E}\left(1+\nu\right)\beta - 6\frac{\sigma_\text{T}}{E}\frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{43-38\nu}\Omega\beta^3.$$

5. Область III. Напряженное состояние в этой области соответствует ребру призмы Ивлева и условие (5) имеет следующий вид:

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{zz} = 2, \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta} - 2\sigma_{zz} = 2.$$

Из предыдущих соотношений следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\beta\beta} + \frac{2}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\beta\beta} - \frac{2}{3}. \tag{18}$$

Разрешая уравнение равновесия (4) с учетом (18), получим

$$\sigma_{\beta\beta} = C_6 + \frac{2}{3}\ln\beta - \frac{1}{2}\Omega\beta^2. \tag{19}$$

Далее с помощью (18) и (19) решим уравнение (6) и получим распределение перемещений:

$$u = \frac{C_5}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_\text{T}}{E}\left(1-2\nu\right)\left(3C_6 - 1\right)\beta + \frac{\sigma_\text{T}}{E}\left(1-2\nu\right)\beta\ln\beta - \frac{3}{8}\frac{\sigma_\text{T}}{E}\left(1-2\nu\right)\Omega\beta^3.$$

6. Область IV. Ход решения здесь аналогичен решению для области III. Напряжения соответствуют ребру призмы Ивлева, а условие (5) имеет вид

$$2\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} - \sigma_{\beta\beta} = 2, \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{\beta\beta} = 2. \tag{20}$$

Из (20) следует, что

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\beta\beta} + \frac{4}{3}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{\beta\beta} + \frac{2}{3}. \tag{21}$$

Интегрируя уравнение равновесия (4) с учетом (21), найдем

$$\sigma_{\beta\beta} = C_8 + \frac{4}{3}\ln\beta - \frac{1}{2}\Omega\beta^2. \tag{22}$$

Перемещение определяется из решения уравнения (6) с учетом (22) и (21):

$$u = \frac{C_7}{\beta} + \frac{3}{2}\frac{\sigma_{\text{T}}}{E}(1-2\nu)\,C_8\beta + 2\frac{\sigma_{\text{T}}}{E}(1-2\nu)\,\beta\ln\beta - \frac{3}{8}\frac{\sigma_{\text{T}}}{E}(1-2\nu)\,\Omega\beta^3.$$

7. Область V. В первой области повторного пластического течения $\sigma_1 = \sigma_{zz}$, $\sigma_2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ и условие (5) имеет вид

$$2\sigma_{zz} - \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} = 2. \tag{23}$$

Осевое напряжение

$$\sigma_{zz} = 1 + \frac{1}{2}(\sigma_{\beta\beta} + \sigma_{\theta\theta}). \tag{24}$$

Вследствие ассоциированного закона пластического течения и условия плоской деформации получим

$$s_{\beta\beta} = s_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}s_{zz}, \quad s_{zz} = -e_{zz} - \hat{p}_{zz}. \tag{25}$$

Соотношения (1) с учетом (25) примут вид

$$\begin{aligned} d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta} - \frac{1}{2}\hat{p}_{zz} &= e_{\beta\beta} + \frac{1}{2}e_{zz}, \\ d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\hat{p}_{zz} &= e_{\theta\theta} + \frac{1}{2}e_{zz}. \end{aligned} \tag{26}$$

Распределение напряжений определяется из (26), (24) и (2):

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} = &-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\frac{5-4\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta}) - \\ &- \frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\frac{1-8\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta}) - \frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\frac{1}{1-2\nu}\hat{p}_{zz}, \\ \sigma_{\theta\theta} = &-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\frac{1-8\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(d_{\beta\beta} - \hat{p}_{\beta\beta}) + \\ &+ \frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\frac{5-4\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(d_{\theta\theta} - \hat{p}_{\theta\theta}) - \frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_{\text{T}}}\frac{1}{1-2\nu}\hat{p}_{zz}. \end{aligned} \tag{27}$$

Уравнение равновесия с учетом (27) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{u}{\beta^2}=-6\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu}\Omega\beta+\hat{p}(\beta),\\ \hat{p}(\beta)=\frac{6}{\beta}\frac{1-2\nu}{5-4\nu}(\hat{p}_{\beta\beta}-\hat{p}_{\theta\theta})+\frac{\partial \hat{p}_{\beta\beta}}{\partial \beta}-\frac{1-8\nu}{5-4\nu}\frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta}+\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}\frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta}.\end{gathered}\tag{28}$$

Перемещение найдем из решения уравнения (28):

$$u=\frac{A_1}{\beta}+A_2\beta-\frac{3}{4}\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu}\Omega\beta^3+\frac{\beta}{2}\int\hat{p}(\beta)d\beta-\frac{1}{2\beta}\int\beta^2\hat{p}(\beta)d\beta.\tag{29}$$

Константы A_1, A_2 и интегралы в (29) вычисляются отдельно для каждого непустого пересечения области V с первичными областями I–IV.

8. Область VI. В данной области $\sigma_3=\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_2\geqslant(\sigma_1+\sigma_3)/2$, поэтому условие пластичности (5) запишется так:

$$\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{zz}-2\sigma_{\theta\theta}=2.$$

Осевое напряжение

$$\sigma_{zz}=2-\sigma_{\beta\beta}+2\sigma_{\theta\theta}.$$

Из ассоциированного закона пластического течения следует, что

$$s_{\beta\beta}=s_{zz},\quad s_{\theta\theta}=-2s_{zz}.\tag{30}$$

Соотношения (1) с учетом (30) принимают вид

$$\begin{gathered}d_{\beta\beta}-\hat{p}_{\beta\beta}+\hat{p}_{zz}=e_{\beta\beta}-e_{zz},\\ d_{\theta\theta}-\hat{p}_{\theta\theta}-2\hat{p}_{zz}=e_{\theta\theta}+2e_{zz}.\end{gathered}\tag{31}$$

Распределение напряжений определяется из (31), так же как это было сделано в предыдущем разделе статьи:

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta\beta}=&\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{5-4\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(d_{\beta\beta}-\hat{p}_{\beta\beta})+\\ &+\frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{1}{1-2\nu}(d_{\theta\theta}-\hat{p}_{\theta\theta})+\frac{1}{6}\frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{1-8\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\hat{p}_{zz},\\ \sigma_{\theta\theta}=&-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{E}{\sigma_{\mathrm{T}}}\frac{1}{1-2\nu}(d_{\beta\beta}-\hat{p}_{\beta\beta}+d_{\theta\theta}-\hat{p}_{\theta\theta}-\hat{p}_{zz}).\end{aligned}\tag{32}$$

Уравнение равновесия с учетом (32) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}\frac{u}{\beta^2}=-6\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{5-4\nu}\left(\Omega\beta+\frac{1}{\beta}\right)+\hat{p}(\beta),\\ \hat{p}(\beta)=\frac{3}{\beta}\frac{1-2\nu}{5-4\nu}(\hat{p}_{\beta\beta}-\hat{p}_{zz})+\frac{\partial \hat{p}_{\beta\beta}}{\partial \beta}+\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}\frac{\partial \hat{p}_{\theta\theta}}{\partial \beta}-\frac{1-8\nu}{5-4\nu}\frac{\partial \hat{p}_{zz}}{\partial \beta}.\end{gathered}\tag{33}$$

Перемещение следует из решения уравнения (33):

$$u = A_3 u_1 + A_4 u_2 - 2\frac{\sigma_\text{T}}{E}(1+\nu)\beta - 6\frac{\sigma_\text{T}}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{43-38\nu}\Omega\beta^3 + J_2(\beta),$$

$$u_1 = \beta^{-\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}}, \quad u_2 = \beta^{\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}}, \quad W = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{5-4\nu}}, \tag{34}$$

$$J_2(\beta) = u_2 \int \frac{u_1 \hat{p}(\beta)}{W} d\beta - u_1 \int \frac{u_2 \hat{p}(\beta)}{W} d\beta.$$

Константы A_3, A_4 и интегралы в (34) вычисляются отдельно в каждом непустом пересечении области VI с первичными областями I–IV.

9. Результаты. Используются следующие значения параметров: $\nu = 0.3$, $\sigma_\text{T} = 2.5 \cdot 10^8$ Па, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7900$ кг/м^3, $b = 0.1$ м. В соответствии с (11) пластическое течение начнется при $\Omega_\text{p} \cong 3.066$. Максимальное значение параметра нагружения определено численно и составляет $\Omega_\text{max} \cong 18.534$. Безразмерным величинам Ω_p и Ω_max соответствуют угловые скорости $\omega_\text{p} \cong 3115$ с$^{-1}$ и $\omega_\text{max} \cong 7659$ с$^{-1}$. Упругое решение для $\Omega = \Omega_\text{p}$ показано на рис. 1.

Процесс пластического деформирования ($\Omega_\text{p} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_\text{max}$) делится на следующие интервалы: $\Omega_\text{p} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_\text{p2}$, $\Omega_\text{p2} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_\text{fp}$, $\Omega_\text{fp} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_\text{fp2}$, $\Omega_\text{fp2} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_\text{max}$, в каждом из которых цилиндр состоит из различных областей. Решение на каждом этапе пластического течения содержит неизвестные константы интегрирования C_i, D_i и координаты β_i границ между областями. Для вычисления указанных величин используются граничные условия задачи (7), а также по три условия непрерывности на каждой границе. Как показано в работе [7], подходящий выбор трех условий на границе обеспечивает на ней непрерывность всех функций. Получаемая система алгебраических уравнений является линейной относительно C_i, D_i и нелинейной относительно β_i. На каждом интервале часть уравнений выбирается для точного выражения констант интегрирования через координаты β_i, параметр нагружения Ω, а также физические параметры задачи ν, σ_T, E. Получаемые формулы здесь не приводятся. Далее в оставшиеся уравнения подставляются выражения для C_i, D_i и числовые значения параметров ν, σ_T, E. В результате имеем систему нелинейных уравнений вида $F_i(\beta_1, \ldots, \Omega) = 0$, которая решается

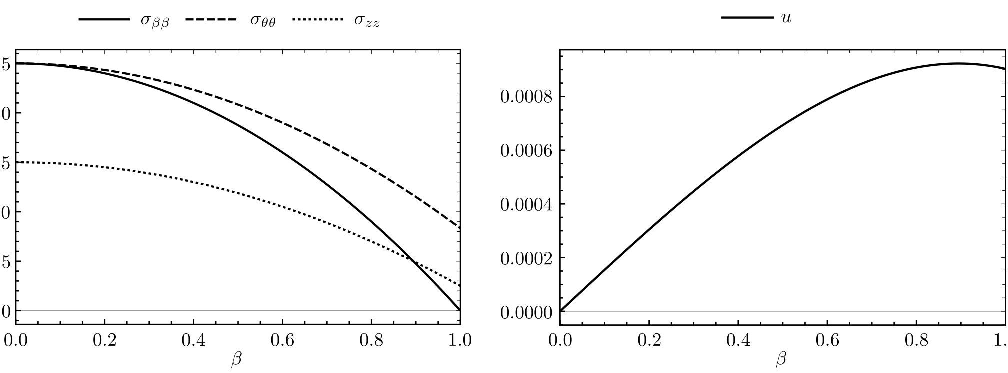


Рис. 1. Упругое решение при $\Omega = \Omega_\text{p}$: напряжения (слева), перемещения (справа) [Figure 1. Purely elastic solution at $\Omega = \Omega_\text{p}$: stresses (left), displacement (right)]

с помощью метода Ньютона для выбранных значений Ω внутри интервала. Вычисление величин Ω_{p2}, Ω_{fp}, Ω_{fp2} требует дополнительных условий.

Рассмотрим подробно каждый интервал. Заметим, что в каждом из них $C_1 = 0$. В диапазоне $\Omega_{\mathrm{p}} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_{\mathrm{p2}}$ в цилиндре присутствуют следующие области:

– пластическая область I ($0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$);
– упругая область E ($\beta_1 \leqslant \beta \leqslant 1$).

Найденное решение для указанных областей содержит неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, D_1, D_2, а также координату упругопластической границы β_1. Для определения оставшихся неизвестных составим систему уравнений:

$$\beta = \beta_1:\ u^{\mathtt{I}} = u^{\mathtt{E}}, \quad \sigma^{\mathtt{I}}_{\beta\beta} = \sigma_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathtt{E}}_{\beta\beta} + \sigma^{\mathtt{E}}_{\theta\theta} - 2\sigma^{\mathtt{E}}_{zz} = 2,$$
$$\beta = 1:\ \sigma^{\mathtt{E}}_{\beta\beta} = 0.$$

Здесь и далее верхний индекс в названии функции обозначает область.

Для определения Ω_{p2} дополним предыдущую систему условием

$$\beta = 1:\ 2\sigma^{\mathtt{E}}_{\theta\theta} - \sigma^{\mathtt{E}}_{zz} = 2.$$

Отсюда найдем $\Omega_{\mathrm{p2}} \cong 8.135$. Решение на первой стадии пластического течения представлено на рис. 2 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для $\Omega = 7$.

В интервале $\Omega_{\mathrm{p2}} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_{\mathrm{fp}}$ цилиндр состоит из следующих областей:
– пластическая область I ($0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$);
– упругая область E ($\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$);
– пластическая область II ($\beta_2 \leqslant \beta \leqslant 1$).

Решение в данных областях содержит неизвестные константы интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2 и координаты границ β_1, β_2. Для вычисления остальных неизвестных воспользуемся следующей системой:

$$\beta = \beta_1:\ u^{\mathtt{I}} = u^{\mathtt{E}}, \quad \sigma^{\mathtt{I}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathtt{E}}_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathtt{E}}_{\beta\beta} + \sigma^{\mathtt{E}}_{\theta\theta} - 2\sigma^{\mathtt{E}}_{zz} = 2,$$
$$\beta = \beta_2:\ u^{\mathtt{E}} = u^{\mathtt{II}}, \quad \sigma^{\mathtt{E}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathtt{II}}_{\beta\beta}, \quad 2\sigma^{\mathtt{E}}_{\theta\theta} - \sigma^{\mathtt{E}}_{zz} - \sigma^{\mathtt{E}}_{\beta\beta} = 2,$$
$$\beta = 1:\ \sigma^{\mathtt{II}}_{\beta\beta} = 0.$$

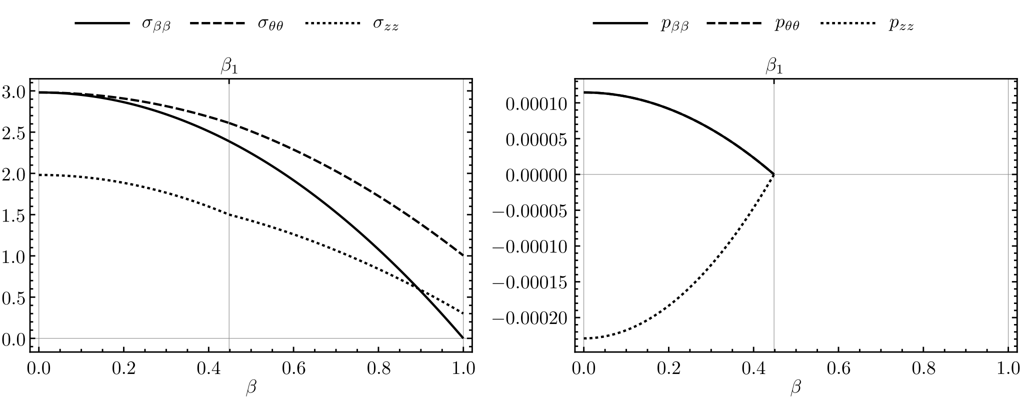


Рис. 2. Решение в момент $\Omega = 7$: напряжения (слева), пластические деформации (справа)
[Figure 2. Solution at $\Omega = 7$: stresses (left), plastic strains (right)]

Для определения Ω_{fp} предыдущую систему необходимо дополнить условием $\beta_1 = \beta_2$. Найдем, что $\Omega_{\text{fp}} \cong 9.267$ ($\omega_{\text{fp}} \cong 5415$ с$^{-1}$). Решение на второй стадии пластического течения представлено на рис. 3 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для $\Omega = 9$.

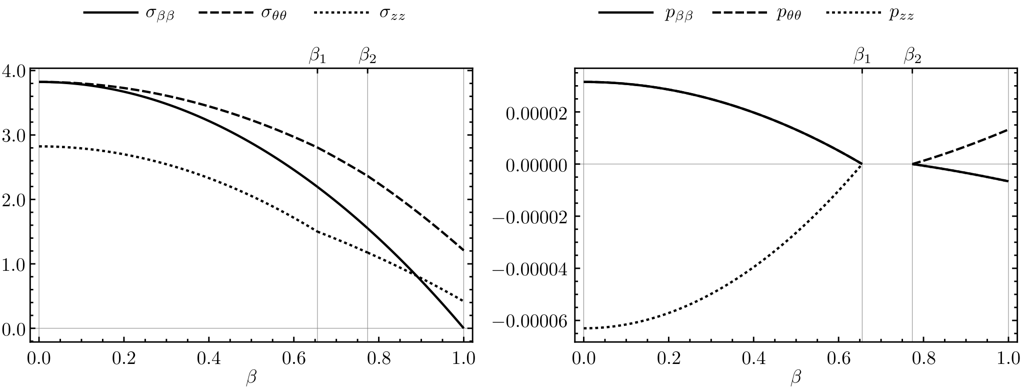


Рис. 3. Решение в момент $\Omega = 9$: напряжения (слева), пластические деформации (справа)
[Figure 3. Solution at $\Omega = 9$: stresses (left), plastic strains (right)]

В интервале $\Omega_{\text{fp}} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_{\text{fp2}}$ весь цилиндр находится в пластическом состоянии и делится на следующие области:
– пластическая область I ($0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$);
– пластическая область III ($\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$);
– пластическая область II ($\beta_2 \leqslant \beta \leqslant 1$).

Константы интегрирования C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, и координаты β_1, β_2 границ между пластическими областями вычисляются с помощью системы

$$\begin{aligned}
\beta = \beta_1:&\ \ u^{\mathrm{I}} = u^{\mathrm{III}}, \quad \sigma^{\mathrm{I}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathrm{III}}_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathrm{I}}_{\theta\theta} = \sigma^{\mathrm{III}}_{\theta\theta},\\
\beta = \beta_2:&\ \ u^{\mathrm{III}} = u^{\mathrm{II}}, \quad \sigma^{\mathrm{III}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathrm{II}}_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathrm{III}}_{\theta\theta} = \sigma^{\mathrm{II}}_{\theta\theta},\\
\beta = 1:&\ \ \sigma^{\mathrm{II}}_{\beta\beta} = 0.
\end{aligned}$$

Для вычисления Ω_{fp2} предыдущую систему необходимо дополнить условием

$$\beta = 1:\ 2\sigma^{\mathrm{II}}_{zz} = \sigma^{\mathrm{II}}_{\theta\theta} + \sigma^{\mathrm{II}}_{\beta\beta}.$$

Отсюда найдем $\Omega_{\text{fp2}} \cong 12.118$. Решение на третьей стадии пластического течения представлено на рис. 4 в виде графиков напряжений и пластических деформаций для $\Omega = 12$.

В последнем интервале $\Omega_{\text{fp2}} \leqslant \Omega \leqslant \Omega_{\max}$ цилиндр делится на пластические области в следующем порядке:
– пластическая область I ($0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$);
– пластическая область III ($\beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$);
– пластическая область II ($\beta_2 \leqslant \beta \leqslant \beta_3$);
– пластическая область IV ($\beta_3 \leqslant \beta \leqslant 1$).

Константы интегрирования C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8 и координаты β_1, β_2, β_3 границ между пластическими областями вычисляются с помощью сле-

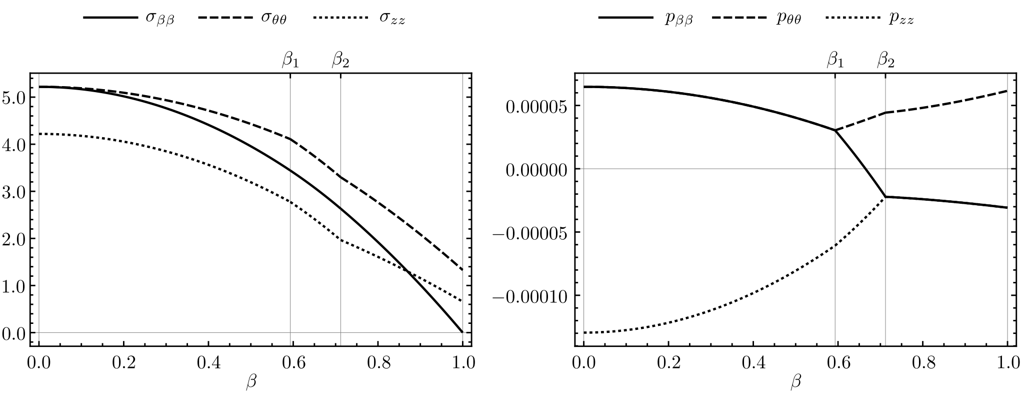


Рис. 4. Решение в момент $\Omega = 12$: напряжения (слева), пластические деформации (справа) [Figure 4. Solution at $\Omega = 12$: stresses (left), plastic strains (right)]

дующей системы:

$$
\begin{aligned}
\beta = \beta_1:&\ u^{\mathtt{I}} = u^{\mathtt{III}}, \quad \sigma^{\mathtt{I}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathtt{III}}_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathtt{I}}_{\theta\theta} = \sigma^{\mathtt{III}}_{\theta\theta},\\
\beta = \beta_2:&\ u^{\mathtt{III}} = u^{\mathtt{II}}, \quad \sigma^{\mathtt{III}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathtt{II}}_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathtt{III}}_{\theta\theta} = \sigma^{\mathtt{II}}_{\theta\theta},\\
\beta = \beta_3:&\ u^{\mathtt{II}} = u^{\mathtt{IV}}, \quad \sigma^{\mathtt{II}}_{\beta\beta} = \sigma^{\mathtt{IV}}_{\beta\beta}, \quad \sigma^{\mathtt{II}}_{\theta\theta} = \sigma^{\mathtt{IV}}_{\theta\theta},\\
\beta = 1:&\ \sigma^{\mathtt{IV}}_{\beta\beta} = 0.
\end{aligned}
$$

На рис. 5 (слева) и 6 (слева) представлено распределение напряжений и пластических деформаций в цилиндре при $\Omega = \Omega_{\max}$. Из рис. 1–5 видно, что в ходе нагрузки наибольшим является тангенциальное напряжение. При этом наименьшим напряжением практически везде за исключением небольшой области вблизи поверхности цилиндра является осевое напряжение. Схожая картина наблюдается для распределения пластических деформаций (рис. 2–4, 6). Далее параметр нагружения Ω уменьшается и в цилиндре начинается разгрузка. Несмотря на то, что цилиндр снова деформируется чисто упруго, решение, представленное в разделе 2, необходимо сращивать на границах $\hat{\beta}_i$ между первичными пластическими областями для определения констант интегрирования B_1–B_8. Поскольку значения $\hat{\beta}_i$ уже известны, на каждой границе достаточно лишь двух условий, в качестве которых выберем непрерывность перемещения и радиального напряжения. Получаемая система является линейной, что позволяет выразить константы B_i аналитически через $\hat{\beta}_i$, $\Omega_{\max}$, Ω и ν, σ_{T}, E. Упругая разгрузка продолжится вплоть до $\Omega = \Omega_{\mathrm{sp}}$, при которой на внутренней поверхности цилиндра начнется повторное пластическое течение и появится область $\mathtt{V}$. Значение $\Omega_{\mathrm{sp}} \cong 6.868$ ($\omega_{\mathrm{sp}} \cong 4662$ с$^{-1}$) найдено из условия (23).

Повторное пластическое течение продолжится вплоть до полной остановки цилиндра. При $\Omega = 0$ цилиндр полностью переходит в состояние повторной пластичности. Решение в интервале $\Omega_{\mathrm{sp}} \geqslant \Omega \geqslant 0$ содержит неизвестные константы интегрирования A_i, B_i и границы β_4, β_5 между областями. Для определения неизвестных используются граничные условия, три условия непрерывности на границах между областями вторичного течения и упругой областью. Также может возникнуть необходимость использовать по два условия

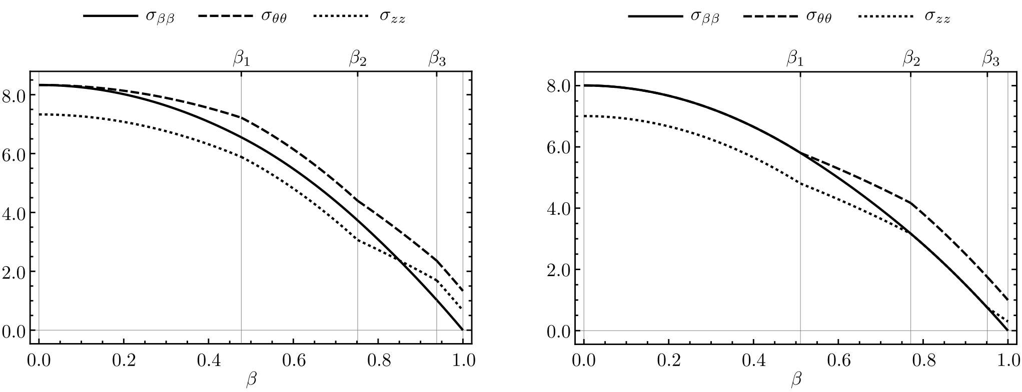


Рис. 5. Напряжения: при $\Omega = \Omega_{\max}$ для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); при $\Omega = \Omega^{\mathrm{T}}_{\max}$ для условия пластичности Треска [7] (справа)

[Figure 5. Stresses: at $\Omega = \Omega_{\max}$ for maximum reduced stress yield criterion (left); at $\Omega = \Omega^{\mathrm{T}}_{\max}$ for Tresca's yield criterion [7] (right)]

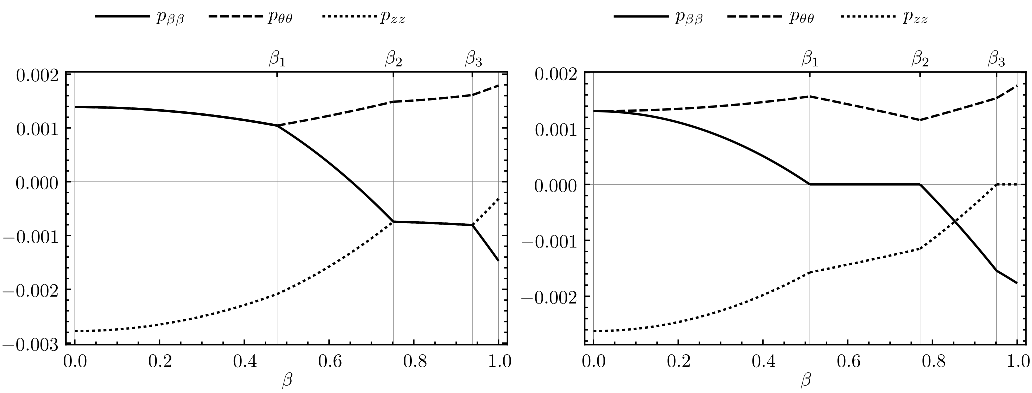


Рис. 6. Пластические деформации: при $\Omega = \Omega_{\max}$ для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); при $\Omega = \Omega^{\mathrm{T}}_{\max}$ для условия пластичности Треска [7] (справа)

[Figure 6. Plastic strains: at $\Omega = \Omega_{\max}$ for maximum reduced stress yield criterion (left); at $\Omega = \Omega^{\mathrm{T}}_{\max}$ for Tresca's yield criterion [7] (rights)]

непрерывности на границах между первичными пластическими областями.

Вторичное пластическое течение разделяется на два интервала: $\Omega_{\mathrm{sp}} \geqslant \Omega \geqslant \Omega_{\mathrm{sp2}}$ и $\Omega_{\mathrm{sp2}} \geqslant \Omega \geqslant 0$. Численно найдено, что $\Omega_{\mathrm{sp2}} \cong 2.264$. Однако внутри интервала могут появляться новые непустые пересечения вторичных и первичных пластических областей, поэтому каждый интервал, в свою очередь, может состоять из нескольких подинтервалов.

Рассмотрим решение в момент остановки цилиндра. В интервале $\Omega_{\mathrm{sp2}} \geqslant \Omega \geqslant 0$ цилиндр состоит из следующих областей:

– пластическая область $\mathtt{V}$ $(0 \leqslant \beta \leqslant \beta_4)$;
– упругая область $\mathtt{E}$ $(\beta_4 \leqslant \beta \leqslant \beta_5)$;
– пластическая область $\mathtt{VI}$ $(\beta_5 \leqslant \beta \leqslant 1)$.

В момент остановки в цилиндре присутствуют следующие пересечения областей первичного и вторичного течения: $\mathtt{V} \cap \mathtt{I}$, $\mathtt{V} \cap \mathtt{III}$, $\mathtt{VI} \cap \mathtt{III}$, $\mathtt{VI} \cap \mathtt{II}$, $\mathtt{VI} \cap \mathtt{IV}$. Очевидно, что $A_1^{(1)} = 0$.

Для определения оставшихся констант интегрирования $A_2^{(1)}$, $A_1^{(3)}$, $A_2^{(3)}$, $A_3^{(3)}$, $A_4^{(3)}$, $A_3^{(2)}$, $A_4^{(2)}$, $A_3^{(4)}$, $A_4^{(4)}$, B_1, B_2 и границ β_4, β_5 между областями используется следующая система условий:

$$\begin{aligned}
&\beta = \hat\beta_1: \ u^{\mathtt{V}\cap\mathtt{I}} = u^{V\cap III}, \quad \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{V}\cap\mathtt{I}} = \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{V}\cap\mathtt{III}};\\
&\beta = \beta_4: \ u^{\mathtt{V}\cap\mathtt{III}} = u^{\mathtt{E}}, \quad \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{V}\cap\mathtt{III}} = \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{E}}, \quad 2\sigma_{zz}^{\mathtt{E}} - \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{E}} - \sigma_{\theta\theta}^{\mathtt{E}} = 2;\\
&\beta = \beta_5: \ u^{\mathtt{E}} = u^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{III}}, \quad \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{E}} = \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{III}}, \quad \sigma_{zz}^{\mathtt{E}} + \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{E}} - 2\sigma_{\theta\theta}^{\mathtt{E}} = 2;\\
&\beta = \hat\beta_2: \ u^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{III}} = u^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{II}}, \quad \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{III}} = \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{II}};\\
&\beta = \hat\beta_3: \ u^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{II}} = u^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{IV}}, \quad \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{II}} = \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{IV}};\\
&\beta = 1: \ \sigma_{\beta\beta}^{\mathtt{VI}\cap\mathtt{IV}} = 0.
\end{aligned}$$

Распределение остаточных напряжений и пластических деформаций приведено на рис. 7 (слева) и 8 (слева). В ходе разгрузки (рис. 5, 7 (слева)) происходит перераспределение напряжений и в цилиндре появляются области

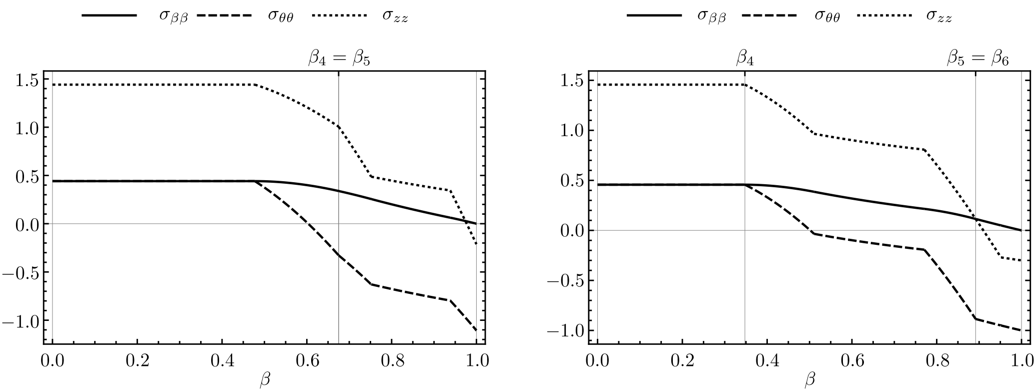


Рис. 7. Напряжения при $\Omega = 0$: для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); для условия пластичности Треска [8] (справа)

[Figure 7. Stresses at $\Omega = 0$: for maximum reduced stress yield criterion (left); for Tresca's yield criterion [8] (right)]

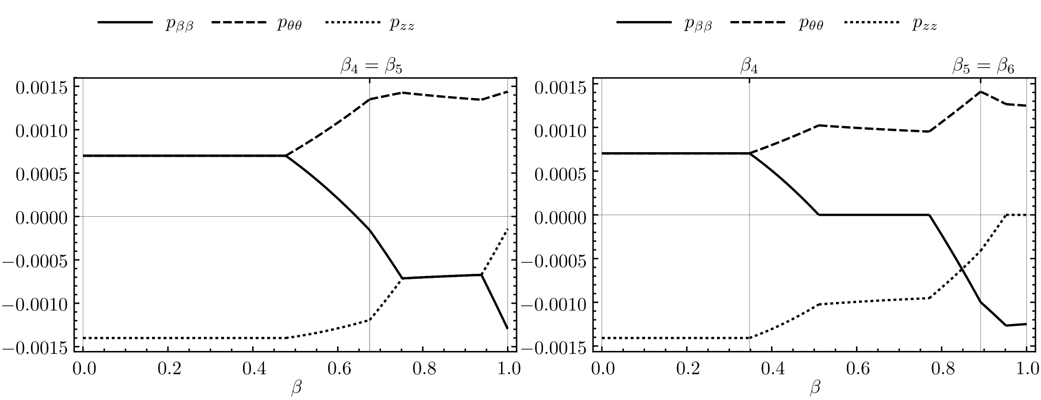


Рис. 8. Пластические деформации при $\Omega = 0$: для условия пластичности Ишлинского—Ивлева (слева); для условия пластичности Треска [8] (справа)

[Figure 8. Plastic strains at $\Omega = 0$ for maximum reduced stress yield criterion (left); for Tresca's yield criterion [8] (right)] сжимающих напряжений. Наибольшим остаточным напряжением является осевое напряжение, а наименьшим — тангенциальное. После повторного пластического течения качественная картина распределения пластических деформаций практически не меняется, однако их величина уменьшается примерно в два раза. Интересно отметить (рис. 7 (слева)), что после остановки в области $0 \geqslant \beta \geqslant 0.5$ наблюдается равенство $\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\theta\theta}$, хотя условие (23) в области V не накладывает такого ограничения на напряжения.

Для сравнения полученных результатов воспользуемся работами [6–8], в которых вращающийся цилиндр исследуется с помощью условия Треска. Установлено, что цилиндр полностью переходит в состояние пластичности при $\Omega = \Omega^{\mathrm{T}}_{\mathrm{fp}} \cong 8.445$ [7]. Максимальное значение параметра нагружения Ω, необходимое для полного повторного течения: $\Omega^{\mathrm{T}}_{\max} \cong 16.892$ [8]. Таким образом, разница в значениях величин Ω_{fp} и $\Omega_{\max}$, вычисленных для условий Треска и Ишлинского—Ивлева, не превосходит 10 %. Распределение напряжений и пластических деформаций для сравниваемых условий пластичности при максимальном значении параметра нагружения изображено на рис. 5 и 6, а после остановки цилиндра — на рис. 7 и 8. Видим, что качественная картина напряженно-деформированного состояния для критериев Треска и Ишлинского—Ивлева имеет существенные отличия.

Заключение. В представленной работе на основе условия максимальных приведенных напряжений получено точное аналитическое решение упругопластической задачи для вращающегося цилиндра. Сформулированы системы алгебраических уравнений для вычисления констант интегрирования и координат границ между областями. Произведено сравнение с результатами, полученными с использованием условия Треска. Проведенный в работе анализ может использоваться для определения верхней оценки несущей способности вращающегося цилиндра, в то время как условие Треска служит для вычисления нижней оценки. Для дальнейших исследований представляет интерес получение универсальных решений для вращающегося цилиндра с помощью общего кусочно-линейного условия пластичности, а также использование условий пластичности, учитывающих влияние гидростатического давления.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Хабаровского федерального исследовательского центра ДВО РАН; проект № 075–01032–20–00.

Библиографический список

1. Sadd M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Amsterdam, New York: Elsevier, Academic Press, 2014.
2. Timoshenko S. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw Hill, 2010.
3. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. vol. 1. New York: McGraw Hill, 1950.
4. Hodge P. G., Balaban M. Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder // *Int J. Mech. Sci.*, 1962. vol. 4, no. 6. pp. 465–476. doi: 10.1016/S0020-7403(62)80008-3.
5. Gamer U. On the applicability of Tresca's yield condition to the rotating solid shaft // *Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl.*, 1984. vol. 29, no. 1. pp. 27–30.

6. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // *Z. angew. Math. Phys.*, 1984. vol. 35, no. 5. pp. 601–617. doi: 10.1007/BF00952107.
7. Gamer U., Mack M., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *Int. J. Eng. Sci.*, 1997. vol. 35, no. 3. pp. 253–267. doi: 10.1016/S0020-7225(96)00085-7.
8. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation // *Z. angew. Math. Mech.*, 1998. vol. 78, no. 2. pp. 75–86. doi: 10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V.
9. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends // *Tech. Mech.*, 1991. vol. 12, no. 2. pp. 119–124.
10. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mechanica*, 1983. vol. 50. pp. 1–8. doi: 10.1007/BF01170437.
11. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends // *Int. J. Solids Str.*, 1991. vol. 27, no. 11. pp. 1461–1476. doi: 10.1016/0020-7683(91)90042-E.
12. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft // *Eur. J. Mech.–A/Solids*, 2003. vol. 22, no. 2. pp. 295–307. doi: 10.1016/S0997-7538(02)00002-5.
13. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts // *Acta Mechanica*, 2004. vol. 168. pp. 129–144. doi: 10.1007/s00707-004-0088-z.
14. Eraslan A. N. and T. Akis On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // *Acta Mechanica*, 2006. vol. 181. pp. 43–63. doi: 10.1007/s00707-005-0276-5.
15. Akis T., Eraslan A. N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress // *Arch. Appl. Mech.*, 2007. vol. 77. pp. 745–765. doi: 10.1007/s00419-007-0123-3.
16. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts // *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007. vol. 8, no. 6. pp. 391–399. doi: 10.1080/15502280701577842.
17. Eraslan A. N., Arslan E. Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts // *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2007. vol. 31, no. 5. pp. 273–287.
18. Nejad M.Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials // *Int. J. Eng. Sci.*, 2015. vol. 86. pp. 26–43. doi: 10.1016/j.ijengsci.2014.10.002.
19. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet // *Ing. Arch.*, 1932. vol. 3. pp. 215–235. doi: 10.1007/BF02079970.
20. Ишлинский А. Ю. Гипотеза прочности формоизменения // *Ученые записки МГУ. Механика*, 1940. № 46. С. 117–124.
21. Hill R. On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test // *Phil. Mag, Ser. 7*, 1950. vol. 41, no. 319. pp. 733–744. doi: 10.1080/14786445008561006.
22. Ivlev D. D. On the development of a theory of ideal plasticity // *J. Appl. Math. Mech.*, 1958. vol. 22, no. 6. pp. 1221–1230. doi: 10.1016/0021-8928(58)90050-9.
23. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности.* М.: Физматлит, 2003. 704 с.
24. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259. doi: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.20.
25. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К использованию кусочно-линейных пластических потенциалов в нестационарной теории температурных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 23–39. doi: 10.14498/vsgtu1576.
26. Буренин А. А., Каинг М., Ткачева А. В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Дальневост. матем. журн.*, 2018. Т. 18, № 2. С. 131–146.

27. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion // *J. Zhejiang Univ., Eng. Sci.*, 2008. vol. 42, no. 9. pp. 1540–1544. doi: 10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013.
28. Zhao D.-W., Xie Y.-J., Liu X.-H., Wang G.-D. Three-dimensional analysis of rolling by twin shear stress yield criterion // *J. Iron Steel Res. Int.*, 2006. vol. 13. pp. 21–26. doi: 10.1016/S1006-706X(06)60104-0.
29. Zhu X., Pang M., Zhang Y. Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion // *Chinese J. Appl. Mech.*, 2011. vol. 28, no. 2. pp. 135–138.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1737

MSC: 74C05, 74B05, 74G05

Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion

A. N. Prokudin

Institute of Machinery and Metallurgy,
Khabarovsk Federal Research Center, Far-East Branch of RAS,
1, Metallurgov, Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract

An elasto-plastic rotating solid cylinder under plane strain condition is investigated. The analysis is based on infinitesimal strain theory, maximum reduced stress yield criterion, its associated flow rule and perfectly plastic material behavior. It is assumed that angular velocity is monotonically increasing from 0 to the maximum value and then is monotonically reducing down to 0. In this investigation both loading and unloading phases are considered. It is assumed that angular velocity varies slowly with time, so angular acceleration can be neglected. Under above mentioned assumptions, there is only one non-trivial equilibrium equation in a cylinder.

It is established that with increasing angular velocity four plastic regions appear in a cylinder. The last one forms at angular velocity which exceeds fully-plastic limit. Stresses image points of plastic regions lie on different sides and corners of yield surface. As the angular speed decreases, the whole cylinder behaves elastically again. At particular value of angular velocity secondary plastic flow may starts at the center of cylinder. Replasticization is possible only for sufficiently high maximum angular speed and the entire cylinder may be replasticized. Four secondary plastic regions may appear in the cylinder under unloading. The stresses image points in primary and secondary regions lie on opposite sides and corners of yield surface. In the present analysis it is assumed that the entire cylinder becomes replasticized just at stand-still. In this case only two secondary plastic regions emerge.

Exact solutions for all stages of deformation are obtained. The systems of algebraic equations for determination of integration constants and border radii are formulated. The obtained results are illustrated by the distributions of stresses and plastic strains in the cylinder rotating at different speeds. Presented solutions are compared with known analytical solutions based on Tresca's criterion.

Keywords: elastic-plastic strains, exact solution, rotating shaft, maximum reduced stress yield criterion.

Research Article

Please cite this article in press as:
Prokudin A. N. Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94. doi: 10.14498/vsgtu1737 (In Russian).

Author's Details:
Aleksandr N. Prokudin https://orcid.org/0000-0002-5156-424X
Cand. Tech. Sci.; Leader Researcher; e-mail: sunbeam_85@mail.ru

Received: 25th August, 2019 / Revised: 12th December, 2019 /
Accepted: 10th February, 2020 / First online: 2nd April, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the State Assignment of the Khabarovsk Federal Research Center, Far-Eastern Branch of RAS; project no. 075–01032–20–00.

References

1. Sadd M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics.* Amsterdam, New York, Elsevier, Academic Press, 2014.
2. Timoshenko S. *Theory of Elasticity.* New York, McGraw Hill, 2010.
3. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1. New York, McGraw Hill, 1950.
4. Hodge P. G., Balaban M. Elastic—plastic analysis of a rotating cylinder, *Int J. Mech. Sci.*, 1962, vol. 4, no. 6, pp. 465–476. `doi: 10.1016/S0020-7403(62)80008-3`.
5. Gamer U. On the applicability of Tresca's yield condition to the rotating solid shaft, *Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl.*, 1984, vol. 29, no. 1, pp. 27–30.
6. Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft, *Z. angew. Math. Phys.*, 1984, vol. 35, no. 5, pp. 601–617. `doi: 10.1007/BF00952107`.
7. Gamer U., Mack M., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 253–267. `doi: 10.1016/S0020-7225(96)00085-7`.
8. Lindner T., Mack W. Residual stresses in an elastic-plastic solid shaft with fixed ends after previous rotation, *Z. angew. Math. Mech.*, 1998, vol. 78, no. 2, pp. 75–86. `doi: 10.1002/(SICI)1521-4001(199802)78:2<75::AID-ZAMM75>3.0.CO;2-V`.
9. Mack W. The rotating elastic-plastic solid shaft with free ends, *Tech. Mech.*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 119–124.
10. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube, *Acta Mechanica*, 1983, vol. 50, pp. 1–8. `doi: 10.1007/BF01170437`.
11. Mack W. Rotating elastic-plastic tube with free ends, *Int. J. Solids Str.*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1461–1476. `doi: 10.1016/0020-7683(91)90042-E`.
12. Eraslan A. N. On the linearly hardening rotating solid shaft, *Eur. J. Mech.–A/Solids*, 2003, vol. 22, no. 2, pp. 295–307. `doi: 10.1016/S0997-7538(02)00002-5`.
13. Eraslan A. N. Von Mises' yield criterion and nonlinearly hardening rotating shafts, *Acta Mechanica*, 2004, vol. 168, pp. 129–144. `doi: 10.1007/s00707-004-0088-z`.
14. Eraslan A. N. and T. Akis On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *Acta Mechanica*, 2006, vol. 181, pp. 43–63. `doi: 10.1007/s00707-005-0276-5`.
15. Akis T., Eraslan A. N. Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress, *Arch. Appl. Mech.*, 2007, vol. 77, pp. 745–765. `doi: 10.1007/s00419-007-0123-3`.
16. Argeso H., Eraslan A. N. A computational study on functionally graded rotating solid shafts, *Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 2007, vol. 8, no. 6, pp. 391–399. `doi: 10.1080/15502280701577842`.
17. Eraslan A. N., Arslan E. Plane strain analytical solutions to rotating partially plastic graded hollow shafts, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 2007, vol. 31, no. 5, pp. 273–287.
18. Nejad M.Z., Fatehi P. Exact elasto-plastic analysis of rotating thick-walled cylindrical pressure vessels made of functionally graded materials, *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 86, pp. 26–43. `doi: 10.1016/j.ijengsci.2014.10.002`.
19. Schmidt R. Über den Zusammenhang von Spannungen und Formänderungen im Verfestigungsgebiet, *Ing. Arch.*, 1932, vol. 3, pp. 215–235. `doi: 10.1007/BF02079970`.

20. Ishlinsky A. Yu. Hypothesis of strength of shape change, *Uchenye zapiski MGU. Mekhanika*, 1940, no. 46, pp. 117–124 (In Russian).
21. Hill R. On the inhomogeneous deformation of a plastic lamina in a compression test, *Phil. Mag, Ser. 7*, 1950, vol. 41, no. 319, pp. 733–744. doi: 10.1080/14786445008561006.
22. Ivlev D. D. On the development of a theory of ideal plasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 1958, vol. 22, no. 6, pp. 1221–1230. doi: 10.1016/0021-8928(58)90050-9.
23. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaia teoriia plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 704 pp. (In Russian)
24. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. On the calculation of unsteady thermal stresses in elastoplastic solids, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 245–259 (In Russian). doi: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.20.
25. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. The use of piecewise linear plastic potentials in the nonstationary theory of temperature stresses, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 23–39 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1576.
26. Burenin A. A., Kaing M., Tkacheva A. V. To the calculation of plane stressed states of the theory of unsteady temperature stresses in elastoplastic bodies, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 131–146 (In Russian).
27. Cai Q., Pang M., Zhang Y.-Q., Liu X. Elastic-plastic stress distribution of rotating annular disc based on twin-shear stress yield criterion, *J. Zhejiang Univ., Eng. Sci.*, 2008, vol. 42, no. 9, pp. 1540–1544. doi: 10.3785/j.issn.1008-973X.2008.09.013.
28. Zhao D.-W., Xie Y.-J., Liu X.-H., Wang G.-D. Three-dimensional analysis of rolling by twin shear stress yield criterion, *J. Iron Steel Res. Int.*, 2006, vol. 13, pp. 21–26. doi: 10.1016/S1006-706X(06)60104-0.
29. Zhu X., Pang M., Zhang Y. Estimation of burst pressure of pipeline using twin-shear stress yield criterion, *Chinese J. Appl. Mech.*, 2011, vol. 28, no. 2, pp. 135–138.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 95–115
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1746

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:539.3

Численное моделирование несоосных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью

С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев, А. Н. Сенин

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Акад. Королёва, 1.

Аннотация

Работа посвящена численному анализу динамического поведения горизонтально ориентированных несоосных оболочек, кольцевой зазор между которыми полностью или частично заполнен текущей жидкостью. Решение задачи осуществляется в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. При моделировании упругих тел предполагается, что их криволинейная поверхность достаточно точно аппроксимируется совокупностью плоских сегментов, деформации в которых определяются с помощью соотношений классической теории пластин. Движение идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением, которое совместно с условием непроницаемости и соответствующими граничными условиями преобразуется с помощью метода Бубнова—Галёркина. Математическая постановка задачи динамики тонкостенных конструкций основана на вариационном принципе возможных перемещений. Оценка устойчивости базируется на вычислении и анализе комплексных собственных значений связанной системы уравнений. Верификация модели произведена для случая неподвижной жидкости путём сопоставления результатов с известными решениями.

Научная статья

Образец для цитирования

Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Численное моделирование несоосных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 95–115. doi: 10.14498/vsgtu1746.

Сведения об авторах

Сергей Аркадьевич Бочкарёв https://orcid.org/0000-0002-9722-1269
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Сергей Владимирович Лекомцев https://orcid.org/0000-0002-8331-2979
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Александр Николаевич Сенин https://orcid.org/0000-0002-7537-0001
младший научный сотрудник; лаборатория механики функциональных материалов; e-mail: senin.a@icmm.ru

Представлен анализ влияния величины кольцевого зазора и уровня его заполнения жидкостью при различном значении эксцентриситета между осями вращения жёстко закреплённых с обоих краёв оболочек на границы гидроупругой устойчивости. Показано, что для несоосных оболочек уменьшение уровня заполнения приводит к повышению границ устойчивости. Продемонстрирована зависимость критической скорости течения жидкости от отклонения внутренней оболочки от соосного положения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, несоосные оболочки, потенциальная сжимаемая жидкость, частичное заполнение, гидроупругая устойчивость.

Получение: 19 сентября 2019 г. / Исправление: 5 ноября 2019 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 4 марта 2020 г.

Введение. Содержащие жидкость или газ коаксиальные цилиндрические оболочки являются частью многих индустриальных приложений и используются в различных областях техники. Они уже на протяжении значительного времени выступают в качестве объекта разнообразных теоретических исследований. Обширная библиография, посвящённая анализу коаксиальных оболочек, взаимодействующих как с неподвижной, так и с текущей жидкостью, представлена в монографии [1]. В недавних публикациях авторов [2,3] также упомянуты редко цитируемые, как правило, пионерские работы отечественных исследователей. Ниже приводится обзор статей, в которых рассмотрены различные аспекты динамического поведения взаимодействующих с жидкостью соосных и несоосных конструкций в линейной постановке.

Бесконечно длинные коаксиальные оболочки, содержащие текущую как в кольцевом канале, так и во внутренней оболочке жидкость, исследованы в [4]. В аналитических моделях [5–6] движение оболочек конечной длины описывается с помощью теории тонких оболочек Флюгге. Обобщённые гидродинамические силы определяются в рамках потенциальной теории и вычисляются с помощью преобразования Фурье. Решение задачи осуществляется методом Галёркина. Полученные в [7] экспериментальные данные демонстрируют, что при жёсткой внешней оболочке потеря устойчивости осуществляется на значительно меньших скоростях течения, чем предсказывает аналитическая модель. Предполагается, что причиной таких расхождений являются несовершенства формы конструкции. Приближённая теория для оценки динамического поведения системы коаксиальных оболочек, взаимодействующих с несжимаемой жидкостью, предложена в [8]. Показано, что собственные частоты колебаний в случае неподвижной жидкости и критические скорости потери устойчивости хорошо согласуются с имеющимися численными результатами. Анализ устойчивости коаксиальных оболочек, взаимодействующих с двумя потоками идеальной сжимаемой жидкости при различных комбинациях граничных условий и свойствах материалов оболочек, выполнен в [9–10] с применением метода конечных элементов (МКЭ).

В [11] решение трёхмерных линеаризованных уравнений Навье—Стокса ищется в виде суммы скалярного и векторного потенциалов, а системы коаксиальных оболочек, содержащих жидкость, — в классе бегущих волн. Свободные и вынужденные колебания коаксиальных оболочек с вязкой жидкостью в кольцевом зазоре, которая описывается линеаризованными двумерными уравнениями Навье—Стокса, исследуются аналитически в работе [12]. Продемонстрировано, что размер кольцевого зазора и вязкость жидкости оказывают значительное влияние на демпфирование колебаний. Аналогичный подход используется в [13] для текущей жидкости. Здесь анализируются сложности в реализации условия прилипания, задаваемого на стенках свободно опёртых оболочек. Показано, что влияние нестационарных вязкостных сил возрастает с уменьшением ширины кольцевого канала. В [14] для жёстко закреплённых и в [6] для консольных оболочек вводятся в рассмотрение стационарные силы вязкого сопротивления. Показано, что они оказывают существенное влияние на критические скорости течения жидкости. В рамках аналогичной модели в [15] выполнено исследование влияния на устойчивость ряда системных параметров при кольцевом течении жидкости. В [16] представлена модель, учитывающая как стационарные, так и нестационарные силы вязкого сопротивления. Они определяются из решения линеаризованных уравнений Навье—Стокса с использованием численной процедуры, основанной на конечно-разностном методе. Продемонстрировано, что эта модель лучше согласуется с экспериментальными данными [7,17], чем модель, учитывающая только стационарные силы вязкого сопротивления. Исследование колебаний оболочек с неоднородными ограничениями в кольцевом потоке как невязкой, так и вязкой жидкости осуществлено в [18–19]. Для этих целей использован метод Релея—Ритца, в котором в качестве допустимых функций были применены формы колебаний свободно опёртых оболочек в вакууме. В работах [20–22] в ходе численного решения задачи методом конечных элементов обнаружено существенное расхождение с известными числено-аналитическими решениями для тех случаев, когда потеря устойчивости осуществляется на высоких модах колебаний. В статьях [23–24] представлено исследование коаксиальных оболочек, содержащих текущую только в кольцевом канале идеальную [23] или вязкую [24] жидкость, в том числе с учётом влияния температурных эффектов. Анализ амплитудно-частотных характеристик подкреплённых конструкций, взаимодействующих с кольцевым слоем вязкой несжимаемой жидкости, осуществлён в [25].

Отметим, что в перечисленных выше работах рассматриваются оболочки, в которых оси вращения совпадают. При этом жидкая среда полностью заполняет как пространство между двумя оболочками, так и, как правило, объём внутренней оболочки. В этом случае, как и при частичном заполнении вертикально ориентированных оболочек, задача может быть рассмотрена в осесимметричной постановке. Частичное заполнение жидкостью горизонтально расположенных конструкций, как и несовпадение их осей вращения при любой ориентации, нарушает симметричность по окружной координате. Это приводит к необходимости использования более сложных пространственных моделей. В качестве примера можно привести работы [2,3], в которых представлены трёхмерные алгоритмы, предназначенные для анализа собственных колебаний и гидроупругой устойчивости соосных горизонтально ориентированных оболочек, частично заполненных идеальной [3] или вязкой [2] жидкостью.

Библиографический список исследований, в которых рассматриваются несоосные оболочки, существенно ограничен. В [26] анализируется влияние соосности оболочек на динамическое поведение системы с текущей жидкостью. Показано, что смещение осей оказывает воздействие на колебательный процесс только в случае узкого кольцевого зазора между оболочками. Влияние эксцентриситета на скорости потери устойчивости не оценивалось. Двумерные исследования бесконечных оболочек с неподвижной и текущей жидкостью представлены в [27,28]. В первой из работ отмечается, что с ростом эксцентриситета происходит возрастание присоединённой массы жидкости и, следовательно, снижение собственных частот колебаний. В следующих работах рассматриваются собственные колебания несоосных оболочек, расположенных вертикально. В аналитических исследованиях [29,30] решение волнового уравнения, описывающего поведение жидкости в обеих полостях, осуществляется с помощью функций Бесселя. С этой целью в рассмотрение вводятся смещённые координаты, преобразование к которым выполняется посредством теоремы Бельтрами. Достоверность полученных результатов не проверяется. В работе [31] анализ пьезокерамических оболочек с кольцевым слоем жидкости осуществляется в трёхмерной постановке с использованием МКЭ. Представлено исследование низших собственных частот и форм колебаний при различных вариантах граничных условий на краях оболочек, уровне заполнения жидкостью и смещении внутренней оболочки, в том числе с учётом электроупругих свойств материала.

Из приведённого библиографического обзора можно заключить, что в настоящий момент в должной степени не исследовано влияние несоосности вложенных друг в друга горизонтальных цилиндрических оболочек на критические скорости потока жидкости, текущей между ними. Выполнение такого анализа является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассматриваются горизонтально ориентированные упругие цилиндрические оболочки длиной L, имеющие толщины $h^{(1)}$ и $h^{(2)}$ и радиусы $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, пространство между которыми на высоту H заполнено текущей со скоростью U идеальной сжимаемой жидкостью (рис. 1). Здесь и далее верхние индексы «(1)» и «(2)» характеризуют внутреннюю и внешнюю оболочки соответственно. На высоту заполнения H накладывается ограничение $R^{(2)} - R^{(1)} \leqslant H \leqslant 2R^{(2)}$, гарантирующее смоченность обеих оболочек. Ось вращения внутренней оболочки смещена в поперечном сечении относительно наружной на величину a в направлении угла θ, отсчитываемого от оси вращения внешней оболочки против часовой стрелки в направлении, обратном оси аппликат. Смещение a подчинено условию $|a| < R^{(2)} - R^{(1)}$, обеспечивающему отсутствие контакта между двумя оболочками. Необходимо исследовать влияние отклонения оболочек от соосного расположения на границы гидроупругой устойчивости при различных значениях кольцевого зазора и уровнях его заполнения жидкостью.

Определяющие поведение упругих оболочек соотношения записываются в предположении, что криволинейная поверхность конструкции может быть представлена в виде совокупности плоских сегментов [32]. Деформации в каждом из них вычисляются в рамках классической теории тонких пластин [33] в декартовых координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанных с боковой поверхностью тела:

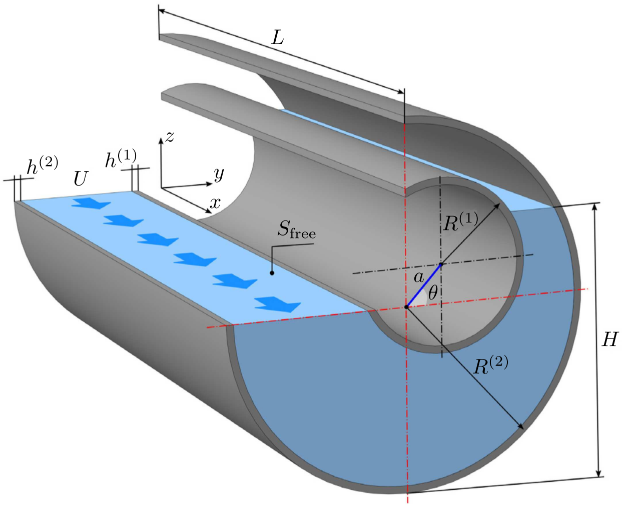


Рис. 1. Сечение некоаксиальных цилиндрических оболочек, кольцевой зазор между которыми частично заполнен текущей жидкостью
[Figure 1. Section of eccentric cylindrical shells with the annular gap partially filled with a flowing fluid]

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} = \left\{\varepsilon^{(i)}_{\bar{x}\bar{x}}, \varepsilon^{(i)}_{\bar{y}\bar{y}}, \gamma^{(i)}_{\bar{x}\bar{y}}\right\}^{\top} = \left\{\frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \bar{x}}\right\}^{\top} + \\ + \bar{z}^{(i)}\left\{-\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{x}^2}, -\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{y}^2}, -2\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial \bar{x}\,\partial \bar{y}}\right\}^{\top}. \quad (1)$$

Здесь и далее прямой чертой сверху обозначены величины, записанные в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $u^{(i)}, v^{(i)}$ и $w^{(i)}$ — компоненты перемещений срединной поверхности в направлении этих осей, $i = \overline{1, 2}$.

Физические соотношения, связывающие вектор обобщённых усилий и моментов $\bar{\mathbf{T}}^{(i)}$ и вектор обобщённых деформаций $\bar{\varepsilon}^{(i)}$, записываются следующим образом:

$$\bar{\mathbf{T}}^{(i)} = \left\{T^{(i)}_{\bar{x}\bar{x}}, T^{(i)}_{\bar{y}\bar{y}}, T^{(i)}_{\bar{x}\bar{y}}, M^{(i)}_{\bar{x}\bar{x}}, M^{(i)}_{\bar{y}\bar{y}}, M^{(i)}_{\bar{x}\bar{y}}\right\} = \mathbf{D}^{(i)}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}.$$

Для изотропного материала коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей $\mathbf{D}^{(i)}$, определяются известным образом [33].

Математическая формулировка задачи динамики упругих тел основана на вариационном принципе возможных перемещений, который в матричном виде записывается как

$$\int_{S_s^{(i)}} \left(\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}\right)^{\top}\mathbf{D}^{(i)}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)}\mathrm{d}S + \int_{V_s^{(i)}} \left(\delta\bar{\mathbf{u}}^{(i)}\right)^{\top}\rho_s^{(i)}\ddot{\bar{\mathbf{u}}}^{(i)}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma^{(i)}} \left(\delta\bar{\mathbf{u}}^{(i)}\right)^{\top}\mathbf{P}^{(i)}\mathrm{d}S = 0, \quad (2)$$

где $\rho_s^{(i)}$ — плотность материалов оболочек; $\bar{\mathbf{u}}^{(i)} = \left\{u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}, \theta^{(i)}_{\bar{x}}, \theta^{(i)}_{\bar{y}}, \theta^{(i)}_{\bar{z}}\right\}^{\top}$ — векторы перемещений и углов поворота внутренней и внешней оболочек; $\mathbf{P}^{(i)} = \left\{0, 0, p^{(i)}, 0, 0, 0\right\}^{\top}$ — векторы поверхностных нагрузок оболочек; $p^{(i)}$ — гидродинамическое давление.

Движение идеальной сжимаемой жидкости описывается потенциальной теорией, волновое уравнение которой для потенциала возмущения скорости ϕ

в декартовых координатах (x, y, z) имеет вид [34]

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{2U}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial x} + \frac{U^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где c — скорость звука в жидкой среде. Вообще говоря, сжимаемость жидкости в случае дозвукового течения оказывает крайне незначительное влияние на критические скорости потери устойчивости, как это показано в [35]. Однако реализуемый в работе алгоритм является универсальным и может быть использован для задач аэроупругости.

Предполагается, что свободная поверхность жидкости S_{free} не перемещается, на ней отсутствуют динамическое давление и поверхностное натяжение. Соответствующее граничное условие имеет вид [36]

$$\phi = 0. \tag{4}$$

Потенциал возмущения скорости на входе и выходе из кольцевого канала между оболочками подчиняется следующим граничным условиям:

$$x = 0: \quad \phi = 0, \quad x = L: \quad \partial\phi/\partial x = 0. \tag{5}$$

На смоченных поверхностях $S_\sigma^{(i)} = S_f \cap S_s^{(i)}$ задаются условия непроницаемости

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \pm\Big(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial t} + U\frac{\partial w^{(i)}}{\partial x}\Big), \tag{6}$$

где S_f и $S_s^{(i)}$ — поверхности, ограничивающие объёмы жидкости V_f и оболочек $V_s^{(i)}$. Здесь и далее знак перед формулой зависит от направления нормалей к внешним поверхностям оболочек.

Гидродинамическое давление p, действующее со стороны жидкости на оболочки, вычисляется из уравнения Бернулли

$$p^{(i)} = \pm\rho_f\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big),$$

где ρ_f — плотность жидкости.

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (4), (5) и (6) преобразуется к слабой форме с помощью метода Бубнова—Галёркина [35]:

$$\int_{V_f} \nabla F_n \nabla\hat{\phi}\,\mathrm{d}V + \int_{V_f} F_n\Big(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} + \frac{2U}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t\,\partial x} + \frac{U^2}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}\Big)\,\mathrm{d}V + \\ + \int_{S_\sigma^{(1)}} F_n\Big(\frac{\partial\hat{w}^{(1)}}{\partial t} + U\frac{\partial\hat{w}^{(1)}}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}S - \\ - \int_{S_\sigma^{(2)}} F_n\Big(\frac{\partial\hat{w}^{(2)}}{\partial t} + U\frac{\partial\hat{w}^{(2)}}{\partial x}\Big)\,\mathrm{d}S = 0, \quad n = \overline{1, m_f}, \tag{7}$$

где $\hat{\phi}$ и $\hat{w}^{(i)}$ — аппроксимация потенциала возмущения скорости и нормальной компоненты вектора перемещений оболочек; F_n и m_f — базисные функции и их количество.

Численная реализация. Численное решение задачи выполнено методом конечных элементов [32]. Потенциал возмущения скорости $\hat{\phi}$, базисные функции F_n и мембранные перемещения оболочек $(u^{(i)}, v^{(i)})$ аппроксимируются линейными функциями формы, а изгибные перемещения оболочек $w^{(i)}$ — неконформными функциями формы Эрмита. Дискретизация областей жидкости и оболочек осуществляется пространственными призматическими и плоскими четырёхугольными конечными элементами соответственно.

Связанная система уравнений, описывающая взаимодействие упругих оболочек (2) и жидкости (7), формулируется в координатах (x, y, z) и записывается в матричном виде:

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{u}}^{(1)}, \ddot{\mathbf{u}}^{(2)}, \ddot{\boldsymbol{\phi}}\}^\top + \mathbf{C}\{\dot{\mathbf{u}}^{(1)}, \dot{\mathbf{u}}^{(2)}, \dot{\boldsymbol{\phi}}\}^\top + (\mathbf{K}+\mathbf{A})\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\phi}\}^\top = 0, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}\{\mathbf{K}_s^{(1)},\ \mathbf{K}_s^{(2)},\ \mathbf{K}_f\}, \quad \mathbf{M} = \operatorname{diag}\{\mathbf{M}_s^{(1)},\ \mathbf{M}_s^{(2)},\ \mathbf{M}_f\},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{sf}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{C}_{fs}^{(1)} & \mathbf{C}_{fs}^{(2)} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{sf}^{(1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{sf}^{(2)} \\ -\mathbf{A}_{fs}^{(1)} & \mathbf{A}_{fs}^{(2)} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{K}}_s^{(i)} = \int_{S_s^{(i)}} \left(\mathbf{B}^{(i)}\right)^\top \mathbf{D}^{(i)} \mathbf{B}^{(i)} \mathrm{d}S, \quad \bar{\mathbf{M}}_s^{(i)} = \int_{V_s^{(i)}} \rho_s^{(i)} \left(\mathbf{N}^{(i)}\right)^\top \mathbf{N}^{(i)} \mathrm{d}V,$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{sf}^{(i)} = \int_{S_\sigma^{(i)}} \rho_f \left(\mathbf{N}_w^{(i)}\right)^\top \mathbf{F} \mathrm{d}S, \quad \bar{\mathbf{A}}_{sf}^{(i)} = \int_{S_\sigma^{(i)}} \rho_f U \left(\mathbf{N}_w^{(i)}\right)^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathrm{d}S,$$

$$\mathbf{K}_f = \int_{V_f} \Big(\frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\Big) \mathrm{d}V, \quad \mathbf{M}_f = \int_{V_f} \frac{1}{c^2} \mathbf{F}^\top \mathbf{F}\, \mathrm{d}V,$$

$$\mathbf{C}_f = \int_{V_f} \frac{2U}{c^2} \mathbf{F}^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathrm{d}V, \quad \mathbf{A}_f = -\int_{V_f} \frac{U^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}^\top}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathrm{d}V,$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{fs}^{(i)} = -\int_{S_\sigma^{(i)}} \mathbf{F}^\top \mathbf{N}_w^{(i)} \mathrm{d}S, \quad \bar{\mathbf{A}}_{fs}^{(i)} = -\int_{S_\sigma^{(i)}} U \mathbf{F}^\top \frac{\partial \mathbf{N}_w^{(i)}}{\partial x} \mathrm{d}S.$$

Здесь $\mathbf{u}^{(i)}$ и $\boldsymbol{\phi}$ — обобщённые векторы перемещений и углов поворота внутренней и наружной оболочек и потенциала возмущения скорости; $\mathbf{B}^{(i)}$ — матрица градиентов, связывающая вектор деформаций с вектором узловых перемещений оболочечного конечного элемента; $\mathbf{F}$, $\mathbf{N}^{(i)}$ и $\mathbf{N}_w^{(i)}$ — функции формы для потенциала возмущения скорости жидкости, обобщённого вектора узловых перемещений оболочек и его нормальной составляющей. В определяющих соотношениях (1) отсутствует уравнение для поворота вокруг оси $\bar{z}$. Если все элементы, имеющие общий узел, будут компланарны, то жёсткость в этом направлении станет нулевой. В этом случае любое возмущение, способствующее повороту, существенно повлияет на корректность решения. С целью устранения этой проблемы вводится фиктивный момент $M_{\bar{z}}$, который добавляется в матрицу жёсткости конечного элемента оболочки [32]. Матрицы $\bar{\mathbf{K}}_s^{(i)}$ и $\bar{\mathbf{M}}_s^{(i)}$ формируются в координатах $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, связанных с боковой поверхностью конструкции. Преобразование узловых перемещений к глобальным декартовым координатам (x, y, z) осуществляется для каждого элемента с помощью матрицы направляющих косинусов $\boldsymbol{\gamma}$ следующим образом: $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{L}^\top \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$, где $\mathbf{L} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}\}$. Тогда $\mathbf{K}_s^{(i)} = \mathbf{L}^\top \bar{\mathbf{K}}_s^{(i)} \mathbf{L}$, $\mathbf{M}_s^{(i)} = \mathbf{L}^\top \bar{\mathbf{M}}_s^{(i)} \mathbf{L}$. Аналогично формируются матрицы $\bar{\mathbf{C}}_{sf}^{(i)}$, $\bar{\mathbf{A}}_{sf}^{(i)}$, $\bar{\mathbf{C}}_{fs}^{(i)}$ и $\bar{\mathbf{A}}_{fs}^{(i)}$, возникающие в результате гидроупругого взаимодействия.

С учётом представления возмущённого движения оболочек и жидкости в виде $\left(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\phi}\right) = \left(\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}\right) \exp(\lambda t)$ исходная система уравнений (8) сводится к обобщённой задаче на собственные значения, формулируемой как

$$\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} + \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = 0, \tag{9}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)}$ и $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ — векторные функции координат, $\lambda = \delta + \mathrm{i}\,\omega$ — характеристический показатель ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$), в котором полагается, что ω — собственная частота колебаний, а δ — величина, отвечающая за демпфирование системы, $\mathbf{I}$ — единичная матрица, $\mathbf{x} = \left\{\tilde{\mathbf{u}}^{(1)},\ \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}\right\}^\top$.

Вычисление комплексных собственных значений системы (9) осуществляется посредством алгоритма, основанного на неявно перезапускаемом методе Арнольди [37]. Оценка устойчивости базируется на анализе характеристических чисел λ, получаемых при последовательно возрастающей скорости течения жидкости.

Результаты расчётов. В представленных ниже примерах рассмотрена устойчивость системы горизонтально ориентированных жёстко закреплённых на обоих краях ($u = v = w = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$) цилиндрических оболочек ($L = 1$ м, $R^{(2)} = 0.1$ м, $h^{(1)} = h^{(2)} = h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, модули Юнга $E^{(1)} = E^{(2)} = E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициенты Пуассона $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu = 0.3$, $\rho_s^{(1)} = \rho_s^{(2)} = \rho_s = 7800$ кг/м^3), в кольцевом канале между которыми содержится поток идеальной сжимаемой жидкости ($\rho_f = 1000$ кг/м^3, $c = 1500$ м/с). Расчёты выполнялись при различных значениях уровня заполнения кольцевого канала и радиуса внутренней оболочки $R^{(1)}$, определяемого из соотношения $k = \left(R^{(2)} - R^{(1)}\right)/R^{(1)}$. Здесь параметр k характеризует безразмерную величину кольцевого зазора для случая соосного расположения оболочек.

Для представления полученных результатов используются безразмерные уровень заполнения жидкостью η, смещение внутренней оболочки (эксцентриситет) ξ и критические скорости потери устойчивости Λ

$$\eta = H(2R^{(2)})^{-1}, \quad \xi = a(R^{(2)} - R^{(1)})^{-1}, \quad \Lambda = U[\rho_s(1 - \nu^2)/E]^{0.5} \cdot 10^3.$$

В предыдущих работах авторов [2,3] верификация разработанной модели была осуществлена посредством сравнения собственных частот колебаний и критических скоростей течения с известными решениями, полученными для случая неподвижной [2] и текущей жидкости [3], полностью заполняющей кольцевой канал соосной конструкции. Поскольку для несоосных оболочек отсутствуют публикации с доказанной достоверностью приводимых результатов, подтверждение корректности решений в рамках описанного выше конечно-элементного алгоритма осуществляется путём сравнения с данными, полученными в пакете ANSYS. В последнем при моделировании тонкостенных тел используются элементы `SHELL181` (теория Рейсснера—Миндлина), а при тоделировании жидкости — `FLUID30` (уравнения акустической среды) [38]. Количество используемых элементов в обеих моделях одинаково и равно 4 800 элементам для каждой из оболочек (по 40 и 120 в меридиональном и окружном направлениях) и 96 000 элементам для жидкости (по 40, 120 и 20 в меридиональном, окружном и радиальном направлениях соответственно). В таблице приведены собственные частоты колебаний ω (Гц) для системы с упругой внутренней и абсолютно жёсткой наружной оболочками ($L = 0.3$ м, $R^{(1)} = 0.1$ м, $R^{(2)} = 1.3$ м, $h^{(1)} = 2 \cdot 10^{-3}$ м, $E^{(1)} = 6.9 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu^{(1)} = 0.3$, $\rho_s^{(1)} = 2700$ кг/м^3), кольцевой зазор между которыми полностью заполнен неподвижной жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м^3, $c = 1483$ м/с). Здесь через j и m обозначено количество полуволн в окружном и меридиональном направлениях. Представленные данные, полученные при различной величине смещения внутренней оболочки ξ, демонстрируют хорошее соответствие (погрешность не превышает 0.9%), а незначительные расхождения могут быть объяснены разными подходами к описанию оболочек.

На рис. 2 представлены графики зависимостей безразмерных скоростей потери устойчивости Λ от безразмерного смещения внутренней оболочки ξ в направлении угла θ, полученные при различных значениях кольцевого зазора k и уровнях его заполнения η.

При полном заполнении кольцевого канала жидкостью и отсутствии массовых сил угол θ, в направлении которого происходит смещение внутренней оболочки, не оказывает влияния на границы устойчивости, тогда как отклонение от соосного положения (увеличение ξ по абсолютному значению) приводит к снижению критических скоростей.

В случае частичного заполнения картина значительно усложняется. При смещении внутренней оболочки вдоль свободной поверхности происходит перераспределение присоединённой массы жидкости. Это приводит к падению критических скоростей независимо от направления смещения и уровня заполнения жидкостью. При $\theta = 90°$ положительные значения эксцентриситета ξ соответствуют подъёму внутренней оболочки из жидкости, а отрицательные — её погружению. В результате изменения площади смачиваемой

Сравнение собственных частот колебаний ω (Гц) при различном эксцентриситете ξ
[Comparison of natural vibration frequencies ω (Hz) at different values of eccentricity ξ]

j	m	$\xi = 0.0$		$\xi = 0.2$		$\xi = 0.4$		$\xi = 0.6$		$\xi = 0.8$	
		ANSYS	Calc. val.	ANSYS	Calc. val.	ANSYS	Calc. val.	ANSYS	Calc. val.	ANSYS	Calc. val.
3	1	469.88	469.28	456.45	455.70	429.05	428.37	383.75	383.17	310.61	310.12
4	1	473.91	472.80	478.70	477.75	473.90	473.11	453.44	452.71	417.70	416.96
1	1	532.20	531.99	514.48	514.17	500.67	500.40	495.87	495.25	490.81	490.11
2	1	534.82	534.37	551.66	551.31	567.11	566.74	579.89	579.51	590.27	589.87
5	1	616.48	613.29	614.50	611.32	608.07	604.94	595.45	592.42	571.89	569.07
6	1	890.39	882.54	887.87	880.05	879.38	871.63	861.32	853.73	823.22	815.95
4	2	924.65	921.50	910.39	907.08	870.32	867.15	788.88	786.20	631.70	629.72
5	2	944.73	940.29	947.01	942.77	942.45	938.43	881.21	879.10	766.01	763.95
3	2	1023.8	1021.1	1016.4	1013.7	978.25	976.24	936.57	933.12	893.17	889.79

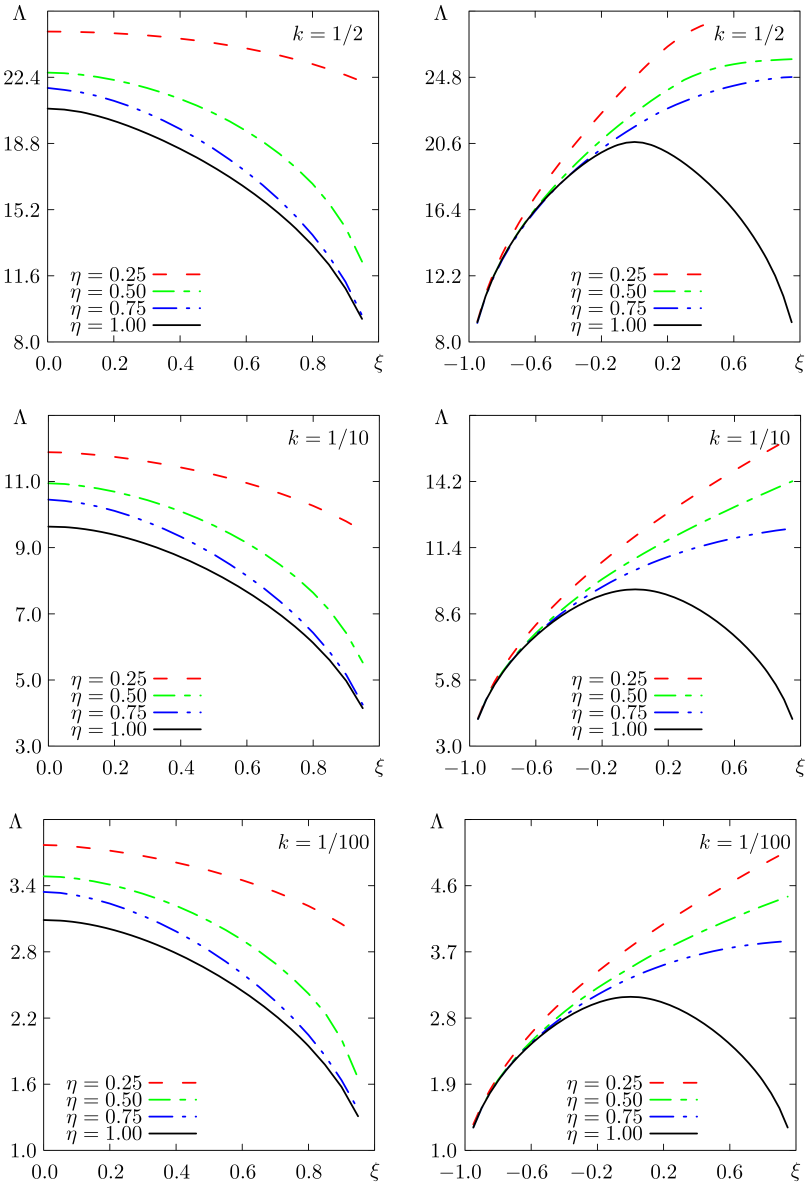


Рис. 2. Зависимость безразмерных критических скоростей Λ от смещения внутренней оболочки ξ в направлениях $\theta = 0^\circ$ (слева) и $\theta = 90^\circ$ (справа) при различных уровнях заполнения η кольцевого канала для $k = 1/2$, $1/10$ и $1/100$

[Figure 2. Dependence of dimensionless critical velocities Λ on the eccentricity ξ in the directions $\theta = 0^\circ$ (left) and $\theta = 90^\circ$ (right) at different levels of filling η of the annular channel for $k = 1/2$, $1/10$, and $1/100$]

поверхности и перераспределения гидродинамического давления происходит, соответственно, повышение или снижение критических скоростей течения.

Данные, приведённые на рис. 2, также позволяют сделать вывод о том, что размер кольцевого зазора k не оказывает качественного влияния на зависимости критических скоростей Λ от смещения внутренней оболочки. Уменьшение значения k приводит к снижению границ устойчивости, что установлено ранее для соосных цилиндрических оболочек при полном или частичном заполнении кольцевого канала [1,3].

На рис. 3 *слева* представлены зависимости критических скоростей потери устойчивости Λ от смещения внутренней оболочки ξ при различных уровнях заполнения η и направлении смещения θ. Из представленных результатов видно, что с повышением уровня заполнения происходит снижение влияния угла смещения θ на границу устойчивости до тех пор, пока при полном заполнении он не перестанет оказывать какое-либо влияние.

Минимальное значение скорости Λ всегда достигается при одной и той же величине эксцентриситета ($\xi \approx -1$) вне зависимости от угла θ и уровня заполнения η. Максимальное же значение Λ может достигаться при различных значениях смещения на полуинтервале $\xi \in [0; 1)$ в зависимости от выбора θ и η, что объясняется изменением площади смачиваемой поверхности внутренней оболочки и величины присоединённой массы жидкости, как было отмечено ранее. Высказанные утверждения справедливы при положительных значениях угла θ, а отрицательные величины смещения соответствуют положительным в направлении отрицательных углов $-\theta$. Данные, представленные на рис. 3 *слева*, позволяют также говорить о возможности существования таких конфигураций, в которых при надлежащем подборе всех параметров обеспечивается более высокий порог гидроупругой устойчивости по сравнению с соосным расположением оболочек.

Зависимости критической скорости Λ от угла θ при различном уровне заполнения η и смещении внутренней оболочки ξ представлены на рис. 3 *справа*. При уменьшении угла θ имеет место такая область его значений, где критическая скорость Λ практически остаётся неизменной. Размер данной области возрастает с ростом уровня жидкости до тех пор, пока при полном заполнении угол смещения θ не перестанет оказывать влияние (прямая параллельна оси абсцисс) на границы устойчивости. При этом с ростом эксцентриситета ξ критическая скорость Λ меняется в больших пределах, предоставляя более широкие возможности управления динамическим поведением.

На рис. 4, 5 приведены собственные формы колебаний оболочек для $k = 1/10$ при различных вариантах заполнения кольцевого канала, величины и направления смещения внутренней оболочки. При построении мод скорость течения жидкости Λ для каждой конфигурации задавалась близкой к критической скорости потери устойчивости Λ_{cr}. На изображённых сечениях пунктиром показаны оболочки в недеформированном состоянии, а сплошными линиями — в деформированном; уровень заполнения показан серым цветом. В пространственных формах колебаний перемещения отмасштабированы для наглядности представления результатов. Реальные значения, полученные из решения спектральной задачи (9), приведены на цветовой шкале, которая является общей для обеих оболочек. Здесь красным цветом обозначено перемещение в направлении внешней нормали к поверхности оболочки, а синим —

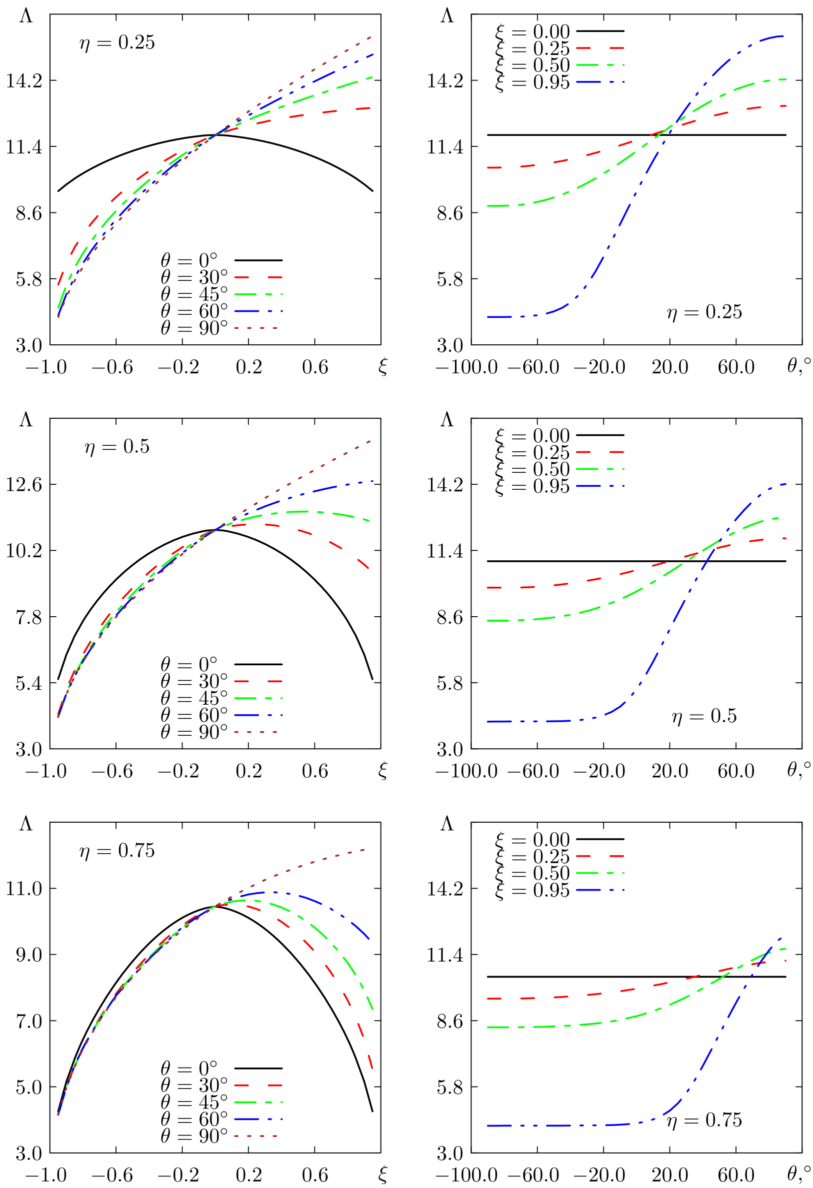


Рис. 3. Зависимость безразмерных критических скоростей Λ для $k = 1/10$ при $\eta = 0.25$, 0.5, 0.75 от смещения внутренней оболочки ξ при различных значениях угла θ (слева) и угла θ при различных значениях смещения ξ (справа)

[Figure 3. Dependence of dimensionless critical velocities Λ on the eccentricity ξ at different values of the angle θ (left) and the angle θ at different values of the eccentricity ξ (right) for $k = 1/10$ at $\eta = 0.25$, 0.5, and 0.75]

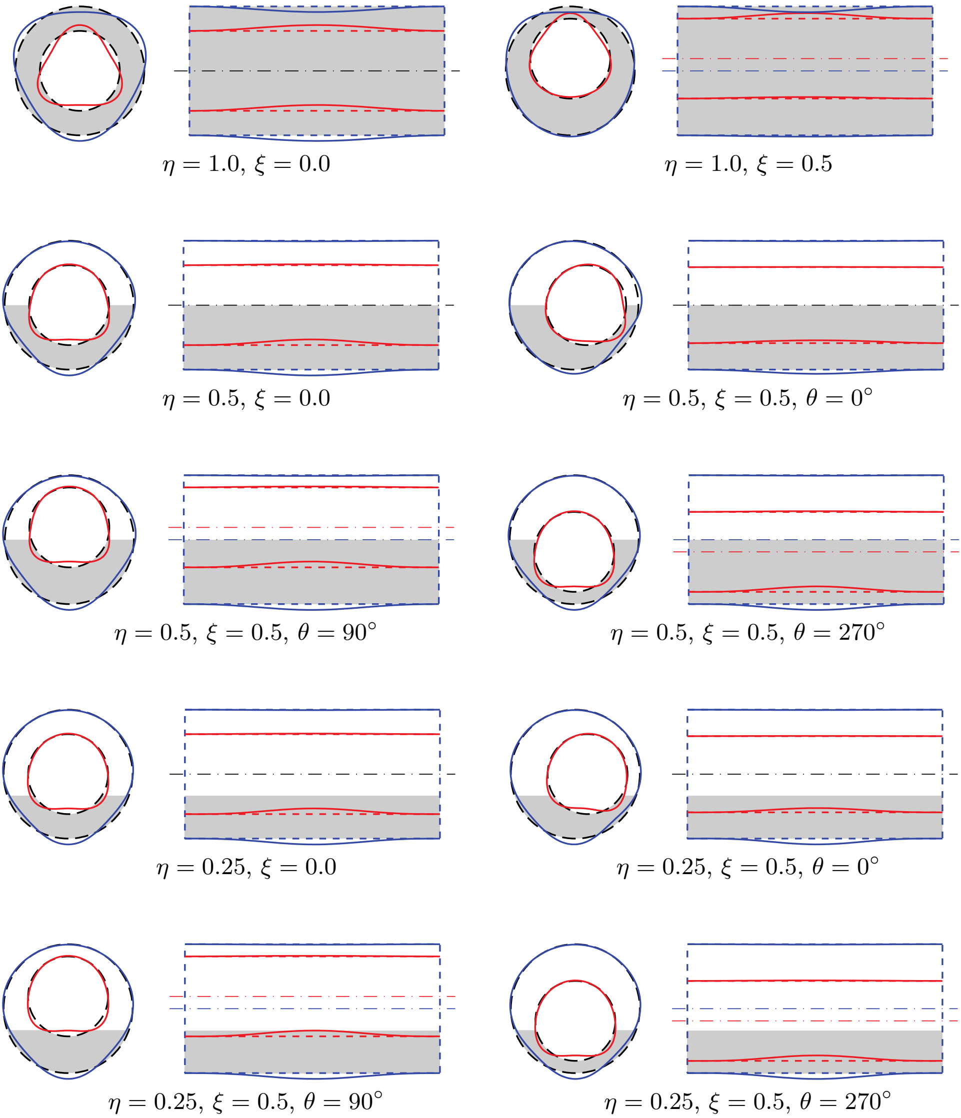


Рис. 4. Собственные формы колебаний взаимодействующих с жидкостью несоосных оболочек в поперечном ($x = L/2$) и продольном ($z = 0$) сечениях для $k = 1/10$ при $\eta = 0.25$, 0.5 и 1.0, $\Lambda \approx \Lambda_{\mathrm{cr}}$ и различных значениях смещения ξ и угла θ

[Figure 4. The transverse ($x = L/2$) and longitudinal ($z = 0$) cross-sections of mode shapes of eccentric cylindrical shells interacting with the fluid for $k = 1/10$ at $\eta = 0.25$, 0.5, and 1.0, $\Lambda \approx \Lambda_{\mathrm{cr}}$ and different values of the eccentricity ξ and the angle θ]

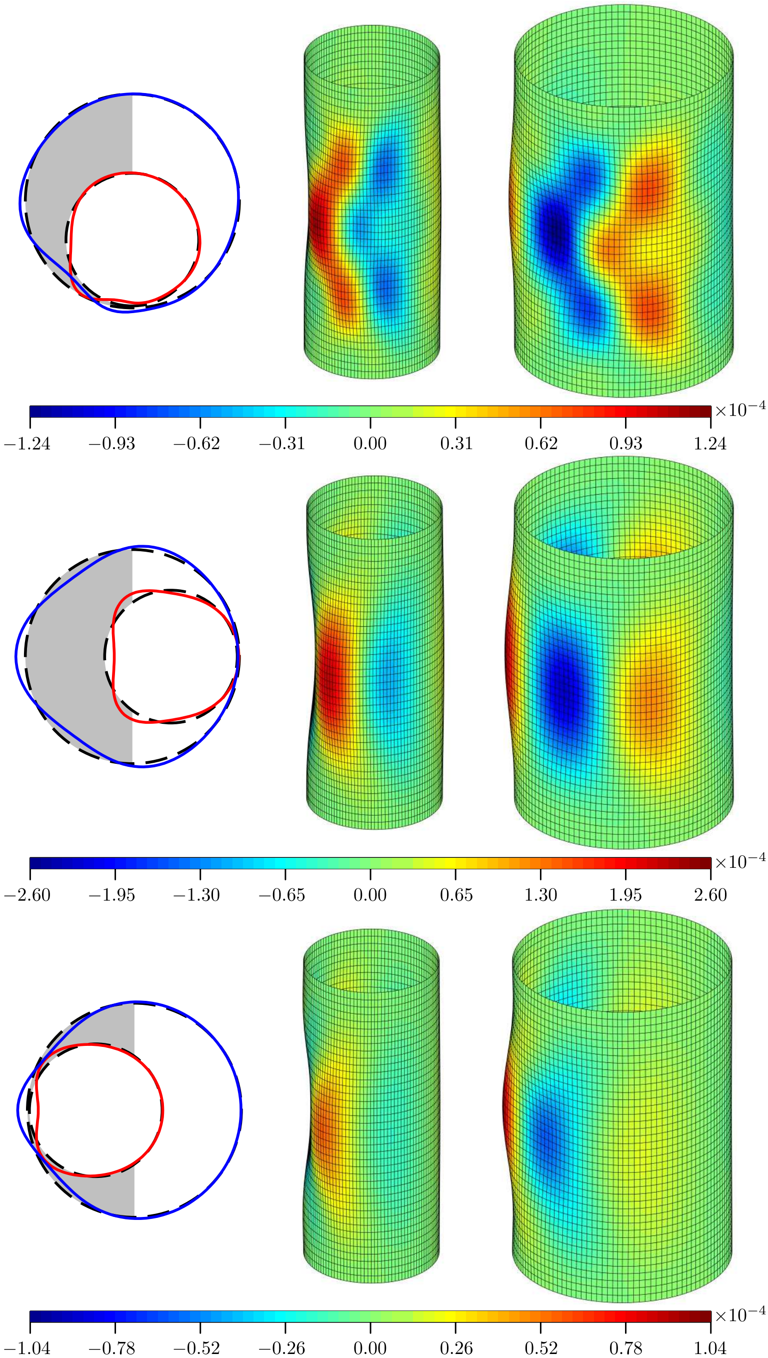


Рис. 5. Собственные формы колебаний взаимодействующих с жидкостью несоосных оболочек (поперечное сечение $x = L/2$, внутренняя и наружная оболочки) при смещении внутренней оболочки на $\xi = 0.95$ в направлениях $\theta = 0^\circ$ (сверху), $\theta = 90^\circ$ (по центру) и $\theta = 270^\circ$ (снизу); $k = 1/10$, $\eta = 0.25$, $\Lambda \approx \Lambda_{\text{cr}}$

[Figure 5. Mode shapes of eccentric shells interacting with the fluid (the cross section at $x = L/2$, the inner and outer shells) in the case of the eccentricity $\xi = 0.95$ in the directions $\theta = 0^\circ$ (top), $\theta = 90^\circ$ (center), and $\theta = 270^\circ$ (bottom); $k = 1/10$, $\eta = 0.25$, $\Lambda \approx \Lambda_{\text{cr}}$]

в противоположном ей.

В случае полностью заполненных ($\eta = 1.0$) соосных оболочек ($\xi = 0.0$) окружные полуволны имеют одинаковую высоту, размер которой различен для внутренней и наружной оболочек. При наличии эксцентриситета ($\xi \neq 0.0$) высота полуволн в пределах одной оболочки будет разной. Максимальные перемещения возникают на участках боковых поверхностей, соответствующих минимальному расстоянию между оболочками. При изменении уровня жидкости ($\eta < 1.0$) также происходит образование полуволн разной высоты, а максимальные перемещения формируются на тех частях боковых поверхностей оболочек, которые взаимодействуют с жидкостью. В случае частичного заполнения несоосных конструкций наибольший размер полуволн наблюдается на смоченных поверхностях. На основании представленных данных можно заключить, что уровень заполнения кольцевого зазора жидкостью оказывает большее влияние на перемещения оболочек в процессе колебаний, чем эксцентриситет.

Заключение. Представлено численное исследование гидроупругой устойчивости тонкостенных горизонтально ориентированных несоосных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с потоком жидкости, текущим в кольцевом канале между ними. Моделирование осуществлено в трёхмерной постановке с использованием метода конечных элементов. Проанализировано влияние отклонения оболочек от соосного положения на критические скорости потери устойчивости при различном уровне заполнения кольцевого канала. Установлено, что, как и для случая соосных оболочек, снижение уровня заполнения приводит к повышению границы гидроупругой устойчивости при прочих равных параметрах системы. Продемонстрировано, что с понижением уровня заполнения кольцевого зазора жидкостью возрастает влияние величины отклонения внутренней оболочки от соосного положения, стабилизирующий или дестабилизирующий характер которого определяется направлением смещения. За счёт подбора комбинации «смещение–угол» для определённых конфигураций можно добиться повышения границ устойчивости по сравнению с соосным положением оболочек. При этом наибольшее изменение критической скорости имеет место при смещении внутренней оболочки в направлении ортогональном свободной поверхности жидкости.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторский вклад и ответственность. Мы несём полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

Благодарность. При выполнении численных расчётов был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания; номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

Библиографический список

1. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow.* vol. 2. London: Academic Press, 2016. xviii+923 pp.
2. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Сенин А. Н. Анализ пространственных колебаний

коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2018. Т. 11, № 4. С. 448–462. doi: 10.7242/1999-6691/2018.11.4.35.

3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells // *Acta Mech.*, 2019. vol. 230, no. 11. pp. 3845–3860. doi: 10.1007/s00707-019-02453-4.
4. Kozarov M., Mladenov K. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells // *Soviet Appl. Mech.*, 1981. vol. 17, no. 5. pp. 449–456. doi: 10.1007/BF00885293.
5. Païdoussis M. P., Chan S. P., Misra A. K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *J. Sound Vib.*, 1984. vol. 97, no. 2. pp. 201–235. doi: 10.1016/0022-460X(84)90319-5.
6. Païdoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 1991. vol. 5, no. 2. pp. 127–164. doi: 10.1016/0889-9746(91)90454-W.
7. El Chebair A., Païdoussis M. P., Misra A. K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Fluids Struct.*, 1989. vol. 3, no. 4. pp. 349–364. doi: 10.1016/S0889-9746(89)80016-7.
8. Horáček J. Approximate theory of annular flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Fluids Struct.*, 1993. vol. 7, no. 2. pp. 123–135. doi: 10.1006/jfls.1993.1010.
9. Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В. Исследование влияния граничных условий на устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с текущей жидкостью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(16). С. 88–101. doi: 10.14498/vsgtu1051.
10. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid // *Eur. J. Mech. A Solids*, 2014. vol. 47. pp. 174–181. doi: 10.1016/j.euromechsol.2014.04.003.
11. Yeh T. T., Chen S. S. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977. vol. 62, no. 2. pp. 262–270. doi: 10.1121/1.381523.
12. Yeh T. T., Chen S. S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations // *J. Sound Vib.*, 1978. vol. 59, no. 3. pp. 453–467. doi: 10.1016/S0022-460X(78)80010-8.
13. El Chebair A., Misra A. K., Païdoussis M. P. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells // *J. Sound Vib.*, 1990. vol. 138, no. 3. pp. 457–478. doi: 10.1016/0022-460X(90)90599-U.
14. Païdoussis M. P., Misra A. K., Chan S. P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Appl. Mech*, 1985. vol. 52, no. 2. pp. 389–396. doi: 10.1115/1.3169059.
15. Païdoussis M. P., Misra A. K., Nguyen V. B. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters // *J. Sound Vib.*, 1992. vol. 159, no. 2. pp. 193–205. doi: 10.1016/0022-460X(92)90031-R.
16. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. A CFD-based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // *J. Sound Vib.*, 1994. vol. 176, no. 1. pp. 105–125. doi: 10.1006/jsvi.1994.1361.
17. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 1993. vol. 7, no. 8. pp. 913–930. doi: 10.1006/jfls.1993.1054.
18. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part II: Shells containing or immersed in axial flow // *J. Fluids Struct.*, 2002. vol. 16, no. 1. pp. 31–51. doi: 10.1006/jfls.2001.0402.
19. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // *J. Fluids Struct.*, 2002. vol. 16, no. 6. pp. 795–809. doi: 10.1006/jfls.2002.0446.

20. Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П. Динамическое поведение упругих коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих движущуюся в них жидкость // *ПММ*, 2010. Т. 74, № 4. С. 655–666.
21. Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П. Анализ устойчивости нагруженных коаксиальных цилиндрических оболочек с внутренним течением жидкости // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 6. С. 29–45.
22. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical analysis of coaxial cylindrical shells conveying fluid / *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*; eds. A. V. Manzhirov, N. K. Gupta, D. A. Indeitsev. Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd., 2011. pp. 160–177.
23. Ning W. B., Wang D. Z., Zhang J. G. Dynamics and stability of a cylindrical shell subjected to annular flow including temperature effects // *Arch. Appl. Mech.*, 2016. vol. 86, no. 4. pp. 643–656. `doi: 10.1007/s00419-015-1052-1`.
24. Ning W. B., Wang D. Z. Dynamic and stability response of a cylindrical shell subjected to viscous annular flow and thermal load // *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, 2016. vol. 16, no. 10. pp. 1550072. `doi: 10.1142/S0219455415500728`.
25. Kalinina A., Kondratov D., Kondratova Y., Mogilevich L., Popov V. Investigation of hydroelasticity coaxial geometrically irregular and regular shells under vibration / *Recent Research in Control Engineering and Decision Making*: ICIT 2019 / Studies in Systems, Decision and Control, 199; eds. O. Dolinina, A. Brovko, V. Pechenkin, A. Lvov, V. Zhmud, V. Kreinovich. Cham: Springer, 2019. pp. 125–137. `doi: 10.1007/978-3-030-12072-6_12`.
26. Буйвол В. М., Гузь О. М. О колебаниях двух цилиндрических эксцентрично расположенных оболочек в потоке невязкой жидкости // *Докл. АН УССР*, 1966. № 11. С. 1412–1415.
27. Chung H., Chen S.-S. Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid // *J. Appl. Mech.*, 1977. vol. 44, no. 2. pp. 213–217. `doi: 10.1115/1.3424026`.
28. Wauer J. Finite oscillations of a cylinder in a coaxial duct subjected to annular compressible flow // *Flow Turbul. Combus.*, 1998. vol. 61, no. 1–4. pp. 161–177. `doi: 10.1023/A:1026492903092`.
29. Jeong K.-H. Dynamics of a concentrically or eccentrically submerged circular cylindrical shell in a fluid-filled container // *J. Sound Vib.*, 1999. vol. 224, no. 4. pp. 709–732. `doi: 10.1006/jsvi.1999.2209`.
30. Jeong K.-H., Lee G.-M., Chang M.-H. Free vibration analysis of a cylindrical shell eccentrically coupled with a fluid-filled vessel // *Comput. Struct.*, 2001. vol. 79, no. 16. pp. 1517–1524. `doi: 10.1016/S0045-7949(01)00031-1`.
31. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of spatial vibrations of piezoceramic eccentric cylindrical shells interacting with an annular fluid layer // *Frattura Integ. Strutt.*, 2019. vol. 49. pp. 814–830. `doi: 10.3221/IGF-ESIS.49.15`.
32. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science*. New York: McGraw-Hill, 1971. xiv+521 pp.
33. Reddy J. N. *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2014. xxxi+687 pp.
34. Ильгамов М. А. *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*. М.: Наука, 1969. 184 с.
35. Бочкарёв С. А., Матвеенко В. П. Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 3. С. 189–199.
36. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // *J. Sound Vib.*, 1996. vol. 191, no. 5. pp. 757–780. `doi: 10.1006/jsvi.1996.0154`.
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1996. vol. 17, no. 4. pp. 789–821. `doi: 10.1137/S0895479895281484`.
38. *ANSYS mechanical APDL theory reference, Release 18.2.* Canonsburg, Pa: ANSYS, 2017.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 95–115
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1746

MSC: 74K25, 74H15

Numerical modeling of eccentric cylindrical shells partially filled with a fluid

S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev, A. N. Senin

Institute of Continuous Media Mechanics,
Ural Branch Russian Academy of Sciences,
1, Acad. Korolev str., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to a numerical analysis of the dynamic behavior of horizontally oriented eccentric shells, interacting with a flowing fluid, which completely or partially fills the annular gap between them. The solution to the problem is developed in a three-dimensional formulation using the finite element method. When modeling elastic solids, we proceed from the assumption that their curved surface is accurately approximated by a set of plane segments, in which the strains are determined using the relations of the classical theory of plates. The motion of an ideal compressible fluid is described by the wave equation, which, together with the impermeability condition and the corresponding boundary conditions, is transformed using the Bubnov–Galerkin method. The mathematical formulation of the dynamic problem of thin-walled structures is based on the variational principle of virtual displacements. The assessment of stability is based on the calculation and analysis of complex eigenvalues of a coupled system of equations. The verification of the model is accomplished with reference to a quiescent fluid by comparing the obtained results with the known solutions. The influence of the size of the annular gap and the level of its filling with a fluid on the hydroelastic stability threshold of rigidly clamped shells is analyzed at different values of shells eccentricity. It has been shown that for eccentric shells, a decrease in the level of filling leads to an increase of the stability limits. The dependence of the critical flow velocity on the deviation of the inner shell from concentricity has been established.

Keywords: finite element method, eccentric shells, potential compressible fluid, partial filling, hydroelastic stability.

Research Article

Please cite this article in press as:
Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Numerical modeling of eccentric cylindrical shells partially filled with a fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 95–115. doi: 10.14498/vsgtu1746 (In Russian).

Authors' Details:

Sergey A. Bochkarev https://orcid.org/0000-0002-9722-1269
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Solids; e-mail: bochkarev@icmm.ru

Sergey V. Lekomtsev https://orcid.org/0000-0002-8331-2979
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Complex Problems of Mechanics of Solids; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Alexander N. Senin https://orcid.org/0000-0002-7537-0001
Junior Researcher; Laboratory of Mechanics of Functional Materials; e-mail: senin.a@icmm.ru

Received: 19th September, 2019 / Revised: 5th November, 2019 /
Accepted: 11th November, 2019 / First online: 4th March, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interests with the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Acknowledgments. Our work was performed using «Uran» supercomputer of IMM UB RAS.

Funding. The work was performed as part of a state assignment; assignment no. AAAA-A19-119012290100-8.

References

1. Païdoussis M. P. *Fluid-structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow*, vol. 2. London, Academic Press, 2016, xviii+923 pp.
2. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of spatial vibrations of coaxial cylindrical shells partially filled with a fluid, *Comput. Continuum Mech.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 448–462 (In Russian).
3. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P., Senin A. N. Hydroelastic stability of partially filled coaxial cylindrical shells, *Acta Mech.*, 2019, vol. 230, no. 11, pp. 3845–3860. `doi: 10.1007/s00707-019-02453-4`.
4. Kozarov M., Mladenov K. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells, *Soviet Appl. Mech.*, 1981, vol. 17, no. 5, pp. 449–456. `doi: 10.1007/BF00885293`.
5. Païdoussis M. P., Chan S. P., Misra A. K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid, *J. Sound Vib.*, 1984, vol. 97, no. 2, pp. 201–235. `doi: 10.1016/0022-460X(84)90319-5`.
6. Païdoussis M. P., Nguyen V. B., Misra A. K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 1991, vol. 5, no. 2, pp. 127–164. `doi: 10.1016/0889-9746(91)90454-W`.
7. El Chebair A., Païdoussis M. P., Misra A. K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells, *J. Fluids Struct.*, 1989, vol. 3, no. 4, pp. 349–364. `doi: 10.1016/S0889-9746(89)80016-7`.
8. Horáček J. Approximate theory of annular flow-induced instabilities of cylindrical shells, *J. Fluids Struct.*, 1993, vol. 7, no. 2, pp. 123–135. `doi: 10.1006/jfls.1993.1010`.
9. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Investigation of boundary conditions influence on stability of coaxial cylindrical shells interacting with flowing fluid, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(16), pp. 88–101 (In Russian).
10. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Parametric investigation of the stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2014, vol. 47, pp. 174–181. `doi: 10.1016/j.euromechsol.2014.04.003`.
11. Yeh T. T., Chen S. S. Dynamics of a cylindrical shell system coupled by viscous fluid, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1977, vol. 62, no. 2, pp. 262–270. `doi: 10.1121/1.381523`.
12. Yeh T. T., Chen S. S. The effect of fluid viscosity on coupled tube/fluid vibrations, *J. Sound Vib.*, 1978, vol. 59, no. 3, pp. 453–467. `doi: 10.1016/S0022-460X(78)80010-8`.
13. El Chebair A., Misra A. K., Païdoussis M. P. Theoretical study of the effect of unsteady viscous forces on inner- and annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, 1990, vol. 138, no. 3, pp. 457–478. `doi: 10.1016/0022-460X(90)90599-U`.

14. Païdoussis M. P., Misra A. K., Chan S. P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid, *J. Appl. Mech*, 1985, vol. 52, no. 2, pp. 389–396. doi: 10.1115/1.3169059.
15. Païdoussis M. P., Misra A. K., Nguyen V. B. Internal- and annular-flow-induced instabilities of a clamped-clamped or cantilevered cylindrical shell in a coaxial conduit: the effects of system parameters, *J. Sound Vib.*, 1992, vol. 159, no. 2, pp. 193–205. doi: 10.1016/0022-460X(92)90031-R.
16. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. A CFD-based model for the study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid, *J. Sound Vib.*, 1994, vol. 176, no. 1, pp. 105–125. doi: 10.1006/jsvi.1994.1361.
17. Nguyen V. B., Païdoussis M. P., Misra A. K. An experimental study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 1993, vol. 7, no. 8, pp. 913–930. doi: 10.1006/jfls.1993.1054.
18. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part II: Shells containing or immersed in axial flow, *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 1, pp. 31–51. doi: 10.1006/jfls.2001.0402.
19. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass. Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid, *J. Fluids Struct.*, 2002, vol. 16, no. 6, pp. 795–809. doi: 10.1006/jfls.2002.0446.
20. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 467–474. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2010.09.013.
21. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Stability analysis of loaded coaxial cylindrical shells with internal fluid flow, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 789–802. doi: 10.3103/S002565441006004X.
22. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical analysis of coaxial cylindrical shells conveying fluid, In: *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*; eds. A. V. Manzhirov, N. K. Gupta, D. A. Indeitsev. Delhi, Elit Publ. House Pvt Ltd., 2011, pp. 160–177.
23. Ning W. B., Wang D. Z., Zhang J. G. Dynamics and stability of a cylindrical shell subjected to annular flow including temperature effects, *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, no. 4, pp. 643–656. doi: 10.1007/s00419-015-1052-1.
24. Ning W. B., Wang D. Z. Dynamic and stability response of a cylindrical shell subjected to viscous annular flow and thermal load, *Int. J. Str. Stab. Dyn.*, 2016, vol. 16, no. 10, pp. 1550072. doi: 10.1142/S0219455415500728.
25. Kalinina A., Kondratov D., Kondratova Y., Mogilevich L., Popov V. Investigation of hydroelasticity coaxial geometrically irregular and regular shells under vibration, In: *Recent Research in Control Engineering and Decision Making*, ICIT 2019, Studies in Systems, Decision and Control, 199; eds. O. Dolinina, A. Brovko, V. Pechenkin, A. Lvov, V. Zhmud, V. Kreinovich. Cham, Springer, 2019, pp. 125–137. doi: 10.1007/978-3-030-12072-6_12.
26. Buivol B. N., Guz A. N. Oscillations of two cylindrical eccentrically arranged shells in a stream of inviscid liquid, *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1966, no. 11, pp. 1412–1415 (In Russian).
27. Chung H., Chen S.-S. Vibration of a group of circular cylinders in a confined fluid, *J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, no. 2, pp. 213–217. doi: 10.1115/1.3424026.
28. Wauer J. Finite oscillations of a cylinder in a coaxial duct subjected to annular compressible flow, *Flow Turbul. Combus.*, 1998, vol. 61, no. 1–4, pp. 161–177. doi: 10.1023/A:1026492903092.
29. Jeong K.-H. Dynamics of a concentrically or eccentrically submerged circular cylindrical shell in a fluid-filled container, *J. Sound Vib.*, 1999, vol. 224, no. 4, pp. 709–732. doi: 10.1006/jsvi.1999.2209.
30. Jeong K.-H., Lee G.-M., Chang M.-H. Free vibration analysis of a cylindrical shell eccentrically coupled with a fluid-filled vessel, *Comput. Struct.*, 2001, vol. 79, no. 16, pp. 1517–1524. doi: 10.1016/S0045-7949(01)00031-1.

31. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Analysis of spatial vibrations of piezoceramic eccentric cylindrical shells interacting with an annular fluid layer, *Frattura Integ. Strutt.*, 2019, vol. 49, pp. 814–830. doi: 10.3221/IGF-ESIS.49.15.
32. Zienkiewicz O. C. *The finite element method in engineering science.* New York, McGraw-Hill, 1971, xiv+521 pp.
33. Reddy J. N. *An introduction to nonlinear finite element analysis.* Oxford, Oxford University Press, 2014, xxxi+687 pp.
34. Ilgamov M. A. *Kolebaniia uprugikh obolochek, soderzhashchikh zhidkost' i gaz* [Oscillations of elastic shells containing liqiud and gas]. Moscow, Nauka, 1969, 184 pp. (In Russian)
35. Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid, *Mech. Solids*, 2010, vol. 43, no. 3, pp. 477–486. doi: 10.3103/S0025654408030187.
36. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells, *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 191, no. 5, pp. 757–780. doi: 10.1006/jsvi.1996.0154.
37. Lehoucq R. B., Sorensen D. C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1996, vol. 17, no. 4, pp. 789–821. doi: 10.1137/S0895479895281484.
38. *ANSYS mechanical APDL theory reference, Release 18.2.* Canonsburg, Pa, ANSYS, 2017.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 116–136
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1747

УДК 519.6

Априорные оценки локального разрывного метода Галеркина на разнесенных сетках для решения уравнения параболического типа в рамках однородной задачи Дирихле

Р. В. Жалнин[1], *В. Ф. Масягин*[1], *Е. Е. Пескова*[1], *В. Ф. Тишкин*[2]

[1] Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва,
Россия, 430005, Саранск, ул. Большевистская, 68.
[2] Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Россия, 125047, Москва, Миусская пл., 4.

Аннотация

Представлены априорные оценки точности решения однородной краевой задачи для параболического уравнения с помощью локального метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках. Дискретизация по пространству строится с помощью обращения к смешанной конечно-элементной формулировке. Производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке, используя пространство разрывных функций. Для понижения порядка компоненты вектора потока рассматриваются как вспомогательные неизвестные искомого уравнения второго порядка. Аппроксимация строится на разнесенных сетках. Основная сетка состоит из треугольников, двойственная сетка состоит из медианных контрольных объемов вокруг узлов треугольной сетки. Аппроксимация искомой функции строится на ячейках основной сетки, в то время как аппроксимация вспомогательных неизвестных строится на ячейках двойственной сетки. Для вычисления потоков на границе между элементами используется стабилизирующий параметр. При этом поток искомой функции не зависит от вспомогательных функций, в то время как поток вспомогательных величин зависит от искомой функции. Для решения поставленной задачи в работе формулируются и доказываются необходимые леммы. В результате сформулирована и доказана основная теорема, результатом которой являются априорные оценки при решении парабо-

Научная статья

Образец для цитирования

Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Пескова Е. Е., Тишкин В. Ф. Априорные оценки локального разрывного метода Галеркина на разнесенных сетках для решения уравнения параболического типа в рамках однородной задачи Дирихле // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 116–136. doi: 10.14498/vsgtu1747.

Сведения об авторах

Руслан Викторович Жалнин https://orcid.org/0000-0002-1103-3321
кандидат физико-математических наук, доцент; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики;
e-mail: zhrv@mrsu.ru

Виктор Федорович Масягин https://orcid.org/0000-0001-6738-8183
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; каф. прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики;
e-mail: vmasyagin@gmail.com

лического уравнения с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями. Основную роль при анализе сходимости играет оценка для отрицательной нормы градиента. В работе для стабилизирующего параметра порядка 1 показано, что порядок сходимости будет $k+1/2$, а в случае использования стабилизирующего параметра порядка h^{-1} порядок сходимости увеличивается до $k+1$, когда в качестве базиса используются полиномы степени не выше k.

Ключевые слова: априорные оценки погрешности, метод конечных элементов, метод Галеркина с разрывными базисными функциями, разнесенные сетки, параболические задачи.

Получение: 4 октября 2019 г. / Исправление: 29 октября 2020 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 16 марта 2020 г.

Введение. Ранее авторами было предложено новое семейство схем на основе локального метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных неструктурированных сетках для уравнений диффузионного типа [1–5]. Характерной особенностью данного семейства схем является то, что аппроксимация потока искомой функции производится на двойственной сетке, состоящей из медианных контрольных объемов, связанных с узлами основной сетки, в то время как аппроксимация искомой функции рассматривается на ячейках основной сетки.

В статье представлен априорный анализ погрешности локального разрывного метода Галеркина (РМГ), или Local Discontinuous Galerkin (LDG) method, для следующей параболической задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \text{в } \Omega,$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $\partial\Omega$ — граница области Ω, u_0 – известная функция.

Метод LDG был впервые предложен Cockburn and Shu в работе [7] как развитие численной схемы для сжимаемых уравнений Навье—Стокса, описанной Bassi and Rebay в [8]. Эта схема, в свою очередь, является развитием метода Runge–Kutta Discontinuous Galerkin (RKDG), разработанного Cockburn and Shu [9–13] для нелинейных гиперболических систем.

Вопросам получения априорных оценок для метода Галеркина с разрывными базисными функциями посвящено много работ как в России, так и за

Елизавета Евгеньевна Пескова https://orcid.org/0000-0003-2618-1674
кандидат физико-математических наук; младший научный сотрудник; каф. прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики;
e-mail: e.e.peskova@mail.ru

Владимир Федорович Тишкин https://orcid.org/0000-0001-7295-7002
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН; заведующий отделом; e-mail: v.f.tishkin@mail.ru

рубежом. Например, априорные оценки для симметричного метода Галеркина с внутренними штрафами для дискретизации по пространству эллиптических и параболических задач представлены в [17], оценки для параболических интегро-дифференциальных уравнений получены в [18], в [20] разработана абстрактная теория схем разрывного метода Галеркина в смешанной формулировке и получены априорные оценки точности для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Наш анализ частично основывается на технике, представленной в работах [6, 16, 19] для параболических и эллиптических задач соответственно.

Для применения локального разрывного метода Галеркина перепишем исходную параболическую задачу (1), (2) как систему уравнений в частных производных первого порядка. Введем вспомогательную переменную $\mathbf{q} = \nabla u$ и получим следующую систему уравнений:

$$\boldsymbol{q} = \nabla u, \qquad \text{в } \Omega, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} = f, \qquad \text{в } \Omega, \tag{4}$$

$$u = 0. \qquad \text{на } \partial\Omega, \tag{5}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \text{в } \Omega.$$

1. Локальный разрывный метод Галеркина. Покроем область расчета треугольной сеткой $\mathscr{T}_T$ без зазоров и наложений. Также введем в рассмотрение двойственную сетку $\mathscr{T}_D$, составленную из медианных ячеек, центры которых лежат в узлах ячеек треугольной сетки $\mathscr{T}_T$ (см. рисунок).

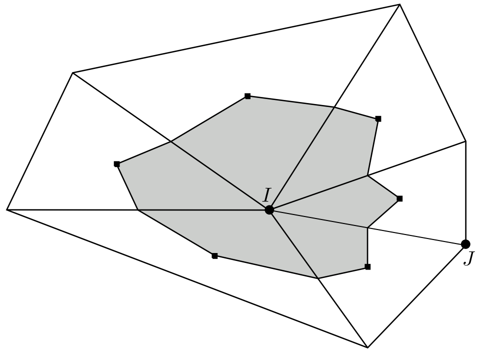
Для удобства дальнейших рассуждений дополнительно введем в рассмотрение сетку $\mathscr{T}_Q$, состоящую из ячеек Q, которые являются результатом пересечения ячеек из $\mathscr{T}_T$ и $\mathscr{T}_D$.

Слабое решение $(\boldsymbol{q}, u)$ системы (3)–(5) будем считать определенным в пространствах $V \times \boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{W} = \left\{\boldsymbol{q} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 : \boldsymbol{q}|_D \in \mathscr{H}^1(D)^2, \forall D \in \mathscr{T}_D\right\},$$
$$V = \left\{u \in L^2(\Omega) : u|_T \in \mathscr{H}^1(T), \forall T \in \mathscr{T}_T\right\}.$$

Приближенное решение $(\boldsymbol{q_h}, u_h)$ будем искать в следующих пространствах:

$$\boldsymbol{W_h} = \left\{\boldsymbol{q} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2 : \boldsymbol{q}|_D \in \mathscr{P}^k(D)^2, \forall D \in \mathscr{T}_D\right\},$$



Границы ячеек основной и двойственной сетки
[The boundaries of the cells of the basic and dual mesh]

$$V_h = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \in \mathscr{P}^k(T), \forall T \in \mathscr{T}_T \right\},$$

где $\mathscr{P}^k(T)$ и $\mathscr{P}^k(D)^2$ состоят из полиномов степени не выше k.

Для обеспечения единственности приближенного решения РМГ потребуем выполнение следующего условия:

$$\text{если } v \in \mathscr{P}^k(T) \text{ и } \int_T \nabla v \cdot \boldsymbol{w} dx = 0, \forall \boldsymbol{w} \in \mathscr{P}^k(D)^2 : T \cap D \neq \varnothing, \tag{6}$$
$$\text{то } \nabla v \equiv 0 \text{ в } T \in \mathscr{T}_T.$$

Приближенное слабое решение $(\boldsymbol{q}_h, u_h)$ будет определяться в каждой ячейке из следующей системы:

$$\int_D \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{w} dx + \int_D u_h \nabla \cdot \boldsymbol{w} dx - \int_{\partial D} \hat{u}_h \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n} dx = 0, \tag{7}$$

$$\int_T \frac{\partial u}{\partial t} v dx + \int_T \boldsymbol{q}_h \cdot \nabla v dx - \int_{\partial T} v \hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{h}} \cdot \boldsymbol{n} dx = \int_T f v dx \tag{8}$$

для всех $(\boldsymbol{w}, v) \in \mathscr{P}^k(D)^2 \times \mathscr{P}^k(T)$, где $T \in \mathscr{T}_T$ и $D \in \mathscr{T}_D$, а численные потоки $\hat{\boldsymbol{q}}_{\boldsymbol{h}}$ и $\hat{u}_h$ на границе элементов зависят от значений решения с внутренней и внешней стороны ячейки.

Для определения численных потоков введем несколько обозначений. Пусть T^+ и T^- — два соседних элемента триангуляции $\mathscr{T}_T$. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольная точка грани $l = \partial T^+ \cap \partial T^-$, и пусть $\boldsymbol{n}^+$ и $\boldsymbol{n}^-$ — соответствующие внешние нормали к элементам в данной точке. Пусть $(\boldsymbol{q}, u)$ — гладкие функции внутри каждого элемента $T^\pm$ и обозначим за $(\boldsymbol{q}^\pm, u^\pm)$ следы $(\boldsymbol{q}, u)$ на e из внутренности $T^\pm$. После этого определим средние значения $\{\!\{\cdot\}\!\}$ и скачки $[\![\cdot]\!]$ в точке $\boldsymbol{x} \in l$ следующим образом:

$$\{\!\{u\}\!\} = \left(u^+ + u^-\right)/2, \qquad \{\!\{\boldsymbol{q}\}\!\} = \left(\boldsymbol{q}^+ + \boldsymbol{q}^-\right)/2,$$
$$[\![u]\!] = u^+\boldsymbol{n}^+ + u^-\boldsymbol{n}^-, \qquad [\![\boldsymbol{q}]\!] = \boldsymbol{q}^+ \cdot \boldsymbol{n}^+ + \boldsymbol{q}^- \cdot \boldsymbol{n}^-.$$

Если грань l лежит внутри области Ω, зададим потоки из (7), (8) следующим образом:

$$\hat{\boldsymbol{q}} = \{\!\{\boldsymbol{q}\}\!\} - C_{11}[\![u]\!], \tag{9}$$
$$\hat{u} = \{\!\{u\}\!\},$$

где вспомогательный параметр C_{11} определен в точке $\boldsymbol{x} \in l$.

На границе потоки задаются следующим образом:

$$\hat{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}^+ - C_{11} u^+ \boldsymbol{n}^+, \tag{10}$$
$$\hat{u} = 0.$$

2. Используемые обозначения. Обозначим за Γ_Q объединение всех ребер сетки $\mathscr{T}_Q$.

Просуммируем уравнения (7), (8) по соответствующим элементам и получим, что приближенное решение $(\boldsymbol{q}_h, u_h)$ является единственным решением следующей вариационной задачи [15]: найти $(\boldsymbol{q}_h, u_h) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$ такие, что

$$\int_\Omega \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x} + \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \int_Q u_h \nabla \cdot \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_Q} \{\!\{u_h\}\!\} [\![\boldsymbol{w}]\!] ds = 0, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v\right) - \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \int_Q v \nabla \cdot \boldsymbol{q}_h d\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_Q} \{\!\{v\}\!\} [\![\boldsymbol{q}_h]\!] ds + \\ + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u]\!] [\![v]\!] ds = \int_\Omega f v d\boldsymbol{x}, \quad (12)$$

для всех $(\boldsymbol{w}, v) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$.

Введем обозначения:

$$A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}) = \int_\Omega \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x},$$

$$B(u, \boldsymbol{w}) = \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \int_Q u \nabla \cdot \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x} - \int_{\Gamma_Q} \{\!\{u\}\!\} [\![\boldsymbol{w}]\!] ds,$$

$$C(u, v) = \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![u]\!] [\![v]\!] ds,$$

$$F(v) = \int_\Omega f v d\boldsymbol{x},$$

где $(u, v, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}) \in V_h \times V_h \times \boldsymbol{W_h} \times \boldsymbol{W_h}$.

С учетом введеных обозначений уравнения (11), (12) могут быть переписаны в следующем виде:

$$A(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{w}) + B(u - u_h, \boldsymbol{w}) = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_h}{\partial t}, v\right) - B(v, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_h) + C(u - u_h, v) = 0, \quad (14)$$

где $(u, \boldsymbol{q}) \in V \times \boldsymbol{W}$, $(u_h, \boldsymbol{q_h}) \in V_h \times \boldsymbol{W_h}$.

Далее систему уравнений (11), (12) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v\right) + A(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{w}) + B(u_h, \boldsymbol{w}) - B(v, \boldsymbol{q}_h) + C(u_h, v) = F(v). \quad (15)$$

3. Вспомогательные обозначения. Пусть для каждого $T \in \mathscr{T}_T$ h_T — характеристический размер T, ρ_T — диаметр максимального шара, вложенного в T. Обозначим за $h = \max_{T \in \mathscr{T}_T} h_T$. Будем рассматривать триангуляцию $\mathscr{T}_T$, обладающую свойством регулярности, т.е. существует положительная константа σ такая, что

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leqslant \sigma, \quad \forall T \in \mathscr{T}_T. \quad (16)$$

Предложение 1. *Если выполняется свойство регулярности для триангуляции $\mathscr{T}_T$, то для триангуляции $\mathscr{T}_Q$ также выполнено свойство регулярности, т.е. существует положительная константа σ такая, что*

$$\frac{h_Q}{\rho_Q} \leqslant \sigma, \quad \forall Q \in \mathscr{T}_Q.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник $T \in \mathscr{T}_T$ с вершинами T^1, T^2, T^3. Обозначим середину ребра T^1T^2 за T^{12}, середину ребра T^1T^3 за T^{13}, середину ребра T^2T^3 за T^{23}, а точку пересечения медиан за T^{123}. Рассмотрим четырехугольник $Q \in \mathscr{T}_Q$ с вершинами T^1, T^{12}, T^{123}, T^{13} и покажем, что для него выполнено свойство регулярности.

Не умаляя общности, будем находить характеристический размер h_Q четырехугольника Q как $\sqrt{S_Q}$, где S_Q — площадь Q. По свойству пересечения медиан получим, что $S_Q = \frac{1}{3}S_T$, где S_T — площадь треугольника T.

Обозначим за T_1 треугольник с вершинами T^1, T^{12}, T^{13}. Диаметр максимального шара, вложенного в T_1, вычисляется следующим образом

$$\rho_{T_1} = 2\frac{S_{T_1}}{p_{T_1}},$$

где p_{T_1} — полупериметр T_1, S_{T_1} — площадь T_1.

Используя свойство медиан, получим

$$\rho_{T_1} = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{S_T}{p_T} = \frac{1}{2}\rho_T.$$

Далее, подставляя найденные выражения, получим

$$\frac{h_Q}{\rho_Q} = \frac{\sqrt{S_T}}{\sqrt{3}\rho_Q} \leqslant \frac{\sqrt{S_T}}{\sqrt{3}\rho_{T_1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{h_T}{\rho_T} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma.$$

Утверждение доказано. □

Введем в рассмотрение набор $\langle T, T' \rangle$, определенный следующим образом:

$$\langle T, T' \rangle = \begin{cases} \varnothing, & \text{если мера}\,(\partial T \cap \partial T') = 0, \\ \text{внутренность } \partial T \cap \partial T', & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем предполагать, что существует положительная константа $\delta < 1$ такая, что для каждого элемента $T \in \mathscr{T}_T$

$$\delta \leqslant \frac{h_{T'}}{h_T} \leqslant \delta^{-1} \qquad \forall T' : \langle T, T' \rangle \neq \varnothing. \tag{17}$$

Также предполагаем, что локальное пространство $\mathscr{S}(T)$ содержит пространство полиномов $\mathscr{P}^k(T)$ степени не выше k и удовлетворяет (6).

Предполагаем, что стабилизирующий коэффициент C_{11}, определяющий численные потоки в (9) и (10), определяется следующим образом

$$C_{11}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \zeta \min\{h^{\alpha}_{T^+}, h^{\alpha}_{T^-}\}, & \text{если } \boldsymbol{x} \in \langle T^+, T^- \rangle, \\ \zeta h^{\alpha}_{T^+}, & \text{если } \boldsymbol{x} \in \partial T^+ \cap \Gamma_\partial, \end{cases} \tag{18}$$

где $\zeta > 0$, $-1 \leqslant \alpha \leqslant 0$ не зависят от размера сетки. Для удобства введем в рассмотрение параметры μ^* и μ_*:

$$\mu^* = \max\{-\alpha, 1\}, \quad \mu_* = \min\{-\alpha, 1\}.$$

4. Априорные оценки. Для удобства дальнейших рассуждений введем в рассмотрение проекцию. Нужно найти $(\tilde{u}_h, \tilde{\mathbf{q}}_h) : [0, T] \to V_h \times \mathbf{W}_h$, удовлетворяющие соотношениям:

$$A\left(\boldsymbol{q} - \tilde{\boldsymbol{q}}_h, \boldsymbol{w}\right) + B\left(u - \tilde{u}_h, \boldsymbol{w}\right) = 0, \tag{19}$$

$$-B\left(v, \boldsymbol{q} - \tilde{\boldsymbol{q}}_h\right) + C\left(u - \tilde{u}_h, v\right) = 0, \tag{20}$$

где $(u, \boldsymbol{q}) \in V \times \boldsymbol{W}$.

Обозначим за $\mathbf{\Pi}$ и Π — проекции из $\boldsymbol{W}$ и V на конечно-элементные пространства $\boldsymbol{W_h}$ и V_h соответственно.

Используя проекции Π и $\mathbf{\Pi}$, можно написать

$$u - \tilde{u}_h = (u - \Pi u) - (\tilde{u}_h - \Pi u) = \eta_u - \xi_u,$$
$$\boldsymbol{q} - \tilde{\boldsymbol{q}}_h = (\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}) - (\tilde{\boldsymbol{q}}_h - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\eta_q} - \boldsymbol{\xi_q}.$$

Используя проекцию (19), (20), систему (13), (14) можно переписать в виде

$$A\left(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{w}\right) + B\left(\xi_u, \boldsymbol{w}\right) = 0, \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial \xi_u}{\partial t}, v\right) - B\left(v, \boldsymbol{\xi_q}\right) + C\left(\xi_u, v\right) = \left(\frac{\partial \eta_u}{\partial t}, v\right). \tag{22}$$

Представим ошибку погрешности проекции (19), (20) $(\boldsymbol{e_q}, e_u) = (\boldsymbol{q} - \tilde{\boldsymbol{q}}_h, u - \tilde{u}_h)$ как следующую сумму:

$$(\boldsymbol{e_q}, e_u) = (\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}, u - \Pi u) + (\mathbf{\Pi}\boldsymbol{e_q}, \Pi e_u).$$

Будем считать, что выполняется свойство ортогональности метода Галеркина, а именно

$$A(\boldsymbol{e_{q_h}}, \boldsymbol{w}) + B\left(e_u, \boldsymbol{w}\right) - B\left(v, \boldsymbol{e_q}\right) + C\left(e_u, v\right) = 0 \quad \forall\left(\boldsymbol{w}, v\right) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h. \tag{23}$$

Для получения оценки в норме $\|e_u\|_{-t,D}$, где t — натуральное число и D — подобласть Ω, нужно найти оценку погрешности аппроксимации линейного функционала $\Lambda(u) = (\lambda, u)$, где $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ обозначает скалярное произведение в L^2 через $\Lambda(u_h)$

$$\|e_u\|_{-t,D} = \sup_{\lambda \in C_0^\infty(D)} \frac{\Lambda(e_u)}{\|\lambda\|_{t,D}}.$$

В настоящей работе нас интересует случай при $t = 0$. Для достижения необходимых оценок введем в рассмотрение решение ϕ следующей двойственной задачи:

$$-\triangle \phi = \lambda \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{24}$$

$$\phi = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{25}$$

Приведем две леммы, содержащие всю информацию, которая будет использоваться относительно конечных элементов. Их доказательство основывается на работах [14, 15].

Лемма 1. *Пусть* $w \in H^{r+1}(T)$, $r \geqslant 0$. *Пусть* Π *есть линейный непрерывный оператор из* $H^{r+1}(T)$ *в* $\mathscr{S}(T)$ *такой, что* $\Pi w = w$ *для всех* $w \in \mathscr{P}^k(T)$. *Тогда для целого* m, $0 \leqslant m \leqslant r+1$, *получим*

$$|w - \Pi w|_{m,T} \leqslant C h_T^{\min\{r,k\}+1-m} \|w\|_{r+1,T},$$

$$\|w - \Pi w\|_{0,\partial T} \leqslant C h_T^{\min\{r,k\}+\frac{1}{2}} \|w\|_{r+1,T},$$

где C *— константа, зависящая только от* σ *в неравенстве* (16), k, d *и* r.

Лемма 2. *Существует положительная константа* C_{inv}, *зависящая только от* σ *в неравенстве* (16), k *и* d *такая, что для всех* $s \in \mathscr{P}^d(K)$ *выполняется*

$$\|s\|_{0,\partial K} \leqslant C_{inv} h_K^{-\frac{1}{2}} \|s\|_{0,K}$$

для всех $K \in \mathscr{T}_T$ *и всех* $K \in \mathscr{T}_Q$.

Пусть Π и $\mathbf{\Pi}$ — произвольные проекции на пространства V_h и $\boldsymbol{W_h}$, удовлетворяющие покомпонентно предположениям леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$ *и* $(\boldsymbol{\Phi}, \phi) \in H^{t+1}(\Omega)^2 \times H^{t+2}(\Omega)$, s, $t \geqslant 0$. *Тогда справедлива следующая оценка*:

$$\begin{aligned}
&|A(\boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}, \boldsymbol{w}) + B(u_h, \boldsymbol{w}) - B(v, \boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}) + C(u_h, v)| \leqslant \\
&\leqslant C\Bigg[\Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2}\|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{t,k\}+2}\|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{t+1,Q}\Bigg)^{1/2} + \\
&\quad + \Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{s+1,k\}}\|u\|^2_{s+2,Q}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{t,k\}+2}\|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{t+1,Q}\Bigg)^{1/2} + \\
&\quad + \Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2}\|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{t+1,k\}}\|\phi\|^2_{t+2,Q}\Bigg)^{1/2} + \\
&+\Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{s+1,k\}+1}\|u\|^2_{s+2,Q}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{t+1,k\}+1}\|\phi\|^2_{t+2,Q}\Bigg)^{1/2}\Bigg].
\end{aligned}$$

Доказательство [14]. Положим $\boldsymbol{\xi_q} = \boldsymbol{q} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{q}$, $\xi_u = u - \Pi u$, $\boldsymbol{\xi_\Phi} = \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{\Pi}\boldsymbol{\Phi}$, $\xi_\phi = \phi - \Pi\phi$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&|A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi}) + B(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi}) - B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q}) + C(\xi_u, \xi_\phi)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| + |B(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| + |B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q})| + |C(\xi_u, \xi_\phi)|.
\end{aligned}$$

Оценим отдельно каждое слагаемое.

Из неравенства Коши—Буняковского получаем

$$|A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leqslant \sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} \left|\int_Q \boldsymbol{\xi_q}\boldsymbol{\xi_\Phi} dx\right| \leqslant \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} \|\boldsymbol{\xi_q}\|^2_{0,Q}\right)^{1/2} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} \|\boldsymbol{\xi_\Phi}\|^2_{0,Q}\right)^{1/2}.$$

Далее из оценок леммы 1 следует

$$|A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_\Phi})| \leqslant \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2} \|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q}\right)^{1/12} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_q^{2\min\{t,k\}+2} \|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{t+1,Q}\right)^{1/2}.$$

Интегрируя по частям и последовательно применяя неравенство Коши—Буняковского и лемму 1, получим следующую оценку:

$$|B(\xi_u, \boldsymbol{\xi_\Phi})| = \left|-\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q}\left[\int_Q \nabla\xi_u \cdot \boldsymbol{\xi_\Phi} dx + \int_{\partial Q} \boldsymbol{\xi_\Phi}\cdot(\xi_u \boldsymbol{n}) d\sigma\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q}\left(|\xi_u|^2_{1,Q} + \frac{1}{h_Q}\|\xi_u\|^2_{0,\partial Q}\right)\right)^{1/2} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q}\left(\|\boldsymbol{\xi_\Phi}\|^2_{0,Q} + h_Q\|\boldsymbol{\xi_\Phi}\|^2_{0,\partial Q}\right)\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{s+1,k\}} \|u\|^2_{s+2,Q}\right)^{1/2} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{t,k\}+2} \|\boldsymbol{\Phi}\|^2_{t+1,Q}\right)^{1/2}.$$

Далее для $B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q})$ и $C(\xi_u, \xi_\phi)$ получим

$$|B(\xi_\phi, \boldsymbol{\xi_q})| \leqslant \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{s,k\}+2} \|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q}\right)^{1/2} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} h_Q^{2\min\{t+1,k\}} \|\phi\|^2_{t+2,Q}\right)^{1/2};$$

$$|C(\xi_u, \xi_\phi)| = \left|-\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q}\int_{\partial Q} C_{11}[\![\xi_u]\!]\cdot(\xi_\phi \boldsymbol{n}) d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{Q\in\mathscr{T}_Q}\left|\int_{\partial Q} C_{11}(\xi_u^{\text{out}}\boldsymbol{n} - \xi_u\boldsymbol{n})\cdot(\xi_\phi\boldsymbol{n})\right| \leqslant 2\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q}\left|\int_{\partial Q}\sqrt{C_{11}}\xi_u\sqrt{C_{11}}\xi_\phi d\sigma\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} C_{11}\|\xi_u\|^2_{0,\partial Q}\right)^{1/2} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} C_{11}\|\xi_\phi\|^2_{0,\partial Q}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{s+1,k\}+1} \|u\|^2_{s+2,Q}\right)^{1/2} \left(\sum_{Q\in\mathscr{T}_Q} C_{11} h_Q^{2\min\{t+1,k\}+1} \|\phi\|^2_{t+2,Q}\right)^{1/2}.$$

Сложив полученные неравенства, получим требуемую оценку. □

Следствие 1. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$, $s \geqslant 0$ *является точным решением* (3)–(5), *пусть* $\phi \in H^{t+2}(\Omega)$, $t \geqslant 0$ *является решением двойственной задачи* (24), (25) *и* $\boldsymbol{\Phi} = -\nabla\phi$. *Полагаем также, что коэффициент* C_{11}

удовлетворяет выражению (18). *Тогда существует константа* C, *зависящая только от* σ, ζ, k *и* d *такая, что*

$$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\Phi}) + B(u,\boldsymbol{\Phi}) - B(\phi,\boldsymbol{q}) + C(u,\phi) \leqslant Ch^{H}\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2},$$

где $H = 1+\alpha$, *когда* $k=0$ *и* $H = \min\bigl\{s+1+\min\{t+1,k\}, k+1+\min\{t,k+\alpha\}\bigr\}$ *для* $k \geqslant 1$. *Более того,*

$$A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}) + B(u,\boldsymbol{q}) - B(u,\boldsymbol{q}) + C(u,u) \leqslant Ch^{2J}\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2},$$

где $J = \frac{1}{2}(1+\alpha)$ *при* $k=0$ *и* $J = \min\bigl\{s+1, k+\frac{1}{2}(1+\alpha)\bigr\}$ *при* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Из леммы 3 получим

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{q},u;\boldsymbol{\Phi},\phi)A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\Phi}) + B(u,\boldsymbol{\Phi}) - B(\phi,\boldsymbol{q}) + C(u,\phi) \leqslant \\ \leqslant C\bigl[h^{\min\{s,k\}+1}(h^{\min\{t,k\}+1} + h^{\min\{t+1,k\}})+ \\ + h^{\min\{s+1,k\}+1}(h^{\min\{t,k\}} + \zeta h^{\min\{t+1,k\}+\alpha})\bigr]\|u\|_{s+2}\|\phi\|_{t+2}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}) + B(u,\boldsymbol{q}) - B(u,\boldsymbol{q}) + C(u,u) \leqslant \\ \leqslant C\bigl[h^{2\min\{s,k\}+2} + \zeta h^{2\min\{s+1,k\}+1+\alpha}\bigr]\|u\|_{s+2}. \qquad \square\end{aligned}$$

Лемма 4. *Пусть* Π *и* $\boldsymbol{\Pi}$ *обозначают* $L^2(\Omega)$-*проекцию и* $L^2(\Omega)^2$-*проекцию на* V_h *и* $\boldsymbol{W_h}$ *соответственно. Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned}A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{q}-\boldsymbol{\Pi q}) + B(v,\boldsymbol{q}-\boldsymbol{\Pi q}) - B(u-\Pi u,\boldsymbol{w}) + C(v,u-\Pi u) \leqslant \\ \leqslant C\biggl(\|\boldsymbol{w}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![v]\!]^2 ds\biggr)\int_{\Gamma_Q}\Bigl(\frac{1}{C_{11}}\{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi}\{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11}[\![\xi_u]\!]^2\Bigr)ds,\end{aligned}$$

где C — *константа, зависящая от* σ, k *и* d.

Доказательство. Возьмем $\boldsymbol{\xi_q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}$ и $\xi_u = u - \Pi u$, тогда получим

$$\begin{aligned}|A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi_q}) + B(v,\boldsymbol{\xi_q}) - B(\xi_u,\boldsymbol{w}) + C(v,\xi_u)| \leqslant \\ \leqslant |A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi_q})| + |B(v,\boldsymbol{\xi_q})| + |B(\xi_u,\boldsymbol{w})| + |C(v,\xi_u)|.\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши—Буняковского и тот факт, что $\boldsymbol{\Pi}$ есть $L^2(\Omega)^2$-проекция, получим

$$|A(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\xi_q})| = 0.$$

Далее получим

$$|B(v,\boldsymbol{\xi_q})| = \biggl|\int_{\Gamma_Q}\{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}[\![v]\!]ds\biggr|.$$

Умножим и поделим полученное на $C_{11}^{1/2}$, применим неравенство Коши—Буняковского:

$$|B(v, \boldsymbol{\xi_q})| \leqslant \left(\int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![v]\!]^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_Q} \frac{1}{C_{11}} \{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 ds\right)^{1/2}.$$

Аналогично

$$|B(\xi_u, \boldsymbol{w})| = \left|\int_{\Gamma_Q} \{\!\{\xi_u\}\!\} [\![\boldsymbol{w}]\!] ds\right| \leqslant \left(\int_{\Gamma_Q} \chi [\![\boldsymbol{w}]\!]^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_Q} \frac{1}{\chi} \{\!\{\xi_u\}\!\}^2 ds\right)^{1/2}.$$

Первый множитель можно оценить с использованием леммы 2:

$$\int_{\Gamma_Q} \chi [\![\boldsymbol{w}]\!] ds \leqslant \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \sum_{e \in \partial Q} \int_e \chi \left(\boldsymbol{w}|_Q \cdot \boldsymbol{n}\right)^2 ds \leqslant \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \chi^{\partial Q} \|\boldsymbol{w}|_Q \cdot \boldsymbol{n}\|^2_{0,\partial Q} \leqslant$$
$$\leqslant C_{inv} \sup_{Q \in \mathscr{T}_q} \frac{\chi^{\partial Q}}{h_Q} \|\boldsymbol{w}\|_0^2 \leqslant C_{inv} \|\boldsymbol{w}\|_0^2,$$

где $\chi(\boldsymbol{x}) = \min\{h_Q, h_{Q'}\}$, если $\boldsymbol{x} \in \langle Q, Q'\rangle$, $\chi(\boldsymbol{x}) = h_Q$, если $\boldsymbol{x} \in \Gamma_\partial$, $\chi^{\partial Q} = \sup\{\chi(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$.

И, наконец,

$$|C(v, \xi_u)| = \left|\int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![v]\!] [\![\xi_u]\!] ds\right| \leqslant \left(\int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![v]\!]^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![\xi_u]\!]^2 ds\right)^{1/2}.$$

Доказательство завершено. □

Лемма 5. *Для* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$, $s \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\int_{\Gamma_Q} \left(\frac{1}{C_{11}} \{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi} \{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11} [\![\xi_u]\!]^2\right) ds \leqslant$$
$$\leqslant C \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \left(h_Q^{2\min\{s,k\}+1} \frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial Q}} \|\boldsymbol{q}\|^2_{s+1,Q}\right) +$$
$$+ C \sum_{Q \in \mathscr{T}_Q} \left(h_Q^{2\min\{s+1,k\}+1} \left(\tilde{C}_{11}^{\partial Q} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial Q}}\right) \|u\|^2_{s+2,Q}\right),$$

где $\tilde{C}_{11}^{\partial Q} = \inf\{C_{11}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$, $\tilde{\chi}^{\partial Q} = \inf\{\chi(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$, C — *константа, не зависящая от размера сетки, а зависящая только от аппроксимации и констант из лемм 1 и 2,* $\boldsymbol{\xi_q} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}$, $\xi_u = u - \Pi u$ *и* $\chi(\boldsymbol{x}) = \min\{h_Q, h_{Q'}\}$, *если* $\boldsymbol{x} \in \langle Q, Q'\rangle$, $\chi(\boldsymbol{x}) = h_Q$, *если* $\boldsymbol{x} \in \Gamma_\partial$, $\chi^{\partial Q} = \sup\{\chi(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in \partial Q\}$.

Следствие 2. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega)^2 \times H^{s+2}(\Omega)$, $s \geqslant 0$. *Полагаем, что коэффициент* C_{11} *удовлетворяет* (18). *Рассматриваемые триангуляции удовлетворяют предположению* (16). *Если* $\alpha \neq 0$, *предполагаем, что* (17) *имеет силу. Тогда существует константа C, которая зависит только от σ, δ, ζ, k и d такая, что*

$$\int_{\Gamma_Q} \Big(\frac{1}{C_{11}} \{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi} \{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11} [\![\xi_u]\!]^2 \Big) ds \leqslant C h^{2P} \|u\|_{s+2}^2,$$

где $P = \frac{1}{2}\left(1-\mu^*\right)$, если $k=0$ и $P = \min\{s + \frac{1}{2}\left(1+\mu_*\right), k + \frac{1}{2}\left(1-\mu^*\right)\}$, если $k \geqslant 1$. Если $\alpha = 0$, константа C не зависит от δ.

Доказательство. Если взять коэффициент C_{11} в виде (18), то после простых вычислений получим

$$\frac{1}{\tilde{C}_{11}^{\partial Q}} \leqslant \zeta^{-1} h_Q^{-\alpha} \delta^{\alpha}$$

и

$$\left(C_{11}^{\partial Q} + \frac{1}{\tilde{\chi}^{\partial Q}} \right) \leqslant \zeta h_Q^{\alpha} + h_Q^{-1} \delta^{-1},$$

где параметр δ определяется в (17).

Далее получим

$$\int_{\Gamma_Q} \Big(\frac{1}{C_{11}} \{\!\{\boldsymbol{\xi_q}\}\!\}^2 + \frac{1}{\chi} \{\!\{\xi_u\}\!\}^2 + C_{11} [\![\xi_u]\!]^2 \Big) ds \leqslant$$
$$\leqslant C \left[h^{2\min\{s,k\}+1} \zeta^{-1} h^{-\alpha} + h^{2\min\{s+1,k\}+1} \left(\zeta h^{\alpha} + h^{-1} \right) \right] \|u\|_{s+2}^2,$$

откуда непосредственно вытекает искомая оценка. □

Предполагаем, что выполняются следующие аппроксимационные свойства для проекций $\boldsymbol{\Pi}$ и Π:

$$|A\left(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) + B\left(u - \Pi u, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) - B\left(\phi - \Pi\phi, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) +$$
$$+ C\left(u - \Pi u, \phi - \Pi\phi\right)| \leqslant C h^H \|u\|_{s+2} \|\phi\|_{t+2} \quad (26)$$

для произвольных $(\boldsymbol{q}, u)$, $(\boldsymbol{\Phi}, \phi) \in \boldsymbol{W} \times V$ и

$$|A\left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) + B\left(v, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) - B\left(u - \Pi u, \boldsymbol{w}\right) +$$
$$+ C\left(v, u - \Pi u\right)| \leqslant C \left(\|\boldsymbol{w}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![v]\!]^2 ds \right) h^P \|u\|_{s+2} \quad (27)$$

для произвольных $(\boldsymbol{w}, v) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$ и $(\boldsymbol{q}, u) \in H^1(\Omega)^2 \times H^2(\Omega)$.

Лемма 6. *Справедлива следующая оценка*

$$\|\boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11} [\![e_u]\!]^2 ds \leqslant C h^J \|u\|_{s+2} + C h^P \|u\|_{s+2}.$$

Доказательство.

$$\|\boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![e_u]\!]^2 ds \leqslant \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\|_0^2 + \\ + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![u - \Pi u]\!]^2 ds + \|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![\Pi e_u]\!]^2 ds.$$

Т.к.

$$\left(\|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![\Pi e_u]\!]^2 ds\right)^2 = A\left(\boldsymbol{\Pi e_q}, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) + B\left(\Pi e_u, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) - \\ - B\left(\Pi e_u, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) + C\left(\Pi e_u, \Pi e_u\right), \\ = A\left(\boldsymbol{\Pi q} - \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) + B\left(\Pi u - u, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) - \\ - B\left(\Pi e_u, \boldsymbol{\Pi q} - \boldsymbol{q}\right) + C\left(\Pi u - u, \Pi e_u\right) \ \text{ из } (23), \\ = A\left(-\boldsymbol{\Pi e_q}, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) + B\left(\Pi e_u, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) - \\ - B\left(\Pi u - u, -\boldsymbol{\Pi e_q}\right) + C\left(\Pi e_u, \Pi u - u\right), \\ \leqslant C\left(\|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![\Pi e_u]\!]^2 ds\right) h^P \|u\|_{s+2} \ \text{ из } (27).$$

Таким образом, справедлива следующая оценка:

$$\|\boldsymbol{\Pi e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![\Pi e_u]\!]^2 ds \leqslant C h^P \|u\|_{s+2} \tag{28}$$

и далее

$$\|\boldsymbol{e_q}\|_0^2 + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![e_u]\!]^2 ds \leqslant \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\| + \int_{\Gamma_Q} C_{11}[\![u - \Pi u]\!]^2 ds + C h^P \|u\|_{s+2}.$$

Искомая оценка следует после применения предположения (26). □

Лемма 7. *Пусть t — натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка*:

$$\|e_u\|_{-t,D} \leqslant C h^{\min\{H,2P\}} \|u\|_{s+2}.$$

Доказательство. Пусть ϕ является решением двойственной задачи (24), (25) и $\boldsymbol{\Phi} = -\nabla\phi$, тогда легко показать, что при выборе $\boldsymbol{\Phi} = -\nabla\phi$ получим

$$A\left(-\boldsymbol{\Phi}, -\boldsymbol{s}\right) + B\left(\phi, -\boldsymbol{s}\right) - B\left(w, -\boldsymbol{\Phi}\right) + C\left(\phi, w\right) = \Lambda\left(w\right)$$

для всех $(\boldsymbol{s}, w) \in \boldsymbol{W} \times V$. Задача (1), (2) может быть переписана в виде (15). Возьмем $(\boldsymbol{s}, w) = (\boldsymbol{e_q}, e_u)$, получим

$$\Lambda\left(e_u\right) = A\left(\boldsymbol{e_q}, \boldsymbol{\Phi}\right) + B\left(e_u, \boldsymbol{\Phi}\right) - B\left(\phi, \boldsymbol{e_q}\right) + C\left(e_u, \phi\right),$$

$$
\begin{aligned}
&= A\left(\boldsymbol{e_q}, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) + B\left(e_u, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) - B\left(\phi - \Pi\phi, \boldsymbol{e_q}\right) + \\
&\qquad + C\left(e_u, \phi - \Pi\phi\right) \text{ из } (23), \\
&= A\left(\boldsymbol{\Pi e_q}, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) + B\left(\Pi e_u, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) - B\left(\phi - \Pi\phi, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) + \\
&\qquad + C\left(\Pi e_u, \phi - \Pi\phi\right) + A\left(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) + \\
&\qquad + B\left(u - \Pi u, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) - B\left(\phi - \Pi\phi, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) + \\
&\qquad + C\left(u - \Pi u, \phi - \Pi\phi\right).
\end{aligned}
$$

Т.к. $(\boldsymbol{\Pi e_q}, \Pi e_u) \in \boldsymbol{W_h} \times V_h$, применяя (27) и (28), получим следующую оценку:

$$
\begin{aligned}
&\left|A\left(\boldsymbol{\Pi e_q}, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) + B\left(\Pi e_u, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) - B\left(\phi - \Pi\phi, \boldsymbol{\Pi e_q}\right) + \right. \\
&\qquad \left. + C\left(\Pi e_u, \phi - \Pi\phi\right)\right| \leqslant C h^P \|u\|_{s+2} h^P \|\phi\|_{s+2},
\end{aligned}
$$

далее получим

$$
\begin{aligned}
&\left|\Lambda\left(e_u\right)\right| \leqslant C h^P \|u\|_{s+2} h^P \|\phi\|_{s+2} + A\left(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) + \\
&\qquad + B\left(u - \Pi u, \boldsymbol{\Phi} - \boldsymbol{\Pi\Phi}\right) - B\left(\phi - \Pi\phi, \boldsymbol{q} - \boldsymbol{\Pi q}\right) + C\left(u - \Pi u, \phi - \Pi\phi\right).
\end{aligned}
$$

Применим предположение (26) и по определению негативной нормы получим искомую оценку. □

Следствие 3. *Пусть t — натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$
\|e_{ut}\|_{-t,D} \leqslant C h^{\min\{H,2P\}} \left(\|u\|_{s+2} + \|u_t\|_{s+2}\right).
$$

Доказательство. Для получения искомой оценки нужно продифференцировать (19), (20) по t и выполнить процедуру доказательства, аналогичную при доказательстве леммы 7. □

Используя введенную ранее проекцию (19), (20), можно записать

$$
\begin{aligned}
u - u_h &= (u - \tilde{u}_h) - (u_h - \tilde{u}_h) = \eta_u - \xi_u, \\
\mathbf{q} - \boldsymbol{q}_h &= (\mathbf{q} - \tilde{\boldsymbol{q}}_h) - (\boldsymbol{q}_h - \tilde{\boldsymbol{q}}_h) = \boldsymbol{\eta_q} - \boldsymbol{\xi_q}.
\end{aligned}
$$

Лемма 8. *Существует константа C, не зависящая от h и p такая, что*

$$
\|\xi_u\|^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\xi_q}\|^2 \, ds \leqslant C \left(\|\xi_u(0)\|^2 + \int_0^T \|\eta_{u_t}\|^2 \, ds\right).
$$

Доказательство. Возьмем $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\xi_q}$ в (21) и $v_h = \xi_u$ в (22), просуммируем и получим

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi_u\|^2 + A\left(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_q}\right) + C\left(\xi_u, \xi_u\right) = \left(\eta_{u_t}, \xi_u\right).
$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\frac{d}{dt}\|\xi_u\|^2 + \|\boldsymbol{\xi_q}\|^2 + 2C(\xi_u, \xi_u) \leqslant \|\eta_{u_t}\|^2 + \|\xi_u\|^2.$$

Интегрируя последнее выражение от 0 до t, получим

$$\|\xi_u\|^2 + \int_0^t \Big\{\|\boldsymbol{\xi_q}\|^2 + 2C(\xi_u, \xi_u)\Big\}\, ds \leqslant \|\xi_u(0)\|^2 + \int_0^t \|\eta_{u_t}\|^2\, ds + \int_0^t \|\xi_u\|^2\, ds.$$

Используя лемму Гронуолла, получим

$$\|\xi_u\|^2 + \int_0^t \|\boldsymbol{\xi_q}\|^2\, ds \leqslant C\bigg(\|\xi_u(0)\|^2 + \int_0^T \|\eta_{u_t}\|^2\, ds\bigg).$$

Возьмем $\boldsymbol{w_h} = \boldsymbol{\xi_{q_t}}$ в (21) и $v_h = \xi_{u_t}$ в (22). Используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}A(\boldsymbol{\xi_q}, \boldsymbol{\xi_q}) + \frac{1}{2}\|\xi_{u_t}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}C(\xi_u, \xi_u) \leqslant \frac{1}{2}\|\eta_{u_t}\|^2.$$

Интегрируя от 0 до t, получим

$$\|\boldsymbol{\xi_q}\|^2 + \int_0^t \|\xi_{u_t}\|^2\, ds + J(\xi_u, \xi_u) \leqslant \|\boldsymbol{\xi_q}(0)\|^2 + C\big(\xi_u(0), \xi_u(0)\big) + \int_0^t \|\eta_{u_t}\|^2\, ds.$$

$\square$

5. Формулировка и доказательство основной теоремы.

Теорема. *Пусть* $(\boldsymbol{q}, u)$ *является решением задачи* (3)–(5) *и* $(\boldsymbol{q}_h, u_h)$ *является решением задачи* (11)–(12). *Пусть выполнены предположения на локальные пространства и на вид стабилизирующего параметра* C_{11}. *Предполагаем, что триангуляция* $\mathscr{T}_T$ *удовлетворяет предположению* (16). *При* $\alpha \neq 0$ *также предполагаем, что имеет силу предположение* (17). *Тогда для* $(\boldsymbol{q}, u) \in H^{s+1}(\Omega) \times H^{s+2}(\Omega)$ *при* $s \geqslant 0$ *получим оценку*

$$\|u - u_h\|_0 \leqslant Ch^{P+D}\left(\|u\|_{s+2} + \int_0^t \{\|u(s)\|_{s+2} + \|u_s(s)\|_{s+2}\} ds\right),$$

где C *зависит от* σ, δ *(в случае* $\alpha \neq 0$*),* ζ, k *и* d;

$$P = \min\Big\{s + \frac{1}{2}(1 + \mu_*), k + \frac{1}{2}(1 - \mu^*)\Big\}, \quad D = \frac{1}{2}(1 + \mu_*), \quad \textit{если} \quad k \geqslant 1.$$

В случае $k = 0$ *получим* $P = D = \frac{1}{2}(1 - \mu_*)$.

Доказательство. С учетом неравенств треугольника для искомой оценки справедливо утверждение

$$\|u - u_h\|_0 \leqslant \|u - \tilde{u}_h\|_0 + \|u_h - \tilde{u}_h\|_0. \tag{29}$$

Рассмотрим норму L^2 погрешности $u - u_h$. Возьмем $t = 0$ и $D = \Omega$ в лемме 7. Из условия эллиптической регулярности двойственной задачи (24), (25) получим $\|\phi\|_2 \leqslant C\|\lambda\|_0$. Оценка $\|u - \tilde{u}_h\|_0$ получается из следствий 1 и 2 и ограниченности $\|\Phi\|_1$ и $\|\phi\|_2$ величиной $\|\lambda\|_0$. Получим

$$\|u - \tilde{u}_h\|_0 \leqslant Ch^{\min\{H|_{t=0}, P+P|_{s=0}\}}\|u\|_{s+2},$$

и т.к. $\min\{H|_{t=0}, P + P|_{s=0}\} = P + P|_{s=0}$, получим следующую оценку

$$\|u - \tilde{u}_h\|_0 \leqslant Ch^{P+D}\|u\|_{s+2}, \tag{30}$$

где $D = P|_{s=0}$. Используя неравенство треугольника (29), лемму 8 и следствие 3, получим искомую оценку. Доказательство завершено. □

В таблице ниже представлены порядки сходимости по h с различным выбором стабилизирующего параметра C_{11}. Эти порядки получаются из (30).

Порядки сходимости решения $u \in H^{s+2}$ для $s \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$
[Convergence orders of solution $u \in H^{s+2}$ for $s \geqslant 0$ and $k \geqslant 1$]

	C_{11}	$\|u - u_h\|_0$
$\alpha = 0$	$O(1)$	$\min\left\{s + \frac{1}{2}, k\right\} + \frac{1}{2}$
$\alpha = -1$	$O(1/h)$	$\min\{s + 1, k\} + 1$

Заключение. В работе получены оценки погрешности решения двумерной однородной краевой задачи для параболического уравнения с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных неструктурированных сетках. При этом предполагалось, что узлы двойственной сетки являются центрами ячеек основной сетки. Как видно из таблицы, в случае использования стабилизирующего коэффициента порядка единицы получается порядок сходимости $k + 1/2$, а в случае использования стабилизирующего коэффициента порядка h^{-1} порядок сходимости увеличивается до $k + 1$ для исследуемого метода, где k — максимальный порядок используемых полиномов в базисных функциях. В данном случае, в отличие от традиционного подхода, в котором используется одна сетка, выбор численных потоков на границе элементов происходит интуитивно более понятно за счет использования разнесенных сеток. Оптимальность полученных теоретических результатов тестировалась для двумерных задач в серии ранее опубликованных работ [1, 2, 4, 5]. Полученные порядки сходимости для локального разрывного метода Галеркина на разнесенных неструктурированных сетках соответствуют аналогичным оценкам, ранее полученным другими авторами на неразнесенных неструктурированных сетках [7, 15, 18].

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18–41–130001, 18–31–00102), Минобрнауки РФ (1.6958.2017/8.9) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1). Работа В. Ф. Тишкина выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 17–71–30014).

Библиографический список

1. Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галеркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // *Журнал СВМО*, 2013. Т. 15, № 2. С. 59–65.
2. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф. Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированной сетке // *Журнал СВМО*, 2014. Т. 16, № 2. С. 7–13.
3. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 523–533. `doi: 10.14498/vsgtu1351`.
4. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф. Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016. Т. 56, № 6. С. 989–998. `doi: 10.7868/S0044466916060247`.
5. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф. Применение разрывного метода Галеркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2016. Т. 9, № 3. С. 144–151. `doi: 10.14529/mmp160313`.
6. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф. Априорные оценки для метода Галеркина с разрывными базисными функциями на разнесенных сетках для однородной задачи Дирихле // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2018. Т. 11, № 2. С. 29–43. `doi: 10.14529/mmp180203`.
7. Cockburn B., Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1998. vol. 35, no. 6. pp. 2440–2463. `doi: 10.1137/S0036142997316712`.
8. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations // *J. Comp. Phys.*, 1997. vol. 131, no. 2. pp. 267–279. `doi: 10.1006/jcph.1996.5572`.
9. Cockburn B., Hou S., Shu C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case // *Math. Comp.*, 1990. vol. 54, no. 190. pp. 545–581. `doi: 10.1090/S0025-5718-1990-1010597-0`.
10. Cockburn B., Lin S.-Y., Shu C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems // *J. Comput. Phys.*, 1989. vol. 84, no. 1. pp. 90–113. `doi: 10.1016/0021-9991(89)90183-6`.
11. Cockburn B., Shu C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework // *Math. Comp.*, 1989. vol. 52, no. 186. pp. 411–435. `doi: 10.1090/S0025-5718-1989-0983311-4`.
12. Cockburn B., Lin S.-Y., Shu C.-W. The Runge–Kutta local projection P^1-discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1991. vol. 25, no. 3. pp. 337–361. `doi: 10.1051/m2an/1991250303371`.
13. Cockburn B., Shu C.-W. The Runge–Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: Multidimensional systems // *J. Comput. Phys.*, 1998. vol. 141, no. 2. pp. 199–224. `doi: 10.1006/jcph.1998.5892`.
14. Ciarlet P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* / Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM, 2002. xxiii+529 pp. `doi: 10.1137/1.9780898719208`.
15. Castillo P., Cockburn B., Perugia I., Schötzau D. An a priory error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000. vol. 38, no. 5. pp. 1676–1706. `doi: 10.1137/S0036142900371003`.
16. Thomée V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems* / Springer Series in Computational Mathematics. vol. 25. Berlin: Springer, 1997. x+302 pp. `doi: 10.1007/978-3-662-03359-3`.

17. Rivière B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations* / Frontiers in Applied Mathematics. Philadelphia: SIAM, 2008. xxii+178 pp. `doi: 10.1137/1.9780898717440`.
18. Pany A., Yadav S. An *hp*-local discontinuous Galerkin method for parabolic integro-differential equations // *J. Sci. Comput.*, 2011. vol. 46, no. 1. pp. 71–99. `doi: 10.1007/s10915-010-9384-z`.
19. Babuška I., Suri M. The $h-p$ version of the finite element method with quasiuniform meshes // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1987. vol. 21, no. 2. pp. 199–238. `doi: 10.1051/m2an/1987210201991`.
20. Даутов Р. З., Федотов Е. М. Абстрактная теория HDG-схем для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2014. Т. 54, № 3. С. 463–480. `doi: 10.7868/S0044466914030041`.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 116–136
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1747

MSC: 65N30

A priori error estimates of the local discontinuous Galerkin method on staggered grids for solving a parabolic equation for the homogeneous Dirichlet problem

***R. V. Zhalnin*[1], *V. F. Masyagin*[1], *E. E. Peskova*[1], *V. F. Tishkin*[2]**

[1] Ogarev Mordovia State University,
68, Bol'shevistskaya st., Saransk, 430005, Russian Federation.
[2] Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,
4, Miusskaya pl., Moscow, 125047, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we present a priori error analysis of the solution of a homogeneous boundary value problem for a second-order differential equation by the Discontinuous Galerkin method on staggered grids. The spatial discretization is constructed using an appeal to a mixed finite element formulation. Second-order derivatives cannot be directly matched in a weak variational formulation using the space of discontinuous functions. For lower the order, the components of the flow vector are considered as auxiliary variables of the desired second-order equation. The approximation is based on staggered grids. The main grid consists of triangles, the dual grid consists of median control volumes around the nodes of the triangular grid. The approximation of the desired function is built on the cells of the main grid, while the approximation of auxiliary variables is built on the cells of the dual grid. To calculate the flows at the boundary between the elements, a stabilizing parameter is used. Moreover, the flow of the desired function does not depend on auxiliary functions, while the flow of auxiliary variables depends on the desired function. To solve this problem, the necessary lemmas are formulated and proved. As a result, the main theorem is formulated and proved, the result of which is a priori estimates for solving a parabolic equation using the discontinuous Galerkin method. The main role in the analysis of convergence is played by the estimate for the negative norm of the gradient. We show that for stabilization parameter of first order, the L^2-norm of the *solution* is of order $k + 1/2$, if stabilization parameter of order h^{-1}

Research Article

Please cite this article in press as:
Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. A priori error estimates of the local discontinuous Galerkin method on staggered grids for solving a parabolic equation for the homogeneous Dirichlet problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 116–136. doi: 10.14498/vsgtu1747 (In Russian).

Authors' Details:
Ruslan V. Zhalnin https://orcid.org/0000-0002-1103-3321
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept. Head; Dept. of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics; e-mail: zhrv@mrsu.ru

Victor F. Masyagin https://orcid.org/0000-0001-6738-8183
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Dept. of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics; e-mail: vmasyagin@gmail.com

is taken, the order of convergence of the *solution* increases to $k+1$, when polynomials of total degree at least k are used.

Keywords: a priori error analysis, finite element method, discontinuous Galerkin method, staggered grids, parabolic problems.

Received: 4th October, 2019 / Revised: 29th October, 2020 / Accepted: 11th November, 2019 / First online: 16th March, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research Research (project nos. 18–41–130001, 18–31–00102), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (1.6958.2017/8.9), and the Programme of the President of the Russian Federation for the support of young scientists (grant no. MK-2007.2018.1). The work of Vladimir F. Tishkin was supported by the grant from the Russian Science Foundation (grant no. 17–71–30014).

References

1. Masyagin V. F., Zhalnin R. V., Tishkin V. F. Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids, *Zhurnal SVMO*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 59–65 (In Russian).
2. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids, *Zhurnal SVMO*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 7–13 (In Russian).
3. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Solution of 3D heat conduction equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 523–533 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1351.
4. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 977–986. doi: 10.1134/S0965542516060245.
5. Zhalnin R. V., Ladonkina M. E., Masyagin V. F., Tishkin V. F. Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of parabolic problems in anisotropic media on triangle grids, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 144–151 (In Russian). doi: 10.14529/mmp160313.
6. Zhalnin R. V., Masyagin V. F. Galerkin method with discontinuous basis functions on staggered grips a priory estimates for the homogeneous Dirichlet problem, *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 29–43 (In Russian). doi: 10.14529/mmp180203.

Elizaveta E. Peskova https://orcid.org/0000-0003-2618-1674
Cand. Phys. & Math. Sci.; Junior Researcher; Dept. of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics; e-mail: e.e.peskova@mail.ru

Vladimir F. Tishkin https://orcid.org/0000-0001-7295-7002
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Corresponding Member of Russian Academy of Sciences; Dept. Head; e-mail: v.f.tishkin@mail.ru

7. Cockburn B., Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1998, vol. 35, no. 6, pp. 2440–2463. doi: 10.1137/S0036142997316712.
8. Bassi F., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations, *J. Comp. Phys.*, 1997, vol. 131, no. 2, pp. 267–279. doi: 10.1006/jcph.1996.5572.
9. Cockburn B., Hou S., Shu C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case, *Math. Comp.*, 1990, vol. 54, no. 190, pp. 545–581. doi: 10.1090/S0025-5718-1990-1010597-0.
10. Cockburn B., Lin S.-Y., Shu C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems, *J. Comput. Phys.*, 1989, vol. 84, no. 1, pp. 90–113. doi: 10.1016/0021-9991(89)90183-6.
11. Cockburn B., Shu C.-W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework, *Math. Comp.*, 1989, vol. 52, no. 186, pp. 411–435. doi: 10.1090/S0025-5718-1989-0983311-4.
12. Cockburn B., Lin S.-Y., Shu C.-W. The Runge–Kutta local projection P^1-discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1991, vol. 25, no. 3, pp. 337–361. doi: 10.1051/m2an/1991250303371.
13. Cockburn B., Shu C.-W. The Runge–Kutta discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws V: Multidimensional systems, *J. Comput. Phys.*, 1998, vol. 141, no. 2, pp. 199–224. doi: 10.1006/jcph.1998.5892.
14. Ciarlet P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Classics in Applied Mathematics. Philadelphia, SIAM, 2002, xxiii+529 pp. doi: 10.1137/1.9780898719208.
15. Castillo P., Cockburn B., Perugia I., Schötzau D. An a priory error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, vol. 38, no. 5, pp. 1676–1706. doi: 10.1137/S0036142900371003.
16. Thomée V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 25. Berlin, Springer, 1997, x+302 pp. doi: 10.1007/978-3-662-03359-3.
17. Rivière B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations*, Frontiers in Applied Mathematics. Philadelphia, SIAM, 2008, xxii+178 pp. doi: 10.1137/1.9780898717440.
18. Pany A., Yadav S. An *hp*-local discontinuous Galerkin method for parabolic integro-differential equations, *J. Sci. Comput.*, 2011, vol. 46, no. 1, pp. 71–99. doi: 10.1007/s10915-010-9384-z.
19. Babuška I., Suri M. The $h-p$ version of the finite element method with quasiuniform meshes, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1987, vol. 21, no. 2, pp. 199–238. doi: 10.1051/m2an/1987210201991.
20. Dautov R. Z., Fedotov E. M. Abstract theory of hybridizable discontinuous Galerkin methods for second-order quasilinear elliptic problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 3, pp. 474–490. doi: 10.1134/S096554251403004X.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 137–162
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1732

УДК 517.927.4:519.624

Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами

В. Н. Маклаков, М. А. Ильичева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Использование многочлена Тейлора второй степени при аппроксимации производных конечными разностями приводит ко второму порядку аппроксимации традиционного метода сеток при численном интегрировании краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В работе при исследовании краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления, в котором аппроксимация производных конечными разностями не использовалась. Согласно указанному методу, при составлении системы разностных уравнений может быть выбрана произвольная степень многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора.

В работе возможные граничные условия дифференциальной краевой задачи записаны как в виде производных степеней от нуля до трех, так и в виде линейных комбинаций этих степеней. Краевая задача названа симметричной, если количества граничных условий в левой и правой границах совпадают и равны двум; в противном случае задача названа несимметричной. Для дифференциальной краевой задачи составлена ее аппроксимирующая разностная краевая задача в виде двух подсистем: в первую подсистему вошли уравнения, при построении которых не были использованы граничные условия краевой задачи; во вторую подсистему вошли четыре уравнения, при построении которых были использованы граничные условия задачи.

Научная статья

Образец для цитирования
Маклаков В. Н., Ильичева М. А. Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 137–162. doi: 10.14498/vsgtu1732.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Маклаков https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики и прикладной информатики; e-mail: makvo63@yandex.ru

Мария Александровна Ильичева https://orcid.org/0000-0001-6437-9142
аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: ilicheva-1993@mail.ru

Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации разностной краевой задачи и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено следующее:

а) порядок аппроксимации первой и второй подсистем пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
б) порядок аппроксимации первой подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на две единицы при ее четном значении и меньше на три единицы при ее нечетном значении;
в) порядок аппроксимации второй подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на три единицы независимо как от четности или нечетности этой степени, так и от степени старшей производной в граничных условиях краевой задачи.

Вычислен порядок аппроксимации разностной краевой задачи со всеми возможными комбинациями граничных условий. Теоретические выводы подтверждены численными экспериментами.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Получение: 31 июля 2019 г. / Исправление: 19 ноября 2019 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 2 марта 2020 г.

Введение. Предложенный в работе [1] метод, использующий средства матричного исчисления и численного интегрирования краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) с переменными коэффициентами позволяет удерживать произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями. Известно, что использование конечных разностей приводит ко второму порядку аппроксимации (ПА) при численном интегрировании как краевых задач для ОДУ2 [2–7], так и ряда краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных [5–11]. Последнее обусловлено тем, что при аппроксимации производных удерживается всего три члена в разложении в ряд Тейлора искомого решения задачи или, что то же самое, был использован многочлен Тейлора второй степени.

1. Обозначения, терминология, некоторые предварительные результаты и постановка задачи. Далее будем придерживаться принятых в [5] обозначений:

а) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, $h = \big(b - a\big)/n$, $n + 1$ — число узлов сетки;
б) $x(t)$ — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи для ОДУ4;
в) $[x]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h;
г) $x^{(h)}$ — искомая сеточная функция.

Для краткости примем для любой функции обозначение $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h.

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $x^{(h)}$ и будем оговаривать особо случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция $x(t)$, являющаяся точным решением, при сохранении обозначений $x(t_i) = x_i$ для нее в узлах сетки.

Примем следующую терминологию.

1. Перечислим виды граничных условий (ГУ) в левой границе $t_0 = a$ сетки D_h, которые будут использоваться ниже в краевых задачах для ОДУ4 (9):

$$x(a) = \widetilde{x}_0, \tag{1}$$

$$x'(a) = \widetilde{x}'_0, \tag{2}$$

$$x''(a) = \widetilde{x}''_0, \tag{3}$$

$$x'''(a) = \widetilde{x}'''_0, \tag{4}$$

$$\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \widetilde{z}_0, \tag{5}$$

   где $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}'_0$, $\widetilde{x}''_0$, $\widetilde{x}'''_0$, $\widetilde{z}_0$, α_0, β_0, γ_0, λ_0 — заданные числа; числа α_0, β_0, γ_0, λ_0 не обращаются в нуль одновременно. Условия (1)–(4) назовем граничными условиями той или иной степени в соответствии с используемой степенью производной в них; условие (5) назовем смешанным ГУ. Аналогично могут быть перечислены ГУ в правой границе $t_n = b$ сетки D_h.
2. Дифференциальную краевую задачу (ДКЗ) для ОДУ4 назовем симметричной, если количество ГУ (1)–(5) в левой и правой границах области интегрирования D совпадает и равно двум; в противном случае задачу назовем несимметричной.
3. Дифференциальную краевую задачу для ОДУ4 назовем смешанной, если она содержит одно или несколько ГУ (5). Смешанная ДКЗ может оказаться как симметричной, так и несимметричной. Например, задача

$$\begin{cases} u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + \\ \qquad + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \\ \alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \widetilde{z}_0, \\ x'(b) = \widetilde{x}'_n, \quad x''(b) = \widetilde{x}''_n, \quad x'''(b) = \widetilde{x}'''_n \end{cases} \tag{6}$$

   является смешанной несимметричной ДКЗ.

Согласно [5], разностная краевая задача (РКЗ), аппроксимирующая дифференциальную задачу, может быть записана в компактной символической форме как

$$L_h^k x = f_h^k, \tag{7}$$

где k есть степень используемого многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора. Подробный вид равенства (7) будет дан ниже.

Сеточная функция x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, являющаяся решением некоторой РКЗ, записанной в форме (7), при подстановке в уравнения этой РКЗ обратит их в верные равенства. В [5] показано, что подстановка в уравнения задачи (7) значений сеточной функции $[x_i]$, отличающихся от x_i, приведет к некоторому отличию от верных равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf_h^k. Иными словами, подстановка $[x]$ в задачу (7) приведет к равенству

$$L_h^k[x] = f_h^k + \delta f_h^k. \tag{8}$$

Согласно [5, 7], РКЗ (8) аппроксимирует дифференциальную краевую задачу на точном решении $x(t)$, если норма $\left\| \delta f_h^k \right\| \to 0$ при $h \to 0$. Если при этом имеет место неравенство $\|\delta f_h^k\| \leqslant Ch^m$, $C > 0$, $m > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место аппроксимация порядка m относительно величины h.

В соответствии с [5] норму невязки задачи (8) можно записать как

$$\|\delta f_h^k\| = \max\bigl(|\delta f_{h0}^k|,\ |\delta f_{h1}^k|,\ |\delta f_{h2}^k|,\ \ldots,\ |\delta f_{hn}^k|\bigr),$$

где второй нижний индекс означает принадлежность компоненты к номеру уравнения задачи (8) при начале нумерации с нуля.

Поставим целью исследование возможности численного интегрирования матричным методом краевых задач с различными ГУ для неоднородных линейных ОДУ4 с переменными коэффициентами

$$u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \tag{9}$$

где $u(t)$, $s(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз, $x(t)$ — искомая функция, являющаяся точным решением задачи; с последующим вычислением ПА в зависимости от степени k используемого многочлена Тейлора.

2. Численное интегрирование краевых задач для ОДУ4. Для ДКЗ (6) составим ее аппроксимирующую РКЗ.

В соответствии с матричным методом численного интегрирования составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для пятиточечного шаблона t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, в которую при фиксированном $k \geqslant 4$ внесем:

а) четыре многочлена Тейлора степени k, полученных из четырех разложений в ряд Тейлора искомого точного решения $x(t)$ в окрестностях слева и справа от некоторого внутреннего узла (центрального узла шаблона) t_i, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, сетки D_h;

б) уравнения

$$\bigl(q_i x_i + p_i x_i' + r_i x_i'' + s_i x_i''' + u_i x_i^{(4)}\bigr)^{(r)} = f_i^{(r)}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-4,$$

полученные дифференцированием r раз обеих частей ОДУ4 (9) и записанные в узле t_i.

В итоге получим замкнутую СЛАУ

$$\begin{cases}
x_i - 2hx_i' + 4\dfrac{h^2}{2!}x_i'' - 8\dfrac{h^3}{3!}x_i''' + 16\dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + (-2)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-2},\\
x_i - hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' - \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + (-1)^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-1},\\
x_i + hx_i' + \dfrac{h^2}{2!}x_i'' + \dfrac{h^3}{3!}x_i''' + \dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + \dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+1},\\
x_i + 2hx_i' + 4\dfrac{h^2}{2!}x_i'' + 8\dfrac{h^3}{3!}x_i''' + 16\dfrac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \cdots + 2^k\dfrac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+2},\\
q_i x_i + p_i x_i' + r_i x_i'' + s_i x_i''' + u_i x_i^{(4)} = f_i,\\
q_i' x_i + \bigl(p_i' + q_i\bigr)x_i' + \bigl(r_i' + p_i\bigr)x_i'' + \bigl(s_i' + r_i\bigr)x_i''' + \bigl(u_i' + s_i\bigr)x_i^{(4)} + u_i x_i^{(5)} = f_i',\\
\ldots\\
q_i^{(k-4)}x_i + \cdots + u_i x_i^{(k)} = f_i^{(k-4)}.
\end{cases} \tag{10}$$

В матричной форме система уравнений (10) имеет вид $A^{ki}W^{ki} = G^{ki}$ в обозначениях

$$A^{ki} = \begin{bmatrix} 1 & -2h & 4\frac{h^2}{2!} & -8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} & \dots & (-2)^k\frac{h^k}{k!} \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & (-1)^k\frac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & \frac{h^k}{k!} \\ 1 & 2h & 4\frac{h^2}{2!} & 8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} & \dots & 2^k\frac{h^k}{k!} \\ q_i & p_i & r_i & s_i & u_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q_i^{(k-4)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & u_i \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$W^{ki} = \begin{bmatrix} x_i & x_i' & x_i'' & x_i''' & x_i^{(4)} & \dots x_i^{(k)} \end{bmatrix}^\top, \tag{12}$$

$$G^{ki} = \begin{bmatrix} x_{i-2} & x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & f_i & f_i' & f_i'' & \dots & f_i^{(k-4)} \end{bmatrix}^\top, \tag{13}$$

где $\top$ — символ транспонирования. Здесь и ниже первый верхний индекс k означает степень используемого многочлена Тейлора, если речь не идет о показателях алгебраических степеней, степенях производных, символов обратных матриц и транспонирования; второй из пары верхних индексов i в наименованиях матриц и их элементов, если таковой присутствует, означает номер центрального узла пятиточечного шаблона, в котором записана матрица. Матрицы A^{ki}, как и ранее в [12–14], будем называть локальными матрицами.

Предполагая существование обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ от локальной матрицы A^{ki}, найдем

$$W^{ki} = B^{ki}G^{ki} \tag{14}$$

или в координатной форме

$$x_i = b_{11}^{ki}x_{i-2} + b_{12}^{ki}x_{i-1} + b_{13}^{ki}x_{i+1} + b_{14}^{ki}x_{i+2} + b_{15}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{1m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{15}$$

$$x_i' = b_{21}^{ki}x_{i-2} + b_{22}^{ki}x_{i-1} + b_{23}^{ki}x_{i+1} + b_{24}^{ki}x_{i+2} + b_{25}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{2m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{16}$$

$$x_i'' = b_{31}^{ki}x_{i-2} + b_{32}^{ki}x_{i-1} + b_{33}^{ki}x_{i+1} + b_{34}^{ki}x_{i+2} + b_{35}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{3m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{17}$$

$$\dots$$

$$x_i^{(k)} = b_{(k+1)1}^{ki}x_{i-2} + b_{(k+1)2}^{ki}x_{i-1} + b_{(k+1)3}^{ki}x_{i+1} + \\ + b_{(k+1)4}^{ki}x_{i+2} + b_{(k+1)5}^{ki}f_i + \sum_{m=6}^{k+1} b_{(k+1)m}^{ki}f_i^{(m-5)}, \tag{18}$$

где b_{lm}^{ki}, $l = 1, 2, \dots, k+1$, $m = 1, 2, \dots, k+1$ — элементы матрицы B^{ki} в узле t_i. При $k = 4$ последние суммы в соотношениях (15)–(18) отсутствуют.

Из равенств (15), являющихся разностными уравнениями четвертого порядка [5] для пятиточечного шаблона $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, составим СЛАУ

$$L_h^k x = \begin{cases} -\dfrac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i-2} - \dfrac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i-1} + \dfrac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \dfrac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i+1} - \dfrac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}} x_{i+2} = \\ \qquad = f_i + \displaystyle\sum_{m=6}^{k+1} \dfrac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_i^{(m-5)}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{19}$$

Обратную матрицу от локальной матрицы и ее элементы в случае, когда при построении разностного уравнения не было использовано никакого ГУ, будем ниже обозначать как B^{ki} и b_{lm}^{ki} соответственно.

Система (19) содержит $n-4$ уравнения с n неизвестными x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, т.е. необходимо составить дополнительно еще четыре уравнения. Однако заметим, что еще не были использованы четыре ГУ задачи (6).

Исследуем смешанное ГУ (5). Имеем следующие многочлены при фиксированном $k \geqslant 4$:

$$x_2 - 2hx_2' + 4\frac{h^2}{2!}x_2'' - 8\frac{h^3}{3!}x_2''' + \cdots + (-2)^k \frac{h^k}{k!} x_2^{(k)} = x_0, \tag{20}$$

$$x_2' - 2hx_2'' + 4\frac{h^2}{2!}x_2''' - 8\frac{h^3}{3!}x_2^{(4)} + \cdots + (-2)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} x_2^{(k)} = x_0', \tag{21}$$

$$x_2'' - 2hx_2''' + 4\frac{h^2}{2!}x_2^{(4)} - 8\frac{h^3}{3!}x_2^{(5)} + \cdots + (-2)^{k-2} \frac{h^{k-2}}{(k-2)!} x_2^{(k)} = x_0'', \tag{22}$$

$$x_2''' - 2hx_2^{(4)} + 4\frac{h^2}{2!}x_2^{(5)} - 8\frac{h^3}{3!}x_2^{(6)} + \cdots + (-2)^{k-3} \frac{h^{k-3}}{(k-3)!} x_2^{(k)} = x_0'''. \tag{23}$$

Обе части равенства (20) умножим на α_0, равенства (21) — на β_0, равенства (22) — на γ_0, равенства (23) — на λ_0 и сложим, в итоге получим

$$\alpha_0 x_2 + (-2\alpha_0 h + \beta_0)\, x_2' + \left(4\frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 2\beta_0 h + \gamma_0\right) x_2'' + \\ + \left(-8\frac{\alpha_0 h^3}{3!} + 4\frac{\beta_0 h^2}{2!} - 2\gamma_0 h + \lambda_0\right) x_2''' + \cdots + \\ + (-2)^{k-3}\left(-8\frac{\alpha_0 h^k}{k!} + 4\frac{\beta_0 h^{k-1}}{(k-1)!} - 2\frac{\gamma_0 h^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\lambda_0 h^{k-3}}{(k-3)!}\right) x_2^{(k)} = \widetilde{z}_0$$

или

$$A_0[x_2] + A_1[x_2'] + A_2[x_2''] + A_3[x_2'''] + \cdots + A_k[x_2^{(k)}] = \widetilde{z}_0, \tag{24}$$

где

$$A_0 = \alpha_0, \quad A_1 = -2\alpha_0 h + \beta_0, \quad A_2 = 4\frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 2\beta_0 h + \gamma_0,$$

$$A_m = (-2)^{m-3}\left(-8\frac{\alpha_0 h^m}{m!} + 4\frac{\beta_0 h^{m-1}}{(m-1)!} - 2\frac{\gamma_0 h^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\lambda_0 h^{m-3}}{(m-3)!}\right), \ m = 3, 4, \ldots, k.$$

Сохраним приведенные выше выкладки при составлении СЛАУ (19), а для учета смешанного ГУ (5) при построении первого дополнительного разностного уравнения в СЛАУ (10) при $i = 2$ вместо первого приближенного равенства используем многочлен (24); в этом случае вместо (11)–(13) получим

$$A^{k2} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_k \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & (-1)^k \frac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \dots & \frac{h^k}{k!} \\ 1 & 2h & 4\frac{h^2}{2!} & 8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} & \dots & 2^k \frac{h^k}{k!} \\ q_2 & p_2 & r_2 & s_2 & u_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q_2^{(k-4)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & u_2 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$W^{k2} = \begin{bmatrix} x_2 & x_2' & x_2'' & x_2''' & x_2^{(4)} & \dots & x_2^{(k)} \end{bmatrix}^\top,$$

$$G^{k2} = \begin{bmatrix} \widetilde{z}_0 & x_1 & x_3 & x_4 & f_2 & f_2' & f_2'' & \dots & f_2^{(k-4)} \end{bmatrix}^\top.$$

Предполагая существование обратной матрицы $Q^{k2} = (A^{k2})^{-1}$, вместо (14) найдем

$$W^{k2} = Q^{k2} G^{k2}. \tag{26}$$

Первая строка матричного равенства (26) после преобразований примет вид соотношения

$$-\frac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}} x_1 + \frac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \frac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}} x_3 - \frac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}} x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}} \widetilde{z}_0,$$

которое примем в качестве первого дополнительного разностного уравнения, при построении которого использовано смешанное ГУ (5). Напомним, что при $k = 4$ сумма в правой части последнего соотношения отсутствует и при этом задача фактически сводится к классическому методу сеток.

При построении трех оставшихся дополнительных уравнений, учитывающих три оставшихся ГУ задачи (6), воспользуемся описанной выше процедурой, в которой в СЛАУ (10) при $i = n - 2$ вместо четвертого приближенного равенства используем последовательно один из трех следующих многочленов:

$$x_{n-2}' + 2hx_{n-2}'' + 4\frac{h^2}{2!} x_{n-2}''' + 8\frac{h^3}{3!} x_{n-2}^{(4)} + \dots + 2^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} x_{n-2}^{(k)} = \widetilde{x}_n', \tag{27}$$

$$x_{n-2}'' + 2hx_{n-2}''' + 4\frac{h^2}{2!} x_{n-2}^{(4)} + 8\frac{h^3}{3!} x_{n-2}^{(5)} + \dots + 2^{k-2} \frac{h^{k-2}}{(k-2)!} x_{n-2}^{(k)} = \widetilde{x}_n'',$$

$$x_{n-2}''' + 2hx_{n-2}^{(4)} + 4\frac{h^2}{2!} x_{n-2}^{(5)} + 8\frac{h^3}{3!} x_{n-2}^{(6)} + \dots + 2^{k-3} \frac{h^{k-3}}{(k-3)!} x_{n-2}^{(k)} = \widetilde{x}_n'''.$$

Объединим четыре дополнительных уравнения в систему

$$\begin{cases} -\dfrac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_1 + \dfrac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \dfrac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_3 - \dfrac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \dfrac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}}\widetilde{z}_0, \\ -\dfrac{c_{11}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{c_{12}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{c_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{c_{13}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1} = \\ \qquad\qquad = f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{c_{1m}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{c_{14}^{k(n-2)}}{c_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}'_n, \\ -\dfrac{d_{11}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{d_{12}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{d_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{d_{13}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1} = \\ \qquad\qquad = f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{d_{1m}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{d_{14}^{k(n-2)}}{d_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}''_n, \\ -\dfrac{e_{11}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}x_{n-4} - \dfrac{e_{12}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}x_{n-3} + \dfrac{x_{n-2}}{e_{15}^{k(n-2)}} - \dfrac{e_{13}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}x_{n-1} = \\ \qquad\qquad = f_{n-2} + \sum\limits_{m=6}^{k+1} \dfrac{e_{1m}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}} f_{n-2}^{(m-5)} + \dfrac{e_{14}^{k(n-2)}}{e_{15}^{k(n-2)}}\widetilde{x}'''_n. \end{cases} \tag{28}$$

Здесь и ниже матрицы и коэффициенты разностного уравнения, при построении которого не были использованы ГУ, что уже было выше отмечено, или было использовано ГУ в форме значений искомой непрерывной функции $x(t)$ в границе сетки D_h, обозначены как B^{ki} и b_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной первой степени — как C^{ki} и c_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной второй степени — как D^{ki} и d_{ml}^{ki} соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной третьей степени — как E^{ki} и e_{ml}^{ki} соответственно; было использовано смешанное ГУ — как Q^{ki} и q_{ml}^{ki} соответственно. Указанные обозначения введены для внесения ясности в силу того, что во всех уравнениях в СЛАУ (28) центральным узлом шаблона является либо узел t_2, либо узел t_{n-2}. Последнее приводит к совпадению номеров пар индексов в наименованиях ряда коэффициентов в уравнениях системы (28). Вследствие этого зафиксировать отличия одного уравнения от другого оказалось возможным лишь различными наименованиями входящих в них коэффициентов.

Совокупность СЛАУ (19), (28) есть РКЗ, аппроксимирующая ДКЗ (6), решение которой позволит найти искомые значения сеточной функции x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Как только числа x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, станут известными, в центральных узлах t_i, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, пятиточечных шаблонов по формулам (16)–(18) вычислим производные искомой функции $x(t)$ вплоть до степени k. Недостающие значения первой производной x'_0, x'_1, x'_{n-1}, x'_n, если они отсутствуют в условии ДКЗ, найдем по формулам (21), (27) и с использованием разложений

$$x'_1 = x'_2 - hx''_2 + \frac{h^2}{2!}x'''_2 - \frac{h^3}{3!}x_2^{(4)} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_2^{(k)}, \tag{29}$$

$$x'_{n-1} = x'_{n-2} + hx''_{n-2} + \frac{h^2}{2!}x'''_{n-2} + \frac{h^3}{3!}x_{n-2}^{(4)} + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_{n-2}^{(k)}. \tag{30}$$

По формулам, аналогичным (21), (27), (29), (30), можно найти недостающие значения производных $x_0^{(m)}$, $x_1^{(m)}$, $x_{n-1}^{(m)}$, $x_n^{(m)}$, $m = 2, 3, \ldots, k$.

3. Вычисление порядка аппроксимации разностных краевых задач для ОДУ4. При вычислении ПА, с которым разностная краевая задача аппроксимирует дифференциальную, в [5] обоснована целесообразность разбиения РКЗ на подзадачи (подсистемы); поэтому в отдельные подзадачи будем выделять СЛАУ, в уравнения которой не входят постоянные значения из ГУ, и СЛАУ, в уравнения которой входят все постоянные значения из ГУ, а затем отдельно будем вычислять ПА этих двух подзадач. Отметим, что выше разбиение на эти две подзадачи уже осуществлено в форме СЛАУ (19) и (28).

Первую подзадачу (19) запишем в компактной символической форме в обозначениях [5]:

$$L_{h,M}^k x = f_{h,M}^k, \tag{31}$$

вторую подзадачу (28) — в виде

$$l_{h,M}^k x = g_{h,M}^k, \tag{32}$$

где второй нижний индекс M означает, что рассматривается смешанная ДКЗ.

Ниже под обозначениями $L_{h,M}^k x = f_{h,M}^k$ или $L_h^k x = f_h^k$ будем понимать первую подзадачу.

Наряду с обозначением $L_{h,M}^k x = f_{h,M}^k$ эту же подзадачу для краткости будем ниже обозначать и как $L_{h,M}^k$, возможно, без второго нижнего индекса в случае, когда будет рассматриваться несмешанная ДКЗ.

Рассмотрим первую и вторую подзадачи (31) и (32). Подстановка $[x]$ в подзадачи (31) и (32) приведет к

$$L_{h,M}^k[x] = f_{h,M}^k + \delta f_{h,M}^k \tag{33}$$

и

$$l_{h,M}^k[x] = g_{h,M}^k + \delta g_{h,M}^k. \tag{34}$$

Вычислим ПА разностных подзадач (33) и (34).

Для подзадачи (33) в соответствии с [5] в качестве оценки величины невязки примем норму

$$\|\delta f_{h,M}^k\| = \max\bigl(|\delta f_{h2}^k|, |\delta f_{h3}^k|, \ldots, |\delta f_{h(n-2)}^k|\bigr), \tag{35}$$

где компонента, второй нижний индекс которой совпадает с номером центрального узла шаблона, характеризует меру отличий, появление которой обусловлено уравнением подзадачи (33) с номером на единицу меньше этого второго нижнего индекса, и норму для подзадачи (34)

$$\|\delta g_{h,M}^k\| = \max\bigl(|\delta g_{h1}^k|, |\delta g_{h2}^k|, |\delta g_{h3}^k|, |\delta g_{h4}^k|\bigr), \tag{36}$$

где второй нижний индекс означает принадлежность компоненты к номеру уравнения подзадачи (34) при начале нумерации с единицы.

Норму всей РКЗ (33), (34) в соответствии с [5] запишем как

$$\|\delta f_M^k\| = \max\bigl(\|\delta f_{h,M}^k\|, \|\delta g_{h,M}^k\|\bigr). \tag{37}$$

Исследуем подзадачу (33). При фиксированном $k \geqslant 4$ при построении всех разностных уравнений сохраним все приведенные выше выкладки для задачи (19) с тем лишь отличием, что в СЛАУ (10) вместо четырех первых приближенных равенств используем следующие точные равенства:

$$
\begin{gathered}
[x_i] - 2h[x_i'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_i''] - 8\frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + (-2)^k\frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-2}] - R_{i-2}^k, \\
[x_i] - h[x_i'] + \frac{h^2}{2!}[x_i''] - \frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + (-1)^k\frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i-1}] - R_{i-1}^k, \\
[x_i] + h[x_i'] + \frac{h^2}{2!}[x_i''] + \frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + \frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+1}] - R_{i+1}^k, \\
[x_i] + 2h[x_i'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_i''] + 8\frac{h^3}{3!}[x_i'''] + \cdots + 2^k\frac{h^k}{k!}[x_i^{(k)}] = [x_{i+2}] - R_{i+2}^k,
\end{gathered}
$$

где R_{i-2}^k, R_{i-1}^k, R_{i+1}^k, $R_{i+2}^k = \frac{(2h)^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi) = O(h^{k+1})$, $\xi \in (t_i, t_{i+2})$ — дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [15].

Локальная матрица (11) сохранит свой вид; вместо (12)–(14) получим

$$
[W^{ki}] = \Big[[x_i] \quad [x_i'] \quad [x_i''] \quad [x_i'''] \quad [x_i^{(4)}] \quad \ldots \quad [x_i^{(k)}]\Big]^\top,
$$

$$
[G^{ki}] = \begin{bmatrix} [x_{i-2}] - R_{i-2}^k \\ [x_{i-1}] - R_{i-1}^k \\ [x_{i+1}] - R_{i+1}^k \\ [x_{i+2}] - R_{i+2}^k \\ f_i \\ f_i' \\ f_i'' \\ \ldots \\ f_i^{(k-4)} \end{bmatrix},
$$

$$
[W^{ki}] = B^{ki}[G^{ki}]. \tag{38}
$$

Выпишем первую строку матричного равенства (38), являющуюся разностным уравнением:

$$
\begin{aligned}
b_{11}^{ki}\big([x_{i-2}]-R_{i-2}^k\big) + b_{12}^{ki}\big([x_{i-1}]-R_{i-1}^k\big) + b_{13}^{ki}\big([x_{i+1}]-R_{i+1}^k\big) + \\
+ b_{14}^{ki}\big([x_{i+2}]-R_{i+2}^k\big) + b_{15}^{ki}f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} b_{1m}^{ki}f_2^{(m-5)} = [x_2]
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
-\frac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i-2}] - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i-1}] + \frac{[x_i]}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i+1}] - \frac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}[x_{i+2}] = \\
= f_2 + \sum_{m=6}^{k+1}\frac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}}f_2^{(m-5)} - \frac{b_{11}^{ki}R_{i-2}^k + b_{12}^{ki}R_{i-1}^k + b_{13}^{ki}R_{i+1}^k + b_{14}^{ki}R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}}.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Сравнивая уравнения (19) и (39), заключаем, что последняя дробь в (39) есть, в соответствии с (33), величина невязки δf^k_{hi}. Это позволяет записать систему невязок задачи так:

$$\delta f^k_{h,M} = \begin{cases} \delta f^k_{hi}, \\ i = 2, 3, \ldots, n-2 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{b^{ki}_{11} R^k_{i-2} + b^{ki}_{12} R^k_{i-1} + b^{ki}_{13} R^k_{i+1} + b^{ki}_{14} R^k_{i+2}}{b^{ki}_{15}}, \\ i = 2, 3, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{40}$$

Здесь δf^k_{hi} есть величина невязки, появляющаяся в уравнении с номером $i-1$ в подзадаче (33).

Вычислим норму невязки $\|\delta f^k_{h,M}\|$ подзадачи (33). При вычислении алгебраических дополнений транспонированных локальных матриц $(A^{ki})^\top$ в нижние индексы их обозначений будем вносить для ясности наименования используемых обратных матриц от локальных матриц A^{ki}.

Рассмотрим алгебраическое дополнение $M^{ki}_{11,B}$ элемента a^{ki}_{11} матрицы $(A^{ki})^\top$; здесь A^{ki} определяется соотношением (11). Используя известные свойства определителя [16], имеем

$$M^{ki}_{11,B} = \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i & \ldots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \ldots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \ldots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \ldots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \ldots & u_i & w_i \\ (-1)^k\frac{h^k}{k!} & \frac{h^k}{k!} & 2^k\frac{h^k}{(k)!} & 0 & \ldots & 0 & u_i \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{h^k}{k!} \begin{vmatrix} h & 2h & p_i & \ldots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \ldots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \ldots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \ldots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \ldots & u_i & w_i \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^k\frac{h^k}{k!} \begin{vmatrix} -h & 2h & p_i & \ldots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \ldots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \ldots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \ldots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^k\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \ldots & u_i & w_i \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)^{k+1}\frac{h^k}{k!} \begin{vmatrix} -h & h & p_i & \ldots & \widetilde{p}_i & \widetilde{\widetilde{p}}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & r_i & \ldots & \widetilde{r}_i & \widetilde{\widetilde{r}}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & s_i & \ldots & \widetilde{s}_i & \widetilde{\widetilde{s}}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & u_i & \ldots & \widetilde{u}_i & \widetilde{\widetilde{u}}_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-1)^k\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \ldots & u_i & w_i \end{vmatrix} +$$

$$+\, u_i \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx h^k\big\{h^3 + \dots + h^{k-1}h^{k-2}\big\} + u_i M_{11}^{(k-1)i} \approx \sum_{m=k+3}^{3k-3} a_m h^m + u_i M_{11}^{(k-1)i};$$

здесь и ниже в фигурных скобках приведены лишь суммы степеней, а сомножители, не зависящие от h, опущены; a_m — коэффициенты, не зависящие от h; $\widetilde{p}_i$, $\widetilde{r}_i$, $\widetilde{s}_i$, $\widetilde{u}_i$, $\widetilde{\widetilde{p}}_i$, $\widetilde{\widetilde{r}}_i$, $\widetilde{\widetilde{s}}_i$, $\widetilde{\widetilde{u}}_i$, w_i — некоторые функции от q_i, p_i, r_i, s_i, u_i и их производных. Другими словами,

$$M_{11,B}^{ki} \approx \sum_{m=k+3}^{3k-3} a_m h^m + u_i M_{11,B}^{(k-1)i}. \tag{41}$$

Имеем

$$M_{11,B}^{(k-1)i} = \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i & \dots & \widetilde{p}_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & 4\frac{h^2}{2!} & r_i & \dots & \widetilde{r}_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & 8\frac{h^3}{3!} & s_i & \dots & \widetilde{s}_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & 16\frac{h^4}{4!} & u_i & \dots & \widetilde{u}_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 2^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!} & 0 & \dots & u_i \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx \big\{h^6 + \dots + h^{k-1}h^{k-2}h^{k-3}\big\} \approx \sum_{m=6}^{3k-6} b_m h^m, \tag{42}$$

где b_m — коэффициенты, не зависящие от h. Сравнивая (41) и (42), заключаем, что при $k \geqslant 5$ (при $k = 4$ первая полученная ниже формула теряет смысл) в соотношении (41) младшая степень первого слагаемого в первой сумме превосходит младшую степень второго слагаемого как минимум на две единицы, следовательно, можно положить

$$M_{11,B}^{ki} \approx u_i M_{11,B}^{(k-1)i}. \tag{43}$$

Несколько повторных использований последней формулы приводит к

$$M_{11,B}^{ki} \approx u_i^{k-4} M_{11,B}^{4i}. \tag{44}$$

Аналогичным образом могут быть получены приближенные равенства

$$M_{1j,B}^{ki} \approx u_i^{k-4} M_{1j,B}^{4i}, \quad j = 2, 3, 4, 5. \tag{45}$$

Отсутствие в настоящей работе полного вывода формул (45) обусловлено лишь громоздкостью выкладок. При исследовании краевых задач для ОДУ2 вывод формул, аналогичных (44), (45), дан в [12].

На основании оценок (44), (45) и очевидных равенств

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} = \frac{M_{1j,B}^{ki}}{M_{15,B}^{ki}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

имеем

$$\frac{b_{1j}^{ki}}{b_{15}^{ki}} \approx \frac{M_{1j,B}^{4i}}{M_{15,B}^{4i}}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{46}$$

Вычислим оценки $M_{1j,B}^{4i}$, $j = 1, 2, \ldots, 5$. Пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11,B}^{4i} = \begin{vmatrix} -h & h & 2h & p_i \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^2}{2!} & \frac{4h^2}{2!} & r_i \\ -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{8h^3}{3!} & s_i \\ \frac{h^4}{4!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{16h^4}{4!} & u_i \end{vmatrix} = -6h^6\Big(\frac{u_i}{3!} - \frac{2s_ih}{4!} + \frac{2r_ih^2}{3!4!} + \frac{2p_ih^3}{3!4!}\Big) \approx$$

$$\approx -\frac{6h^6}{3!}\Big(u_i - \frac{2s_ih}{4}\Big) = -h^6\Big(u_i - \frac{s_ih}{2}\Big), \tag{47}$$

$$M_{14,B}^{4i} \approx -\frac{6h^6}{3!}\Big(u_i + \frac{2s_ih}{4}\Big) = -h^6\Big(u_i + \frac{s_ih}{2}\Big), \tag{48}$$

$$M_{12,B}^{4i} = -24h^6\Big(-\frac{u_i}{3!} + \frac{s_ih}{4!} + \frac{8r_ih^2}{3!4!} - \frac{4p_ih^3}{3!4!}\Big) \approx h^6\big(4u_i - s_ih\big), \tag{49}$$

$$M_{13,B}^{4i} \approx -24h^6\Big(-\frac{u_i}{3!} - \frac{s_ih}{4!}\Big) = h^6\big(4u_i + s_ih\big), \tag{50}$$

$$M_{15,B}^{4i} = h^{10}. \tag{51}$$

Отметим закономерность в парах формул (47), (48) и (49), (50): знаки первых слагаемых совпадают, вторых — противоположны.

Для рядов Тейлора

$$x_{i-1} = x_i - hx_i' + \frac{h^2}{2!}x_i'' - \frac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty}(-1)^m\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} = P_{i-1}^k + R_{i-1}^k,$$

$$x_{i+1} = x_i + hx_i' + \frac{h^2}{2!}x_i'' + \frac{h^3}{3!}x_i''' + \cdots =$$
$$= \sum_{m=0}^{k}\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} + \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{h^m}{m!}x_i^{(m)} = P_{i+1}^k + R_{i+1}^k,$$

где P_{i-1}^k, P_{i+1}^k — многочлены Тейлора степени k, R_{i-1}^k, R_{i+1}^k — дополнительные члены, в [12] показана справедливость следующих формул:

$$R_{i+1}^k - R_{i-1}^k = O(h^{k+2}), \quad R_{i+1}^k + R_{i-1}^k = O(h^{k+1}) \tag{52}$$

для нечетного k и

$$R_{i+1}^k - R_{i-1}^k = O(h^{k+1}), \quad R_{i+1}^k + R_{i-1}^k = O(h^{k+2}) \tag{53}$$

для четного k.

Аналогично тому, как было сделано в [12], можно показать справедливость следующих формул:

$$R_{i+2}^k - R_{i-2}^k = O(h^{k+2}), \quad R_{i+2}^k + R_{i-2}^k = O(h^{k+1}) \tag{54}$$

для нечетного k и

$$R_{i+2}^k - R_{i-2}^k = O(h^{k+1}), \quad R_{i+2}^k + R_{i-2}^k = O(h^{k+2}) \tag{55}$$

для четного k.

С учетом соотношений (46)–(51), из (40) при $i = 2, 3, \ldots, n-2$ имеем

$$\begin{aligned}
\delta f_{hi}^k &= -\frac{b_{11}^{ki} R_{i-2}^k + b_{12}^{ki} R_{i-1}^k + b_{13}^{ki} R_{i+1}^k + b_{14}^{ki} R_{i+2}^k}{b_{15}^{ki}} \approx \\
&\approx \frac{h^6 \big[\big(u_i - \frac{s_i h}{2}\big) R_{i-2}^k + \big(u_i + \frac{s_i h}{2}\big) R_{i+2}^k - (4u_i - s_i h)\, R_{i-1}^k - (4u_i + s_i h)\, R_{i+1}^k\big]}{h^{10}} = \\
&= \frac{2u_i(R_{i-2}^k + R_{i+2}^k) - s_i h (R_{i-2}^k - R_{i+2}^k)}{2h^4} - \\
&\quad - \frac{8u_i(R_{i-1}^k + R_{i+1}^k) - 2s_i h (R_{i-1}^k - R_{i+1}^k)}{2h^4}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Подстановка оценок (52), (54) в (56) дает

$$\begin{aligned}
\delta f_{hi}^k &\approx \frac{2u_i O(h^{k+1}) - s_i h O(h^{k+2}) - 8u_i O(h^{k+1}) + 2s_i h O(h^{k+2})}{2h^4} \approx \\
&\approx O(h^{k-3}) + O(h^{k-1}) + O(h^{k-3}) + O(h^{k-1}) = O(h^{k-3})
\end{aligned}$$

или

$$\delta f_{hi}^k \approx O\big(h^{k-3}\big), \tag{57}$$

откуда в соответствии с (35)

$$\|\delta f_{h,M}^k\| = O(h^{k-3}) \tag{58}$$

для нечетного k.

Подстановка оценок (53), (55) в (56) дает

$$\begin{aligned}
\delta f_{hi}^k &\approx \frac{2u_i O(h^{k+2}) - s_i h O(h^{k+1}) - 8u_i O(h^{k+2}) + 2s_i h O(h^{k+1})}{2h^4} \approx \\
&\approx O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) + O(h^{k-2}) = O(h^{k-2})
\end{aligned}$$

или

$$\delta f_{hi}^k \approx O(h^{k-2}), \tag{59}$$

откуда

$$\|\delta f^k_{h,M}\| = O(h^{k-2}) \tag{60}$$

для четного k.

Из оценок (58), (60) следует, что при $m \geqslant 2$, m — натуральное число, задачи $L^{2m}_{h,M}$ и $L^{2m+1}_{h,M}$ имеют одинаковый ПА. Аналогичная ситуация имела место и при исследовании краевых задач для ОДУ2 [12] и для систем ОДУ2 [13] при $m \geqslant 1$ и не имела места для краевых задач для ОДУ3 [14] при использовании пятиточечного шаблона, где ситуация оказалась противоположной: одинаковый ПА имели задачи L^{2m-1}_h и L^{2m}_h при $m \geqslant 3$; при использовании четырехточечного шаблона в задаче для ОДУ3 закономерности, связанные с зависимостью ПА от четности или нечетности k, отсутствовали.

Исследуем подзадачу (34). Используем описанную выше процедуру, выполненную при построении первого уравнения системы (28) с заменой приближенных равенств (20)–(23) на следующие точные:

$$\begin{gathered}
[x_2] - 2h[x_2'] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2''] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2'''] + \dots + (-2)^k\frac{h^k}{k!}[x_2^{(k)}] = [x_0] - R_0^k,\\
[x_2'] - 2h[x_2''] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2'''] + \dots + (-2)^{k-1}\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}[x_2^{(k)}] = [x_0'] - R_0^{k-1},\\
[x_2''] - 2h[x_2'''] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(4)}] + \dots + (-2)^{k-2}\frac{h^{k-2}}{(k-2)!}[x_2^{(k)}] = [x_0''] - R_0^{k-2},\\
[x_2'''] - 2h[x_2^{(4)}] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(5)}] + \dots + (-2)^{k-3}\frac{h^{k-3}}{(k-3)!}[x_2^{(k)}] = [x_0'''] - R_0^{k-3}.
\end{gathered}$$

В частности, вместо (24) получим

$$\begin{aligned}
A_0[x_2] + A_1[x_2'] + A_2[x_2''] + A_3[x_2'''] + \dots + A_k[x_2^{(k)}] &= \\
= \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^k - \beta_0 R_0^{k-1} - \gamma_0 R_0^{k-2} - \lambda_0 R_0^{k-3}&. \qquad (61)
\end{aligned}$$

В итоге локальная матрица A^{k2} сохранит свой вид (25), что приводит к матричному равенству

$$[W^{k2}] = Q^{k2}[G^{k2}] \tag{62}$$

в обозначениях

$$[W^{k2}] = \Big[[x_2] \quad [x_2'] \quad [x_2''] \quad [x_2'''] \quad [x_2^{(4)}] \quad \dots \quad [x_2^{(k)}]\Big]^\top,$$

$$Q^{k2} = \left(A^{k2}\right)^{-1},$$

$$[G^{k2}] = \begin{bmatrix} \widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^k - \beta_0 R_0^{k-1} - \gamma_0 R_0^{k-2} - \lambda_0 R_0^{k-3} \\ [x_1] - R_1^k \\ [x_3] - R_3^k \\ [x_4] - R_4^k \\ f_2 \\ f_2' \\ f_2'' \\ \dots \\ f_2^{(k-4)} \end{bmatrix}.$$

Выпишем первую строку матричного равенства (62), являющуюся разностным уравнением, при построении которого было использовано смешанное ГУ (5):

$$q_{11}^{k2}\bigl(\widetilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^k - \beta_0 R_0^{k-1} - \gamma_0 R_0^{k-2} - \lambda_0 R_0^{k-3}\bigr) + q_{12}^{k2}\bigl([x_1] - R_1^k\bigr) + \\ + q_{13}^{k2}\bigl([x_3] - R_3^k\bigr) + q_{14}^{k2}\bigl([x_4] - R_4^k\bigr) + q_{15}^{k2} f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} q_{1m}^{k2} f_2^{(m-5)} = [x_2]$$

или

$$-\frac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}[x_1] + \frac{[x_2]}{q_{15}^{k2}} - \frac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}[x_3] - \frac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}[x_4] = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}}\widetilde{z}_0 - \\ - \frac{q_{11}^{k2}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3}) + q_{12}^{k2} R_1^k + q_{13}^{k2} R_3^k + q_{14}^{k2} R_4^k}{q_{15}^{k2}}, \quad (63)$$

где последняя дробь есть величина невязки δg_{hq}^k, в наименовании которой второй нижний индекс указывает на использование элементов матрицы Q^{42} при построении разностного уравнения (63).

Вычислим норму невязки $\|\delta g_{h,M}^k\|$ подзадачи (34). Для матрицы Q^{k2}, как это было сделано выше для матрицы B^{ki}, можно показать справедливость оценок

$$\frac{q_{1j}^{k2}}{q_{15}^{k2}} \approx \frac{M_{1j,Q}^{42}}{M_{15,Q}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Вычислим алгебраические дополнения $M_{1j,Q}^{42}$, $j = 1, 2, \dots, 5$. Отметим, что вычисление точных значений алгебраических дополнений $M_{1j,Q}^{42}$ не является особо трудоемкой процедурой; тем не менее нет строгой необходимости в нахождении точных значений в силу того, что для вычисления ПА (здесь речь не идет о выполнении численных экспериментов) необходимы лишь главные части этих алгебраических дополнений в их разложениях по степеням h; поэтому лишь для сокращения объема выкладок допустим пренебрежение старшими степенями, прежде всего в разложениях по степеням h коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4, при нахождении алгебраических дополнений элементов первого столбца локальной матрицы A^{42} (см. (24), (25)).

Анализ матриц (11), (25) указывает на независимость значения $M_{11,Q}^{42}$ от чисел α_0, β_0, γ_0, λ_0, тогда как оставшиеся оценки алгебраических дополнений зависят от значений этих чисел [16]; действительно, пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11,Q}^{42} = -6h^6\Bigl(\frac{u_i}{3!} - \frac{2s_i h}{4!} + \frac{2r_i h^2}{3!4!} + \frac{2p_i h^3}{3!4!}\Bigr) \approx -h^6\Bigl(u_2 - \frac{s_2 h}{2}\Bigr) \approx -u_2 h^6, \quad (64)$$

$$M_{12,Q}^{42} = -A_1\Bigl(\frac{u_2 h^5}{3} - \frac{s_2 h^6}{4} + \frac{r_2 h^7}{18}\Bigr) + A_2\Bigl(u_2 h^4 - \frac{7 s_2 h^5}{12} + \frac{p_2 h^7}{18}\Bigr) - \\ - A_3\Bigl(u_2 h^3 - \frac{7 r_2 h^5}{12} + \frac{p_2 h^6}{4}\Bigr) + A_4\Bigl(s_2 h^3 - r_2 h^4 + \frac{p_2 h^5}{3}\Bigr) \approx$$

$$\approx h^3\Big(s_2A_4 - u_2A_3 + u_2A_2h - \frac{u_2A_1h^2}{3}\Big), \quad (65)$$

$$M^{42}_{13,Q} \approx h^3\left(3s_2A_4 - 3u_2A_3 + u_2A_2h + u_2A_1h^2\right), \quad (66)$$

$$M^{42}_{14,Q} \approx h^3\Big(-s_2A_4 + u_2A_3 + \frac{s_2A_2h^2}{12} - \frac{u_2A_1h^2}{6}\Big), \quad (67)$$

$$M^{42}_{15,Q} = h^6\Big(A_4 - \frac{A_3h}{2} - \frac{A_2h^2}{12} + \frac{A_1h^3}{12}\Big). \quad (68)$$

Невязку δg^k_{hq} разобьем на две составляющие:

$$\delta g^k_{hq_1} = -\frac{q^{k2}_{11}(\alpha_0R^k_0 + \beta_0R^{k-1}_0 + \gamma_0R^{k-2}_0 + \lambda_0R^{k-3}_0)}{q^{k2}_{15}}, \quad (69)$$

$$\delta g^k_{hq_2} = -\frac{q^{k2}_{12}R^k_1 + q^{k2}_{13}R^k_3 + q^{k2}_{14}R^k_4}{q^{k2}_{15}} \quad (70)$$

и исследуем их отдельно.

Число комбинаций одновременно ненулевых коэффициентов α_0, β_0, γ_0, λ_0 смешанного ГУ определяется, очевидно, как $C^1_4 + C^2_4 + C^3_4 + C^4_4 = 15$, где C^m_n — число сочетаний из n по m. Главные части A_1, A_2, A_3, A_4 коэффициентов левой части равенства (61) в зависимости от значений α_0, β_0, γ_0, λ_0 приведены в табл. 1. Здесь единица означает присутствие соответствующего коэффициента в смешанном ГУ, нуль — его отсутствие. Отметим, что четыре последние строки в табл. 1 соответствуют ГУ той или иной степени в форме одного слагаемого (1)–(4). В главных частях постоянные сомножители, не зависящие от h, опущены.

Таблица 1

Главные части коэффициентов левой части равенства (61)
[The main parts of coefficients of the left side equality (61)]

№	α_0	β_0	γ_0	λ_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1	1	0	0	β_0	β_0h	β_0h^2	β_0h^3
2	1	0	1	0	α_0h	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
3	1	0	0	1	α_0h	α_0h^2	λ_0	λ_0h
4	0	1	1	0	β_0	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
5	0	1	0	1	β_0	β_0h	λ_0	λ_0h
6	0	0	1	1	λ_0h^2	γ_0	λ_0	λ_0h
7	1	1	1	0	β_0	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
8	1	1	0	1	β_0	β_0h	λ_0	λ_0h
9	1	0	1	1	α_0h	γ_0	λ_0	λ_0h
10	0	1	1	1	β_0	γ_0	λ_0	λ_0h
11	1	1	1	1	β_0	γ_0	λ_0	λ_0h
12	1	0	0	0	α_0h	α_0h^2	α_0h^3	α_0h^4
13	0	1	0	0	β_0	β_0h	β_0h^2	β_0h^3
14	0	0	1	0	γ_0h^3	γ_0	γ_0h	γ_0h^2
15	0	0	0	1	λ_0h^2	λ_0h^2	λ_0	λ_0h

Если опустить не зависящие от h постоянные сомножители и пренебречь старшими степенями, то соотношения (64)–(68) и данные табл. 1 позволяют записать следующие предварительные оценки:

$$M_{11,Q}^{42} \approx h^6, \tag{71}$$

$$M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42} \approx A_3 h^3, \tag{72}$$

$$M_{15,Q}^{42} \approx A_4 h^6, \tag{73}$$

$$\frac{A_3}{A_4} = h^{-1}, \tag{74}$$

на основании которых и очевидных равенств

$$\frac{q_{1j}^{42}}{q_{15}^{42}} = \frac{M_{1j,Q}^{42}}{M_{15,Q}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

из (69) получим

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_1}^k &= -\frac{q_{11}^{k2}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3})}{q_{15}^{k2}} \approx \\ &\approx -\frac{M_{11,Q}^{42}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3})}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{h^6(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4 h^6} = \\ &= -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4}, \end{aligned} \tag{75}$$

а из (70) —

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_2}^k &= -\frac{q_{12}^{k2} R_1^k + q_{13}^{k2} R_3^k + q_{14}^{k2} R_4^k}{q_{15}^{k2}} \approx \\ &\approx -\frac{(M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42}) O(h^{k+1})}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{A_3 h^3 O(h^{k+1})}{A_4 h^6} = -\frac{h^{-1} O(h^{k+1})}{h^3} = O(h^{k-3}). \end{aligned} \tag{76}$$

Оценка (75) для каждого набора α_0, β_0, γ_0, λ_0 требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 1, тогда как оценка (76) дает окончательный результат.

Пусть $\lambda_0 \neq 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $A_4 = \lambda_0 h$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (75) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^k \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4} \approx -\frac{\lambda_0 O(h^{k-2})}{\lambda_0 h} = O(h^{k-3}),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 3, 5, 6, 8–11, 15.

Пусть $\gamma_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 0$. В этом случае, что следует из табл. 1, $A_4 = \gamma_0 h^2$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (75) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^k \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4} \approx -\frac{\gamma_0 h O(h^{k-2})}{\gamma_0 h^2} = O(h^{k-3}),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 2, 4, 7, 14.

Пусть $\beta_0 \neq 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$. В этом случае, что следует из таблицы 1, $A_4 = \beta_0 h^3$. Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (75) получим оценку

$$\delta g^k_{hq_1} \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0) O(h^{k-2})}{A_4} \approx -\frac{\beta_0 h^2 O(h^{k-2})}{\beta_0 h^3} = O(h^{k-3}),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 1, 13.

Полученные выше оценки невязок $\delta g^k_{hq_1}$ для строк 13, 14 и 15 табл. 1 указывают на независимость ПА от степени старшей производной в ГУ, записанных в форме одного слагаемого.

Особое внимание уделим оставшейся строке 12 табл. 1 ($\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$), соответствующей ГУ $x(a) = \widetilde{x}_0$. В этом случае

$$Q^{42} \equiv B^{42}, \tag{77}$$

а невязка примет вид

$$\delta g^k_{hq} = \delta g^k_{hq1} + \delta g^k_{hq2} = -\frac{b^{k2}_{11} R^k_0 + b^{k2}_{12} R^k_1 + b^{k2}_{13} R^k_3 + b^{k2}_{14} R^k_4}{b^{k2}_{15}}. \tag{78}$$

Тождество (77) приводит к $M^{42}_{1j,Q} = M^{42}_{1j,B}$, $j = 1, 2, 3, 4$, что позволяет воспользоваться оценками (47)–(50), наличие закономерности в которых в парах формул (47), (48) и (49), (50) (а именно: знаки первых слагаемых совпадают, вторых — противоположны) и использование соотношений (52)–(55) приводит к зависимости значения невязки (78) от четности или нечетности k, т.е. здесь правомерны оценки вида (57) для нечетного k и (59) для четного k. Для любой другой строки табл. 1 не следует ожидать повторения аналогичной ситуации в силу того, что невязка δg^k_{hq} будет содержать как минимум один дополнительный член степени меньше k, поэтому надежда на использование соотношений (52)–(55) отсутствует.

Следовательно, для смешанного ГУ, в котором $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$, имеем следующие оценки:

$$\delta g^k_{hq} \approx O(h^{k-2}) \tag{79}$$

для четного k;

$$\delta g^k_{hq} \approx O(h^{k-3})$$

для нечетного k и во всех остальных случаях при любых сочетаниях α_0, β_0, γ_0, λ_0 независимо от четности k.

Заметим, что вывод формул для вычисления алгебраических дополнений $M^{42}_{1j,Q}$, $j = 1, 2, \ldots, 5$, в узле t_{n-2}, что соответствует правой границе сетки D_h, приведет к формулам (64)–(68), в которых будут заменены на $n-2$ индексы в функциях u, s, r, p, значения которых, как показано выше, отсутствуют в оценках (71)–(74) и поэтому не использованы в (75), (76) при вычислении ПА; последнее означает, что на значение невязки не оказывает влияние граница области интегрирования, в которой ГУ записано.

Несмотря на то, что при четном k имеет место оценка (79), норма невязки второй подзадачи в соответствии с (36) независимо от четности или нечетности k окажется всегда равной

$$\|\delta g^k_{h,M}\| = O(h^{k-3}) \tag{80}$$

за счет оставшихся ГУ задачи (6) или, что то же самое, за счет второго, третьего и четвертого уравнений второй подзадачи (28), записанных, с учетом замечания, в узле t_2.

Норму всей РКЗ (33), (34), используя (58), (60), (80), в соответствии с (37) запишем как

$$\|\delta f_M^k\| = \max\bigl(\|\delta f_{h,M}^k\|, \quad \|\delta g_{h,M}^k\|\bigr) \leqslant C h^{k-3}, \tag{81}$$

где C — не зависящий от h коэффициент, откуда следует ПА всей РКЗ (33), (34), равный $k-3$.

Отметим, что оценка (81) справедлива для любой краевой задачи, как симметричной, так и несимметричной, для ОДУ4 при использовании матричного метода в силу того, что среди ГУ задачи обязательно найдутся как минимум два ГУ в форме производной той или иной степени больше нуля или в форме смешанного ГУ, в котором хотя бы два коэффициента из чисел α_0, β_0, γ_0, λ_0 отличны от нуля.

При вычислении ПА были использованы главные части величин A_i, $i=1,2,3,4$, тогда как при выполнении далее численных экспериментов будут использоваться точные значения A_i, $i=0,1,\ldots,k$.

5. Оценка погрешностей. При выполнении численных экспериментов использованы следующие нормы:

– в качестве суммарной оценки относительной погрешности

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n}\bigl(x_i - [x_i]\bigr)^2}}{\sum_{i=0}^{n}\bigl|[x_i]\bigr|} \cdot 100\%, \tag{82}$$

которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующего меру разброса в процентах [17];

– в качестве оценки абсолютной погрешности [5, 6]

$$E_x^k = \max\bigl|x_i - [x_i]\bigr|, \quad i=0,1,\ldots,n. \tag{83}$$

При апробации численного метода и оценке его погрешности использовано ОДУ4

$$\bigl(e^t + 2t\bigr)x^{(4)} + \bigl(e^t + 2\bigr)x''' + 6e^t x'' + 4e^t x' + e^t x = t^{-5}, \tag{84}$$

которое вместе со своим общим решением

$$\bigl(e^t + 2t\bigr)x = \frac{1}{24t} + C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3$$

взято из [18].

При выполнении расчетов использованы следующие наборы ГУ, $t\in[2,6]$:

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, & x'''(2) = -0.480, \\ x(6) = 0.746, & x''(6) = 0.159; \end{cases} \tag{85}$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, & x'''(2) = -0.480, \\ x'(6) = -0.403, & x''(6) = 0.159; \end{cases} \tag{86}$$

$$\begin{cases} x'(2) = 0.135, & x'''(2) = -0.480, \\ x'(6) = -0.403, & x'''(6) = -2.18 \cdot 10^{-4}; \end{cases} \tag{87}$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, \quad x'(2) = 0.135, \quad x'''(2) = -0.480, \\ x'''(6) = -2.18 \cdot 10^{-4}; \end{cases} \tag{88}$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, \quad x'(2) = 0.135, \quad x'''(2) = -0.480, \\ x(6) + 2x'(6) + 3x''(6) + 4x'''(6) = 0.415. \end{cases} \tag{89}$$

Было принято $n = 20$, $h = 0.20$. Результаты численных экспериментов для решений $x(t)$ и первых производных $x'(t)$ приведены в табл. 2, в которой нормы $D^k_{x'}$, $E^k_{x'}$, характеризующие оценки относительных и абсолютных погрешностей, вычислены по формулам (82), (83) для производных $x'(t)$.

В рассмотренных задачах по данным анализа табл. 2 с увеличением степени k используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности:

а) уменьшаются, как это имело место при исследовании краевых задач для ОДУ2 [1, 12], систем ОДУ2 [13] и ОДУ3 [14];
б) уменьшаются довольно «плавно», что свидетельствует о независимости ПА от четности или нечетности k.

Отметим, что при $k = 4$ имеем классический метод сеток.

Выводы. Сформулируем основные выводы по работе.

1. Для дифференциальной краевой задачи составлена аппроксимирующая ее разностная краевая задача в виде двух подсистем: в первую подсистему вошли уравнения, при построении которых не были использованы граничные условия (ГУ) краевой задачи; во вторую подсистему вошли четыре уравнения, при построении которых были использованы ГУ задачи.
2. Теоретически выявлены закономерности между порядком аппроксимации (ПА) и степенью используемого многочлена Тейлора. Установлено следующее:
   а) ПА первой и второй подсистем пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
   б) ПА первой подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на две единицы при ее четном значении и меньше на три единицы при ее нечетном значении;
   в) ПА второй подсистемы меньше степени многочлена Тейлора на три единицы независимо как от четности или нечетности этой степени, так и от степени старшей производной в ГУ краевой задачи.
3. Вычислен ПА разностной краевой задачи со всеми возможными комбинациями ГУ, включая смешанные граничные условия.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Это исследование не получило специального финансирования.

Таблица 2

Значения погрешностей для рассматриваемых краевых задач
[The error values for the considered boundary value problems (BVP)]

k	4	5	6	7	8	9	10	11
The BVP (84), (85)								
D_x^k, %	$1.06 \cdot 10^{-1}$	$6.03 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{-5}$	$8.62 \cdot 10^{-6}$	$1.46 \cdot 10^{-6}$	$3.55 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$7.65 \cdot 10^{-4}$	$1.89 \cdot 10^{-4}$	$2.49 \cdot 10^{-5}$	$5.64 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-6}$	$2.15 \cdot 10^{-7}$	$5.18 \cdot 10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$3.59 \cdot 10^{-1}$	$3.09 \cdot 10^{-2}$	$4.50 \cdot 10^{-3}$	$7.89 \cdot 10^{-4}$	$1.38 \cdot 10^{-4}$	$3.10 \cdot 10^{-5}$	$5.43 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$1.62 \cdot 10^{-2}$	$9.03 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$4.96 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-7}$	$4.58 \cdot 10^{-8}$
The BVP (84), (86)								
D_x^k, %	$8.95 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$4.69 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	$1.80 \cdot 10^{-6}$	$4.32 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$3.03 \cdot 10^{-5}$	$6.12 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$5.69 \cdot 10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$3.44 \cdot 10^{-1}$	$4.90 \cdot 10^{-2}$	$4.54 \cdot 10^{-3}$	$6.49 \cdot 10^{-4}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$3.05 \cdot 10^{-5}$	$5.14 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$2.47 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-4}$	$2.39 \cdot 10^{-5}$	$5.76 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-6}$	$2.20 \cdot 10^{-7}$	$5.40 \cdot 10^{-8}$
The BVP (84), (87)								
D_x^k, %	$3.22 \cdot 10^{-1}$	$2.70 \cdot 10^{-2}$	$5.89 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$5.20 \cdot 10^{-5}$	$1.69 \cdot 10^{-5}$	$5.62 \cdot 10^{-6}$	$8.60 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$4.59 \cdot 10^{-2}$	$3.10 \cdot 10^{-3}$	$7.80 \cdot 10^{-4}$	$3.14 \cdot 10^{-4}$	$6.22 \cdot 10^{-6}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$	$9.34 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$
$D_{x'}^k$, %	1.10	$7.54 \cdot 10^{-2}$	$1.90 \cdot 10^{-2}$	$6.21 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-4}$	$5.07 \cdot 10^{-5}$	$1.72 \cdot 10^{-5}$	$2.65 \cdot 10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$2.80 \cdot 10^{-2}$	$2.08 \cdot 10^{-3}$	$5.05 \cdot 10^{-4}$	$1.79 \cdot 10^{-4}$	$6.94 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-6}$	$5.61 \cdot 10^{-7}$	$9.77 \cdot 10^{-8}$
The BVP (84), (88)								
D_x^k, %	$3.84 \cdot 10^{-1}$	$3.51 \cdot 10^{-2}$	$5.97 \cdot 10^{-3}$	$2.05 \cdot 10^{-3}$	$4.38 \cdot 10^{-5}$	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$5.47 \cdot 10^{-6}$	$7.82 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$3.85 \cdot 10^{-2}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$	$6.32 \cdot 10^{-4}$	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$5.07 \cdot 10^{-6}$	$1.62 \cdot 10^{-6}$	$5.43 \cdot 10^{-7}$	$8.52 \cdot 10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$7.20 \cdot 10^{-1}$	$6.61 \cdot 10^{-2}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$	$4.21 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-4}$	$5.00 \cdot 10^{-5}$	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$2.48 \cdot 10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$2.01 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$3.43 \cdot 10^{-4}$	$1.37 \cdot 10^{-4}$	$6.57 \cdot 10^{-6}$	$1.64 \cdot 10^{-6}$	$4.70 \cdot 10^{-7}$	$8.44 \cdot 10^{-8}$
The BVP (84), (89)								
D_x^k, %	$3.81 \cdot 10^{-1}$	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$6.26 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$4.57 \cdot 10^{-5}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$4.30 \cdot 10^{-6}$	$5.97 \cdot 10^{-7}$
E_x^k	$3.82 \cdot 10^{-2}$	$2.13 \cdot 10^{-3}$	$6.61 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$5.58 \cdot 10^{-6}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$	$4.45 \cdot 10^{-7}$	$6.95 \cdot 10^{-8}$
$D_{x'}^k$, %	$7.14 \cdot 10^{-1}$	$3.69 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-2}$	$3.68 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-4}$	$4.64 \cdot 10^{-5}$	$1.20 \cdot 10^{-5}$	$2.28 \cdot 10^{-6}$
$E_{x'}^k$	$1.99 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-4}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	$6.02 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-6}$	$4.15 \cdot 10^{-7}$	$7.42 \cdot 10^{-8}$

Библиографический список

1. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. doi: 10.14498/vsgtu646.
2. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 2. pp. 305–320. doi: 10.1137/0711028.
3. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems // *Math. Comp.*, 1974. vol. 28, no. 128. pp. 981–1003. doi: 10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4.
4. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some resent results on difference methods / *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*: Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию.* М.: Наука, 1977. 439 с.
6. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы.* М.: Физматлит, 2004. 400 с.
7. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1977. 656 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* М.: Наука, 1973. 432 с.
9. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973. 416 с.
10. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations Of Numerical Methods For Solving A Parabolic Problem With Non Local Boundary Conditions // *Intern. J. Comp. Math.*, 2003. vol. 80, no. 6. pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
11. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions // *Appl. Math. Sci.*, 2007. vol. 1, no. 44. pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
12. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 143–160. doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. doi: 10.14498/vsgtu1528.
14. Маклаков В. Н., Стельмах Я. Г. Численное интегрирование матричным методом краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 153–183. doi: 10.14498/vsgtu1565.
15. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
16. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М.: Наука, 1971. 431 с.
17. Закс Л. *Статистическое оценивание.* М.: Статистика, 1976. 598 с.
18. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976. 576 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 137–162
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1732

MSC: 34B99

Numerical integration by the matrix method and evaluation of the approximation order of difference boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the fourth order with variable coefficients

V. N. Maklakov, M. A. Ilicheva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The use of the second degree Taylor polynomial in approximation of derivatives by finite difference method leads to the second order approximation of the traditional grid method for numerical integration of boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. The study considers a previously proposed method of numerical integration using matrix calculus which didn't include the approximation of derivatives by finite difference method for boundary value problems of non-homogeneous fourth-order linear ordinary differential equations with variable coefficients. According to this method, when creating a system of difference equations, an arbitrary degree of the Taylor polynomial can be chosen in the expansion of the sought-for solution of the problem into a Taylor series.

In this paper, the possible boundary conditions of a differential boundary value problem are written both in the form of derived degrees from zero to three, and in the form of linear combinations of these degrees. The boundary problem is called symmetric if the numbers of the boundary conditions in the left and right boundaries coincide and are equal to two, otherwise it is asymmetric.

For a differential boundary value problem, an approximate difference boundary value problem in the form of two subsystems has been built. The first subsystem includes equations for which the boundary conditions of the boundary value problem were not used; the second one includes four equations in the construction of which the boundary conditions of the problem were used.

Theoretically, the patterns between the order of approximation and the degree of the Taylor polynomial were identified. The results are as follows:

Research Article

Please cite this article in press as:
Maklakov V. N., Ilicheva M. A. Numerical integration by the matrix method and evaluation of the approximation order of difference boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the fourth order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 137–162. doi: 10.14498/vsgtu1732 (In Russian).

Authors' Details:
Vladimir N. Maklakov https://orcid.org/0000-0003-1644-7424
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics and Applied Computer Science; e-mail: makvo63@yandex.ru

Mariya A. Ilicheva https://orcid.org/0000-0001-6437-9142
Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: ilicheva-1993@mail.ru

a) the approximation order of the first and second subsystems is proportional to the degree of the Taylor polynomial used;
b) the approximation order of the first subsystem is two units less than the degree Taylor polynomial with its even value and three units less with its odd value;
c) the approximation order of the second subsystem is three units less than the degree Taylor polynomial regardless of both even-parity or odd-parity of this degree, and the degree of the highest derivative in the boundary conditions of the boundary value problem.

The approximation order of the difference boundary value problem with all possible combinations of boundary conditions is calculated.

The theoretical conclusions are confirmed by numerical experiments.

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor series.

Received: 31st July, 2019 / Revised: 19th November, 2019 /
Accepted: 10th February, 2020 / First online: 2nd March, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research did not funded by a specific project grant.

References

1. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). `doi: 10.14498/vsgtu646`.
2. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. `doi: 10.1137/0711028`.
3. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. `doi: 10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4`.
4. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some resent results on difference methods, In: *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. `doi: 10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7`.
5. Godunov S. K., Ryabenki V. S. *Theory of Difference Schemes: An Introduction.* New York, Wiley, 1964, xii+289 pp.
6. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
7. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
9. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [The stability of difference schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)

10. Boutayeb A., Chetouani A. Global Extrapolations Of Numerical Methods For Solving A Parabolic Problem With Non Local Boundary Conditions, *Intern. J. Comp. Math.*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. doi: 10.1080/0020716021000039209.
11. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions, *Appl. Math. Sci.*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185, http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf.
12. Maklakov V. N. Estimation of the order of the matrix method approximation of numerical integration of boundary-value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of the second order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], no. 3(36), pp. 143–160 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1364.
13. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1528.
14. Maklakov V. N., Stelmakh Ya. G. Numerical integration by the matrix method of boundary value problems for linear inhomogeneous ordinary differential equations of the third order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 153–183 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1565.
15. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung.* I [Differential and integral calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
16. Kurosh A. *Higher algebra.* Moscow, Mir Publ., 1972, 428 pp.
17. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
18. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1976, 576 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 163–173
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1740

УДК 532.5.032

Расщепление уравнений Навье—Стокса для одного класса осесимметричных течений

Г. Б. Сизых

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

В рамках уравнений Навье—Стокса рассмотрены нестационарные осесимметричные течения однородной вязкой несжимаемой жидкости, в которых осевая и окружная скорости зависят только от радиуса и от времени, а радиальная скорость равна нулю. Показано, что скорость таких течений представляет собой сумму скоростей двух течений вязкой несжимаемой жидкости: осевого течения (радиальная и окружная скорости равны нулю) и окружного течения (радиальная и осевая скорости равны нулю). Осевое и окружное движения происходят независимо, не оказывая никакого взаимного влияния. Это позволяет расщеплять краевые задачи для рассматриваемого типа течений, содержащие три неизвестные функции (давление, окружная и осевая скорости), на две задачи, каждая из которых содержит две неизвестные функции (давление и одна из компонент скорости). При этом сумма давлений осевого и окружного течений будет давлением исходного течения. Обнаруженная возможность расщепления позволяет с использованием известных решений пополнить «запасы» осевых и окружных точных решений. Эти решения, в свою очередь, можно суммировать в различных комбинациях и в результате получать скорости и давления новых точных решений уравнений Навье—Стокса.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, расщепление уравнений Навье—Стокса, точные решения.

Получение: 22 августа 2019 г. / Исправление: 15 октября 2019 г. / Принятие: 11 ноября 2019 г. / Публикация онлайн: 2 апреля 2020 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Расщепление уравнений Навье—Стокса для одного класса осесимметричных течений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 163–173. doi: 10.14498/vsgtu1740.

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых https://orcid.org/0000-0001-5821-8596
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики; e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Введение. В конце двадцатого века в результате развития вычислительной техники и вычислительных методов доминирующими способами исследования течений жидкости стали численные расчеты. При этом, как свидетельствуют обзоры [1, 2], «запас» точных решений уравнений Навье—Стокса продолжал пополняться еще активнее, чем в первой половине двадцатого века [3, 4]. Это связано в первую очередь с тем, что сходимость большинства численных методов доказана только для линеаризованных уравнений (что оставляет сомнение в правильности расчетов задач с нелинейными уравнениями). Поэтому численные алгоритмы верифицируют, используя точные решения (см., например, [5]). Заметим, что единственная известная в настоящее время альтернатива верификации находится на начальной стадии развития. Речь идет о методах обнаружения ошибки в расчетах, для которых неизвестны точные решения. В таких методах [6–8] проверяются некоторые следствия уравнений Навье—Стокса, и решение признается ошибочным, если в нем нарушены эти следствия. Однако не исключено, что эти следствия окажутся выполненными на ошибочном решении, и ошибка останется незамеченной. Поэтому верификация, основанная на сравнении с точным решением, до сих пор остается актуальной. Кроме того, интерес к точным решениям связан с тем, что с их помощью можно оценивать погрешность асимптотических теорий (см. например, [9]). Точные решения также используются в теоретических исследованиях в качестве примеров течений с теми или иными свойствами. Например, в [10] приведен пример задачи, имеющей неединственное решение, а в [11, 12] — примеры течений с определенными свойствами завихренности.

Таким образом, точные решения уравнений Навье—Стокса востребованы как в доминирующей в настоящее время вычислительной гидродинамике, так и в теоретической гидродинамике. Это объясняет появление новых решений [10, 11, 13–17] и после обзоров [1, 2]. В 1919 году Тркал показал, как из винтового (завихренность параллельна скорости) решения уравнения Эйлера получить нестационарное решение уравнений Навье—Стокса (способ Тркала описан, например, в [16]). Поэтому к числу новых решений уравнений Навье—Стокса, полученных в последние годы, можно отнести и новые винтовые решения уравнения Эйлера [18, 19]. Данная статья также посвящена точным решениям уравнений Навье—Стокса. В ней предлагается способ получения новых решений с использованием известных решений.

В данной статье рассматривается частный случай осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости — течения, в которых радиальная компонента скорости равна нулю, а остальные компоненты скорости зависят только от расстояния до оси симметрии и от времени. При этом давление может зависеть еще и от осевой координаты. Линии тока в этих течениях лежат на цилиндрах, осью которых является ось симметрии течения. Практическая значимость этих течений состоит в том, что они могут описывать движение жидкости в длинных цилиндрических трубах круглого сечения. Поэтому для краткости будем называть такие течения $rt\nu$-течениями в цилиндре. Использование набора букв «$rt\nu$» подчеркивает, что компоненты скорости зависят только от переменных r и t и что речь идет именно о вязких течениях (греческой буквой «ν» обычно обозначают вязкость). Самыми известными $rt\nu$-течениями в цилиндре являются (осевое) течение Пуазейля [20] и два осесимметричных окружных течения: течение между двумя вращающимися цилиндрами с непроницаемыми стенками и течение Озеена (процесс диффузии вихря) [21]. Известны и другие точные решения для $rt\nu$-течений в цилиндре.

Так, например, в монографии [22] упоминаются точные решения для двух частных случаев $rt\nu$-течений в цилиндре: для стационарного случая и для случая нулевой осевой скорости (вращение жидкости вокруг оси). В обзоре [1] можно найти точные решения для трех частных случаев $rt\nu$-течений в цилиндре: для случая нулевой осевой скорости, для стационарного случая при нулевой окружной скорости (течение пуазейлевского типа) и отдельно для нестационарного случая при нулевой окружной скорости (результат статьи [23]). Некоторые точные решения для $rt\nu$-течений в цилиндре можно найти в обзоре [2], в частности, окружное нестационарное течение Тейлора. В статье [11] представлено несколько $rt\nu$-течений в цилиндре в качестве примеров течений с определенными свойствами завихренности. Наиболее широкий класс точных решений для $rt\nu$-течений в цилиндре представлен в статье [3], в которой, по утверждению автора обзора [4], «дана сводка известных точных решений» по состоянию на 1936 год. В статье [3] сначала показано, что точное решение можно получить, если окружную и радиальную скорости вычислить по некоторым (полученным в [3]) формулам через производные по переменным r и t от любой функции $\psi(r,t)$, удовлетворяющей уравнению $\nu\Delta\Delta\psi = \partial\Delta\psi/\partial t$, где Δ — оператор Лапласа. Затем получены некоторые решения этого уравнения. В результате получился достаточно широкий класс точных решений уравнений Навье—Стокса. Однако даже если найти все решения уравнения $\nu\Delta\Delta\psi = \partial\Delta\psi/\partial t$, то и тогда предложенный в [3] подход не позволит получить все возможные точные решения для $rt\nu$-течений в цилиндре. Причина этого заключается в том, что исследование $rt\nu$-течений в цилиндре в статье [3] проведено без учета их специфических особенностей — на основе формул, верных для любых осесимметричных течений. Эти формулы представляют не все решения уравнений, полученных после исключения давления из уравнений Навье—Стокса (после ротации векторного уравнения Навье—Стокса), а только некоторые из этих решений.

Исключение давления приводит к уравнениям с производными компонент скорости белее высокого порядка, чем порядок этих производных в уравнениях Навье—Стокса. И «платой» за уменьшение количества неизвестных функций (исключение давления) является повышение порядка производных. В данной статье для $rt\nu$-течений в цилиндре предлагается другой способ упрощения системы уравнений Навье—Стокса, без исключения давления, который основан на одном специфическом свойстве $rt\nu$-течений в цилиндре. Речь идет о том, что, как будет показано ниже, скорость $rt\nu$-течений в цилиндре представляет собой сумму скоростей двух течений вязкой несжимаемой жидкости, каждое из которых подчиняется уравнениям Навье—Стокса: осевого течения (радиальная и окружная скорости равны нулю) и окружного течения (радиальная и осевая скорости равны нулю). Это позволяет расщеплять краевые задачи для рассматриваемого типа течений, содержащие три неизвестные функции (давление, окружная и осевая скорости), на две задачи, каждая из которых содержит две неизвестные функции (давление и одна из компонент скорости). При этом сумма давлений осевого и окружного течений будет давлением исходного течения. Кроме того, ниже будет показано, что любые два $rt\nu$-течения в цилиндре допускают сложение скоростей, и в итоге получается скорость некоторого другого $rt\nu$-течения в цилиндре. В общем случае давление точного решения, полученного в результате такого сложения скоростей, не будет суммой исходных давлений, однако легко может быть рассчитано по полю окружной скорости путем взятия неопределенного интеграла. В итоге возможность суммирования превращает известный в настоящее время запас точных решений (в том числе решений, содержащихся в перечисленной выше литературе) в такой класс точных решений для $rt\nu$-течений в цилиндре, который содержит все известные решения и значительно превышает их совокупность по разнообразию.

1. Основные обозначения и уравнения движения. Течение однородной ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, в которых потенциал объемных сил и давление, отнесенное к плотности, входят в виде их суммы. Это обстоятельство позволяет легко пересчитывать точные решения для течений, происходящих в отсутствие объемных сил, в точные решения для течений в потенциальных полях. Поэтому ограничимся рассмотрением течений, в которых отсутствуют объемные силы.

Пусть осесимметричное течение однородной ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости происходит в отсутствие объемных сил. Введем следующие безразмерные переменные: $\boldsymbol{V}$ — скорость; $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}$ — завихренность; p — давление, отнесенное к плотности, которое ниже для краткости будем называть давлением; Re — число Рейнольдса. Движение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, которые можно представить в форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V} = -\frac{1}{\mathsf{Re}}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\Omega} - \nabla\Big(p + \frac{\boldsymbol{V}^2}{2}\Big), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0. \tag{2}$$

Пусть далее $Or\varphi z$ — цилиндрическая система координат с началом в точке O (ось Oz совпадает с осью симметрии течения). Обозначим через $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ — правую тройку единичных векторов в радиальном, окружном и осевом направлениях соответственно. Скорость $\boldsymbol{V}$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{V} = V_r\boldsymbol{e}_r + V_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + V_z\boldsymbol{e}_z$.

Рассмотрим $rt\nu$-течения в цилиндре, то есть течения, в которых $V_r \equiv 0$, а компоненты скорости V_φ и V_z зависят только от радиуса r и от времени t и не зависят от окружной и от осевой координат φ и z. При этом давление p может зависеть не только от r и t, но еще и от осевой координаты z. Скорость $\boldsymbol{V}$ и давление p таких течений представляется в виде

$$\boldsymbol{V} = V_\varphi(r,t)\boldsymbol{e}_\varphi + V_z(r,t)\boldsymbol{e}_z, \quad p = p(r,z,t). \tag{3}$$

Наряду с этим будем рассматривать еще два особых типа $rt\nu$-течений в цилиндре: окружное и осевое. Окружное $rt\nu$-течение в цилиндре — это течение, в котором $\boldsymbol{V} = V_\varphi(r,t)\boldsymbol{e}_\varphi$. Осевое $rt\nu$-течение в цилиндре — это течение, в котором $\boldsymbol{V} = V_z(r,t)\boldsymbol{e}_z$ (течение пуазейлевского типа).

Уравнение неразрывности (2) в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}V_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}V_z = 0.$$

Если учесть, что $V_r \equiv 0$, а V_φ и V_z зависят только от переменных r и t, то получается, что как скорость $\boldsymbol{V} = V_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + V_z\boldsymbol{e}_z$, так и скорости $\boldsymbol{V}_\varphi = V_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ и $\boldsymbol{V}_z = V_z\boldsymbol{e}_z$ по отдельности удовлетворяют уравнению неразрывности (2). Поэтому ниже будем проверять только выполнение уравнения (1). И не будем всякий раз напоминать, что для $rt\nu$-течений в цилиндре уравнение неразрывности выполняется «автоматически».

2. Расщепление уравнений Навье—Стокса. Пусть $\boldsymbol{V} = V_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + V_z\boldsymbol{e}_z$ — скорость, а p — давление некоторого $rt\nu$-течения в цилиндре. Это значит, что скорость $\boldsymbol{V}$ и давление p удовлетворяют уравнению (1) и представляются в виде (3). Поскольку V_φ и V_z зависят только от переменных r и t, векторное уравнение (1), записанное в цилиндрической системе координат, равносильно системе из трех скалярных уравнений:

$$\frac{V_\varphi^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\mathsf{Re}}\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rV_\varphi)}{\partial r}\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} - \frac{1}{\mathsf{Re}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{5}$$

Для $rt\nu$-течений в цилиндре левые части уравнений (4) и (5) не зависят от z. Поэтому

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно, в $rt\nu$-течении в цилиндре давление можно представить в виде

$$p = p(r, z, t) = \hat{p}(r, t) + zA(t). \tag{6}$$

Возможность представить давление в виде (6) позволяет расщепить уравнение (1) на систему уравнений для окружной скорости

$$\begin{cases} \dfrac{V_\varphi^2}{r} = \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial V_\varphi}{\partial t} - \dfrac{1}{\mathsf{Re}}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rV_\varphi)}{\partial r}\Big) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

и на уравнение для осевой скорости

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} - \frac{1}{\mathsf{Re}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\Big) = -A(t). \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) по отдельности описывают не какие-то особые случаи окружного и осевого движений. Система уравнений (7) описывает самый общий случай окружного движения (в классе $rt\nu$-течений в цилиндре), а уравнение (8) — самый общий случай осевого движения. В итоге приходим к двум следующим результатам.

1. Расщепление уравнений Навье—Стокса. *Скорость $\boldsymbol{V} = V_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + V_z \boldsymbol{e}_z$ и давление $p = p(r, z, t) = \hat{p}(r, t) + zA(t)$ любого $rt\nu$-течения в цилиндре представляются соответственно в виде суммы скоростей и давлений двух $rt\nu$-течений в цилиндре вязкой несжимаемой жидкости: окружного $\big(\boldsymbol{V}_\varphi = V_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi,\ p = \hat{p}(r, t)\big)$ и осевого $\big(\boldsymbol{V}_z = V_z \boldsymbol{e}_z,\ p = zA(t)\big)$.*
2. Суммирование окружных и осевых решений. *Сумма скоростей и давлений любого окружного и любого осевого $rt\nu$-течений в цилиндре вязкой несжимаемой жидкости является скоростью и давлением некоторого $rt\nu$-течения в цилиндре.* (*Предполагается, что речь идет об одной и той же жидкости, то есть, что в суммируемых течениях число Рейнольдса* Re *одинаково.*)

Эти утверждения справедливы как для стационарных, так и для нестационарных течений. Независимо от того, стационарной или нестационарной является окружная составляющая скорости течения, осевая составляющая также может быть как стационарной, так и нестационарной.

3. Обсуждение. Утверждение о возможности суммирования осевых и окружных решений представляется достаточно очевидным. Действительно, поскольку $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_\varphi$ имеет осевое направление, а $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_z$ — окружное направление, сумма двух уравнений Навье—Стокса

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_z}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_z \times \boldsymbol{V}_z = -\frac{1}{\mathsf{Re}}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_z - \nabla\Big(p_z + \frac{\boldsymbol{V}_z{}^2}{2}\Big)$$

и

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_\varphi}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_\varphi \times \boldsymbol{V}_\varphi = -\frac{1}{\mathsf{Re}}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_\varphi - \nabla\Big(p_\varphi + \frac{\boldsymbol{V}_\varphi{}^2}{2}\Big)$$

с учетом равенства нулю векторного произведения коллинеарных векторов дает уравнение Навье—Стокса для суммарного течения:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{V}_z + \boldsymbol{V}_\varphi)}{\partial t} + \mathbf{rot}(\boldsymbol{V}_z + \boldsymbol{V}_\varphi) \times (\boldsymbol{V}_z + \boldsymbol{V}_\varphi) = \\ = -\frac{1}{\mathsf{Re}}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}(\boldsymbol{V}_z + \boldsymbol{V}_\varphi) - \nabla\Big(p_z + p_\varphi + \frac{\boldsymbol{V}_z^2}{2} + \frac{\boldsymbol{V}_\varphi^2}{2}\Big).$$

Доказанное в предыдущем разделе обратное утверждение (о расщеплении) не столь очевидно, поскольку из (1) неочевидно, например, что выражение

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_z}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_z \times \boldsymbol{V}_z + \frac{1}{\mathsf{Re}}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{V}_z$$

является градиентом какой-либо функции. Поэтому для доказательства утверждения о расщеплении пришлось воспользоваться не векторной, а координатной записью уравнений Навье—Стокса.

Решения уравнений Навье—Стокса для $rt\nu$-течений в цилиндре будем называть $rt\nu$-решениями в цилиндре. Из формул (7) и (8) следует, что допускается сложение $rt\nu$-решений в цилиндре, в каждом из которых обе скорости V_φ и V_z могут быть не равны тождественно нулю. При этом «осевая составляющая» давления в новом решении $zA(t)$ будет суммой «осевых составляющих» давления исходных решений. Однако «окружная составляющая» давления в новом решении $\hat{p}(r,t)$ в общем случае не будет суммой «окружных составляющих» давления исходных решений. Величина $\hat{p}(r,t)$ для нового решения вычисляется через суммарную окружную скорость $V_\varphi = V_\varphi(r,t)$ по формуле

$$\hat{p}(r,t) = \hat{p}_0 + \int_{r_0}^{r} V_\varphi{}^2(\vartheta,t)\cdot\vartheta^{-1}d\vartheta,$$

где $\hat{p}_0 > 0$ и $r_0 \geqslant 0$ — константы.

Поскольку при суммировании точных $rt\nu$-решений в цилиндре получается (точное) выражение для суммарной окружной скорости $V_\varphi = V_\varphi(r,t)$, приведенный выше интеграл для любого значения r может быть посчитан на компьютере с любой наперед заданной точностью (ровно так, как, например, это имеет место для синуса, косинуса, экспоненты, цилиндрических функций и т.п.). В этом смысле можно говорить о том, что при суммировании точных $rt\nu$-решений в цилиндре получается новое точное $rt\nu$-решение в цилиндре. В итоге обнаруженная выше возможность расщепления и суммирования превращает известный в настоящее время запас точных решений в источник получения новых решений. Всякое известное $rt\nu$-решение в цилиндре расщепляется, пополняя тем самым «запасы» осевых и окружных точных решений, суммирование которых в различных комбинациях позволяет получать новые точные решения.

Заключение. В рамках уравнений Навье—Стокса рассмотрены осесимметричные течения вязкой несжимаемой жидкости, в которых радиальная компонента скорости равна нулю, а окружная и осевая компоненты скорости не зависят от окружной и осевой координат (зависят только от расстояния до оси симметрии и от времени). При этом давление может зависеть еще и от осевой координаты. Такие течения предложено назвать $rt\nu$-течениями в цилиндре.

Показано, что скорость $rt\nu$-течения в цилиндре представляет собой сумму скоростей двух течений вязкой несжимаемой жидкости, каждое из которых подчиняется уравнениям Навье—Стокса: осевого течения (радиальная и окружная скорости равны нулю) и окружного течения (радиальная и осевая скорости равны нулю). Осевое и окружное движения происходят независимо друг от друга, не оказывая никакого взаимного влияния. Это позволяет расщеплять краевые задачи для рассматриваемого типа течений, содержащие три неизвестные функции (давление, окружная и осевая скорости), на две задачи, каждая из которых содержит две неизвестные функции (давление и одна из компонент скорости). При этом сумма давлений осевого и окружного течений будет давлением исходного течения.

Полученный результат также позволяет получать новые точные решения с использованием существующего «запаса» точных решений.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions* / London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 334. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. x+196 pp. doi: 10.1017/CBO9780511526459.

2. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*, 2006. № 6. С. 3–76.

3. Berker R. *Sur quelques cas d'intégration des équations du movement d'un fluide visqueux incompressible.* Paris–Lille: Imprimerie A. Taffin–Lefort, 1936.

4. Neményi P. F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua // *Adv. Appl. Mech.*, 1951. vol. 2. pp. 123–151. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70300-4.
5. Власенко В. В., Волков А. В., Трошин А. И. Выбор метода аппроксимации вязких членов в методе Галеркина с разрывными базисными функциями // *Ученые записки ЦАГИ*, 2013. Т. 44, № 3. С. 18–38.
6. Голубкин В. Н., Марков В. В., Сизых Г. Б. Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // *ПММ*, 2015. Т. 79, № 6. С. 808–816.
7. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results / *Intern. Conf. on 50 years of the development of grid-characteristic method.* GCM50 2018 / Smart Modeling for Engineering Systems, 133, 2019. pp. 228–235. doi: 10.1007/978-3-030-06228-6_19.
8. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. The verification of the calculation of stationary subsonic flows and the presentation of the results // *Math. Models Comput. Simul.*, 2019. vol. 11, no. 1. pp. 97–106. doi: 10.1134/S2070048219010162.
9. Петров А. Г. О точных и асимптотических решениях уравнений Навье–Стокса в слое жидкости между сближающимися и удаляющимися пластинами // *Изв. РАН. МЖГ*, 2014. № 2. С. 44–57.
10. Аристов С. Н., Князев Д. В. Трёхмерное струйное течение вязкой жидкости с плоскими свободными границами // *Изв. РАН. МЖГ*, 2017. № 2. С. 50–53. doi: 10.7868/S0568528117020050.
11. Коцур О. С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // *Труды МФТИ*, 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.
12. Сизых Г. Б. Винтовые вихревые линии в осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // *ПММ*, 2009. Т. 83, № 3. С. 370–376. doi: 10.1134/S0032823519030123.
13. Kumar M., Kumar R. On some new exact solutions of incompressible steady state Navier–Stokes equations // *Meccanica*, 2014. vol. 49, no. 2. pp. 335–345. doi: 10.1007/s11012-013-9798-4.
14. Артышев С. Г. Описание некоторых плоских вращающихся течений несжимаемой жидкости с помощью цилиндрических функций // *ПММ*, 2015. Т. 79, № 2. С. 236–241.
15. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*, 2016. № 2. С. 25–31.
16. Ковалев В. П., Просвиряков Е. Ю., Сизых Г. Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // *Труды МФТИ*, 2017. Т. 9, № 1. С. 71–88.
17. Weidman P. D., Mansur S., Ishak A. Biorthogonal stretching and shearing of an impermeable surface in a uniformly rotating fluid system // *Meccanica*, 2017. vol. 52, no. 7. pp. 1515–1525. doi: 10.1007/s11012-016-0507-y.
18. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 18, 2012. С. 120–134.
19. Верещагин В. П., Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 19, 2013. С. 48–63.
20. Poiseuille J.-L.-M. *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres.* Paris: Imprimerie Royale, 1844.
21. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. xviii+615 pp. doi: 10.1017/CBO9780511800955.
22. Страхович К. И. *Механика вязкой жидкости. I. Общая часть.* Л.: ЛГУ, 1940. 201 с.
23. Szymánski P. Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique // *J. Math. Pures Appl.*, 1932. vol. 11. pp. 67–108, http://eudml.org/doc/234063.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 163–173
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1740

MSC: 76D05, 76D99

The splitting of Navier–Stokes equations for a class of axisymmetric flows

G. B. Sizykh

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

In the framework of the Navier–Stokes equations, unsteady axisymmetric flows of a homogeneous viscous incompressible fluid, in which the axial and circumferential velocities depend only on radius and time are considered, and the radial velocity is zero. It is shown that the velocity of such flows is the sum of the velocities of two flows of a viscous incompressible fluid: axial flow (radial and circumferential velocities are zero) and circumferential flow (radial and axial velocities are zero). Axial and circumferential movements occur independently, without exerting any mutual influence. This allows us to split the boundary value problems for the type of flows under consideration containing three unknown functions (pressure, circumferential and axial velocities) into two problems, each of which contains two unknown functions (pressure and one of the velocity components). In this case, the sum of pressures of the axial and circumferential flow will be the pressure of the initial flow. The discovered possibility of splitting allows using known solutions to replenish the "reserves" of axial and circumferential exact solutions. These solutions, in its turn, can be summed in various combinations and, as a result, give the velocities and pressures of new exact solutions of the Navier–Stokes equations.

Keywords: viscous incompressible fluid, splitting of the Navier–Stokes equations, exact solutions.

Received: 22nd August, 2019 / Revised: 15th October, 2019 / Accepted: 11th November, 2019 / First online: 2nd April, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Research Article

Please cite this article in press as:
Sizykh G. B. The splitting of Navier–Stokes equations for a class of axisymmetric flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 163–173. doi: 10.14498/vsgtu1740 (In Russian).

Author's Details:
Grigory B. Sizykh https://orcid.org/0000-0001-5821-8596
Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewer for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 334. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, x+196 pp. doi: 10.1017/CBO9780511526459.
2. Pukhnachev V V. Symmetries in Navier–Stokes equations, *Uspehi Mehaniki*, 2006, no. 6, pp. 3–76 (In Russian).
3. Berker R. *Sur quelques cas d'intégration des équations du movement d'un fluide visqueux incompressible.* Paris–Lille, Imprimerie A. Taffin–Lefort, 1936, http://eudml.org/doc/192863.
4. Neményi P. F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua, *Adv. Appl. Mech.*, 1951, vol. 2, pp. 123–151. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70300-4.
5. Troshin A.I., Vlasenko V. V, Wolkov A. V. Selection of viscous terms approximation in discontinuous galerkin method, *TsAGI Science Journal*, 2013, vol. 44, no. 3, pp. 327–354. doi: 10.1615/TsAGISciJ.2013009684.
6. Golubkin V. N., Markov V. V., Sizykh G. B. The integral invariant of the equations of motion of viscous gas, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 566–571. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2016.04.002.
7. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results, In: *Intern. Conf. on 50 years of the development of grid-characteristic method.* GCM50 2018, Smart Modeling for Engineering Systems, 133, 2019, pp. 228–235. doi: 10.1007/978-3-030-06228-6_19.
8. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. The verification of the calculation of stationary subsonic flows and the presentation of the results, *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 97–106. doi: 10.1134/S2070048219010162.
9. Petrov A. G. Exact and asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations in a fluid layer between plates approaching and moving apart from one another, *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 2, pp. 174–187. doi: 10.1134/S0015462814020069.
10. Aristov S. N., Knyazev D. V. Three-dimensional viscous jet flow with plane free boundaries, *Fluid Dyn.*, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 215–218. doi: 10.1134/S0015462817020053.
11. Kotsur O. S. On the existence of local formulae of the transfer velocity of local tubes that conserve their strengths, *Trudy MFTI*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 76–85 (In Russian).
12. Sizykh G. B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 3, pp. 1038–1042. doi: 10.1134/S0015462818060083.
13. Kumar M., Kumar R. On some new exact solutions of incompressible steady state Navier–Stokes equations, *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 2, pp. 335–345. doi: 10.1007/s11012-013-9798-4.
14. Artyshev S. G. The description of several plane rotating flows of an incompressible fluid using cylindrical functions, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 159–163. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2015.07.006.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. doi: 10.1134/S0015462816020034.
16. Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu., Sisykh G. B. Obtaining examples of exact solutions to Navier–Stokes equations for helical flows by method of summing velocities, *Trudy MFTI*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 71–88 (In Russian).
17. Weidman P. D., Mansur S., Ishak A. Biorthogonal stretching and shearing of an impermeable surface in a uniformly rotating fluid system, *Meccanica*, 2017, vol. 52, no. 7, pp. 1515–1525. doi: 10.1007/s11012-016-0507-y.

18. Vereshchagin V. P., Subbotin Yu. N., Chernykh N. I. On the mechanics of helical flows in an ideal incompressible nonviscous continuous medium, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, pp. 159–174. doi: 10.1134/S008154381402014X.
19. Vereshchagin V. P., Subbotin Yu. N., Chernykh N. I. Some solutions of continuum equations for an incompressible viscous medium, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 287, pp. 208–223. doi: 10.1134/S008154381409020X.
20. Poiseuille J.-L.-M. *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres.* Paris, Imprimerie Royale, 1844.
21. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000, xviii+615 pp. doi: 10.1017/CBO9780511800955.
22. Strakhovich K. I. *Mekhanika viazkoi zhidkosti. I. Obshchaia chast'* [Mechanics of a Viscous Fluids. I. General Part]. Leningrad, Leningrad State Univ., 1940, 201 pp. (In Russian)
23. Szymánski P. Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique, *J. Math. Pures Appl.*, 1932, vol. 11, pp. 67–108, http://eudml.org/doc/234063.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 174–186
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

Краткие сообщения

УДК 517.928.4

О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области

В. Н. Орлов[1], ***Т. Ю. Леонтьева***[2]

[1] Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.
[2] ГАПОУ ЧР «Межрегиональный центр компетенций —
Чебоксарский электромеханический колледж» Министерства образования
и молодежной политики Чувашской Республики,
Россия, 428000, Чебоксары, пр. Ленина, 9.

Аннотация

Ранее авторами было проведено исследование одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности подвижной особой точки. Доказаны: существование подвижной особой точки, теорема существования и единственности решения в окрестности подвижной особой точки. Построено аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки. Исследовано влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение. Результаты, полученные для вещественной области, были обобщены на комплексную область $|z| < |\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$, где z^* — точное значение подвижной особой точки, $\tilde{z}^*$ — приближенное значение подвижной особой точки. В данной работе проведено исследование аналитического приближенного решения от влияния возмущения подвижной особой точки в области $|z| > |\tilde{z}^*| \geqslant |z^*|$ с учетом изменения направления движения по лучу в направлении к началу координат комплексной плоскости. Эти исследования необходимы в силу характера подвижной особой точки (четная дробная степень критического полюса). Полученные результаты сопровождены численным экспериментом и завершают исследование аналитического приближенного решения рассматриваемого класса

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. О расширении области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 174–186. doi: 10.14498/vsgtu1727.

Сведения об авторах

Виктор Николаевич Орлов https://orcid.org/0000-0001-7606-5490
доктор физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: orlovvn@mgsu.ru

Татьяна Юрьевна Леонтьева https://orcid.org/0000-0002-4008-7468
преподаватель; отделение первого курса; e-mail: betty2784@mail.ru

нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности подвижной особой точки в зависимости от направления движения вдоль луча в комплексной области.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое приближенное решение, окрестность подвижной особой точки, комплексная область, апостериорная оценка.

Получение: 26 июля 2019 г. / Исправление: 7 февраля 2020 г. / Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 10 марта 2020 г.

1. Применямый метод и принятые допущения. Хорошо известны простейшие нелинейные дифференциальные уравнения Риккати, Абеля, Пенлеве, имеющие широкое применение в разных областях [1–5]. Частный случай нелинейного дифференциального уравнения второго порядка является основой математической модели консольных конструкций [6, 7]. Особенностью перечисленных уравнений является наличие подвижных особых точек, классифицированных Фуксом [8]. Теоретическое обоснование метода аналитического приближенного решения перечисленных дифференциальных уравнений Риккати, Абеля, Пенлеве даны в работах [9–11]. Предложенный в перечисленных работах приближенный метод успешно применяется и для других нелинейных дифференциальных уравнений [12, 13].

2. Результаты. Рассматривается класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальной правой частью пятой степени:

$$y''(z) = b_0(z)y^5(z) + b_1(z)y^4(z) + b_2(z)y^3(z) + b_3(z)y^2(z) + b_4(z)y(z) + b_5(z),$$

где b_i — аналитические функции в рассматриваемой области, $i = 0, 1, \ldots, 5$. Замена переменной

$$y(z) = \frac{u(z)}{\sqrt[4]{b_0}} - \frac{b_1(z)}{5b_0},$$

где $b_0 = \mathrm{const} \neq 0$, приводит исследуемое уравнение к нормальной форме:

$$u''(z) = u^5(z) + r(z),$$

где

$$r(x) = -\frac{b_1^5}{5^5\sqrt[4]{b_0^{15}}} + \sqrt[4]{b_0}\, b_5(z) + \frac{b_1''(z)}{5\sqrt[4]{b_0^3}}, \quad b_2(z) = \frac{2b_1^2(z)}{5b_0},$$

$$b_3(z) = \frac{2b_1^3(z)}{5^2 b_0^2}, \quad b_4(z) = \frac{b_1^4(z)}{5^3 b_0^3}.$$

Для задачи Коши

$$y''(z) = y^5(z) + r(z), \tag{1}$$

$$y(z_0) = y_0, \quad y'(z_0) = y_1 \tag{2}$$

в случае точного значения подвижной особой точки [14] была доказана теорема существования, получено приближенное решение в окрестности подвижной особой точки z^* в виде

$$y(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0,$$

а также была получена структура приближенного решения

$$y_N(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0, \tag{3}$$

при этом $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, а $C_6 = \alpha$, где α — параметр, играющий роль стыковки двух видов решений на границе некоторой окрестности подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ — конечной суммы регулярного ряда и ряда (3). Этот параметр неявным образом связан с начальным условием (2) задачи Коши (1), (2).

Так как существующие методы нахождения подвижной особой точки позволяют находить последнюю лишь приближенно, то возмущение подвижной особой точки отражается на аналитическом приближенном решении (3), в результате чего имеем

$$\tilde{y}_N(z) = (\tilde{z}^* - z)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов. Было проведено исследование аналитического приближенного решения (4) в области $|z| < |\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$, когда в комплексной плоскости движение по лучу, исходящему из начала координат, проходит в направлении от начала координат. При движении по лучу в направлении к началу координат получаем область $|z| > |\tilde{z}^*| \geqslant |z^*|$. Выражения (3) и (4) соответственно будут иметь вид

$$y_N(z) = (z - z^*)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} C_n (z - z^*)^{\frac{n}{2}}, \quad C_0 \neq 0,$$

и

$$\tilde{y}_N(z) = (z - \tilde{z}^*)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (z - \tilde{z}^*)^{\frac{n}{2}}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0. \tag{5}$$

В этой ситуации полученные результаты будут справедливы и в вещественной области как в частном случае.

Теорема. *Пусть z^* — подвижная особая точка $y(z)$ задачи* (1), (2) *и выполняются следующие условия*:

1) $r(z) \in C^1$ *в области* $K = \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_1\}$, $\rho_1 = \mathrm{const} > 0$;
2) $\exists M_i : |r^{(n)}(\tilde{z}^*)|/n! \leqslant M_i$, $M_i = \mathrm{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;
3) $|z^*| \leqslant |\tilde{z}^*|$;
4) *известны оценки погрешности* $\tilde{z}^*$ *и* $\tilde{\alpha} : |\tilde{z}^* - z^*| \leqslant \Delta\tilde{z}^*$, $|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant \Delta\tilde{\alpha}$;

5) $\Delta\tilde{z}^* < 1/(4\sqrt[5]{(M+1)^2})$.
Тогда аналитическое приближенное решение (5) *задачи* (1), (2) *в областях*

$$\{z : |\tilde{z}^*| < |z| < |\tilde{z}^*| + \Delta\tilde{z}^*\} \cap \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_4\}, \tag{6}$$
$$\{z : |z| \geqslant |\tilde{z}^*| + \Delta\tilde{z}^*\} \cap \{z : |z - \tilde{z}^*| < \rho_4\} \tag{7}$$

будет иметь погрешность

$$\Delta\tilde{y}_N(z) \leqslant \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}},$$

$$\Delta_1 = \frac{2^N M(M+1)^{\left[\frac{N}{5}\right]}|z-\tilde{z}^*|^{\frac{N-1}{2}}}{1-2^5(M+1)|z-\tilde{z}^*|^{\frac{5}{2}}}\sum_{i=0}^{4}\frac{2^i\eta(M+1)^{\left[\frac{i}{5}\right]}|z-\tilde{z}^*|^{\frac{i}{2}}}{(N+i+2)(N+i-6)},$$

$$\Delta_2 = \frac{2^5\Delta\tilde{z}^* M(M+1)\beta^{\frac{3}{2}}}{1-2^{10}(M+1)^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^{\gamma_1}\beta^i + \beta^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

$$\Delta_3 = \frac{2^7\Delta M\mu\beta^2}{1-2^{15}\mu^2\beta^5}\left(\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_1}\beta^i + 2(2\beta)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\right),$$

$$\rho_4 = \min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}, \quad \rho_2 = \frac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}} \ (\textit{из } [14]), \quad \rho_3 = \frac{1}{8(M+\Delta M+1)^2},$$

$$\beta = \begin{cases} |z-\tilde{z}^*|, & z \in (6), \\ \Delta\tilde{z}^*, & z \in (7), \end{cases} \quad \mu = M + \Delta M + 1, \quad \eta = \begin{cases} i+1, \ i = 0,1,2,3,4, \\ 8-i+1, \ i = 5,6,7,8, \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, \ i = 0,1,2, \\ 1, \ i = 3,4, \end{cases} \quad \gamma_2 = \begin{cases} 0, \ i = 0,1, \\ 1, \ i = 2,3,4, \end{cases} \quad M = \max\left\{|\tilde{\alpha}|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}\right\},$$

$$\Delta M = \max\left\{\sup_{n,G}\frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n!}\Delta\tilde{z}^*, \Delta\tilde{z}^*, \Delta\tilde{\alpha}\right\}, \quad G = \{z : |z-\tilde{z}^*| \leqslant \Delta\tilde{z}^*\},$$

$n = 0,1,2,\ldots$; α — *параметр, зависящий от условий* (2).

Доказательство. На основании классического подхода в оценке получаем

$$\Delta\tilde{y}_N(z) = |y(z) - \tilde{y}_N(z)| \leqslant |y(z) - \tilde{y}(z)| + |\tilde{y}(z) - \tilde{y}_N(z)|.$$

Вначале рассмотрим $|y(z) - \tilde{y}(z)|$:

$$|y(z)-\tilde{y}(z)| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}} + \right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|+\left|\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\Big((z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\Big)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\left|(|z-\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|+\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{C}_n|\left|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|.$$

Затем рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{C}_n|\left|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|.$$

Принимая во внимание условие $|z^*|\leqslant|\tilde{z}^*|<|z|$ и $|C_0|=|\tilde{C}_0|=\sqrt[4]{3/4}$ при $n=0$, имеем

$$|\tilde{C}_0|\left|(z-z^*)^{-\frac{1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{-\frac{1}{2}}\right|\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Учитывая, как выше было отмечено, что [14]

$$|C_1|=|\tilde{C}_1|=|C_2|=|\tilde{C}_2|=|C_3|=|\tilde{C}_3|=|C_4|=|\tilde{C}_4|=0,$$

получаем

$$|y(z)-\tilde{y}(z)|\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}+\sum_{n=5}^{\infty}|\tilde{C}_n|\left|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n\left|\Big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\Big)^{\frac{n-1}{2}}\right|.$$

Для $n=5,6,7,\ldots$ упростим выражение:

$$\left|(z-z^*)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|\leqslant\left|\Big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\Big)^{\frac{n-1}{2}}-(z-\tilde{z}^*)^{\frac{n-1}{2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\Delta\tilde{z}^*\Big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\Big)^{\frac{n-2}{2}}\right|.$$

Тогда для оценки приближенного решения (5) получаем

$$|y(z)-\tilde{y}_N(z)|\leqslant\frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\tilde{C}_n||z-\tilde{z}^*|^{\frac{n-1}{2}}+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}|\tilde{C}_n|\left|\Delta\tilde{z}^*\Big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\Big)^{\frac{n-2}{2}}\right|+$$

$$+\sum_{n=5}^{\infty}|\Delta\tilde{C}_n|\Big|\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-1}{2}}\Big| = \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,$$

где $|\tilde{C}_n - C_n| = \Delta\tilde{C}_n$. Из последнего следует

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{z}^*}{|z-\tilde{z}^*|}\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Выражение для Δ_1 следует из теоремы 2 работы [14].

Проведем оценку для Δ_2. Учитывая структуру ряда (5), проведем суммирование целых и дробных степеней раздельно при условии, что $\Delta\tilde{z}^* \leqslant |z-\tilde{z}^*|$:

$$\Delta_2 = \sum_{n=5}^{\infty}|\tilde{C}_n|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{n-2}{2}}\Big| =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}|\tilde{C}_{2n-1}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{2n-3}{2}}\Big| +$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}|\tilde{C}_{2n}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{n-1}\Big| = \Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}.$$

Принимая во внимание закономерность оценок коэффициентов C_n [14]:

$$|C_{5n}| \leqslant \frac{2^{5n}(M+1)^n}{(5n+2)(5n-6)}, \quad |C_{5n+1}| \leqslant \frac{2^{5n+1}(M+1)^n}{(5n+3)(5n-5)},$$

$$|C_{5n+2}| \leqslant \frac{2^{5n+2}(M+1)^n}{(5n+4)(5n-4)}, \quad |C_{5n+3}| \leqslant \frac{2^{5n+3}(M+1)^n}{(5n+5)(5n-3)},$$

$$|C_{5n+4}| \leqslant \frac{2^{5n+4}(M+1)^n}{(5n+6)(5n-2)},$$

получаем для $\Delta_{2,1}$:

$$\Delta_{2,1} = \sum_{n=3}^{\infty}|\tilde{C}_{2n-1}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{2n-3}{2}}\Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-5}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-7}{2}}\Big| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-3}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-5}{2}}\Big| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k-1}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-3}{2}}\Big| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k+1}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-1}{2}}\Big| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|C_{10k+3}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k+1}{2}}\Big| =$$

$$=\sum_{i=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}|\tilde{C}_{10k-5+2i}|\Big|\Delta\tilde{z}^*\big((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\big)^{\frac{10k-7+2i}{2}}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^5\Delta\tilde{z}^*M(M+1)|z-\tilde{z}^*|^{\frac{3}{2}}}{1-2^{10}(M+1)^2|z-\tilde{z}^*|^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i|z-\tilde{z}^*|^i$$

при условии $|z-\tilde{z}^*|<\rho_2$, $\rho_2=1/(4\sqrt[5]{(M+1)^2})$ из [14]. Аналогичным образом получаем оценку для $\Delta_{2,2}$:

$$\Delta_{2,2}\leqslant \frac{2^5\Delta\tilde{z}^*M(M+1)|z-\tilde{z}^*|^2}{1-2^{10}(M+1)^2|z-\tilde{z}^*|^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i|z-\tilde{z}^*|^i.$$

Рассмотрим случай $|z-\tilde{z}^*|<\Delta\tilde{z}^*$, тогда

$$\Delta_{2,1}\leqslant \frac{2^5M(M+1)(\Delta\tilde{z}^*)^{\frac{5}{2}}}{1-2^{10}(M+1)^2(\Delta\tilde{z}^*)^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i(\Delta\tilde{z}^*)^i.$$

И для $\Delta_{2,2}$ получим соответственно оценку

$$\Delta_{2,2}\leqslant \frac{2^5M(M+1)(\Delta\tilde{z}^*)^3}{1-2^{10}(M+1)^2(\Delta\tilde{z}^*)^5}\sum_{i=0}^{4}2^{2i}(M+1)^i(\Delta\tilde{z}^*)^i.$$

Перейдем к оценке Δ_3. Из гипотез оценок для $\Delta\tilde{C}_n$:

$$\Delta\tilde{C}_{5n}\leqslant\frac{2^{5n}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+2)(5n-6)},\quad \Delta\tilde{C}_{5n+1}\leqslant\frac{2^{5n+1}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+3)(5n-4)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{5n+2}\leqslant\frac{2^{5n+2}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+4)(5n-4)},\quad \Delta\tilde{C}_{5n+3}\leqslant\frac{2^{5n+3}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+5)(5n-3)},$$

$$\Delta\tilde{C}_{5n+4}\leqslant\frac{2^{5n+4}\Delta M(M+\Delta M+1)^n}{(5n+6)(5n-2)},$$

где

$$M=\max\Big\{|\tilde{\alpha}|,\sup_n\frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!}\Big\},\quad \Delta M=\max\Big\{\sup_{n,G}\frac{|r^{(n+1)}(z)|}{n!}\Delta\tilde{z}^*,\Delta\tilde{z}^*,\Delta\tilde{\alpha}\Big\},$$

$$G=\{z:|z-\tilde{z}^*|\leqslant\Delta\tilde{z}^*\},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Докажем оценку для $\Delta\tilde{C}_{5n}$ в случае $N+1=5(2n+1)$:

$$\Delta\tilde{C}_{10n+5}=|C_{10n+5}-\tilde{C}_{10n+5}|\leqslant\frac{1}{(10n+7)(10n-1)}\times$$

$$\times\left|\sum_{i=0}^{10n+3}\left(\sum_{j=0}^{10n+3-i}\left(\sum_{m=0}^{10n+3-i-j}C_{10n+3-i-j-m}C_m\right)\left(\sum_{l=0}^{j}C_{j-l}C_l\right)\right)C_i+B_{10n+3}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{10n+3}\left(\sum_{j=0}^{10n+3-i}\left(\sum_{m=0}^{10n+3-i-j}\tilde{C}_{10n+3-i-j-m}\tilde{C}_m\right)\left(\sum_{l=0}^{j}\tilde{C}_{j-l}\tilde{C}_l\right)\right)\tilde{C}_i-B_{10n+3}\right|=$$

$$=\frac{1}{(10n+7)(10n-1)}\times$$

$$\times\left|\sum_{i=0}^{10n+3}\left(\sum_{j=0}^{10n+3-i}\left(\sum_{m=0}^{10n+3-i-j}(\tilde{C}_{10n+3-i-j-m}+\Delta\tilde{C}_{10n+3-i-j-m})(\tilde{C}_m+\Delta\tilde{C}_m)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{l=0}^{j}(\tilde{C}_{j-l}+\Delta\tilde{C}_{j-l})(\tilde{C}_l+\Delta\tilde{C}_l)\right)\right)(\tilde{C}_i+\Delta\tilde{C}_i)-$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{10n+3}\left(\sum_{j=0}^{10n+3-i}\left(\sum_{m=0}^{10n+3-i-j}\tilde{C}_{10n+3-i-j-m}\tilde{C}_m\right)\left(\sum_{l=0}^{j}\tilde{C}_{j-l}\tilde{C}_l\right)\right)\tilde{C}_i\right|.$$

Выполнив в последнем соотношении ряд преобразований, с учетом оценок для коэффициентов $\tilde{C}_n$, полученных в работе [14], и предполагаемых оценок для $\Delta\tilde{C}_n$ в конечном итоге получаем

$$\Delta\tilde{C}_{10n+5}\leqslant\frac{2^{10n+5}\Delta M(M+\Delta M+1)^{2n+1}}{|(10n+7)(10n-1)|}.$$

Аналогичные выражения получим и в случаях $N+1=5n+1$, $N+1=5n+2$, $N+1=5n+3$ и $N+1=5n+4$. Таким образом, убеждаемся в справедливости оценки

$$\Delta\tilde{C}_{n+1}\leqslant\frac{2^{n+1}\Delta M(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{n+1}{5}\right]}}{(n+3)(n-5)}.$$

В выражении Δ_3 повторим суммирование по целым и дробным степеням:

$$\Delta_3=\sum_{n=5}^{\infty}|\Delta\tilde{C}_n|\left|\left((z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*\right)^{\frac{n-1}{2}}\right|=$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{2n-1}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{n-1}+\sum_{n=3}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{2n}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{\frac{2n-1}{2}}=$$

$$=\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{10k-5+2t}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{10k-4+2t}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{\frac{10k-5+2t}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-5+2t}\Delta M(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-5+2t}{5}\right]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{t=0}^{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k-4+2t}\Delta M(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-4+2t}{5}\right]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{\frac{10k-5+2t}{2}}=$$

$$=\sum_{t=0}^{4}2^{2t-5}\Delta M\Biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k}(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-5+2t}{5}\right]}}{(10k-3+2t)(10k-11+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{5k-3+t}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{10k+1}(M+\Delta M+1)^{\left[\frac{10k-4+2t}{5}\right]}}{(10k-2+2t)(10k-10+2t)}|(z-\tilde{z}^*)+\Delta\tilde{z}^*|^{\frac{10k-5+2t}{2}}\Biggr)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^7\Delta M\mu\beta^2}{1-2^{15}\mu^2\beta^5}\Biggl(\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_1}\beta^i+2(2\beta)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{4}2^{3i}\mu^{\gamma_2}\beta^i\Biggr),$$

где

$$\beta=\begin{cases}|z-\tilde{z}^*|, & z\in(6),\\ \Delta\tilde{z}^*, & z\in(7),\end{cases}\qquad \mu=M+\Delta M+1,$$

$$\gamma_1=\begin{cases}0, & i=0,1,2,\\ 1, & i=3,4,\end{cases}\qquad \gamma_2=\begin{cases}0, & i=0,1,\\ 1, & i=2,3,4.\end{cases}$$

Оценка для выражения Δ_3 справедлива в области $|z-\tilde{z}^*|<\rho_3$, $\rho_3=1/[8(M+\Delta M+1)^2]$.

В ходе преобразований при получении оценки для погрешности приближенного решения (5) получаем области

$$\{z:|z|\geqslant|\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*\}\cap\{z:|z-\tilde{z}^*|<\rho_4\},$$

$$\{z:|\tilde{z}^*|<|z|\leqslant|\tilde{z}^*|+\Delta\tilde{z}^*\}\cap\{z:|z-\tilde{z}^*|<\rho_4\},$$

при этом $|\tilde{z}^*-z^*|\leqslant\Delta\tilde{z}^*$ и $\rho_4=\min\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$. □

Следствие. Теорема справедлива в вещественной области, если комплексную переменную z заменить на вещественную переменную x. В п. 1 изменение на $r(x)\in C^\infty$, в п. 3 — на $x^*<\tilde{x}^*$. Область (6) будет иметь вид $\tilde{x}^*<x<\tilde{x}^*+\Delta\tilde{x}^*$, а (7) — $\tilde{x}^*+\Delta\tilde{x}^*<x<\tilde{x}^*+\rho_4$.

3. Пример. Найдем приближенное решение задачи (1), (2) в окрестности подвижной особой точки $\tilde{z}^*$ в случае $r(z)=0$ при начальных данных

$$y\Bigl(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\Bigr)=-1+i,\quad y'\Bigl(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\Bigr)=-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}i.$$

Величина возмущения не превышает $\varepsilon=0.5\cdot10^{-5}$ и $\alpha=\tilde{\alpha}=0$, $\Delta\tilde{\alpha}=0$, так как в нашем случае точное решение совпадает по структуре с приближенным. Точное решение

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2z-1-\bigl(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\bigr)i}}.$$

Найдем радиус окрестности подвижной особой точки: $\rho_4\approx0.1247503745$. Точное значение подвижной особой точки

$$z^*=\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{4}i,\quad \Delta\tilde{z}^*=0.000003,\quad \tilde{z}^*=0.5000021213+0.9330148232i.$$

Выберем значение аргумента

$$z = 0.5848549351 + 1.0178676370i \in |z - \tilde{z}^*| < \rho_4.$$

Применяя (5), $N = 9$, вычислим приближенное значение решения при заданном значении аргумента:

$$\begin{aligned} z &= 0.5848549351 + 1.0178676370i; \\ y &= 2.4819018915 - 1.0280374240i; \\ \tilde{y}_9 &= 2.4819310056 - 1.0280456659i; \\ \Delta y &= 3.0258 \cdot 10^{-5}; \\ \Delta\tilde{y}_9 &= 0.001366; \\ \Delta_1 y &= 0.00005. \end{aligned}$$

Здесь y — значение точного решения; $\tilde{y}_9$ — приближенное решение (5); Δy — абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{y}_9$; $\Delta\tilde{y}_9$ — оценка погрешности приближенного решения, полученная по теореме; $\Delta_1 y$ — апостериорная оценка погрешности.

Решением обратной задачи теории погрешности для $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ получаем $N = 19$, но с учетом того, что для номеров $n = 10, 11, \ldots, 19$ коэффициенты $C_n = 0$, в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 9$, при котором приближенное решение будет иметь погрешность $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Выводы. В статье сформулирована и доказана теорема, отражающая влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области, определяемой соотношениями (6) и (7) при направлении движения по лучу к началу координат. Теорема справедлива и в вещественной области при соответствующих изменениях, указанных в следствии. Для оптимизации структуры приближенного решения была использована апостериорная оценка погрешности.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту и главному редактору за ценные замечания, позволившие улучшить текст статьи.

Библиографический список

1. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // *Int. J. Solids Struct.*, 1977. no. 13. pp. 93–104. doi: 10.1016/0020-7683(77)90125-1.
2. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems / *Moving Boundary Problems*; eds. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York: Academic Press, 1978. pp. 129–145.
3. Axford R. *Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion*: Los Alamos Technical Reports, Rept. no. LA-4517, 1970. 39 pp., https://fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00387291.html.

4. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory // *J. Basic Eng.*, 1961. vol. 83, no. 1. pp. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
5. Shi M. On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem // *Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga. Univ. Math.*, 2005. vol. 34, no. 1. pp. 17–24.
6. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions // *E3S Web Conf.*, 2019. vol. 97, 03031. doi: 10.1051/e3sconf/20199703031.
7. Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures // *E3S Web Conf.*, 2019. vol. 97, 03036. doi: 10.1051/e3sconf/20199703036.
8. Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* М.-Л.: ГИТЛ, 1950. 436 с.
9. Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // *Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева*, 2008. № 2. С. 42–46.
10. Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2009. № 4(35). С. 102–108.
11. Орлов В. Н. Об одном методе приближенного решения матричных дифференциальных уравнений Риккати // *Вестник МАИ*, 2008. Т. 15, № 5. С. 128–135.
12. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol. 456, 012122. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
13. Орлов В. Н., Ковальчук О. А., Линник Е. П., Линник И. И. Исследование одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018. № 4(79). С. 24–35. doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
14. Орлов В. Н., Леонтьева Т. Ю. Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности подвижной особой точки в комплексной области // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2014. № 4(22). С. 157–166.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 174–186
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1727

MSC: 34M99

On extension of the domain for analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in a complex domain

***V. N. Orlov*[1], *T. Yu. Leontieva*[2]**

[1] National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation.
[2] SAPEI CR "Interregional Competence Centre – Cheboksary Electromechanical College" of the Ministry of Education and Youth Policy of the Chuvash Republic,
9, Lenin av., Cheboksary, 428000, Russian Federation.

Abstract

In previous research the authors have implemented the investigation of one class of nonlinear differential equations of the second order in the neighborhood of variable exceptional point. The authors have proven the following: the existence of variable exceptional point, theorem of the existence and uniqueness of solution in the neighborhood of variable exceptional point. The analytical approximated solution in the neighborhood of variable exceptional point was built. The authors researched the influence of disturbance of variable exceptional point on an approximated solution. The results obtained for the real domain have been extended to the complex domain $|z| < |\tilde{z}^*| \leqslant |z^*|$, where z^* is precise value of variable exceptional point, $\tilde{z}^*$ is approximate value of variable exceptional point. In the present paper, the authors have carried out the investigation of analytical approximate solution of the influence of disturbance of variable exceptional point in the domain $|z| > |\tilde{z}^*| \geqslant |z^*|$, giving special attention to change of direction of movement along the beam towards the origin of coordinates of a complex domain. These researches are actual due to the variable exceptional point pattern (even fractional degree of critical pole). The received results are accompanied by the numerical experiment and complete the investigation of analytical approximated solution of the considered class of nonlinear differential equations in the neighborhood of variable exceptional point depending on the direction of movement along the beam in a complex domain.

Keywords: movable singular point, nonlinear differential equation, analytical approximate solution, neighborhood of variable exceptional point, complex domain, a posteriori estimate.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Orlov V. N., Leontieva T. Yu. On extension of the domain for analytical approximate solution of one class of nonlinear differential equations of the second order in a complex domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 174–186. doi: 10.14498/vsgtu1727 (In Russian).

Authors' Details:
Victor N. Orlov https://orcid.org/0000-0001-7606-5490
Dr. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: orlovvn@mgsu.ru

Tatyana Yu. Leontieva https://orcid.org/0000-0002-4008-7468
Teacher; Dept. of the First Course; e-mail: betty2784@mail.ru

Received: 26th July, 2019 / Revised: 7th February, 2020 /
Accepted: 10th February, 2020 / First online: 10th March, 2020

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. We are grateful to the anonymous reviewer and editor-in-chief of the journal for valuable comments that allowed us to improve the content of the article.

References

1. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings, *Int. J. Solids Struct.*, 1977, no. 13, pp. 93–104. doi: 10.1016/0020-7683(77)90125-1.
2. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems, In: *Moving Boundary Problems*; eds. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, Academic Press, 1978, pp. 129–145.
3. Axford R. *Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion*, Los Alamos Technical Reports, Rept. no. LA-4517, 1970, 39 pp., https://fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00387291.html.
4. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory, *J. Basic Eng.*, 1961, vol. 83, no. 1, pp. 95–108. doi: 10.1115/1.3658902.
5. Shi M. On the solution of a one-dimensional Riccati equation related to risk-sencitive portfolio optimization problem, *Rep. Fac. Sci. Engrg. Saga. Univ. Math.*, 2005, vol. 34, no. 1, pp. 17–24.
6. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions, *E3S Web Conf.*, 2019, vol. 97, 03031. doi: 10.1051/e3sconf/20199703031.
7. Orlov V. N. Features of mathematical modelling in the analysis of console-type structures, *E3S Web Conf.*, 2019, vol. 97, 03036. doi: 10.1051/e3sconf/20199703036.
8. Golubev V. V. *Lektsii po analiticheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on analytical theory of differential equations]. Moscow, Leningrad, GITL, 1950, 436 pp. (In Russian)
9. Orlov V. N. On the approximate solution of first Painlevé equation, *Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva*, 2008, no. 2, pp. 42–46 (In Russian).
10. Orlov V. N. Investigation of approximated solution of Abele equation in the neighborhood of variable exceptional point, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Natural Sciences*, 2009, no. 4(35), pp. 102–108 (In Russian).
11. Orlov V. N. On the one method of approximate solution of matrix Riccati differential equations, *Aerospace MAI Journal*, 2008, vol. 15, no. 5, pp. 128–135 (In Russian).
12. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical modeling of complex structures and nonlinear differential equations with movable points, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 456, 012122. doi: 10.1088/1757-899X/456/1/012122.
13. Orlov V. N., Kovalchuk O. A, Linnik E. P., Linnik I. I. Research into a class of third-order nonlinear differential equations in the domain of analyticity, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Natural Sciences*, 2018, no. 4(79), pp. 24–35 (In Russian). doi: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35.
14. Orlov V. N., Leontieva T. Yu. Construction of the approximate solution of a second-order nonlinear differential equation in the neighborhood of a movable singular point in the complex domain, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2014, no. 4(22), pp. 157–166 (In Russian).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 187–198
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1657

УДК 517.956

Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием

А. Р. Хашимов

Ташкентский финансовый институт,
Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. А. Темура, 60 а.

Аннотация

Рассматривается нелокальная краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа, в котором на границе области значения функции и их производные до второго порядка задаются в виде линейной комбинации, а начальные условия — в нелокальном виде. Доказывается однозначная разрешимость этой задачи. При доказательстве единственности решения задачи использованы метод интегралов энергии и теория квадратичных форм. При построении решения задач использованы теория потенциалов и интегральные уравнения Вольтерра. Изучены некоторые асимптотические свойства фундаментальных решений уравнения.

Ключевые слова: нестационарные уравнения, фундаментальные решения, краевая задача, теория потенциалов, метод интегралов энергии, уравнения третьего порядка, уравнения составного типа, система интегральных уравнений, нелокальная задача.

Получение: 24 октября 2018 г. / Исправление: 22 августа 2019 г. / Принятие: 27 января 2020 г. / Публикация онлайн: 6 апреля 2020 г.

Целью данной работы является исследование уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < t \leqslant T\}$ с краевыми условиями

$$u(x, y, 0) = \alpha u(x, y, T), \quad \alpha = \mathrm{const}, \tag{2}$$

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Хашимов А. Р. Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 187–198. doi: 10.14498/vsgtu1657.

Сведения об авторе

Абдукомил Рисбекович Хашимов ; кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: abdukomil@yandex.ru

$$\begin{aligned}\alpha_1(y,t)u(0,y,t)+\alpha_2(y,t)u_{xx}(0,y,t)=\varphi_1(y,t), \quad u_x(0,y,t)=\varphi_2(y,t),\\ \alpha_3(y,t)u(1,y,t)+\alpha_4(y,t)u_x(1,y,t)+\alpha_5(y,t)u_{xx}(1,y,t)=\varphi_3(y,t),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\beta_1(x,t)u(x,0,t)+\beta_2(x,t)u_{yy}(x,0,t)=\psi_1(x,t), \quad u_y(x,0,t)=\psi_2(x,t),\\ \beta_3(x,t)u(x,1,t)+\beta_4(x,t)u_x(x,1,t)+\beta_5(x,t)u_{xx}(x,1,t)=\psi_3(x,t),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha_2\beta_2\alpha_5\beta_5 \neq 0$;

$$\begin{aligned}&\alpha_1(y,t),\ \alpha_2(y,t),\ \varphi_1(y,t) \in C^{0,1}_{y,t}(\overline{\Omega_1});\\ &\beta_1(y,t),\ \beta_2(y,t),\ \psi_1(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega_3});\\ &\varphi_2(y,t) \in C(\overline{\Omega_1}); \quad \alpha_3(y,t),\ \alpha_4(y,t),\ \alpha_5(y,t),\ \varphi_3(y,t) \in C^{0,1}_{y,t}(\overline{\Omega_2});\\ &\psi_2(x,t) \in C(\overline{\Omega_3}); \quad \beta_3(x,t),\ \beta_4(y,t),\ \beta_5(x,t),\ \psi_3(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega_4}).\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{(x,y,t) : 0<x<1, 0<y<1, t=0\},\\ \Omega_1 &= \{(x,y,t) : x=0, 0<y<1, 0<t\leqslant T\},\\ \Omega_2 &= \{(x,y,t) : x=1, 0<y<1, 0<t\leqslant T\},\\ \Omega_3 &= \{(x,y,t) : 0<x<1, y=0, 0<t\leqslant T\},\\ \Omega_4 &= \{(x,y,t) : 0<x<1, y=1, 0<t\leqslant T\}.\end{aligned}$$

Уравнение (1) является обобщением уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$. Уравнение (6) исследовано в работе [1], в которой построено фундаментальное решение уравнения и разработана теория потенциалов, с помощью которой можно построить регулярное решение краевых задач для уравнения (6).

В работе [2] доказано, что фундаментальное решение уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}U_0(x,y,t;\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} f\Big(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\Big) f\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big), \quad x\neq\xi, y\neq\eta, t>\tau;\\ U_1(x,y,t;\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} f\Big(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\Big) \varphi\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big), \quad x\neq\xi, y>\eta, t>\tau;\\ U_2(x,y,t;\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} \varphi\Big(\frac{x-\xi}{(t-\tau)^{1/3}}\Big) f\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big), \quad x>\xi, y\neq\eta, t>\tau.\end{aligned}$$

Здесь функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ называются функциями Эйри и являются решениями уравнения

$$p''(z) + \frac{z}{3}p(z) = 0.$$

Для функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ справедливы следующие соотношения (см. [3]):

$$p^{(n)}(z) \sim c_n^+ z^{n/2-1/4} \sin\Big(\frac{2}{3}z^{3/2}\Big), \quad \text{при} \quad z\to\infty,$$

$$p^{(n)}(z) \sim c_n^-|z|^{n/2-1/4}\exp\Big(-\frac{2}{3}|z|^{3/2}\Big), \quad \text{при} \quad z \to -\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^{0} f(z)dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_{0}^{\infty} f(z)dz = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_{0}^{\infty} \varphi(z)dz = 0.$$

Здесь c_n^+, c_n^- — постоянные.

Далее нами изучены (см. [3]) свойства фундаментальных решений уравнения (1), которые будут необходимы при построении решений краевых задач типа (1)–(4). Эти свойства фундаментальных решений даются в виде следующих лемм (см. [3, 14]).

Лемма 1. *Пусть* $\alpha(y,t) \in C\left(\overline{\Omega}_2\right)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to 1-0}\int_0^t\int_0^1 U_{0\xi\xi}(x-1,y-\eta;t-\tau)\alpha(\eta,\tau)\,d\eta d\tau = \frac{\pi^2}{3}\alpha(y,t).$$

Лемма 2. *Пусть* $\beta(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_4\right)$. *Тогда*

$$\lim_{y\to 1-0}\int_0^t\int_0^1 U_{0\eta\eta}(x-\xi,y-1;t-\tau)\beta(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = \frac{\pi^2}{3}\beta(x,t).$$

Лемма 3. *Пусть* $\alpha(y,t) \in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$ *удовлетворяет неравенству Гельдера с показателем* $\beta \geqslant 1/4$. *Тогда*

$$\lim_{x\to 0+0}\int_0^t\int_0^1 U_{0\xi\xi}(x-0,y-\eta;t-\tau)\alpha(\eta,\tau)\,d\eta d\tau = -\frac{2\pi^2}{3}\alpha(y,t),$$

$$\lim_{x\to 0+0}\int_0^t\int_0^1 U_{2\xi\xi}(x-0,y-\eta;t-\tau)\alpha(\eta,\tau)\,d\eta d\tau = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $\beta(x,t) \in C\left(\overline{\Omega}_3\right)$ *удовлетворяет неравенству Гельдера с показателем* $\gamma \geqslant 1/4$. *Тогда*

$$\lim_{y\to 0+0}\int_0^t\int_0^1 U_{0\eta\eta}(x-\xi,y-0;t-\tau)\beta(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = -\frac{2\pi^2}{3}\beta(x,t),$$

$$\lim_{y\to 0+0}\int_0^t\int_0^1 U_{1\eta\eta}(x-\xi,y-0;t-\tau)\beta(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = 0.$$

Лемма 5. *Пусть* $\alpha(y,t) \in C\left(\overline{\Omega}_1\right)$. *Тогда*

$$\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{J(y,t)}{(z-t)^{1/3}}\,dt = \frac{\pi^2 f'(0)}{\sqrt{3}}\alpha(y,z),$$

где $J(y,t) = \displaystyle\int_0^t\int_0^1 \frac{f'(0)}{(t-\tau)} f\Big(\frac{y-\eta}{(t-\tau)^{1/3}}\Big)\alpha(\eta,\tau)\,d\eta d\tau.$

Отметим, что фундаментальные решения уравнения (1) и линейного уравнения Захарова—Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = 0 \tag{7}$$

обладают идентичными асимптотическими свойствами на бесконечности [4–8]. Уравнение Захарова—Кузнецова (7) является одним из вариантов обобщения уравнение Кортевега—де Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустические волновые процессы в плазме [5, 8].

В настоящее время часто возникают задачи, связанные с исследованием уравнений в частных производных, не принадлежащих ни к одному из классических типов. Поэтому в последние годы уделяется большое внимание исследованию такого рода неклассических уравнений, которые еще мало изучены [3–14].

Проведем исследование задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть* $e^{mT}-\alpha^2 \geqslant 0$, $m<0$, *и выполнены следующие условия*:

$$a)\quad \alpha_5\neq 0,\quad 2\alpha_3\alpha_5-\alpha_4^2\geqslant 0,\quad \frac{\alpha_3}{\alpha_5}+\frac{1}{2}\geqslant 0,\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\leqslant 0;$$

$$b)\quad \beta_5\neq 0,\quad 2\beta_3\beta_5-\beta_4^2\geqslant 0,\quad \frac{\beta_3}{\beta_5}+\frac{1}{2}\geqslant 0,\quad \frac{\beta_1}{\beta_2}\leqslant 0.$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Допустим, что существует два решения задачи (1)–(4). Тогда, вводя обозначение $v(x,y,t)=u_1(x,y,t)-u_2(x,y,t)$, получаем относительно функции $v(x,y,t)$ следующую задачу с однородным краевым условием:

$$L(v)\equiv v_{xxx}+v_{yyy}-v_t=0,$$

$$v(x,y,0)=\alpha v(x,y,T),\quad \alpha=\mathrm{const},$$

$$\begin{aligned}&\alpha_1(y,t)v(0,y,t)+\alpha_2(y,t)v_{xx}(0,y,t)=0,\qquad v_x(0,y,t)=0,\\&\alpha_3(y,t)v(1,y,t)+\alpha_5(y,t)v_x(1,y,t)+\alpha_5(y,t)v_{xx}(1,y,t)=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\beta_1(x,t)v(x,0,t)+\beta_2(x,t)v_{yy}(x,0,t)=0,\qquad v_y(x,0,t)=0,\\&\beta_3(x,t)v(x,1,t)+\beta_4(x,t)v_y(x,1,t)+\beta_5(x,t)v_{yy}(x,1,t)=0.\end{aligned}$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^T L(v)v(x,y,t)e^{mt}\,dxdydt=0.$$

Интегрируя его по частям, получим

$$-\int_0^T\int_0^1\Big(\frac{\alpha_3}{\alpha_5}v^2(1,y,t)+\frac{\alpha_4}{\alpha_5}v(1,y,t)v_x(1,y,t)+\frac{1}{2}v_x^2(1,y,t)\Big)e^{mt}\,dydt-$$
$$-\int_0^T\int_0^1\Big(\frac{\beta_3}{\beta_5}v^2(x,1,t)+\frac{\beta_4}{\beta_5}v(x,1,t)v_y(x,1,t)+\frac{1}{2}v_y^2(x,1,t)\Big)e^{mt}\,dxdt-$$
$$-\int_0^T\int_0^1\Big(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\Big)v^2(0,y,t)e^{mt}\,dydt-\int_0^T\int_0^1\Big(-\frac{\beta_1}{\beta_2}\Big)v^2(x,0,t)e^{mt}\,dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left(e^{mT}-\alpha^2\right)v^2(x,y,T)\,dxdy+\frac{m}{2}\int_0^T\int_0^1\int_0^1 v^2(x,y,t)e^{mt}\,dxdydt=0.$$

Отсюда в силу условий теоремы квадратичная форма $Q=\frac{\alpha_3}{\alpha_5}v^2+\frac{\alpha_4}{\alpha_5}vv_x+\frac{1}{2}v_x^2$ будет положительно определенной. Следовательно, можно записать

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_5}v^2+\frac{\alpha_4}{\alpha_5}vv_x+\frac{1}{2}v_x^2\equiv\lambda_1v^2+\lambda_2v_x^2.$$

Здесь $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ — характеристические числа матрицы квадратичной формы Q. Аналогичный вывод можно сделать для $\frac{\beta_3}{\beta_5}v^2+\frac{\beta_4}{\beta_5}vv_y+\frac{1}{2}v_y^2$. Тогда в силу условий теоремы имеем $v=0$ в Ω, и в силу непрерывности функции $v(x,y,t)$ в $\overline{\Omega}$ получаем $v(x,y,t)=0$ в $\overline{\Omega}$. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5) *и условия теоремы* 1. *Тогда задача* (1)–(4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Решение задачи (1)–(4) построим методом потенциалов. Будем его искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}u(x,y,t)=&\int_0^1\int_0^1U_0(x,y,t;\xi,\eta,0)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\\&+\int_0^t\int_0^1U_0(x,y,t;0,\eta,\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^1U_0(x,y,t;1,\eta,\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1U_2(x,y,t;0,\eta,\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^1U_0(x,y,t;\xi,0,\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1\big(U_0(x,y,t;\xi,1,\tau)q_2(\xi,\tau)+U_1(x,y,t;\xi,0,\tau)q_3(\xi,\tau)\big)\,d\xi d\tau.\end{aligned}$$

Здесь $u_0(x,y)\equiv u(x,y,0)$; $p_i(\eta,\tau)$, $q_i(\xi,\tau)$ — пока неизвестные функции.

Теперь, удовлетворяя условию (2), первому и третьему условиям из (3) и (4), а также используя леммы 1, 2, 3, 4, из (7) получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}u_0(x,y)=&\int_0^1\int_0^1U_0(x-\xi,y-\eta,T;)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\\&+\int_0^t\int_0^1U_0(x-0,y-\eta,T-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1U_0(x-1,y-\eta,T-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1U_2(x-0,y-\eta,T-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1U_1(x-\xi,y-0,T-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^1U_0(x-\xi,y-1,T-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+\end{aligned}$$

$$+\int_0^t\int_0^1 U_0(x-\xi,y-0,T-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (8)$$

$$\varphi_1(y,t)+\frac{2\pi^2}{3}\alpha_2(y,t)p_1(y,t)=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-\xi,y-\eta,t)+\alpha_2U_{0xx}(0-\xi,y-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)+\alpha_1U_2(0-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\big)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-1,y-\eta,t-\tau)+\alpha_2U_{0xx}(0-1,y-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_1(0-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_2U_{1xx}(0-\xi,y,t-\tau)\big)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-\xi,y-1,t-\tau)+\alpha_2U_{0xx}(0-\xi,y-1,t-\tau)\big)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_1U_0(0-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_2U_{0xx}(0-\xi,y,t-\tau)\big)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (9)$$

$$\varphi_3(y,t)-\frac{\pi^2}{3}\alpha_5(y,t)p_2(y,t)=\int_0^1\int_0^1\alpha_3U_0(1-\xi,y-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\big(\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-\eta,t)+\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-1,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-1,y-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-0,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-0,y-\eta,t-\tau)\big)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{0xx}(1-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_2(1-0,y-\eta,t-\tau)+\alpha_4U_{2x}(1-0,y-\eta,t-\tau)\big)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{2xx}(1-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_1(1-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_4U_{1x}(1-\xi,y-0,t-\tau)\big)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{1xx}(1-\xi,y-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-\xi,y-1,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-1,t-\tau)\big)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\big(\alpha_3U_0(1-\xi,y-0,t-\tau)+\alpha_4U_{0x}(1-\xi,y-0,t-\tau)\big)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\alpha_5U_{0xx}(1-\xi,y-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (10)$$

$$\psi_1(y,t)+\frac{2\pi^2}{3}\beta_2(x,t)q_1(x,t)=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-\xi,0-\eta,t)+\beta_2U_{0yy}(x-\xi,0-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-1,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-1,0-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-0,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-0,0-\eta,t-\tau)\big)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_2(x-0,0-\eta,t-\tau)+\beta_2U_{2yy}(x-0,0-\eta,t-\tau)\big)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_1U_1(x-\xi,0-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_1U_0(x-\xi,0-1,t-\tau)+\beta_2U_{0yy}(x-\xi,0-1,t-\tau)\big)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_1U_0(x-\xi,0-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (11)$$

$$\psi_3(y,t)-\frac{\pi^2}{3}\beta_5(x,t)q_2(x,t)=$$
$$=\int_0^1\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-\xi,1-\eta,t)+\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-\eta,t)\big)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-\xi,1-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-1,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-1,1-\eta,t-\tau)\big)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-1,1-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-0,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-0,1-\eta,t-\tau)\big)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-0,1-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_2(x-0,1-\eta,t-\tau)+\beta_4U_{2y}(x-0,1-\eta,t-\tau)\big)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{2yy}(x-0,1-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_1(x-\xi,1-0,t-\tau)+\beta_4U_{1y}(x-\xi,1-0,t-\tau)\big)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{1yy}(x-\xi,1-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_3U_0(x-\xi,1-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\quad+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\ +$$
$$+\int_0^t\int_0^1\big(\beta_3U_0(x-\xi,1-0,t-\tau)+\beta_4U_{0y}(x-\xi,1-0,t-\tau)\big)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1\beta_5U_{0yy}(x-\xi,1-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.\quad(12)$$

В этой системе первое уравнение является уравнением второго рода фредгольмовского типа, а остальные уравнения относятся к уравнениям второго рода вольтерровского типа.

Теперь, удовлетворяя второе условие из (3) и (4), получаем уравнения, относящиеся интегральным уравнением первого рода вольтерровского типа:

$$\varphi_2(x,y)=\int_0^1\int_0^1U_{0x}(0-\xi,y-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-0,y-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-1,y-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{2x}(0-0,y-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{1x}(0-\xi,y-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-\xi,y-1,t-\tau)q_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0x}(0-\xi,y-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,\quad(13)$$

$$\psi_2(x,y)=\int_0^1\int_0^1U_{0y}(x-\xi,0-\eta,t)u_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0y}(x-0,0-\eta,t-\tau)p_1(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1U_{0y}(x-1,0-\eta,t-\tau)p_2(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 U_{2y}(x-0,0-\eta,t-\tau)p_3(\eta,\tau)\,d\eta d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 U_{1y}(x-\xi,0-0,t-\tau)q_3(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 U_{0y}(x-\xi,0-1,t-\tau)\gamma_2(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^1 U_y(x-\xi,0-0,t-\tau)q_1(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \quad (14)$$

Чтобы свести эти уравнения к уравнению второго рода, используем лемму 5, т.е. применяем преобразование Абеля. Тогда уравнения (13) и (14) сведутся к интегральным уравнениям второго рода вольтерровского типа.

Так как в системе уравнений, состоящих из уравнений (9)–(14),

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{2\pi^2}{3}\alpha_2(y,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\pi^2}{3}\alpha_5(y,\eta) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi^2}{3}\beta_2(x,\xi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi^2}{3}\beta_5(x,\xi) & 0\\ -\frac{\pi^2}{\sqrt3}f'(0) & 0 & -\frac{\pi^2}{\sqrt3}\varphi'(0) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi^2}{\sqrt3}f'(0) & 0 & -\frac{\pi^2}{\sqrt3}\varphi'(0)\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{4\pi^2}{243}\alpha_2\beta_2\alpha_5\beta_5\big(\varphi'(0)\big)^2\neq 0,$$

ее можно записать в следующем виде:

$$\mu_i(z,t)=\int_0^t\int_0^1 K_i(z,t;\varsigma,\tau)\mu_i(\varsigma,\tau)d\varsigma d\tau+\Phi_i(z,t;u_0),\quad i=\overline{1,6}. \quad (15)$$

Здесь

$$\mu_1(z,t)\equiv p_{1t}(x,t),\quad \mu_2(z,t)\equiv p_2(x,t),\quad \mu_3(z,t)\equiv p_{3t}(x,t),$$
$$\mu_4(z,t)\equiv q_{1t}(y,t),\quad \mu_5(z,t)\equiv q_2(y,t),\quad \mu_6(z,t)\equiv q_{3t}(y,t),$$
$$|K_i(z,t;\varsigma,\tau)|\leqslant C\cdot(t-\tau)^{-11/12},\qquad \Phi_i(z,t)\in C^1(\overline{D}).$$

Так как система уравнений (15) является системой уравнения вольтерровского типа, она имеет единственное решение.

Теперь, воспользовавшись ее решением, из уравнения (8) получаем интегральные уравнения второго рода фредгольмовского типа:

$$u_{0x}(x,y)=\int_0^1\int_0^1 K_1(x,y;\xi,\eta)u_{0\xi}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\Phi_0(x,y),$$
$$u_{0y}(x,y)=\int_0^1\int_0^1 K_1(x,y;\xi,\eta)u_{0\eta}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\Phi_1(x,y).$$

Здесь в силу свойств функций Эйри имеем

$$|K_1(x,y;\xi,\eta)|\leqslant C\cdot\big((x-\xi)(y-\eta)\big)^{-1/4},\quad \Phi_0(x,y),\ \Phi_1(x,y)\in C^1(\overline{D}).$$

Теперь в силу теоремы 1 решение этого интегрального уравнения существует. Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение. □

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa — Classe di Scienze, Serie 3*, 1959. vol. 13, no. 2. pp. 163–203.
2. Абдиназаров С., Собиров З. А. О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве / *Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики*: Тр. межд. научн. конф. Ташкент, 2004. С. 12–13.
3. Хашимов А. Р. О некоторых свойствах фундаментальных решений нестационарного уравнения нечетного порядка составного типа в многомерных областях // *Докл. АН РУз*, 2010. №5. С. 6–9.
4. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова // *Дифференц. уравнения*, 1995. Т. 31, №6. С. 1070–1081.
5. Попов С. П. Особенности численного моделирования двухсолитонных решений уравнения Захарова–Кузнецова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1999. Т. 39, №10. С. 1749–1757.
6. Khashimov A. R. Some properties of the fundamental solutions of nonstationary third order composite type equation in multidimensional domains // *J. Nonlin. Evol. Equ. Appl.*, 2013. no. 1. pp. 29–38.
7. Хашимов А. Р., Якубов С. О некоторых свойствах решений задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // *Уфимск. матем. журн.*, 2014. Т. 6, №4. С. 139–148.
8. Фаминский А. В. О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова–Кузнецова // *Современная математика и ее приложения*, 2006. Т. 38. С. 135–148.
9. Кожанов А. И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск: НГУ, 1990. 130 с.
10. Фаминский А. В., Опритова М. А. О задаче Коши для уравнения Кавахары / *Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям* (Москва, 14–21 августа, 2011). Часть 1 / СМФН, Т. 45. М.: РУДН, 2012. С. 132–150.
11. Катсон В. М. Уединенные волны двумерного модифицированного уравнения Кавахары // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2008. Т. 16, №6. С. 76–85.
12. Сангаре К., Фаминский А. В. Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары // *Матем. заметки*, 2009. Т. 85, №1. С. 98–109. doi: 10.4213/mzm4307.
13. Фаминский А. В., Кувшинов Р. В. Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары // *УМН*, 2011. Т. 66, №4(400). С. 187–188. doi: 10.4213/rm9427.
14. Хашимов А. Р. Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа // *Матем. заметки СВФУ*, 2017. Т. 24, №4. С. 76–86. doi: 10.25587/SVFU.2018.4.11318.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 187–198
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) **doi:** https://doi.org/10.14498/vsgtu1657

MSC: 35M10

The nonlocal problem for a non-stationary third order composite type equation with general boundary condition

A. R. Khashimov

Tashkent Financial Institute,
60 a, Amir Temur str., Tashkent, 100000, Uzbekistan.

Abstract

We consider a nonlocal boundary value problem for non-stationary composite type equation of the third order. The values of function and its derivatives up to the second order on the boundary are given as a linear combination. The initial conditions are nonlocal. We prove the unique solvability for this problem. In proving the problem solution uniqueness we use the method of energy integrals and the theory of quadratic forms. For the problem solution construction we use the potential theory and Volterra integral equations. Some asymptotic properties of the fundamental solutions of the equation are studied.

Keywords: non-stationary equations, fundamental solutions, boundary value problem, potential theory, energy integral method, third order equations, composite type equations, system of integral equations, nonlocal problem.

Received: 24th October, 2018 / Revised: 22nd August, 2019 /
Accepted: 27th January, 2020 / First online: 6th April, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Cattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa — Classe di Scienze, Serie 3*, 1959, vol. 13, no. 2, pp. 163–203.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Khashimov A. R. The nonlocal problem for a non-stationary third order composite type equation with general boundary condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 187–198. doi: 10.14498/vsgtu1657 (In Russian).

Author's Details:
Abdukomil R. Khashimov; Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor;
e-mail: abdukomil@yandex.ru

2. Abdinazarov S., Sobirov Z. A. On fundamental solutions of an equation with multiple third-order characteristics in a multidimensional space, In: *Differential Equations with Partial Derivatives and Related Problems of Analysis and Informatics*, Proc. Int. Sci. Conf.. Tashkent, 2004, pp. 12–13 (In Russian).
3. Khashimov A. R. On some properties of fundamental solutions of a non-stationary oddorder equation of composite type in multidimensional domains, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 2010, no. 5, pp. 6–9 (In Russian).
4. Faminskij A. V. The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation, *Differ. Equ.*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 1002–1012.
5. Popov S. P. Numerical simulation of two-soliton solutions to the Zakharov–Kuznetsov equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1999, vol. 39, no. 10, pp. 1679–1686.
6. Khashimov A. R. Some properties of the fundamental solutions of nonstationary third order composite type equation in multidimensional domains, *J. Nonlin. Evol. Equ. Appl.*, 2013, no. 1, pp. 29–38.
7. Khashimov A. R., Yakubov S. On some properties of Cauchy problem for non-stationary third order composite type equation, *Ufa Math. J.*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 135–144. `doi: 10.13108/2014-6-4-135`.
8. Faminskii A. V. Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov–Kuznetsov equation, *J. Math. Sci.*, 2007, vol. 147, no. 1, pp. 6524–6537. `doi: 10.1007/s10958-007-0491-9`.
9. Kozhanov A. I. *Boundary Value Problems for Mathematical Physics Equations of Odd Order*. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1990, 130 pp. (In Russian)
10. Faminskii A. V., Opritova M. A. On the initial-value problem for the Kawahara equation, *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 201, no. 5, pp. 614–633. `doi: 10.1007/s10958-014-2015-8`.
11. Katson V. M. Solitary waves of two-dimensional modified Kawahara equation, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelinejn. Din.*, 2008, vol. 16, no. 6, pp. 76–85 (In Russian).
12. Sangare K., Faminskii A. V. Weak solutions of a mixed problem in a half-strip for a generalized Kawahara equation, *Math. Notes*, 2009, vol. 85, no. 1, pp. 90–100. `doi: 10.1134/S000143460901009X`.
13. Faminskii A. V., Kuvshinov R. V. Initial-boundary value problems for the generalized Kawahara equation, *Russian Math. Surveys*, 2011, vol. 66, no. 4, pp. 819–821. `doi: 10.1070/RM2011v066n04ABEH004760`.
14. Khashimov A. R. On the second boundary value problem for nonstationary third-order equations of mixed type, *Math. Notes of NEFU*, 2017, vol. 24, no. 4, pp. 76–86 (In Russian). `doi: 10.25587/SVFU.2018.4.11318`.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 1. С. 199–208
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) doi: https://doi.org/10.14498/vsgtu1730

УДК 539.3

Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 2. Неоднородное анизотропное тело

В. В. Стружанов

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Ранее, в сообщении 1, были рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи теории упругости для однородного изотропного тела. Полученные результаты распространены на краевые задачи для общего случая неоднородного анизотропного тела. Показано, что найденные интегро-дифференциальные уравнения также являются уравнениями фредгольмовского типа. Доказано существование и единственность их решения. Определены условия, при которых решение можно найти методом последовательных приближений. Приведен пример расчета остаточных напряжений в неоднородном закаленном цилиндре.

Ключевые слова: вторая краевая задача, неоднородное анизотропное тело, интегро-дифференциальное уравнение, спектральный радиус, последовательные приближения, уравнения Фредгольма второго рода, сходимость итераций.

Получение: 30 июля 2019 г. / Исправление: 27 января 2020 г. /
Принятие: 10 февраля 2020 г. / Публикация онлайн: 12 марта 2020 г.

Введение. В данной работе, исходя из результатов, изложенных в первом сообщении [1], показана методика сведения уравнений второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела к специальному интегро-дифференциальному уравнению, которое относится к классу уравнений Фредгольма второго рода. Разработан метод определения спектрального радиуса полученного уравнения и определены условия, при которых возможно найти решение методом последовательных приближений. В качестве примера решена задача расчета остаточных напряжений в цилиндре, являющимся после закалки неоднородным телом с разными характеристиками мартенсита и аустенита.

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Стружанов В. В. Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 2. Неоднородное анизотропное тело // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 199–208. doi: 10.14498/vsgtu1730.

Сведения об авторе
Валерий Владимирович Стружанов https://orcid.org/0000-0002-3669-2032
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. микромеханики материалов; e-mail: stru@imach.uran.ru

1. Интегро-дифференциальное уравнение второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела. Система уравнений второй краевой задачи линейной теории упругости, записанная в инвариантной форме, в самом общем случае имеет вид [2,3]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{g} = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{def} \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \quad \boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — соответственно симметричные тензоры второго ранга напряжений и деформаций; $\boldsymbol{v}$ — вектор перемещений; $\boldsymbol{v}^\Gamma$ — значение вектора перемещений на границе Γ тела V; $\boldsymbol{C}$ — неоднородный анизотропный тензор четвертого ранга модулей упругости; $\boldsymbol{g}$ — вектор объемных сил; ∇ — набла-оператор Гамильтона [2], $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — тензор первоначальных деформаций свободных от связей элементов тела V, возникающих при нагреве, фазовых превращениях и т. п. [4]. Первая группа уравнений в системе (1) — уравнения равновесия, вторая группа — соотношения Коши, третья — закон Гука. Точкой в уравнениях равновесия обозначено скалярное произведение тензоров [5].

Подставляя теперь закон Гука в уравнения равновесия и заменяя деформации соотношениями Коши, получаем систему уравнений, которую в инвариантной форме можно представить уравнением в перемещениях

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*, \quad \boldsymbol{v}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma. \tag{2}$$

Произведем замену $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^*$, где $\boldsymbol{u}$ — неизвестная вектор-функция, равная нулю на границе Γ, а $\boldsymbol{u}^*$ — известная вектор-функция, на границе равная $\boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{v}^\Gamma$ [1]. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{C} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g} + \nabla \cdot (\boldsymbol{C} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}^*) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^*$ — формальный вектор псевдонапряжений. Уравнение (3) будем рассматривать как некоторое отображение пространства $W^2_{2,0}(V)$ в пространство $L_2(V)$ ($u \in W^2_{2,0}(V)$, $p \in L_2(V)$). Здесь $L_2(V)$ — вещественное полное сепарабельное гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых интегрируемы с квадратом, а $W^2_{2,0}(V)$ — вещественное полное сепарабельное пространство вектор-функций, компоненты которых обращаются в нуль на Γ и принадлежат $L_2(V)$ вместе со своими обобщенными производными до второго порядка включительно [6,7].

Выделим в уравнении (3) оператор Δ. Для этого представим тензор $\boldsymbol{C}$ в виде суммы $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K}$, где $\boldsymbol{A}$ — некоторый однородный изотропный тензор четвертого ранга. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$-\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{0}.$$

Преобразовывая первое слагаемое в уравнение Навье—Ляме [1,8], имеем

$$-\left[\mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right] = \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{u}|_\Gamma = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме однородной изотропной среды, свойства которой определяются тензором модулей упругости $\boldsymbol{A}$. Далее используем равенство [9] $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ и преобразуем уравнение (4) к виду

$$-(\Delta \boldsymbol{u} + l \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}) - mD\boldsymbol{u} = \boldsymbol{t}, \tag{5}$$

в котором $l = (\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}$, $m = (\lambda + 2\mu)^{-1}$, $D\boldsymbol{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot\cdot \operatorname{def} \boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{t} = m\,\boldsymbol{p}$. Умножая теперь обе части уравнения (5) на оператор $(-\Delta^{-1})$ [1,10], получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\boldsymbol{u} = H\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{f} = \Delta^{-1}\boldsymbol{t} \in W^2_{2,0}(V)$, $\boldsymbol{t} \in L_2(V)$, $\boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V)$, $H\boldsymbol{u} = -\Delta^{-1}(l \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} + {}$ $+ mD\boldsymbol{u})$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \in L_2(V)$, $\Delta^{-1} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V)$, $D\boldsymbol{u} \in L_2(V)$, $\Delta^{-1}D\boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V)$. Оператор H действует из $W^2_{2,0}(V)$ в $W^2_{2,0}(V)$ и является вполне непрерывным [11–14]. Таким образом, уравнение (6) есть уравнение Фредгольма второго рода [15].

2. Спектральный радиус оператора *H* и решения второй краевой задачи. Для уравнения (6) справедлива альтернатива Фредгольма [15]. Поэтому вопрос существования и единственности решения, а также метода решения сводится к проблеме собственных чисел оператора H, расположение которых определяется его спектральным радиусом $\rho(H)$. Определение этого радиуса, аналогично работе [1], связано с рассмотрением уравнения,

$$B\boldsymbol{u} - k(-\Delta\boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V), \quad k \in (-\infty, +\infty), \tag{7}$$

где $B\boldsymbol{u} = -(\Delta\boldsymbol{u} + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}) - mD\boldsymbol{u}$ — оператор теории упругости. В случае закрепленной границы он положительно определенный и имеет дискретный спектр [11]. Таков же и оператор $(-\Delta)$ [11]. Тогда собственные числа уравнения (7) вещественные, положительные и расположены в отрезке $[k_1, k_2]$. Здесь

$$k_1 = \inf \frac{(B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{(-\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} > 0, \quad k_2 = \sup \frac{(B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}{(-\Delta\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})} > 0, \quad \boldsymbol{u} \in W^2_{2,0}(V).$$

Круглыми скобками обозначены скалярные произведения в $L_2(V)$.

Применяя оператор $(-\Delta^{-1})$ к равенству (7), получаем эквивалентное уравнение

$$\lambda\boldsymbol{u} = H\boldsymbol{u}, \quad \lambda = 1 - k, \quad k \in [k_1, k_2].$$

Собственные числа оператора H лежат в отрезке $1 - k_1 \geqslant 1 - k \geqslant 1 - k_2$. Поскольку спектральный радиус вполне непрерывного оператора совпадает с наибольшим по модулю собственным числом,

$$\rho(H) = \max\bigl\{|1 - k_1|, |1 - k_2|\bigr\}.$$

Отсюда $\rho(H) < 1$, когда

$$k_2 < 2. \tag{8}$$

В этом случае оператор H является оператором сжатия [16] и решение уравнения (6) представимо рядом Неймана

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n=0}^{\infty} H^n \boldsymbol{f},$$

который сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, сколь угодно близким к $\rho(H)$ [16].

Отметим, что решение уравнения (6) и, следовательно, второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела существует и единственно вне зависимости от выполнения неравенства (8), так как $\lambda = 1$ не является собственным числом оператора H. Если предположить обратное, то $1 - k_1 \geqslant 1$ и тогда $k_1 \leqslant 0$, что невозможно.

3. Остаточные напряжения в закаленном неоднородном цилиндре. В качестве примера определим остаточные напряжения, возникающие в длинном круговом цилиндре после его закалки, в результате которой часть зерен аустенита в приповерхностных слоях переходит в мартенситное состояние. Пусть P — объемное содержание мартенсита:

$$P = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant r \leqslant a; \\ P_0 \frac{(r-a)}{(b-a)}, & a \leqslant r \leqslant b, \end{cases}$$

где b — радиус основания цилиндра, $(b-a)$ — глубина закалки, $P_0 \leqslant 1$ — объемное содержание мартенсита в поверхностном слое. Таким образом, после закалки цилиндр состоит из двух изотропных компонентов, каковыми являются аустенит и мартенсит. Так как зерна мартенсита имеют несколько больший объем [17], материальные элементы в приповерхностных слоях находятся в стесненном состоянии, что вызывает появление остаточных (собственных) напряжений.

Компоненты первоначальных (собственных) деформаций свободных от связей элементов определяются следующими соотношениями [1]:

$$\varepsilon^*_{ij} = \alpha P \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, α — параметр свободной структурной деформации мартенсита [17]. В отличие от работы [1] считаем, что постоянные упругости мартенсита и аустенита различны, но достаточно близки и разница между ними находится в пределах 10 %:

$$|C^{\mathrm{I}}_{1111} - C^{\mathrm{II}}_{1111}| < 0.1 C^{\mathrm{II}}_{1111}, \quad |C^{\mathrm{I}}_{1122} - C^{\mathrm{II}}_{1122}| < 0.1 C^{\mathrm{II}}_{1122}. \tag{9}$$

Эффективный тензор модулей упругости (макромодулей) материала, полученного после закалки, с достаточной степенью точности можно считать таким:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} P + \boldsymbol{C}^{\mathrm{II}}(1 - P),$$

где $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ и $\boldsymbol{C}^{\mathrm{II}}$ — однородные изотропные тензоры четвертого ранга соответственно мартенсита и аустенита. Кроме того, в данной задаче полагаем, что $C^{\mathrm{I}}_{1212} = C^{\mathrm{II}}_{1212}$.

Деформации ϵ^*_{ij} не удовлетворяют условиям совместности. Поэтому в теле реализуются совместные деформации $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'^*_{ij} + \varepsilon''_{ij}$. Здесь деформации ε''_{ij} связаны с собственными напряжениями σ''_{ij} законом Гука [1], который в инвариантной форме имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma}'' = \boldsymbol{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}'' = \boldsymbol{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}^*). \tag{10}$$

Стесненный компонент расположен симметрично относительно оси цилиндра. Поэтому точки поверхности получают постоянные по величине радиальные перемещения:

$$v_r^{\Gamma} = v_r^0 = \text{const}.$$

Таким образом, задача по определению закалочных напряжений осесимметричная и цилиндр находится в плоском деформированном состоянии:

$$v = v_r(r); \quad \varepsilon'_{11} = \varepsilon'_r(r), \quad \varepsilon'_{22} = \varepsilon'_\theta(r), \quad \varepsilon'_{33} = \varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{13} = \varepsilon'_{23} = 0;$$

$$\varepsilon^*_{11} = \varepsilon^*_{22} = \varepsilon^*_{33} = \alpha P(r), \quad \varepsilon^*_{12} = \varepsilon^*_{13} = \varepsilon^*_{23} = 0;$$

$$\sigma''_{11} = \sigma''_r(r), \quad \sigma''_{22} = \sigma''_\theta(r), \quad \sigma''_{33} = \sigma''_{12} = \sigma''_{13} = \sigma''_{23} = 0.$$

Соотношения Коши и уравнения равновесия определены следующими формулами [4]:

$$\varepsilon'_r = \frac{dv_r}{dr}, \quad \varepsilon'_\theta = \frac{v_r}{r}; \quad \frac{d\sigma''_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma''_r - \sigma''_\theta) = 0.$$

Тогда с учетом замены $v_r = u_r + u_r^* = u + v_r^0 r b^{-1}$ $(u_r(b) = 0)$ и представления $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{II}} + (\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{II}})P$ уравнение (5) после некоторых преобразований принимает вид

$$\begin{gathered} \Delta u + l \operatorname{rot}\operatorname{rot} u + h \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u) = h_1 \operatorname{grad} P + h_2 \operatorname{grad} P^2, \\ u(b) = 0 \quad (u = u_r(r)). \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$l = \frac{C^{\mathrm{II}}_{1122} + C^{\mathrm{II}}_{1212}}{C^{\mathrm{II}}_{1111}}, \quad h = \frac{C^{\mathrm{I}}_{1111} - C^{\mathrm{II}}_{1111}}{C^{\mathrm{II}}_{1111}}, \quad h_1 = h_3 - h_4 v_r^0, \quad h_2 = 3h\alpha,$$

$$h_3 = \frac{(C^{\mathrm{II}}_{1111} + 2C^{\mathrm{II}}_{1122})\alpha}{C^{\mathrm{II}}_{1111}}, \quad h_4 = \frac{2h}{b}.$$

Уравнение (11) эквивалентно интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} u = -l\Delta^{-1} \operatorname{rot}\operatorname{rot} u + h - h\Delta^{-1} \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u) + {} \\ + h_1 \Delta^{-1} \operatorname{grad} P + h_2 \Delta^{-1} \operatorname{grad} P^2, \quad u(b) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\Delta^{-1} X = \int_V GX\,dV$; V — круг радиуса b; G — функция Грина для круга [10].

Проверим выполнение условия (8). Наибольшее собственное число уравнения (7) в данном примере есть

$$\begin{aligned} k_2 = \sup \frac{\big(-\Delta u - l \operatorname{rot}\operatorname{rot} u - h \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u), u\big)}{(-\Delta u, u)} = {} \\ = \sup\Big[1 + l\frac{(-\operatorname{rot}\operatorname{rot} u, u)}{(-\Delta u, u)} + h\frac{-\operatorname{grad}(P \operatorname{div} u)}{(-\Delta u, u)}\Big]. \end{aligned}$$

Далее для произвольного $u \in W^2_{2,0}(V)$, используя формулу Остроградского—Гаусса, получаем следующие неравенства:

$$\big(-\operatorname{grad}(P \operatorname{div} u), u\big) = -\int_V u \operatorname{grad}(P \operatorname{div} u)\, dV = \int_V P(\operatorname{div} u)^2 dV \geqslant 0, \quad (13)$$

$$\int_V P(\operatorname{div} u)^2 dV \leqslant \int_V (\operatorname{div} u)^2 dV = (-\operatorname{grad}\operatorname{div} u, u), \quad P \leqslant 1. \quad (14)$$

Наконец, применяя неравенство

$$0 \geqslant (-\operatorname{rot}\operatorname{rot} u, u) \geqslant -(-\Delta u, u),$$

полученное в работе [1], с учетом неравенств (13) и (14) находим, что $k_2 \leqslant$ $\leqslant 1 + h$. В силу неравенства (9) величина $|h| < 1$ и условие (8) выполняется. Следовательно, ряд Неймана для уравнения (12) сходится.

Следовательно, если взять достаточное число членов ряда Неймана, то можно получить значение перемещения v_r, зависящее от v_r^0. Например, когда величина h мала, можно ограничиться начальным приближением

$$u_r^0 = h_1 \Delta^{-1} \operatorname{grad} P + h_2 \Delta^{-1} \operatorname{grad} P^2.$$

Тогда радиальные перемещения будут определяться соотношением

$$v_r = u_r^* + v_r^0 r b^{-1}.$$

В области $a \leqslant r \leqslant b$ имеем

$$v_r = u_r^0 \frac{r}{b} + \frac{(v_r^0 h_4 - h_3)}{b-a} P_0 \Big[\frac{r}{3}(b-r) - \frac{a^3}{6b^2 r}(b^2 - r^2)\Big] + \\ + \frac{2h_2 P_0^2}{(b-a)^2}\Big[\frac{b^2 r}{8} - \frac{r^3}{8} + \frac{ar^2}{3} - \frac{bar}{3} + \frac{a^4}{24r} - \frac{a^4 r}{24b^2}\Big]. \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в соотношения Коши, а затем полученные деформации в закон Гука (10) для случая плоской деформации, и вспоминая, что цилиндр ненагружен, т.е. $\sigma_r''(b) = 0$, получаем значение v_r^0.

После вычисления радиальных перемещений уже не составляет труда определение остаточных (закалочных) напряжений с использованием соотношений Коши и определяющих соотношений (10) для случая плоской деформации. Отметим, что при равенстве свойств аустенита и мартенсита из данного решения получаем распределение напряжений, представленных в работе [1].

Заключение. Изложена процедура приведения второй краевой задачи теории упругости для неоднородного анизотропного тела к интегро-дифференциальному уравнению фредгольмовского типа. Определены условия сходимости итерационного метода решения такой задачи. Приведенная методика применена к задаче об остаточных напряжениях в длинном неоднородном цилиндре, материал которого состоит из зерен аустенита и мартенсита, имеющих различные свойства.

Конкурирующие интересы. У меня нет конкурирующих интересов.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Библиографический список

1. Стружанов В. В. Интегро-дифференциальные уравнения второй краевой задачи линейной теории упругости. Сообщение 1. Однородное изотропное тело // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 496–506. doi: 10.14498/vsgtu1555. [Struzhanov V. V. Integro-differential equations the second boundary value problem of linear elasticity theory. Message 1. Homogeneous isotropic body // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017. vol. 21, no. 3. pp. 496–506 (In Russian)].
2. Лурье А. И. *Теория упругости.* М.: Наука, 1970. 939 с.; Lurie A. I. *Theory of Elasticity* / Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. 1050 pp. doi: 10.1007/978-3-540-26455-2.
3. Елисеев В. В. *Механика упругих тел.* СПб.: СПбГПУ, 2002. 341 с. [Eliseev V. V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of Elastic Bodies]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2002. 341 pp. (In Russian)]
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity* / Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York: McGraw-Hill Book Comp., 1970. xxiv+567 pp.
5. Димитриенко Ю. И. *Тензорное исчисление.* М.: Высш. шк., 2001. 575 с. [Dimitrienko Yu. I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow: Vyssh. shk., 2001. 575 pp. (In Russian)]
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 576 с. [Ladyzhenskaia O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow: Nauka, 1973. 576 pp. (In Russian)]
7. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988. 334 с. [Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1988. 334 pp. (In Russian)]
8. Hahn H. G. *Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme* / Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik. vol. 62. Stuttgart: B. G. Teubner, 1985. 332 pp.
9. Коренев Г. В. *Тензорное исчисление.* М.: МФТИ, 2000. 240 с. [Korenev G. V. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow: Mosk. Fiz.-Tekhn. Inst., 2000. 240 pp. (In Russian)]
10. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высш. шк., 1970. 712 с. [Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow: Vyssh. shk., 1970. 712 pp. (In Russian)]
11. Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике.* М.: Наука, 1970. 512 с. [Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1970. 512 pp. (In Russian)]
12. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980. 496 с. [Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1980. 496 pp. (In Russian)]
13. *Функциональный анализ* / Справочная математическая библиотека / ред. С. Г. Крейн. М.: Наука, 1972. 544 с.; *Functional analysis* / Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics / ed. S. G. Krejn. Groningen, Netherlands: Wolters-Noordhoff Publ., 1972. xv+379 pp.

14. Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа.* М.: Наука, 1965. 520 с. [Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow: Nauka, 1965. 520 pp. (In Russian)]
15. Кантарович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977. 741 с. [Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow: Nauka, 1977. 741 pp. (In Russian)]
16. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Высш. шк., 1969. 455 с. [Krasnosel'sky M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitsky Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate Solution of Operator Equations]. Moscow: Nauka, 1969. 455 pp. (In Russian)]
17. Юрьев С. Ф. *Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита.* М.: Металлургиздат, 1950. 48 с. [Yuriev S. F. *Udel'nye ob"emy faz v martensitnom prevrashchenii austenita* [Specific Volumes of Phases in Martensite Transformation of Austenite]. Moscow: Metallurgizdat, 1950. 48 pp. (In Russian)]

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 199–208

MSC: 74C10

Integro-differential equations of the second boundary value problem of linear elasticity theory. Communication 2. Inhomogeneous anisotropic body

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

In communication 1, the integro-differential equations of the second boundary value problem of the theory of elasticity for a homogeneous isotropic body were considered. The results obtained are extended to boundary value problems for the general case of an inhomogeneous anisotropic body. It is shown that the integro-differential equations found are also Fredholm type equations. The existence and uniqueness of their solution is proved, the conditions under which the solution can be found by the method of successive approximations are determined. An example of calculating the residual stresses in an inhomogeneous quenched cylinder is given.

Keywords: second boundary-value problem, inhomogeneous anisotropic body, integro-differential equation, spectral radius, successive approximation, second kind Fredholm equations, iteration convergence.

Received: 30th July, 2019 / Revised: 27th January, 2020 /
Accepted: 10th February, 2020 / First online: 12th March, 2020

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any sponsorship.

References

1. Struzhanov V. V. Integro-differential equations the second boundary value problem of linear elasticity theory. Message 1. Homogeneous isotropic body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ.,*

Short Communication

Please cite this article in press as:
Struzhanov V. V. Integro-differential equations of the second boundary value problem of linear elasticity theory. Communication 2. Inhomogeneous anisotropic body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 199–208. doi: 10.14498/vsgtu1730 (In Russian).

Author's Details:
Valery V. Struzhanov https://orcid.org/0000-0002-3669-2032
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Material Micromechanics;
e-mail: stru@imach.uran.ru

Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 496–506 (In Russian).

2. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, 1050 pp. doi: 10.1007/978-3-540-26455-2.
3. Eliseev V. V. *Mekhanika uprugikh tel* [Mechanics of Elastic Bodies]. Saint-Petersburg, SPbGPU, 2002, 341 pp. (In Russian)
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*, Engineering Societies Monographs. International Student Edition. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1970, xxiv+567 pp.
5. Dimitrienko Yu. I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow, Vyssh. shk., 2001, 575 pp. (In Russian)
6. Ladyzhenskaia O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka, 1973, 576 pp. (In Russian)
7. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow, Nauka, 1988, 334 pp. (In Russian)
8. Hahn H. G. *Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*, Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik, vol. 62. Stuttgart, B. G. Teubner, 1985, 332 pp.
9. Korenev G. V. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculus]. Moscow, Mosk. Fiz.-Tekhn. Inst., 2000, 240 pp. (In Russian)
10. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Equations in partial derivatives of mathematical physics]. Moscow, Vyssh. shk., 1970, 712 pp. (In Russian)
11. Mikhlin S. G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1970, 512 pp. (In Russian)
12. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 496 pp. (In Russian)
13. *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Series of Monographs and Textbooks on Pure and Applied Mathematics, ed. S. G. Krejn. Groningen, Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, xv+379 pp.
14. Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementy funktsional'nogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1965, 520 pp. (In Russian)
15. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1977, 741 pp. (In Russian)
16. Krasnosel'sky M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitsky Ya. B., Stetsenko V. Ya. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii* [Approximate Solution of Operator Equations]. Moscow, Nauka, 1969, 455 pp. (In Russian)
17. Yuriev S. F. *Udel'nye ob"emy faz v martensitnom prevrashchenii austenita* [Specific Volumes of Phases in Martensite Transformation of Austenite]. Moscow, Metallurgizdat, 1950, 48 pp. (In Russian)