

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 24, № 2 – 2020

Вестник Самарского государственного технического университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Июнь — 2020

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 24, № 2 – 2020)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- П. Б. Бабаджанов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н. проф. (Душанбе, Таджикистан)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)
- З. Д. Усманов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н., проф. (Душанбе, Таджикистан)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Провириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. ((Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Белгород, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 24, № 2 – 2020)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Телефон: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Адрес типографии:

443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус 8

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77-66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 17 июля 2020 г.

Дата выхода в свет 25 августа 2020 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.

Тираж 500 экз. Рег. № 116/20.

Заказ № 322.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 05.13.18 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), на сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Самарский государственный технический университет, 2020 (составление)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108
ISSN 1991–8615 (print), 2310–7081 (online)

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 1996

4 issues per year

June — 2020

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2020, vol. 24, no. 2

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- P. B. Babadzhanov (Dushanbe, Tajikistan)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Z. D. Usmanov (Dushanbe, Tajikistan)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Belgorod, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>) and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Samara State Technical University, 2020 (Compilation)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

ISSN 1991–8615 (print), 2310–7081 (online)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Балкизов Ж. А.* “Об одной краевой задаче для уравнения параболического-гиперболического типа третьего порядка с граничным условием смещения в области его гиперболичности” 211
- Лукащук В. О., Лукащук С. Ю.* “Групповая классификация, инвариантные решения и законы сохранения нелинейного двумерного ортотропного уравнения фильтрации с дробной производной Римана–Лиувилля по времени” . . . 226
- Сакс Р. С.* “Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции” 249

Механика деформируемого твёрдого тела

- Локощенок А. М., Фомин Л. В., Терауд В. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С.* “Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор)” 275

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Просвиряков Е. Ю.* “Точные решения обобщенных плоских течений Бельтрами–Тркала и Беллаба” 319
- Назаров А. А., Измайлова Я. Е.* “Исследование RQ-системы с вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием” 331
- Сараев А. Л., Сараев Л. А.* “Математические модели стохастической динамики развития предприятий” 343
- Хорин А. Н., Конюхова А. А.* “Течение Куэтта горячего вязкого газа” . . . 365

Краткие сообщения

- Pashaei R., Pishkoo A., Asgari M. S., Ebrahimi Bagha D.* “ α -Дифференцируемые функции в комплексной плоскости” 379
- Chen S., Cong B., Zhang D., Liu X., Shen S.* “Модель незатухающего колебания для сферической капли на твердой поверхности с двумя различными углами контакта” 390

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

- Balkizov Zh. A.* “On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a displacement boundary condition in its hyperbolicity domain” 211
- Lukashchuk V. O., Lukashchuk S. Yu.* “Group classification, invariant solutions and conservation laws of nonlinear orthotropic two-dimensional filtration equation with the Riemann–Liouville time-fractional derivative” 226
- Saks R. S.* “Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators” 249

Mechanics of Solids

- Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Teraud W. V., Basalov Yu. G., Agababyan V. S.* “Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review)” 275

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Prosviryakov E. Yu.* “Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows” 319
- Nazarov A. A., Izmailova Ya. E.* “Research of a retrieval queueing system with exclusion of customers and three-phase phased by follow-up” 331
- Saraev A. L., Saraev L. A.* “Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise” 343
- Khorin A. N., Konyukhova A. A.* “Couette flow of hot viscous gas” 365

Short Communications

- Pashaei R., Pishkoo A., Asgari M. S., Ebrahimi Bagha D.* “ α -Differentiable functions in complex plane” 379
- Chen S., Cong B., Zhang D., Liu X., Shen S.* “An undamped oscillation model with two different contact angles for a spherical droplet impacting on solid surface” 390

Differential Equations and Mathematical Physics



MSC: 35M12, 35M32

On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a displacement boundary condition in its hyperbolicity domain

Zh. A. Balkizov

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In the article, we investigate a boundary-value problem with a third-order inhomogeneous parabolic-hyperbolic equation with a wave operator in a hyperbolicity domain. A linear combination with variable coefficients in terms of derivatives of the sought function on independent characteristics, as well as on the line of type and order changing is specified as a boundary condition. We have established necessary and sufficient conditions that guarantee existence and uniqueness of a regular solution to the problem under study. In some cases, a solution representation is written out explicitly.

Keywords: degenerate hyperbolic equation, equation with multiple characteristics, parabolic-hyperbolic equation of third order, problems with a shift.

Received: 24th April, 2019 / Revised: 19th November, 2019 /

Accepted: 27th January, 2020 / First online: 27th May, 2020

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Balkizov Zh.A. On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a displacement boundary condition in its hyperbolicity domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 211–225. doi: 10.14498/vsgtu1694.

Author's Details:

Zhiraslan A. Balkizov  <https://orcid.org/0000-0001-5329-7766>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Dept. of Equations of Mixed Type;

e-mail: giraslan@yandex.ru

Statement of the problem. A summary of the outcomes

Consider the next equation in the Euclidean plane points x and y

$$f = \begin{cases} u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \\ u_{xxx} - u_y, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

where

$$f = f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y), & y < 0, \\ f_2(x, y), & y > 0 \end{cases}$$

is a given function, $u = u(x, y)$ is the desired function.

Equation (1) as $y > 0$ coincides with the equation

$$u_{xxx} - u_y = f_2(x, y), \quad (2)$$

which belongs to the class of third order equations with multiple characteristics [1, p. 9] of parabolic type [2, p. 69] and as $y < 0$ equation (1) coincides with the inhomogeneous wave equation

$$u_{xx} - u_{yy} = f_1(x, y). \quad (3)$$

Thus equation (1) is parabolic-hyperbolic equation with type and order degeneration along the line $y = 0$ and, as stated in [3], study of boundary value problems for the above equations brings a new aspect to the mixed type equations theory.

Equation (1) is considered in the domain Ω bounded by $AC : x + y = 0$ and $CB : x - y = r$ of equation (3) as $y < 0$ leaving the point $C = (r/2, -r/2)$ and passing through the points $A = (0, 0)$ and $B = (r, 0)$ respectively, and also a rectangle with vertices $A, B, A_0 = (0, h), B_0 = (r, h), h > 0$, as $y > 0$. Denote $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}, \Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}, J = \{(x, 0) : 0 < x < r\}, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J$ and assume that $f_i \in C(\overline{\Omega}_i), i = 1, 2$.

The function $u = u(x, y)$ in the class $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C_x^3(\Omega_2), u_x, u_y \in L_1(J)$ satisfying equation (1) is *regular solution of equation (1)* in Ω .

The study problem is as follows.

PROBLEM 1. *Find a regular solution to equation (1) in the domain Ω satisfying the conditions*

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad u(r, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y < h, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \alpha(x) \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + \beta(x) \frac{d}{dx} u[\theta_r(x)] + \gamma(x) u_x(x, 0) + \\ + \delta(x) u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < r, \end{aligned} \quad (5)$$

where $\theta_0(x) = (\frac{x}{2}; -\frac{x}{2}), \theta_r(x) = (\frac{x+r}{2}; \frac{x-r}{2})$ are affixes of intersection of the characteristics of the equation (3) leaving the point $(x, 0)$ with AC and BC respectively; $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y); \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), \psi(x)$ are smooth enough given functions.

Formulated problem (1), (4), (5) belongs to the class of the Nakhushev non-local boundary value problems with displacement [4].

The problem with boundary conditions connecting values of a sought solution on the characteristics of the both families for Lavrent'ev–Bitsadze equation was first posed and investigated in [5].

In [6,7] the displacement boundary value problem was introduced, and a number of nonlocal boundary value problems with various types of displacements for hyperbolic, degenerate hyperbolic, and mixed-type equations have been investigated since. In particular, in [6] the existence of an unique solution to the nonlocal problem for equation (3) with the conditions

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \tag{6}$$

and (5) as $\gamma(x) = \delta(x) \equiv 0$, $\alpha(x) \neq \beta(x) \forall x \in [0, r]$ has been proved.

In [7], the way of posing non-local boundary value problems with displacement for a degenerating hyperbolic equation of the form

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad m = \text{const} > 0 \tag{7}$$

is offered employing D_{cx}^ε the Riemann–Liouville fractional derivatives. The criteria for the unique solvability with conditions (6) and

$$\alpha(x)D_{0x}^{1-\varepsilon} u [\theta_0(x)] + \beta(x)D_{rx}^{1-\varepsilon} u [\theta_r(x)] = \psi(x), \quad 0 < x < r$$

for equation (7) are determined, where $[\theta_0(x)]$, $[\theta_r(x)]$, are the affixes of the intersection points of the characteristics of equation (7), as above, and what is more $2(m + 2)\varepsilon = m$.

Specific cases for displacement related problems include such nonlocal problems as the Bitsadze–Samarsky problem [8–10], Dezin problem [11–13; 14, p. 174], Carleman problem [15], Steklov problem [16, p. 67], Frankl problem [17; 18, p. 339; 19–24], etc. In case of displacement problems, for mixed equations a nonlocal condition is imposed connecting values of desired solution or derivative of a certain order at two, three or more points lying on the boundary characteristics of different families and on the line of degeneracy or the type change line. If one or several coefficients of the displacement problem for mixed type equations is zero it becomes an ordinary Tricomi problem.

The displacement problems are well applicable in mathematical problems modeling in biology (synergetics), transonic gas dynamics. Similar nonlocal boundary conditions arise in the study of heat and mass transfer in capillary-porous media, in mathematical modeling of problems of gas dynamics and nonlocal physical processes, in the study of cell propagation, in the theory of electromagnetic wave propagation within an inhomogeneous media [2,18,25]. A bibliography of research papers devoted to the displacement boundary value problems is presented quite completely in monographs [4, 14, 26–34].

In [35], the displacement boundary value problem is studied under condition (5) for mixed type equations of second order and a heat equation in the parabolicity domain; a necessary and sufficient condition for the existence of an unique solution is obtained. In this paper, we study the displacement boundary value problem for inhomogeneous parabolic-hyperbolic equation of the third order (1) and a third-order parabolic and wave equations in the hyperbolicity domain. One of the boundary conditions is a linear combination of the sought functions and their derivatives with variable coefficients in AC and BC , as well as in $J = AB$ lines of type and order change. Necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a regular solution to the problem under study have been obtained. The solution to the studied problem under certain conditions have been written out explicitly. We have shown that violation of the necessary conditions

imposed on the specified functions leads to non-uniqueness of the studied problem. That is, the corresponding homogeneous problem has an infinite number of linear independent solutions. In addition, solutions to a non-homogeneous problem could exist only with additional requirements for the given functions.

We would also like to mention research-related papers [36–42].

Theorem on the existence and uniqueness of a solution

The following theorem holds true.

THEOREM 1. *Assume the given functions $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y); \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), \psi(x)$ have the following properties:*

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C[0, h]; \quad \alpha(x), \beta(x), \psi(x) \in C^1[0, r] \cap C^2]0, r[; \quad (8)$$

$$[\beta(x) + \alpha(x) + \gamma(x)]^2 + [\beta(x) - \alpha(x) + \delta(x)]^2 \neq 0 \quad \forall x \in [0, r] \quad (9)$$

and one of the below conditions is satisfied:

$$\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]; \quad (10)$$

$$\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]; \quad (11)$$

$$2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]; \quad (12)$$

$$2\alpha(x) + \gamma(x) - \delta(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r] \text{ and } r \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad (13)$$

$$\alpha(x) = \alpha, \quad \beta(x) = \beta, \quad \gamma(x) = \gamma, \quad \delta(x) = \delta$$

and

$$r \neq 2\pi n \sqrt{\frac{\beta - \alpha + \delta}{\beta + \alpha + \gamma}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const}); \quad (14)$$

$$[\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)][\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)] \neq 0,$$

and

$$\left[\frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \right]' < 0 \quad \forall x \in [0, r]. \quad (15)$$

Therefore there is the unique regular solution for problem 1 in the domain Ω .

Proof. Let there be a solution to problem 1 and assume that

$$u(x, 0) = \tau(x) \quad (0 \leq x \leq r); \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad (0 < x < r). \quad (16)$$

Passing to the limit as $y \rightarrow +0$ in equation (1) in view of notation used in (16) we obtain fundamental relation for the functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ moved from the parabolic part Ω_2 of the domain Ω to the line $y = 0$:

$$\nu(x) = \tau'''(x) + f_2(x, 0), \quad (17)$$

and with boundary conditions (4) obtain

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau'(0) = \varphi_2(0), \quad \tau(r) = \varphi_3(0). \quad (18)$$

Now find fundamental relation for the functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ moved from the hyperbolic part Ω_1 of the domain Ω to the line $y = 0$ of the type changing.

A solution to problem (16) for equation (3) in Ω_1 is obtained by d'Alembert's formula [43, p. 59]:

$$u(x, y) = \frac{\tau(x + y) + \tau(x - y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \nu(s) ds + \int_0^y \int_{x-y+t}^{x+y-t} f_1(s, t) ds dt. \quad (19)$$

By formula (19) we find

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u [\theta_0(x)] &= \frac{1}{2} \left(\tau'(x) - \nu(x) + \int_{-x/2}^0 f_1(x + t, t) dt \right), \\ \frac{d}{dx} u [\theta_r(x)] &= \frac{1}{2} \left(\tau'(x) + \nu(x) - \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x - t, t) dt \right). \end{aligned}$$

Substituting values $\frac{d}{dx} u [\theta_0(x)]$ and $\frac{d}{dx} u [\theta_r(x)]$ into equation (5) find

$$\begin{aligned} [\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)]\tau'(x) - [\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)]\nu(x) &= \\ = 2\psi(x) - \alpha(x) \int_{-x/2}^0 f_1(x + t, t) dt + \beta(x) \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x - t, t) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Formula (20) is the fundamental relation for the functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ moved from the hyperbolic part Ω_1 of the domain Ω to the line $y = 0$ of the type changing.

Assume that initially conditions (8), (9) and (10) are satisfied, i.e. $\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \equiv 0$ and hence $2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]$. In this case by (20) we find

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \frac{2\psi(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} + \frac{\beta(x) + \gamma(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x + t, t) dt + \\ &+ \frac{\beta(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x - t, t) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Therefore by equations (17), (18), we easily find the function $\tau(x)$:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \left[1 - \frac{x^2}{r^2} \right] \varphi_1(0) + \left[x - \frac{x^2}{r} \right] \varphi_2(0) + \frac{x^2}{r^2} \varphi_3(0) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 \nu(t) dt - \frac{x^2}{2r^2} \int_0^r (r - t)^2 \nu(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 f_2(t, 0) dt - \frac{x^2}{2r^2} \int_0^r (r - t)^2 f_2(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Under assumption of (8), (9), (11), i.e. for $\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x) \equiv 0$ and $2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]$ by (20), we arrive at the identity

$$\tau'(x) = \frac{2\psi(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} - \frac{\beta(x) + \delta(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x + t, t) dt +$$

$$+ \frac{\beta(x)}{2\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t, t) dt,$$

hence

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \int_0^x \frac{2\psi(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} dt - \int_0^x \frac{\beta(t) + \delta(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} \int_{-t/2}^0 f_1(t+s, s) ds dt + \\ & + \int_0^x \frac{\beta(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} \int_{(t-r)/2}^0 f_1(t-s, s) ds dt + \varphi_1(0), \end{aligned} \quad (23)$$

moreover, the following conditions should be satisfied:

$$\begin{aligned} & \int_0^r \frac{2\psi(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} dt - \int_0^r \frac{\beta(t) + \delta(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} \int_{-t/2}^0 f_1(t+s, s) ds dt + \\ & + \int_0^r \frac{\beta(t)}{2\beta(t) + \gamma(t) + \delta(t)} \int_{(t-r)/2}^0 f_1(t-s, s) ds dt = \varphi_3(0) - \varphi_1(0), \\ & \frac{2\psi(0)}{2\beta(0) + \gamma(0) + \delta(0)} + \frac{\beta(0)}{2\beta(0) + \gamma(0) + \delta(0)} \int_{-r/2}^0 f_1(-t, t) dt = \varphi_2(0). \end{aligned}$$

At that the second sought function $\nu(x)$ in view of conditions (8) and (23) can be obtained by relation (17).

Next, assume that theorem conditions (8), (9), (12) are satisfied. Then by inequality (20) we arrive at the identity

$$\begin{aligned} \nu(x) = & \tau'(x) - \frac{2\psi(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} + \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x+t, t) dt - \\ & - \frac{\beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t, t) dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Exclude from relations (17) and (24) the function $\nu(x)$. Then for the function $\tau(x)$ we arrive at the boundary problem for the equation

$$\begin{aligned} \tau'''(x) - \tau'(x) = & - \frac{2\psi(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} + \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x+t, t) dt - \\ & - \frac{\beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t, t) dt - f_2(x, 0) \end{aligned} \quad (25)$$

with conditions (18).

The solution of problem (25), (18) is written out explicitly by the formula

$$\tau(x) = \frac{(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} r)\varphi_1(0) + [\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} r - \operatorname{sh}(x-r)]\varphi_2(0) + (1 - \operatorname{ch} x)\varphi_3(0)}{1 - \operatorname{ch} r}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^r \frac{2G(x,t)\psi(t)}{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)} dt + \int_0^r \frac{\alpha(t)G(x,t)}{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)} \int_{-t/2}^0 f_1(t+s,s) ds dt - \\
 & - \int_0^r \frac{\beta(t)G(x,t)}{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)} \int_{(t-r)/2}^0 f_1(t-s,s) ds dt - \int_0^r G(x,t)f_2(t,0) dt,
 \end{aligned}$$

where

$$G(x,t) = \begin{cases} a(1 - \operatorname{ch} x), & 0 \leq x < t, \\ a(1 - \operatorname{ch} x) + \operatorname{ch}(x - t) - 1, & t < x \leq r, \end{cases} \quad a = \frac{1 - \operatorname{ch}(r - t)}{1 - \operatorname{ch} r}$$

is the Green function of the differential operator $L[\tau] = \tau'''(x) - \tau'(x)$ involving conditions (18).

Under conditions (8), (9), (13) we get

$$\begin{aligned}
 \nu(x) = & -\tau'(x) + \frac{2\psi(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} - \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x+t,t) dt + \\
 & + \frac{\beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t,t) dt. \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau(x) = & \frac{\cos x - \cos r}{1 - \cos r} \varphi_1(0) + \left[\sin x - \frac{\sin r(1 - \cos x)}{1 - \cos r} \right] \varphi_2(0) + \frac{1 - \cos x}{1 - \cos r} \varphi_3(0) + \\
 & + \int_0^r \frac{2G(x,t)\psi(t)}{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)} dt - \int_0^r \frac{\alpha(t)G(x,t)}{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)} \int_{-t/2}^0 f_1(t+s,s) ds dt + \\
 & + \int_0^r \frac{\beta(t)G(x,t)}{\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)} \int_{(t-r)/2}^0 f_1(t-s,s) ds dt - \int_0^r G(x,t)f_2(t,0) dt,
 \end{aligned}$$

where

$$G(x,t) = \begin{cases} b(1 - \cos x), & 0 \leq x < t, \\ b(1 - \cos x) + 1 - \cos(x - t), & t < x \leq r, \end{cases} \quad b = -\frac{1 - \cos(r - t)}{1 - \cos r}$$

is the Green function of the operator $L[\tau] = \tau'''(x) + \tau'(x)$ involving conditions (18).

Further we consider the case when conditions (8), (9), (14) are satisfied, i.e. $\alpha(x) = \alpha$, $\beta(x) = \beta$, $\gamma(x) = \gamma$, $\delta(x) = \delta$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const}$). If $\alpha + \beta + \gamma \equiv 0$ then as well as for $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ and $\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x) \equiv 0 \forall x \in [0, r]$ the functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are uniquely determined by (21) and (22). But if $\alpha - \beta - \delta = 0$ then $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are found by formulae (23) and (17) respectively.

Now let $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \delta) \neq 0$ and condition (14) be satisfied. By relations (17) and (20) for $\tau(x)$ we arrive at the boundary problem for the equation

$$\tau'''(x) - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \beta - \delta} \tau'(x) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \delta} \int_{-x/2}^0 f_1(x+t,t) dt -$$

$$-\frac{\beta}{\alpha - \beta - \delta} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t, t) dt - \frac{2\psi(x)}{\alpha - \beta - \delta} - f_2(x, 0) \quad (27)$$

subject to conditions (18).

The solution to the problem (18) for equation (27) is written out with respect to the sign of the value of $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \delta)$ using one of the following formulae:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \delta} \int_0^r G(x, t) \int_{-t/2}^0 f_1(t+s, s) ds dt - \\ & - \frac{\beta}{\alpha - \beta - \delta} \int_0^r G(x, t) \int_{(t-r)/2}^0 f_1(t-s, s) ds - \frac{2}{\alpha - \beta - \delta} \int_0^r G(x, t) \psi(t) dt - \\ & - \int_0^r G(x, t) f_2(t, 0) dt + \frac{\text{ch}(\sqrt{p}x) - \text{ch}(\sqrt{p}r)}{1 - \text{ch}(\sqrt{p}r)} \varphi_1(0) + \\ & + \frac{\text{sh}(\sqrt{p}x) - \text{sh}(\sqrt{p}r) + \text{sh}[\sqrt{p}(r-x)]}{\sqrt{p} [1 - \text{ch}(\sqrt{p}r)]} \varphi_2(0) + \frac{1 - \text{ch}(\sqrt{p}x)}{1 - \text{ch}(\sqrt{p}r)} \varphi_3(0), \end{aligned}$$

if $p = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \beta - \delta} > 0$. Here

$$\begin{aligned} G(x, t) = & \frac{1}{p} \begin{cases} a [1 - \text{ch}(\sqrt{p}x)], & 0 \leq x < t, \\ a [1 - \text{ch}(\sqrt{p}x)] + \text{ch}[\sqrt{p}(x-t)] - 1, & t < x \leq r, \end{cases} \\ & a = \frac{1 - \text{ch}[\sqrt{p}(r-t)]}{1 - \text{ch}(\sqrt{p}r)}, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \frac{\alpha}{\alpha - \beta - \delta} \int_0^r G(x, t) \int_{-t/2}^0 f_1(t+s, s) ds dt - \int_0^r G(x, t) f_2(t, 0) dt - \\ & - \frac{\beta}{\alpha - \beta - \delta} \int_0^r G(x, t) \int_{(t-r)/2}^0 f_1(t-s, s) ds - \frac{2}{\alpha - \beta - \delta} \int_0^r G(x, t) \psi(t) dt + \\ & + \frac{\cos(\sqrt{-p}x) - \cos(\sqrt{-p}r)}{1 - \cos(\sqrt{-p}r)} \varphi_1(0) + \frac{1 - \cos(\sqrt{-p}x)}{1 - \cos(\sqrt{-p}r)} \varphi_3(0) + \\ & + \frac{\sin(\sqrt{-p}x) - \sin(\sqrt{-p}r) + \sin[\sqrt{-p}(r-x)]}{\sqrt{-p} [1 - \cos(\sqrt{-p}r)]} \varphi_2(0), \end{aligned}$$

where

$$G(x, t) = \frac{1}{p} \begin{cases} b [1 - \cos(\sqrt{-p}x)], & 0 \leq x < t, \\ b [1 - \cos(\sqrt{-p}x)] + \cos[\sqrt{-p}(x-t)] - 1, & t < x \leq r, \end{cases}$$

$p = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \beta - \delta} < 0$, $b = \frac{1 - \cos[\sqrt{-p}(r-t)]}{1 - \cos(\sqrt{-p}r)}$, while $p \neq -\left(\frac{2\pi n}{r}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Thus, under the assumption of (8), (9) and also under the assumption of at least one of the conditions of (10), (11), (12), (13) or (14) by the obtained above representations it immediately implies the existence and uniqueness of functions $u(x, 0) = \tau(x)$ and $u_y(x, 0) = \nu(x)$.

Now we can pass to studying the general case. Let (8), (9) and (15) be satisfied for the given functions $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y); \alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), \psi(x)$. First we prove the uniqueness of a regular solution to the problem 1. Consider the homogeneous problem corresponding to problem 1, that is, we let $\varphi_i(y) \equiv 0, (i = 1, 2, 3) \forall y \in [0, h]; \psi(x) \equiv 0, \forall x \in [0, r]; f(x, y) \equiv 0 \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$.

Consider the integral

$$J^* = \int_0^r \tau(x)\nu(x) dx.$$

By relation (17) in view of (18) obtain

$$J^* = -\frac{1}{2}[\tau'(r)]^2 \leq 0, \tag{28}$$

while by (20) with (15) and (18) we have

$$\begin{aligned} J^* &= \int_0^r \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \tau(x)\tau'(x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^r \left[\frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \right]' \tau^2(x) dx \geq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

(28) and (29) imply the identity $J^* = 0$, which by (15) can hold if and only if $\tau(x) \equiv 0$. At that by relations (17) and (20) we can see that $\nu(x) \equiv 0$.

Thus, let us show that under the assumption (15) of theorem 1 the functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are identically zero for the homogeneous problem corresponding to problem 1. At the same time formula (19) implies immediately that $u(x, y) \equiv 0$ in $\bar{\Omega}_1$. In the domain Ω_2 we arrive at the problem on finding a solution to the homogeneous equation $u_{xxx} - u_y = 0, (x, y) \in \Omega_2$ satisfying the homogeneous initial $u(x, 0) = 0 (0 \leq x \leq r)$ and boundary $u(0, y) = 0, u_x(0, y) = 0, u(r, y) = 0 (0 \leq y \leq r)$ conditions. This problem as it stated in [1, p. 144] has only a trivial solution $u(x, y) \equiv 0 \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_2$. Therefore the solution $u(x, y)$ to the homogeneous problem corresponding to the problem under problem 1 is identically zero in the whole domain $\bar{\Omega}$; this implies the uniqueness of a regular solution to problem (1), (4), (5).

Now we prove the existence of a regular solution to problem 1 subjected to conditions (8), (9) and (15). By relations (17) and (20) we arrive at the problem of finding a solution to the equation

$$\begin{aligned} \tau'''(x) - \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \tau'(x) &= \\ &= -\frac{2\psi(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x+t, t) dt - \\ &\quad - \frac{\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t, t) dt - f_2(x, 0) \end{aligned} \tag{30}$$

satisfying condition (18).

By means of repeated integration 3 times of equation (30) within the limit from 0 to x in view of boundary conditions (18) the solution to problem (30) (18) is equivalently reduced to the solution of the integral equation

$$\tau(x) = \int_0^r L(x,t)\tau(t)dt + \left[1 - \frac{x^2}{r^2}\right]\varphi_1(0) + \left[x - \frac{x^2}{r}\right]\varphi_2(0) + \frac{x^2}{r^2}\varphi_3(0) - \frac{x^2}{2r^2} \int_0^r (r-t)^2 F(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 F(t) dt, \quad (31)$$

where

$$L(x,t) = \frac{1}{r^2} \begin{cases} x^2 K(r,t), & 0 \leq x \leq t, \\ x^2 K(r,t) - r^2 K(x,t), & t \leq x \leq r, \end{cases}$$

$$K(x,t) = (x-t)p(t) - \frac{(x-t)^2}{2} p'(t), \quad p(x) = \frac{\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)},$$

$$F(x) = \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \int_{-x/2}^0 f_1(x+t,t) dt - \frac{\beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t,t) dt - \frac{2\psi(x)}{\alpha(x) - \beta(x) - \delta(x)} - f_2(x,0).$$

By properties (8) to the given functions $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x), \psi(x), \varphi_i(y)$, ($i = 1, 2, 3$) and $f(x, y)$ we can conclude that equation (31) is the Fredholm integral equation of the second kind with the kernel $L(x, t) \in C([0, r] \times [0, r])$; the right hand $F(x)$ is of the class $C[0, r]$. Unconditionally unique solvability of equation (31) follows from the uniqueness of the solution to problem 1 and, what is more, the solution $\tau = \tau(x)$ belongs to the class $C[0, r] \cap C^3(0, r)$. Employing the obtained value $\tau = \tau(x)$ by (17) or (20) we can find function $\nu = \nu(x)$ as well.

Once the functions $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are found the solution to problem 1 in Ω_1 is defined as a solution to problem (16) for equation (3) and is written out by formula (19) while in the domain Ω_2 we arrive at the problem of finding a regular solution to equation (2) satisfying the initial $u(x, 0) = \tau(x)$ and boundary (4) conditions; the solution to the above problem is written out in [1]. Theorem 1 is proved. \square

Assume that for the coefficients $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ condition (9) is violated, i.e. the identity

$$[\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)]^2 + [\beta(x) - \alpha(x) + \delta(x)]^2 = 0 \quad \forall x \in [0, r]. \quad (32)$$

holds true.

Identity (32) holds if for example

$$\alpha(x) = \frac{\delta(x) - \gamma(x)}{2} \quad \text{and} \quad \beta(x) = -\frac{\delta(x) + \gamma(x)}{2}.$$

In this case, the homogeneous problem corresponding to problem 1 has an infinite number of linearly independent solutions of the form

$$2u(x, y) = \begin{cases} g''(x+y) - g''(x-y) + g(x+y) + g(x-y), & y < 0, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^r G(x, y; \xi, 0)g(\xi) d\xi, & y > 0, \end{cases}$$

where $g(x)$ is an arbitrary function of the class $C^2[0, r] \cap C^4]0, r[$, and $G(x, y; \xi, \eta)$ is the Green function of the operator $Lu = u_{xxx} - u_y$ with boundary (4) and initial $u(x, 0) = g(x)$ conditions [1, pp. 135–137]. The solution to the inhomogeneous problem 1 with condition (32) exists for the given functions $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\psi(x)$, $f(x, y)$ if and only if it satisfies the additional condition:

$$2\psi(x) = \alpha(x) \int_{-x/2}^0 f_1(x+t, t) dt - \beta(x) \int_{(x-r)/2}^0 f_1(x-t, t) dt. \quad (33)$$

In the domain Ω_1 a set of solutions to problem 1 subjected to condition (33) is written out by the formula

$$u(x, y) = \frac{g''(x+y) - g''(x-y)}{2} + \frac{g(x+y) + g(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} f_2(t, 0) dt + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-y+t}^{x+y-t} f_1(s, t) ds dt,$$

while in Ω_2 for the set of solutions to problem 1 holds the representation [1]

$$\begin{aligned} \pi u(x, y) = & \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x, y; 0, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y G_{\xi\xi}(x, y; r, \eta) \varphi_3(\eta) d\eta + \int_0^r G(x, y; \xi, 0) g(\xi) d\xi - \\ & - \int_0^h \int_0^r G(x, y; \xi, \eta) f_2(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

If condition (13) of Theorem 1 is violated, i.e. as $2\alpha(x) + \gamma(x) - \delta(x) \equiv 0 \forall x \in [0, r]$ and $r = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ homogeneous problem (18) for the system of equations (17), (26) has a nontrivial solutions of the form $\tau(x) = c(1 - \cos x)$, $c = \text{const}$, that implies that the solutions to problem 1 are non-unique.

Similarly if $\alpha(x) = \alpha$, $\beta(x) = \beta$, $\gamma(x) = \gamma$, $\delta(x) = \delta$ and $r = \frac{2\pi n}{\sqrt{-p}}$, $n \in \mathbb{N}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const}$), $p = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha - \beta - \delta}$, i.e. if condition (14) of Theorem 1 is violated a homogeneous problem corresponding to problem (27), (18) as well as in the previous case have nontrivial solutions of the form $\tau(x) = c[1 - \cos(\sqrt{-p}x)]$, $c = \text{const}$, which also indicates that solutions to problem 1 are non-unique.

Therefore conditions

$$\begin{aligned} \varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C[0, h]; \quad \alpha(x), \beta(x), \psi(x) \in C^1[0, r] \cap C^2]0, r[; \\ [\alpha(x) + \beta(x) + \gamma(x)]^2 + [\beta(x) - \alpha(x) + \delta(x)]^2 \neq 0 \quad \forall x \in [0, r]; \\ r \neq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{when} \quad 2\alpha(x) + \gamma(x) - \delta(x) \equiv 0; \\ r \neq \frac{2\pi n}{\sqrt{-p}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{when} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const} \end{aligned}$$

are necessary for the existence of an unique regular solution to problem (1), (4), (5).

Conclusion. The paper studies a displacement boundary value problem for inhomogeneous parabolic-hyperbolic equation of the third order (1) with a third-order parabolic and wave equations in the hyperbolicity domain. A linear combination of the sought functions is given as one of the boundary conditions. Their

derivatives with variable coefficients are in AC and BC , and in $J = AB$ lines of type and order change. A necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of a regular solution to the problem under study are obtained. In some special cases, the representation of the solution to the studied problem is written out explicitly. We have shown that violation of the obtained necessary conditions imposed on the specified functions leads to non-uniqueness of the studied problem. That is, the corresponding homogeneous problem has an infinite number of linear independent solutions. In addition, solutions to a non-homogeneous problem could exist only with additional requirements for the given functions.

Thus, in contrast to the results obtained in [35], necessary and sufficient conditions (8), (9) for the functions specified become insufficient if in the parabolicity domain consider the third-order equation with multiple characteristics (2) instead of the heat equation.

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

References

1. Dzhuraev T. D. *Kraevye zadachi dlia uravnenii smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov* [Boundary-Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types]. Tashkent, Fan, 1979, 240 pp. (In Russian)
2. Nakhushiev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shkola, 1995, 301 pp. (In Russian)
3. Bitsadze A. V. On the theory of a class of equations of mixed type, In: *Nekotorye problemy matematiki i mekhaniki* [Some Problems of Mathematics and Mechanics]. Leningrad, Nauka, 1970, pp. 112–119 (In Russian).
4. Nakhushiev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Displacement for Equations in Partial Derivatives]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)
5. Zhegalov V. I. A boundary-value problem for an equation of mixed type with boundary conditions on both characteristics and with discontinuities on the transition curve, In: *Boundary value problems in the theory of analytic functions*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, 122. Kazan, Kazan Univ., 1962, pp. 3–16 (In Russian).
6. Nakhushiev A. M. Certain boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59 (In Russian).
7. Nakhushiev A. M. A new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation, *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, pp. 935–938.
8. Bitsadze A. V., Samarskii A. A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems, *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, pp. 398–400.
9. Islamov N. B. Analogue of Bitsadze-Samarskii problem for a class of parabolic-hyperbolic equations of second kind, *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 31–45. doi: 10.13108/2015-7-1-31.
10. Khubiev K. A problem of the Bitsadze-Samarskii type for a loaded hyperbolic-parabolic equation, *Mathematical notes of NEFU*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 31–40 (In Russian). doi: 10.25587/SVFU.2019.102.31510.
11. Dezin A. A. On the solvable extensions of partial differential operators, In: *Outlines Joint Sympos. Partial Differential Equations* (Novosibirsk, 1963). Moscow, Acad. Sci. USSR Siberian Branch, 1963, pp. 65–66.
12. Sabitov K. B., Gushchina V. A. A. A. Dezin's problem for inhomogeneous Lavrent'ev-Bitsadze equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 3, pp. 31–43. doi: 10.3103/S1066369X17030045.

13. Kirzhinov R. A. On the solving of the A. A. Dezin problem analogue for a second-order mixed-type equation by the Green's function method, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 3(23), pp. 36–41 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-36-41.
14. Nakhushева Z. A. *Nelokal'nye kraevye zadachi dlia osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravnenii* [Nonlocal Boundary-Value Problems for Basic or Mixed Type Differential Equations]. Nal'chik, KBNTz RAN, 2011, 196 pp. (In Russian)
15. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, In: *Verhandl. Internat. Math. Kongr.*, vol. 1. Zürich–Leipzig, Orell Füssli, 1932, pp. 138–151
16. Steklov V. A. *Osnovnye problemy matematicheskoi fiziki* [Basic Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1983, 432 pp. (In Russian)
17. Frankl F. I. Two gas-dynamical applications of the Lavrentiev–Bitsadze boundary value problem, *Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astronom.*, 1951, vol. 6, no. 11, pp. 3–7 (In Russian).
18. Frankl F. I. Subsonic flow past profiles with supersonic zone terminating with a normal shock, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 196–202 (In Russian).
19. Frankl F. I. *Selected Works on Gas Dynamics*. Moscow, Nauka, 1973, 712 pp. (In Russian)
20. Bitsadze A. V. On a Frankl's problem, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956, vol. 109, no. 6, pp. 1091–1094 (In Russian).
21. Zhegalov V. I. The Frankl' problem with a shift, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1979, vol. 23, no. 9, pp. 10–19.
22. Pskhu A. V. On the solution of the Frankl problem, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 3, pp. 474–476. doi: 10.1007/BF02754470.
23. Pskhu A. V. The Frankl' problem for a hyperbolic-parabolic equation, *Differ. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 112–120. doi: 10.1023/A:1025180210792.
24. Sabitov K. B. On the theory of the Frankl problem for equations of mixed type, *Izv. Math.*, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 99–136. doi: 10.1070/IM8401.
25. Bers L. *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*. Mineola, NY, Dover Publ., 2016, xv+278 pp.
26. Salakhitdinov M. S. *Uravneniia smeshanno-sostavnogo tipa* [Equations of Mixed-Composite Type]. Tashkent, Fan, 1974, 156 pp. (In Russian)
27. Salakhitdinov M. S., Urinov A. K. *K spektral'noi teorii uravnenii smeshannogo tipa* [To Spectral Theory of Mixed Type Equations]. Tashkent, Fan, 1997, 165 pp.
28. Repin O. A. *Kraevye zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii giperbolicheskogo i smeshannogo tipov* [Boundary-Value Problems for Hyperbolic and Mixed Type Equations]. Samara, Saratov Univ., Samara branch, 1992, 162 pp.
29. Kalmenov T. Sh. *Kraevye zadachi dlia lineinykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh giperbolicheskogo tipa* [Boundary-Value Problems for Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type]. Shymkent, Gylaia, 1993, 328 pp.
30. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan, Kazan Math. Society, 2001, 226 pp.
31. Marichev O. I., Kilbas A. A., Repin O. A. *Kraevye zadachi dlia uravnenii s chastnymi proizvodnymi s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients]. Samara, Samara State Univ. of Economics, 2008, 275 pp. (In Russian)
32. Pulkina L. S. *Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii* [Problems with Non-Classic Conditions for Hyperbolic Equations]. Samara, Samara State Univ., 2012, 194 pp. (In Russian)
33. Sabitov K. B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the Theory of Mixed-Type Equations]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 304 pp. (In Russian)
34. Sabitov K. B. *Priamye i obratnye zadachi dlia uravnenii smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa* [Direct and Inverse Problems for Mixed Parabolic-Hyperbolic Type Equations]. Ufa, Gilem, 2015, 236 pp. (In Russian)

35. Balkizov Zh. A. On a boundary value problem of the type of the Tricomi problem for a mixed second-order parabolic-hyperbolic equation with three displacements in the hyperbolic part of the domain, *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics Physics*, 2019, vol. 51, no. 1, pp. 5–14 (In Russian). doi: 10.18413/2075-4639-2019-51-1-5-14.
36. Repin O. A. A nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a characteristic line of change of type, *Differ. Uravn.*, 1992, vol. 28, no. 1, pp. 173–176 (In Russian).
37. Kilbas A. A., Repin O. A. A problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 6, pp. 796–802.
38. Repin O. A., Efimova S. V. A nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a non-characteristic line of type changing, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2002, no. 16, pp. 10–14 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu89.
39. A problem with nonlocal conditions on characteristics for the moisture transfer equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 10, pp. 1498–1502. doi: 10.1007/s10625-004-0018-9.
40. Mirsaburov M., Khairullaev I. N., Bobomurodov U. E. A generalization of Bitsadze–Samarskii problem for mixed type equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 10, pp. 29–32. doi: 10.3103/S1066369X16100054.
41. Efimova S. V. A nonlocal problem for a hyperbolic equation degenerating inside a region, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2005, no. 34, pp. 194–196 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu356.
42. Balkizov Zh. A. A boundary value problem with displacement for a model equation of a parabolic-hyperbolic type of the third order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, no. 3(23), pp. 19–26 (In Russian). doi: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-19-26.
43. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Urvnenniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972, 735 pp. (In Russian)

УДК 517.956.6

Об одной краевой задаче для уравнения параболического-гиперболического типа третьего порядка с граничным условием смещения в области его гиперболичности

Ж. А. Балкизов

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Исследована краевая задача со смещением для неоднородного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка с волновым оператором в области гиперболичности, когда в качестве одного из граничных условий задана линейная комбинация с переменными коэффициентами производных от значений искомой функции на независимых характеристиках, а также на линии изменения типа и порядка. Найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности регулярного решения задачи. В некоторых частных случаях представление решения исследуемой задачи выписано в явном виде.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, уравнения с кратными характеристиками, парабола-гиперболическое уравнение третьего порядка, задачи со смещением.

Получение: 24 апреля 2019 г. / Исправление: 19 ноября 2019 г. /
Принятие: 27 января 2020 г. / Публикация онлайн: 27 мая 2020 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант рукописи.

Научная статья

© © 1 Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Balkizov Zh. A. On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a displacement boundary condition in its hyperbolicity domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 211–225. doi: 10.14498/vsgtu1694.

Сведения об авторе

Жираслан Анатольевич Балкизов ✉  <https://orcid.org/0000-0001-5329-7766>
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отд. уравнений смешанного типа; e-mail: giraslan@yandex.ru



УДК 517.958

Групповая классификация, инвариантные решения и законы сохранения нелинейного двумерного ортотропного уравнения фильтрации с дробной производной Римана–Лиувилля по времени

В. О. Лукащук, С. Ю. Лукащук

Уфимский государственный авиационный технический университет,
Россия, 450008, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

Аннотация

Рассматривается нелинейное двумерное ортотропное уравнение фильтрации с дробной производной Римана–Лиувилля по времени. Доказывается, что такое уравнение может допускать группы точечных преобразований только линейно-автономного типа. Решается задача групповой классификации рассматриваемого уравнения по его точечным симметриям относительно коэффициентов пьезопроводности, являющихся функциями квадрата модуля градиента давления. Доказывается, что если порядок дробного дифференцирования меньше единицы, основная допускаемая уравнением группа точечных преобразований является четырехпараметрической и расширяется до пятипараметрической в изотропном случае. Для степенных зависимостей коэффициентов пьезопроводности допускаемая группа становится пятипараметрической в ортотропном случае и шестипараметрической в изотропном случае. Также выделяется специальный вид степенной зависимости коэффициентов, не имеющий аналога в случае классического уравнения фильтрации, при котором происходит дополнительное расширение группы оператором проективного преобразования. Для уравнения с порядком дробного дифференцирования $\alpha \in (1, 2)$ размерности всех допускаемых групп оказываются на единицу больше за счет допускаемого оператора, соответствующего сдвигу решения на дополнительное частное решение этого уравнения.

На основе проведенной групповой классификации для соответствующих алгебр Ли инфинитезимальных операторов групп точечных преобразований, допускаемых различными видами рассматриваемого нели-

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Лукащук В. О., Лукащук С. Ю. Групповая классификация, инвариантные решения и законы сохранения нелинейного двумерного ортотропного уравнения фильтрации с дробной производной Римана–Лиувилля по времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 226–248. doi: 10.14498/vsgtu1761.

Сведения об авторах

Вероника Олеговна Лукащук <https://orcid.org/0000-0002-3082-1446>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем; e-mail: voluks@gmail.com

Станислав Юрьевич Лукащук <https://orcid.org/0000-0001-9209-5155>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем; e-mail: lsu@ugatu.su

нейного ортотропного дробно-дифференциального уравнения, выписываются представления инвариантно-групповых решений, соответствующие оптимальным системам двумерных подалгебр. Приводятся примеры уравнений, получающихся в результате симметричной редукции исходного дробно-дифференциального уравнения, а также некоторые их решения.

Доказывается, что рассматриваемое дробно-дифференциальное уравнение фильтрации является нелинейно самосопряженным, что дает возможность строить его законы сохранения. Соответствующие компоненты всех найденных сохраняющихся векторов приводятся в явном виде.

Ключевые слова: дробно-дифференциальное уравнение фильтрации, групповая классификация, точечная симметрия, инвариантное решение, закон сохранения.

Получение: 29 ноября 2019 г. / Исправление: 17 мая 2020 г. /

Принятие: 1 июня 2020 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2020 г.

Введение. Интегро-дифференциальные уравнения с производными дробных порядков различных типов [1, 2] в последнее время привлекают большое внимание исследователей из самых различных областей науки и техники благодаря возможности их использования в качестве математических моделей сложных процессов, сред и систем, проявляющих эффекты памяти и пространственной нелокальности [3–12]. Наиболее хорошо в настоящее время исследованы одномерные дробно-дифференциальные уравнения диффузионного типа, к которому относится и большинство простейших дробно-дифференциальных уравнений фильтрации. Однако с точки зрения практического использования существенно больший интерес представляют уравнения в двумерных и трехмерных областях. Исследование ряда важных качественных свойств таких уравнений, особенно нелинейных, может быть выполнено методами современного группового анализа [13–17]. Для дробно-дифференциальных уравнений в последнее десятилетие удалось развить ряд классических теоретико-групповых методов (см. [18, 19] и цитируемую там литературу), что дало возможность находить допускаемые такими уравнениями группы симметрий, решать задачи их групповой классификации, строить фактор-уравнения, инвариантные решения и законы сохранения. Отметим, что задача групповой классификации уравнения имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку выделение классов уравнений с расширенной группой симметрий позволяет выделять также и соответствующие подмодели, обладающие расширенным набором симметричных свойств и, как следствие, имеющих дополнительные инвариантные решения и законы сохранения.

Настоящая работа посвящена исследованию симметричных свойств нелинейного двумерного дробно-дифференциального уравнения

$${}_0D_t^\alpha u = (f(u_x^2 + u_y^2)u_x)_x + (g(u_x^2 + u_y^2)u_y)_y, \quad f, g > 0, \quad \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2). \quad (1)$$

Здесь через ${}_0D_t^\alpha$ обозначен оператор дробного дифференцирования Римана—

Лиувилля порядка α :

$${}_0D_t^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{u(\tau, x, y)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Уравнение (1) позволяет, в частности, описывать процессы фильтрации в ортотропной гетерогенной пористой среде и может быть получено на основе дробно-дифференциальных модификаций закона Дарси [20–22] (в этом случае в качестве функции u выступает давление, а функции f и g являются компонентами тензора пьезопроводности ортотропной среды). При $\alpha = 1$ уравнение (1) превращается в классическое нелинейное двумерное ортотропное уравнение фильтрации, результаты групповой классификации которого приведены в [23].

Решается задача групповой классификации уравнения (1) относительно функций f и g по допускаемым этим уравнением однопараметрическим группам Ли точечных преобразований вида

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \lambda(t, x, y, u, a), & \bar{y} &= \nu^2(t, x, y, u, a), \\ \bar{x} &= \nu^1(t, x, y, u, a), & \bar{u} &= \omega(t, x, y, u, a), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\lambda|_{a=0} = t, \quad \nu^1|_{a=0} = x, \quad \nu^2|_{a=0} = y, \quad \omega|_{a=0} = u,$$

где a — параметр группы. Порядок дробного дифференцирования α не преобразуется. Группе преобразований (2) соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = \tau(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial y} + \eta(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (3)$$

координаты которого определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \tau(t, x, y, u) &= \left. \frac{\partial \lambda(t, x, y, u, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, & \xi^2(t, x, y, u) &= \left. \frac{\partial \nu^2(t, x, y, u, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, \\ \xi^1(t, x, y, u) &= \left. \frac{\partial \nu^1(t, x, y, u, a)}{\partial a} \right|_{a=0}, & \eta(t, x, y, u) &= \left. \frac{\partial \omega(t, x, y, u, a)}{\partial a} \right|_{a=0}. \end{aligned}$$

Такой инфинитезимальный оператор допускаемой уравнением группы будет, как обычно, называться *точечной симметрией* этого уравнения.

1. О линейной автономности группы, допускаемой дробно-дифференциальным уравнением. Уравнение (1) является частным случаем уравнения вида

$${}_0D_t^\alpha u = \Phi(t, x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}), \quad (4)$$

для симметрий которого может быть доказано одно важное свойство.

Следуя работе [24], преобразования вида (2), в которых функции λ , ν^1 и ν^2 не зависят от u , будем называть *x-автономными преобразованиями*. Очевидно, что в этом случае координаты τ , ξ^1 и ξ^2 оператора (3) также не будут зависеть от u . Соответствующие симметрии будут называться *x-автономными симметриями*. Если для x -автономной симметрии дополнительно

выполнено условие $\eta_{uu} = 0$, то такая симметрия будет называться *линейно-автономной* [25].

ТЕОРЕМА 1. Уравнение (4) может обладать точечными симметриями вида (3) только линейно-автономного типа с координатами

$$\begin{aligned} \tau &= \rho(x, y)t + \phi(x, y)t^2, \quad \xi^1 = \theta^1(x, y), \quad \xi^2 = \theta^2(x, y), \\ \eta &= \psi(t, x, y) + [\varphi(x, y) + (\alpha - 1)\phi(x, y)t]u, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\rho, \phi, \theta^1, \theta^2, \psi, \varphi$ — произвольные функции своих аргументов.

Доказательство. Необходимое условие инвариантности [19] уравнения (4) относительно группы точечных преобразований, определяемой оператором (3), может быть записано в виде

$$[X_{(\alpha)0}D_t^\alpha u - X_{(2)}\Phi]_{(4)} = 0, \quad (6)$$

где

$$X_{(\alpha)} = X + \zeta_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u}$$

— продолжение оператора (3) на дробно-дифференциальную переменную $D_t^\alpha u$, а $X_{(2)}$ — классическое второе продолжение оператора (3) на все аргументы функции Φ (см., например, [13, 17]). Координата $\zeta_{(\alpha)}$ находится по формуле продолжения [19]:

$$\zeta_{(\alpha)} = D_t^\alpha(W) + \tau D_t^{\alpha+1}u + \xi^1 D_t^\alpha u_x + \xi^2 D_t^\alpha u_y, \quad (7)$$

где $W = \eta - \tau u_t - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y$.

Как доказано в [26] (см. также [18, 19]), определяющее уравнение (6) должно быть дополнено условием неподвижности точки начала отсчета дробной производной под действием преобразований группы:

$$\tau(t, x, y, u)|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Функция η является сложной функцией переменной t , поэтому вычисление дробной производной $D_t^\alpha \eta$, входящей в (7), является непростой задачей. Как показано в [18], такая производная будет представляться рядом с четырехкратным вложенным суммированием. Поэтому для упрощения доказательства теоремы воспользуемся следующим формальным приемом. Перепишем функцию η в квазилинейном по переменной u виде

$$\eta(t, x, y, u) = \psi(t, x, y) + \tilde{\eta}(t, x, y, u)u.$$

Тогда для доказательства утверждения теоремы необходимо показать, что $\tilde{\eta}_u = 0$.

Рассмотрим первое слагаемое в определяющем уравнении (6) с учетом формулы продолжения (7):

$$\begin{aligned} X_{(\alpha)0}D_t^\alpha u &= \zeta_{(\alpha)} \equiv {}_0D_t^\alpha (\psi + \tilde{\eta}u - \tau u_t - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y) + \\ &+ \tau {}_0D_t^{\alpha+1}(u) + \xi^1 {}_0D_t^\alpha(u_x) + \xi^2 {}_0D_t^\alpha(u_y). \end{aligned} \quad (9)$$

Как это принято в групповом анализе, будем полагать, что все координаты инфинитезимального оператора (3) являются требуемое число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам. Тогда возможно применение оператора дробного дифференцирования ${}_0D_t^\alpha$ независимо к каждому из слагаемых, стоящих в круглых скобках в правой части (9), а также использование обобщенного правила Лейбница [1]:

$${}_0D_t^\alpha(FG) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(F) D_t^k(G), \quad (10)$$

где ${}_0D_t^{\alpha-k}(F)$ — дробные производные (при $\alpha - k > 0$) и дробные интегралы (при $\alpha - k < 0$) соответствующих порядков, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{k! \Gamma(\alpha - k + 1)}$ — биномиальные коэффициенты. Также воспользуемся очевидным равенством

$$\tau u_t = D_t(\tau u) - D_t(\tau)u.$$

В силу условия (8) и регулярности функции τ и ее первой производной по t в точке $t = 0$ имеем $\tau u|_{t=0} = 0$. Тогда (см. [1, 2]),

$${}_0D_t^\alpha D_t(\tau u) = {}_0D_t^{\alpha+1}(\tau u).$$

Подстановка приведенных выражений в (9) и применение (10) дает

$$\begin{aligned} \zeta_{(\alpha)} = & {}_0D_t^\alpha(\psi) + [\tilde{\eta} - \alpha D_t(\tau)] {}_0D_t^\alpha(u) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(u) D_t^k(\tilde{\eta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k+1} {}_0D_t^{\alpha-k}(u) D_t^{k+1}(\tau) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(u_x) D_t^k(\xi^1) - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(u_y) D_t^k(\xi^2). \quad (11) \end{aligned}$$

Подставляя (11) в (6) и заменяя дробную производную ${}_0D_t^\alpha(u)$ на Φ в силу исходного уравнения (4), приходим к следующему определяющему уравнению:

$$\begin{aligned} & {}_0D_t^\alpha(\psi) + [\tilde{\eta} - \alpha D_t(\tau)] \Phi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(u) D_t^k(\tilde{\eta}) - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k+1} {}_0D_t^{\alpha-k}(u) D_t^{k+1}(\tau) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(u_x) D_t^k(\xi^1) - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_0D_t^{\alpha-k}(u_y) D_t^k(\xi^2) = X_{(2)}\Phi. \quad (12) \end{aligned}$$

Выполним расщепление уравнения (12) по всем интегралам и производным дробных порядков, которые могут рассматриваться теперь в качестве независимых переменных.

Расщепление по ${}_0D_t^{\alpha-k}(u_x)$ и ${}_0D_t^{\alpha-k}(u_y)$ приводит к уравнениям

$$D_t^k(\xi^1) = 0, \quad D_t^k(\xi^2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

интегрирование которых дает

$$\xi^1 = \theta^1(x, y), \quad \xi^2 = \theta^2(x, y),$$

где θ^1 и θ^2 — произвольные функции.

Аналогично, расщепление (12) по ${}_0D_t^{\alpha-k}(u)$ приводит к системе

$$(k+1)D_t^k(\tilde{\eta}) - (\alpha - k)D_t^{k+1}(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассматривая первые два уравнения этой системы (соответствующие $k = 1$ и $k = 2$), находим

$$D_t^2(\tilde{\eta}) = 0$$

или

$$\tilde{\eta}_{tt} + 2\tilde{\eta}_{tu}u_t + \tilde{\eta}_{uu}u_t^2 + \tilde{\eta}_u u_{tt} = 0.$$

Расщепление этого уравнения по u_t и u_{tt} дает требуемое условие $\tilde{\eta}_u = 0$. Решение оставшегося уравнения $\tilde{\eta}_{tt} = 0$ может быть представлено в виде

$$\tilde{\eta} = \vartheta(x, y)t + \varphi(x, y),$$

где $\vartheta(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — произвольные функции. Тогда уравнение, соответствующее $k = 1$, принимает вид

$$(\alpha - 1)D_t^2\tau = 2\vartheta(x, y).$$

Его интегрирование с учетом условия (8) дает

$$\tau = \phi(x, y)t^2 + \rho(x, y)t,$$

где $\rho(x, y)$ — произвольная функция, а $\phi(x, y) = \vartheta(x, y)/(\alpha - 1)$.

В результате приходим к искомым представлениям (5). Определяющее уравнение (12) принимает при этом вид

$${}_0D_t^\alpha(\psi) + [\varphi - \alpha\rho - (1 + \alpha)\phi t] \Phi = X_{(2)}\Phi. \quad (13)$$

□

Результат теоремы 3 можно усилить, если наложить дополнительные ограничения на вид функции Φ . Заметим, что функция Φ не зависит от u_t и ее производных. Следовательно, правая часть уравнения (13) будет линейно зависеть от переменных u_t , u_{tx} и u_{ty} в силу линейной зависимости от них координат продолженного оператора $X_{(2)}$. Осуществляя дополнительное расщепление уравнения (13) по этим переменным, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_x \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} + \tau_y \frac{\partial \Phi}{\partial u_y} + \tau_{xx} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xx}} + \tau_{xy} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xy}} + \tau_{yy} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{yy}} &= 0, \\ 2\tau_x \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xx}} + \tau_y \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xy}} &= 0, \\ \tau_x \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xy}} + 2\tau_y \frac{\partial \Phi}{\partial u_{yy}} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из двух последних уравнений этой системы следует, что при выполнении условия

$$4 \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xx}} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{yy}} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_{xy}} \right)^2 \neq 0 \quad (15)$$

справедливы равенства $\tau_x = \tau_y = 0$. Тогда в (5) имеем $\rho = C_1$, $\phi = C_2$, и

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2 t^2, \quad \xi^1 = \theta^1(x, y), \quad \xi^2 = \theta^2(x, y), \\ \eta &= \psi(t, x, y) + (\varphi(x, y) + (\alpha - 1)C_2 t) u, \end{aligned} \quad (16)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. Групповая классификация уравнения (1). Уравнение (1) может быть представлено в виде

$${}_0 D_t^\alpha u = F(u_x, u_y) u_{xx} + G(u_x, u_y) u_{yy} + H(u_x, u_y) u_{xy}, \quad (17)$$

где

$$F = 2u_x^2 f' + f, \quad G = 2u_y^2 g' + g, \quad H = 2u_x u_y (f' + g'). \quad (18)$$

Для уравнения (17) условие (15) принимает вид $4FG \neq H^2$. С учетом (18) нетрудно показать, что это условие нарушается только в том случае, когда $f(r) = g(r) = f_0/\sqrt{r}$, f_0 — произвольная постоянная. Однако подстановка этих функций в первое уравнение системы (14) снова приводит к уравнениям $\tau_x = \tau_y = 0$. Таким образом, представления (16) справедливы для уравнения (1) при любых $f, g > 0$.

Для уравнения (17) с учетом (16) уравнение (13) для определения функций $\theta^1, \theta^2, \varphi$ и ψ принимает вид

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^\alpha (\psi) + [\varphi - \alpha C_1 - (1 + \alpha)tC_2] (F u_{xx} + G u_{yy} + H u_{xy}) - \\ - \zeta_{11} F - \zeta_{22} G - \zeta_{12} H - \zeta_1 \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} u_{xx} + \frac{\partial G}{\partial u_x} u_{yy} + \frac{\partial H}{\partial u_x} u_{xy} \right) - \\ - \zeta_2 \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} u_{xx} + \frac{\partial G}{\partial u_y} u_{yy} + \frac{\partial H}{\partial u_y} u_{xy} \right) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

в котором

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \psi_x + \varphi_x u + (\varphi + (\alpha - 1)C_2 t - \theta_x^1) u_x - \theta_x^2 u_y, \\ \zeta_2 &= \psi_y + \varphi_y u - \theta_y^1 u_x + (\varphi + (\alpha - 1)C_2 t - \theta_y^2) u_y, \\ \zeta_{11} &= \psi_{xx} + \varphi_{xx} u + (2\varphi_x - \theta_{xx}^1) u_x - \theta_{xx}^2 u_y + \\ &\quad + (\varphi + (\alpha - 1)C_2 t - 2\theta_x^1) u_{xx} - 2\theta_x^2 u_{xy}, \\ \zeta_{12} &= \psi_{xy} + \varphi_{xy} u + (\varphi_y - \theta_{xy}^1) u_x + (\varphi_x - \theta_{xy}^2) u_y - \\ &\quad - \theta_{yy}^1 u_{xx} + (\varphi + (\alpha - 1)C_2 t - \theta_x^1 + \theta_y^2) u_{xy} - \theta_x^2 u_{yy}, \\ \zeta_{22} &= \psi_{yy} + \varphi_{yy} u - \theta_{yy}^1 u_x + (2\varphi_y - \theta_{yy}^2) u_y - \\ &\quad - 2\theta_y^1 u_{xy} + (\varphi + (\alpha - 1)C_2 t - 2\theta_y^2) u_{yy}. \end{aligned}$$

Расщепление (19) по u , uu_{xx} , uu_{yy} и uu_{zz} приводит к системе

$$\begin{aligned}\varphi_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + \varphi_y \frac{\partial F}{\partial u_y} &= 0, \\ \varphi_x \frac{\partial G}{\partial u_x} + \varphi_y \frac{\partial G}{\partial u_y} &= 0, \\ \varphi_x \frac{\partial H}{\partial u_x} + \varphi_y \frac{\partial H}{\partial u_y} &= 0, \\ \varphi_{xx}F + \varphi_{yy}G + \varphi_{xy}H &= 0,\end{aligned}\tag{20}$$

расщепление по tu_{xx} , tu_{yy} , tu_{zz} дает

$$\begin{aligned}C_2 \left(u_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial F}{\partial u_y} + \frac{2\alpha}{\alpha-1} F \right) &= 0, \\ C_2 \left(u_x \frac{\partial G}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial G}{\partial u_y} + \frac{2\alpha}{\alpha-1} G \right) &= 0, \\ C_2 \left(u_x \frac{\partial H}{\partial u_x} + u_y \frac{\partial H}{\partial u_y} + \frac{2\alpha}{\alpha-1} H \right) &= 0,\end{aligned}\tag{21}$$

а расщепление по u_{xx} , u_{yy} , u_{zz} дает

$$\begin{aligned}\gamma_1 \frac{\partial F}{\partial u_x} + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial u_y} &= 2\theta_x^1 F + \theta_y^1 H - \alpha C_1 F, \\ \gamma_1 \frac{\partial G}{\partial u_x} + \gamma_2 \frac{\partial G}{\partial u_y} &= 2\theta_x^2 G + \theta_y^2 H - \alpha C_1 G, \\ \gamma_1 \frac{\partial H}{\partial u_x} + \gamma_2 \frac{\partial H}{\partial u_y} &= 2\theta_x^2 F + 2\theta_y^1 G + (\theta_x^1 + \theta_y^2) H - \alpha C_1 H,\end{aligned}\tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\equiv \gamma_1(x, y, u_x, u_y) = \psi_x + (\varphi - \theta_x^1)u_x - \theta_x^2 u_y, \\ \gamma_2 &\equiv \gamma_2(x, y, u_x, u_y) = \psi_y - \theta_y^1 u_x + (\varphi - \theta_y^2)u_y.\end{aligned}$$

Оставшееся после указанных расщеплений уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}_0D_t^\alpha(\psi) &= (\psi_{xx} + (2\varphi_x - \theta_{xx}^1)u_x - \theta_{xx}^2 u_y)F + \\ &\quad + (\psi_{yy} - \theta_{yy}^1 u_x + (2\varphi_y - \theta_{yy}^2)u_y)G + \\ &\quad + (\psi_{xy} + (\varphi_y - \theta_{xy}^1)u_x + (\varphi_x - \theta_{xy}^2)u_y)H.\end{aligned}\tag{23}$$

Из (21) следует, что если $C_2 \neq 0$, то

$$F = u_x^{2\delta} \tilde{F}\left(\frac{u_x}{u_y}\right), \quad G = u_x^{2\delta} \tilde{G}\left(\frac{u_x}{u_y}\right), \quad H = u_x^{2\delta} \tilde{H}\left(\frac{u_x}{u_y}\right), \quad \delta = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

где \tilde{F} , \tilde{G} , \tilde{H} — произвольные функции. Подстановка этих представлений в (18) и решение получающихся в результате обыкновенных дифференциальных уравнений дает

$$f(r) = f_0 r^\delta, \quad g(r) = g_0 r^\delta, \quad f_0, g_0 = \text{const}, \quad r = u_x^2 + u_y^2.$$

Если $C_2 = 0$, то (21) выполнено тождественно. В этом случае подстановка (18) в (20) и решение получающихся в результате уравнений дает, что либо $f = f_0 = \text{const}$, $g = g_0 = \text{const}$, либо $\varphi_x = \varphi_y = 0$, то есть $\varphi = C_3 = \text{const}$.

Дальнейшая классификация проводится на основе анализа системы (22) и уравнения (23), который показывает, что выделяются отдельно случай степенных функций $f(r) = f_0 r^\beta$, $g(r) = g_0 r^\beta$ ($f_0, g_0 = \text{const}$) и случай $f(r) = g(r)$. Окончательные результаты классификации формулируются в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (1) в случае произвольных функций f и g имеет четырехмерную алгебру Ли симметрий с базисом

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{2}{\alpha} t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = t^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (24)$$

В случае $f(r) = f_0 r^\beta$, $g(r) = g_0 r^\beta$, $f_0, g_0 = \text{const}$, $\beta \neq 0$, при $f_0 \neq g_0$ алгебра расширяется до пятимерной оператором группы неравномерных растяжений

$$X_5 = \beta x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} + (1 + \beta) u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (25)$$

В частном случае $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$ происходит дополнительное расширение алгебры до шестимерной оператором проективной группы

$$X_6 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (\alpha - 1) t u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (26)$$

В изотропном случае ($f = g$) размерности всех указанных выше алгебр увеличиваются на единицу за счет дополнительно допускаемого оператора группы вращений

$$X_r = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (27)$$

При $\alpha \in (1, 2)$ размерности всех приведенных алгебр дополнительно увеличиваются на единицу, а базис дополняется оператором

$$X_\alpha = t^\alpha \frac{\partial}{\partial u}.$$

Линейный случай $f = f_0$, $g = g_0$, $f_0, g_0 = \text{const}$, растяжением пространственных переменных сводится к $f_0 = g_0 = 1$. В этом случае алгебра является бесконечномерной и ее базис образуют операторы X_1, X_2, X_3 из (24), оператор X_r из (27) и операторы

$$X_u = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_\infty = \psi \frac{\partial}{\partial u},$$

где функция $\psi(t, x, y)$ является произвольным решением линейного уравнения

$${}_0 D_t^\alpha u = u_{xx} + u_{yy}.$$

Основные отличия результатов теоремы 2 от аналогичных результатов групповой классификации классического ортотропного уравнения фильтрации (соответствующего $\alpha = 1$) заключаются в следующем:

- 1) дробно-дифференциальное уравнение фильтрации не допускает оператор группы переносов по временной переменной t , что является характерной особенностью всех дифференциальных уравнений с дробными производными по времени [18, 19];
- 2) выделяется особый вид степенной зависимости коэффициентов пьезопроводности, не имеющий аналога в классическом уравнении фильтрации, при котором уравнение допускает оператор проективной группы X_6 ;
- 3) операторы групп растяжений X_3 и X_5 оказываются зависящими от порядка дробного дифференцирования α .

Также от него зависят операторы X_4 и X_α , соответствующие сдвигу u на частное решение дробно-дифференциального уравнения.

Полученная в теореме 2 групповая классификация уравнения (1) может быть использована для нахождения его инвариантно-групповых решений и построения законов сохранения.

3. Представление инвариантных решений. Рассмотрим задачу построения представлений инвариантно-групповых решений для нелинейного ортотропного уравнения (1) по допускаемым им неподобным двумерным подалгебрам алгебр Ли симметрий.

В случае произвольных функций f и g ($f \neq g$) уравнение допускает четырехмерную алгебру Ли симметрий (см. теорему 2) с базисом (24). Данная алгебра изоморфна алгебре $A_{4,5}^{a,a}$ (по классификации [29]) с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = ae_2, \quad [e_3, e_4] = ae_3, \quad -1 < b < 1,$$

в которую она переходит в результате замены базиса

$$e_1 = X_3, \quad e_2 = X_1, \quad e_3 = X_2, \quad e_4 = bX_4, \quad b = \frac{\alpha}{2 - \alpha}.$$

Построим неподобные инвариантно-групповые решения уравнения (1) на основе оптимальной системы двумерных подалгебр алгебры $A_{4,5}^{a,a}$, построенной в [29]:

$$\begin{array}{ll} 1) \{e_1 + \varepsilon e_2, e_3\}, & 4) \{e_1, e_2 \cos \theta + e_3 \sin \theta\}, \\ 2) \{e_1 + \varepsilon e_3, e_2 + \beta e_3\}, & 5) \{e_1, e_4\}, \\ 3) \{e_2, e_3\}, & 6) \{e_2 \cos \theta + e_3 \sin \theta, e_4\}, \end{array}$$

где $\theta \in [0, \pi)$, $\varepsilon = \pm 1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Подалгебры 5) и 6) не позволяют построить инвариантное решение, так как не удовлетворяют соответствующему необходимому условию его существования (см., например, [13]). Вычисление инвариантов остальных подалгебр приводит к следующим анзацам инвариантных решений:

$$\begin{array}{l} 1) u = \varepsilon t^{\alpha-1} x + \varphi(t), \\ 2) u = -\varepsilon \beta t^{\alpha-1} x + t^{\alpha-1} y + \varphi(t), \\ 3) u = \varphi(t), \\ 4) u = (y \cos \theta - x \sin \theta) \varphi(\xi), \quad \xi = \frac{t}{|y \cos \theta - x \sin \theta|^{\frac{2}{\alpha}}}, \end{array}$$

где $\varphi(z)$ — новая искомая функция одного аргумента. Подстановка этих анзацев в исходное уравнение сводит задачу нахождения инвариантного решения к решению так называемых редуцированных уравнений (или фактор-уравнений), представляющих собой в данном случае обыкновенное дробно-дифференциальное уравнение порядка α . В первых трех случаях это уравнение имеет вид

$${}_0D_t^\alpha \varphi = 0,$$

его общее решение хорошо известно [1, 2]:

$$\varphi(t) = Ct^{\alpha-1},$$

где C — произвольная постоянная. В результате приходим к следующим весьма простым неподобным инвариантным решениям:

- 1) $u = Ct^{\alpha-1}$,
- 2) $u = t^{\alpha-1}(\varepsilon x + C)$,
- 3) $u = t^{\alpha-1}(\varepsilon\beta x + y + C)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Более интересным оказывается случай 4), для которого редуцированное уравнение имеет вид

$${}_0D_\xi^\alpha \varphi + \frac{2}{\alpha} \xi [\sin^2 \theta(\psi f(\psi))_\xi + \cos^2 \theta(\psi g(\psi))_\xi] = 0, \quad (28)$$

где $\psi(\xi) = \varphi(\xi) - \frac{2}{\alpha} \xi \varphi'(\xi)$.

Уравнение (28) в общем случае аналитически решено быть не может, поэтому рассмотрим некоторые его частные случаи.

Пусть $f = 1$ и $g(\psi) = \psi^{-1}$. Тогда уравнение (28) переходит в линейное уравнение

$$\alpha^2 {}_0D_\xi^\alpha \varphi = 4\xi^2 \sin^2 \theta \varphi'' + 2(2 - \alpha) \sin^2 \theta \xi \varphi'.$$

При $\theta = 0$ решение уравнения имеет вид $\varphi(\xi) = C\xi^{\alpha-1}$, что дает инвариантное решение исходного уравнения

$$u = Ct^{\alpha-1} y^{\frac{2}{\alpha}-1}.$$

При $\theta \neq 0$ заменой переменных $\tau = \xi(\sin \theta)^{\frac{2}{\alpha}}$, $z(\tau) = \varphi(\xi(\tau))$ уравнение (28) приводится к виду

$$\alpha^2 {}_0D_\tau^\alpha z = 4\tau^2 z'' + 2(2 - \alpha)\tau z',$$

который является частным случаем уравнения, рассмотренного в работе [30], и имеет общее решение

$$z(\tau) = \tau^{-\frac{\alpha}{2}} \left[C_1 \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2}; \tau^{-\frac{\alpha}{2}}\right) + C_2 \phi\left(-\frac{\alpha}{2}, 1 + \frac{\alpha}{2}; -\tau^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \right].$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные,

$$\phi(\rho, \mu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\rho k + \mu)} \frac{z^k}{k!}, \quad \rho > 0, \quad \mu, z \in \mathbb{C}$$

— функция Райта. Тогда инвариантное решение имеет вид

$$u = (y \cos \theta - x \sin \theta) z \left(\frac{t(\sin \theta)^{\frac{2}{\alpha}}}{|y \cos \theta - x \sin \theta|^{\frac{2}{\alpha}}} \right).$$

Теперь рассмотрим случай $f(\psi) = \psi^{\beta-1}$ ($\beta \neq 0, 1$), $g(\psi) = \psi^{-1}$. Тогда уравнение (28) принимает вид

$$\alpha^{\beta+1} {}_0D_{\xi}^{\alpha} \varphi + 2\beta \sin^2 \theta \xi (\alpha \varphi - 2\xi \varphi')^{\beta-1} ((\alpha - 2)\varphi' - 2\xi \varphi'') = 0.$$

Данное уравнение при $\alpha < \beta < 1$ имеет частное степенное решение

$$\varphi(\xi) = A \xi^{\gamma}, \quad A = \left[\frac{\alpha^{\beta+1}}{2\beta \sin^2 \theta} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad \gamma = \frac{1 - \alpha}{\beta - 1}.$$

Соответствующее инвариантное решение исходного уравнения имеет вид

$$u = At^{\gamma} \frac{(y \cos \theta - x \sin \theta)}{|y \cos \theta - x \sin \theta|^{\frac{2}{\alpha} \gamma}}.$$

Теперь рассмотрим случай $f(r) = f_0 r^{\beta}$, $g(r) = g_0 r^{\beta}$, $f_0, g_0 = \text{const}$ ($f_0 \neq g_0$), $\beta \neq 0$. В этом случае алгебра Ли симметрий L_5 является пятимерной с базисом X_1, \dots, X_5 , определяемым (24), (25). Соответствующая оптимальная система подалгебр строится на основе двухшагового алгоритма, предложенного академиком Л. В. Овсянниковым в работе [31] (см. также [32]). Базисы найденных неподобных двумерных подалгебр из оптимальной системы $\Theta_2 L_5$ и соответствующие представления инвариантных решений с одной независимой переменной приведены в табл. 1. В таблице для подалгебр используется сокращенная форма записи: например, $\Theta, p_2 + 4$ означает двумерную подалгебру с базисом из операторов $X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta, pX_2 + X_4$. В табл. 2 представлены аналогичные результаты для шестимерной алгебры L_6 с базисом X_1, \dots, X_6 , соответствующей частному случаю $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$.

Все анзацы инвариантных решений записаны в табл. 1 и 2 таким образом, чтобы после симметричной редукции соответствующее редуцированное уравнение относительно функции $\varphi(z)$ было либо обыкновенным дифференциальным уравнением целого порядка (если z не зависит от t), либо обыкновенным дробно-дифференциальным уравнением с дробной производной Римана—Ливилля по переменной z . Замены переменных, позволяющие сохранить тип оператора дробного дифференцирования при симметричной редукции, приведены в [30].

4. Построение законов сохранения. Уравнение (1) не обладает классическим лагранжианом, поэтому для построения его законов сохранения с использованием симметрий может быть применен принцип нелинейной самосопряженности, изначально предложенный профессором Н. Х. Ибрагимовым для дифференциальных уравнений целого порядка [27, 28] и обобщенный в работах [33, 34] на дифференциальные уравнения дробного порядка.

Уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\mathcal{F}(t, x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, {}_0D_t^{\alpha} u) = 0.$$

Представления инвариантных решений для алгебры L_5
 [Representations of invariant solutions for algebra L_5]

no.	a subalgebra of $\Theta_2 L_5$	$u(t, x, y)$
1	1, 2	$\varphi(t)$
2	2, $p1 + 4$	$p^{-1}xt^{\alpha-1} + \varphi(t) \quad (p \neq 0)$
3	3, 5	$x^\gamma t^{\alpha(1-\gamma)/2} \varphi(y/x)$
4	2, $1 + 3 - 5$	$e^{(1-\gamma)x} \varphi(te^{-2x/\alpha})$
5	$\Theta, p2 + 4$	$p^{-1}t^{\alpha-1}(x \operatorname{ctg} \theta - y) + \varphi(t) \quad (p, \theta \neq 0)$
6	$\Theta, 5$	$(x \cos \theta - y \sin \theta)^\gamma \varphi(t)$
7	$\Theta, 3 + r5$	$z^{1+p^\gamma} \varphi(tz^{-2/[\alpha(p+1)]}) \quad (r \neq -1);$ $t^{\alpha(1-\gamma)/2} \varphi(z) \quad (r = -1);$ $z = (x \cos \theta - y \sin \theta)$
8	$\Theta, 2 + 3 - 5$	$z^{1-\gamma} \varphi(tz^{-2/\alpha}), \quad z = e^{y-x \operatorname{ctg} \theta} \quad (\theta \neq 0);$ $t^{\alpha(1-\gamma)/2} \varphi(x) \quad (\theta = 0)$
9	$\Theta, 3+4-\frac{a}{\gamma}5 \quad (\gamma \neq 0)$ $\Theta, 4 + 5 \quad (\gamma = 0)$	$z^{1-a} \varphi(tz^{-2/\alpha}), \quad z = (x \cos \theta - y \sin \theta)^{1-a/\gamma} \quad (\gamma \neq a);$ $t^{\alpha-1}[(\alpha/2) \ln t + \varphi(x \cos \theta - y \sin \theta)] \quad (\gamma = a)$ $\varphi(t) + t^{\alpha-1} \ln x \cos \theta - y \sin \theta $
10	$p1+q2+4, 3+\frac{1-a}{\gamma-1}5$	$u = p^{-1}xt^{\alpha-1} + z^{2\gamma-1-a\gamma} \varphi(tz^{2(1-\gamma)/\alpha}),$ $z = (qx - py)^{1/(\gamma-a)} \quad (\gamma \neq a, p \neq 0);$ $q^{-1}t^{\alpha-1}y + z^{2\gamma-1-a\gamma} \varphi(tz^{1-\gamma}),$ $z = x^{1/(\gamma-a)} \quad (\gamma \neq a, p = 0, q \neq 0);$ $p^{-1}t^{\alpha-1}[x + \varphi(qx - py)] \quad (\gamma = a, p \neq 0);$ $q^{-1}t^{\alpha-1}[y + \varphi(x)] \quad (\gamma = a, p = 0, q \neq 0)$
11	$\Theta, p2 + 3 + 4 - 5$ $(\gamma = a, p \neq 0)$	$z^{a-1} \varphi(tz^{-2/\alpha}), \quad z = e^{(y-x \operatorname{ctg} \theta)/p} \quad (\theta \neq 0);$ $t^{\alpha-1}[(\alpha/2) \ln t + \varphi(x)] \quad (\theta = 0)$
12	$X_2, p1 + 3 + 4 - 5$ $(\gamma = a, p \neq 0)$	$t^{\alpha-1}[(\alpha/2) \ln t + \varphi(te^{-2x/(\alpha p)})]$
13	$p1+q2+4, \Theta+3-5$ $(\gamma = a)$	$p^{-1}t^{\alpha-1}[x - (\alpha/2) \sin \theta \ln t + \varphi(tz)],$ $z = e^{2(qx-py)/(p \cos \theta - q \sin \theta)} \quad (p, p \cos \theta + q \sin \theta \neq 0);$ $q^{-1}t^{\alpha-1}[y - (\alpha/2) \cos \theta \ln t + \varphi(te^{-2x/(\alpha \sin \theta)})]$ $(p = 0, q, \theta \neq 0);$ $q^{-1}t^{\alpha-1}[y - (\alpha/2) \ln t + \varphi(x)] \quad (p, \theta = 0, q \neq 0);$ $(p\sqrt{p^2+q^2})^{-1}t^{\alpha-1}[\sqrt{p^2+q^2}x - (\alpha/2)p \ln t + \varphi(qx-py)]$ $(p \neq 0, p \cos \theta = q \sin \theta)$

Here are $\Theta = X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \gamma = 1 + \beta^{-1}, a = 2\alpha^{-1} - 1, p, q \geq 0, r \in \mathbb{R}.$

Представления инвариантных решений для алгебры L_6
 [Representations of invariant solutions for algebra L_6]

no.	a subalgebra of $\Theta_2 L_6$	$u(t, x, y)$
1–10	are identical as 1–10 from Table 1	are identical as 1–10 from Table 1
11	5, 6	$t^{\alpha-1} x^{1/\alpha} \varphi(y/x)$
12	$3 + p5, 6$	$t^{\alpha-1} x^{(2+p-\alpha)/(\alpha(p+1))} \varphi(y/x)$ ($p \neq -1$)
13	$\Theta, 6$	$t^{\alpha-1} \varphi(x \cos \theta - y \sin \theta)$
14	$\Theta, 5 + \varepsilon 6$	$t^{\alpha-1} z^{1/\alpha} \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon+t \ln z}\right)$, $z = x \cos \theta - y \sin \theta$
15	$\Theta, 4 + 6$	$t^{\alpha-1} \varphi(x \cos \theta - y \sin \theta)$
16	$\Theta, 2 + p4 + 6$ ($\theta \neq 0$)	$t^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{t}{1+tz}\right)$, $z = y - x \operatorname{ctg} \theta$ ($p = 0$)
17	$2, 1 + p4 + 6$	$t^{\alpha-1} \varphi\left(\frac{t}{1+tx}\right)$ ($p = 0$)
18	$p1 + q2 + 4, 6$	$q^{-1} t^{\alpha-1} [y + \varphi(py - qx)]$ ($q \neq 0$) $p^{-1} t^{\alpha-1} [x + \varphi(y)]$ ($p \neq 0$)
19	$p1 + q2 + 4, 1 + 6$	$q^{-1} t^{\alpha-1} \left[y + \varphi\left(\frac{t}{q+t(qx-py)}\right) \right]$ ($q \neq 0$) $p^{-1} t^{\alpha-1} [x + t^{-1} + \varphi(y)]$ ($p \neq 0$)
20	$p1 + q2 + 4, r1 + 2 + 6$	$q^{-1} t^{\alpha-1} \left[y + t^{-1} + \varphi\left(\frac{t}{qr-p+t(qx-py)}\right) \right]$ ($q \neq 0$) $p^{-1} t^{\alpha-1} \left[x - ry + \varphi\left(\frac{t}{1+ty}\right) \right]$ ($p \neq 0$)

Here are $\Theta = X_1 \sin \theta + X_2 \cos \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $p, q \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$.

Для него вводится формальный лагранжиан вида $\mathcal{L} = v \mathcal{F}$, где $v = v(t, x, y)$ — новая зависимая переменная. Тогда уравнение, сопряженное к (1), находится как

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0,$$

где вариационная производная имеет в данном случае вид

$$\frac{\delta}{\delta u} = -D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + D_x D_y \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + {}^C D_T^\alpha \frac{\partial}{\partial {}_0 D_t^\alpha u}.$$

Здесь ${}^C D_T^\alpha$ — оператор правостороннего дробного дифференцирования Гера-симова–Капуто порядка α , определенный для $t \in (0, T)$ [2, 7]:

$${}^C D_T^\alpha u = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^T \frac{1}{(\tau - t)^{\alpha-n+1}} \frac{\partial^n u(\tau, x, y)}{\partial \tau^n} d\tau, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Для уравнения (1), представленного в форме (17), вычисления приводят к следующему сопряженному уравнению:

$${}^C D_T^\alpha v = -D_x \left[v \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} u_{xx} + \frac{\partial G}{\partial u_x} u_{yy} + \frac{\partial H}{\partial u_x} u_{xy} \right) \right] -$$

$$\begin{aligned}
 & -D_y \left[v \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} u_{xx} + \frac{\partial G}{\partial u_y} u_{yy} + \frac{\partial H}{\partial u_y} u_{xy} \right) \right] + v_{xx} F + 2v_x D_x F + v D_x^2 F + \\
 & + v_{yy} G + 2v_y D_y G + v D_y^2 G + v_{xy} H + v_x D_y H + v_y D_x H + v D_x D_y H. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Если найдется такая подстановка $v = \varphi(t, x, y, u)$, что приведенное сопряженное уравнение будет выполнено тождественно на всех решениях $u(t, x, y)$ исходного уравнения (1), то уравнение (1) называется *нелинейно самосопряженным*. В [28] доказано, что любое линейное уравнение является нелинейно самосопряженным. Поэтому в линейном случае $f = f_0 = \text{const}$, $g = g_0 = \text{const}$ уравнение (1) является нелинейно самосопряженным с подстановкой $v = \psi(t, x, y)$, где $\psi(t, x, y)$ — любое решение его сопряженного уравнения (29), которое в данном случае также будет линейным. Для нелинейного случая в результате вычислений получено, что $\varphi = \varphi(x, y)$, и эта функция должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 \varphi_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + \varphi_y \left(\frac{\partial H}{\partial u_x} - \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) &= 0, \\
 \varphi_x \left(\frac{\partial H}{\partial u_y} - \frac{\partial G}{\partial u_x} \right) + \varphi_y \frac{\partial G}{\partial u_y} &= 0, \\
 \varphi_x \frac{\partial F}{\partial u_y} + \varphi_y \frac{\partial G}{\partial u_x} &= 0, \\
 \varphi_{xx} F + \varphi_{yy} G + \varphi_{xy} H &= 0.
 \end{aligned}$$

Для произвольных функций f и g единственным решением этой системы будет $\varphi = c$, где c — произвольная постоянная. Также выделяются два особых случая:

- 1) f — произвольная функция, $g = \text{const}$, тогда $\varphi = c_1 + c_2 y$;
- 2) g — произвольная функция, $f = \text{const}$, тогда $\varphi = c_1 + c_2 x$.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. Уравнение (1) является нелинейно самосопряженным. Соответствующая подстановка $v = \varphi(t, x, y, u)$, обращающая уравнение (29) в тождество на всех решениях уравнения (1), имеет следующий вид:

- 1) $v = c$ в случае произвольных функций f и g , при этом формальный лагранжиан \mathcal{L} совпадает с самим уравнением (1);
- 2) $v = c_1 + c_2 y$ в случае, когда функция f произвольная, а $g = \text{const}$;
- 3) $v = c_1 + c_2 x$ в случае, когда функция g произвольная, а $f = \text{const}$;
- 4) $v = \psi(t, x, y)$, где $\psi(t, x, y)$ — любое решение линейного сопряженного уравнения (29) при $f = \text{const}$, $g = \text{const}$.

Здесь c, c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Поскольку уравнение (1) является нелинейно самосопряженным, по любой его известной симметрии вида (3) может быть найден соответствующий закон сохранения

$$D_t C^t + D_x C^x + D_y C^y = 0.$$

Координаты сохраняющегося вектора (C^t, C^x, C^y) будут при этом находиться

по следующим формулам (см. [19, 35]):

$$\begin{aligned} C^t &= {}_0I_t^{1-\alpha}W \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {}_0D_t^\alpha u} + J \left\{ W, D_t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial {}_0D_t^\alpha u} \right) \right\}, \\ C^x &= W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} \right) + D_x(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} + D_y(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}, \\ C^y &= W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - D_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} \right) + D_x(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} + D_y(W) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}}, \end{aligned}$$

где $W = \eta - \tau u_t - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y$,

$$J\{f, g\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x, y)g(\mu, x, y)}{(\mu - \tau)^\alpha} d\mu d\tau.$$

В случае произвольных f и g подстановка в эти формулы формального лагранжиана

$$\mathcal{L} = {}_0D_t^\alpha u - F(u_x, u_y)u_{xx} - G(u_x, u_y)u_{yy} - \frac{1}{2}H(u_x, u_y)u_{xy} - \frac{1}{2}H(u_x, u_y)u_{yx},$$

где функции F, G, H определены в (18), дает

$$C^t = {}_0I_t^{1-\alpha}W,$$

$$\begin{aligned} C^x &= W \left[2u_x u_y (u_x u_{xy} + u_y u_{yy}) (f'' - g'') + (u_y u_{xy} + u_x u_{yy}) (f' - g') \right] - \\ &\quad - (f + 2u_x^2 f') D_x(W) - u_x u_y (f' + g') D_y(W), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^y &= W \left[2u_x u_y (u_y u_{xy} + u_x u_{xx}) (g'' - f'') + (u_x u_{xy} + u_y u_{xx}) (g' - f') \right] - \\ &\quad - u_x u_y (f' + g') D_x(W) - (g + 2u_y^2 g') D_y(W). \end{aligned}$$

Операторам (24) соответствуют следующие значения W :

$$W_1 = -u_x, \quad W_2 = -u_y, \quad W_3 = u - \frac{2}{\alpha} t u_t - x u_x - y u_y, \quad W_4 = t^{\alpha-1}.$$

Легко видеть, что оператор X_4 дает тривиальный закон сохранения с $C^t = 0$, а операторы X_1 и X_2 дают законы сохранения, сводящиеся к тривиальному элементарными преобразованиями с учетом самого уравнения (1). Единственный нетривиальный закон сохранения порождается оператором X_3 , соответствующий сохраняющийся вектор имеет координаты

$$C^t = {}_0I_t^{1-\alpha}u, \quad C^x = -f(u_x^2 + u_y^2)u_x, \quad C^y = -g(u_x^2 + u_y^2)u_y. \quad (30)$$

Данный закон сохранения соответствует исходному уравнению (1). Других нетривиальных законов сохранения в случае произвольных функций f и g метод нелинейной самосопряженности с подстановкой вида $v = \varphi(t, x, y, u)$ для уравнения (1) не дает.

В случае $f(r) = f_0 r^\beta$, $g(r) = g_0 r^\beta$ оператор X_5 из (25) также порождает закон сохранения с сохраняющимся вектором (30). При $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$ оператор X_6 из (26) порождает новый закон сохранения, координаты сохраняющегося вектора которого имеют вид

$$C^t = t_0 I_t^{1-\alpha} u - {}_0 I_t^{2-\alpha} u, \quad C^x = -f_0 t u_x (u_x^2 + u_y^2)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad C^y = -g_0 t u_y (u_x^2 + u_y^2)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

В случае $f = g$ оператор X_r из (27) также порождает лишь тривиальный закон сохранения.

Более интересными представляются случаи 2) и 3) из теоремы 3. Для произвольной функции f и $g = g_0 = \text{const}$ при $v = c_1 + c_2 y$ для операторов X_1 и X_2 получаем закон сохранения с сохраняющимся вектором (30). Оператор X_3 порождает в этом случае новый закон сохранения:

$$C^t = y_0 I_t^{1-\alpha} u, \quad C^x = -y u_x f(u_x^2 + u_y^2), \quad C^y = g_0 (u - y u_y).$$

Аналогично, для случая $f = f_0 = \text{const}$ и произвольной функции g оператор X_3 при $v = c_1 + c_2 x$ дает

$$C^t = x_0 I_t^{1-\alpha} u, \quad C^x = f_0 (u - x u_x), \quad C^y = -x u_y g(u_x^2 + u_y^2).$$

Других законов сохранения для нелинейного уравнения (1) метод нелинейной самосопряженности с подстановкой вида $v = \varphi(t, x, y, u)$ не дает.

Найденные законы сохранения могут быть использованы, в частности, для построения частных решений уравнения (1) по методу, предложенному в [36].

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в получении основных результатов статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 1.3103.2017/4.6).

Библиографический список

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. New York: Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993. xxxvi+976 pp.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xv+523 pp.
3. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.
4. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach // *Phys. Rep.*, 2000. vol. 339, no. 1. pp. 1–77. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
5. Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore: World Scientific, 2000. vii+463 pp.

6. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
8. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack: World Scientific, 2010. xx+347 pp.
9. Головизнин В. М., Кондратенко П. С., Матвеев Л. В. и др. *Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях*. М.: Наука, 2010. 342 с.
10. *Fractional Dynamics: Recent Advances* / eds. J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler. Hackensack: World Scientific, 2011. xiv+515 pp.
11. *Fractional kinetics in solids: Anomalous charge transport in semiconductors, dielectrics and nanosystems* / eds. V. Uchaikin, R. Sibatov. Boca Raton: CRC Press, 2013. xvi+257 pp. doi: 10.1142/8185.
12. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J. J. *Fractional calculus: models and numerical methods* / Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. vol. 5. Hackensack: World Scientific, 2017. xxviii+448 pp. doi: 10.1142/10044.
13. Ovsyannikov L. V. *Group analysis of differential equations*. New York: Academic Press, 1982. xvi+416 pp.
14. Olver P. J. *Applications of Lie groups to differential equations* / Graduate Texts in Mathematics. vol. 107. New York: Springer, 2000. xxviii+513 pp.
15. Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. *Applications of symmetry methods to partial differential equations* / Applied Mathematical Sciences. vol. 168. New York: Springer, 2010. xix+398 pp. doi: 10.1007/978-0-387-68028-6.
16. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. *Symmetries of integro-differential equations. With applications in mechanics and plasma physics.* / Lecture Notes in Physics. vol. 806. Dordrecht: Springer, 2010. xiii+305 pp. doi: 10.1007/978-90-481-3797-8.
17. Ibragimov N. H. *Transformation groups and Lie algebras*. Hackensack: World Scientific, 2013. x+185 pp. doi: 10.1142/8763.
18. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations / *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Vol. 2 Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Y. Luchko. Berlin: De Gruyter, 2019. pp. 65–90. doi: 10.1515/9783110571660-004.
19. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs / *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Vol. 2 Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Y. Luchko. Berlin: De Gruyter, 2019. pp. 353–382. doi: 10.1515/9783110571660-016.
20. Raghavan R., Chen C. Fractional diffusion in rocks produced by horizontal wells with multiple, transverse hydraulic fractures of finite conductivity // *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2013. vol. 109. pp. 133–143. doi: 10.1016/j.petrol.2013.08.027.
21. Obembe A. D. Al-Yousef H. Y., Hossain M. E., Abu-Khamsin S. A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review // *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2017. vol. 157. pp. 312–327. doi: 10.1016/j.petrol.2017.07.035.
22. Газизов Р. К., Лукашук С. Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // *Вестник УГАТУ*, 2017. Т. 21, № 4. С. 104–112.
23. Бабков О. К. О групповой классификации некоторых эволюционных уравнений / *Тезисы международной конференции Mogan-16* (28 октября – 2 ноября 2013 г.). Уфа: УГАТУ, 2013. С. 6–7.
24. Овсянников Л. В. О свойстве x -автономии // *Докл. РАН*, 1993. Т. 330, № 5. С. 559–561.
25. Чиркунов Ю. А. Условия линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // *Докл. РАН*, 2009. Т. 426, № 5. С. 605–607.
26. Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукашук С. Ю. Уравнения с производными дробного порядка: замены переменных и нелокальные симметрии // *Уфимск. матем. журн.*, 2012. Т. 4, № 4. С. 54–68.

27. Ibragimov N. H. A new conservation theorem // *J. Math. Anal. Appl.*, 2007. vol. 333, no. 1. pp. 311–328. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078.
28. Ibragimov N. H. Nonlinear self-adjointness and conservation laws // *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2011. vol. 44, 432002. doi: 10.1088/1751-8113/44/43/432002.
29. Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // *J. Math. Phys.*, 1977. vol. 18, no. 7. pp. 1449–1455. doi: 10.1063/1.523441.
30. Лукащук С. Ю. Симметричная редукция и инвариантные решения нелинейного дробно-дифференциального уравнения аномальной диффузии с источником // *Уфимск. матем. журн.*, 2016. Т. 8, № 4. С. 114–126.
31. Овсянников Л. В. Об оптимальных системах подалгебр // *Докл. РАН*, 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
32. Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В. *Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды*. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.
33. Lukashchuk S. Yu. Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations // *Nonlinear Dyn.*, 2015. vol. 80, no. 1–2. pp. 791–802. doi: 10.1007/s11071-015-1906-7.
34. Gazizov R. K., Ibragimov N. H., Lukashchuk S. Yu. Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time-fractional Kompaneets equations // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.*, 2015. vol. 23, no. 1–3. pp. 153–163. doi: 10.1016/j.cnsns.2014.11.010.
35. Лукащук С. Ю. О построении законов сохранения для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // *ТМФ*, 2015. Т. 184, № 2. С. 179–199. doi: 10.4213/tmf8833.
36. Ибрагимов Н. Х., Авдонина Е. Д. Нелинейная самосопряженность, законы сохранения и построение решений уравнений в частных производных с помощью законов сохранения // *УМН*, 2013. Т. 68, № 5(413). С. 111–146. doi: 10.4213/rm9536.

MSC: 35R11, 76M60, 76S05

Group classification, invariant solutions and conservation laws of nonlinear orthotropic two-dimensional filtration equation with the Riemann–Liouville time-fractional derivative

V. O. Lukashchuk, S. Yu. Lukashchuk

Ufa State Aviation Technical University,
12, K. Marx st., Ufa, 450008, Russian Federation.

Abstract

A nonlinear two-dimensional orthotropic filtration equation with the Riemann–Liouville time-fractional derivative is considered. It is proved that this equation can admit only linear autonomous groups of point transformations. The Lie point symmetry group classification problem for the equation in question is solved with respect to coefficients of piezoconductivity. These coefficients are assumed to be functions of the square of the pressure gradient absolute value. It is proved that if the order of fractional differentiation is less than one then the considered equation with arbitrary coefficients admits a four-parameter group of point transformations in orthotropic case, and a five-parameter group in isotropic case. For the power-law piezoconductivity, the group admitted by the equation is five-parametric in orthotropic case, and six-parametric in isotropic case. Also, a special case of power function of piezoconductivity is determined for which there is an additional extension of admitted groups by the projective transformation. There is no analogue of this case for the integer-order filtration equation. It is also shown that if the order of fractional differentiation $\alpha \in (1, 2)$ then dimensions of admitted groups are incremented by one for all cases since an additional translation symmetry exists. This symmetry is corresponded to an additional particular solution of the fractional filtration equation under consideration.

Using the group classification results for orthotropic case, the representations of group-invariant solutions are obtained for two-dimensional subalgebras from optimal systems of symmetry subalgebras. Examples of reduced equations obtained by the symmetry reduction technique are given, and some exact solutions of these equations are presented.

Research Article

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Lukashchuk V. O., Lukashchuk S. Yu. Group classification, invariant solutions and conservation laws of nonlinear orthotropic two-dimensional filtration equation with the Riemann–Liouville time-fractional derivative, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 226–248. doi: 10.14498/vsgtu1761 (In Russian).

Authors' Details:

Veronika O. Lukashchuk  <https://orcid.org/0000-0002-3082-1446>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems; e-mail: voluks@gmail.com

Stanislav Yu. Lukashchuk   <https://orcid.org/0000-0001-9209-5155>

Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems; e-mail: lsu@ugatu.su

It is proved that the considered time-fractional filtration equation is non-linearly self-adjoint and therefore the corresponding conservation laws can be constructed. The components of obtained conserved vectors are given in an explicit form.

Keywords: fractional filtration equation, group classification, Lie point symmetry, invariant solution, conservation law.

Received: 29th November, 2019 / Revised: 17th May, 2020 /

Accepted: 1st June, 2020 / First online: 30th June, 2020

Competing interests. Authors declare no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in article results and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State task no. 1.3103.2017/4.6).

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. New York, Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993, xxxvi+976 pp.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp.
3. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
4. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach, *Phys. Rep.*, 2000, vol. 339, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
5. Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics*. Singapore, World Scientific, 2000, vii+463 pp.
6. Nakhshuev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
7. Uchaikin V. V. *Metod drobnnykh proizvodnykh* [Method of Fractional Derivatives]. Ul'yanovsk, Artishok, 2008, 512 pp. (In Russian)
8. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Hackensack, World Scientific, 2010, xx+347 pp.
9. Goloviznin V. M., Kondratenko P. S., Matveev L. V. *Anomal'naiia diffuziia radionuklidov v sil'noneodnorodnykh geologicheskikh formatsiakh* [Anomalous Radionuclide Diffusion in Highly Heterogeneous Geological Formations]. Moscow, Nauka, 2010, 342 pp. (In Russian)
10. *Fractional Dynamics: Recent Advances*, eds. J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler. Hackensack, World Scientific, 2011, xiv+515 pp.
11. *Fractional kinetics in solids: Anomalous charge transport in semiconductors, dielectrics and nanosystems*, eds. V. Uchaikin, R. Sibatov. Boca Raton, CRC Press, 2013, xvi+257 pp. doi: 10.1142/8185.
12. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J. J. *Fractional calculus: models and numerical methods*, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, vol. 5. Hackensack, World Scientific, 2017, xxviii+448 pp. doi: 10.1142/10044.

13. Ovsyannikov L. V. *Group analysis of differential equations*. New York, Academic Press, 1982, xvi+416 pp.
14. Olver P. J. *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107. New York, Springer, 2000, xxviii+513 pp.
15. Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C. *Applications of symmetry methods to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 168. New York, Springer, 2010, xix+398 pp. doi: 10.1007/978-0-387-68028-6.
16. Grigoriev Yu. N., Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Meleshko S. V. *Symmetries of integro-differential equations. With applications in mechanics and plasma physics.*, Lecture Notes in Physics, vol. 806. Dordrecht, Springer, 2010, xiii+305 pp. doi: 10.1007/978-90-481-3797-8.
17. Ibragimov N. H. *Transformation groups and Lie algebras*. Hackensack, World Scientific, 2013, x+185 pp. doi: 10.1142/8763.
18. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations, In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Vol. 2 Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Y. Luchko. Berlin, De Gruyter, 2019, pp. 65–90. doi: 10.1515/9783110571660-004.
19. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Y. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs, In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Vol. 2 Fractional Differential Equations; eds. A. Kochubei, Y. Luchko. Berlin, De Gruyter, 2019, pp. 353–382. doi: 10.1515/9783110571660-016.
20. Raghavan R., Chen C. Fractional diffusion in rocks produced by horizontal wells with multiple, transverse hydraulic fractures of finite conductivity, *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2013, vol. 109, pp. 133–143. doi: 10.1016/j.petrol.2013.08.027.
21. Obembe A. D. Al-Yousef H. Y., Hossain M. E., Abu-Khamsin S. A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review, *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2017, vol. 157, pp. 312–327. doi: 10.1016/j.petrol.2017.07.035.
22. Gazizov R. K., Lukashchuk S. Yu. Fractional differentiation approach to modeling of fluid filtration processes in complex heterogeneous porous media, *Vestnik UGATU*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 104–112 (In Russian).
23. Babkov O. K. On group classification of some evolution equations, In: *Book of abstracts of International conference MOGRAN-16* (October 28 – November 2, 2013). Ufa, Ufa State Aviation Technical Univ., 2013, pp. 6–7.
24. Ovsyannikov L. V. On the property of x -autonomy, *Dokl. Math.*, 1993, vol. 47, no. 3, pp. 581–584.
25. Chirkunov Y. A. Linear autonomy conditions for the basic Lie algebra of a system of linear differential equations, *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 415–417. doi: 10.1134/S1064562409030302.
26. Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. Fractional differential equations: change of variables and nonlocal symmetries, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 4, pp. 54–68 (In Russian).
27. Ibragimov N. H. A new conservation theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 333, no. 1, pp. 311–328. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078.
28. Ibragimov N. H. Nonlinear self-adjointness and conservation laws, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2011, vol. 44, 432002. doi: 10.1088/1751-8113/44/43/432002.
29. Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.*, 1977, vol. 18, no. 7, pp. 1449–1455. doi: 10.1063/1.523441.
30. Lukashchuk S. Yu. Symmetry reduction and invariant solutions for nonlinear fractional diffusion equation with a source term, *Ufa Math. J.*, 2016, T. 8, № 4, C. 111–122. doi: 10.13108/2016-8-4-111.
31. Ovsyannikov L. V. On optimal systems of subalgebras, *Dokl. Math.*, 1994, vol. 48, no. 3, pp. 645–649.

32. Chirkunov Yu. A., Khabirov S. V. *Elementy simmetriinogo analiza differentsial'nykh uravnenii mekhaniki sploshnoi sredy* [Elements of Symmetry Snalysis of Differential Equations of Continuum Mechanics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Tecnical Univ., 2012, 659 pp. (In Russian)
33. Lukashchuk S. Yu. Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations, *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 80, no. 1–2, pp. 791–802. doi: 10.1007/s11071-015-1906-7.
34. Gazizov R. K., Ibragimov N. H., Lukashchuk S. Yu. Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time-fractional Kompaneets equations, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.*, 2015, vol. 23, no. 1-3, pp. 153–163. doi: 10.1016/j.cnsns.2014.11.010.
35. Lukashchuk S. Y. Constructing conservation laws for fractional-order integro-differential equations, *Theoret. and Math. Phys.*, 2015, vol. 184, no. 2, pp. 1049–1066. doi: 10.1007/s11232-015-0317-8.
36. Ibragimov N. H., Avdonina E. D. Nonlinear self-adjointness, conservation laws, and the construction of solutions of partial differential equations using conservation laws, *Russian Math. Surveys*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 889–921. doi: 10.1070/RM2013v068n05ABEH004860.



УДК 517.984.5

Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции

*Р. С. Сакс*Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112.

Аннотация

В ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей изучаются краевые и спектральные задачи для операторов $\text{rot} + \lambda I$ и $\nabla \text{div} + \lambda I$ в пространствах Соболева.

При $\lambda \neq 0$ операторы расширяются (методом Б. Вайнберга и В. Грушина) до эллиптических матриц, а краевые задачи удовлетворяют условиям эллиптичности В. Солонникова. Из теории и оценок вытекают полезные свойства решений спектральных задач. Операторы ∇div и rot имеют самосопряженные расширения \mathcal{N}_d и \mathcal{S} в ортогональные подпространства \mathcal{A}_γ и \mathbf{V}^0 потенциальных и вихревых полей в $\mathbf{L}_2(G)$, а их собственные векторы задают ортогональные базисы в \mathcal{A}_γ и \mathbf{V}^0 , элементы которых представляются рядами Фурье, а операторы — преобразованиями рядов.

Определены аналоги пространств Соболева \mathbf{A}_γ^{2k} и \mathbf{W}^m порядков $2k$ и m в классах потенциальных и вихревых полей и классы $C(2k, m)$ их прямых сумм. Доказано, что при $\lambda \notin \text{Sp}(\text{rot})$ оператор $\text{rot} + \lambda I$ отображает класс $C(2k, m+1)$ на класс $C(2k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно, а при $\lambda \notin \text{Sp}(\nabla \text{div})$ оператор $\nabla \text{div} + \lambda I$ отображает $C(2(k+1), m)$ на $C(2k, m)$ соответственно.

Ключевые слова: пространства Соболева, градиент, дивергенция, ротор, эллиптические краевые задачи, спектральные задачи.

Получение: 25 ноября 2019 г. / Исправление: 10 марта 2020 г. /

Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 22 июня 2020 г.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сакс Р. С. Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 249–274. doi: 10.14498/vsgtu1759.

Сведения об авторе

Ромэн Семенович Сакс  доктор физико-математических наук; профессор;
e-mail: romen-saks@yandex.ru

1. Основные подпространства $\mathbf{L}_2(G)$

1.1. Шкала пространств Соболева. Рассматриваются линейные пространства над полем \mathbb{C} комплексных чисел. Через $\mathbf{L}_2(G)$ обозначаем пространство Лебега вектор-функций (полей), квадратично интегрируемых в G с внутренним произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_G \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx$ и нормой $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$. Пространство Соболева, состоящее из полей, принадлежащих $\mathbf{L}_2(G)$ вместе с обобщенными производными до порядка $s > 0$, обозначается через $\mathbf{H}^s(G)$, $\|\mathbf{f}\|_s$ — норма его элемента \mathbf{f} ; $\mathbf{H}^0(G) \equiv \mathbf{L}_2(G)$. Замыкание в $\mathbf{H}^s(G)$ множества $\mathcal{C}_0^\infty(G)$ обозначается через $\mathbf{H}_0^s(G)$. Пространство Соболева отрицательного порядка $\mathbf{H}^{-s}(G)$ двойственно к $\mathbf{H}_0^s(G)$ (см. пространство $W_2^{(m)}(\Omega)$ у С. Л. Соболева [1, § 9 гл. 12] и $H^k(Q)$ у В. П. Михайлова [2, § 4 гл. 3]).

В области G с гладкой границей Γ в каждой точке $y \in \Gamma$ определена нормаль $\mathbf{n}(y)$ к Γ . Поле \mathbf{u} из $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ имеет след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ на Γ его нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева—Слободецкого $\mathbf{H}^{s+1/2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2}$ — его норма.

1.2. Разложение $\mathbf{L}_2(G)$ на два класса \mathcal{A} и \mathcal{B} потенциальных и соленоидальных полей. Пусть h — функция из $H^1(G)$, а $\mathbf{u} = \nabla h$ — ее градиент. Обозначим $\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G)\}$ — подпространство в $\mathbf{L}_2(G)$, а через $\mathcal{B}(G)$ — его ортогональное дополнение. Соотношения $(\mathbf{u}, \nabla h) = 0$ для любой $h \in H^1(G)$ означают, что $\mathcal{B}(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\}$. Итак,

$$\mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G).^1 \quad (1.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В разложении Г. Вейля $L_2(G) \equiv \mathfrak{F}_0 = \mathfrak{G} + \mathfrak{F}'$, где \mathfrak{G} есть замыкание в норме L_2 градиентов $\nabla \psi$ функций $\psi \in \mathcal{C}_0^1(G)$, а \mathfrak{F}' — множество соленоидальных элементов в \mathfrak{F}_0 [3, Теорема II].

Если граница области G имеет положительный род ρ , то \mathcal{B} содержит в себе конечномерное подпространство

$$\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\}.$$

Его размерность равна ρ [4], а базисные поля $\mathbf{h}_j \in \mathcal{C}^\infty(G)$ [3].

Ортогональное дополнение в \mathcal{B} к \mathcal{B}_H назовем классом вихревых полей и обозначим $\mathbf{V}^0(G)$. Значит,

$$\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_H(G) \oplus \mathbf{V}^0(G).^2$$

По определению $\mathcal{A}_\gamma = \{\nabla h, h \in H^2(G), \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. С. Л. Соболев [5], О. А. Ладыженская [6], К. Friedrichs [7], Э. Быховский и Н. Смирнов [8] приводят аналогичные разложения $\mathbf{L}_2(G)$ на ортогональные подпространства. Так, С. Л. Соболев предполагает, что область Ω гомеоморфна шару. В этом случае $\rho = 0$ и пространство $\mathcal{B}_H(\Omega)$ пусто.

О. А. Ладыженская приводит разложение $\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{G}(\Omega) \oplus \mathbf{J}^\circ(\Omega)$, где $\mathbf{J}^\circ(\Omega)$ — замыкание в норме $\mathbf{L}_2(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω

¹ Это разложение взято из статьи Z. Yoshida и Y. Giga [9]. Авторы называют его разложением Вейля [3], а $\mathcal{B}(\Omega)$ обозначают как $L_\sigma^2(\Omega)$.

² В [9] $L_\sigma^2(\Omega) = L_\Sigma^2(\Omega) \oplus L_H^2(\Omega)$. Символ L перегружен. Автор изменил авторские обозначения пространств $L_\Sigma^2(\Omega)$ и $L_H^2(\Omega)$ на $\mathbf{V}^0(\Omega)$ и $\mathcal{B}_H(\Omega)$.

соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\text{grad } \varphi$, где φ есть однозначная в Ω функция, локально квадратично суммируемая и имеющая первые производные из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ [6, Теорема 1, § 2 гл. 1].

Далее будем придерживаться разложения (1.1).

1.3. Операторы градиент, ротор и дивергенция. Эти операторы определяются в трехмерном векторном анализе [10]. Им соответствует оператор d внешнего дифференцирования на формах ω^k степени $k = 0, 1$ и 2 . Соотношения $dd\omega^k = 0$ при $k = 0, 1$ имеют вид $\text{rot } \nabla h = 0$ и $\text{div rot } \mathbf{u} = 0$. Формулы

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h + h \text{div } \mathbf{u} = \text{div}(h\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \text{div}[\mathbf{v}, \mathbf{u}],$$

где $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ — векторное произведение, и интегрирование по области G используются при определении операторов $\text{div } \mathbf{u}$ и $\text{rot } \mathbf{u}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Оператор Лапласа выражается через rot rot и ∇div :

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla \text{div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v}.$$

Оператор Лапласа эллиптичен [11], а операторы rot и ∇div не являются таковыми. Они вырождены, причем $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, $\nabla \text{div } \mathbf{v} = 0$ при $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ в смысле $\mathbf{L}_2(G)$ [3].

Поэтому $\Delta \mathbf{v} = \nabla \text{div } \mathbf{v}$ на \mathcal{A} и $\Delta \mathbf{v} = -\text{rot rot } \mathbf{v}$ на \mathcal{B} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Н. Weyl называет безвихревым (irrotational) поле $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G)$, для которого $(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) = 0$ для любого поля \mathbf{v} с компонентами v_j из $\mathcal{C}_0^1(G)$, а поле $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_2(G)$, для которого $(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}_0^1(G)$ — соленоидальным [3]. Запись “ $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ ” означает, что $\mathbf{u} = \{\nabla h\}$, где $h \in H^1(G)$, и $(\mathbf{u}, \text{rot } \mathbf{v}) = (\nabla h, \text{rot } \mathbf{v}) = 0$ для любого \mathbf{v} с компонентами $v_j \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$, что очевидно.

1.4. Содержание. Классы обобщенно эллиптических задач. В § 1 настоящей статьи определяются основные подпространства $\mathbf{L}_2(G)$, операторы, их соотношения, и формулируются основные результаты работы. § 2 содержит постановку краевых задач (2.1), (2.2) для операторов $\text{rot} + \lambda I$ и $\nabla \text{div} + \lambda I$ первого и второго порядков в пространствах Соболева. Определяются классы [REES p] обобщенно эллиптических систем. Системы (2.1), (2.2) при $\lambda \neq 0$ принадлежат классу [REES 1]. Им соответствуют операторы \mathbb{A} и \mathbb{B} , которые расширяются до эллиптических (по В. Солонникову) операторов \mathbb{A}_R и \mathbb{B}_R . Применяя его Теорему 1.1 [11], можно доказать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор \mathbb{A}_R имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(G)$ и $\lambda \neq 0$ (с постоянной $C_s = C_s(\lambda) > 0$, зависящей только от s, λ) выполняется оценка*

$$C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\text{rot } \mathbf{u}\|_s + |\lambda| \|\text{div } \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s. \quad (1.2)$$

ТЕОРЕМА 2. *Оператор \mathbb{B}_R имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+2}(G)$ и $\lambda \neq 0$ (с постоянной $C_s = C_s(\lambda) > 0$, зависящей только от s, λ) выполняется оценка*

$$C_s \|\mathbf{v}\|_{s+2} \leq |\lambda| \|\text{rot } \mathbf{v}\|_{s+1} + \|\nabla \text{div } \mathbf{v}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})|_{s+3/2} + \|\mathbf{v}\|_s. \quad (1.3)$$

Топологических ограничений на область нет, предполагается ее связность, ограниченность и гладкость границы.

Оценка (1.3) получена автором *впервые* из оценок Солонникова [11]. Оценка (1.2) известна автору давно, она не была выписана в [12], хотя ему было известно, что эллиптичность задачи эквивалентна точной оценке в пространствах Соболева от Л. Р. Волевича [13]. Тогда автор еще работал в пространствах Гельдера. Z. Yoshida и Y. Giga в [9] ссылаются на работы J. P. Bourguignon, H. Brezis [14] и C. Foias, R. Temam [15].

Этот подход применим для других обобщенно эллиптических систем класса [REES *p*]. Этот класс выделен из класса Вайнберга и Грушина [16], он содержит системы математической физики, главные части которых суть степени ротора или градиента дивергенции.

Из эллиптической теории вытекают свойства решений спектральных задач операторов ротора и градиента дивергенции, такие как конечная кратность ненулевых *s*-значений и гладкость *s*-полей в любой области *G* с гладкой границей.

Решения спектральных задач операторов ротора и градиента дивергенции в шаре [17] имеют простые связи с решениями спектральных задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, которые решены явно в учебнике В. С. Владимирова [18].

1.5. Оператор ротор в классе \mathbf{V}^0 вихревых полей. Z. Yoshida и Y. Giga [9] рассмотрели в $\mathbf{L}_2(G)$ подпространства L_Σ^2 и $H_{\Sigma\Sigma}^1$ и ввели в L_Σ^2 оператор *S*, который совпадает с $\text{rot } \mathbf{u}$, если $\mathbf{u} \in H_{\Sigma\Sigma}^1$. Они доказали теорему 1: *The operator S is self-adjoint in the space L_Σ^2 . The spectrum $\sigma(S)$ of S consists of only point spectrum $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$. Therefore, the set of eigenfunctions of S gives an orthogonal complete basis of the space L_Σ^2 .*

Кроме того, в лемме 1 они доказывают, что

- (1) пространство $H_{\Sigma\Sigma}^1(\Omega)$ является подпространством $H^1(\Omega)$ и оно плотно в $L_\Sigma^2(\Omega)$,
- (2) область значений $R(S)$ оператора *S* совпадает с $L_\Sigma^2(\Omega)$; оператор *S* имеет компактный обратный из $L_\Sigma^2(\Omega)$ в $H_{\Sigma\Sigma}^1(\Omega)$.

Переобозначим эти пространства: $L_\Sigma^2 \equiv \mathbf{V}^0$, $H_{\Sigma\Sigma}^1 \equiv \mathbf{W}^1$, а отображения *S* и S^{-1} запишем так:

$$\mathcal{D}(S) = \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{L}_2, \quad S^{-1} : \mathbf{V}^0 \rightarrow \mathbf{W}^1, \quad S = \text{rot} : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathbf{V}^0.$$

В § 3 показывается, что собственные поля ротора всегда *встречаются парами*: каждой собственной вектор-функции ротора \mathbf{u}_j^+ с положительным собственным значением λ_j соответствует собственная вектор-функция ротора \mathbf{u}_j^- с отрицательным собственным значением $-\lambda_j$, а в \mathbf{V}^0 фиксируется ортонормированный базис \mathbf{q}_j^\pm :

$$\text{rot } \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm|_\Gamma = 0, \quad \|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1.$$

В этом базисе элементы $\mathbf{V}^0(G)$ представляются рядами Фурье (3.1), а операторы *S* и S^{-1} — преобразованиями этих рядов (3.2) и (3.3).

При $k \geq 1$ определяются пространства

$$\mathbf{W}^k = \{ \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \dots, \text{rot}^k \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}^{-k} = (\mathbf{W}_0^k)^*,$$

где пространство $\mathbf{W}_0^k(G)$ есть замыкание в норме $\mathbf{W}^k(G)$ множества $\mathcal{C}_0^\infty(G)$, а пространство $\mathbf{W}^{-k} = (\mathbf{W}_0^k)^*$ сопряженно с ним [1]. Отметим вложения

$$\dots \subset \mathbf{W}^m \subset \dots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0(G) \subset \mathbf{W}^{-1} \subset \dots \subset \mathbf{W}^{-m} \subset \dots. \quad (m)$$

Оператор S^{-1} отображает \mathbf{V}^0 на \mathbf{W}^1 , а \mathbf{W}^{k-1} на \mathbf{W}^k при $k > 1$. Оператор S отображает \mathbf{W}^k на \mathbf{W}^{k-1} , а \mathbf{W}^1 на $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0$. Рассматривается также оператор $S + \lambda I$. Мы доказываем, что оператор $S + \lambda I : \mathbf{W}^k \rightarrow \mathbf{W}^{k-1}$ — фредгольмов. По определению, оператор $S + \lambda I$ совпадает с $\text{rot} + \lambda I$ на \mathbf{W}^1 и

$$(S + \lambda I)\mathbf{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{rot} + \lambda I)(\mathbf{f}_V^n) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\lambda + \lambda_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-].$$

Ряд сходится в $\mathbf{L}_2(G)$, так как $\|(S + \lambda I)\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^0}^2 \leq c_0^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2$, где $c_0 < \infty$ (см. (3.4)). Обратный оператор имеет вид

$$(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)}{\lambda + \lambda_j} \mathbf{q}_j^+(\mathbf{x}) + \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)}{\lambda - \lambda_j} \mathbf{q}_j^-(\mathbf{x}) \right], \quad (1.4)$$

если ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что либо $\lambda \pm \lambda_j \neq 0$ для всех j , либо $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) = 0$ при $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j_0}$, и эти элементы отсутствуют в ряду. При этом

$$\|(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2 \leq C_0^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^0}^2,$$

где $C_0^2 < \infty$ не зависит от \mathbf{f} (см. (3.5)). Следовательно, оба оператора непрерывны и имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Оператор $S + \lambda I : \mathbf{W}^1(G) \rightarrow \mathbf{V}^0(G)$ непрерывен и однозначен обратим, если λ не принадлежит спектру $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ оператора S . Его обратный оператор задается формулой (1.4) и для любого $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0$ ряд $(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} \in \mathbf{W}^1$.*

Если $\lambda = \lambda_{j_0}$, то он обратим тогда и только тогда, когда

$$\int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{q}_j^- dx = 0 \quad \text{для} \quad \forall \mathbf{q}_j^- : \lambda_j = \lambda_{j_0}.$$

Ядро оператора $S + \lambda_{j_0} I$ конечномерно и определяется собственными функциями $\mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})$, собственные значения которых равны λ_{j_0} :

$$\text{Ker}(S + \lambda_{j_0} I) = \sum_{\lambda_j = \lambda_{j_0}} c_j \mathbf{q}_j^-(\mathbf{x}) \quad \forall c_j \in \mathbb{R}.$$

В п. 3.5 приводятся также оценки

$$\|(S + \lambda I)\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^m}^2 \leq c_m^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{m+1}}^2, \quad \|(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{m+1}}^2 \leq C_m^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^m}^2,$$

где постоянные $c_m, C_m < \infty$ не зависят от \mathbf{f} и при $m = 0$ совпадают с (3.4) и (3.5).

Из теоремы и этих оценок следует

ЛЕММА 1. Если $\lambda \in \overline{\text{Sp}(S)}$, $m \geq 0$, то операторы $S + \lambda I$ (и его обратный) отображают пространство \mathbf{W}^{m+1} на \mathbf{W}^m (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно.

1.6. Соотношения между пространствами $\mathbf{W}^k, \mathbf{H}^k$ и \mathbf{C}^{k-2} . Рассмотрим область Ω , гомеоморфную шару, которую С. Л. Соболев выделил в [5]. В этом случае пространство $\mathcal{B}_H(\Omega)$ пусто. Граница области Ω предполагается гладкой. Скалярное произведение в $\mathbf{H}^k(\Omega)$ С. Л. Соболевым определяется так:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_k = (\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha \mathbf{f} \cdot \partial^\alpha \mathbf{g} \, dx, \quad k \geq 1.$$

В пространстве $\mathbf{W}^k(\Omega) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \dots, \text{rot}^k \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0\}$ норма $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^k$ выбирается так же: $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^k}^2 \equiv \|\mathbf{f}\|^2 + \|\text{rot}^k \mathbf{f}\|^2$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(\Omega)$ разлагалась в ряд Фурье

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})], \quad \|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1, \quad (1.5)$$

по собственным вектор-функциям $\mathbf{q}_j^\pm(\mathbf{x})$ ротора в области Ω , сходящийся в норме пространства Соболева $\mathbf{H}^k(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы \mathbf{f} принадлежала $\mathbf{W}^k(\Omega)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от \mathbf{f} , что

$$\sum_j \lambda_j^{2k} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}^2. \quad (1.6)$$

Если $k \geq 2$, то вектор-функция \mathbf{f} из $\mathbf{W}^k(\Omega)$ разлагается в ряд (1.5), сходящийся в пространстве $\mathbf{C}^{k-2}(\overline{\Omega})$.

СЛЕДСТВИЕ. Вектор-функция $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \cap \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ разлагается в ряд (1.5), сходящийся в любом из пространств $\mathbf{C}^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$.

Эти результаты дополняют известные в теории рядов Фурье утверждения (см. [6, Теорема 7, § 4 гл. 2], [2, Теорема 8, § 2 гл. 4]).

Таким образом, $\mathbf{W}^k(G)$ — аналоги пространств Соболева $\mathbf{H}^k(G)$ в классе соленоидальных полей. Отметим вложения

$$\mathbf{W}^k \subset \mathbf{W}^{k-1} \subset \dots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0.$$

Заметим, что Z. Yoshida и Y. Giga [9] не рассматривали пространства \mathbf{W}^k , $k > 1$. Они ввели $H_{\Sigma\Sigma}^1 = \mathcal{D}(S)$ как область определения S . Пространства \mathbf{W}^k и соотношения между ними и \mathbf{H}^k и \mathbf{C}^{k-2} (теоремы 3, 4 и лемма 1) — это первый основной результат настоящей статьи.

1.7. Класс \mathcal{A} потенциальных полей. В статье [19] изучен класс \mathcal{A} потенциальных полей: собственные поля оператора $\nabla \operatorname{div}$ задают ортогональный базис в \mathcal{A}_γ , оператор \mathcal{N}_d есть самосопряженное расширение $\nabla \operatorname{div}$ в \mathcal{A}_γ , пространства

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k}(G) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G), \dots, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma(G)\} \quad \forall k \geq 1,$$

— аналоги пространств Соболева $\mathbf{H}^{2k}(G)$ порядков $2k$ в классе \mathcal{A}_γ .

Так же как лемма 1, доказана

ЛЕММА 2. Если $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathcal{N}_d)$, $k \geq 0$, то операторы $\mathcal{N}_d + \lambda I$ (и его обратный) отображает пространство $\mathbf{A}_\gamma^{2(k+1)}$ на \mathbf{A}_γ^{2k} (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно.

Отметим вложения

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k} \subset \dots \subset \mathbf{A}_\gamma^2 \subset \mathcal{A}_\gamma \subset \mathcal{A} \subset \mathbf{L}_2(G).$$

Базисные векторы в классах \mathcal{A} и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_H \oplus \mathbf{V}^0$ в совокупности образуют базис во всем пространстве $\mathbf{L}_2(G)$.

1.8. Содержание. Классы пространств $C(2k, m)$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. В § 4 рассматривается целочисленная сетка пространств $C(2k, m) \equiv \mathbf{A}_\gamma^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$, называемых классами, $k \geq 0$, $m \geq 0$ — целые, $k + m > 0$, а также пространство $\mathbf{E}_\gamma^0(\Omega)$. Доказана

ТЕОРЕМА 5. Если $\lambda \neq 0, \pm \lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, то единственное решение \mathbf{u} задачи 1 п. 4.3 дается суммой рядов-проекций $\mathbf{u}_\mathcal{A} + \mathbf{u}_\mathbf{V}$:

$$\mathbf{u}_\mathcal{A} = \lambda^{-1} \mathbf{f}_\mathcal{A} \equiv \lambda^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(x), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u}_\mathbf{V} = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_\mathbf{V} \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)}{\lambda + \lambda_j} \mathbf{q}_j^+(x) + \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)}{\lambda - \lambda_j} \mathbf{q}_j^-(x) \right]. \quad (1.8)$$

В частности,

- если $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\mathcal{A}$ и $\mathbf{f}_\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ или $\mathbf{f}_\mathcal{A} \in \mathcal{A}_\gamma$, то $\mathbf{u} = \lambda^{-1} \mathbf{f}_\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ или $\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma$ — обобщенные решения задачи 1;
- если $\mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, то $\mathbf{u} = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_\mathbf{V} \in \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}_\gamma^1(\Omega)$;
- если $\mathbf{f} \in \mathbf{E}_\gamma^0(\Omega)$, то $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\mathcal{A} + \mathbf{u}_\mathbf{V} \in \mathbf{H}_\gamma^1(\Omega)$;
- если \mathbf{f} принадлежит классу $C(2k, m)$, то $\mathbf{u} \in C(2k, m + 1)$;
- если же $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$, то ряды (1.7), (1.8) сходятся в $\mathbf{H}^s(\Omega)$ для любого $s \geq 1$ и $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — классическое решение задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ. В статье [17] доказано, что собственные значения ротора в шаре радиуса R равны $\pm \rho_{n,m} R^{-1}$, где числа $\pm \rho_{n,m}$ — нули функций

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{z dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

кратность собственного значения $\lambda_{n,m} = \pm \rho_{n,m} R^{-1}$ равна $2n + 1$.

Собственные значения оператора $\nabla \operatorname{div}$ равны $-\nu_{n,m}^2$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m} R^{-1}$, а числа $\alpha_{n,m}$ — нули производных $\psi'_n(r)$, $n \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$; кратность собственного значения $-\nu_{n,m}^2$ равна $2n + 1$.

Собственные поля \mathbf{q}_κ градиента дивергенции и \mathbf{q}_κ^\pm ротора выражаются явно через сферические функции и функции $\psi_n(r)$; $\kappa = (n, m, k)$.

Из теоремы 5 и леммы 1 вытекают следующие утверждения.

ЛЕММА 3. При $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ оператор $\operatorname{rot} + \lambda I$ отображает класс $C(2k, m+1)$ на класс $C(2k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно, $k, m \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если область $\Omega = B$, $\psi_n(\lambda R) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, а поле $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, то решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Аналогично доказаны следующие утверждения.

ЛЕММА 4. При $\nu^2 \neq \operatorname{Sp}(-\nabla \operatorname{div})$ оператор $\nabla \operatorname{div} + \nu^2 I$ отображает класс $C(2(k+1), m)$ на класс $C(2k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно.

СЛЕДСТВИЕ. Если область $\Omega = B$, $\psi'_n(\nu R) \neq 0 \forall n \geq 0$, а поле $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, то решение задачи 2 п. 4.3 существует, единственно и принадлежит классу $\mathbf{A}_\gamma^{2(k+1)}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$.

Таким образом, изучены пространства \mathbf{W}^m на рядах Фурье, определяемых собственными полями оператора ротор (вихрь). В пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ введены классы $C(2k, m) \equiv \mathbf{A}_\gamma^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$ и рассмотрены их отображения операторами $\operatorname{rot} + \lambda I$ и $\nabla \operatorname{div} + \nu^2 I$.

Теорема 5, леммы 3, 4 и их следствия — это второй основной результат этой статьи.

2. Краевые и спектральные задачи

2.1. Краевые задачи. В ограниченной области G с гладкой границей Γ изучаются задачи: найти вектор-функции \mathbf{u} и \mathbf{v} такие, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g, \quad (2.1)$$

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_\Gamma = g, \quad (2.2)$$

где векторная и скалярная функции \mathbf{f} и g заданы. Решения задач ищем в пространствах Соболева $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ и $\mathbf{H}^{s+2}(G)$, где s — целое $s \geq 0$, а (\mathbf{f}, g) задаем в следующих пространствах: $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G)$, $g \in H^{s+1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(G)$, $g \in H^{s+3/2}(\Gamma)$ соответственно. Эта постановка является классической в теории эллиптических краевых задач в пространствах Соболева [1, 11].

Отметим, что ненулевые решения (\mathbf{u}, λ) и (\mathbf{v}, λ) однородных задач (2.1), (2.2) ($\mathbf{f} = 0$ и $g = 0$) — решения спектральных задач операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$. Они аннулируют друг друга и

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{A} = \{\nabla h, h \in H^1\}, \quad \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{B} \perp \mathcal{A}.$$

Ортогональные пространства \mathcal{A} и \mathcal{B} в $\mathbf{L}_2(G)$ бесконечномерны [3].

При $\lambda = 0$ однородные задачи (2.1) и (2.2) имеют счетное число линейно независимых решений. Значит, нулевая точка спектра каждого из операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$ имеет бесконечную кратность. Специфика этих задач состоит

в том, что эти операторы при $\lambda \neq 0$ являются *обобщенно эллиптическими* класса [REES 1].

2.2. Класс систем, приводимых к эллиптическим системам. Определение этого класса мы приведем для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Система дифференциальных уравнений $S(\partial)u = f$ порядка m из этого класса обладает свойствами:

- а) ее символическая матрица $S_0(i\xi)$ имеет постоянный ранг для любой $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Это позволяет построить аннулятор $C(\partial)$ оператора $S_0(\partial)$ такой, что $(CS_0)(\partial) \equiv 0$ на X и определить
- б) расширенную систему $\begin{pmatrix} Su = f \\ CSu = Cf \end{pmatrix}$ порядка $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$. Ее символическая матрица $\begin{pmatrix} S_0(i\xi) \\ (CS)_0(i\xi) \end{pmatrix}$ определяется младшей частью оператора $S(\partial)$ и дополняет матрицу $S_0(i\xi)$.
- в) Если ранг расширенной матрицы максимален, то исходная система $Su = f$ принадлежит классу [REES 1] и степень ее приводимости равна единице.
- г) Если система $Su = f$ такова, что ранг расширенной матрицы не максимален, но постоянен, то процесс повторяется и при определенных условиях система принадлежит классу [REES 2]. Символ [REES p] означает “REduced to Elliptic Systems на p -том шаге”.

Б. Вайнберг и В. Грушин [16] доказали, что система $Su = f$ класса [REES p] является разрешимой по Фредгольму или Нетеру в пространствах Соболева $\mathbf{H}^s(X)$, если $f \in \mathbf{H}^{s-m+p}(X)$, где $s \geq m$ — целое. В качестве примера приводится оператор $d + *$ на дифференциальных формах степени k в $2k + 1$ -мерном многообразии X без края, где d — оператор внешнего дифференцирования, а $*$ — оператор нулевого порядка, который переводит форму ω^j степени j в форму $*\omega$ степени $n - j$.

Системы (2.1), (2.2) являются *обобщенно эллиптическими* класса [REES 1]. Действительно, из этих уравнений вытекают соотношения

$$\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \lambda \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G.$$

Соединяя их в систему, видим, что операторы

$$\begin{pmatrix} \operatorname{rot} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{div} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \nabla \operatorname{div} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{rot} \end{pmatrix}$$

являются эллиптическими по Даггису—Ниренбергу [11]. Значит, они принадлежат классу [REES 1] систем дифференциальных уравнений, приводимых к эллиптическим системам на первом шаге расширений Б. Вайнберга и В. Грушина [16].³

2.3. Обобщенно эллиптическая краевая задача. Рассмотрим подробнее первую из них. Расширенная система

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

³ Другие классы обобщенно эллиптических операторов см. в работе [20].

является эллиптической системой первого порядка (переопределенной, если $f_4 \neq \operatorname{div} \mathbf{f}$). Вместе с краевым условием $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = g$ она составляет эллиптическую краевую задачу по Солонникову [11]. Это означает, что

1) система (2.3) эллиптична;⁴

2) краевое условие $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ “накрывает” оператор системы.

Первое условие сводится к тому, что однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\operatorname{rot}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \lambda \operatorname{div}(i\xi)\mathbf{w} = 0, \quad \forall \xi \neq 0 \quad (2.4)$$

с параметром $\xi \in \mathbb{R}^3$ имеет только тривиальное решение $\mathbf{w} = 0$.

Второе условие означает, что однородная система линейных дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot}\left(i\tau + \mathbf{n} \frac{d}{dz}\right)\mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div}\left(i\tau + \mathbf{n} \frac{d}{dz}\right)\mathbf{v} = 0, \quad \forall \tau \neq 0 \quad (2.5)$$

на полуоси $z \geq 0$ с краевым условием

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{z=0} = 0$$

и убыванием $\mathbf{v}(y, \tau; z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$ имеет только тривиальное решение.

Здесь τ и \mathbf{n} — касательный и нормальный векторы к Γ в точке $y \in \Gamma$ и $|\mathbf{n}| = 1$. При доказательстве этих утверждений используется соотношение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Тогда

1°. Из уравнений (2.4) вытекает уравнение $-\Delta(i\xi)\mathbf{w} = 0$. Оно распадается на три скалярных уравнения $|\xi|^2 w_j = 0$. Значит, $\mathbf{w} = 0$ при $|\xi| \neq 0$. Эллиптичность системы (2.3) доказана.

2°. Из уравнений (2.5) получаем уравнение $(-|\tau|^2 + (\frac{d}{dz})^2)\mathbf{v} = 0$ с параметром $|\tau| > 0$. Его убывающее при $z \rightarrow +\infty$ решение имеет вид $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} e^{-|\tau|z}$. Оно удовлетворяет уравнениям (2.5), если вектор-функция $\boldsymbol{\omega}$ такова, что $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, где $\boldsymbol{\omega} \equiv i\tau - |\tau|\mathbf{n}$ — вектор-столбец, $\boldsymbol{\omega}'$ — вектор-строка, а $\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}$ — их произведение.

Легко убедиться, что векторное и “скалярное” произведения $\boldsymbol{\omega}$ на $\boldsymbol{\omega}$ равны нулю: $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Ранг матрицы $\operatorname{rot}(i\xi)$ равен двум при $\xi \neq 0$, поэтому $\boldsymbol{\omega} = c\boldsymbol{\omega}$, где c — постоянная, и других решений нет. Граничное условие приводит к уравнению $|\tau|c = 0$. Значит, $c = 0$ при $|\tau| > 0$ и, следовательно, $\mathbf{v} = 0$.

Итак, система (2.3) с краевым условием $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma} = g$ при $\lambda \neq 0$ — эллиптическая задача. Будем говорить при этом, что задача (2.1) при $\lambda \neq 0$ является *обобщенно эллиптической*.

Обобщенная эллиптичность задачи (2.2) доказана в [19].

2.4. Операторы задач (2.1) и (2.2) в пространствах $\mathbf{H}^s(\mathcal{G})$. Пусть вектор-функция \mathbf{u} принадлежит пространству Соболева \mathbf{H}^{s+1} , где $s \geq 0$ —

⁴ Главные части системы в [11] определяются с помощью весов s_k и t_j таких, что $\operatorname{ord} L_{k,j} \leq s_k + t_j$. Положив $s_k = 0$ при $k = 1, 2, 3, 4$ и $t_j = 1$ при $j = 1, 2, 3$, мы получим операторы системы (2.3), а в краевом операторе положим $\sigma_1 = -1$.

целое. Тогда компоненты $\operatorname{rot} \mathbf{u}$ и $\operatorname{div} \mathbf{u}$ принадлежат $H^s(G)$, а вектор-функция $\mathbf{f} := \operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}$ принадлежит пространству

$$\mathbf{E}^s(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s : \operatorname{div} \mathbf{f} \in H^s\}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|_s^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_s^2)^{1/2}.$$

Функция $g := \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma$ принадлежит пространству Соболева—Слободецкого $H^{s+1/2}(\Gamma)$. Следовательно, задаче (2.1) соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{A}\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{rot} + \lambda I \\ \gamma \mathbf{n} \cdot \end{pmatrix} \mathbf{u} : \mathbf{H}^{s+1}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{E}^s(G) \\ H^{s+1/2}(\Gamma) \end{pmatrix},$$

а эллиптической задаче $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = g$ для расширенной системы (2.3) соответствует оператор

$$\mathbb{A}_R \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{rot} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{div} \\ \gamma \mathbf{n} \cdot \end{pmatrix} \mathbf{u} : \mathbf{H}^{s+1}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{H}^s(G) \\ H^s(G) \\ H^{s+1/2}(\Gamma) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, задаче (2.2) соответствует ограниченный оператор

$$\mathbb{B}\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \nabla \operatorname{div} + \lambda I \\ \gamma \mathbf{n} \cdot \end{pmatrix} \mathbf{u} : \mathbf{H}^{s+2}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{F}^s(G) \\ H^{s+3/2}(\Gamma) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^s = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s : \operatorname{rot} \mathbf{f} \in H^{s+1}\}, \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{F}^s} = (\|\mathbf{v}\|_s^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{s+1}^2)^{1/2},$$

а расширенный эллиптический оператор имеет вид

$$\mathbb{B}_R \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \nabla \operatorname{div} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{rot} \\ \gamma \mathbf{n} \cdot \end{pmatrix} \mathbf{u} : \mathbf{H}^{s+2}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{H}^s(G) \\ \mathbf{H}^{s+1}(G) \\ H^{s+3/2}(\Gamma) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, краевые задачи (2.1) и (2.2) являются обобщенно эллиптическими, а операторы \mathbb{A}_R и \mathbb{B}_R являются *эллиптическими по Солонникову* [11]. Из [11, Теорема 1.1] следуют теоремы 1 и 2 (см. п. 1.4). Область G ограничена гладкой границей.

2.5. Спектральные задачи операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$. Они состоят в нахождении ненулевых вектор-функций (полей) \mathbf{u} и \mathbf{v} и чисел λ и μ таких, что

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \lambda \mathbf{u}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G, & \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, & \quad \mathbf{u} \in \mathcal{C}^1(G) \cap \mathcal{C}(\bar{G}), & \quad (2.6) \\ -\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} &= \mu \mathbf{v}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in G, & \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0, & \quad \mathbf{v} \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\bar{G}). \end{aligned}$$

Из теорем 1, 2 и оценок вытекают полезные свойства решений *спектральных задач* операторов ротора и градиента дивергенции:

- а) *ненулевые собственные значения* имеет конечную кратность;
- б) соответствующие им *обобщенные собственные функции* бесконечно дифференцируемы вплоть до границы области, то есть поля $\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_\mu(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\bar{G})$ при $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Автору в работе [17] удалось найти формулы решений спектральной задачи (2.6) в шаре благодаря идее сведения задачи (2.1) к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца⁵ и учебнику Владимирова [18]. Поля \mathbf{u}_κ^\pm , отвечающие ненулевым значениям ротора $\pm\lambda_\kappa = \pm\rho_{n,m}R^{-1}$, выражаются через сферические функции и функций $\psi_n(z)$, см. (1.9), где $\kappa = (n, m, k)$, $n, m \in \mathbb{N}$, $|k| \leq n$, а числа $\pm\rho_{n,m}$ — нули функций $\psi_n(r)$.

Поля \mathbf{q}_κ со значениями $-\nu_\kappa^2$, где $\nu_\kappa = \alpha_{n,m}R^{-1}$, определяются решениями задачи Неймана; $\alpha_{n,m}$ — нули производных $\psi'_n(r)$, $n \geq 0$. Поля $\{\mathbf{u}_\kappa^+\} \cup \{\mathbf{u}_\kappa^-\} \cup \{\mathbf{q}_\kappa\}$ образуют базис в $\mathbf{L}_2(B)$.

3. Класс \mathbf{V}^0 и его подпространства \mathbf{W}^k

Другой путь решения задачи (2.1) открылся после обнаружения важных свойств а) и б) решений спектральной задачи (2.6) и работы Z. Yoshida и Y. Giga [9]. Они ввели оператор $S: \mathbf{W}^1 \rightarrow \mathbf{V}^0$ в пространстве \mathbf{V}^0 с областью определения \mathbf{W}^1 , который совпадает с $\text{rot } \mathbf{u}$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1$, и доказали, что оператор S самосопряжен в \mathbf{V}^0 , имеет точечный спектр $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$, а его собственные поля образуют в \mathbf{V}^0 полный ортогональный базис.

3.1. Свойства собственных полей ротора. Построение базиса в \mathbf{V}^0 .

Поля $\mathbf{u}_\lambda(\mathbf{x})$ принадлежат пространствам $\mathbf{W}^1(G) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{G})$. Из соотношения $(\text{rot} + \lambda I)(\text{rot} - \lambda I)\mathbf{u} = -\Delta\mathbf{u} + \nabla \text{div } \mathbf{u} - \lambda^2\mathbf{u}$ и определения пространства $\mathbf{V}^0(G)$ видим, что собственные поля ротора \mathbf{u}_λ^\pm , отвечающие значениям $\pm\lambda \neq 0$, являются также собственными полями оператора Лапласа:

$$-\Delta\mathbf{u} = \lambda^2\mathbf{u}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = 0.$$

Множество собственных значений $\mu = \lambda^2$ этого оператора счетно, положительно и каждое из них имеет конечную кратность. Перенумеруем их в порядке возрастания: $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$, повторяя μ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие вектор-функции обозначим через $\mathbf{u}_1^\pm, \mathbf{u}_2^\pm, \dots$, так, чтобы каждому значению $\pm\sqrt{\mu_k}$ соответствовала только одна функция \mathbf{u}_k^\pm : $\text{rot } \mathbf{u}_k^\pm = \pm\sqrt{\mu_k}\mathbf{u}_k^\pm$, $k = 1, 2, \dots$.

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, выберем ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. [18]). Поля, соответствующие различным с.- значениям, ортогональны. Их нормируем. Нормированные собственные поля ротора обозначим через \mathbf{q}_j^\pm , норма $\|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1$. Они составляют полный ортонормированный базис \mathbf{B}^\pm в классе \mathbf{V}^0 вихревых полей в $\mathbf{L}_2(G)$.

3.2. Ряды Фурье в \mathbf{V}^0 . Проекция вектор-функции \mathbf{f} из $\mathbf{L}_2(G)$ на \mathbf{V}^0 имеет вид

$$\mathbf{f}_\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]. \quad (3.1)$$

Действительно, частичные суммы $\mathbf{f}_\mathbf{v}^n$ этого ряда состоят из элементов, для

⁵ Ее осуществил под руководством автора выпускник НГУ 1971 года А. А. Фурсенко. В своей дипломной работе "Краевая задача для одной равномерно неэллиптической системы" он решил задачу (2.1) в шаре в классах Гельдера.

которых $0 < \lambda_j \leq N(n)$:

$$\mathbf{f}_v^n = \sum_{j=1}^n [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-], \quad \|\mathbf{f}_v^n\|^2 \leq \|\mathbf{f}\|^2,$$

проекции $(\mathbf{f} - \mathbf{f}_v^n, \mathbf{q}_j^\pm) = 0$, если $0 < \lambda_j \leq N(n)$, и

$$\|\mathbf{f}_v - \mathbf{f}_v^n\|^2 = \|\mathbf{f}_v\|^2 - \|\mathbf{f}_v^n\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

По построению $\mathbf{f}_v^n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{G})$, $\operatorname{div} \mathbf{f}_v^n = 0$, $\gamma_n \mathbf{f}_v^n = 0$ и при любом n поле $\mathbf{f}_v^n \perp \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Значит, $(\mathbf{f}_v^n, \nabla h) = 0$ для любой функции $h \in H^1(G)$. Переходя к пределу, получим $(\mathbf{f}_v, \nabla h) = 0$, то есть вектор $\mathbf{f}_v \perp \mathcal{A} \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$. Он принадлежит \mathbf{V}^0 , если пространство $\mathcal{B}_H \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{rot})$ пусто. В общем случае

$$\mathbf{f}_v \in \mathbf{V}^0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{f}_v, \mathbf{h}_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, \rho.$$

Так как

$$\operatorname{rot}(\mathbf{f}_v^n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]$$

и суммы \mathbf{f}_v^n и $\operatorname{rot}(\mathbf{f}_v^n)$ принадлежат \mathbf{V}^0 , то $\mathbf{f}_v^n \in \mathbf{W}^1$ — области определения оператора S .

По определению, $S\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$ для любого $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^1$. Следовательно

$$S\mathbf{f}_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{rot}(\mathbf{f}_v^n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-], \quad (3.2)$$

если ряд сходится и принадлежит \mathbf{V}^0 . Ясно, что $S\mathbf{f}_v \in \mathbf{V}^0$, если

$$\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(G), \quad (\mathbf{f}_v, \mathbf{h}_i) = 0 \quad \text{и} \quad (S\mathbf{f}_v, \mathbf{h}_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, \rho.$$

В [9, § 3, с. 240] доказано, что оператор S замкнут.

Следовательно, предел $S\mathbf{f}_v$ не зависит от выбора в \mathbf{V}^0 последовательности $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{f}_v$.

3.3. Подпространства \mathbf{V}^0 . Ранее были введены пространства

$$\mathbf{W}^k(G) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G), \dots, \operatorname{rot}^k \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(G)\} \quad \forall k \geq 1.$$

Вложение $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1(G)$ вытекает из оценки (1.2) при $s = 0$:

$$C_0 \|\mathbf{f}\|_1 \leq \|\operatorname{rot} \mathbf{f}\| + \|\mathbf{f}\|, \quad C_0 > 0.$$

По индукции $\mathbf{W}^k \subset \mathbf{H}^k(G)$. Очевидно, что $\mathbf{W}^k \subset \dots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0$. При $n < \infty$ ряды \mathbf{f}_v^n принадлежат любому из этих пространств. Оператор S отображает \mathbf{W}^k на \mathbf{W}^{k-1} при $k > 1$, а \mathbf{W}^1 на $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0$.

Пространство \mathbf{V}^0 ортогонально ядру ротора в $\mathbf{L}_2(G)$, поэтому S имеет единственный обратный оператор S^{-1} , определенный на \mathbf{V}^0 :

$$S^{-1} \mathbf{f}_v = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{-1}(\mathbf{f}_v^n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]. \quad (3.3)$$

В [9] доказано, что оператор S^{-1} компактен.

Следствие. *Спектр оператора S^{-1} точечный с единственной точкой накопления в нуле, $\lambda_j^{-1} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.*

Очевидно, что оператор $S^{-1} : \mathbf{V}^0 \rightarrow \mathbf{W}^1$ и $S^{-1} : \mathbf{W}^{k-1} \rightarrow \mathbf{W}^k$.

3.4. Полнота пространства \mathbf{V}^0 . В базисе из собственных функций ротора скалярное произведение векторов $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{V}^0$ имеет вид

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{f}_\mathbf{v}^n, \mathbf{g}_\mathbf{v}^n) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) (\mathbf{g}, \mathbf{q}_j^+) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) (\mathbf{g}, \mathbf{q}_j^-)].$$

Согласно Владимирову [18], ортонормальная система $\{\mathbf{q}_j^+\} \cup \{\mathbf{q}_j^-\}_{j=1,2,\dots}$ полна в \mathbf{V}^0 , если для любой $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0$ ее ряд (3.1) сходится к \mathbf{f} в $\mathbf{L}_2(G)$. По [18, § 1.9, Теорема 1] эта система полна в \mathbf{V}^0 тогда и только тогда, когда для любой функции $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0$ выполняется равенство Парсеваля—Стеклова, которое называется уравнением замкнутости:

$$\sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] = \|\mathbf{f}\|^2.$$

Пространство \mathbf{W}^1 плотно в \mathbf{V}^0 , так как множество $\mathbf{C}_0^\infty(G) \cap \mathbf{V}^0$, плотное в \mathbf{V}^0 , содержится в \mathbf{W}^1 . Квадрат нормы $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(G) \cap \mathbf{V}^0$ ограничен:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2 &= \|\mathbf{f}\|^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{f}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^2) [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] < \infty \Rightarrow \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}_\mathbf{v}^n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] = \|\mathbf{f}\|^2. \end{aligned}$$

Полнота пространства \mathbf{V}^0 доказана.

3.5. Самосопряженность оператора S . Действительно, если \mathbf{f} и \mathbf{g} принадлежат \mathbf{W}^1 , то имеют место равенства

$$(S\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{f}, S\mathbf{g}) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) (\mathbf{g}, \mathbf{q}_j^+) - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) (\mathbf{g}, \mathbf{q}_j^-)].$$

Отметим, что равенство

$$\int_G (\operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_G \mathbf{u} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \, dx$$

для любых функций \mathbf{u} и \mathbf{v} из $\mathcal{D}(S)$ доказано в [9], а в случае шара — в [17]. Также в [9] доказано, что оператор S самосопряжен.

3.6. Фредгольмовость оператора $S + \lambda I : \mathbf{W}^1 \rightarrow \mathbf{V}^0$. Действительно, по определению, оператор $S + \lambda I$ совпадает с $\operatorname{rot} + \lambda I$ на \mathbf{W}^1 . При $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^1$

$$(S + \lambda I)\mathbf{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{rot} + \lambda I)(\mathbf{f}_\mathbf{v}^n) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\lambda + \lambda_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\lambda - \lambda_j)(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]$$

и ряд сходится в $\mathbf{L}_2(G)$, поскольку

$$\begin{aligned} \|(S + \lambda I)\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^0}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} [|\lambda + \lambda_j|^2(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + |\lambda - \lambda_j|^2(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] \leq \\ &\leq c_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^2) [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] = c_0^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2; \\ c_0^2 &= \max(a_j^+, a_j^-) \quad \text{и} \quad a_j^{\pm} = |1 \pm \lambda/\lambda_j|^2 / (1 + 1/\lambda_j^2) < \infty, \end{aligned} \quad (3.4)$$

так как при больших λ_j они находятся в окрестности единицы.

Обратный оператор имеет вид

$$(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)}{\lambda + \lambda_j} \mathbf{q}_j^+(x) + \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)}{\lambda - \lambda_j} \mathbf{q}_j^-(x) \right],$$

если ни одно из слагаемых этого ряда не обращается в бесконечность. Это означает, что либо $\lambda \pm \lambda_j \neq 0$ для всех j , либо $(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) = 0$, если $\lambda = \lambda_j = \lambda_{j_0}$ и функция \mathbf{f} ортогональна всем собственным полям $\mathbf{q}_j^-(x)$ ротора, отвечающим собственному значению λ_{j_0} . При этом

$$\begin{aligned} \|(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^1}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + \lambda_j^2)}{|\lambda + \lambda_j|^2} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + \frac{(1 + \lambda_j^2)}{|\lambda - \lambda_j|^2} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2 \right] \leq C_0^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^0}^2, \\ C_0^2 &= \max(A_j^+, A_j^-) \quad \text{и} \quad A_j^{\pm} = (1 + 1/\lambda_j^2) / |1 \pm \lambda/\lambda_j|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Итак, оба оператора непрерывны и имеет место теорема 3 (п. 1.5).

Аналогично предыдущему видим, что

$$\begin{aligned} \|(S + \lambda I)\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^m}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^{2m}) [|\lambda + \lambda_j|^2(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + |\lambda - \lambda_j|^2(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] \leq \\ &\leq c_m^2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \lambda_j^{2(m+1)}) [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] = c_m^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{m+1}}^2, \end{aligned}$$

$$\|(S + \lambda I)^{-1}\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{m+1}}^2 \leq C_m^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^m}^2, \quad c_m, C_m < \infty.$$

Числа c_m и C_m при $m = 0$ совпадают с (3.4) и (3.5). По определению, $\mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0$. Из теоремы 3 и оценок следует лемма 1 (п. 1.5) о свойствах отображений $(S + \lambda I)$ и $(S + \lambda I)^{-1}$. Так же доказывается лемма 2 (п. 1.7) о свойствах отображений $(\mathcal{N}_d + \lambda I)$ и $(\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1}$.

3.7. Сходимостъ ряда Фурье в норме пространства $\mathbf{H}^k(\Omega)$. Приведем доказательство теоремы 4 из п. 1.6.

Граница $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$ и собственные функции $\mathbf{q}_j^\pm(x)$ оператора ротор принадлежат классу $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, а значит, любому из пространств $\mathbf{W}^l(\Omega)$, $l > 0$.

Поэтому, если ряд Фурье (1.5) вектор-функции \mathbf{f} из $\mathbf{H}^k(\Omega)$ сходится в норме $\mathbf{H}^k(\Omega)$, то $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \dots, \text{rot}^k \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$ и, значит, $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$. Необходимость доказана.

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$, где $k \geq 1$. Приведем доказательство неравенства (1.6). Так как $S\mathbf{f} = \text{rot} \mathbf{f}$ на $\mathbf{W}^k \subset \mathbf{W}^1(\Omega)$ и $S\mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm$, то

$$(\text{rot} \mathbf{f}, \mathbf{q}_j^\pm) = \pm \lambda_j (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^\pm). \quad (3.6)$$

Пусть $\beta_{k,j}^\pm$ коэффициенты Фурье функции $\text{rot}^k \mathbf{f}$. По формуле (3.6)

$$\beta_{k,j}^\pm = (\text{rot}^k \mathbf{f}, \mathbf{q}_j^\pm) = \pm \lambda_j (\text{rot}^{k-1} \mathbf{f}, \mathbf{q}_j^\pm) = \dots = (\pm \lambda_j)^k (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^\pm).$$

Поскольку $\text{rot}^k \mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} [(\beta_{k,j}^+)^2 + (\beta_{k,j}^-)^2] = \|\text{rot}^k \mathbf{f}\|^2.$$

Итак, для вектор-функций $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2k} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)^2] = \|\text{rot}^k \mathbf{f}\|^2 \leq C \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}^2.$$

Последнее неравенство вытекает из определений нормы в $\mathbf{H}^k(\Omega)$. Неравенство (1.6) доказано.

Докажем сходимость ряда (1.5) к \mathbf{f} в норме $\mathbf{H}^k(B)$. Пусть $\mathbf{S}_l(\mathbf{x})$ — частичная сумма ряда (1.5). Очевидно, что $\mathbf{S}_l(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}^l(\Omega)$ при $l > 0$. В частности, $\text{div} \mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = 0$ и $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_l(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому оценка (1.2) при $s = 0$ принимает вид $C_1 \|\mathbf{S}_l\|_1 \leq \|\text{rot} \mathbf{S}_l\| + \|\mathbf{S}_l\|$. Поскольку $\lambda_j^{-2} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, норма $\|\mathbf{S}_l\|^2 \leq c \|\text{rot} \mathbf{S}_l\|^2$, где $c = \max_j \lambda_j^{-2}$. Поэтому $\|\mathbf{S}_l\|_1^2 \leq a_1 \|\text{rot} \mathbf{S}_l\|^2$ и по индукции $\|\mathbf{S}_l\|_k^2 \leq a_k \|\text{rot}^k \mathbf{S}_l\|^2$.

Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^k(\Omega)$, где $k > 0$. Согласно неравенству (1.6), ряды в его левой части сходятся, и если $l > m \geq 1$, то

$$\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_k^2 \leq a_k \|\text{rot}^k(\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m)\|^2 \leq a_k \sum_{m+1}^l \lambda_j^{2k} [|(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+)|^2 + |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-)|^2] \rightarrow 0$$

при $l, m \rightarrow \infty$. Это означает, что ряд (1.5) сходится к \mathbf{f} в норме $\mathbf{H}^k(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известны вложение пространств $\mathbf{H}^k(\Omega) \subset \mathbf{C}^{k-2}(\bar{\Omega})$ при $k \geq 2$ в трехмерной области Ω и оценка $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}^{k-2}(\bar{\Omega})} \leq C_k \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}$ для любой функции $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^k(\Omega)$, причем постоянная $C_k > 0$ не зависит от \mathbf{f} (см., например, [2, Теорема 3, § 6.2]). В частности

$$\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{k-2}(\bar{\Omega})} \leq C_k \|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)}.$$

Если $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{H}^k(\Omega)} \rightarrow 0$ при $l, m \rightarrow \infty$, то $\|\mathbf{S}_l - \mathbf{S}_m\|_{\mathbf{C}^{k-2}(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$. Это означает, что ряд (1.5) сходится к \mathbf{f} в $\mathbf{C}^{k-2}(\bar{\Omega})$.

Теорема доказана.

4. Краевые задачи в $L_2(\Omega)$

4.1. Классы $C(2k, m)$ подпространств в $L_2(\Omega)$. Предположим, что область Ω гомеоморфна шару. Если собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}_j^\pm(\mathbf{x})$ градиента дивергенции и ротора известны, то элементы $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{f}_{\mathbf{V}} \in \mathcal{B} = \mathbf{V}^0$ представляются рядами Фурье:

$$\mathbf{f}_{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}_{\mathbf{V}} = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})],$$

а элемент \mathbf{f} из $L_2(\Omega)$ — их суммой $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} + \mathbf{f}_{\mathbf{V}}$. Причем $\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{f}_{\mathcal{A}}$, а $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{f}_{\mathbf{V}}$, так как $\operatorname{rot} \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0$ в \mathcal{A} и $\operatorname{div} \mathbf{f}_{\mathbf{V}} = 0$ в \mathcal{B} . Скалярное произведение (\mathbf{f}, \mathbf{g}) полей \mathbf{f}, \mathbf{g} из $L_2(\Omega)$ равно $(\mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \mathbf{g}_{\mathcal{A}}) + (\mathbf{f}_{\mathbf{V}}, \mathbf{g}_{\mathbf{V}})$. Представления операторов \mathcal{N}_d в \mathcal{A}_γ , S в \mathcal{B} и обратных имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_d \mathbf{f}_{\mathcal{A}} &= - \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^2 (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j, & S \mathbf{f}_{\mathbf{V}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-], \\ \mathcal{N}_d^{-1} \mathbf{f}_{\mathcal{A}} &= - \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-2} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j, & S^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{V}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]. \end{aligned}$$

Рассмотрим пространства

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k} \equiv \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma, \dots, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}^m \equiv \{\mathbf{g} \in \mathbf{V}^0, \dots, \operatorname{rot}^m \mathbf{g} \in \mathbf{V}^0\}$$

при $k \geq 1, m \geq 1; \mathbf{A}_\gamma^0 \equiv \mathcal{A}, \mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0 \equiv \mathcal{B}$.

Имеют место вложения

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k} \subset \mathbf{A}_\gamma^{2(k-1)} \subset \mathbf{A}_\gamma^2 \subset \mathcal{A}_\gamma, \quad \mathbf{W}^m \subset \mathbf{W}^{m-1} \subset \dots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0.$$

Прямую сумму векторных пространств $\mathbf{A}_\gamma^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$ обозначим как $C(2k, m)$ и назовем классом; $k \geq 0, m \geq 0$ — целые, $k + m > 0$. Операторы (\mathcal{N}_d^{-1}, I) , (I, S^{-1}) и $(\mathcal{N}_d^{-1}, S^{-1})$ отображают класс $C(2k, m)$ на классы $C(2(k+1), m)$, $C(2k, m+1)$ и $C(2(k+1), m+1)$ и обратно (пп. 1.5 и 1.7).

4.2. Пространство $\mathbf{E}^s(\Omega)$, $s \geq 0$ — целое. Это пространство определяется в [21] так:

$$\mathbf{E}^s = \{\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s : \operatorname{div} \mathbf{f} \in H^s\}.$$

Квадрат нормы $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{E}^s}^2 = \|\mathbf{f}\|_s^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{f}\|_s^2 = \|\mathbf{f}_{\mathcal{A}}\|_s^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{f}_{\mathcal{A}}\|_s^2 + \|\mathbf{f}_{\mathbf{V}}\|_s^2$; \mathbf{E}^s — гильбертово пространство и

$$\mathbf{C}_0^\infty(\Omega) \subset \mathbf{E}^s(\Omega), \quad \mathbf{H}^{s+1}(\Omega) \subset \mathbf{E}^s(\Omega) \subset \mathbf{H}^s(\Omega).$$

Очевидно, что $\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} \in \mathbf{E}^s(\Omega)$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(\Omega)$.

Для функций v из пространства $H^1(\Omega)$ определен [2] оператор *следа*

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\omega),$$

равный следу v на границе ω для функций из $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$: $\gamma v = v|_\omega$, причем $\|\gamma v\|_{L_2(\omega)} \leq c \|v\|_{H^1(\Omega)}$.

Аналогично, для поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ из $\mathbf{E}^0(\Omega)$ определен [21] оператор *следа ее нормальной компоненты* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, $\gamma_{\mathbf{n}} : \mathbf{E}^0(\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\omega)$, равный сужению $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ на ω для функций из $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$: $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\omega}$.

Для $\mathbf{u} \in \mathbf{E}^0(\Omega)$ и $v \in H^1(\Omega)$ верна обобщенная формула Стокса:

$$\langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \gamma v \rangle = (\mathbf{u}, \nabla v) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, v),$$

где $\langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \gamma v \rangle$ — линейный функционал над пространством $H^{1/2}(\omega)$;

$$\mathbf{E}_{\gamma}^0(\Omega) \equiv \{ \mathbf{f} \in \mathbf{E}^0 : \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{f} = 0 \}.$$

4.3. Метод Фурье решения краевых задач в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Пусть в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ задано поле \mathbf{f} . Рассмотрим следующие задачи.

ЗАДАЧА 1. *Найти поле \mathbf{u} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \mathbf{L}_2(\Omega), \quad (4.1)$$

то есть $(\mathbf{u}, (\operatorname{rot} + \lambda I)\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$ для любого поля $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ и $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u} = 0$, если след $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}$ существует.

ЗАДАЧА 2. *Найти поле \mathbf{w} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{w} + \nu^2 \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \mathbf{L}_2(\Omega)$$

и $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{w} = 0$, если след $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{w}$ существует.

Перейдем в объемлющее пространство $\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Используя разложение полей \mathbf{f} , \mathbf{u} и \mathbf{w} из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ в суммы $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} + \mathbf{f}_{\mathbf{V}}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{A}} + \mathbf{u}_{\mathbf{V}}$ и $\mathbf{w}_{\mathcal{A}} + \mathbf{w}_{\mathbf{V}}$ и расширения S и \mathcal{N}_d операторов ротор и градиент дивергенции, запишем эти уравнения в виде уравнений-проекций

$$\lambda \mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad (\mathcal{N}_d + \nu^2 I) \mathbf{w}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \quad \text{в} \quad \mathcal{A}; \quad (4.2)$$

$$(S + \lambda I) \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}}, \quad \nu^2 \mathbf{w}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}}, \quad \text{в} \quad \mathcal{B}, \quad (4.3)$$

учитывая, что $\operatorname{rot} \mathbf{u}_{\mathcal{A}} = 0$ в \mathcal{A} , $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = 0$ в $\mathcal{B} \equiv \mathbf{V}^0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если пространство $\mathbf{C} \equiv \mathcal{B}_H(G)$ не пусто и $\lambda \neq 0$, то уравнение $(\nabla \operatorname{div} + \operatorname{rot} + \lambda I) \mathbf{u} = \mathbf{f}$ распадается на три проекции:

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I) \mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad (S + \lambda I) \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}}, \quad \lambda \mathbf{u}_{\mathbf{C}} = \mathbf{f}_{\mathbf{C}}$$

— уравнения второго, первого и нулевого порядков соответственно.

Согласно теореме 3 и леммам 1, 2, уравнения

$$(S + \lambda I) \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = \mathbf{f}_{\mathbf{V}} \quad \text{и} \quad (\mathcal{N}_d + \nu^2 I) \mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}$$

разрешимы по Фредгольму.

При $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ проекции решения задачи 1 имеют вид

$$\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \lambda^{-1} \mathbf{f}_{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{V}} = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{V}}. \quad (4.4)$$

Действительно, формулы (4.4) получаются из формул (4.2), (4.3) и обратимости оператора $S + \lambda I$ при $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$ в \mathbf{V}^0 (теорема 3, п. 1.5).

Рассмотрим утверждения теоремы 5 и прокомментируем их:

- если $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ и $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ или $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_\gamma$, то $\mathbf{u} = \lambda^{-1} \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ или $\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\gamma$ – обобщенные решения задачи 1.

Эти ряды являются обобщенными решениями уравнения (4.1);

- если $\mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, то $\mathbf{u} = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{V}} \in \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}_\gamma^1(\Omega)$;
- если $\mathbf{f} \in \mathbf{E}_\gamma^0(\Omega)$, то $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{A}} + \mathbf{u}_{\mathbf{V}} \in \mathbf{H}_\gamma^1(\Omega)$.

Действительно, если $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^0 = \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\operatorname{div} \mathbf{f} \in H^0$, то $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathbf{H}^0$ и $\operatorname{div} \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = \operatorname{div} \mathbf{f} \in H^0$, так как $\operatorname{div} \mathbf{f}_{\mathbf{V}} = 0$.

Кроме того, $\operatorname{rot} \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0$ и $\gamma_n \mathbf{f}_{\mathcal{A}} = 0$. Из оценки (1.2) при $s = 0$ поле $\mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathbf{H}_\gamma^1$, значит $\mathbf{u}_{\mathcal{A}} = \lambda^{-1} \mathbf{f}_{\mathcal{A}} \in \mathbf{H}_\gamma^1(\Omega)$.

Так как $\mathbf{u}_{\mathbf{V}} = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_{\mathbf{V}}$ также принадлежит \mathbf{H}_γ^1 , то $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_\gamma^1(\Omega)$;

- если \mathbf{f} принадлежит классу $C(2k, m)$, то $\mathbf{u} \in C(2k, m + 1)$;
- если же $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\Omega)$, то ряды (1.7), (1.8) сходятся в $\mathbf{H}^s(\Omega)$ для любого $s \geq 1$ и $\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ – классическое решение задачи.

Если $\mathbf{f} \in C(2k, m)$, то согласно (4.4) $\mathbf{u} \in C(2k, m + 1)$.

Последнее утверждение очевидно.

Теорема 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае шара эта теорема имеет наиболее естественный вид. Согласно [17], собственные значения $\lambda_{n,m}$ оператора S в шаре радиуса R равны $\pm \rho_{n,m} R^{-1}$, где числа $\pm \rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(r)$ (см. (1.9)), $m, n \in \mathbb{N}$; кратность собственного значения $\lambda_{n,m}$ равна $2n + 1$. Собственные поля $\mathbf{q}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$ ротора и $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$ градиента дивергенции, $\kappa = (n, m, k)$, выражены явно через сферические функции и функции $\psi_n(r)$.

Из теоремы 5 и леммы 1 очевидно следуют лемма 3 и ее следствие.

Решение краевой задачи 2 при $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\nabla \operatorname{div})$ аналогично [19].

Таким образом, задачи 1 и 2 решены полностью.

4.4. О приложениях. Собственные поля ротора имеют приложения в гидродинамике [6], где они называются полями Бельтрами; в астрофизике и в физике плазмы они называются бессильными полями (force-free magnetic fields – L. Woltjer [22], free-decay fields – J. V. Taylor [23]). В. И. Арнольд [24] и В. В. Козлов [25] изучали топологию линий тока течений идеальной жидкости при условии $[\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{v}] \neq 0$. Об этих и других работах подробно написано в работе [17].

Отметим еще работы L. Woltjer [22, 26], который ввел понятие спиральности (helicity) гладкого векторного поля в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

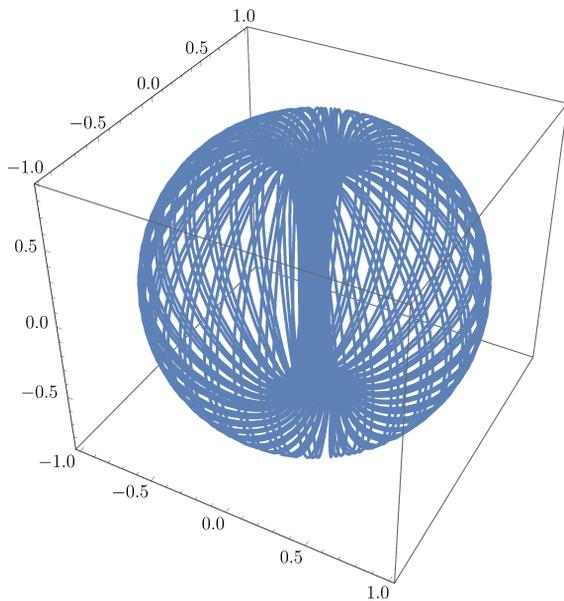
J. Cantarella, D. DeTurck, H. Gluck и M. Teytel [27] изучили линии тока собственных полей ротора с минимальным собственным значением в шаре и в шаровом слое.

Автор вывел формулы собственных полей ротора и градиента дивергенции в шаре для любых собственных значений (см. [17, 28, 29]). Формулы собственных полей ротора, полученные независимо от [27] и опубликованные в [28] примерно в то же время, дополняют формулы, приведенные в [27], которые получены, следуя работам [22, 26].

Установлена связь собственных полей ротора и Стокса [17, 30]. Для нелинейной системы Навье–Стокса с периодическими граничными условиями

найжены явные решения [31]. Совместно с А. Г. Хайбуллиным автор разработал новый метод численного решения задачи Коши [32, 33].

Профессор Г. Г. Исламов [34], используя формулу из работы [30], осуществил визуализацию линий тока поля $u_{1,1,0}^+(\mathbf{x})$ ротора с минимальным собственным значением в шаре.⁶ Траектория движения отдельной точки напояет нить, которая наматывается на тороидальную катушку (см. рисунок).



Катушка Исламова [Islamov Coil]

В работе М. Е. Боговского [35] исследована задача Дирихле для оператора дивергенции, важная в гидродинамике (см. [6, § 2 гл. 1]).

Статья В. Н. Масленниковой и М. Е. Боговского [36] содержит обзор работ по решению задачи С. Л. Соболева [5] и *аппроксимации потенциальных и соленоидальных векторных полей финитными бесконечно дифференцируемыми полями*. В частности, они пишут, что в 1976 г. J. Neuwald [37] построил соленоидальное векторное поле в $W_2^1(\Omega)$, которое не аппроксимируется векторными полями из $J_0^\infty(\Omega) = \{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи. Статья является продолжением исследований автора [17, 19, 38–40] (см. также arXiv:1704.05699 [math.FA], arXiv:1710.06428 [math.AP] и arXiv:1712.03804 [math.AP]).

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант руко-

⁶ Данная визуализация была представлена Г. Г. Исламовым в докладе «Моделирование полей смещения вакуума в системе “Mathematica» на 4-ой Российской конференции по технологиям Wolfram (г. Санкт-Петербург, 6–7 июня 2016 г.). На момент написания данной статьи материалы этого доклада были доступны по следующей ссылке: <http://wac.36f4.edgecastcdn.net/0036F4/pub/www.wolfram.com/pdf/report-islamov.pdf>. Представленный рисунок получен с помощью программы, переданной автору Г. Г. Исламовым.

писи. Исходный вариант статьи был опубликован в виде препринта: arXiv:1911.13230 [math.AP].

Благодарности. Я выражаю благодарность академику РАН профессору В. П. Маслову, профессору д. ф.-м. н. М. Д. Рамазанову и доценту к. ф.-м. н. Р. Н. Гарифуллину за поддержку при написании данной статьи, а также к. ф.-м. н. М. Н. Саушкину, чья редакторская правка способствовала улучшению содержания рукописи.

Библиографический список

1. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М.: Наука, 1974. 810 с.
2. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М.: Наука, 1975. 392 с.
3. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // *Duke Math. J.*, 1940. vol. 7, no. 1. pp. 411–444. doi: 10.1215/S0012-7094-40-00725-6.
4. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions // *Hokkaido Math. J.*, 1990. vol. 19, no. 1. pp. 67–87. doi: 10.14492/hokmj/1381517172.
5. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
6. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1970. 288 с.
7. Friedrichs K. O. Differential forms on riemannian manifolds // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955. vol. 8, no. 2. 551–590 pp. doi: 10.1002/cpa.3160080408.
8. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / *Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*. Сборник работ / Тр. МИАН СССР, Т. 59. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 5–36.
9. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot // *Math. Z.*, 1990. vol. 204. pp. 235–245. doi: 10.1007/BF02570870.
10. Зорич В. А. *Математический анализ. Часть II*. М.: Наука, 1984. 640 с.
11. Солонников В. А. Переопределенные эллиптические краевые задачи / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 5* / Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 21. Л.: Изд-во «Наука», Ленинград. отд., 1971. С. 112–158.
12. Сакс Р. С. О краевых задачах для системы $\operatorname{rot} u + \lambda u = h$ // *Дифференц. уравнения*, 1972. Т. 8, № 1. С. 126–133.
13. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // *Матем. сб.*, 1965. Т. 68(110), № 3. С. 373–416. [Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems // *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965. vol. 68(110), no. 3. pp. 373–416 (In Russian)].
14. Bourguignon J. P., Brezis H. Remarks on the Euler equation // *J. Funct. Anal.*, 1974. vol. 15, no. 4. pp. 341–363. doi: 10.1016/0022-1236(74)90027-5.
15. Foias C., Temam R. Remarques sur les équations de Navier–Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, Serie 4*, 1978. vol. 5, no. 1. pp. 29–63, http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_1_29_0/.
16. Вайнберг Б. Р., Грушин В. В. О равномерно неэллиптических задачах. I // *Матем. сб.*, 1967. Т. 72(114), № 4. С. 602–636.
17. Сакс Р. С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 2. С. 63–81.
18. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1988. 512 с.
19. Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева // *Динамические системы*, 2018. Т. 8, № 4. С. 385–407.

20. Сакс Р. С. О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 28 / Зап. научн. сем. ПОМИ, Т. 243. СПб.: ПОМИ, 1997. С. 215–269.
21. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1984. doi: 10.1090/chel/343.
22. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958. vol. 44. pp. 489–491. doi: 10.1073/pnas.44.6.489.
23. Taylor J. B. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields // *Phys. Rev. Letters*, 1974. vol. 33, no. 19. pp. 1139–1141. doi: 10.1103/PhysRevLett.33.1139.
24. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965. vol. 261. pp. 17–20; *Vladimir I. Arnold — Collected Works*. vol. 2. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. pp. 15–18. doi: 10.1007/978-3-642-31031-7_3.
25. Козлов В. В. *Общая теория вихрей*. Ижевск: Удмурт. гос. унив., 1998. 240 с.
26. Woltjer L. The Crab Nebula // *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958. vol. 14. pp. 39–80.
27. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. // *Physics of Plasmas*, 2000. vol. 7. pp. 2766–2775. doi: 10.1063/1.874127.
28. Сакс Р. С. Спектр оператора вихря в шаре при условии непротекания и собственные значения колебаний упругого шара, закрепленного на границе / *Труды конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы», IV. Прикладная математика*. Уфа, 2000. С. 61–68.
29. Saks R. S. On the spectrum of the operator curl / *Progress in Analysis: Proceedings of the 3rd ISAAC Congress*. vol. 1 (Berlin, Germany, 20–25 August 2001), 2003. pp. 811–819. doi: 10.1142/9789812794253_0094.
30. Сакс Р. С. Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса. Приложения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 131–146. doi: 10.14498/vsgtu1166.
31. Сакс Р. С. Глобальные решения уравнений Навье–Стокса в равномерно вращающемся пространстве // *ТМФ*, 2010. Т. 162, № 2. С. 196–215. doi: 10.4213/tmf6464.
32. Сакс Р. С., Хайбуллин А. Г. Об одном методе численного решения задачи Коши для уравнений Навье–Стокса и рядах Фурье оператора ротор // *Докл. РАН*, 2009. Т. 429, № 1. С. 22–27.
33. Сакс Р. С. Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 1. С. 53–79.
34. Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 680–696. doi: 10.14498/vsgtu1382.
35. Боговский М. Е. Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // *Труды семинара С. Л. Соболева*, 1980. № 1. С. 5–40.
36. Масленникова В. Н., Боговский М. Е. Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // *Сиб. матем. журн.*, 1983. Т. 24, № 5. С. 149–171.
37. Heywood J. G. On uniqueness questions in theory of viscous flow // *Acta Math.*, 1976. vol. 136, no. 2. pp. 61–102. doi: 10.1007/BF02392043.
38. Сакс Р. С. Ортогональные подпространства пространства $L_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенции // *Докл. РАН*, 2015. Т. 462, № 3. С. 278–282. doi: 10.7868/S0869565215150050.
39. Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции в $L_2(G)$ // *Докл. РАН*, 2015. Т. 462, № 5. С. 61–65. doi: 10.7868/S0869565215170089.
40. Сакс Р. С. Оператор ротор в пространстве $L_2(G)$ // *Таврический вестник информатики и математики*, 2015. № 1. С. 87–103.

MSC: 35P05, 35P15, 47A10

Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators

R. S. Saks

Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Science Centre, Russian Academy of Sciences,
112, Chernyshevskiy st., Ufa, Russia, 450077.

Abstract

We study boundary value and spectral problems in a bounded domain G with smooth border for operators $\operatorname{rot} + \lambda I$ and $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ in the Sobolev spaces.

For $\lambda \neq 0$ these operators are reducible (by B. Veinberg and V. Grushin method) to elliptical matrices and the boundary value problems and satisfy the conditions of V. Solonnikov's ellipticity. Useful properties of solutions of these spectral problems derive from the theory and estimates. The $\nabla \operatorname{div}$ and rot operators have self-adjoint extensions \mathcal{N}_d and \mathcal{S} in orthogonal subspaces \mathcal{A}_γ and \mathbf{V}^0 forming from potential and vortex fields in $\mathbf{L}_2(G)$. Their eigenvectors form orthogonal basis in \mathcal{A}_γ and \mathbf{V}^0 elements which are presented by Fourier series and operators are transformations of series.

We define analogues of Sobolev spaces \mathbf{A}_γ^{2k} and \mathbf{W}^m orders of $2k$ and m in classes of potential and vortex fields and classes $C(2k, m)$ of their direct sums. It is proved that if $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\operatorname{rot})$, then the operator $\operatorname{rot} + \lambda I$ displays the class $C(2k, m + 1)$ on the class $C(2k, m)$ one-to-one and continuously. And if $\lambda \neq \operatorname{Sp}(\nabla \operatorname{div})$, then operator $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ maps the class $C(2(k + 1), m)$ on the class $C(2k, m)$, respectively.

Keywords: Sobolev spaces, gradient operator, divergence operator, curl operator, elliptic boundary value problems, spectral problems.

Received: 25th November, 2019 / Revised: 10th March, 2020 /

Accepted: 16th March, 2020 / First online: 22nd June, 2020

Research Article

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Saks R. S. Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 249–274. doi: 10.14498/vsgtu1759 (In Russian).

Author's Details:

Romen S. Saks  Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; e-mail: romen-saks@yandex.ru

Summary. We study boundary value and spectral problems in a bounded domain G with smooth border for operators $\text{rot} + \lambda I$ and $\nabla \text{div} + \lambda I$ in the Sobolev spaces.

The peculiarity of these operators is that they are not elliptic, they belong at $\lambda \neq 0$ to the class of systems, reduced by B. Veinberg and V. Grushin method to elliptic matrices. Each of these problems satisfies the Solonnikov conditions of ellipticity.

From elliptic theory and estimates follow properties of solutions of spectral problems of the rotor and the gradient of the divergence:

- a) non-zero eigenvalues have finite multiplicity,
- b) each generalized eigenfunction is infinitely differentiable up to the boundary of the domain.

It is known that the space $\mathbf{L}_2(G)$ decomposes into two orthogonal subspaces of potential and solenoidal fields, which we call classes and denote by \mathcal{A} and \mathcal{B} . They contain subspaces $\mathcal{A}_\gamma \subset \mathcal{A}$ and $\mathbf{V}^0 \subset \mathcal{B}$.

It is proved that operators: gradient of the divergence and rotor have self-adjoint extensions \mathcal{N}_d and \mathcal{S} to orthogonal subspaces \mathcal{A}_γ and \mathbf{V}^0 , where they are reversible. Their inverse operators \mathcal{N}_d^{-1} and \mathcal{S}^{-1} are completely continuous, and their eigenvectors form an orthogonal bases in each class \mathcal{A} and \mathcal{B} .

The elements $\mathbf{f}_\mathcal{A}$ and $\mathbf{f}_\mathbf{V}$ decompose in Fourier series, and operators $\mathcal{N}_d : \mathcal{A}_\gamma \rightarrow \mathcal{A}_\gamma$ and $\mathcal{S} : \mathbf{V}^0 \rightarrow \mathbf{V}^0$ spectral representations are obtained. Their domains of definition $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d) \equiv \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma : \nabla \text{div} \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma\}$ and $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \equiv \{\mathbf{g} \in \mathbf{V}^0 : \text{rot} \mathbf{g} \in \mathbf{V}^0\}$ are contained in Sobolev spaces \mathbf{H}^2 and \mathbf{H}^1 of orders 2 and 1.

We introduce the spaces

$$\mathbf{A}_\gamma^{2k} \equiv \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma, \dots, (\nabla \text{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma\} \quad \text{and} \quad \mathbf{W}^m \equiv \{\mathbf{g} \in \mathbf{V}^0, \dots, \text{rot}^m \mathbf{g} \in \mathbf{V}^0\}$$

for $k, m \geq 1$ and prove they are analogues of the Sobolev space orders $2k$ and m , respectively, in the classes of potential and solenoidal fields. The direct sums of these spaces we call classes and denote as $C(2k, m)$.

The boundary value problems 1 and 2 in $\mathbf{L}_2(\Omega)$ are solved by the Fourier method for $\mathbf{f} \in C(2k, m)$.

If $\lambda \neq \text{Sp}(\text{rot})$, then the $\text{rot} + \lambda I$ operator maps the class $C(2k, m + 1)$ to the class $C(2k, m)$ one-to-one and continuously.

If $\lambda \neq \text{Sp}(\nabla \text{div})$, then the $\nabla \text{div} + \lambda I$ operator maps the class $C(2(k + 1), m)$ to the class $C(2k, m)$ one-to-one and continuously.

In particular, if domain $\Omega = B$ is a ball, $\psi_n(\lambda R) \neq 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ and field $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, then solution of the problem 1 exists, unique and belongs to the class $\mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Respective, if $\psi'_n(\nu R) \neq 0$ for all $0 \leq n \in \mathbb{N}$ and the field $\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, then solution of the problem 2 exists, unique and belongs to the class $\mathbf{A}_\gamma^{2(k+1)}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$.

Competing interests. I declare that I have no competing interests. This article is a continuation of the following studies [17, 19, 38–40] (see also arXiv:1704.05699 [math.FA], arXiv:1710.06428 [math.AP], and arXiv:1712.03804 [math.AP]).

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript. The initial version of this article was published as a preprint arXiv:1911.13230 [math.AP].

Acknowledgments. The author thanks the Academician of RAS V. P. Maslov, Professor M. D. Ramazanov and Associate Professor R. N. Garifullin for their support in writing this article. The author also thanks M. N. Saushkin, whose editorial help have been invaluable.

References

1. Sobolev S. L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An introduction*. Montreux, Gordon and Breach Science Publ., 1992, xvi+379 pp.
2. Mikhailov V. P. *Partial Differential Equations*. Moscow, Mir, 1978, 397 pp.
3. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, 1940, vol. 7, no. 1, pp. 411–444. doi: 10.1215/S0012-7094-40-00725-6.
4. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions, *Hokkaido Math. J.*, 1990, vol. 19, no. 1, pp. 67–87. doi: 10.14492/hokmj/1381517172.
5. Sobolev S. L. On a new problem of mathematical physics, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3–50 (In Russian).
6. Ladyzhenskaya O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. New York, Gordon and Breach, 1969, xviii+224 pp.
7. Friedrichs K. O. Differential forms on riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, no. 2, 551–590 pp. doi: 10.1002/cpa.3160080408.
8. Bykhovskii É. B., Smirnov N. V. Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis, In: *Mathematical problems of hydrodynamics and magnetohydrodynamics for a viscous incompressible fluid*, Collected papers, Trudy Mat. Inst. Steklov., 59. Moscow–Leningrad, Acad. Sci. USSR, 1960, pp. 5–36 (In Russian).
9. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot , *Math. Z.*, 1990, vol. 204, pp. 235–245. doi: 10.1007/BF02570870.
10. Zorich V. A. *Mathematical analysis II*. Berlin, Springer, 2016, xx+720 pp.
11. Solonnikov V. A. Overdetermined elliptic boundary value problems, In: *Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory. Part 5*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 21. Leningrad, Nauka, Leningrad. Otdel., 1971, pp. 112–158 (In Russian).
12. Saks R. S. Boundary value problems for the system $\operatorname{rot} u + \lambda u = h$, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 1, pp. 126–133 (In Russian).
13. Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965, vol. 68(110), no. 3, pp. 373–416 (In Russian).
14. Bourguignon J. P., Brezis H. Remarks on the Euler equation, *J. Funct. Anal.*, 1974, vol. 15, no. 4, pp. 341–363. doi: 10.1016/0022-1236(74)90027-5.
15. Foias C., Temam R. Remarques sur les équations de Navier–Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, Serie 4*, 1978, vol. 5, no. 1, pp. 29–63, http://www.numdam.org/item/ASNSP_1978_4_5_1_29_0/.
16. Vainberg B. R., Grushin V. V. Uniformly nonelliptic problems. I, *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 4, pp. 543–568. doi: 10.1070/SM1967v001n04ABEH001999.
17. Saks R. S. Solving of spectral problems for curl and Stokes operators, *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 63–81. doi: 10.13108/2013-5-2-63.
18. Vladimirov V. S. *Equations of Mathematical Physics*. New York, Marcel Dekker, 1971.
19. Saks R. S. Operator $\nabla \operatorname{div}$ and Sobolev spaces, *Dinamicheskie Sistemy*, 2018, vol. 8, no. 4, pp. 385–407 (In Russian).
20. Saks R. S. On properties of the generalized elliptic pseudo-differential operators on closed manifolds, *J. Math. Sci. (New York)*, 2000, vol. 99, no. 1, pp. 936–968. doi: 10.1007/BF02673601.

21. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam, North-Holland, 1984. doi: 10.1090/chel/343.
22. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958, vol. 44, pp. 489–491. doi: 10.1073/pnas.44.6.489.
23. Taylor J. B. Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields, *Phys. Rev. Letters*, 1974, vol. 33, no. 19, pp. 1139–1141. doi: 10.1103/PhysRevLett.33.1139.
24. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, pp. 17–20; Vladimir I. Arnold — *Collected Works*, vol. 2. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013, pp. 15–18. doi: 10.1007/978-3-642-31031-7_3.
25. Kozlov V. V. *Obshchaya teoriya vikhrei* [General Vortex Theory]. Izhevsk, Udmurt. State Univ., 1998, 240 c. (In Russian)
26. Woltjer L. The Crab Nebula, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958, vol. 14, pp. 39–80.
27. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M., *Physics of Plasmas*, 2000, vol. 7, pp. 2766–2775. doi: 10.1063/1.874127.
28. Saks R. S. Spectrum of the curl operator in a ball under sliding conditions and eigenvalues for oscillations of an elastic ball fixed on the boundary, In: *Trudy Conf. Complex Analysis, Differential Equations, and Related Topics, IV*. Ufa, 2000, pp. 61–68.
29. Saks R. S. On the spectrum of the operator curl, In: *Progress in Analysis*, Proceedings of the 3rd ISAAC Congress, vol. 1 (Berlin, Germany, 20–25 August 2001), 2003, pp. 811–819. doi: 10.1142/9789812794253_0094.
30. R. S. Saks The eigenfunctions of curl, gradient of divergence and Stokes operators. Applications, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 131–146 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1166.
31. Saks R. S. Global solutions of the Navier–Stokes equations in uniformly rotating space, *Theoret. and Math. Phys.*, 2010, vol. 162, no. 2, pp. 163–178. doi: 10.1007/s11232-010-0012-8.
32. Saks R. S., Khaybullin A. G. One method for the numerical solution of the cauchy problem for the navier-stokes equations and fourier series of the curl operator, *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 3, pp. 800–805. doi: 10.1134/S1064562409060052.
33. Saks R. S. Cauchy problem for Navier–Stokes equations, Fourier method, *Ufa Math. J.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 51–77.
34. Islamov G. G. On a class of vector fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 680–696 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1382.
35. Bogovskii M. E. Solutions of some problems of vector analysis, associated with the operators div and grad, *Trudy Seminara S. L. Soboleva*, 1980, no. 1, pp. 5–40 (In Russian).
36. Maslennikova V. N., Bogovskii M. E. Approximation of potential and solenoidal vector fields, *Sib. Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 5, pp. 768–787. doi: 10.1007/BF00969603.
37. Heywood J. G. On uniqueness questions in theory of viscous flow, *Acta Math.*, 1976, vol. 136, no. 2, pp. 61–102. doi: 10.1007/BF02392043.
38. Saks R. S. Orthogonal subspaces of the space $L_2(G)$ and self-adjoint extensions of the curl and gradient-of-divergence operators, *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 313–317. doi: 10.1134/S1064562415030151.
39. Saks R. S. The gradient-of-divergence operator in $L_2(G)$, *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 359–363. doi: 10.1134/S1064562415030291.
40. Saks R. S. The curl operator in the $L_2(G)$ space, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2015, no. 1, pp. 87–103 (In Russian).



Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор)

А. М. Локощенко¹, Л. В. Фомин^{1,2}, В. В. Терауд^{1,2},
Ю. Г. Басалов¹, В. С. Агабабян¹

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

² Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Данная статья представляет собой аналитический обзор экспериментальных и теоретических исследований ползучести и длительной прочности металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях, опубликованных за последние 60 лет.

Первые систематические исследования ползучести металлов при сложном напряженном состоянии были опубликованы в конце 50-х и начале 60-х годов XX века в Советском Союзе (Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов) и Великобритании (А. Е. Johnson). Пионерские работы по длительной прочности впервые появились в СССР (Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов). Впоследствии Ю. Н. Работнов разработал кинетическую теорию ползучести и длительной прочности, с помощью которой можно эффективно описывать различные особенности процесса ползучести металлов вплоть до разрушения при различных программах нагружения. В разных вариантах кинетической теории используются либо

Обзор

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Локощенко А. М., Фомин Л. В., Терауд В. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С. Ползучесть и длительная прочность металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 275–318. doi: 10.14498/vsgtu1765.

Сведения об авторах

Александр Михайлович Локощенко  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией; лаб. ползучести и длительной прочности¹; e-mail: loko@imec.msu.ru

Леонид Викторович Фомин  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности¹; старший научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики²; e-mail: fleonid1975@mail.ru

скалярный параметр поврежденности, либо векторный параметр, либо тензорный параметр, либо их комбинация. Вслед за работами М. Качанова и Ю. Н. Работнова механика континуального разрушения стала развиваться в Европе, в Азии и затем в США.

В качестве основной связи компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести принимается гипотеза пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести. При моделировании экспериментальных данных коэффициент пропорциональности в этой зависимости принимает разные формы. Основная проблема в развитии данного направления состоит в трудностях получения экспериментальных данных при произвольных программах нагружения.

В данном обзоре приведены основные результаты исследований, проводимых учеными разных стран. Кроме Ю. Н. Работнова и Л. М. Качанова, существенный вклад в развитие рассматриваемого направления науки внесли также российские ученые Н. Н. Малинин, А. А. Ильюшин, В. С. Наместников, С. А. Шестериков, А. М. Локощенко, О. В. Соснин, Ю. П. Самарин, А. Ф. Никитенко и др.

Ключевые слова: аналитический обзор, ползучесть, длительная прочность, сложное напряженное состояние, нестационарное нагружение, релаксация напряжений, скалярный параметр поврежденности, векторный параметр поврежденности, тензорный параметр поврежденности.

Получение: 7 января 2020 г. / Исправление: 24 февраля 2020 г. /
Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 14 мая 2020 г.

1. Введение. Высокотемпературная ползучесть металлов характерна тем, что в теле наряду с накоплением необратимых деформаций ползучести происходит образование и развитие дефектов (пор, микро- и макротрещин), приводящее к разрушению. Исследования, в которых используются предположения механики сплошной среды с учетом накопления микроразрушений, привели к формированию отдельного направления механики разрушения — механики континуального разрушения. Это направление было создано двумя выдающимися советскими учеными-механиками профессором Л. М. Качановым [1] и академиком Ю. Н. Работновым [2] В конце 50-х годов XX века они ввели в рассмотрение ползучести при одноосном растяжении новый параметр — поврежденность материала. Вскоре Ю. Н. Работнов на основе этого подхода разработал кинетическую теорию ползучести и длительной прочности [3]. В дальнейшем существенные результаты в рассматриваемой области были получены Ю. Н. Работновым, Л. М. Качановым, Н. Н. Малининым,

Валентин Викторович Терауд  <https://orcid.org/0000-0001-8336-5598>

канд. техн. наук; старший научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности¹; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики²;
e-mail: ldrnww@gmail.com

Юрий Генрихович Басалов; ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности¹;
e-mail: basalov@yandex.ru

Вардан Самвелович Агабабян  <https://orcid.org/0000-0001-5791-7758>
ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности¹

А. А. Ильюшиным, В. С. Наместниковым, С. А. Шестериковым, А. М. Локощенко, О. В. Сосниным, Ю. П. Самариним, А. Ф. Никитенко и другими российскими учеными.

Вслед за работами Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова механика континуального разрушения стала развиваться в Европе, в основном применительно к процессам ползучести металлов. Представители британской школы механиков F. A. Leckie и D. R. Hayhurst внесли значительный вклад в развитие теории накопления повреждений. Определенные успехи были достигнуты в работах польских (M. Chrzanowski и W. Tramezynski) и японских (S. Murakami) ученых. Во Франции основы механики континуального разрушения были сформулированы с использованием аппарата термодинамики (J. Lemaître). В начале 80-х годов XX века благодаря работам многих ученых этот раздел механики стал активно развиваться в США. С тех пор данная область исследований находится в центре внимания во всем мире в отношении развития как ее основ (далеко не все теоретические проблемы решены), так и приложений.

За последние 60 лет механика континуального разрушения (Continuum Damage Mechanics (CDM) в англоязычных публикациях) получила значительное развитие. Накопление повреждений рассматривается как процесс постепенного разрушения материала. Во многих работах отечественных и зарубежных ученых при изучении сложного напряженного состояния рассматриваются параметры поврежденности, имеющие не только скалярную, но также векторную и тензорную природу. С помощью современных вариантов кинетической теории можно описывать деформирование и длительное разрушение металлов при непропорциональном нагружении, учитывать анизотропию свойств металлов, использовать возможности теории при решении технологических задач и т.д.

Данный обзор посвящен анализу экспериментально-теоретических исследований ползучести и длительной прочности металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях за последние 60 лет. Следует отметить, что хотя некоторые испытания были проведены достаточно давно, эти результаты не потеряли своей актуальности и в настоящее время.

2. Монографии. В монографии Ю. Н. Работнова [3] сформулированы общие положения феноменологического подхода к описанию ползучести и длительной прочности как при одноосном растяжении, так и при сложном напряженном состоянии. В ней предложены общие соотношения такого подхода и подробно проанализированы конкретные варианты, основанные на концепции эффективного напряжения, которое вводится как в кинетические соотношения для параметра поврежденности ω , так и в определяющие уравнения состояния. С учетом эффективного напряжения можно описать явление длительной прочности и предсказать ряд наблюдаемых в экспериментах эффектов. В случае пространственного напряженного состояния поврежденность предлагается считать скалярной величиной или тензорной величиной.

В монографии Л. М. Качанова [4] формулируются феноменологические соотношения для определения длительной прочности в условиях сложного напряженного состояния. Решено большое количество конкретных задач для исследования как хрупкого, так и смешанного разрушения. Продемонстрированы возможности как скалярного, так и векторного представления парамет-

ра поврежденности. При решении задач учитываются явление анизотропии материала, движущийся фронт разрушения, перераспределение напряжений в процессе хрупкого разрушения и другие эффекты.

Многие важные аспекты длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии рассмотрены с позиций кинетической теории в ряде монографий (W. Tramszynski [5], О. В. Соснин с соавторами [6], А. Ф. Никитенко [7], В. М. Михалевич [8], J. Betten [9], А. М. Локощенко [10] и др.).

Монография [5] содержит изложение основ теории ползучести металлов в условиях одноосного и сложного напряженных состояний. Большое внимание уделяется проблеме ползучести при постоянных и циклических нагрузках. Приведены результаты экспериментальных и теоретических исследований циклической ползучести различных металлов при нестационарных нагружениях вплоть до разрушения. В монографиях [6, 7] подведен итог большого цикла экспериментально-теоретических исследований ползучести и длительной прочности различных металлов при стационарных и нестационарных напряженных состояниях, в этих исследованиях проанализированы возможности энергетического варианта кинетической теории. В. М. Михалевич [8] разработал математический аппарат для использования тензорного подхода, в котором соотношения для компонент девиатора повреждений представлены в интегральной форме. J. Betten [9] рассмотрел различные аспекты ползучести металлов с точки зрения механики деформируемого твердого тела, при этом описаны как фундаментальные, так и прикладные аспекты. Решение проблемы длительной прочности при сложном напряженном состоянии в монографии [9] основано на применении кинетической теории Ю. Н. Работнова с использованием тензорного параметра поврежденности. В монографии А. М. Локощенко [10] представлен широкий цикл экспериментально-теоретических исследований ползучести и длительной прочности при различных программах нагружения.

3. Обзоры. Учеными различных стран в разные годы были составлены аналитические обзоры, в которых обсуждались результаты исследований за предшествующие годы.

А. Johnson в 1960 г. опубликовал обзор исследований ползучести при сложном напряженном состоянии, проведенных в 1940–1959 гг. [11], в котором отмечается, что до 1940 г. учеными в основном рассматривались сложные напряженные состояния при установившейся ползучести. Значительное внимание в [11] уделялось особенностям неустановившейся и установившейся ползучести, релаксации напряжений, длительной прочности и другим важным проблемам.

С. А. Шестериков и А. М. Локощенко в 1980 г. опубликовали достаточно полный анализ развития теории ползучести и длительной прочности металлов за предшествующие 15 лет [12]. На основе проведенного анализа его авторы отметили, что в рамках механики сплошной среды для описания процессов ползучести и длительной прочности конструкционных металлов наиболее перспективной является предложенная Ю. Н. Работновым [3] концепция уравнения механического состояния с системой кинетических уравнений для определения параметров, характеризующих рассматриваемое состояние. При этом рассматриваются различные варианты кинетических уравнений.

J. Lemaître в 1986 г. привел классификацию методов описания контину-

ального разрушения, разработанных за предшествующие 10 лет [13]. В этом обзоре в качестве меры поврежденности вводятся скаляр для описания изотропного разрушения и вектор или тензор (второго или четвертого ранга) — для анизотропного разрушения. Рассматриваются случаи упругости, упруго-пластичности и упруговязкопластичности с соответствующими уравнениями состояния, включающими кинетику накопления поврежденности. Дана классификация основных типов критериев разрушения, приведены результаты расчетов типичных элементов конструкций.

D. Krajcinovic провел анализ развития кинетической теории с 1970-х по 1990-е годы [14–16]. В статье [14] дается обзор типичных задач механики, решаемых с позиций континуальной поврежденности. С физической точки зрения повреждения представлены в виде сфероидальных пустот и плоских микротрещин. С помощью описания кинематики роста повреждений устанавливается закон накопления поврежденности, т.е. уравнение, связывающее приращения тензоров поврежденности и деформаций. Это уравнение содержит матрицу жесткости, отражающую не только накапливаемые, но и накопленные ранее повреждения. В статье [15] акцентируется внимание на таких проблемах, как однородность, изотропия, масштабный фактор, влияние границ зерен в поликристаллических материалах и различных фаз в композитных материалах, усреднения при измерении деформации и смещений и др. Рассмотрены некоторые феноменологические и физические модели материала, основанные на данной концепции. В статье [16] проанализированы достижения, недостатки и тенденции развития механики повреждений. Отмечается, что растущий интерес к механике континуального разрушения является доказательством ее значительных достижений.

В обзоре J. Chaboche [17] механическое поведение материалов, имеющих повреждения, изучается на основе соединения механики разрушения с термодинамикой необратимых процессов, а также с учетом влияния анизотропии материала.

J. Betten рассмотрел широкий класс моделей, описывающих ползучесть изотропных и анизотропных материалов [18]. Различные особенности явления ползучести и длительной прочности при сложном напряженном состоянии описываются с помощью тензорного параметра поврежденности.

Yao Hua–Tang с соавторами [19] рассмотрели эволюцию достижений многих ученых в области кинетической теории ползучести и длительной прочности материалов начиная с основополагающих работ Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова. Данный обзор посвящен исследованию этих проблем как в теоретическом (феноменологическом или структурном), так и в прикладном аспекте. Большое внимание уделено анализу структурных механизмов ползучести (рост пор, учет диффузионных процессов и др.). В статье [19] рассмотрена возможность применения кинетической теории при моделировании особенностей длительного разрушения металлов с использованием скалярных, векторных и тензорных параметров поврежденности.

Существование сложных напряженных состояний при повышенной температуре вызывает особые проблемы. Важно понимать механизмы постепенного разрушения материала и уметь прогнозировать срок службы на практике. Хотя ползучесть металла изучается уже около 100 лет, многие проблемы до сих пор не решены. В работе [19] проведен современный обзор исследований

ползучести и инженерного проектирования с особым акцентом на учет влияния сложного напряженного состояния. Существующие теории и подходы к исследованию ползучести сгруппированы в три категории: подход, основанный на классической теории (СРТ), подход, основанный на механизме роста полостей и трещин (СГМ), и подход, основанный на механике сплошных повреждений (СДМ). В соответствии с вышеизложенным рассматриваются определяющие уравнения и критерии разрушения. В конце обзора [19] представлены задачи по описанию ползучести при сложном напряженном состоянии, а затем по совершенствованию критериев разрушения.

4. Ползучесть металлов при различных программах нагружения. Построение феноменологических моделей (теорий) ползучести, накопления поврежденности и длительной прочности имеет длительную историю, но данная проблема, особенно для сложного напряженного состояния, далека до завершения из-за основной трудности, заключающейся в получении и трактовке экспериментальных данных (что само по себе трудоемкая процедура), и широкого спектра реологических эффектов материалов в условиях ползучести.

Основы теории ползучести при сложном напряженном состоянии были заложены в середине XX века. Следует отметить вклад в это направление науки коллектива советских ученых во главе с Ю. Н. Работновым и коллектива ученых из Великобритании во главе с А. Johnson'ом.

Ю. Н. Работнов в начале 60-х годов XX века разработал кинетическую теорию ползучести, согласно которой скорость ползучести \dot{p} структурно устойчивого материала при одноосном растяжении в каждый момент времени t зависит от величины приложенного напряжения σ , температуры T и структурного состояния материала в этот момент времени. Структура состояния материала характеризуется набором величин q_1, q_2, \dots, q_n , которые называются структурными параметрами. Кинетическая теория ползучести в этом случае состоит из уравнения механического состояния

$$\dot{p} = \dot{p}(\sigma, T, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

и системы кинетических уравнений для определения этих структурных параметров:

$$dq_i = a_i dp + b_i d\sigma + c_i dt + g_i dT,$$

причем коэффициенты a_i, b_i, c_i, g_i в общем случае зависят от p, σ, t, T , а также от q_1, q_2, \dots, q_n .

В монографии [3] приведено обобщение кинетической теории на сложное напряженное состояние.

В статье [20] приведены результаты экспериментально-теоретических исследований ползучести металлов при различных программах нагружения, полученные Ю. Н. Работновым и его сотрудниками В. С. Наместниковым, С. Т. Милейко, А. А. Хвостунковым и др.

А. Johnson [11] при установлении причин разброса опытных данных обращает существенное внимание на степень неоднородности структуры образцов. В ряде случаев в трубчатых образцах размер зерен составлял 1/6 от толщины образца, при этом испытываемый материал лишь условно можно считать однородным. Им было проведено сравнение результатов двух серий опытов

на ползучесть при постоянных напряжениях: в условиях растяжения и кручения трубчатых образцов и в условиях двухосного растяжения тонкой полосы; интенсивности напряжений в этих сериях опытов совпадают. А. Johnson показал, что гипотеза единой кривой при постоянных напряжениях в этих испытаниях выполняется.

В качестве основного соотношения, связывающего напряженное и деформированное состояния, является гипотеза о пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести.

Проверкой гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести для различных материалов занимались F. Norton и C. Soderberg, R. Bailey, T. Nishihara с соавторами, В. С. Наместников и Ю. Н. Работнов [21, 22] и др. Большинство исследователей пришли к выводу, что эта гипотеза при постоянных напряжениях достаточно хорошо подтверждается. Так, например, анализ, проведенный В. С. Наместниковым, показал, что значения отношений $3\sigma_{xy}/\sigma_{xx}$, ρ_{xx}/γ_{xy}^c при постоянном напряженном состоянии отклоняются от единицы как в одну, так и в другую сторону, как правило, не более чем на 10 %.

В. С. Наместниковым также исследовалась пропорциональность девиаторов напряжений и деформаций при смене вида напряженного состояния [23]. Особенность испытаний на ползучесть при ступенчатом изменении напряжений заключается в том, что даже при малом увеличении напряжений деформации ползучести после этого резко возрастают, а после малого уменьшения напряжений процесс ползучести в течение некоторого времени практически прекращается. Поэтому при переменных напряжениях пропорциональность девиаторов напряжений и деформаций нарушается.

В. С. Наместников значительное внимание уделил экспериментальному исследованию выполнимости гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести при различных программах нагружения [21, 24]. В [21] было показано, что при постоянных нагрузках гипотеза пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести выполняется с точностью до 10 %. При этом в случае ползучести при переменных нагрузках, сопровождающихся поворотом главных осей напряженного состояния, эта гипотеза не выполняется. В [24] исследуется гипотеза пропорциональности девиаторов в случае пропорционального нагружения, при этом главные оси не поворачиваются. Экспериментальное исследование этого вопроса проводилось на тонкостенных трубчатых образцах из алюминиевого сплава Д16Т при 150 °С в условиях совместного действия растягивающего $\sigma(t)$ и касательного $\tau(t)$ напряжений. В процессе испытаний как при увеличении напряжений, так и при их уменьшении отношение τ/σ сохранялось практически постоянным ($\tau/\sigma \approx 0.34 \div 0.35$). Испытания показали, что при пропорциональном увеличении нагрузок гипотеза пропорциональности девиаторов удовлетворительно выполняется. В случае пропорционального уменьшения величин $\sigma(t)$ и $\tau(t)$ отношения экспериментальных значений деформаций ползучести к прогнозируемым значениям значительны.

При анализе установившейся ползучести известный интерес представляет вопрос о том, зависит ли функция $\dot{\rho}_u(\sigma_u)$, где $\dot{\rho}_u$ — интенсивность скоростей деформаций ползучести, а σ_u — интенсивность напряжений, от вида напря-

женного состояния. Из опытов А. Johnson'a следует, что в логарифмических координатах « $\lg \sigma_u - \lg \dot{p}_u$ » экспериментальные точки при постоянных напряжениях в основном располагаются вдоль одной и той же прямой (с точностью до естественного разброса) для всех трех рассматриваемых видов напряженного состояния: одноосного растяжения, кручения и их различных комбинаций. В то же время условие подобия девиаторов может нарушаться, соотношения между продольной и сдвиговой скоростями деформаций ползучести иногда существенно отличаются от теоретических значений.

Один из принципиальных вопросов в теории ползучести — вопрос о том, является ли упрочнение изотропным, т.е. выполняется ли гипотеза единой кривой при перемене направлений главных напряжений. Для исследования этого явления В. С. Наместников провел на трубчатых образцах из аустенитной стали ЭИ257 эксперименты при температурах 500 и 600 °С [24]. В каждой серии опытов интенсивность напряжений $\sigma_u = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ была неизменной, но от опыта к опыту менялось отношение τ/σ .

Эксперименты проводились по следующей схеме. Сначала образец в течение 50 ч испытывался при постоянных напряжениях σ и τ , характеризуемых значением $\tau/\sigma = k_1$ (первая часть опыта), затем происходило мгновенное изменение напряжений σ и τ и начиная с $t = 50$ ч образец испытывался еще 50 ч при том же значении интенсивности напряжений σ_u и другом значении отношения $\tau/\sigma = k_2$. В случае изотропного упрочнения интенсивность скоростей деформаций ползучести \dot{p}_u в произвольный момент времени зависит от интенсивности напряжений σ_u и накопленной интенсивности деформаций ползучести p_u , при этом величина \dot{p}_u не должна зависеть от того, каким образом создавалась эта величина p_u . Экспериментальные точки в случае изотропного упрочнения должны находиться на гладкой кривой, совпадающей с кривой $p_u(t)$ при сохранении неизменного значения $\tau/\sigma = k_1$ при $50 \leq t \leq 100$ ч. Однако скачкообразное изменение отношения τ/σ приводит в экспериментах к резкому возрастанию интенсивности деформаций ползучести. Таким образом, гипотеза единой кривой при переменных напряжениях в опытах В. С. Наместникова не подтверждается.

Если кривую ползучести, полученную при кручении после предварительного растяжения, сопоставить с кривой ползучести при кручении образца, который не подвергался предварительной ползучести при растяжении, то оказывается, что с точностью до обычного экспериментального разброса эти кривые совпадают. Таким образом, из этих опытов следует, что предварительное растяжение (кручение) не влияет на последующее кручение (растяжение). Этому явлению можно дать физическое обоснование. Деформации ползучести происходят путем сдвига по плоскостям скольжения кристаллической решетки. При кручении скольжение происходит, по-видимому, по плоскостям, отличным от плоскостей, по которым происходит скольжение при растяжении.

Далее рассмотрим некоторые результаты экспериментально-теоретических исследований ползучести металлов при сложном напряженном состоянии, проводимых А. Е. Johnson'ом в конце 50-х и в 60-х годах XX века.

В работе [25] А. Е. Johnson с соавторами провел сопоставление результатов полученных экспериментальных данных с различными теоретическими моделями. Лучше других экспериментам соответствует предложенная ими

теоретическая зависимость

$$\dot{p}_{ij} = [F(J_2) - f(I)] s_{ij} \Phi(t),$$

где \dot{p}_{ij} — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, $F(J_2)$ — функция второго инварианта тензора напряжений, $f(I)$ — функция второго инварианта тензора деформаций ползучести, $\Phi(t)$ — функция времени.

В работе [26] образцы из технической чистой меди после предварительной проверки на изотропию свойств ползучести подвергались, как правило, пяти ступеням нагружения. На каждой ступени продолжительностью 24 часа напряженное состояние оставалось неизменным. На первой ступени к образцу прикладывалась только осевая сила, которая затем оставалась постоянной, в то время как крутящий момент возрастал от ступени к ступени. Приведены результаты четырех серий опытов, отличающихся величинами осевых напряжений. Проверялось соответствие полученных результатов механическим теориям ползучести — теории старения, упрочнения, комбинации этих теорий. Константы уравнений, определенные на участке одноосного растяжения, использовались для предсказания дальнейшего поведения образца. Оказалось, что наилучшее предсказание дает теория течения в форме

$$\dot{p}_{ij} = AF(J_2)s_{ij} \Phi(t), \quad \Phi(t) = t^{-m}.$$

Здесь \dot{p}_{ij} — тензор скоростей деформаций ползучести; s_{ij} — девиатор напряжений; A , m — материальные константы; $F(J_2)$ — функция второго инварианта тензора напряжений, принятая в виде

$$F(J_2) = A_1(J_2)p_1 + A_2(J_2)p_2,$$

где $A_1(J_2)$, $A_2(J_2)$ — некоторые функции второго инварианта тензора напряжений; p_1 , p_2 — константы.

Исследовано также уточнение теории, вносимое с учетом истории деформирования. Основное уравнение записывается при этом в виде

$$\dot{p}_{ij} = [AF(J_2) - f(I_2)] s_{ij} \Phi(t),$$

где I_2 — второй инвариант тензора полных деформаций (включая мгновенную). Обработка экспериментальных данных показала, что следует положить $f(I_2) = C = \text{const}$.

В [27] дается вывод выражений для деформаций ползучести по различным теориям для описания экспериментальных данных, полученных ранее А. Е. Johnson'ом с соавторами.

В [28] приведены результаты 14 экспериментов на ползучесть тонкостенных трубок из углеродистой стали и алюминиевого и магниевых сплавов при соответствующих температурах при переменных напряжениях в условиях совместного кручения и растяжения. Опыты проводились таким образом, что нормальное напряжение было постоянным, а касательное напряжение менялось ступенчато. Испытания проводились только при возрастающем касательном напряжении. Обсуждается возможность построения аналитических зависимостей для описания поведения материала в данных условиях.

Отдельное внимание стоит уделить работам японских авторов, которые в 80-90-х годах XX века провели и описали широкое разнообразие экспериментально-теоретических исследований при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях [29–31]. Отметим эксперименты, проведенные указанными авторами.

В [29] Y. Ohashi, N Ohno и M. Kawai рассматривают ползучесть нержавеющей стали 304 при температуре 650 °С при повторяющемся многоосном нагружении. Рассматриваются различные траектории нагружения в пространстве « $\sigma - \tau$ »: повторяющееся нагружение – разгрузка при чистом растяжении, повторяющееся касательное напряжение с многократным изменением знака и совместное растяжение и кручение при различных комбинациях напряжений σ и τ . В статье приведены графики зависимостей осевой и угловой деформаций ползучести от времени при рассматриваемых программах нагружения.

В [30] приведены результаты экспериментально-теоретического исследования ползучести в условиях, когда компоненты тензора напряжений являются циклически изменяющимися кусочно-постоянными функциями времени. При этом, как правило, нормальное и касательное напряжения, приложенные к трубчатому образцу, изменяются таким образом, что интенсивность напряжений остается в течение испытания постоянной. Исследуется влияние непропорционального изменения напряжений на характер процесса ползучести материала. Предлагаемая модель представляет собой обобщение моделей изотропного и кинематического упрочнения.

В [31] приведены результаты феноменологического анализа анизотропной ползучести поликристаллов при непропорциональном изменении во времени компонент тензора напряжений. Предложены два варианта системы определяющих уравнений, в которых учитывается комбинация изотропного и кинематического упрочнения. В качестве примера предложенные варианты модели используются при обработке известных результатов испытаний нержавеющей стали типа 304 на ползучесть, в которых нормальное и касательное напряжения в трубчатых образцах непропорционально изменяются во времени кусочно-постоянным образом.

В [32] В. Dyson и D. McLean исследовали ползучесть сплава Nimonic 80A при одновременных кручении и растяжении в диапазоне интенсивностей напряжений σ_u от 100 до 500 МПа при температуре 750 °С. При указанных величинах интенсивности напряжений третья стадия ползучести и разрушение происходят быстрее при растяжении, чем при кручении, при этом зарождение полостей происходит быстрее. Полости, очевидно, ускоряют деформации ползучести, а деформации ползучести приводят к созданию полостей. Результаты выражены и объяснены в терминах отношения σ_1/σ_u , где σ_1 – максимальное главное напряжение, а прогнозирующий закон для длительности до разрушения получен из определяющих соотношений, связывающих деформацию, объем полостей и напряжения.

В работе [33] О. В. Сосниным с соавторами сформулированы основные гипотезы, положенные в основу построения энергетического варианта теории ползучести, а также приведены результаты экспериментальной проверки этих гипотез. Показано, что для изотропных и анизотропных материалов, обладающих одинаковыми свойствами ползучести на растяжение и сжатие при стационарных и слабо нестационарных процессах, сформулированные гипо-

тезы подтверждаются достаточно удовлетворительно и энергетический вариант теории ползучести может быть использован в практических задачах.

В [34] представлены экспериментальные результаты испытаний на ползучесть в течение 0.5 часа при постоянных осевом растяжении и чистом кручении стальных образцов при температуре 520°C (материал обладает явно выраженной упрочняющей стадией ползучести) и образцов из медного сплава при температуре 350°C (материал со слабовыраженным упрочнением). Также приведены результаты испытаний на ползучесть этих же материалов в течение 1 часа с «перегрузкой» — через 0.5 часа от начала испытаний выполнялось одно из следующих действий:

- 1) чистое осевое напряжение σ увеличивалось на некоторую величину;
- 2) к осевому растяжению с сохранением или изменением величины σ добавлялось кручение;
- 3) к кручению с сохранением или изменением величины τ добавлялось осевое растяжение.

Результаты по ползучести обрабатывались по деформационной теории старения («изохронные диаграммы») и по теориям типа течения с деформационным и временным упрочнением. Утверждается, что для медного сплава все три теории дают достаточно хорошее соответствие с экспериментом при перегрузках, для стального сплава при перегрузках две первые теории дают удовлетворительное соответствие, последняя — плохое соответствие.

В [35] описываются эксперименты над образцами в виде прутков из отожженной меди ($T = 427^\circ\text{C}$) и горячекатаной стали 1045 ($T = 510^\circ\text{C}$). Осуществлялась разнообразная программа нагружения, сочетающая в различных комбинациях растяжение и кручение. При теоретической обработке результатов принималось, что полная деформация состоит из упругой, пластической и вязкой составляющих. Упругопластические свойства материала описываются теорией Прандтля—Рейсса с условием пластичности Мизеса, свойства ползучести — степенным законом установившейся ползучести. Для нахождения деформаций ползучести при заданной программе нагружения строится шаговая (по времени или нагрузке) процедура численного решения. Сравнение результатов экспериментов и вычислений свидетельствует об эффективности выбранной модели поведения материала.

В работе [36] R. Mark и W. N. Findley представили результаты испытаний на ползучесть образцов из нержавеющей стали при комбинированном действии растяжения и кручения при температуре 593°C (1100 F). Образцы предварительно подвергались термообработке. Деформации ползучести наблюдались по меньшей мере 100 часов. Приведены результаты испытаний при одноосном растяжении, чистом кручении и комбинации растяжения и кручения при различных значениях нормальных и касательных напряжений.

В [37] приведены результаты испытаний на ползучесть при температуре 200°C тонкостенных трубчатых образцов из алюминиевого сплава в условиях совместного растяжения и кручения. Нормальное и касательное напряжения изменялись ступенчато и моменты их изменения, как правило, не совпадали. Наиболее существенному (вплоть до реверсирования) изменению подвергалось касательное напряжение. Полученные экспериментальные данные сопоставлялись с предсказаниями модели нелинейной ползучести. Модель базируется на разложении полной деформации на пять составляющих: упругую

деформацию, не зависящую от времени пластическую деформацию, две зависящие от времени и не обладающие возвратом деформации и деформацию, обладающую возвратом. Авторы пришли к заключению, что предложенная модель ползучести в основном хорошо согласуется с наблюдаемыми опытными данными.

В [38] приведены результаты экспериментов по комбинированному нагружению образцов из алюминиевого сплава 2618-Т61. Тонкостенные трубчатые образцы подвергались действию крутящей нагрузки и осевой силы. Приведены экспериментальные программы ступенчатого нагружения. Программы предусматривали как совместное действие кручения и растяжения на некоторых интервалах времени, так и их чередование. Представлены экспериментальные кривые зависимости сдвиговой и осевой деформаций ползучести от времени. Анализируется взаимосвязь между траекторией напряжений и траекторией деформаций. На основе проведенного анализа предложено определяющее соотношение вязкопластичности, содержащее внутренние скалярные и тензорные переменные параметры. Обсуждается роль внутренних переменных параметров в определяющем соотношении. Отмечено, что предложенное соотношение целесообразно использовать для описания переходных процессов деформирования, например, на стадии неустановившейся ползучести.

В [39] предложено развитие теории Ю. Г. Коротких, описывающей процессы нестационарной ползучести металлов при сложном напряженном состоянии. Разработана экспериментально-теоретическая методика определения материальных параметров и скалярных функций определяющих соотношений нестационарной ползучести. Приводятся результаты численного моделирования процесса ползучести стали 304 при сложных режимах термоциклического деформирования. Полученные численные результаты сравниваются с данными натурных экспериментов. Особое внимание уделяется вопросам моделирования ползучести для сложных процессов деформирования, сопровождающихся поворотом главных площадок тензоров напряжений и деформаций ползучести.

В [40] сообщается об исследовании определяющих соотношений высокотемпературной ползучести. Эксперименты выполнены при нестационарных одноосном и двухосном (растяжение – кручение) напряженных состояниях. Обнаружено, что упрочнение имеет существенно кинематический характер (так же, как анизотропия, вызванная ползучестью). При установившейся ползучести компоненты этого упрочнения пропорциональны компонентам приложенных напряжений. Для получения определяющих соотношений следует найти три скалярные функции, описывающие упрочнение и возврат и связь между эквивалентной скоростью деформации и эквивалентным напряжением. В проведенных экспериментах последняя связь была степенной.

А. М. Локощенко [41] провел теоретический анализ результатов выполненных ранее в НИИ механики МГУ испытаний трубчатых образцов из алюминиевых сплавов Д16Т и АД1 на ползучесть при растяжении и кручении. Из полученных с участием автора экспериментальных данных следует, что при определенных условиях наблюдается резкое возрастание скорости ползучести при добавлении к статическому напряжению вибрационного напряжения малой относительной амплитуды. Этот эффект (эффект виброползучести) проявляется только в тех случаях, когда вид напряженного состояния при

совместном действии статического и динамического напряжений отличается от вида предшествующего статического напряженного состояния. При этом с увеличением продолжительности приложенного вибрационного напряжения проявление эффекта виброползучести постепенно ослабевает. В указанной статье предложена модель для описания полученных экспериментальных данных, в которой фигурирует кинетический параметр; этот параметр отличается от нуля только при изменении сложного напряженного состояния в трубчатых образцах. В качестве количественной меры этого параметра используется величина угла поворота вектора максимального главного напряжения при добавлении малых вибраций к основному напряженному состоянию. Получено хорошее соответствие экспериментальных и теоретических кривых ползучести при различных видах напряженных состояний.

А. М. Локощенко с соавторами провели моделирование результатов испытаний металлов в условиях ползучести при нестационарном сложном напряженном состоянии [42]. В качестве примера рассмотрены экспериментальные данные, полученные группой японских ученых при испытаниях трубчатых образцов из нержавеющей стали при температуре 650 °С [29]. В приведенной статье представлены результаты испытаний при четырех различных программах нагружения. Эти программы нагружения представляют собой различные комбинации кусочно-постоянных зависимостей касательного и нормального напряжений от времени. Проведено моделирование представленных данных с помощью теории упрочнения и теории течения, две используемые материальные константы определяются из условия минимального относительно интегрального расхождения экспериментальных и теоретических соответствующих кривых ползучести. Сопоставлены результаты проведенного моделирования с результатами моделирования этих тех же экспериментальных данных, проведенного другими исследователями с использованием других теорий. В этих теориях использовано большое количество характеристик материала: от трех до девяти констант и дополнительно одна материальная функция в [42]. Показано преимущество рассмотренных авторами данной статьи теории упрочнения и теории течения всего с двумя материальными константами в каждой по сравнению с другими использованными теориями.

В [43] предложена модель расчета характеристик высокотемпературного разрушения металлов при произвольном сложном нагружении. Основное внимание уделяется циклическому знакопеременному нагружению при растяжении и сжатии. Приведены результаты ранее проведенных авторами усталостных испытаний нержавеющей стали 316 при температуре 700 °С при различных скоростях деформации от 10^{-5} до 10^{-3} сек⁻¹. Амплитуда a в каждом цикле сохраняла постоянное значение (в разных испытаниях от 0.2 до 0.5 %), количество циклов до разрушения — от 500 до 12000, в некоторых опытах при достижении амплитуды деформирования заданное значение a сохранялось постоянным в течение некоторого времени (обычно 3 мин). В качестве скалярной меры поврежденности ω , накапливаемой в процессе испытаний, принимались изменение модуля Юнга или уменьшение максимального напряжения от цикла к циклу. В указанной работе получены экспериментальные зависимости ω от количества циклов.

5. Релаксация напряжений. В [44] исследована ползучесть сплава Zircaloy-2 после холодной прокатки. Испытания проводились в интервале температур от 325 до 400 °С и интервале абсолютных значений растягивающих и сжимающих напряжений от 69 до 172 МПа при различных направлениях вырезки образцов из пластины после холодной прокатки, снятия остаточных напряжений и полной рекристаллизации материала. Испытания на релаксацию напряжений проводились при одноосном растяжении или сжатии при температуре 400 °С. Получены различные величины деформаций ползучести для трех главных направлений растяжения – сжатия. Деформации ползучести в продольном направлении больше, чем в нормальном, деформации ползучести при растяжении в 3 раза больше, чем при сжатии. Сжатие приводит также к большему эффекту деформационного упрочнения. Ползучесть при сжатии значительно меньше зависит от текстуры. Наблюдаемая анизотропия характеристик ползучести при растяжении связана с кристаллографической системой скольжения.

6. Ползучесть металлов при различных температурах. В работе [45] S. Murakami с соавторами представили результаты усталостных испытаний нержавеющей стали типа 316 при постоянной скорости деформирования. Проводились эксперименты на одноосное растяжение – сжатие и эксперименты с круговой траекторией деформирования. Эксперименты с изменением амплитуды деформации в диапазоне от 0.2 до 0.4 % проводились при температурах 400, 600 °С и при комнатной температуре. Влияние температуры исследовалось в экспериментах с изменением температуры в диапазонах 200–600 °С, 400–600 °С, 500–600 °С при постоянной амплитуде деформации 0.3 %. Отмечается, что большая амплитуда деформации или высокие температуры в предшествующих циклах оказывают значительное влияние на последующие циклы.

В [46] S. Murakami с соавторами провели экспериментальное исследование свойств нержавеющей стали при сложных циклических режимах нагружения при температурах от 20 до 700 °С. Испытания трубчатых образцов из стали проведены в режиме «растяжение – сжатие» при постоянной скорости изменения деформаций около 0.003 сек^{-1} , а также при изменении деформаций в цикле по круговой траектории, реализующейся в опытах на растяжение с кручением. Экспериментальные данные представлены циклическими диаграммами «напряжение – деформация» и траекториями изменения напряжений в опытах при непропорциональном циклическом нагружении. Показано, что при одинаковой амплитуде напряжений величина накопленной необратимой деформации в испытаниях при сложном напряженном состоянии значительно превосходит достигаемую в опытах при растяжении-сжатии. Циклическое упрочнение материала существенно зависит от температуры и наиболее интенсивно при 400–600 °С.

7. Влияние пластичности на ползучесть. В работе [47] Y. Ohashi и M. Tokuda моделируют результаты экспериментов по растяжению и кручению тонкостенных трубчатых образцов из изначально изотропной мягкой стали. Рассматриваются траектории деформации при совместном действии растяжения и кручения. Эксперименты проводились при различных значениях предварительных осевой и сдвиговой деформаций и последующих различных значениях углов наклона траектории совместной деформации. В ука-

занной работе представлены графики зависимостей эффективного напряжения (модуля вектора напряжения) от эффективной деформации (длины дуги траектории деформирования) для различных вышеуказанных условий проведения эксперимента.

Y. Ohashi, M. Kawai и T. Momose обнаружили значительную зависимость последующей ползучести от предварительной пластической деформации [48]. В условиях растяжения при температуре 650 °С в тонкостенных трубчатых образцах предварительно создавалась мгновенная пластическая деформация величиной 1, 2 или 3 %, а затем в течение 100 часов образцы подвергались испытаниям на ползучесть при совместном растяжении и кручении. Обнаружена значительная зависимость последующей ползучести от предварительной пластической деформации. Во всех экспериментах интенсивность напряжений принимала значение 140 МПа.

В [49] рассмотрено влияние предварительного пластического циклического деформирования на последующую ползучесть нержавеющей стали 316 при температуре 600 °С в условиях сложного напряженного состояния. Из полученных экспериментальных результатов следует, что предварительное циклическое нагружение по схеме «растяжение – сжатие» вызывает анизотропию характеристик ползучести.

В [50] В. F. Dyson с соавторами привели результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов из нержавеющей стали на ползучесть при температуре 800 °С при различных видах напряженного состояния (растяжение или кручение). В опытах определялась зависимость интенсивности скоростей установившейся ползучести $\dot{\rho}_u$ от интенсивности напряжений σ_u .

Использовались как образцы типа *A* (прошедшие отжиг в вакууме при температуре 1200 °С в течение 1 часа и закалку в среде холодного аргона), так и образцы типа *B* (прошедшие дополнительную термомеханическую обработку). В случае предварительного кручения последующие испытания на ползучесть при кручении проводились как в одну, так и в другую сторону. В результате получено, что для образцов типа *A* зависимость $\dot{\rho}_u(\sigma_u)$ при растяжении и кручении одна и та же. Для всех образцов типа *B* при всех способах создания предварительного наклепа зависимости $\dot{\rho}_u(\sigma_u)$ при растяжении проходят значительно выше, чем при кручении (отношение значений $\dot{\rho}_u$, соответствующих одному и тому же значению σ_u , составляет в среднем 3.0). При этом все образцы типа *B* при одной и той же величине σ_u проявляют меньшую скорость $\dot{\rho}_u$, чем образцы типа *A*. Показано, что если образцы типа *B* после пяти циклов термомеханической обработки вновь подвергнуть отжигу при температуре 1200 °С в течение 1 часа, то влияние термомеханической обработки снимается, и ползучесть этих образцов не отличается от ползучести образцов типа *A*. Механический анализ полученных результатов дополнен исследованием структуры различных образцов. Рассматривается модель роста межзеренных пустот, с помощью которой получено количественное описание экспериментальных данных.

Приведены данные металлографического исследования, в результате которого получены величины ω (отношения площади межзеренных пустот к площади рассматриваемого поперечного сечения) при различных значениях интенсивности скоростей деформации ползучести $\dot{\rho}_u$. Для всех образцов типа *B* показано, что в процессе ползучести зависимости $\omega(\dot{\rho}_u)$ для растяжения про-

ходят выше, чем для кручения. Рассматривается модель роста межзеренных пустот, с помощью которой получено количественное описание экспериментальных данных.

В испытаниях на ползучесть [51] использовались трубчатые тонкостенные образцы. Предложена вязко-вязкоупругая механическая модель для описания непропорционального изменения пластических характеристик и характеристик ползучести при скачкообразном изменении напряжений, учитывающая эффект старения и предполагающая независимость свойств пластичности и ползучести. Отмечено, что коэффициенты определяющих соотношений находятся из серии испытаний на ползучесть в условиях кручения с растяжением при постоянных значениях σ_u . Эта модель описывает экспериментальные результаты как при скачкообразном увеличении напряжений, так и при их скачкообразном уменьшении. Определяющие уравнения учитывают как ползучесть металлов, так и их последствие после разгрузки. Показано, что результаты расчетов по предложенной модели хорошо согласуются с полученными экспериментальными данными.

8. Длительная прочность. А. Е. Johnson с соавторами в [52] определяли влияние вибрационных напряжений на длительную прочность меди при температуре 250 °С при сложном напряженном состоянии. С этой целью был проведен ряд испытаний при ползучести до разрушения на медных образцах.

8.1. Скалярный параметр поврежденности. Следует отметить, что использование скалярного параметра поврежденности позволяет моделировать поведение металлов наиболее простым способом, поэтому варианты кинетической теории со скалярным параметром поврежденности и в наше время не потеряли своей актуальности. В данном параграфе рассмотрены некоторые достижения различных ученых при использовании скалярного параметра поврежденности.

Ученые разных стран предлагают различные типы кинетических уравнений при моделировании длительной прочности металлов в условиях сложного напряженного состояния.

О. В. Соснин [53–55] предложил энергетический подход для описания изучаемых явлений: в качестве скалярного параметра поврежденности ω принята величина рассеянной энергии $A(t)$, в качестве условия длительной прочности рассматривается равенство $A(t^*) = A^* = \text{const}$. Этот подход естественным образом позволяет формулировать постановку проблемы для стационарного и нестационарного пространственных напряженных состояний. В работах О. В. Соснина и его учеников (А. Ф. Никитенко, Б. В. Горева, И. В. Любашевской и др.) показано хорошее соответствие экспериментальных и теоретических кривых ползучести вплоть до разрушения. В монографии [6] изложено обоснование системы определяющих уравнений, описывающей ползучесть металлических материалов с одновременным учетом накопления в них поврежденностей. При описании длительной прочности используются скалярный параметр поврежденности, характеризующий энергию деформаций ползучести. А. А. Золочевский [56] при рассмотрении энергетического подхода предложил форму кинетического уравнения для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

В статье [57] исследуемые явления рассматриваются на основе предложенной авторами вероятностной теории.

В статьях [58, 59, 103] F. A. Leckie с соавторами установили связь феноменологического понятия поврежденности с параметрами структуры.

В ряде статей моделирование особенностей рассматриваемых явлений обеспечивается введением нескольких скалярных кинетических параметров [60–63 и др.]. Авторы этих исследований, как правило, рассматривают в качестве кинетических параметров различные характеристики эволюции структуры металлов в процессе ползучести.

А. Р. Ржаницын [64] вместо общепринятого скалярного параметра поврежденности ω ввел скалярный параметр объективной прочности r , величина r должна характеризовать мгновенную прочность материала в заданный момент времени. J. Lemaître с соавторами [65, 66] рассмотрели накопление повреждений в теле введением скалярных параметров состояния в рамках термодинамики необратимых процессов, при этом основное внимание уделяется взаимодействию процессов ползучести и усталости.

С. А. Шестериков с соавторами [67] при использовании дробно-степенной модели ползучести получили условие длительного разрушения, при котором предельное значение параметра поврежденности меньше 1.

М. Chrzanowski и J. Madej [68] при построении изохронных кривых длительной прочности в случае плоского напряженного состояния используют предлагаемое ими кинетическое уравнение, с помощью которого можно оценить прочность при кратковременном нагружении и остаточную кратковременную прочность в произвольный момент времени.

S. Murakami и M. Mizuno [69] обобщили теорию Ю. Н. Работнова для учета разрыхления металлов при нейтронном облучении и описали ползучесть нержавеющей стали при различных условиях облучения и переменных напряжениях.

В некоторых работах приведены не только результаты феноменологического исследования ползучести и длительной прочности металлов, но и анализ изменения структуры металлов в процессе ползучести [70–74].

В пяти статьях [74–78] приведены результаты исследований трубчатых образцов при постоянном растягивающем нормальном напряжении и знакопеременном касательном напряжении в условиях ползучести вплоть до разрушения. В таких испытаниях, как правило, изменение знака касательного напряжения приводит к увеличению времени до разрушения.

В [74] приведены результаты испытаний на ползучесть двух технических сплавов: INCO 718 (Inconel 718) и нержавеющей стали 17–21 SPH (сталь 316). Испытания проводились на трубчатых образцах в условиях одновременного действия растяжения и кручения при постоянных напряжениях (т.е. при этом учитывается уменьшение площади поперечного сечения в процессе опыта). В качестве эффективной скалярной характеристики плоского напряженного состояния принимаются интенсивность напряжений σ_u и максимальное главное напряжение σ_1 . В качестве характеристики деформированного состояния принимается интенсивность деформаций ползучести p_u , показано, что зависимость p^*_u (значение p_u в момент разрушения) от времени разрушения t^* имеет возрастающий характер для сплава INCO 718 и немонотонный характер (с внутренним минимумом) для стали 17–21 SPH. Наряду с экспериментами при не меняющихся во времени напряжениях авторы проводили опыты, в которых через каждые 48 часов касательное напряжение меняло

знак; в связи с этим время до разрушения стали 17–21 SPH увеличивалось в 2–3 раза, время до разрушения сплава INCO 718 либо увеличивалось на 50 %, либо уменьшалось на 30 %.

В [75] проводится анализ влияния вида напряженного состояния на длительную прочность поликристаллических металлов, основанный на системе определяющих уравнений, учитывающих зарождение и рост пор на границах зерен и влияние скольжения по границам зерен. При помощи предлагаемой модели и правила линейного суммирования повреждений Робинсона исследуется влияние переменных нагрузок и температур на долговечность материала в условиях одноосного растяжения, причем предполагается, что материал в начальном состоянии уже содержал некоторое количество микропор. Дано сравнение с опубликованными экспериментальными данными. Влияние непропорционального нагружения на длительную прочность материала рассмотрено на примере трубчатого образца при постоянном растяжении и реверсированном кручении.

В [76] проведен теоретический анализ данных [74]. При этом параметр поврежденности может быть представлен в скалярном или тензорном виде. Проведен статистический анализ ориентации трещин в разрушенных образцах. Аналитически описано влияние циклического изменения знака касательного напряжения на время до разрушения (причем как упрочнение, так и разупрочнение). В экспериментах на одноосную ползучесть при постоянном напряжении σ_0 получено, что предварительное кратковременное (в течение 2 минут) приложение к образцу напряжения σ_1 , большего σ_0 , приводит к значительному упрочняющему эффекту; этот результат описывается предложенной моделью.

В [77] рассматривается феноменологическая модель ползучести при сложном напряженном состоянии

$$\frac{\dot{p}_{ij}}{\dot{p}_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \frac{1}{(1-\omega)^n}, \quad (1)$$

$$\frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}_0} = \Delta \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \right) \frac{1}{(1-\omega)^n}, \quad (2)$$

где σ_u — интенсивность напряжений, ω — скалярный параметр поврежденности,

$$\Delta \left(\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \right) = \frac{1}{3\sigma_0} [\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_u + \gamma(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)] \quad (3)$$

— однородная функция напряжений. Здесь $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ — главные напряжения; α, β, γ — постоянные. Описаны ползучесть и длительная прочность тонкостенных трубок из алюминиевого сплава, меди и сплава Nimonic 80A. Эти трубки испытывались в условиях сложного напряженного состояния: растягивающее напряжение во время каждого опыта оставалось постоянным, касательное напряжение в некоторый момент времени $t = t_0$ меняло знак. Для описания кривых сдвиговой ползучести используются уравнения (1)–(3). Испытания алюминиевого сплава хорошо описываются этими уравнениями. Для описания опытов на меди уравнение (2) не подходит: следует рассматривать накопление поврежденности ω в двух плоскостях, перпендикулярных направлениям максимальных главных напряжений при $t < t_0$ и $t > t_0$. Для описания

ползучести и длительной прочности сплава Nimonic 80A соотношения (1)–(3) следует усложнить.

В [78] рассматривается анизотропное распределение пор в деформируемом элементе; эта анизотропия играет важную роль при описании непропорционального нагружения. Обсуждаются результаты испытаний сплава Nimonic 80A при температуре 750°C в условиях одноосного растяжения и чистого кручения при почти одинаковой величине интенсивности напряжений σ_u , при этом значения σ_{\max} различаются в $\sqrt{3}$ раз. Показано, что интенсивность деформаций ползучести p_u в случае одноосного растяжения (т.е. при большем σ_{\max}) значительно быстрее приводит к разрушению. Рассматривается теоретическая модель следующего типа:

$$\dot{p}_{ij} = F s_{ij}, \quad F = F(s_{kl}, \omega), \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij},$$

параметр ω учитывает влияние межзеренных пустот. Влияние σ_{\max} на t^* учитывается с помощью зависимости F от ω . Обсуждается испытание на чистое кручение, в котором касательное напряжение в некоторый момент времени меняет знак, при этом направление σ_{\max} поворачивается на 90°.

Л. Б. Гецов в [79] предложил кинетическое уравнение деформационного типа, состоящее из четырех слагаемых, каждое из которых учитывает повреждения и деформации разного типа, и позволяющее определять условия разрушения при произвольной программе нагружения и нагрева. Показано, что результаты опытов, проведенных разными авторами в условиях различных программ нагружения, корректно описываются в рамках частных случаев предложенного критерия длительной прочности.

П. А. Павлов и Н. Н. Курилович [80] представили результаты испытаний на ползучесть конструкционных сталей ЭИ765 и ЭП182 при одноосном и плоском напряженном состоянии. Для описания процесса накопления повреждений в условиях ползучести использовано кинетическое уравнение силового типа, отвечающее принципу линейного суммирования. Это уравнение проверено экспериментально при различных режимах нестационарного ступенчатого нагружения.

В [66] предлагается кинетическое уравнение для скалярного параметра поврежденности при пространственном напряженном состоянии. При этом использован формализм термодинамики необратимых процессов. Скорость накопления поврежденности рассматривается как функция плотности освобождаемой энергии деформации и скорости накопленной пластической деформации. Отмечено, что предложенное соотношение может описывать хрупкое и вязкое разрушение, малоцикловую и многоцикловую усталость и длительную прочность. Основное внимание уделяется изучению многоцикловой усталости и взаимодействия процессов ползучести и усталости. При использовании вязкопластического определяющего уравнения с кинематическим упрочнением предлагаемое кинетическое уравнение приводит к нелинейной связи усталостных и вязких характеристик разрушения. Данный метод позволяет описывать зависимость наступления усталостного разрушения от программы нагружения и, в частности, от величины среднего напряжения. Получено хорошее соответствие экспериментальных и теоретических характеристик разрушения для случаев одноосного и плоского напряженных состояний.

В работе [81] предложена система кинетических уравнений для описания постепенного разрушения при ползучести в условиях сложного напря-

женного состояния. На основе этих уравнений предлагается усовершенствованная методология применительно к деформациям ползучести ферритной стали 0.5Cr0.5Mo0.25V при температуре 590 °С. Предсказания этой системы уравнений согласуются с экспериментальными наблюдениями.

В [82] испытания на ползучесть проведены при одноосном растяжении, чистом кручении и комбинированном растяжении и кручении при температуре 250 °С для меди и 150 °С для алюминиевого сплава при различных напряженных состояниях. Анализируется влияние напряженных состояний на неустановившуюся ползучесть, установившуюся ползучесть и длительную прочность. На основе анализа известных моделей ползучести была сформулирована новая система кинетических уравнений. Предложенные унифицированные кинетические уравнения определяются с использованием экспериментальных данных, полученных для обоих материалов при трех уровнях напряжений. Сравнение экспериментальных и рассчитанных кривых деформаций ползучести проводится для всех видов напряженных состояний и уровней напряжений для обоих материалов. Экспериментальные результаты показывают, что напряженные состояния оказывают существенное влияние на весь процесс деформации ползучести как для меди, так и для алюминиевого сплава. Эффекты, наблюдаемые во время неустановившейся и установившейся ползучести, являются более значительными, чем эффекты в разупрочняющейся стадии ползучести для меди, но не для алюминиевого сплава. Отношение времен до разрушения медных образцов при растяжении и кручении может достигать величины, равной 10.

В [83] рассматривается возможность описания ползучести и длительной прочности при непропорциональном нагружении с помощью теории с одним параметром состояния ω :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{p}_{ij}}{\dot{p}_0} &= \frac{1}{n+1} \frac{\partial \Phi^{n+1}(\sigma_{kl}/\sigma_0)}{\partial (\sigma_{ij}/\sigma_0)} \frac{1}{(1-\omega)^n}, \\ \frac{\dot{\omega}}{\dot{\omega}_0} &= \Delta^\nu (\sigma_{ij}/\sigma_0) \cdot \frac{1}{(1-\omega)^\nu}, \end{aligned} \quad (4)$$

где Δ — однородная функция первой степени; σ_0 , \dot{p}_0 , n , ν , ω_0 — константы. Медь и алюминиевый сплав были отобраны для испытаний из тех соображений, что для них функцию Δ следует выбирать соответственно в виде $\Delta = \sigma_1/\sigma_0$ или $\Delta = \sigma_u/\sigma_0$ (σ_1 — максимальное главное напряжение, σ_u — интенсивность напряжений). Описаны испытания тонкостенных образцов при совместном действии растяжения и кручения как при пропорциональном увеличении σ и τ , так и при непропорциональном нагружении; в последнем случае нагружение заключалось в однократном или многократном прохождении на плоскости σ , τ двух выходящих из начала координат отрезков, симметричных относительно оси σ . Данные отрезки соответствуют уравнениям $\sigma = \pm 3\tau$, при этом из (4) следует $2\dot{p}_{z\theta}/\dot{p}_{zz} = 1$. О соответствии свойств ползучести уравнениям (4) авторы судят по отличию отношения $2\dot{p}_{z\theta}/\dot{p}_{zz}$ от 1. Показано, что с помощью указанных теоретических соотношений можно хорошо описать длительную прочность обоих материалов, а также деформации ползучести алюминиевого сплава.

8.2. Векторный параметр поврежденности. Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии связано со значительными трудностями. Наиболее перспективным путем решения этой задачи, по-видимому, является применение кинетической теории длительной прочности. Очевидно, что наиболее простые соотношения имеют место при использовании скалярного параметра поврежденности. Однако дефекты, определяющие накопление повреждений, такие как полости, микропоры, микротрещины, ориентированы нагрузками, под действием которых эти дефекты возникают. Как известно, микротрещины обычно развиваются приблизительно перпендикулярно максимальному из главных напряжений. Увеличение этих микротрещин приводит к разрушению соединений зерен в поликристалле, и в результате происходит разрушение. Для описания такого типа разрушений недостаточно использовать скалярный параметр поврежденности, необходимо применять векторный или тензорный параметр поврежденности. В данном параграфе рассмотрены варианты кинетической теории с векторным параметром поврежденности или с комбинацией скалярного и векторного параметров. Использование скалярного параметра поврежденности, как правило, не позволяет описать особенности длительного разрушения при различных программах нагружения. При использовании тензорного параметра поврежденности возникают трудности с определением входящих в кинетические уравнения функций и материальных констант. В этом параграфе рассматривается описание рассматриваемых экспериментальных данных с помощью векторного параметра поврежденности. Применение этого подхода, как правило, приводит к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

Среди ученых, принимавших участие в разработке этого направления, следует отметить Л. М. Качанова [4, 84] и И. В. Наместникову с С. А. Шестериковым [85]. Л. М. Качанов в своих работах предложил учитывать как величину повреждения ω , так и его направление. Скорость накопления поврежденности в каждой плоскости зависит от нормального напряжения, действующего в этой плоскости; местное разрушение наступает, когда величина ω в каком-либо направлении достигает предельного значения; полное разрушение наступает после прохождения фронта разрушения через рассматриваемый объем.

И. В. Наместникова и С. А. Шестериков [85] предложили другой подход. В качестве параметра поврежденности ими принимается величина $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, где величины ω_i связаны с главными напряжениями σ_i , $i = 1, 2, 3$. Эти зависимости описывают накопление проекций вектора поврежденности на направления главных напряжений в процессе ползучести. Величина вектора поврежденности удовлетворяет естественным условиям: $\omega(0) = 0$, $\omega(t^*) = 1$.

В работах [86, 87] с помощью векторного подхода описано явление анизотропной поврежденности.

В цикле работ А. М. Локощенко с В. В. Назаровым [88–92] выполнено обобщение модели, предложенной в статье [85]. С этой целью вводится коэффициент прочностной анизотропии материала α_0 и учитывается взаимная зависимость компонент ω_i . Впервые экспериментально получена [88] и впоследствии с помощью предложенной модели [92] определена зависимость вре-

мени до разрушения при стационарном сложном напряженном состоянии от программы кратковременного нагружения.

В некоторых работах рассматривается сочетание скалярного и векторного параметров поврежденности. С. А. Шестериков с соавторами [93] отметили, что в процессе ползучести при сложном напряженном состоянии фактически появляется анизотропия свойств накопленной поврежденности, и предложили модель с комбинацией скалярного и векторного подходов. А. А. Чижик и Ю. К. Петреня [94] считают, что в области микропор параметр поврежденности является векторной величиной, а в области клиновидных трещин — скаляром. О. К. Морачковский [95] использует скалярный параметр для описания установившейся и ускоряющейся стадий ползучести, а векторный параметр — для описания процесса ползучести на неустановившейся стадии. М. Chrzanovski, J. Madej [96] при описании изохронных кривых используют скалярный или векторный подход в зависимости от уровня времени до разрушения. Г. М. Хажинский [97] различает внутриверевную поврежденность (скалярный параметр) и межверевную поврежденность (векторный параметр). D. Nahurst с соавторами при моделировании длительного разрушения алюминиевого сплава при сложном напряженном состоянии используют скалярный параметр ω , а при описании поведения меди в тех же условиях учитывают изменение направления максимального главного напряжения при изломе траектории нагружения (векторный параметр) [77, 99].

В статьях [86, 98–102] рассматривается ползучесть до разрушения трубчатых образцов при касательных напряжениях, которые однократно или периодически меняют знак.

В [98] рассматривается влияние сложного нагружения на время до разрушения в условиях ползучести. Обсуждаются схемы вязкого (деформационного), хрупкого разрушения, а также разрушения смешанного типа.

В работе [99] квазиэмпирическая металловедческая теория В. Dyson'a и D. McLean'a использовалась для предсказания поведения трубок из сплава Nimonic 80A, испытанных на ползучесть при температуре 750 °С при прямом и обратном кручении. Данная теория была модифицирована для описания поведения предварительно напряженных трубок Nimonic 80A, испытанных в условиях прямого и обратного закручивания. Во всех случаях поврежденность, связанная с дефектами, является скалярной величиной, а поврежденность при ползучести и объемная доля полостей имеют векторный характер.

В [100] моделируется длительная прочность трубчатых образцов при одновременном действии постоянного осевого напряжения и касательного напряжения, однократно или циклически меняющего знак. Все варианты предложенных кинетических уравнений приводят к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

В [86] предлагаются определяющие соотношения для сред с изначально изотропной ползучестью и анизотропной поврежденностью, обусловленной зависимостью критериальной величины разрушения от вида напряженного состояния при простом нагружении и неравномерностью накопления повреждений в различных физических направлениях при сложном нагружении. Каждому направлению в векторном пространстве напряжений ставится в соответствие своя поврежденность. Ее приращение равно приращению скалярной поврежденности, умноженному на значение материальной функции от

угла между указанным направлением и вектором действующих в данный момент напряжений. Совокупность одновременных значений поврежденностей на всех направлениях пространства напряжений образует поверхность анизотропной поврежденности. Значение поврежденности в направлении вектора напряжений, действующих в текущий момент времени, принимается в качестве меры поврежденности. Она определяет ускорение ползучести при приближении к моменту разрушения и условие его наступления. Эффективность модели иллюстрируется сравнением с имеющимися в литературе экспериментальными и теоретическими результатами по ползучести и длительной прочности меди при температуре 250 °С [100] и нержавеющей стали при температуре 600 °С [74] в условиях совместного действия постоянного растяжения и знакопеременного кручения.

А. М. Локощенко в [101] рассмотрел результаты известных испытаний трубчатых образцов при постоянном осевом напряжении и постоянном или знакопеременном касательном напряжении [74]. Циклическое изменение знака касательных напряжений приводит в экспериментах к значительному увеличению времени до разрушения. Моделирование полученных экспериментальных результатов проведено с помощью подхода Л. М. Качанова.

В [102] выполнено моделирование известных результатов испытаний на длительную прочность в условиях нестационарного сложного напряженного состояния. При описании экспериментальных данных [100] используется векторный параметр поврежденности с кусочно-постоянной скоростью накопления повреждений. Моделируется длительная прочность трубчатых образцов при одновременном действии постоянного осевого напряжения и касательного напряжения, однократно или циклически меняющего знак. Моделирование длительной прочности при скачкообразном изменении интенсивности напряжений проведено двумя способами — с помощью метода Л. М. Качанова и метода И. В. Наместниковой и С. А. Шестерикова. Все варианты предложенных кинетических уравнений приводят к хорошему соответствию экспериментальных и теоретических значений времен до разрушения.

В [87] на основе кинетической теории предложено вязкопластическое моделирование анизотропной поврежденности. Модель учитывает влияние поворота направлений главных поврежденностей на деформационное и повреждающее поведение. С помощью вязкопластического потенциала поврежденности устанавливаются уравнения эволюции повреждений. На основе предложенного критерия поврежденности для локализованной шейки модель используется для прогнозирования момента разрушения алюминиевого листа из сплава 6111-Т4. Прогнозируемые результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

8.3. Тензорный параметр поврежденности. При исследовании зависимости времени до разрушения от различных характеристик анизотропии материала (как исходной, так и приобретенной) многие авторы используют тензорный параметр поврежденности, при этом рассматриваются тензоры второго, четвертого и восьмого рангов. Впервые тензорный параметр поврежденности предложен в классической монографии Ю. Н. Работнова [3], в качестве характеристики напряженного состояния в [3, 104] принимается линейная комбинация σ_{\max} и σ_u .

В. П. Тамуж [105] рассмотрел возможности построения теории длитель-

ной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью скалярного, векторного и тензорного параметров поврежденности. Н. Altenbach и Р. Schiesse [106] рассмотрели возможность описания связи условий нагружения с поврежденностью на уровне структуры материала.

В 1967 г. А. А. Ильющин [107] ввел понятия тензоров и мер повреждений, которые определяются с помощью функционалов относительно заданных процессов изменения во времени тензоров напряжений и моментов. В монографии Э. Б. Завойчинской и И. А. Кийко [108] рассматривается развитие этого подхода: введен оператор повреждений, предложено обобщение механических теорий прочности, исследованы предельные процессы нагружения в пространстве А. А. Ильюшина. Б. Е. Победря рассмотрел операторные определяющие соотношения среды, включающие меру поврежденности А. А. Ильюшина [109]. Возможные несовершенства материала учтены путем введения моментных напряжений, проведен термодинамический анализ процесса эволюционного разрушения материала. В. П. Тамуж и А. Ж. Лагздыньш применили тензорный подход при моделировании накопления повреждений в виде круглых мелких трещин различной ориентации в изотропных [110] и анизотропных [111] средах. В. А. Копнов использовал предложенные в статье [107] интегральные операторы для получения феноменологических критериев длительной прочности анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии [112]. А. А. Лебедев и В. М. Михалевич сформулировали критериальные соотношения для накопленных повреждений в виде уравнения наследственного типа с разностным ядром [8, 113–115].

J. Betten [116, 117] выделил деформационную анизотропию и анизотропию, вызываемую накоплением повреждений. С. Chow, J. Wang [118] предложили тензорное уравнение накопления повреждений для анизотропной среды при учете больших деформаций. S. Vodner [119] предложил использовать в определяющем уравнении для анизотропной среды параметр поврежденности в виде тензора второго ранга.

S. Murakami с соавторами [120–123] особое внимание уделили анизотропному характеру накопления тензорного параметра поврежденности, при этом было использовано сочетание методов механики сплошной среды и материаловедения. В. И. Астафьев [124] применил тензорную меру поврежденности для описания развития пор, их слияния и превращения пор в микротрещины, расположенные на площадках, ортогональных направлению наибольшего главного напряжения.

D. Krajčipović с соавторами [125–127] построили теорию длительной прочности металлов на основе введения параметра поврежденности в виде антисимметричного тензора второго ранга. В статье [126] рассматривается связь между микроструктурными параметрами поврежденности и макрохарактеристиками поликристаллических материалов. На основе термодинамического анализа роста трещины Гриффитса получена связь между разбросом характеристик диаграммы деформирования на микроуровне и процессом деформирования на макроуровне. В. А. Маньковский [128] при исследовании изменения поврежденности во времени учитывает ее случайный характер. В результате исключения фактора случайности и использования тензорного подхода получен новый критерий длительного разрушения при сложном напряженном состоянии.

P. Delobelle с соавторами [76, 129], анализируя результаты испытаний, проведенных при сложном нагружении, показали необходимость учета механизмов как изотропного, так и кинематического упрочнения материала. J. Lemaître [130] применил кинетическую теорию при решении задач обработки металлов, в частности, задачи о глубокой вытяжке полос. В статье [131] опубликован краткий обзор результатов описания длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии с помощью кинетической теории. В этом обзоре показано, что основные усилия ученых направлены на разработку новых теоретических моделей, в то время как получению экспериментальных данных уделено недостаточное внимание. В связи с этим имеющиеся результаты известных испытаний не позволяют определять время до разрушения при произвольных температурно-силовых программах нагружения.

В статье К. А. Агахи и Д. В. Георгиевского [132] предлагается обобщение определяющих уравнений теории ползучести с поврежденностью на трехмерное напряженное состояние, в это обобщение входят две материальные нелинейные тензор-функции двух тензорных аргументов.

Континуальная теория ползучести и длительной прочности поликристаллических металлов при сложном напряженном состоянии в [122] формулируется с помощью использования тензоров поврежденности и тензоров деформаций ползучести. Накопление поврежденности описывается тензором второго ранга, характеризующим уменьшение площади нетто, вызванное трехмерным распределением микрополостей. Влияние поврежденности на деформации ползучести выражается через тензор четвертого ранга, сформированный из упомянутого тензора поврежденности.

Обоснованность полученной теоретической модели с упором на тензорную природу параметра поврежденности была показана путем проведения модельных испытаний с перфорированными образцами. Было отмечено, что постепенное разрушение может быть идентифицировано с помощью тензора поврежденности второго ранга, кроме того, влияние постепенного разрушения на увеличение деформаций ползучести может быть представлено с помощью тензоров напряжений второго и четвертого ранга, полученных с помощью тензора поврежденности.

Отмечено, что для того, чтобы разработать и проверить конкретные формы вводимых определяющих и кинетических уравнений, необходимо дополнительно выполнить различные испытания при нестационарных сложных напряженных состояниях для реальных материалов.

Одна из наиболее важных задач теории ползучести металлов состоит в определении времени до разрушения в заданных условиях температурно-силового нагружения. В данной работе обсуждается влияние силового режима на длительную прочность. Обычно рассматриваются задачи определения времени до разрушения при достаточно простом нагружении (например, растяжение стержня при постоянной нагрузке, труба под действием постоянного давления и т. д.) и различаются две идеализированные схемы — «вязкое» (деформационное) и хрупкое (малодеформационное) разрушения, реже анализируется промежуточный (смешанный) тип разрушения. Разрушение, однако, существенно зависит от истории нагружения. Используя тензорные характеристики состояния в данной точке среды или на поверхности малой сфе-

ры, окружающей данную точку, или более общие переменные, учитывающие «дальнодействие», можно ввести весьма общие функционалы, представляющие зависимость разрушения от последовательности силовых воздействий. Однако недостаток экспериментальных данных, большой их разброс и трудности определения многих параметров и характерных функций побуждают к развитию простых моделей. Ниже излагается простая феноменологическая схема, опирающаяся на предельные картины чисто вязкого и идеально хрупкого разрушения.

В [123] в рассматриваемой модели повреждение материала является параметром состояния, оно представляется в виде симметричного тензора II ранга. При выводе определяющих уравнений используются предположения об анизотропном накоплении повреждений, законе течения типа Прагера-Друккера и деформационном упрочнении. Определяющие уравнения имеют вид

$$D_{ij} = G_{ij}(\sigma_{mn}, \Omega_{mn}, k, T), \quad \dot{\Omega}_{ij} = H_{ij}(\sigma_{mn}, \Omega_{mn}, k, T),$$

где σ_{mn} , D_{mn} , Ω_{mn} — тензоры напряжений, деформаций и повреждений соответственно; T — температура, k — параметр упрочнения; G_{ij} и H_{ij} — изотропные тензорные функции. Предложенные уравнения используются для описания испытаний меди при 250 °С в условиях пропорционального (А. Е. Johnson и др., 1956 г.) и непропорционального (W. Trzczyński и др., 1979 г.) нагружения. Эти испытания проводились при комбинации растягивающего σ и касательного τ напряжений при $\sigma(t) \equiv \text{const}$, зависимость $\tau(t)$ в различных опытах была постоянной или кусочно-постоянной. Описание этих экспериментальных данных проводилось с помощью данных соотношений, а также с помощью соотношений Работнова—Качанова, естественным образом обобщенных на случай сложного напряженного состояния.

В рамках развиваемой теории анизотропной поврежденности при ползучести, основанной на рассмотрении симметричного тензора поврежденности второго ранга, сформулированы определяющие уравнения ползучести и длительной прочности для меди [133]. В одноосном случае рассматриваются два типа определяющих уравнений ползучести с деформационным упрочнением и степенным законом накопления поврежденности. Для уточнения вида определяющих уравнений и нахождения констант, входящих в эти уравнения, были выполнены эксперименты на длительную прочность для одноосного случая и для случая сложного напряженного состояния при совместном кручении и растяжении. Эксперименты проводились на трубчатых медных образцах длиной 25 мм, толщиной 1 мм с внешним радиусом 21 мм при температуре 250 °С. Развиваемая модель используется для анализа переменного сложного напряженного состояния при ползучести и исследования влияния анизотропии повреждений на деформации ползучести и долговечность. Теоретические результаты сравниваются с данными экспериментов при постоянном растяжении и реверсированном кручении. Обсуждаются возможности, ограничения и пути уточнения предлагаемой теории.

9. Заключение. Предлагаемая статья представляет собой аналитический обзор экспериментальных и теоретических исследований ползучести и длительной прочности металлов при нестационарных сложных напряженных состояниях за последние 60 лет.

Первые систематические исследования ползучести металлов при сложном напряженном состоянии были опубликованы в конце 50-х и начале 60-х годов XX века в Советском Союзе (Ю. Н. Работнов [3]) и Великобритании (А. Е. Johnson [26]). Пионерские работы по длительной прочности металлов при одноосном растяжении впервые появились в СССР (Л. М. Качанов [1] и Ю. Н. Работнов [2]). Впоследствии Ю. Н. Работнов разработал кинетическую теорию ползучести и длительной прочности [3], с помощью которой в настоящее время можно эффективно описывать особенности процесса ползучести металлов вплоть до разрушения при различных программах нагружения. Вслед за работами Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова механика непрерывного разрушения стала развиваться в Европе, в Азии (в основном в Японии) и затем в США.

В качестве основной связи компонент тензоров напряжений и деформаций ползучести (скоростей деформаций ползучести), как правило, принимается гипотеза пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести. В работах А. Е. Johnson'a [11] коэффициент пропорциональности в этих соотношениях включает вторые инварианты тензора напряжений и тензора скоростей деформаций ползучести. В настоящее время существует недостаточное количество систематических экспериментальных данных о деформациях ползучести при произвольных нестационарных сложных напряженных состояниях, при этом остается открытым вопрос о виде коэффициента в гипотезе пропорциональности. Следует отметить проведенные различными учеными из разных стран экспериментально-теоретические исследования ползучести трубчатых образцов вплоть до разрушения, в которых растягивающее напряжение в течение испытания оставалось постоянным, а касательное напряжение однократно или периодически изменяло знак. Такие исследования показали, что изменение знака касательного напряжения приводит к значительному увеличению времени до разрушения. Этому явлению можно дать физическое обоснование. Деформации ползучести происходят путем сдвига по плоскостям скольжения кристаллической решетки, при перемене знака касательного напряжения в материале образца происходит скольжение по другим плоскостям. Следует отметить также случайный характер накапливаемых повреждений при изменении вида сложного напряженного состояния.

В качестве общего недостатка исследований по данной тематике следует отметить следующее обстоятельство. Во всех исследованиях, проводимых за последние 60 лет, учеными разных стран рассматриваются характеристики ползучести и длительной прочности, зависящие только от двух параметров: характеристик задаваемого механического нагружения (напряжений или деформации ползучести) и параметров переменного температурного поля. Однако на практике механическое поведение элементов конструкций при высоких температурах может зависеть также от других физических полей (например, от влияния агрессивной окружающей среды).

В [134–136] приведен подробный анализ особенностей механического по-

ведения металлов при длительном высокотемпературном напряженном состоянии в агрессивных средах и основных феноменологических подходов, используемых при моделировании влияния окружающей среды на ползучесть и длительную прочность этих металлов.

Сотрудники института механики МГУ имени М. В. Ломоносова и Московского авиационного технологического института имени К. Э. Циолковского в 2008 г. опубликовали результаты совместного экспериментально-теоретического исследования ползучести и длительной прочности титанового сплава с предварительно внедренным водородом при одноосном растяжении [137, 138]. Исследования показали, что увеличение доли предварительно внедренного водорода приводит к систематическому увеличению времени до разрушения и, как правило, к значительному уменьшению предельной деформации ползучести.

При этом следует отметить, что экспериментальные исследования ползучести и длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии в присутствии окружающей агрессивной среды, как правило, отсутствует.

В данном обзоре приведены основные результаты исследований, проводимых учеными разных стран. Существенный вклад в развитие рассматриваемого направления науки внесли, в частности, российские ученые Ю. Н. Работнов, Л. М. Качанов, Н. Н. Малинин, А. А. Ильюшин, В. С. Наместников, С. А. Шестериков, А. М. Локощенко, О. В. Соснин, Ю. П. Самарин, А. Ф. Никитенко и др.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19-19-00062, Самарский государственный технический университет).

Библиографический список

1. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций*. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 5–7 с.
3. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Качанов Л. М. *Основы механики разрушения*. М.: Наука, 1974. 312 с.
5. Трапцзуйński W. *Badanie wpływu historii obciążenia na pełzanie metali w złożonym stanie naprężenia*. Warszawa: Inst. Podstawowych Probl. Techn. Polsk. Akad. Nauk, 1985. 249 pp. (in Polish)
6. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести*. Новосибирск: Ин-т гидродин. им. М. А. Лаврентьева, 1986. 96 с.
7. Никитенко А. Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997. 278 с.
8. Михалевич В. М. *Тензорні моделі накопичання пошкодження*. Вінниця: Універсум-Вінниця, 1998. 195 с. (на украинском), <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/13977>.

9. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 2008. xvi+367 pp. doi: 10.1007/978-3-540-85051-9.
10. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
11. Johnson A. E. Complex stress creep of metals // *Intern. Met. Rev.*, 1985. vol. 30, no. 1. pp. 447–506. doi: 10.1179/mtlr.1960.5.1.447.
12. Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов / *Итоги науки и техники. Сер. Механ. деформ. тверд. тела*. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–124.
13. Lemaître J. Local approach of fracture // *Eng. Fract. Mech.*, 1986. vol. 25, no. 5–6. pp. 523–537. doi: 10.1016/0013-7944(86)90021-4.
14. Krajcinovic D. The continuous damage theory: why, how and where? / *Spominski zbornik Antona Kuhlja*. Ljubljana: S.n., 1982. pp. 95–109.
15. Krajcinovic D. On the basic structure of continuum damage models / *Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media*: Progr. F3-conf., Neve Ilan, Jan. 6–9, 1986. Jerusalem: Hilger, Bristol, 1986. pp. 190–204.
16. Krajcinovic D. Damage mechanics accomplishments, trends and needs // *Int. J. Solids Struct.*, 2000. vol. 37, no. 1–2. pp. 267–277. doi: 10.1016/S0020-7683(99)00081-5.
17. Chaboche J. L. Continuum Damage Mechanics: Part I—General Concepts // *J. Appl. Mech.*, 1988. vol. 55, no. 1. pp. 59–64. doi: 10.1115/1.3173661.
18. Betten J. Mathematical modelling of materials behavior under creep conditions // *Appl. Mech. Rev.*, 2001. vol. 54, no. 2. pp. 107–132. doi: 10.1115/1.3097292.
19. Yao Hua-Tang, Xuan Fu-Zhen, Wang Zhengdong, Tu Shan-Tung. A review of creep analysis and design under multi-axial stress states // *Nucl. Eng. Des.*, 2007. vol. 237, no. 18. pp. 1969–1986. doi: 10.1016/j.nucengdes.2007.02.003.
20. Работнов Ю. Н. Опытные данные по ползучести технических сплавов и феноменологические теории ползучести (обзор) // *ПМТФ*, 1965. № 1. С. 141–159.
21. Наместников В. С. Об одной гипотезе в теории трехосной ползучести // *Изв. СО АН СССР*, 1960. № 2. С. 3–14.
22. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О гипотезе уравнения состояния при ползучести // *ПМТФ*, 1961. № 3. С. 101–102.
23. Наместников В. С. О ползучести при переменных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1957. № 10. С. 83–85.
24. Наместников В. С. О гипотезе пропорциональности, девиаторов в условиях ползучести при переменных нагрузках и неизменных главных осях // *ПМТФ*, 1960. № 3. С. 212–214.
25. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Creep under changing complex stress systems. II // *Engineer, Lond.*, 1958. vol. 206, no. 5351. pp. 251–257.
26. Johnson A. E., Khan B. Creep under changing complex-stress systems in copper at 250°C // *Int. J. Mech. Sci.*, 1965. vol. 7, no. 12. pp. 791–810. doi: 10.1016/0020-7403(65)90033-0.
27. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Creep under changing complex stress systems. III // *Engineer, Lond.*, 1958. vol. 206, no. 5352. pp. 287–291.
28. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Creep under changing complex stress systems. I // *Engineer, Lond.*, 1958. vol. 206, no. 5350. pp. 209–216.
29. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982. vol. 104, no. 3. pp. 155–164. doi: 10.1115/1.3225059.
30. Kawai M. Alternative form of the auxiliary hardening rule for multiaxial repeated creep // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A*, 1993. vol. 59, no. 566. pp. 2440–2447. doi: 10.1299/kikaia.59.2440.
31. Kawai M. Creep hardening rule under multiaxial repeated stress changes // *JSME Int. J., Ser. A*, 1995. vol. 38, no. 2. pp. 201–212. doi: 10.1299/jsmea1993.38.2_201.

32. Dyson B. F., McLean D. Creep of Nimonic 80A in torsion and tension // *Met. Sci.*, 1977. vol. 11, no. 2. pp. 37–45. doi: 10.1179/msc.1977.11.2.37.
33. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 1. Основные гипотезы и их экспериментальная проверка // *Пробл. прочн.*, 1976. № 11. С. 3–8.
34. Chu S. C., Sidebottom O. M. Creep of metal torsion-tension members subjected to non-proportionate load changes // *Exp. Mech.*, 1970. vol. 10, no. 6. pp. 225–232. doi: 10.1007/BF02324094.
35. Sidebottom O. M. Elevated-temperature creep and relaxation of torsion-tension members // *Exp. Mech.*, 1978. vol. 18, no. 4. pp. 121–126. doi: 10.1007/BF02324143.
36. Mark R., Findley W. N. Concerning a creep surface derived from a multiple integral representation for 304 stainless steel under combined tension and torsion // *J. Appl. Mech.*, 1978. vol. 45, no. 4. pp. 773–779. doi: 10.1115/1.3424417.
37. Findley W. N., Lai J. S. Creep of 2618 aluminum under side-steps of tension and torsion and stress reversal predicted by a viscous-viscoelastic model // *J. Appl. Mech.*, 1981. vol. 48, no. 1. pp. 47–54. doi: 10.1115/1.3157591.
38. Ding J. L., Lee S. R. Development of viscoplastic constitutive equation through biaxial material testing // *Exp. Mech.*, 1988. vol. 28, no. 3. pp. 304–309. doi: 10.1007/BF02329027.
39. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Сметанин И. В. Определяющие соотношения нестационарной ползучести при сложном напряженном состоянии // *Проблемы прочности и пластичности*, 2016. Т. 78, № 4. С. 436–451. doi: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-436-451.
40. Oytana C., Delobelle P., Mermet A. Constitutive equations study in biaxial stress experiments // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982. vol. 104, no. 1. pp. 1–11. doi: 10.1115/1.3225030.
41. Локощенко А. М. Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // *Изв. РАН. МТТ*, 2014. № 4. С. 111–120.
42. Локощенко А. М., Фомин Л. В., Басалов Ю. Г., Агабабян В. С. Моделирование ползучести металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 69–89. doi: 10.14498/vsgtu1668.
43. Aktaa J., Schinke B. The influence of the hardening state on time dependent damage and its consideration in a unified damage model // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 1996. vol. 19, no. 9. pp. 1143–1151. doi: 10.1111/j.1460-2695.1996.tb01048.x.
44. Lucas G. E., Pelloux R. M. N. Texture and stress state dependent creep in Zircaloy-2 // *Met. Trans. A*, 1981. vol. 12, no. 7. pp. 1321–1331. doi: 10.1007/BF02642346.
45. Murakami S., Kawai M., Ohmi Y. Effects of strain amplitude history and temperature history on multiaxial cyclic hardening of type 316 stainless steel // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A*, 1988. vol. 54, no. 501. pp. 1131–1139. doi: 10.1299/kikaia.54.1131.
46. Murakami S., Kawai M., Aoki K., Ohmi Y. Temperature-dependence of multiaxial non-proportional cyclic behavior of type 316 stainless steel // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1989. vol. 111, no. 1. pp. 32–39. doi: 10.1115/1.3226430.
47. Ohashi Y., Tokuda M. Precise measurement of plastic behaviour of mild steel tubular specimens subjected to combined torsion and axial force // *J. Mech. Phys. Solids*, 1973. vol. 21, no. 4. pp. 241–261. doi: 10.1016/0022-5096(73)90023-9.
48. Ohashi Y., Kawai M., Momose T. Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1986. vol. 108, no. 1. pp. 68–74. doi: 10.1115/1.3225844.
49. Murakami S., Kawai M., Yamada Y. Creep after cyclic-plasticity under multiaxial conditions for type 316 stainless steel at elevated temperature // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990. vol. 112, no. 3. pp. 346–352. doi: 10.1115/1.2903336.
50. Dyson B. F., Verma A. K., Szkopiak Z. C. The influence of stress state on creep resistance: Experiments and modelling // *Acta Metallurgica*, 1981. vol. 29, no. 9. pp. 1573–1580. doi: 10.1016/0001-6160(81)90039-0.

51. Cho U. W., Findley W. N. Creep and plastic strains under stress reversal in torsion with and without simultaneous tension for 304 stainless steel at 593°C // *J. Appl. Mech.*, 1983. vol. 50, no. 3. pp. 587–592. doi: 10.1115/1.3167095.
52. Johnson A. E., Henderson J., Khan B. Complex stress creep fracture of copper at 250°C under vibratory stress // *Engineer, Lond.*, 1961. vol. 212, no. 5509. pp. 304–308.
53. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов. Сообщение 1 // *Пробл. прочн.*, 1973. №5. С. 45–49.
54. Соснин О. В. О варианте теории ползучести с энергетическими параметрами упрочнения / *Механика деформируемых тел и конструкций*. М.: Машиностроение, 1975. С. 460–463.
55. Соснин О. В., Любашевская И. В., Новоселя И. В. Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // *ПМТФ*, 2008. Т. 49, №2. С. 123–130.
56. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // *Изв. вузов. Машиностроение*, 1986. №12. С. 7–10.
57. Кулагин Д. А., Локощенко А. М. Моделирование влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов при сложном напряженном состоянии // *Изв. РАН. МТТ*, 2004. №1. С. 188–199.
58. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Creep rupture of structures // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1974. vol. 340, no. 1622. pp. 323–347. doi: 10.1098/rspa.1974.0155.
59. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Constitutive equations for creep rupture // *Acta Metallurgica*, 1977. vol. 25, no. 9. pp. 1059–1070. doi: 10.1016/0001-6160(77)90135-3.
60. Kowalewski Z. L., Lin J., Hayhurst D. R. Investigation of a high accuracy uni-axial creep testpiece with slit extensometer ridges // *Arch. Mech.*, 1995. vol. 47, no. 2. pp. 261–279.
61. Othman A. M., Dyson B. F., Hayhurst D. R., Lin J. Continuum damage mechanics modelling of circumferentially notched tension bars undergoing tertiary creep with physically-based constitutive equations // *Acta Metall. Mater.*, 1994. vol. 42, no. 3. pp. 597–611. doi: 10.1016/0956-7151(94)90256-9.
62. Vakili-Tahami F., Hayhurst D. R., Wong M T. High-temperature creep rupture of low alloy ferritic steel butt-welded pipes subjected to combined internal pressure and end loadings // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 2005. vol. 363, no. 1836. pp. 2629–2661. doi: 10.1098/rsta.2005.1583.
63. Xu Q., Hayhurst D. R. The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550°C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2003. vol. 80, no. 10. pp. 689–694. doi: 10.1016/j.ijpvp.2003.08.005.
64. Ржаницын А. П. Теория длительной прочности при произвольном одноосном и двухосном нагружении // *Строит. мех. и расчет сооруж.*, 1975. №4. С. 25–29.
65. Lemaître J., Chaboche J.-L. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement // *J. Méc. Appl.*, 1978. vol. 2, no. 3. pp. 317–365.
66. Lemaître J., Sermage J. P. One damage law for different mechanisms // *Comput. Mech.*, 1997. vol. 20, no. 1–2. pp. 84–88. doi: 10.1007/s004660050221.
67. Шестериков С. А., Лебедев С. Ю., Юмашева М. А. Новые функциональные соотношения для описания процессов ползучести и длительной прочности / *Труды IX конференции по прочности и пластичности*. Т. 3 (22.01–26.01.1996, Москва). М.: ИПМ РАН, 1996. С. 130–134.
68. Chrzanowski M., Madej J. Isochronous creep rupture curves in plane stress // *Mech. Res. Commun.*, 1980. vol. 7, no. 1. pp. 39–40. doi: 10.1016/0093-6413(80)90023-3.
69. Murakami S., Mizuno M. A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress // *Int. J. Solids Struct.*, 1992. vol. 29, no. 19. pp. 2319–2328. doi: 10.1016/0020-7683(92)90218-I.

70. Cane B. J. Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses / *D. Francois et al (eds.), Advances in Fracture Research*. vol. 3. New York: Pergamon Press, 1981. pp. 1285–1293.
71. Dyson B. F., Loveday M. S. Creep fracture in Nimonic 80A under triaxial tensile stressing / *A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. pp. 406–421. doi: 10.1007/978-3-642-81598-0_27.
72. Hayhurst D. R., Brown P. R., Morrison C. J. The role of continuum damage in creep crack growth // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1984. vol. 311, no. 1516. pp. 131–158. doi: 10.1098/rsta.1984.0022.
73. Hayhurst D. R., Felce I. D. Creep rupture under tri-axial tension // *Eng. Fract. Mech.*, 1986. vol. 25, no. 5–6. pp. 645–664. doi: 10.1016/0013-7944(86)90030-5.
74. Trivaudey F., Delobelle P. High temperature creep damage under biaxial loading—Part I: Experiments // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990. vol. 112, no. 4. pp. 442–449. doi: 10.1115/1.2903355.
75. Tvergaard V. On the stress state dependence of creep rupture // *Acta Metallurgica*, 1986. vol. 34, no. 2. pp. 243–256. doi: 10.1016/0001-6160(86)90195-1.
76. Trivaudey F., Delobelle P. High temperature creep damage under biaxial loading—Part II: Model and simulations // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990. vol. 112, no. 4. pp. 450–455. doi: 10.1115/1.2903356.
77. Трампczyński W., Hayhurst D. R. Creep deformation and rupture under non-proportional loading / *A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 388–405. doi: 10.1007/978-3-642-81598-0_26.
78. Leckie F. A., Onat E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables / *J. Hult, J. Lemaitre (eds.), Physical Non-Linearities in Structural Analysis. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. pp. 140–155. doi: 10.1007/978-3-642-81582-9_20.
79. Гецов Л. Б. Кинетические уравнения разрушения при сложных программах циклического нагружения // *Пробл. прочн.*, 1978. № 7. С. 31–37.
80. Павлов П. А., Курилович Н. Н. Длительное разрушение жаропрочных сталей при нестационарном нагружении // *Пробл. прочн.*, 1982. № 2. С. 42–47.
81. Xu Q. The development of validation methodology of multi-axial creep damage constitutive equations and its application to 0.5Cr0.5Mo0.25V ferritic steel at 590°C // *Nuc. Eng. Des.*, 2004. vol. 228, no. 1–3. pp. 97–106. doi: 10.1016/j.nucengdes.2003.06.021.
82. Lin J., Kowalewski Z. L., Cao J. Creep rupture of copper and aluminium alloy under combined loadings—experiments and their various descriptions // *Int. J. Mech. Sci.*, 2005. vol. 47, no. 7. pp. 1038–1058. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2005.02.010.
83. Трампczyński W., Hayhurst D. R., Leckie F. A. Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading // *J. Mech. Phys. Solids*, 1981. vol. 29, no. 5–6. pp. 353–374. doi: 10.1016/0022-5096(81)90034-X.
84. Качанов Л. М. К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении // *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1972. № 1. С. 92–96.
85. Наместникова И. В., Шестериков С. А. Векторное представление параметра поврежденности / *Деформирование и разрушение твердых тел*: Сб. тр. Ин-та механики МГУ имени М. В. Ломоносова. М.: Моск. ун-т, 1985. С. 43–52.
86. Пелешко В. А. Использование поверхности поврежденности для описания ползучести и длительной прочности при сложном нагружении // *Изв. РАН. МТТ*, 2003. № 2. С. 124–138.
87. Chow C. L., Yang X. J., Chu E. Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading // *J. Eng. Mater. Technol.*, 2001. vol. 123, no. 4. pp. 403–408. doi: 10.1115/1.1395575.

88. Локощенко А. М. Исследование длительной прочности при сложном напряженном состоянии с помощью кинетического подхода // *Тр. Центр. котлотурбин. инст-та*, 1986. № 230. С. 107–109.
89. Локощенко А. М. Методы моделирования длительной прочности металлов при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях / *Упругость и неупругость*: Матер. междуна. научн. симпоз., посвящ. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (20–21.01.2011, Москва). М.: Моск. ун-т, 2011. С. 389–393.
90. Локощенко А. М., Назаров В. В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двусосном растяжении // *Авиаци.-косм. техн. и технол.*, 2005. № 10. С. 73–78.
91. Локощенко А. М., Назаров В. В. Анализ длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии с помощью критериального и кинетического подходов / *IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов*. Т. 3 (Нижегород, 22–28.08.2006): Нижегород. гос. ун-т, 2006. С. 135–136.
92. Локощенко А. М., Назаров В. В. Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // *ПМТФ*, 2009. № 4. С. 150–157.
93. Дачева М. Д., Шестериков С. А., Юмашева М. А. Поврежденность при сложном нестационарном напряженном состоянии // *Изв. РАН. МТТ*, 1998. № 1. С. 44–47.
94. Чижик А. А., Петреня Ю. К. Разрушение вследствие ползучести и механизмы микроразрушения // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 6. С. 1331–1333.
95. Морачковский О. К. К вопросу о разрушении при ползучести анизотропных материалов // *Пробл. машиностроения*, 1978. № 6. С. 41–43.
96. Chrzanowski M., Madej J. Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzenia [The construction of failure limit curves by means of a damage] // *Mech. Teor. Stosow* [J. Theor. Appl. Mech.], 1980. vol. 18, no. 4. pp. 587–601 (In Polish).
97. Хажинский Г. М. *Деформирование и длительная прочность металлов*. М.: Научный мир, 2008. 136 с.
98. Качанов Л. М. Разрушения в условиях ползучести при сложном нагружении // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1972. № 5. С. 11–15.
99. Hayhurst D. R., Trąpmczyński W., Leckie F. A. Creep rupture under non-proportional loading // *Acta Metallurgica*, 1980. vol. 28, no. 9. pp. 1171–1183. doi: 10.1016/0001-6160(80)90072-3.
100. Murakami S., Sanomura I., Saitoh K. Formulation of cross-hardening in creep and its effects on the creep damage process of copper // *J. Engin. Mater. Technol.*, 1986. vol. 108, no. 2. pp. 167–173. doi: 10.1115/1.3225856.
101. Локощенко А. М. Применение векторного параметра поврежденности при моделировании длительной прочности металлов // *Изв. РАН. МТТ*, 2016. № 3. С. 93–99.
102. Локощенко А. М. Моделирование длительной прочности металлов при нестационарном сложном напряженном состоянии // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 1. С. 84–97.
103. Leckie F. A., Wojewodzki W. Estimates of rupture life-constant load // *Int. J. Solids Struct.*, 1975. vol. 11, no. 12. pp. 1357–1365. doi: 10.1016/0020-7683(75)90063-3.
104. Rabotnov Yu. N. Creep rupture / *M. Hetényi, W.G. Vincenti (eds.), Applied Mechanics. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer. pp. 342–349. doi: 10.1007/978-3-642-85640-2_26.
105. Тамуж В. П. Об одной возможности построения теории длительного разрушения // *Пробл. прочн.*, 1971. № 2. С. 59–64.
106. Altenbach H., Schiesse P. Modelling of the constitutive behaviour of damaged materials / *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity*: Selec. Pap. 8th Int. Conf. Fract. (Kyiv, June 8–14, 1993). Oxford: Pergamon Press, 1994. pp. 51–57.
107. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности // *Инж. ж. Механ. тверд. тела*, 1967. № 3. С. 21–35.
108. Завойчинская Э. Б., Кийко И. А. *Введение в теорию процессов разрушения твердых тел*. М.: Моск. ун-т, 2004. 168 с.

109. Победря Б. Е. О моделях повреждаемости реономных сред // *Изв. РАН. МТТ*, 1998. №4. С. 128–148.
110. Тамуж В. П., Лагздыньш А. Ж. Вариант построения феноменологической теории разрушения // *Мех. полим.*, 1968. №4. С. 638–647.
111. Лагздыньш А. Ж., Тамуж В. П. К построению феноменологической теории разрушения анизотропной среды // *Мех. полим.*, 1971. №4. С. 634–644.
112. Копнов В. А. Длительная прочность анизотропных материалов при сложном напряженном состоянии // *Пробл. прочн.*, 1982. №2. С. 40–44.
113. Лебедев А. О., Михалевич В. М. До теорії тривалої міцності // *Доп. НАНУ*, 1998. №5. С. 57–62 (на украинском).
114. Лебедев А. А., Михалевич В. М. Критериальные соотношения для определения остаточного ресурса материалов // *Пробл. прочн.*, 2006. №4. С. 31–38.
115. Михалевич В. М. Тензорные модели длительной прочности. Сообщение 3. Критериальные зависимости при нагружении с изменением напряженного состояния и направлений главных напряжений // *Пробл. прочн.*, 1996. №3. С. 101–112.
116. Betten J. Net-stress analysis in creep mechanics // *Ing. Arch.*, 1982. vol. 52, no. 6. pp. 405–419. doi: 10.1007/BF00536211.
117. Betten J. Damage tensors in continuum mechanics // *J. Mec. Theor. Appl.*, 1983. vol. 2, no. 1. pp. 13–22.
118. Chow C. L., Wang J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture // *Eng. Fract. Mech.*, 1987. vol. 27, no. 5. pp. 547–558. doi: 10.1016/0013-7944(87)90108-1.
119. Bodner S. R. A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials / *J. Hult, J. Lemaitre (eds.), Physical Non-Linearities in Structural Analysis. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. pp. 21–28. doi: 10.1007/978-3-642-81582-9_4.
120. Liu Y., Kageyama Y., Murakami S. Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity // *Int. J. Mech. Sci.*, 1998. vol. 40, no. 2–3. pp. 147–158. doi: 10.1016/S0020-7403(97)00045-3.
121. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // *J. Appl. Mech.*, 1988. vol. 55, no. 2. pp. 280–286. doi: 10.1115/1.3173673.
122. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982. vol. 1, no. 5. pp. 743–761.
123. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage / *A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. pp. 422–444. doi: 10.1007/978-3-642-81598-0_28.
124. Астафьев В. И. Описание процесса разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1986. №4. С. 164–169.
125. Krajcinovic D. Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions // *J. Appl. Mech.*, 1985. vol. 52, no. 4. pp. 829–834. doi: 10.1115/1.3169154.
126. Krajcinovic D., Rinaldi A. Statistical damage mechanics—Part I: Theory // *J. Appl. Mech.*, 2005. vol. 72, no. 1. pp. 76–85. doi: 10.1115/1.1825434.
127. Krajcinovic D., Selvaraj S. Creep rupture of metals—An analytical model // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1984. vol. 106, no. 4. pp. 405–409. doi: 10.1115/1.3225738.
128. Маньковский В. А. Критерии поврежденности и длительной прочности конструкционных материалов // *Машиноведение*, 1985. №1. С. 87–94.
129. Delobelle P., Trivaudey F., Oytana C. High temperature creep damage under biaxial loading: INCO 718 and 316 (17–12 SPH) steels // *Nucl. Eng. Des.*, 1989. vol. 114, no. 3. pp. 365–377. doi: 10.1016/0029-5493(89)90114-3.
130. Lemaître J. A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits / *Mech. Behav. Mater.: Proc. of the 4th Int. Conf. (Stockholm, Sweden,*

- 15–19 August 1983). Oxford: Pergamon Press, 1984. pp. 1047–1053. doi:10.1016/B978-1-4832-8372-2.50132-9.
131. Локощенко А. М. Применение кинетической теории при анализе длительного высоко-температурного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор) // *ПМТФ*, 2012. Т. 53, № 4. С. 149–164.
 132. Агахи К. А., Георгиевский Д. В. Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // *Изв. Тульск. гос. ун-та. Естеств. науки*, 2013. № 2. С. 2–9.
 133. Murakami S., Sanomura Y. Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress / A. Sawczuk and B. Bianchi (eds.), *Elasticity Today-Modeling, Methods and Applications*. London–New York: Elsevier, 1985. 535–551 pp.
 134. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах*. М.: Моск. ун-т, 2000. 178 с.
 135. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах (обзор) // *Физ.-хим. мех. матер.*, 2001. № 4. С. 27–41.
 136. Локощенко А. М. Методы моделирования влияния окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов // *Успехи механики*, 2002. Т. 1, № 4. С. 90–121.
 137. Локощенко А. М., Ильин А. А., Мамонов А. М., Назаров В. В. Экспериментально-теоретическое исследование влияния водорода на ползучесть и длительную прочность титанового сплава ВТ6 // *Металлы*, 2008. № 2. С. 60–66.
 138. Локощенко А. М., Ильин А. А., Мамонов А. М., Назаров В. В. Анализ ползучести и длительной прочности титанового сплава ВТ6 с предварительно внедренным водородом // *Физ.-хим. мех. матер.*, 2008. № 5. С. 98–104.

MSC: 74A05, 74D10

Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review)

A. M. Lokoshchenko¹, L. V. Fomin^{1,2}, W. V. Teraud^{1,2},
Yu. G. Basalov¹, V. S. Agababyan¹

¹ Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,

1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

² Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This article is an analytical review of experimental and theoretical studies of creep and creep rupture strength of metals under unsteady complex stress states published over the past 60 years.

The first systematic studies of the creep of metals under complex stress conditions were published in the late 50s and early 60s of the 20th century in the Soviet Union (L. M. Kachanov and Yu. N. Rabotnov) and Great Britain (A. E. Johnson). Pioneering work on creep rupture strength first appeared in the USSR (L. M. Kachanov and Yu. N. Rabotnov). Subsequently, Yu. N. Rabotnov developed the kinetic theory of creep and creep rupture strength, with the help of which it is possible to efficiently describe various features of the creep process of metals up to fracture under various loading programs. Different versions of the kinetic theory use either a scalar damage parameter, or a vector parameter, or a tensor parameter, or a combination of them. Following the work of M. Kachanov and Yu. N. Rabotnov mechanics of continuum destruction began to develop in Europe, in Asia, and then in the USA.

The hypothesis of proportionality of stress deviators and deviators of creep strain rates is accepted as the main connection between the components of stress tensors and creep strains. When modeling experimental data, the proportionality coefficient in this dependence takes different forms. The

Review Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Teraud W. V., Basalov Yu. G., Agababyan V. S. Creep and long-term strength of metals under unsteady complex stress states (Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 275–318. doi: 10.14498/vsgtu1765 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko ✉  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Laboratory; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; e-mail: loko@imec.msu.ru

Leonid V. Fomin  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Senior Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science²;

e-mail: fleonid1975@mail.ru

main problem in the development of this direction is the difficulty in obtaining experimental data with arbitrary loading programs.

This review provides the main results of studies conducted by scientists from different countries. Except Yu. N. Rabotnov and L. M. Kachanov, also a significant contribution to the development of the direction of science made by Russian scientists N. N. Malinin, A. A. Ilyushin, V. S. Namestnikov, S. A. Shesterikov, A. M. Lokoshchenko, Yu. P. Samarina, O. V. Sosnin, A. F. Nikitenko, et al.

Keywords: analytical review, creep, creep rupture strength, complex stress state, unsteady loading, stress relaxation, scalar damage parameter, vector damage parameter, tensor damage parameter.

Received: 7th January, 2020 / Revised: 24th February, 2020 /

Accepted: 16th March, 2020 / First online: 14th May, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Samara State Technical University).

References

1. Kachanov L. M. On the time of fracture in creep, *Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN*, 1958, no. 8, pp. 26–31 (In Russian).
2. Rabotnov Yu. N. On the mechanism of long-term fracture, In: *Voprosy prochnosti materialov i konstruksii* [Problems of Strength of Materials and Structures]. Moscow, Izdat. AN SSSR, 1959, 5–7 pp. (In Russian)
3. Rabotnov Yu. N. *Creep of Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1969, ix+822 pp.
4. Kachanov L. M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974, 312 pp. (In Russian)
5. Trąmpczyński W. *Badanie wpływu historii obciążenia na pękanie metali w złożonym stanie naprężenia*. Warszawa, Inst. Podstawowych Probl. Techn. Polsk. Akad. Nauk, 1985, 249 pp. (in Polish)
6. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energy Variant of Creep Theory]. Novosibirsk, Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986, 9 pp. (In Russian)

Valentin V. Teraud  <https://orcid.org/0000-0001-8336-5598>

Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science²;

e-mail: ldrnww@gmail.com

Yuriy G. Basalov; Lead Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹;

e-mail: basalov@yandex.ru

Vardan S. Agababyan  <https://orcid.org/0000-0001-5791-7758>

Lead Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹

7. Nikitenko A. F. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and Long-Term Strength of Metal Materials]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ. of Archit. and Civil Engin., 1997, 278 pp. (In Russian)
8. Mikhalevich V. M. *Tenzorni modeli nakopichannia poshkodzhen'* [Tensor Models of Damage Accumulation]. Vinnitsia, Universum-Vinnitsia, 1998, 195 pp. (In Ukrainian), <http://ir.lib.vntu.edu.ua/handle/123456789/13977>.
9. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin, Springer-Verlag, 2008, xvi+367 pp. doi: 10.1007/978-3-540-85051-9.
10. Lokoshchenko A. M. *Creep and long-term strength of metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. doi: 10.1201/b22242.
11. Johnson A. E. Complex stress creep of metals, *Intern. Met. Rev.*, 1985, vol.30, no.1, pp. 447–506. doi: 10.1179/mtlr.1960.5.1.447.
12. Shesterikov S. A., Lokoschenko A. M. Creep and long-term strength of metals, In: *Science and Technology Results, Mechanics of Deformable Solids*, vol.13. Moscow, VINITI, 1980, pp. 3–104 (in Russian).
13. Lemaître J. Local approach of fracture, *Eng. Fract. Mech.*, 1986, vol.25, no.5–6, pp. 523–537. doi: 10.1016/0013-7944(86)90021-4.
14. Krajcinovic D. The continuous damage theory: why, how and where?, In: *Spominski zbornik Antona Kuhlja*. Ljubljana, S.n., 1982, pp. 95–109.
15. Krajcinovic D. On the basic structure of continuum damage models, In: *Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media*, Progr. F3-conf., Neve Ilan, Jan. 6–9, 1986. Jerusalem, Hilger, Bristol, 1986, pp. 190–204.
16. Krajcinovic D. Damage mechanics accomplishments, trends and needs, *Int. J. Solids Struct.*, 2000, vol.37, no.1–2, pp. 267–277. doi: 10.1016/S0020-7683(99)00081-5.
17. Chaboche J. L. Continuum Damage Mechanics: Part I—General Concepts, *J. Appl. Mech.*, 1988, vol.55, no.1, pp. 59–64. doi: 10.1115/1.3173661.
18. Betten J. Mathematical modelling of materials behavior under creep conditions, *Appl. Mech. Rev.*, 2001, vol.54, no.2, pp. 107–132. doi: 10.1115/1.3097292.
19. Yao Hua-Tang, Xuan Fu-Zhen, Wang Zhengdong, Tu Shan-Tung. A review of creep analysis and design under multi-axial stress states, *Nucl. Eng. Des.*, 2007, vol.237, no.18, pp. 1969–1986. doi: 10.1016/j.nucengdes.2007.02.003.
20. Rabotnov Yu. N. Experimental data on creep of engineering alloys and phenomenological theories of creep. A review, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1965, vol.6, no.1, pp. 137–154. doi: 10.1007/BF00914390.
21. Namestnikov B. S. On a hypothesis in the theory of triaxial creep, 1960, no.2, pp. 3–14 (In Russian).
22. Namestnikov V. S., Rabotnov Yu. N. On the hypothesis of the equation of state for creep, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 1961, no.3, pp. 101–102 (In Russian).
23. Namestnikov V. S. On creep under variable loads at complex stress state, *Izv. Akad. Nauk SSSR. OTN*, 1957, no.10, pp. 83–85 (In Russian).
24. Namestnikov V. S. A hypothesis on proportionality of deviators under creep conditions at varied loads and constant principal axes, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 1960, no.3, pp. 212–214 (In Russian).
25. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Creep under changing complex stress systems. II, *Engineer, Lond.*, 1958, vol.206, no.5351, pp. 251–257.
26. Johnson A. E., Khan B. Creep under changing complex-stress systems in copper at 250°C, *Int. J. Mech. Sci.*, 1965, vol.7, no.12, pp. 791–810. doi: 10.1016/0020-7403(65)90033-0.
27. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Creep under changing complex stress systems. III, *Engineer, Lond.*, 1958, vol.206, no.5352, pp. 287–291.
28. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Creep under changing complex stress systems. I, *Engineer, Lond.*, 1958, vol.206, no.5350, pp. 209–216.

29. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982, vol. 104, no. 3, pp. 155–164. doi: 10.1115/1.3225059.
30. Kawai M. Alternative form of the auxiliary hardening rule for multiaxial repeated creep, *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A*, 1993, vol. 59, no. 566, pp. 2440–2447. doi: 10.1299/kikaia.59.2440.
31. Kawai M. Creep hardening rule under multiaxial repeated stress changes, *JSME Int. J., Ser. A*, 1995, vol. 38, no. 2, pp. 201–212. doi: 10.1299/jsmea1993.38.2_201.
32. Dyson B. F., McLean D. Creep of Nimonic 80A in torsion and tension, *Met. Sci.*, 1977, vol. 11, no. 2, pp. 37–45. doi: 10.1179/msc.1977.11.2.37.
33. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. Energy variant of theory of creep. 1. Basic hypotheses and their experimental verification, *Strength Mater.*, 1976, vol. 8, no. 11, pp. 1255–1260. doi: 10.1007/BF01528744.
34. Chu S. C., Sidebottom O. M. Creep of metal torsion-tension members subjected to non-proportionate load changes, *Exp. Mech.*, 1970, vol. 10, no. 6, pp. 225–232. doi: 10.1007/BF02324094.
35. Sidebottom O. M. Elevated-temperature creep and relaxation of torsion-tension members, *Exp. Mech.*, 1978, vol. 18, no. 4, pp. 121–126. doi: 10.1007/BF02324143.
36. Mark R., Findley W. N. Concerning a creep surface derived from a multiple integral representation for 304 stainless steel under combined tension and torsion, *J. Appl. Mech.*, 1978, vol. 45, no. 4, pp. 773–779. doi: 10.1115/1.3424417.
37. Findley W. N., Lai J. S. Creep of 2618 aluminum under side-steps of tension and torsion and stress reversal predicted by a viscous-viscoelastic model, *J. Appl. Mech.*, 1981, vol. 48, no. 1, pp. 47–54. doi: 10.1115/1.3157591.
38. Ding J. L., Lee S. R. Development of viscoplastic constitutive equation through biaxial material testing, *Exp. Mech.*, 1988, vol. 28, no. 3, pp. 304–309. doi: 10.1007/BF02329027.
39. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Smetanin I. V. Defining relations of transient creep under complex stress state, *Problems of Strength and Plasticity*, 2016, vol. 78, no. 4, pp. 436–451 (In Russian). doi: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-436-451.
40. Oytana C., Delobelle P., Mermet A. Constitutive equations study in biaxial stress experiments, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982, vol. 104, no. 1, pp. 1–11. doi: 10.1115/1.3225030.
41. Lokoshchenko A. M. Vibrocreep of metals in uniaxial and complex stress states, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 453–460. doi: 10.3103/S0025654414040104.
42. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G., Agababyan V. S. Simulation of metal creep in nonstationary complex stress state, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 69–89 (In Russian). doi: 10.14498/vsgtu1668.
43. Aktaa J., Schinke B. The influence of the hardening state on time dependent damage and its consideration in a unified damage model, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 1996, vol. 19, no. 9, pp. 1143–1151. doi: 10.1111/j.1460-2695.1996.tb01048.x.
44. Lucas G. E., Pelloux R. M. N. Texture and stress state dependent creep in Zircaloy-2, *Met. Trans. A*, 1981, vol. 12, no. 7, pp. 1321–1331. doi: 10.1007/BF02642346.
45. Murakami S., Kawai M., Ohmi Y. Effects of strain amplitude history and temperature history on multiaxial cyclic hardening of type 316 stainless steel, *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A*, 1988, vol. 54, no. 501, pp. 1131–1139. doi: 10.1299/kikaia.54.1131.
46. Murakami S., Kawai M., Aoki K., Ohmi Y. Temperature-dependence of multiaxial non-proportional cyclic behavior of type 316 stainless steel, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1989, vol. 111, no. 1, pp. 32–39. doi: 10.1115/1.3226430.
47. Ohashi Y., Tokuda M. Precise measurement of plastic behaviour of mild steel tubular specimens subjectsd to combined torsion and axial force, *J. Mech. Phys. Solids*, 1973, vol. 21, no. 4, pp. 241–261. doi: 10.1016/0022-5096(73)90023-9.

48. Ohashi Y., Kawai M., Momose T. Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1986, vol. 108, no. 1, pp. 68–74. doi: 10.1115/1.3225844.
49. Murakami S., Kawai M., Yamada Y. Creep after cyclic-plasticity under multiaxial conditions for type 316 stainless steel at elevated temperature, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 3, pp. 346–352. doi: 10.1115/1.2903336.
50. Dyson B. F., Verma A. K., Szkopiak Z. C. The influence of stress state on creep resistance: Experiments and modelling, *Acta Metallurgica*, 1981, vol. 29, no. 9, pp. 1573–1580. doi: 10.1016/0001-6160(81)90039-0.
51. Cho U. W., Findley W. N. Creep and plastic strains under stress reversal in torsion with and without simultaneous tension for 304 stainless steel at 593°C, *J. Appl. Mech.*, 1983, vol. 50, no. 3, pp. 587–592. doi: 10.1115/1.3167095.
52. Johnson A. E., Henderson J., Khan B. Complex stress creep fracture of copper at 250°C under vibratory stress, *Engineer, Lond.*, 1961, vol. 212, no. 5509, pp. 304–308.
53. Sosnin O. V. Energy version of the theory of creep and long-term (creep) strength. Creep and rupture of nonstrengthening materials. I., *Strength Mater.*, 1973, vol. 5, no. 5, pp. 564–568. doi: 10.1007/BF00762312.
54. Sosnin O. V. Version of creep theory with energy parameters of hardening, In: *Mekhanika deformiruemyykh tel i konstruktsov* [Mechanics of Deformable Solids and Structures]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975, pp. 460–463 (In Russian).
55. Sosnin O. V., Lyubashevskaya I. V., Novoselya I. V. Comparative estimation of high-temperature creep and rupture of structural materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 261–266. doi: 10.1007/s10808-008-0036-0.
56. Zolochevskii A. A. Energy version of theory of creep and creep rupture of materials with different resistances to tension and contraction, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostroyeniye*, 1986, no. 12, pp. 7–10 (In Russian).
57. Kulagin D. A., Lokoshchenko A. M. Modeling of influence of aggressive environment on creep and creep rupture of metals under complex stress-strain state, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela* [Mech. Solids], 2004, no. 1, pp. 188–199 (In Russian).
58. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Creep rupture of structures, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1974, vol. 340, no. 1622, pp. 323–347. doi: 10.1098/rspa.1974.0155.
59. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Constitutive equations for creep rupture, *Acta Metallurgica*, 1977, vol. 25, no. 9, pp. 1059–1070. doi: 10.1016/0001-6160(77)90135-3.
60. Kowalewski Z. L., Lin J., Hayhurst D. R. Investigation of a high accuracy uni-axial creep testpiece with slit extensometer ridges, *Arch. Mech.*, 1995, vol. 47, no. 2, pp. 261–279.
61. Othman A. M., Dyson B. F., Hayhurst D. R., Lin J. Continuum damage mechanics modelling of circumferentially notched tension bars undergoing tertiary creep with physically-based constitutive equations, *Acta Metall. Mater.*, 1994, vol. 42, no. 3, pp. 597–611. doi: 10.1016/0956-7151(94)90256-9.
62. Vakili-Tahami F., Hayhurst D. R., Wong M T. High-temperature creep rupture of low alloy ferritic steel butt-welded pipes subjected to combined internal pressure and end loadings, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 2005, vol. 363, no. 1836, pp. 2629–2661. doi: 10.1098/rsta.2005.1583.
63. Xu Q., Hayhurst D. R. The evaluation of high-stress creep ductility for 316 stainless steel at 550°C by extrapolation of constitutive equations derived for lower stress levels, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2003, vol. 80, no. 10, pp. 689–694. doi: 10.1016/j.ijpvp.2003.08.005.
64. Rzhantsyn A. R. Theory of creep rupture under arbitrary uniaxial and biaxial loading, *Stroit. Mekh. Raschet Sooruzh.*, 1975, no. 4, pp. 25–29 (In Russian).
65. Lemaître J., Chaboche J.-L. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement, *J. Méc. Appl.*, 1978, vol. 2, no. 3, pp. 317–365.
66. Lemaître J., Sermage J. P. One damage law for different mechanisms, *Comput. Mech.*, 1997, vol. 20, no. 1–2, pp. 84–88. doi: 10.1007/s004660050221.

67. Shesterikov S. A., Lebedev S. Yu., Yumashev M. A. New functional relationships to describe the processes of creep and long-term strength, In: *Proc. of the 9th Conf. on Strength and Ductility*, vol. 3 (Moscow, January 22–26, 1996). Moscow, Inst. of Problems of Mechanics, 1996, pp. 130–134 (In Russian).
68. Chrzanowski M., Madej J. Isochronous creep rupture curves in plane stress, *Mech. Res. Commun.*, 1980, vol. 7, no. 1, pp. 39–40. doi: 10.1016/0093-6413(80)90023-3.
69. Murakami S., Mizuno M. A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress, *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, no. 19, pp. 2319–2328. doi: 10.1016/0020-7683(92)90218-I.
70. Cane B. J. Creep damage accumulation and fracture under multiaxial stresses, In: *D. Francois et al (eds.), Advances in Fracture Research*, vol. 3. New York, Pergamon Press, 1981, pp. 1285–1293.
71. Dyson B. F., Loveday M. S. Creep fracture in Nimonic 80A under triaxial tensile stressing, In: *A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1981, pp. 406–421. doi: 10.1007/978-3-642-81598-0_27.
72. Hayhurst D. R., Brown P. R., Morrison C. J. The role of continuum damage in creep crack growth, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 1984, vol. 311, no. 1516, pp. 131–158. doi: 10.1098/rsta.1984.0022.
73. Hayhurst D. R., Felce I. D. Creep rupture under tri-axial tension, *Eng. Fract. Mech.*, 1986, vol. 25, no. 5–6, pp. 645–664. doi: 10.1016/0013-7944(86)90030-5.
74. Trivaudey F., Delobelle P. High temperature creep damage under biaxial loading—Part I: Experiments, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 442–449. doi: 10.1115/1.2903355.
75. Tvergaard V. On the stress state dependence of creep rupture, *Acta Metallurgica*, 1986, vol. 34, no. 2, pp. 243–256. doi: 10.1016/0001-6160(86)90195-1.
76. Trivaudey F., Delobelle P. High temperature creep damage under biaxial loading—Part II: Model and simulations, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1990, vol. 112, no. 4, pp. 450–455. doi: 10.1115/1.2903356.
77. Trąmpczyński W., Hayhurst D. R. Creep deformation and rupture under non-proportional loading, In: *A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, pp. 388–405. doi: 10.1007/978-3-642-81598-0_26.
78. Leckie F. A., Onat E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables, In: *J. Hult, J. Lemaitre (eds.), Physical Non-Linearities in Structural Analysis. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1981, pp. 140–155. doi: 10.1007/978-3-642-81582-9_20.
79. Getsov L. B. Kinetic equations of failure in complex programs of cyclic loading, *Strength Mater.*, 1978, vol. 10, no. 7, pp. 767–775. doi: 10.1007/BF01521098.
80. Pavlov P. A., Kurilovich N. N. Delayed fracture of heat-resistant steels with nonsteady loading, *Strength Mater.*, 1982, vol. 14, no. 2, pp. 188–191. doi: 10.1007/BF00769053.
81. Xu Q. The development of validation methodology of multi-axial creep damage constitutive equations and its application to 0.5Cr0.5Mo0.25V ferritic steel at 590°C, *Nuc. Eng. Des.*, 2004, vol. 228, no. 1–3, pp. 97–106. doi: 10.1016/j.nucengdes.2003.06.021.
82. Lin J., Kowalewski Z. L., Cao J. Creep rupture of copper and aluminium alloy under combined loadings—experiments and their various descriptions, *Int. J. Mech. Sci.*, 2005, vol. 47, no. 7, pp. 1038–1058. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2005.02.010.
83. Trąmpczyński W., Hayhurst D. R., Leckie F. A. Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading, *J. Mech. Phys. Solids*, 1981, vol. 29, no. 5–6, pp. 353–374. doi: 10.1016/0022-5096(81)90034-X.
84. Kachanov L. M. On brittle fracture in creep under complex loading, *Vestn. Leningrad. Univ.*, 1972, no. 1, pp. 92–96 (In Russian).

85. Namestnikova I. V., Shesterikov S. A. Vector representation of the damage parameter, In: *Deformation and Fracture of Solids*. Moscow, Moscow State Univ., 1985, pp. 43–52 (In Russian).
86. Peleshko V. A. Using surface damage to describe creep and creep rupture under complex loading, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela* [Mech. Solids], 2003, no. 2, pp. 124–138 (In Russian).
87. Chow C. L., Yang X. J., Chu E. Viscoplastic constitutive modeling of anisotropic damage under nonproportional loading, *J. Eng. Mater. Technol.*, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 403–408. doi: 10.1115/1.1395575.
88. Lokoshchenko A. M. Study of creep rupture under complex stress using a kinetic approach, *Tr. Tsent. Kotloturbin. Inst.*, 1986, no. 230, pp. 107–109 (In Russian).
89. Lokoshchenko A. M. Methods for modeling the creep rupture of metals under stationary and nonstationary complex stress state, In: *Elasticity and Inelasticity*, Proc. of the Int. Symp. Dedicated to the 100th Anniversary of the Birth of A. A. Il'yushin (Moscow, January 20–21, 2011). Moscow, Moscow State Univ., 2011, pp. 389–393 (In Russian).
90. Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V. Kinetic approach to studying the creep rupture of metals under biaxial tension, *Aviats.-Kosm. Tekh. Tekhnol.*, 2005, no. 10, pp. 73–78 (In Russian).
91. Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V. Analysis of the long-term strength of metals under complex stress using criterion and kinetic approaches, In: *Abstracts 9th All-Russia Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 3 (Nizhny Novgorod, August 22–28, 2006). Nizhny Novgorod, Nizhegorod. Univ., 2006, pp. 135–136 (In Russian).
92. Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V. Long-term strength of metals under an equiaxial plane stress state, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 4, pp. 670–677. doi: 10.1007/s10808-009-0090-2.
93. Dacheva M.D., Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. Damage under complex transient stress, *Izv. Ross. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela* [Mech. Solids], 1998, no. 1, pp. 44–47 (In Russian).
94. Chizhik A. A., Petrenya Yu. K. Fracture due to creep and mechanisms of microfracture, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1987, vol. 297, no. 6, pp. 1331–1333 (In Russian).
95. Morachkovskii O. K. On the creep fracture of anisotropic materials, *Probl. Mashinostroeniya*, 1978, no. 6, pp. 41–43 (In Russian).
96. Chrzanowski M., Madej J. Budowa granicznych krzywych zniszczenia w oparciu o koncepcję parametru uszkodzenia [The construction of failure limit curves by means of a damage], *Mech. Teor. Stosow* [J. Theor. Appl. Mech.], 1980, vol. 18, no. 4, pp. 587–601 (In Polish).
97. Khazhinskii G. M. *Deformirovanie i dlitel'naiya prochnost' metallov* [Deformation and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2008, 136 pp. (In Russian)
98. Kachanov L. M. Fracture in creep under complex loading, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1972, no. 5, pp. 11–15 (In Russian).
99. Hayhurst D. R., Trampczyński W., Leckie F. A. Creep rupture under non-proportional loading, *Acta Metallurgica*, 1980, vol. 28, no. 9, pp. 1171–1183. doi: 10.1016/0001-6160(80)90072-3.
100. Murakami S., Sanomura I., Saitoh K. Formulation of cross-hardening in creep and its effects on the creep damage process of copper, *J. Engin. Mater. Technol.*, 1986, vol. 108, no. 2, pp. 167–173. doi: 10.1115/1.3225856.
101. Lokoshchenko A. M. Use of a vector damage parameter in modeling of long-term strength of metals, *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 3, pp. 315–320. doi: 10.3103/S0025654416030080.
102. Lokoshchenko A. M. Modeling the long-term strength of metals in an unsteady complex stress state, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, pp. 88–100. doi: 10.3103/S0025654418030081.
103. Leckie F. A., Wojewodzki W. Estimates of rupture life-constant load, *Int. J. Solids Struct.*, 1975, vol. 11, no. 12, pp. 1357–1365. doi: 10.1016/0020-7683(75)90063-3.
104. Rabotnov Yu. N. Creep rupture, In: *M. Hetényi, W.G. Vincenti (eds.), Applied Mechanics. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, pp. 342–349. doi: 10.1007/978-3-642-85640-2_26.

105. Tamuzh V. P. A possible theory of prolonged failure, *Strength Mater.*, 1971, vol. 3, no. 2, pp. 177–183. doi: 10.1007/BF01527991.
106. Altenbach H., Schiesse P. Modelling of the constitutive behaviour of damaged materials, In: *Advances in Fracture Resistance and Structural Integrity*, Selec. Pap. 8th Int. Conf. Fract. (Kyiv, June 8–14, 1993). Oxford, Pergamon Press, 1994, pp. 51–57.
107. Il'yushin A. A. One theory of creep rupture, *Inzh. Zh., Mekh. Tverd. Tela*, 1967, no. 3, pp. 21–35 (In Russian).
108. Zavoichinskaya E. B., Kiiiko I. A. *Vvedenie v teoriyu protsessov razrusheniia tverdykh tel* [Introduction to the Fracture of Solids]. Moscow, Moscow State Univ., 2004, 168 pp. (In Russian)
109. Pobedrya B. E. On damage models for rheonomic media, *Mech. Solids*, 1998, vol. 33, no. 4, pp. 108–124.
110. Tamuzh V. P., Lagzdyn'sh A. Z. A variant of the phenomenological theory of fracture, *Polymer Mech.*, 1968, vol. 4, no. 4–6, pp. 493–500. doi: 10.1007/BF00855760.
111. Lagzdin' A. Z., Tamuzh V. P. Construction of a phenomenological theory of fracture of anisotropic media, *Polymer Mech.*, 1971, vol. 7, no. 4, pp. 563–571. doi: 10.1007/BF00855195.
112. Kopnov V. A. Long-term strength of anisotropic materials with a complex stress state, *Strength Mater.*, 1982, vol. 14, no. 2, pp. 183–187. doi: 10.1007/BF00769052.
113. Lebedev A. O., Mikhalevich V. M. On theory of creep rupture, *Dop. NANU*, 1998, no. 5, pp. 57–62 (In Ukrainian).
114. Lebedev A. A., Mikhalevich V. M. Critical relationships for residual life assessment of materials, *Strength Mater.*, 2006, vol. 38, no. 4, pp. 348–353. doi: 10.1007/s11223-006-0049-y.
115. Mikhalevich V. M. Tensor models of rupture strength. Report no. 3. Criterional relations for loading with a change in stress state and the directions of the principal stresses, *Strength Mater.*, 1996, vol. 28, no. 3, pp. 238–246. doi: 10.1007/BF02133202.
116. Betten J. Net-stress analysis in creep mechanics, *Ing. Arch.*, 1982, vol. 52, no. 6, pp. 405–419. doi: 10.1007/BF00536211.
117. Betten J. Damage tensors in continuum mechanics, *J. Mec. Theor. Appl.*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–22.
118. Chow C. L., Wang J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture, *Eng. Fract. Mech.*, 1987, vol. 27, no. 5, pp. 547–558. doi: 10.1016/0013-7944(87)90108-1.
119. Bodner S. R. A procedure for including damage in constitutive equations for elastic-viscoplastic work-hardening materials, In: *J. Hult, J. Lemaitre (eds.), Physical Non-Linearities in Structural Analysis. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1981, pp. 21–28. doi: 10.1007/978-3-642-81582-9_4.
120. Liu Y., Kageyama Y., Murakami S. Creep fracture modeling by use of continuum damage variable based on Voronoi simulation of grain boundary cavity, *Int. J. Mech. Sci.*, 1998, vol. 40, no. 2–3, pp. 147–158. doi: 10.1016/S0020-7403(97)00045-3.
121. Murakami S. Mechanical modeling of material damage, *J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, no. 2, pp. 280–286. doi: 10.1115/1.3173673.
122. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification, *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982, vol. 1, no. 5, pp. 743–761.
123. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage, In: *A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Creep in Structures. International Union of Theoretical and Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1981, pp. 422–444. doi: 10.1007/978-3-642-81598-0_28.
124. Astaf'ev V. I. Description of fracture processes under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1986, no. 4, pp. 164–169 (In Russian).
125. Krajcinovic D. Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions, *J. Appl. Mech.*, 1985, vol. 52, no. 4, pp. 829–834. doi: 10.1115/1.3169154.

126. Krajcinovic D., Rinaldi A. Statistical damage mechanics—Part I: Theory, *J. Appl. Mech.*, 2005, vol. 72, no. 1, pp. 76–85. doi: 10.1115/1.1825434.
127. Krajcinovic D., Selvaraj S. Creep rupture of metals—An analytical model, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1984, vol. 106, no. 4, pp. 405–409. doi: 10.1115/1.3225738.
128. Man'kovskii V. A. Criteria for damage and long-term strength of structural materials, *Mashinoved.*, 1985, no. 1, pp. 87–94 (In Russian).
129. Delobelle P., Trivaudey F., Oytana C. High temperature creep damage under biaxial loading: INCO 718 and 316 (17–12 SPH) steels, *Nucl. Eng. Des.*, 1989, vol. 114, no. 3, pp. 365–377. doi: 10.1016/0029-5493(89)90114-3.
130. Lemaître J. A three-dimensional ductile damage model applied to deep-drawing forming limits, In: *Mech. Behav. Mater.*, Proc. of the 4th Int. Conf. (Stockholm, Sweden, 15–19 August 1983). Oxford, Pergamon Press, 1984, pp. 1047–1053. doi: 10.1016/B978-1-4832-8372-2.50132-9.
131. Lokoshchenko A. M. Application of kinetic theory to the analysis of high-temperature creep rupture of metals under complex stress (Review), *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 4, pp. 599–610. doi: 10.1134/S0021894412040141.
132. Agakhi K. A., Georgievskii D. V. Tensor nonlinear constitutive relations of isotropic creep theory with tensor measure of damage, *Izv. Tul'sk. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, 2013, no. 2, pp. 2–9 (In Russian).
133. Murakami S., Sanomura Y. Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress, In: *A. Sawczuk and B. Bianchi (eds.), Elasticity Today-Modeling, Methods and Applications*. London–New York, Elsevier, 1985, 535–551 pp.
134. Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' metallov v agressivnykh sredakh* [Creep and Long Term Strength of Metals in Corrosive Media]. Moscow, Moscow State Univ., 2000, 178 pp. (In Russian)
135. Lokoshchenko A. M. Creep and long-term strength of metals in corrosive media (Review), *Mater. Sci.*, 2001, vol. 37, no. 4, pp. 559–572. doi: 10.1023/A:1013264519277.
136. Lokoshchenko A. M. Methods of modeling the influence of the ambient medium on creep and long-term strength of metals, *Usp. Mekh.*, 2002, vol. 1, no. 4, pp. 90–121 (In Russian).
137. Lokoshchenko A. M., Il'in A. A., Mamonov A. M., Nazarov V. V. Experimental and theoretical study of the effect of hydrogen on the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy, *Russ. Metall.*, 2008, no. 2, pp. 142–147. doi: 10.1134/S0036029508020109.
138. Lokoshchenko A. M., Il'in A. A., Mamonov A. M., Nazarov V. V. Analysis of the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy with preliminarily injected hydrogen, *Mater. Sci.*, 2008, vol. 44, no. 5, pp. 700–707. doi: 10.1007/s11003-009-9128-0.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes



MSC: 76F02, 76M45, 76F45, 76R05, 76U05

Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows

E. Yu. Prosviryakov

Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

Nonstationary plane flows of a viscous incompressible fluid in a potential field of external forces are considered. An elliptic partial differential equation is obtained, with each solution being a vortex flow stream function described by an exact solution to the Navier–Stokes equations. The obtained solutions generalize the Beltrami–Trkal and Ballabh flows. Examples of such new solutions are given. They are intended to verify numerical algorithms and computer programs.

Keywords: exact solutions to the Navier–Stokes equations, Beltrami–Trkal flow, Ballabh flow.

Received: 7th January, 2020 / Revised: 27th February, 2020 /

Accepted: 16th March, 2020 / First online: 16th June, 2020

Introduction

Starting from the studies by Gromeka and Lamb [1, 2] proposing a new method of writing the Euler equations, a method for integrating the fluid motion equations began to be developed. The essence of this method is the rearrangement of the initial equations to the form convenient for integration. As applied to the Navier–Stokes equations, this line of research is discussed in studies where new forms of writing the equations make it possible to obtain previously unknown invariants and hidden symmetries of the constitutive equations [3–10]. One

Research Article

© © The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 319–330. doi: 10.14498/vsgtu1766 (In Russian).

Author’s Details:

Evgeniy Yu. Prosviryakov ✉  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics; e-mail: evgen_pros@mail.ru

of the methods for representing the motion equation (the Aristov–Pukhnachev method [6, 8, 9]) has been introduced to computational fluid dynamics [8, 9]. The numerical solutions of the Navier–Stokes axisymmetric equations were tested by conventional procedures [8, 9], which took no account of the invariant Helmholtz theorems and their extensions [10].

Few nontrivial exact solutions to the Navier–Stokes equations have been known so far [11–25]. The very notion of exact solution is unsettled and expanding [11]. It seems obvious that the exact solutions to the Navier–Stokes equations, which offer new problem statements in terms of different areas of mathematics, mechanics, and physics [11–25], are of the greatest interest.

The main difficulty in the analytical and numerical integration of the fluid motion equations lies in the absence of a clear relation of pressure to the velocity vector components. The evolutionary equation relating pressure to the velocity components has yet to be known [26]. Let us now illustrate the ensuing difficulties by plane flow. If an arbitrary function is given on a plane and viewed as a stream function, the velocity components calculated via the partial derivatives of this function will satisfy the continuity equation. We then can substitute these components into the Navier–Stokes equation, thus arriving at an equation for determining the gradient of pressure p . However, the rotor of this “gradient” may prove to be nonzero, and it will be impossible to select p .

The above-mentioned difficulties hold true not only for nonstationary flows, but also for stationary ones. Only two examples of formulas relating pressure to velocities are an exception, namely the Bernoulli equation (for an ideal fluid) and the Grad–Shafranov equation [26]. A method for integrating the stationary Euler equations for a very wide class of flows was proposed in [26]. The proposed integration method offered a constitutive equation relating pressure to velocity components. Consequently, the hypothesis of the existence of a universal equation establishing a relation between the hydrodynamic fields must not be rejected.

The attempt to relate velocity to pressure resulted in the development of classes of exact solutions to the Navier–Stokes equations. In [11] there is a summary of known classes of exact solutions to equations of continuum mechanics, which were obtained before the mid-1950s. The Couette [27], Poiseuille [28, 29], Stokes [30], von Karman [31], Hiemenz [32] flows have proved to be so efficient that they have been studied up to now [11, 33–35]. These flow motions have in common that they fall within the class of solutions where velocities depend linearly on a part of coordinates [11]. Linearly increasing velocities described by a complex profile depending, as a rule, on the transverse coordinate is successfully used in various applications [11, 19, 25]. After publication of [11], a survey that discussed and studied this class of solutions, the solubility of the overdetermined nonlinear system of partial differential equations for laminar vertical vortex flows was demonstrated [33–35]. Those studies discussed the extension of the Lin class for magnetic fluid dynamics [12] to the case of convective [36–38] and thermal diffusion [39, 40] flows of a viscous incompressible fluid. Potential flow motions, the Beltrami–Trkal flows [41, 42] and their modifications remain significant in theoretical and experimental fluid dynamics. Note that the Beltrami–Trkal flow had been first studied eight years earlier by Gromeka [43].

Different requirements are imposed on exact solutions, depending on the purpose of use. For example, when the correspondence between a real process and its

mathematical model is verified, an exact solution with “real” boundary and initial conditions is required, i.e. with conditions observable in real circumstances or with conditions technically implementable in a natural experiment. The requirement of “reality” of boundary and initial conditions can be cancelled if one deals with the verification of a numerical algorithm, i.e. with testing its accuracy. In doing so, one checks the difference of the numerical solution of a boundary value problem from the exact one rather than the difference of the numerical solution from the parameters of the real process, whereas it is not necessary for such problems to have the technical implementability of initial and boundary conditions in a natural experiment. The majority of numerical algorithms work with any initial and boundary conditions; therefore, the search for corresponding boundary value problems with a known exact solution can start with a search for the flow parameters satisfying the Navier–Stokes equations, without consideration of any boundary and initial conditions. Then, having chosen a spatial region, we can specify initial and boundary conditions in it and on its boundaries, which are taken from the exact solution. The thus-obtained boundary value problem with a known exact solution is well suited for the verification of numerical algorithms.

This paper proposes an elliptic partial differential equation, each solution of which is the stream function of a vortex flow described by an exact solution of the Navier–Stokes equations. Besides, a method for computing the pressure field for each of such stream functions is proposed.

1. The basic notations and equations of motion

We will now consider the flow of a viscous incompressible fluid in a potential field of mass forces. The notations are as follows (the wave sign above the symbol denotes a dimensional quantity or a vector): $\tilde{\mathbf{V}}$ – velocity, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{rot}\tilde{\mathbf{V}}$ is vorticity, \tilde{p} is pressure, $\tilde{\rho} = \text{const}$ is density, $\tilde{\Pi}$ is the potential of mass forces, $\tilde{\mu}$ is the coefficient of dynamic viscosity. The fluid motion is described by the Navier–Stokes equations [1, 44] as

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{V}} + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}} \Delta \tilde{\mathbf{V}} - \nabla \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \tilde{\Pi} \right), \quad (1)$$

$$\text{div} \tilde{\mathbf{V}} = 0. \quad (2)$$

Since $\tilde{\rho} = \text{const}$, it is the sum $(\tilde{p}/\tilde{\rho} + \tilde{\Pi})$ rather than the pressure \tilde{p} and the potential $\tilde{\Pi}$ taken separately that is of interest in the exact solution. This explains the convenience of using the following dimensionless variables: $x = \tilde{x}/\tilde{L}$, $y = \tilde{y}/\tilde{L}$, $t = \tilde{t}\tilde{U}/\tilde{L}$, $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}}/\tilde{U}$, $\boldsymbol{\Omega} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}\tilde{L}/\tilde{U}$, $\text{Re} = \tilde{\rho}\tilde{U}\tilde{L}/\tilde{\mu}$, $p = (\tilde{p}/\tilde{\rho} + \tilde{\Pi})/\tilde{U}^2$, where \tilde{L} and \tilde{U} are the characteristic length and velocity values in the flow under study.

2. Plane flows

We denote the velocity components in a rectangular Cartesian coordinate system Oxy by u , v , i.e. $\mathbf{V} = (u, v)$. Then, equations (1), (2) are written as

$$u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u = - \frac{\partial}{\partial x} p + \left\{ \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - \frac{\partial}{\partial t} u \right\}, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = - \frac{\partial}{\partial y} p + \left\{ \frac{1}{\text{Re}} \Delta v - \frac{\partial}{\partial t} v \right\}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0. \quad (5)$$

We describe the method of obtaining a family of exact solutions to the system (3)–(5). Consider the Beltrami elliptic differential equation [41] with respect to the function $\psi = \psi(x, y)$:

$$\Delta \psi = \lambda \psi \quad (6)$$

where λ is an arbitrary constant, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

For any solution $\psi = \psi(x, y)$ of equation (6), we assume that

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right) \exp \frac{t\lambda}{\text{Re}}, \quad v = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right) \exp \frac{t\lambda}{\text{Re}}. \quad (7)$$

This representation of the velocity components ensures that the expressions between the curly brackets in the right-hand parts of (3) and (4) are equal to zero. Indeed, according to (6), we have

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - \frac{\partial}{\partial t} u \right\} &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right) \exp \frac{t\lambda}{\text{Re}} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right) \exp \frac{t\lambda}{\text{Re}} \right] = \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \exp \frac{t\lambda}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta \psi - \lambda \psi) = \frac{1}{\text{Re}} \exp \frac{t\lambda}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} 0 = 0. \end{aligned}$$

Similarly, $\left\{ \frac{1}{\text{Re}} \Delta v - \frac{\partial}{\partial t} v \right\} = 0$. Next, we substitute the expressions from (7) into the left-hand part of (3) and transform it in view of (6) as follows:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \psi \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \psi - \frac{\partial}{\partial x} \psi \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi \right] \exp \frac{2t\lambda}{\text{Re}} = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x} \psi \left(- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi \right) \right] \exp \frac{2t\lambda}{\text{Re}} = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - \lambda \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi \right] \exp \frac{2t\lambda}{\text{Re}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right)^2 - \lambda \psi^2 \right] \exp \frac{2t\lambda}{\text{Re}}. \quad (8) \end{aligned}$$

Similarly, for the left-hand part of (4) we obtain

$$u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right)^2 - \lambda \psi^2 \right] \exp \frac{2t\lambda}{\text{Re}}. \quad (9)$$

Assume that

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \left\{ \lambda \psi^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right)^2 \right\} \exp \frac{2t\lambda}{\text{Re}}, \quad (10)$$

where p_0 is an arbitrary constant. Then it follows from (8) and (9) that u , v and p satisfy equations (3) and (4). The continuity equation (5) will also be fulfilled, this following directly from (7).

Thus, any solution of any (6) type equation gives birth to the exact solution (7), (10) of the Navier–Stokes equations. Note that $\psi = \psi(x, y)$ is the stream function of such solutions and that the equations $\psi(x, y) = \text{const}$ define the streamlines. Also note that the solutions of equation (6) for the case $\lambda = 0$ correspond to stationary vortex-free motion, which was studied in detail in the complex variable function theory [45]; therefore, flows for $\lambda \neq 0$ are presented in what follows.

The solutions of equations of the form (6) for $\lambda \neq 0$ can be exemplified by the following functions $\psi = \psi(x, y)$:

$$x \cos \beta y, \quad A \cos \alpha x + B \cos \alpha y, \quad \cos \alpha x \sin \beta y, \quad \cos \alpha x \exp \beta y, \\ \cosh \alpha x \cosh \beta y, \quad A \cosh \alpha x + B \cosh \alpha y, \quad \sinh \alpha x \cosh \beta y,$$

where A, B, α, β are arbitrary constants.

This list can be easily continued. Various solutions are obtained, particularly, by the variable separation method. All these solutions of equation (6) offer exact solutions to the Navier–Stokes equations by formulas (7) and (10). The obtained solutions will be nonstationary, but with fixed streamlines. These streamlines coincide with the streamlines of another flow, namely the stationary flow of an ideal incompressible fluid. Indeed, if the non-stationary multiplier $\exp(t\lambda/\text{Re})$ is discarded, the velocity components $u = (\frac{\partial}{\partial y}\psi)$, $v = -(\frac{\partial}{\partial x}\psi)$ and the pressure

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \left\{ \lambda \psi^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \psi \right)^2 \right\}$$

will satisfy the stationary Euler equations [1, 44] for incompressible fluids

$$u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u = -\frac{\partial}{\partial x} p, \quad u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v = -\frac{\partial}{\partial y} p, \quad \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0.$$

Such (vortex) solutions for the stationary flows of an ideal fluid are a partial case of the solutions obtained in [46]. In that paper, instead of equation (6), for finding the stream function, an equation of a more general form was used, $\Delta\psi = f(\psi)$, where f is an arbitrary function.

3. Exact solution examples

EXAMPLE 1. Consider the function $\psi = \cos x \sin y$. It satisfies equation (6) when $\lambda = -2$. The corresponding exact solution of the Navier–Stokes equations is as follows:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{i} \cos x \cos y + \mathbf{j} \sin x \sin y) \cdot \exp\left(-\frac{2t}{\text{Re}}\right), \\ p = p_0 - \frac{1}{2} (\cos x^2 + \sin y^2) \cdot \exp\left(-\frac{4t}{\text{Re}}\right),$$

where \mathbf{i} and \mathbf{j} are the directional vectors of the coordinate axes. The fluid velocity field and the streamlines in the square $[0; \pi] \times [0; \pi]$ are shown in Fig. 1. In this

and all the other figures, the Ox axis is positioned horizontally and the Oy axis is directed vertically. The velocity field \mathbf{V} is shown in the left part of Fig. 1, the length of the arrows being proportional to $|\mathbf{V}|$.

EXAMPLE 2. If we take a stream function with smaller periods along x and y , we will have a flow with a cellular structure. The smaller the stream function periods, the finer the cells. The streamlines for the case $\psi = \cos 4x \sin 4y$ are shown in Fig. 2.

EXAMPLE 3. Consider the function $\psi = A \sin \sqrt{8}y + \cos 2x \sin 2y$. It satisfies equation (6) when $\lambda = -8$ for any value of the constant A . The corresponding exact solution of the Navier–Stokes equations is as follows:

$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{i}(A\sqrt{8} \cos \sqrt{8}y + 2 \cos 2x \cos 2y) + \mathbf{j} 2 \sin 2x \sin 2y \right) \cdot \exp\left(-\frac{8t}{\text{Re}}\right), \quad (11)$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \left\{ 8(A \sin \sqrt{8}y + \cos 2x \sin 2y)^2 + \right.$$

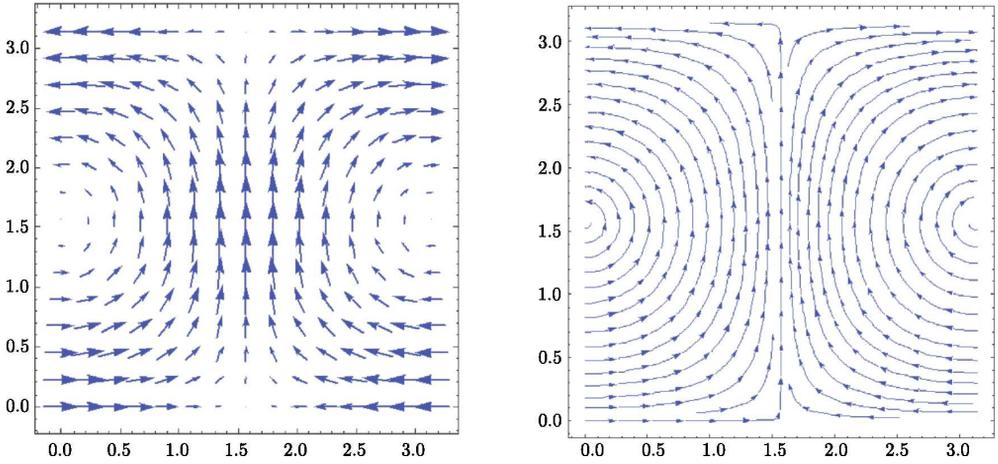


Figure 1. The velocity field and the fixed streamlines of a decaying flow

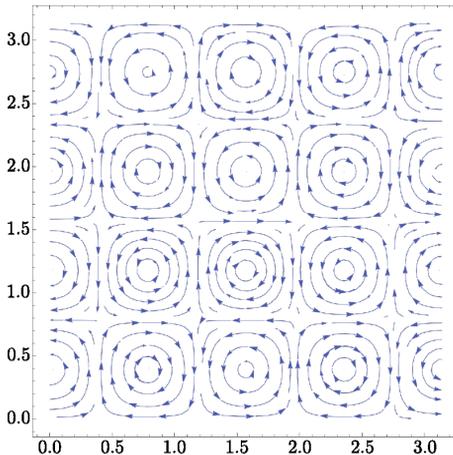


Figure 2. Cellular structure

$$+(A\sqrt{8} \cos \sqrt{8}y + 2 \cos 2x \cos 2y)^2 + (2 \cos 2x \cos 2y)^2 \} \cdot \exp\left(-\frac{16t}{\text{Re}}\right).$$

The velocity field of this flow results from the addition of the flow fields corresponding to the stream functions $\psi_1 = A \sin \sqrt{8}y$ and $\psi_2 = \cos 2x \sin 2y$, each of which satisfies equation (6) when $\lambda = -8$. The function ψ_1 defines the horizontal ($v = 0$) flow; the function ψ_2 defines the flow with square cells ($A = 0$ in Fig. 3). The larger the constant A , the greater the contribution of the horizontal flow. The streamlines of the total flow (11) for four values of A ($A = 0$; 0.5 ; $1/\sqrt{2}$; 1) are shown in Fig. 3.

For three values $A = 0.5$; $1/\sqrt{2}$; 1 in Fig. 3, fluid streams with recirculation zones in between are clearly visible. As the contribution of the horizontal flow increases (i.e. with increasing A), the recirculation zones change their shape, with some zones expanding and the other ones shrinking.

Note that all the discussed solutions of the form (7) are valid at any Reynolds

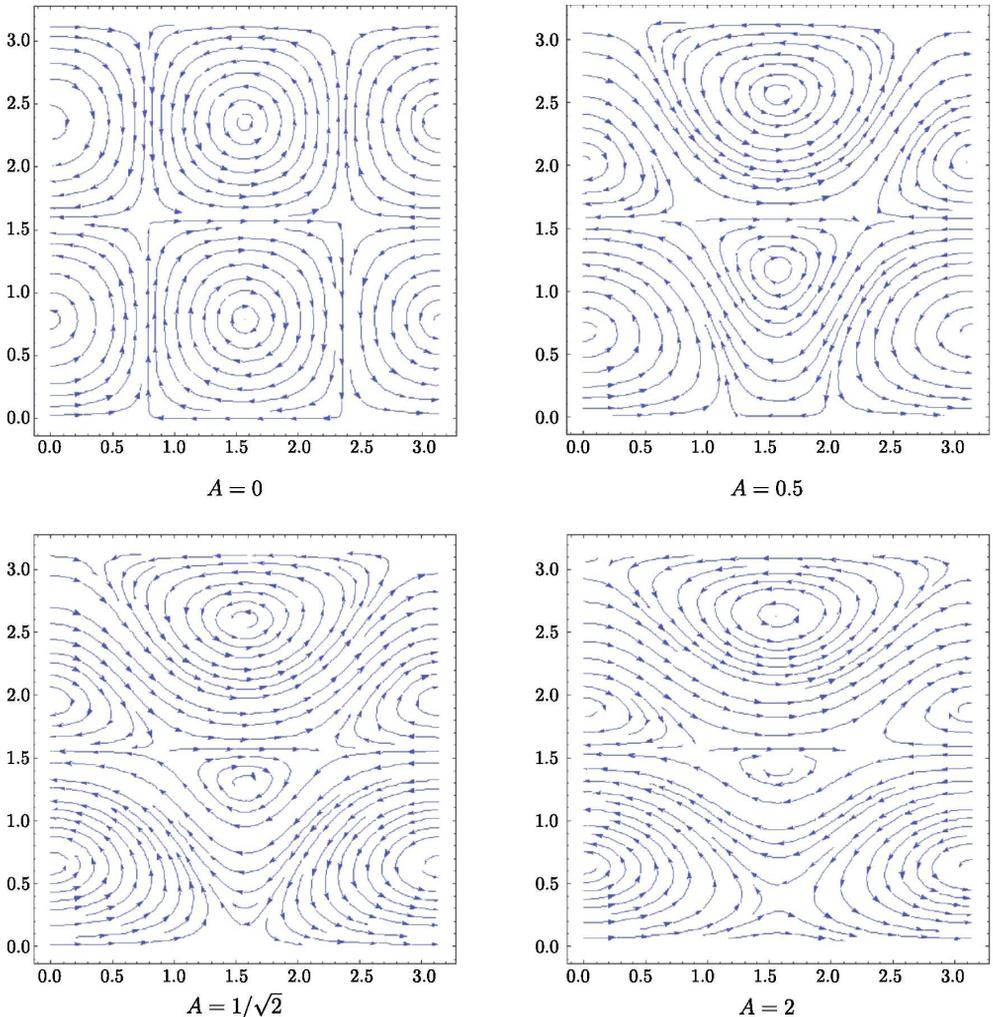


Figure 3. The streamlines of the total flow for four values of the constant A

number, and this makes them advantageous over many previously known exact solutions [11, 19, 25].

4. Summation of the solutions

By virtue of the linearity of equation (6), the velocity fields corresponding to identical λ can be added up to yield a velocity field of another exact solution of the Navier–Stokes equations. And although the pressure field in the obtained “new” flow is not equal to the sum of the “initial” pressure fields, the fact of the possibility of summing the velocities is somewhat unexpected since the nonlinear terms of the Navier–Stokes equations are nonzero in all the flows under study.

The summation of the velocity fields was demonstrated in the previous section (example 3), the streamline patterns were shown for different linear combinations of the stream functions, each satisfying equation (6) when $\lambda = -8$.

If an exact solution is obtained by the here-proposed method, then there is a flow with the same number λ for shear, rotation, and axial symmetry. This is a “source” for obtaining various flow patterns.

Note that the above-mentioned property of the superposition of two flows of a viscous incompressible fluid, which leads to the formation of a new velocity field, was discussed by Ballabh in [47–49]. The condition enabling the superposition of the here-obtained flows is determined by the linearity of equation (6) and the heat conduction type equations

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{\text{Re}}\Delta u, \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial t}v = \frac{1}{\text{Re}}\Delta v.$$

The solution of these equations is given by (7). The presented condition for obtaining solutions by the superposition method differs from the constraints reported in [47–49].

Conclusion

Plane and nonstationary flows of a viscous incompressible fluid in potential fields of external forces have been considered. These flows are described by the Navier–Stokes equations. A method for constructing boundary value problems with a known exact solution has been proposed and exemplified. The exact solution (7) is special in that the streamlines of the nonstationary flow coincide with the trajectories of the fluid particles and that they also coincide with the streamlines of another flow – the stationary flow of an ideal incompressible fluid. In the solutions proposed in the paper the sum of the nonstationary and viscous terms in the Navier–Stokes vector equation is zero; consequently, the rotor of this sum is zero. In this sense, the solution family (7) extends the Beltrami–Trkal flows to the nonlinear Navier–Stokes equations since in the Beltrami–Trkal flows the rotor of the above-mentioned sum is also zero; this has enabled us to simplify the study of these flows.

The solution class (7) gives a new example of the Ballabh flow, for which the addition of the velocity fields is possible.

The obtained method of integrating the nonstationary Navier–Stokes equations can be applied in computational fluid dynamics to verifying numerical algorithms and computer programs.

Competing interests. I have no competing interests.

Author’s Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

References

- Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford, Pergamon Press, 1966. doi: 10.1016/c2013-0-05328-5.
- Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge Univ., 1924.
- Zhuravlev V. M. A new representation of the two-dimensional equations of the dynamics of an incompressible fluid, *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, no. 6, pp. 1003–1009. doi: 10.1016/0021-8928(94)90116-3.
- Chernyi G. G. Plane steady self-similar vortex flows of an ideal fluid (Keplerian motions), *Dokl. Math.*, 1997, vol. 42, no. 1, pp. 52–55.
- Ladyzhenskaya O. A. Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness, *Russ. Math. Surv.*, 2003, vol. 58, no. 2, pp. 251–286. doi: 10.1070/RM2003v058n02ABEH000610.
- Aristov S. N., Pukhnachev V. V. On the equations of axisymmetric motion of a viscous incompressible fluid, *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 2, pp. 112–115. doi: 10.1134/1.1686882.
- Pukhnachev V. V. Integrals of motion of an incompressible fluid occupying the entire space, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, vol. 45, no. 2, pp. 167–171. doi: 10.1023/b:jamt.0000017578.27867.03.
- Moshkin N. P., Poochinapan K., Christov C. I. Numerical implementation of Aristov–Pukhnachev’s formulation for axisymmetric viscous incompressible flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2010, vol. 62, no. 10, pp. 1063–1080. doi: 10.1002/flid.2052.
- Moshkin N. P., Poochipan K. Novel finite difference scheme for the numerical solution of two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, 2010, vol. 7, no. 2, pp. 321–329.
- Golubkin V. N., Markov V. V., Sizykh G. B. The integral invariant of the equations of motion of a viscous gas, *J. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 566–571. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2016.04.002.
- Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. doi: 10.1134/S0040579509050066.
- Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, no. 1, pp. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016.
- Neményi P. F. Recent developments in inverse and semi-inverse methods in the mechanics of continua, In: *R. von Mises, Th. von Kármán (eds.), Advances in Applied Mechanics*, vol. 2. New York, Academic Press, 1951, pp. 123–151. doi: 10.1016/S0065-2156(08)70300-4.
- Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164.
- Meleshko S. V., Pukhnachev V. V. One class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 208–216. doi: 10.1007/BF02468516.
- Ludlow D. K., Clarkson P. A., Bassom A. P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations, *Stud. Appl. Math.*, 1999, vol. 103, no. 3, pp. 183–240. doi: 10.1111/1467-9590.00125.
- Polyanin A. D. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with generalized separation of variables, *Dokl. Phys.*, 2001, vol. 46, no. 10, pp. 726–731. doi: 10.1134/1.1415590.
- Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *Nonlinear Dynam.*, 2004, vol. 36, no. 1, pp. 47–68. doi: 10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73.

19. Pukhnachev V. V. Symmetries in Navier-Stokes equations, *Usp. Mekh.*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6–76 (In Russian).
20. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge, Cambridge Univ., 2006. doi: 10.1017/cbo9780511526459.
21. Polyanin A. D., Aristov S. N. A new method for constructing exact solutions to three-dimensional Navier–Stokes and Euler equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2011, vol. 45, no. 6, pp. 885–890. doi: 10.1134/S0040579511060091.
22. Aristov S. N., Polyanin A. D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations, *Russ. J. Math. Phys.*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 1–18. doi: 10.1134/S1061920810010012.
23. Maslov V. P., Shafarevich A. I. Asymptotic solutions of Navier–Stokes equations and topological invariants of vector fields and Liouville foliations, *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 180, no. 2, pp. 967–982. doi: 10.1007/s11232-014-0192-8.
24. Allilueva A. I., Shafarevich A. I. Asymptotic solutions of linearized Navier–Stokes equations localized in small neighborhoods of curves and surfaces, *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, vol. 22, no. 4, pp. 421–436. doi: 10.1134/S1061920815040019.
25. Broman G. I., Rudenko O. V. Submerged Landau jet: exact solutions, their meaning and application, *Physica–Uspekhi*, 2010, vol. 53, no. 1, pp. 91–98. doi: 10.3367/UFNe.0180.201001f.0097.
26. Aristov S. N., Polyanin A. D. New classes of exact solutions of Euler equations, *Dokl. Phys.*, 2008, vol. 53, no. 3, pp. 166–171. doi: 10.1134/S1028335808030129.
27. Couette M. Études sur le frottement des liquides, *Ann. de Chim. et Phys. (6)*, 1890, vol. 21, pp. 433–510 (In French).
28. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres, *C. R. Acad. Sci.*, 1840, vol. 11, pp. 961–967, 1041–1048.
29. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres, *C. R. Acad. Sci.*, 1841, vol. 12, pp. 112–115.
30. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1851, vol. 9, pp. 8–106.
31. v. Kármán Th. Über laminare und turbulente Reibung, *ZAMM*, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 233–252 (In German). doi: 10.1002/zamm.19210010401.
32. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem inden gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder, *Dinglers Polytech. J.*, 1911, vol. 326, pp. 321–324 (In German), <http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj326/ar326114>.
33. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Couette flow, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182 (In Russian).
34. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Stokes waves in vortical fluid, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 309–318 (In Russian).
35. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. doi: 10.1134/S0015462816020034.
36. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vortical Flows of the Advective Nature in a Rotating Fluid Layer*. Perm, Perm State Univ., 2006 (In Russian).
37. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vortical Flows in Thin Fluid Layers*. Kirov, Vyatka State Univ., 2011, 207 pp. (In Russian)
38. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of nonisothermal fluids (Review), *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171–184. doi: 10.1134/S0021894413020016.
39. Ryzhkov I. I. *Thermal Diffusion in Mixtures: Equations, Symmetries, Solutions and their Stability*. Novosibirsk, Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2013 (In Russian).
40. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. doi: 10.1134/S0040579516030027.
41. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche, *Rend. Inst. Lombardo Acad. Sci. Lett.*, 1889, vol. 22, pp. 122–131.

42. Trkal V. Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin, *Časopis*, 1919, vol. 48, pp. 302–311 (In Czech).
43. Gromeka I. S. *Collected Works*. Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1952 (In Russian).
44. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge Univ., 2000. doi: 10.1017/cbo9780511800955.
45. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Methodsof the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka, 1987 (In Russian).
46. Markov V. V., Sizykh G. B. Exact solutions of the Euler equations for some two-dimensional incompressible flows, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 294, no. 1, pp. 283–290. doi: 10.1134/S0081543816060195.
47. Ballabh R. Self superposable motions of the type $\xi = \lambda u$, etc., *Proc. Benares Math. Soc., n. Ser.*, 1940, vol. 2, pp. 85–89.
48. Ballabh R. Superposable motions in a heterogeneous incompressible fluid, *Proc. Benares Math. Soc., n. Ser.*, 1941, vol. 3, pp. 1–9.
49. Ballabh R. On coincidence of vortex and stream lines in ideal liquids, *Ganita*, 1950, vol. 1, pp. 1–4.

УДК 532.511, 517.958:531.3-324

Точные решения обобщенных плоских течений Бельтрами–Тркала и Беллаба

Е. Ю. Просвиряков

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Рассмотрены плоские нестационарные течения вязкой несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних сил. Получено уравнение в частных производных эллиптического типа, каждое решение которого является функцией тока вихревого течения, описываемого некоторым точным решением уравнений Навье–Стокса. Полученные решения обобщают течения Бельтрами–Тркала и Беллаба. Даны примеры таких новых решений. Они предназначены для верификации численных алгоритмов и компьютерных программ.

Ключевые слова: точные решения уравнений Навье–Стокса, течение Бельтрами–Тркала, течение Беллаба.

Получение: 7 января 2020 г. / Исправление: 27 февраля 2020 г. /
Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 16 июня 2020 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Научная статья

© © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Просвиряков Е. Ю. Точные решения обобщенных плоских течений Бельтрами–Тркала и Беллаба // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 319–330. doi: 10.14498/vsgtu1766.

Сведения об авторе

Евгений Юрьевич Просвиряков ✉ ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики; e-mail: evgen_pros@mail.ru



УДК 519.872

Исследование RQ-системы с вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием

А. А. Назаров, Я. Е. Измайлова

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Институт прикладной математики и компьютерных наук,
Россия, 634050, Томск, проспект Ленина, 36.

Аннотация

Рассмотрена система с повторными вызовами (RQ-система), на вход которой поступает простейший поток с заданной интенсивностью. Если в момент обращения заявки прибор занят, то происходит вытеснение заявки, стоящей на приборе. Заявка, не успевшая успешно обслужиться, переходит на орбиту, чтобы после случайной экспоненциальной задержки вновь обратиться к прибору для обслуживания. Дообслуживание заявки подразумевает, что в момент обращения с орбиты к прибору заявка встает на ту фазу обслуживания, с которой была прервана. Показано, что асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите и состояний прибора сходится к трехмерному гауссовскому распределению. Для данного распределения получен вектор средних значений и матрица ковариаций. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний прибора.

Ключевые слова: система с повторными вызовами, вытеснение заявок, трехфазное обслуживание, дообслуживание заявок, гауссовская аппроксимация, асимптотический анализ.

Получение: 18 ноября 2019 г. / Исправление: 26 мая 2020 г. /

Принятие: 1 июня 2020 г. / Публикация онлайн: 3 июня 2020 г.

Научная статья

© © Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Назаров А. А., Измайлова Я. Е. Исследование RQ-системы с вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 331–342. doi:10.14498/vsgtu1756.

Сведения об авторах

Анатолий Андреевич Назаров  <https://orcid.org/0000-0002-5097-5629>

доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. теории вероятностей и математической статистики; e-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Яна Евгеньевна Измайлова  <https://orcid.org/0000-0002-9132-0127>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории вероятностей и математической статистики; e-mail: evgenevna.92@mail.ru

Введение. В последние годы активно развивается изучение систем массового обслуживания с повторами (RQ-системы). Это связано с их широким применением в различных областях: в системах телефонной коммутации, телекоммуникационных и компьютерных сетях. Ярким примером является телефонная связь. Телефонный абонент, требующий соединения и получивший сигнал «занято», будет повторять попытки до тех пор, пока не получит соединения.

Системы с повторами характеризуются тем, что заявки, прибывшие в систему и по каким-то причинам не получившие полного обслуживания, уходят в зону ожидания, называемую орбитой, и через некоторое случайное время повторяют попытку обслужиться. С целью изучения литературы по повторным очередям можно обратиться, например, к работам [1–3].

В [4] изучена система с повторными попытками, при которых прибор может предоставить дополнительную вторую фазу обслуживания. Эта модель обобщает как классическую систему с повторами, так и очередь с классической линией ожидания. К. Дека [5] изучил ненадежный сервер с двумя фазами обслуживания и повторными попытками. J.C. Ке и G. Choudhury [6] рассматривали систему с повторами, двумя фазами обслуживания, поломкой и ремонтом прибора. Также RQ-системы, в которых обслуживание осуществлялось в несколько фаз, изучены в работах [7, 8].

Для того чтобы предложить различное качество обслуживания для различных клиентов, мы часто устанавливаем приоритеты (то есть каким-то образом вытесняем клиентов) в системе массового обслуживания. Это явление распространено на практике. В работе [9] рассматривается система с повторной очередью, в которой приоритетом обладают только первичные заявки, то есть вытеснять в момент прихода они могут только вторичные заявки, которые обращались к прибору с орбиты. Были найдены стационарное состояние и основные показатели работоспособности системы. В [10] также рассматривают приоритетную систему, но приоритетом обладают вторичные заявки; в системе присутствует выталкивающий механизм для приоритетных заявок. Работы [11–16] также посвящены приоритетным системам.

В указанных исследованиях не учитывается тот факт, что после прерывания обслуживания не запоминается момент, с которого было прервано обслуживание, и оно начинается заново. В работе [17] показано, что при некоторых даже сколь угодно малых значениях интенсивности входящего потока стационарного режима не существует, в то время как при других параметрах этой же RQ-системы стационарный режим существует всегда при конечных значениях интенсивности входящего потока. В данной работе рассмотрим систему с повторами, где запоминается фаза, на которой прервали обслуживание, и дообслуживание начинается именно с нее.

1. Математическая модель и постановка задачи. Рассмотрим систему массового обслуживания с повторами (рис. 1). На вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Пришедшая заявка начинает обслуживаться на первой фазе обслуживания прибора. Время обслуживания распределено экспоненциально с параметрами μ_1, μ_2, μ_3 для каждой из фаз соответственно. После успешного окончания обслуживания на первой фазе заявка мгновенно переходит для обслуживания на вторую, после второй — на третью и затем покидает систему. Если в момент прихода заявка обнаруживает прибор занятым, то она вытесняет заявку, стоящую на обслуживании, и занимает его. Вытесненная заявка переходит на орбиту, разделенную на три зоны. В первую зону переходят заявки с первой фазы обслуживания и воз-

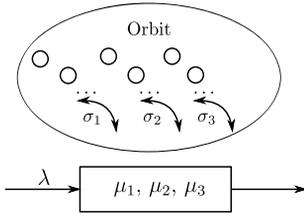


Рис. 1. Система с повторными вызовами, вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием

[Figure 1. Retrial queueing system with exclusion of customers and three-phase phased by follow-up]

вращаются на дообслуживание на первую фазу, со второй зоны переходят заявки со второй фазы обслуживания и возвращаются на дообслуживание на вторую фазу, с третьей зоны — на третью. После экспоненциально распределенного времени задержки заявок на орбите с параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для соответствующих зон заявки вновь встают на прибор для обслуживания. При обращении из орбиты происходит аналогичное вытеснение по тому же закону, что и для вновь прибывших в систему заявок.

Обозначим состояния прибора в момент времени t следующим образом:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор пуст,} \\ 1, & \text{если прибор занят обслуживанием заявки на первой фазе,} \\ 2, & \text{если прибор занят обслуживанием заявки на второй фазе,} \\ 3, & \text{если прибор занят обслуживанием заявки на третьей фазе.} \end{cases}$$

Пусть $P_k(i_1, i_2, i_3) = P\{k(t) = k, i_1(t) = i_1, i_2(t) = i_2, i_3(t) = i_3\}$, $i_m \geq 0$, $m = \overline{1, 3}$, $k = \overline{0, 3}$ — стационарное распределение вероятностей чисел заявок на орбите, где $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ — число заявок на орбите в первой, второй и третьей зонах соответственно; $R_k = P\{k(t) = k\}$ — стационарное распределение вероятностей состояний прибора.

Ставится задача исследования системы с повторами, вытеснением заявок и пофазовым трехфазным дообслуживанием, а именно задача нахождения стационарного распределения вероятностей состояний прибора и нахождения асимптотической характеристической функции числа заявок на орбите.

2. Система уравнений Колмогорова. Для распределения вероятностей $P_k(i_1, i_2, i_3)$, $k = \overline{0, 3}$, чисел заявок на орбите составим однородную систему с бесконечным числом линейных алгебраических уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} & -(\lambda + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2 + i_3\sigma_3)P_0(i_1, i_2, i_3) + \mu_3P_3(i_1, i_2, i_3) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_1 + i_2\sigma_2 + i_3\sigma_3)P_1(i_1, i_2, i_3) + \lambda P_0(i_1, i_2, i_3) + \lambda P_1(i_1 - 1, i_2, i_3) + \\ & + \lambda P_2(i_1, i_2 - 1, i_3) + \lambda P_3(i_1, i_2, i_3 - 1) + (i_1 + 1)\sigma_1 P_0(i_1 + 1, i_2, i_3) + \\ & + (i_1 + 1)\sigma_1 P_2(i_1 + 1, i_2 - 1, i_3) + (i_1 + 1)\sigma_1 P_3(i_1 + 1, i_2, i_3 - 1) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_2 + i_1\sigma_1 + i_3\sigma_3)P_2(i_1, i_2, i_3) + \mu_1 P_1(i_1, i_2, i_3) + \\ & + (i_2 + 1)\sigma_2 P_0(i_1, i_2 + 1, i_3) + (i_2 + 1)\sigma_2 P_1(i_1 - 1, i_2 + 1, i_3) + \\ & + (i_2 + 1)\sigma_2 P_3(i_1, i_2 + 1, i_3 - 1) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_3 + i_1\sigma_1 + i_2\sigma_2)P_3(i_1, i_2, i_3) + \mu_2 P_2(i_1, i_2, i_3) + \\ & + (i_3 + 1)\sigma_3 P_0(i_1, i_2, i_3 + 1) + (i_3 + 1)\sigma_3 P_1(i_1 - 1, i_2, i_3 + 1) + \\ & + (i_3 + 1)\sigma_3 P_2(i_1, i_2 - 1, i_3 + 1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Домножим правую и левую части системы (1) на величину $e^{ju_1i_1 + ju_2i_2 + ju_3i_3}$ и просуммируем по всем $i_m, m = \overline{1, 3}$, где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Введем функции следующего вида:

$$H_k = H_k(u_1, u_2, u_3) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + ju_2 i_2 + ju_3 i_3} P_k(i_1, i_2, i_3), \quad k = \overline{0, 3}. \quad (2)$$

Данная функция является частичной характеристической функцией.

Учитывая, что

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_m} = \frac{\partial H_k(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_m} = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=0}^{\infty} j i_m e^{ju_1 i_1 + ju_2 i_2 + ju_3 i_3} P_k(i_1, i_2, i_3),$$

$k = \overline{0, 3}$, $m = \overline{1, 3}$, из системы (1) следует, что для функций вида (2) уравнения Колмогорова имеют вид

$$\begin{aligned} j\sigma_1 \frac{\partial H_0}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_0}{\partial u_2} + j\sigma_3 \frac{\partial H_0}{\partial u_3} + \mu_3 H_3 - \lambda H_0 &= 0, \\ -\lambda H_1 - \mu_1 H_1 + \lambda H_0 + \lambda e^{ju_1} H_1 + \lambda e^{ju_2} H_2 + \lambda e^{ju_3} H_3 + j\sigma_3 \frac{\partial H_1}{\partial u_3} - \\ - j\sigma_1 e^{-ju_1} \frac{\partial H_0}{\partial u_1} + j\sigma_2 \frac{\partial H_1}{\partial u_2} - j\sigma_1 e^{-ju_1 + ju_2} \frac{\partial H_2}{\partial u_1} - j\sigma_1 e^{-ju_1 + ju_3} \frac{\partial H_3}{\partial u_1} &= 0, \\ -\lambda H_2 - \mu_2 H_2 + \mu_1 H_1 + j\sigma_1 \frac{\partial H_2}{\partial u_1} - j\sigma_2 e^{-ju_2} \frac{\partial H_0}{\partial u_2} + j\sigma_3 \frac{\partial H_2}{\partial u_3} - \\ - j\sigma_2 e^{-ju_2 + ju_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_2} - j\sigma_2 e^{-ju_2 + ju_3} \frac{\partial H_3}{\partial u_2} &= 0, \\ -\lambda H_3 - \mu_3 H_3 + \mu_2 H_2 + j\sigma_1 \frac{\partial H_3}{\partial u_1} - j\sigma_3 e^{-ju_3} \frac{\partial H_0}{\partial u_3} + j\sigma_2 \frac{\partial H_3}{\partial u_2} - \\ - j\sigma_3 e^{-ju_3 + ju_1} \frac{\partial H_1}{\partial u_3} - j\sigma_3 e^{-ju_3 + ju_2} \frac{\partial H_2}{\partial u_3} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как прямое решение системы (3) не представляется возможным, воспользуемся методом асимптотического анализа в предельном условии большой задержки заявок на орбите, полагая, что $\sigma_m = \sigma \gamma_m$, $m = 1, 2, 3$, $\sigma \rightarrow 0$.

3. Асимптотический анализ. Асимптотический анализ проводится в два этапа. На первом этапе находятся стационарное распределение вероятностей состояний прибора и асимптотические средние значения числа заявок в зонах на орбите. На втором этапе находится вид предельной характеристической функции, а также параметры полученного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

3.1. Асимптотика первого порядка. Введем следующие обозначения: x_1, x_2, x_3 — асимптотические средние значения числа заявок на орбите в первой, второй, третьей зонах орбиты соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ — число заявок в зонах орбиты системы массового обслуживания с повторами, вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием. Тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M[\exp\{ju_1 \sigma i_1(t) + ju_2 \sigma i_2(t) + ju_3 \sigma i_3(t)\}] = \exp\{ju_1 x_1 + ju_2 x_2 + ju_3 x_3\},$$

где x_1, x_2, x_3 имеют вид

$$x_1 = \frac{\lambda R_1}{\gamma_1 R_0}, \quad x_2 = \frac{\lambda R_2}{\gamma_2 R_0}, \quad x_3 = \frac{\lambda R_3}{\gamma_3 R_0}, \quad (4)$$

а $R_k, k = \overline{0, 3}$, определяются равенствами

$$R_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad R_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad R_3 = \frac{\lambda}{\mu_3}, \quad R_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_3}. \quad (5)$$

Доказательство. В системе уравнений (3) выполним замены

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma \gamma_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad \sigma = \epsilon, \quad u_m = \epsilon w_m; \\ H_k &= H_k(u_1, u_2, u_3) = F_k(w_1, w_2, w_3, \epsilon) = F_k(\epsilon), \quad k = \overline{0, 3}. \end{aligned}$$

Тогда получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} j\gamma_1 \frac{\partial F_0(\epsilon)}{\partial w_1} + j\gamma_2 \frac{\partial F_0(\epsilon)}{\partial w_2} + j\gamma_3 \frac{\partial F_0(\epsilon)}{\partial w_3} + \mu_3 F_3(\epsilon) - \lambda F_0(\epsilon) &= 0, \\ \lambda F_0(\epsilon) + (\lambda e^{j\epsilon w_1} - \lambda - \mu_1) F_1(\epsilon) + \lambda e^{j\epsilon w_2} F_2(\epsilon) + \lambda e^{j\epsilon w_3} F_3(\epsilon) - \\ - j\gamma_1 e^{-j\epsilon w_1} \frac{\partial F_0(\epsilon)}{\partial w_1} + j\gamma_2 \frac{\partial F_1(\epsilon)}{\partial w_2} + j\gamma_3 \frac{\partial F_1(\epsilon)}{\partial w_3} - \\ - j\gamma_1 e^{j\epsilon(w_2-w_1)} \frac{\partial F_2(\epsilon)}{\partial w_1} - j\gamma_1 e^{j\epsilon(w_3-w_1)} \frac{\partial F_3(\epsilon)}{\partial w_1} &= 0, \\ \mu_1 F_1(\epsilon) - (\lambda + \mu_2) F_2(\epsilon) - j\gamma_2 e^{-j\epsilon w_2} \frac{\partial F_0(\epsilon)}{\partial w_2} - j\gamma_2 e^{j\epsilon(w_1-w_2)} \frac{\partial F_1(\epsilon)}{\partial w_2} + \\ + j\gamma_1 \frac{\partial F_2(\epsilon)}{\partial w_1} + j\gamma_3 \frac{\partial F_2(\epsilon)}{\partial w_3} - j\gamma_2 e^{j\epsilon(w_3-w_2)} \frac{\partial F_3(\epsilon)}{\partial w_2} &= 0, \\ \mu_2 F_2(\epsilon) - (\lambda + \mu_3) F_3(\epsilon) - j\gamma_3 e^{-j\epsilon w_3} \frac{\partial F_0(\epsilon)}{\partial w_3} - j\gamma_3 e^{j\epsilon(w_1-w_3)} \frac{\partial F_1(\epsilon)}{\partial w_3} + \\ + j\gamma_1 \frac{\partial F_3(\epsilon)}{\partial w_1} + j\gamma_2 \frac{\partial F_3(\epsilon)}{\partial w_2} - j\gamma_3 e^{j\epsilon(w_2-w_3)} \frac{\partial F_2(\epsilon)}{\partial w_3} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В системе (6) выполним предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$ и обозначим

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_k(\epsilon) = F_k(w_1, w_2, w_3) = F_k. \quad (7)$$

Функции F_k будем искать в виде $F_k = R_k \Phi(w_1, w_2, w_3) = R_k \Phi$. После всех замен и предельного перехода из системы (6) получаем

$$\begin{aligned} (-\lambda R_0 + \mu_3 R_3) \Phi + j R_0 \left(\gamma_1 \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} + \gamma_2 \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} + \gamma_3 \frac{\partial \Phi}{\partial w_3} \right) &= 0, \\ (\lambda(1 - R_1) - \mu_1 R_1) \Phi - j\gamma_1(1 - R_1) \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} + j\gamma_2 R_1 \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} + j\gamma_3 R_1 \frac{\partial \Phi}{\partial w_3} &= 0, \\ ((-\lambda + \mu_2) R_2 + \mu_1 R_1) \Phi - j\gamma_2(1 - R_2) \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} + j\gamma_1 R_2 \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} + j\gamma_3 R_2 \frac{\partial \Phi}{\partial w_3} &= 0, \\ ((-\lambda + \mu_3) R_3 + \mu_2 R_2) \Phi - j\gamma_3(1 - R_3) \frac{\partial \Phi}{\partial w_3} + j\gamma_1 R_3 \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} + j\gamma_2 R_3 \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} &= 0. \end{aligned}$$

Левые и правые части уравнений полученной системы разделим на Φ и эту функцию будем искать в виде

$$\Phi = \exp(jw_1x_1 + jw_2x_2 + jw_3x_3). \quad (8)$$

Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & -(\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)R_0 + \mu_3R_3 = 0, \\ & (\lambda + \gamma_1x_1)R_0 - (\mu_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)R_1 + (\lambda + \gamma_1x_1)(R_2 + R_3) = 0, \\ & \gamma_2x_2R_0 + (\mu_1 + \gamma_2x_2)R_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1x_1 + \gamma_3x_3)R_2 + \gamma_2x_2R_3 = 0, \\ & \gamma_3x_3R_0 + \gamma_3x_3R_1 + (\mu_2 + \gamma_3x_3)R_2 - (\lambda + \mu_3 + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2)R_3 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Просуммируем уравнения системы (6), выполним предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$ и, учитывая (7), (9), получим

$$\begin{aligned} & (-\gamma_1x_1R_0 + (\lambda + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)R_1 - \gamma_1x_1(R_2 + R_3))w_1 + \\ & + (-\gamma_2x_2R_0 + (\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_3x_3)R_2 - \gamma_2x_2(R_1 + R_3))w_2 + \\ & + (-\gamma_3x_3R_0 + (\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2)R_3 - \gamma_3x_3(R_1 + R_2))w_3 = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $w_m, m = \overline{1, 3}$, к нулю, получим систему

$$\begin{aligned} & -\gamma_1x_1R_0 + (\lambda + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)R_1 - \gamma_1x_1(R_2 + R_3) = 0, \\ & -\gamma_2x_2R_0 + (\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_3x_3)R_2 - \gamma_2x_2(R_1 + R_3) = 0, \\ & -\gamma_3x_3R_0 + (\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2)R_3 - \gamma_3x_3(R_1 + R_2) = 0, \end{aligned}$$

объединяя которую с системой (9) и используя условие нормировки $\sum_{k=0}^3 R_k = 1$, получаем формулы (4) и (5). \square

Таким образом, при малых значениях σ среднее число заявок на орбите приближенно равно $(x_1 + x_2 + x_3)/\sigma$.

3.2. Асимптотика второго порядка. Построим гауссовскую аппроксимацию числа заявок на орбите.

Пусть

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

— матрица ковариаций.

С учетом того, что $K_{12} = K_{21}, K_{13} = K_{31}, K_{23} = K_{32}$, запишем вектор \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} = [K_{11} \quad K_{12} \quad K_{13} \quad K_{22} \quad K_{23} \quad K_{33}].$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ — число заявок в зонах орбиты системы массового обслуживания с повторами, вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием. Тогда выполняется предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} M \left[\exp \left\{ \sum_{\nu=1}^3 ju_{\nu} \sqrt{\sigma} \left\{ i_{\nu}(t) - \frac{x_{\nu}}{\sigma} \right\} \right\} \right] = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\kappa=1}^3 ju_{\kappa} ju_{\nu} K_{\kappa\nu} \right\},$$

где x_ν , $\nu = \overline{1, 3}$, имеют вид (4), а элементы матрицы ковариаций $K_{\kappa\nu}$, $\nu = \overline{1, 3}$, $\kappa = \overline{1, 3}$, находятся из матричного уравнения

$$\mathbf{kA} = \mathbf{C},$$

в котором элементы матрицы $A_{\kappa\nu}$, $\nu = \overline{1, 6}$, $\kappa = \overline{1, 6}$, имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\gamma_1(R_0z_0 + R_2z_2 + R_3z_3) + \gamma_1(1 - R_1)(1 + z_1), \\ A_{21} &= \gamma_2R_1 + \gamma_2z_2(1 - R_2) - \gamma_2(R_0z_0 + R_1z_1 + R_3z_3), \\ A_{31} &= \gamma_3z_3(1 - R_3) - \gamma_3(R_0z_0 + R_1z_1 + R_2z_2) - \gamma_3R_1, \\ A_{22} &= \gamma_1R_2 + \gamma_1a_1(1 - R_1) - \gamma_1(R_0a_0 + R_2a_2 + R_3a_3), \\ A_{42} &= -\gamma_2(R_0a_0 + R_1a_1 + R_3a_3) + \gamma_2(1 - R_2)(1 + a_2), \\ A_{52} &= \gamma_3a_3(1 - R_3) - \gamma_3(R_0a_0 + R_1a_1 + R_2a_2) - \gamma_3R_2, \\ A_{33} &= \gamma_1s_1(1 - R_1) - \gamma_1(R_0s_0 + R_2s_2 + R_3s_3) - \gamma_1R_3, \\ A_{53} &= \gamma_2R_3 + \gamma_2s_2(1 - R_2) - \gamma_2(R_0s_0 + R_1s_1 + R_3s_3), \\ A_{63} &= -\gamma_3(R_0s_0 + R_1s_1 + R_2s_2) + \gamma_3(1 - R_3)(1 + s_3), \\ A_{14} &= \gamma_1a_1(1 - R_1) - \gamma_1(R_0a_0 + R_2a_2 + R_3a_3) - \gamma_1R_2, \\ A_{24} &= -\gamma_1(R_0z_0 + R_2z_2 + R_3z_3) + \gamma_1(1 - R_1)(1 + z_1) - \\ &\quad - \gamma_2(R_0a_0 + R_1a_1 + R_3a_3) + \gamma_2(1 - R_2)(1 + a_2), \\ A_{34} &= \gamma_3a_3(1 - R_3) - \gamma_3(R_0a_0 + R_1a_1 + R_2a_2) - \gamma_3R_2, \\ A_{44} &= \gamma_2z_2(1 - R_2) - \gamma_2(R_0z_0 + R_1z_1 + R_3z_3) - \gamma_2R_1, \\ A_{54} &= \gamma_3z_3(1 - R_3) - \gamma_3(R_0z_0 + R_1z_1 + R_2z_2) - \gamma_3R_1, \\ A_{15} &= \gamma_1s_1(1 - R_1) - \gamma_1(R_0s_0 + R_2s_2 + R_3s_3) - \gamma_1R_3, \\ A_{25} &= \gamma_2s_2(1 - R_2) - \gamma_2(R_0s_0 + R_1s_1 + R_3s_3) - \gamma_2R_3, \\ A_{35} &= -\gamma_1(R_0z_0 + R_2z_2 + R_3z_3) + \gamma_1(1 - R_1)(1 + z_1) - \\ &\quad - \gamma_3(R_0s_0 + R_1s_1 + R_2s_2) + \gamma_3(1 - R_3)(1 + s_3), \\ A_{55} &= \gamma_2z_2(1 - R_2) - \gamma_2(R_0z_0 + R_1z_1 + R_3z_3) - \gamma_2R_1, \\ A_{65} &= \gamma_3z_3(1 - R_3) - \gamma_3(R_0z_0 + R_1z_1 + R_2z_2) - \gamma_3R_1, \\ A_{26} &= \gamma_1s_1(1 - R_1) - \gamma_1(R_0s_0 + R_2s_2 + R_3s_3) - \gamma_1R_3, \\ A_{36} &= \gamma_1a_1(1 - R_1) - \gamma_1(R_0a_0 + R_2a_2 + R_3a_3) - \gamma_1R_2, \\ A_{46} &= \gamma_2s_2(1 - R_2) - \gamma_2(R_0s_0 + R_1s_1 + R_3s_3) - \gamma_2R_3, \\ A_{56} &= -\gamma_2(R_0a_0 + R_1a_1 + R_3a_3) + \gamma_2(1 - R_2)(1 + a_2) - \\ &\quad - \gamma_3(R_0s_0 + R_1s_1 + R_2s_2) + \gamma_3(1 - R_3)(1 + s_3), \\ A_{66} &= \gamma_3a_3(1 - R_3) - \gamma_3(R_0a_0 + R_1a_1 + R_2a_2) - \gamma_3R_2, \\ A_{13} &= 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{43} = 0, \quad A_{41} = 0, \quad A_{51} = 0, \\ A_{61} &= 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{62} = 0, \quad A_{64} = 0, \quad A_{45} = 0, \quad A_{16} = 0, \end{aligned}$$

а элементы вектора \mathbf{C} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\gamma_1x_1}{2}(1 - R_1) + (\lambda + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)\frac{R_1}{2} - \\ &\quad - \lambda R_1z_1 + \gamma_1x_1z_1(1 - R_1) - \gamma_2x_2z_2R_1 - \gamma_3x_3z_3R_1, \\ C_2 &= \frac{\gamma_2x_2}{2}(1 - R_2) + (\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_3x_3)\frac{R_2}{2} - \\ &\quad - \lambda R_2a_1 + \gamma_2x_2a_2(1 - R_2) - \gamma_1x_1a_1R_2 - \gamma_3x_3a_3R_2, \\ C_3 &= \frac{\gamma_3x_3}{2}(1 - R_3) + (\lambda + \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2)\frac{R_3}{2} - \\ &\quad - \lambda R_3s_1 + \gamma_3x_3s_3(1 - R_3) - \gamma_1x_1s_1R_3 - \gamma_2x_2s_2R_3, \\ C_4 &= -\gamma_1x_1R_2 - \gamma_2x_2R_1 - \lambda R_1a_1 + \gamma_1x_1a_1(1 - R_1) - \gamma_2x_2R_1a_2 - \\ &\quad - \gamma_3x_3R_1a_3 - \lambda R_2z_1 - \gamma_1x_1R_2z_1 + \gamma_2x_2z_2(1 - R_2) - \gamma_3x_3R_2z_3, \end{aligned}$$

$$C_5 = -\gamma_1 x_1 R_3 - \gamma_3 x_3 R_1 - \lambda R_1 s_1 + \gamma_1 x_1 s_1 (1 - R_1) - \gamma_2 x_2 R_1 s_2 - \\ - \gamma_3 x_3 R_1 s_3 - \lambda R_3 z_1 - \gamma_1 x_1 R_3 z_1 + \gamma_3 x_3 z_3 (1 - R_3) - \gamma_2 x_2 R_3 z_2,$$

$$C_6 = -\gamma_2 x_2 R_3 - \gamma_3 x_3 R_2 - \lambda R_2 s_1 + \gamma_2 x_2 s_2 (1 - R_2) - \gamma_1 x_1 R_2 s_1 - \\ - \gamma_3 x_3 R_2 s_3 - \lambda R_3 a_1 - \gamma_1 x_1 R_3 a_1 + \gamma_3 x_3 a_3 (1 - R_3) - \gamma_2 x_2 R_3 a_2.$$

Величины $z_k, a_k, s_k, k = \overline{0, 3}$, находятся из следующих систем уравнений:
 – система для нахождения значений z_k :

$$-(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) z_0 + (\lambda + \gamma_1 x_1) z_1 + \gamma_2 x_2 z_2 + \gamma_3 x_3 z_3 = -\gamma_1 x_1, \\ -(\mu_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) z_1 + (\mu_1 + \gamma_2 x_2) z_2 + \gamma_3 x_3 z_3 = \lambda + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3, \\ (\lambda + \gamma_1 x_1) z_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3) z_2 + (\mu_2 + \gamma_3 x_3) z_3 = -\gamma_1 x_1, \\ \mu_3 z_0 + (\lambda + \gamma_1 x_1) z_1 + \gamma_2 x_2 z_2 - (\lambda + \mu_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) z_3 = -\gamma_1 x_1;$$

– система для нахождения значений a_k :

$$-(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) a_0 + (\lambda + \gamma_1 x_1) a_1 + \gamma_2 x_2 a_2 + \gamma_3 x_3 a_3 = -\gamma_2 x_2, \\ -(\mu_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) a_1 + (\mu_1 + \gamma_2 x_2) a_2 + \gamma_3 x_3 a_3 = -\gamma_2 x_2, \\ (\lambda + \gamma_1 x_1) a_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3) a_2 + (\mu_2 + \gamma_3 x_3) a_3 = \lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3, \\ \mu_3 a_0 + (\lambda + \gamma_1 x_1) a_1 + \gamma_2 x_2 a_2 - (\lambda + \mu_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) a_3 = -\gamma_2 x_2;$$

– система для нахождения значений s_k :

$$-(\lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) s_0 + (\lambda + \gamma_1 x_1) s_1 + \gamma_2 x_2 s_2 + \gamma_3 x_3 s_3 = -\gamma_3 x_3, \\ -(\mu_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3) s_1 + (\mu_1 + \gamma_2 x_2) s_2 + \gamma_3 x_3 s_3 = -\gamma_3 x_3, \\ (\lambda + \gamma_1 x_1) s_1 - (\lambda + \mu_2 + \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3) s_2 + (\mu_2 + \gamma_3 x_3) s_3 = -\gamma_3 x_3, \\ \mu_3 s_0 + (\lambda + \gamma_1 x_1) s_1 + \gamma_2 x_2 s_2 - (\lambda + \mu_3 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2) s_3 = \lambda + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2.$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 11 из [18].

Таким образом, асимптотическая характеристическая функция числа заявок на орбите в исследуемой RQ-системе является гауссовской:

$$h(u_1, u_2, u_3) = \exp \left\{ \sum_{\nu=1}^3 j u_{\nu} x_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^3 \sum_{\kappa=1}^3 u_{\kappa} u_{\nu} K_{\kappa\nu} \right\}.$$

4. Численная реализация. Используя формулы, полученные выше для нахождения параметров гауссовского распределения, построим аппроксимацию распределения вероятности суммарного числа заявок на орбите.

Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Из полученных параметров для трехмерного распределения вероятностей числа заявок на орбите перейдем к одномерному нормальному распределению с параметрами

$$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{\sigma}, \quad d = \frac{K_{11} + K_{22} + K_{33} + 2K_{12} + 2K_{13} + 2K_{23}}{\sigma}.$$

Положим значения параметров системы следующими:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 2, \quad \sigma = 0.01, \quad \mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 3, \quad \mu_3 = 4, \quad \lambda = 0.5.$$

Отсюда

$$R_0 = 0.458, \quad R_1 = 0.25, \quad R_2 = 0.167, \quad R_3 = 0.125;$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.136, & x_2 &= 0.091, & x_3 &= 0.068; \\
 K_{11} &= 0.167, & K_{12} &= 0.035, & K_{13} &= 0.027, \\
 K_{22} &= 0.1, & K_{23} &= 0.017, & K_{33} &= 0.077.
 \end{aligned}$$

Тогда $a = 29.5$ — математическое ожидание, $d = 50.2$ — дисперсия.

На рис. 2 представлена аппроксимация распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите, полученная из гауссовского распределения с параметрами a , \sqrt{d} .

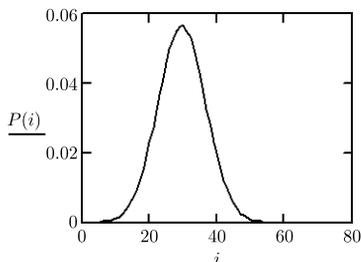


Рис. 2. Гауссовская аппроксимация распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок на орбите

[Figure 2. Gaussian approximation of the probability distribution $P(i)$ of the number of customers in the orbit]

Заключение. В работе исследована RQ-система с вытеснением заявок и трехфазным пофазовым дообслуживанием. Для нее получено стационарное распределение вероятностей состояний прибора. Показано, что характеристическую функцию числа заявок на орбите можно аппроксимировать нормальным распределением. Найдены параметры этого распределения.

Вызывает интерес задача более общего плана, то есть система с повторами и дообслуживанием с произвольным распределением времени обслуживания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277 а).

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queue // *Queueing Syst.*, 1987. pp. 201–233. doi: 10.1007/BF01158899.
2. Falin G. I. A survey of retrial queues // *Queueing Syst.*, 1990. vol. 7. pp. 127–168. doi: 10.1007/BF01158472.
3. Falin G. I., Templeton J.G.C. *Retrial Queues*. London: Chapman and Hall, 1997. 338 pp.
4. Artalejo J. R., Choudhury G. Steady state analysis of an M/G/1 queue with repeated attempts and two-phase service // *Quality Technology and Quantitative Management*, 2004. vol. 1, no. 2. pp. 189–199. doi: 10.1080/16843703.2004.11673072.
5. Choudhury G., Deka K. An M/G/1 retrial queueing system with two phases of service subject to the server breakdown and repair // *Performance Evaluation*, 2008. vol. 65, no. 10. pp. 714–724. doi: 10.1016/j.peva.2008.04.004.
6. Ke J. C., Choudhury G. A batch arrival retrial queue with general retrial times under Bernoulli vacation schedule for unreliable server and delaying repair // *Appl. Math. Model.*, 2012. vol. 36, no. 1. pp. 255–269. doi: 10.1016/j.apm.2011.05.047.

7. Kumar K., Vijayakumar A., Arivudainambi D. An M/G/1 retrial queueing system with two-phase service and preemptive resume // *Ann. Oper. Res.*, 2002. vol.113. pp. 61–79. doi: 10.1023/A:1020901710087.
8. Kuki A., Wang J., Wang F., Sztrik J. Finite source retrial queues with two phase service // *Int. J. Oper. Res.*, 2017. vol.30, no.4. pp. 421–440. doi: 10.1504/IJOR.2017.10008470.
9. Zhou Z. Analysis of M1, M2/M1, M2/N retrial queue system with non-preemptive priority / *2018 IEEE 9th International Conference on Software Engineering and Service Science (ICSESS)*. Beijing, China, 2018. pp. 301–304. doi: 10.1109/icsess.2018.8663929.
10. Korenevskaya M., Zayats O., Ilyashenko A., Muliukha V. Retrial queueing system with randomized push-out mechanism and non-preemptive priority // *Procedia Computer Science*, 2019. vol.150. pp. 716–725. doi: 10.1016/j.procs.2019.02.016.
11. Senthil Kumar M., Chakravarthy S. R., Arumuganathan R. Preemptive resume priority retrial queue with two classes of MAP arrivals // *Appl. Math. Sci.*, 2013. vol.7. pp. 2569–2589. doi: 10.12988/ams.2013.13231.
12. Lan S., Tang Y. Performance analysis of a discrete-time Geo/G/1 retrial queue with non-preemptive priority, working vacations and vacation interruption // *J. Ind. Manag. Optim.*, 2019. vol.15, no.3. pp. 1421–1446. doi: 10.3934/jimo.2018102.
13. Devos A., Walraevens J., Bruneel H. A priority retrial queue with constant retrial policy / *Y. Takahashi, T. Phung-Duc, S. Wittetrongel, W. Yue (eds.), Queueing Theory and Network Applications. QTNA 2018/ Lecture Notes in Computer Science*, 10932. Cham: Springer, 2018. pp. 3–21. doi: 10.1007/978-3-319-93736-6_1.
14. Gao S. A preemptive priority retrial queue with two classes of customers and general retrial times // *Oper. Res. Int. J.*, 2015. vol.15. pp. 233–251. doi: 10.1007/s12351-015-0175-z.
15. Назаров А. А., Измайлова Я. Е. Исследование RQ-системы M|E2|1 с вытеснением заявок и сохранением фазовой реализации обслуживания // *Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика*, 2018. №42. С. 72–78. doi: 10.17223/19988605/42/8.
16. Назаров А. А., Измайлова Я. Е. Исследование RQ-системы $M^{(2)}|B(x)^{(2)}|1$ с R -настойчивым вытеснением альтернативных заявок // *Вестник СибГАУ*, 2016. Т.17, №2. С. 328–334.
17. Назаров А. А., Черникова Я. Е. Исследование RQ-системы M|GI|1 с вытеснением в условии большой задержки // *Известия Томского политехнического университета*, 2013. Т.323, №5. С. 16–20.
18. Измайлова Я. Е. *Исследование математических моделей RQ-систем с вытеснением заявок*. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2017. 148 с.

MSC: 60K20, 41A60

Research of a retrial queueing system with exclusion of customers and three-phase phased by follow-up

A. A. Nazarov, Ya. E. Izmailova

National Research Tomsk State University,
Institute of Applied Mathematics and Computer Sciences,
36, Lenin ave., Tomsk, 634050, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider a retrial queueing system (RQ-system) which receives to the input a Poisson flow with a given intensity. If at the time of customer the server is busy, the displacement of customer standing on the server takes place. Customers that do not have time to be successfully serviced go into orbit, in order to, after an accidental exponential delay, again turn to the server for maintenance. It is shown that the limiting characteristic function of the number of customers in the orbit and the states of the server converges to a three-dimensional Gaussian distribution. The mean vector and covariance matrix are obtained for this distribution. A stationary probability distribution of the server states is also found.

Keywords: retrial queueing system, exclusion of customers, three-phase service, follow-up customers, Gaussian approximation, asymptotic analysis.

Received: 18th November, 2019 / Revised: 26th May, 2020 /

Accepted: 1st June, 2020 / First online: 3rd June, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00277 a).

Research Article

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Nazarov A. A., Izmailova Ya. E. Research of a retrial queueing system with exclusion of customers and three-phase phased by follow-up, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 331–342. doi: 10.14498/vsgtu1756 (In Russian).

Authors' Details:

Anatolii A. Nazarov  <https://orcid.org/0000-0002-5097-5629>

Dr. Tech. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistic; e-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Yana E. Izmailova  <https://orcid.org/0000-0002-9132-0127>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistic; e-mail: evgenevna.92@mail.ru

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewer for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Yang T., Templeton J.G.C. A survey on retrial queue, *Queueing Syst.*, 1987, pp. 201–233. doi: 10.1007/BF01158899.
2. Falin G. I. A survey of retrial queues, *Queueing Syst.*, 1990, vol. 7, pp. 127–168. doi: 10.1007/BF01158472.
3. Falin G. I., Templeton J.G.C. *Retrial Queues*. London, Chapman and Hall, 1997, 338 pp.
4. Artalejo J. R., Choudhury G. Steady state analysis of an M/G/1 queue with repeated attempts and two-phase service, *Quality Technology and Quantitative Management*, 2004, vol. 1, no. 2, pp. 189–199. doi: 10.1080/16843703.2004.11673072.
5. Choudhury G., Deka K. An M/G/1 retrial queueing system with two phases of service subject to the server breakdown and repair, *Performance Evaluation*, 2008, vol. 65, no. 10, pp. 714–724. doi: 10.1016/j.peva.2008.04.004.
6. Ke J. C., Choudhury G. A batch arrival retrial queue with general retrial times under Bernoulli vacation schedule for unreliable server and delaying repair, *Appl. Math. Model.*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 255–269. doi: 10.1016/j.apm.2011.05.047.
7. Kumar K., Vijayakumar A., Arivudainambi D. An M/G/1 retrial queueing system with two-phase service and preemptive resume, *Ann. Oper. Res.*, 2002, vol. 113, pp. 61–79. doi: 10.1023/A:1020901710087.
8. Kuki A., Wang J., Wang F., Sztrik J. Finite source retrial queues with two phase service, *Int. J. Oper. Res.*, 2017, vol. 30, no. 4, pp. 421–440. doi: 10.1504/IJOR.2017.10008470.
9. Zhou Z. Analysis of M1, M2/M1, M2/N retrial queue system with non-preemptive priority, In: *2018 IEEE 9th International Conference on Software Engineering and Service Science (ICSESS)*. Beijing, China, 2018, pp. 301–304. doi: 10.1109/icseess.2018.8663929.
10. Korenevskaya M., Zayats O., Ilyashenko A., Muliukha V. Retrial queueing system with randomized push-out mechanism and non-preemptive priority, *Procedia Computer Science*, 2019, vol. 150, pp. 716–725. doi: 10.1016/j.procs.2019.02.016.
11. Senthil Kumar M., Chakravarthy S. R., Arumuganathan R. Preemptive resume priority retrial queue with two classes of MAP arrivals, *Appl. Math. Sci.*, 2013, vol. 7, pp. 2569–2589. doi: 10.12988/ams.2013.13231.
12. Lan S., Tang Y. Performance analysis of a discrete-time Geo/G/1 retrial queue with non-preemptive priority, working vacations and vacation interruption, *J. Ind. Manag. Optim.*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 1421–1446. doi: 10.3934/jimo.2018102.
13. Devos A., Walraevens J., Bruneel H. A priority retrial queue with constant retrial policy, In: *Y. Takahashi, T. Phung-Duc, S. Wittevrongel, W. Yue (eds.), Queueing Theory and Network Applications. QTNA 2018*, Lecture Notes in Computer Science, 10932. Cham, Springer, 2018, pp. 3–21. doi: 10.1007/978-3-319-93736-6_1.
14. Gao S. A preemptive priority retrial queue with two classes of customers and general retrial times, *Oper. Res. Int. J.*, 2015, vol. 15, pp. 233–251. doi: 10.1007/s12351-015-0175-z.
15. Nazarov A. A., Izmailova Ya. E. Research of RQ-system M|E2|1 with request displacement and conserving phase realization of servicin, *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2018, no. 42, pp. 72–78 (In Russian). doi: 10.17223/19988605/42/8.
16. Nazarov A. A., Izmailova Ya. E. Research of the retrial queueing system $M^{(2)}|B(x)^{(2)}|1$ with R -persistent exclusion of alternative customers, *Vestnik of the Siberian State Aerospace University*, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 328–334 (In Russian).
17. Nazarov A. A., Chernikova Ya. E. Research of retrial queueing system M|GI|1 with the exclusion customers in the condition of long delays, *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2013, vol. 323, no. 5, pp. 16–20 (In Russian).
18. Izmailova Ya. E. *Research of mathematical models of RQ-systems with displacement of customers*, Cand. Phys.-Math. Sci. Diss. Tomsk, 2017, 148 pp. (In Russian)



УДК 519.248:[33+301]

Математические модели стохастической динамики развития предприятий

А. Л. Сараев, Л. А. Сараев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Предложены математические модели стохастической динамики развития однофакторных производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций. Сформулированы уравнения баланса для таких предприятий, описывающие случайные процессы непрерывного увеличения выпуска продукции и роста факторов производства. Исследовано взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями. Получены уравнения для определения равновесного состояния работы предприятия и вычислены предельные значения факторов производства. Рассмотрены случаи стабильного поступательного развития предприятия, приостановки его работы во время переоснащения производства и временного кризисного сворачивания производства при замене оборудования.

Алгоритм численного решения стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий построен в соответствии с методом Эйлера–Маруямы. Для каждой реализации этого алгоритма строятся соответствующие стохастические траектории для случайной функции фактора производства. Разработан вариант метода расчета математического ожидания случайной функции фактора производства и получено для него соответствующее дифференциальное уравнение. Показано, что численное решение этого уравнения и среднее значение функции фактора производства вычисленное по двумстам реализациям стохастических траекторий, дают практически одинаковые результаты. Численный анализ разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным работы производственного предприятия.

Научная статья

📄 © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. doi: 10.14498/vsgtu1700.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Сараев ✉ ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-9223-6330>
кандидат экономических наук; доцент; каф. математики и бизнес-информатики;
e-mail: alex.saraev@gmail.com

Леонид Александрович Сараев ⓘ <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математики
и бизнес-информатики; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Ключевые слова: факторы производства, производственная функция, стохастические уравнения, винеровский процесс, коэффициент сноса, коэффициент волатильности, метод Эйлера–Маруямы.

Получение: 7 мая 2019 г. / Исправление: 27 февраля 2020 г. /

Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 3 мая 2020 г.

Введение. Развитие математических методов расчета и моделирование показателей стохастической динамики экономического развития производственных предприятий является одной из актуальных проблем современной экономической теории, успешное решение которой позволяет адекватно выполнять экономический анализ деятельности предприятий, вычислять их предельные производительности ресурсов, прогнозировать выпуск продукции, прибыль и затраты, оценивать эффекты замещения производственных факторов и т.д.

Применение методов теории случайных функций для построения математических моделей динамики экономических показателей предприятия позволяет учесть стохастический характер формирования производственных факторов и волатильность выпуска продукции. Кроме того, подобное стохастическое моделирование помогает учесть особенности нестабильной работы реальных предприятий и существенно обогатить и уточнить имеющиеся аналогичные детерминистские модели.

Для построения недетерминированных моделей экономического развития предприятий широко применяются стохастические дифференциальные уравнения, содержащие члены, представляющие собой стандартные винеровские процессы, отражающие случайные внешние воздействия.

Очевидно, что построение уравнений балансов для процессов роста факторов производства и выпуска продукции производственных предприятий, учитывающих внешние случайные возмущающие факторы, будет приводить к существенным отклонениям от аналогичных детерминированных моделей развития предприятия [1–7].

Основные положения теории стохастических дифференциальных уравнений и методы их исследования подробно изложены в работах [8–12].

Следует отметить, что на практике для исследования стохастических моделей помимо их качественного анализа применяются численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений, с помощью которых можно рассчитывать реализации случайных процессов, устанавливать дифференциальные уравнения для математических ожиданий рассматриваемых величин и в некоторых случаях получать точные решения [13–21].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей стохастической динамики развития производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций.

Особенность этих моделей и их научная новизна заключаются в том, что они учитывают взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями и позволяют найти предельные значения факторов производства.

Рассмотрены случаи стабильного поступательного развития предприятия, приостановки его работы во время переоснащения производства и временного кризисного сворачивания производства при замене оборудования.

1. Математическая модель развития предприятия за счет внутренних инвестиций. Рассмотрим некоторое производственное предприятие, выпуск готовой продукции которого обеспечивается одним ресурсом в виде некоторого объема фактора производства Q . Этот объем может составлять основной капитал, производственные фонды, привлекаемые трудовые ресурсы, используемые материалы, применяемые технологии, различного рода инновации и т.д.

Выпуск продукции предприятия описывается однофакторной производственной функцией Кобба—Дугласа

$$V = PQ^a. \quad (1)$$

Здесь показатель степени a представляет собой эластичность выпуска продукции, $0 < a < 1$; P — стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса.

Величина объема фактора производства $Q = Q(t)$ предполагается непрерывной и непрерывно дифференцируемой на числовой полуоси ($0 \leq t < \infty$) функцией непрерывного аргумента времени t . Единицей измерения времени служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год).

Начальное значение фактора производства $Q_0 = Q(0)$ считается известным, его предельное значение $Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t)$ подлежит вычислению.

Для наблюдения за динамикой развития предприятия следует составить уравнение баланса для объема фактора производства $Q = Q(t)$.

Приращение объема фактора производства $\Delta Q = Q(t + \Delta t) - Q(t)$ за некоторый промежуток времени Δt может быть представлено в виде суммы трех слагаемых:

$$\Delta Q = \Delta Q^A + \Delta Q^I + \Delta Q^W. \quad (2)$$

Здесь ΔQ^A — приращение амортизации фактора производства, ΔQ^I — приращение частичного восстановления фактора производства за счет внутренних инвестиций, ΔQ^W — случайные колебания приращения объема фактора производства, обусловленные определенной волатильностью процесса выпуска продукции.

Приращение амортизации ΔQ^A за промежуток времени Δt можно представить в виде

$$\Delta Q^A(t) = -A \theta(t) Q^u(t) \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Здесь A — коэффициент амортизации, доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства, u — показатель интенсивности амортизации. При $u = 1$ имеет место обычная пропорциональная амортизация, при $u > 1$ амортизационные отчисления увеличиваются и становятся прогрессивными, при $u < 1$, наоборот, амортизационные отчисления снижаются и становятся дигрессивными.

Приращение восстановления фактора производства ΔQ^I за счет внутренних инвестиций за промежуток времени Δt определяется формулой

$$\Delta Q^I(t) = \theta(t) I(t) \cdot \Delta t. \quad (4)$$

Здесь $I(t)$ — внутренние инвестиции, сделанные в момент времени t . Они связаны с объемом выпуска продукции $V(t)$:

$$I(t) = B V(t), \quad (5)$$

где B — норма накопления внутренних инвестиций.

Подстановка (1) и (5) в формулу (4) окончательно дает

$$\Delta Q^I(t) = B P \theta(t) Q^a(t) \cdot \Delta t. \quad (6)$$

Случайные изменения приращения объема фактора производства $\Delta Q^W(t)$, обусловленные волатильностью процесса выпуска продукции, могут быть представлены в виде стохастического стандартного винеровского процесса:

$$\Delta Q^W(t) = \rho \theta(t) (Q(t) - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta w. \quad (7)$$

Здесь w — стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon(t)\sqrt{\Delta t}$, ρ — волатильность фактора производства $Q(t)$, при каждом t функция $\varepsilon(t) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$.

Структура формулы (7) показывает, что в начале процесса развития предприятия в окрестности точки Q_0 и в его финале в окрестности точки Q_∞ случайный процесс становится почти детерминированным.

Подстановка (3), (6) и (7) в формулу (2) приводит к соотношению баланса

$$\begin{aligned} \Delta Q(t) = \theta(t) (-A Q^u(t) + B P Q^a(t)) \cdot \Delta t + \\ + \rho \theta(t) (Q - Q_0) \left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta w. \end{aligned} \quad (8)$$

Предельный переход в уравнении (8) при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta w \rightarrow 0$ приводит к стохастическому дифференциальному уравнению диффузии Ито [22]:

$$dQ = \theta(t) S(Q, t) dt + \theta(t) Z(Q, t) dw. \quad (9)$$

Здесь

$$S(Q) = -A Q^u + B P Q^a \quad (10)$$

— коэффициент сноса уравнения (9),

$$Z(Q) = \rho (Q - Q_0) \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \quad (11)$$

— коэффициент волатильности уравнения (9).

Начальное условие для уравнения (9) с коэффициентами (10) и (11) имеет вид

$$Q(0) = Q_0. \quad (12)$$

Структура уравнения баланса (9) показывает, что предприятие будет успешно развиваться до тех пор, пока объем внутренних инвестиций $I_Q = B P Q^a$ будет превосходить амортизационные отчисления $A_Q = A Q^u$. Поскольку вблизи точки Q_∞ случайный процесс становится практически детерминированным, предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ находится из уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a = 0 \quad (13)$$

и равно

$$Q_\infty = \left(\frac{A}{B P} \right)^{1/(a-u)}. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что $a \neq u$, поскольку показатель интенсивности амортизации u незначительно отклоняется от единицы, соответствующей пропорциональной амортизации, а эластичность a всегда меньше единицы.

Функция $\theta = \theta(t)$ описывает варианты развития рассматриваемого предприятия. Для постоянной и единичной скорости $\theta(t) \equiv 1$ развитие предприятия будет стабильным. Различные размеры отклонения значения функции $\theta(t)$ от единицы в сторону уменьшения будут соответствовать замедлению процесса развития предприятия, его временной остановке во время смены технологий производства, частичному сворачиванию производства.

Формы интегральных кривых уравнения (9) существенно зависят от вида функции $\theta(t)$, определяющей центр временного интервала, его протяженность и величину отклонения от единичного значения, при котором предприятие работает стабильно. Если в некоторой временной окрестности с центром $t = t^*$ на предприятии производится полная или частичная замена технологического оборудования, то функция $\theta(t)$ будет иметь вид [23]

$$\theta(t) = 1 - \omega \exp\left(-\frac{(t - t^*)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (15)$$

Здесь ω — максимальный размер отклонения функции от единицы, σ — радиус временного интервала, на котором происходит основное замедление производственного процесса. Если $\omega = 0$, то предприятие будет работать стабильно; если $\omega = 1$, то в момент времени $t = t^*$ рост функции $Q(t)$ прекращается и на интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ происходит переоснащение производства; если $\omega > 1$, то на интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ происходит переоснащение производства, сопровождаемое его некоторым сворачиванием.

Численное решение уравнения (9) с начальным условием (12) представляется в виде алгоритма, построенного в соответствии с методом Эйлера—Маруямы [24]:

$$Q_{s+1} = \theta(t_s) S(Q_s) \Delta t_s + \varepsilon_s \theta(t_s) Z(Q_s) \sqrt{\Delta t_s}. \quad (16)$$

Для каждой реализации алгоритма (16) на малом временном шаге $\Delta t_s > 0$ начиная с начального значения Q_0 генерируется случайное число ε_s и вычисляется последующее значение Q_{s+1} . В результате применения этого алгоритма образуются последовательности $\{t_s\}$ и $\{Q_s\}$, которые на координатной плоскости образуют случайную систему точек $\{t_s, Q_s\}$ и соответствующую

ей случайную траекторию. Очевидно, что всякий раз при повторении алгоритма (16) образуется новая случайная траектория, поскольку каждый раз случайная величина ε генерирует новые случайные значения.

При численной реализации алгоритма (16) временной промежуток $t \in [0, 40]$ был разбит на $n = 200$ одинаковых частей с постоянной величиной шага $\Delta t_s = \Delta t = 0.2$. Число реализаций случайного процесса динамики предприятия было принято $m = 200$.

Следует отметить, что в начальной точке $\{t = 0, Q = Q_0\}$ и в точках $\{t \approx 40, Q \approx Q_\infty\}$ стохастический процесс становится почти детерминированным, что является вполне ожидаемым и определяется видом функции коэффициента волатильности (11).

Вид этой функции $Z(Q)$ не позволяет найти точное решение для математического ожидания функции $Q(t)$ с помощью формулы Ито.

Статистическое осреднение стохастического уравнения (9)

$$d\langle Q \rangle = \theta(t) \langle S(Q) \rangle \cdot dt = \theta(t) \langle -A Q^u + B P Q^a \rangle \cdot dt \quad (17)$$

приводит к уравнению, содержащему статистические моменты:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta(t) \left(-A \langle Q^u \rangle + B P \langle Q^a \rangle \right). \quad (18)$$

Процесс последовательного вычисления статистических моментов вида $\langle Q^h(t) \rangle$ приводит к появлению моментов более высоких порядков, образующих бесконечную цепочку статистических уравнений, которую можно обобщить, сделав определенные допущения.

В качестве такого допущения предположим здесь, что флуктуации величины $Q(t)$ относительно ее среднего значения $\langle Q(t) \rangle$ пропорциональны случайной величине $\varepsilon(t)$:

$$Q - \langle Q \rangle = \xi \cdot \varepsilon. \quad (19)$$

Здесь $\xi = \rho \left(\langle Q \rangle - Q_0 \right) \left(1 - \frac{\langle Q \rangle}{Q_\infty} \right)$ — коэффициент пропорциональности.

Тогда выражение для величины Q^h , с учетом формулы (19) принимает вид

$$Q^h = \left(\langle Q \rangle + \xi \cdot \varepsilon \right)^h = \langle Q \rangle^h \left(1 + \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon \right)^h. \quad (20)$$

Ограничиваясь в формуле (20) малыми флуктуациями $\left| \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon \right| < 1$, рассмотрим три слагаемых сходящегося биномиального ряда:

$$Q^h = \langle Q \rangle^h \left(1 + h \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon + \frac{h(h-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \cdot \varepsilon^2 + \dots \right). \quad (21)$$

Вычисляя по формуле (21) средние величины

$$\langle Q^u \rangle \approx \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \quad \langle Q^a \rangle \approx \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right)$$

и подставляя их в уравнения (17), (18), находим дифференциальное уравнение для математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = -A\theta \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + BP\theta \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \quad (22)$$

Начальное условие для уравнения (22) записывается в виде

$$\langle Q(0) \rangle = Q_0. \quad (23)$$

Сравнение результатов численного решения задачи Коши (22), (23) с численными значениями статистического среднего, вычисленного по всем двумстам реализациям алгоритма (16), показывает их почти полное совпадение.

На рис. 1 представлены численные реализации решений алгоритма (16) в виде семейства стохастических траекторий и кривая математического ожидания, построенная в соответствии с численным решением задачи Коши (22), (23), для случая стабильной работы предприятия, при котором функция (15) тождественно равна единице ($\theta(t) \equiv 1$), а размер отклонения равен нулю ($\omega = 0$). Для наглядности на рис. 1 показаны только пять стохастических кривых из двухсот.

Значение величины $Q_\infty = 34.551$ вычислено по формуле (14) в соответствии с приведенными расчетными значениями параметров.

На рис. 2 представлены численные реализации решений алгоритма (16) в виде семейства стохастических траекторий и кривая математического ожидания, построенная в соответствии с численным решением задачи Коши (22), (23), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ с центром в точке $t^* = 15$ и радиусом интервала $\sigma = 5$. Размер отклонения функции (15) в этом случае принимается $\omega = 1$.

На рис. 3 представлены численные реализации решений алгоритма (16) в виде семейства стохастических траекторий и кривая математического ожидания, построенная в соответствии с численным решением задачи Коши (22), (23), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ с центром в точке $t^* = 15$ и радиусом интервала $\sigma = 5$, сопровождаемого частичным сворачиванием производства. Размер отклонения функции (15) в этом случае принимается $\omega = 1.5$.

В случае если волатильность ρ обращается в нуль и процесс становится детерминированным, полученные результаты совпадают с результатами работы [23].

Применим построенную стохастическую модель для расчета показателей развития ПАО «Челябинский трубопрокатный завод». Статистические данные по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 1 [25]. Здесь переменная времени t изменяется на отрезке $[0, 10]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2008 до 2017.

Производственная функция (1), аппроксимирующая данные табл. 1, принимает вид

$$V = 0.914 \cdot Q^{0.9843}. \quad (24)$$

На рис. 4 приведен график функции выпуска предприятия, построенный по формуле (24).

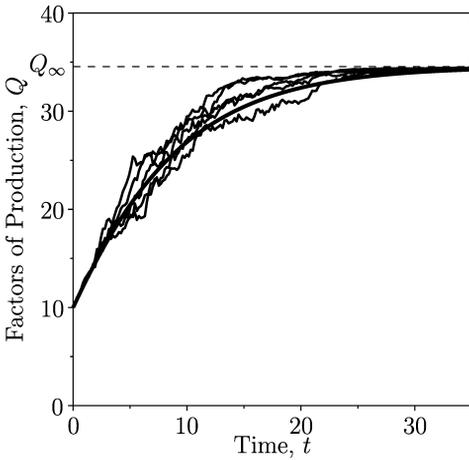


Рис. 1. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (22), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$

[Figure 1. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16) and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$]

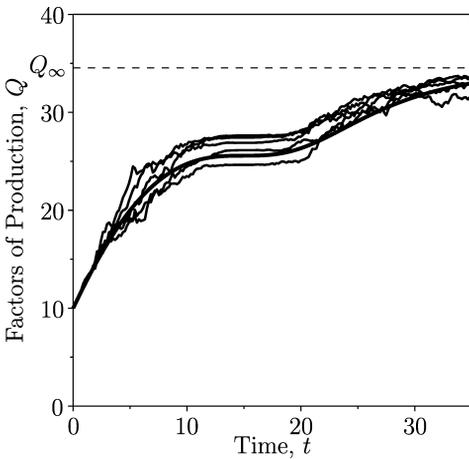


Рис. 2. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (22), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$

[Figure 2. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16) and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$]

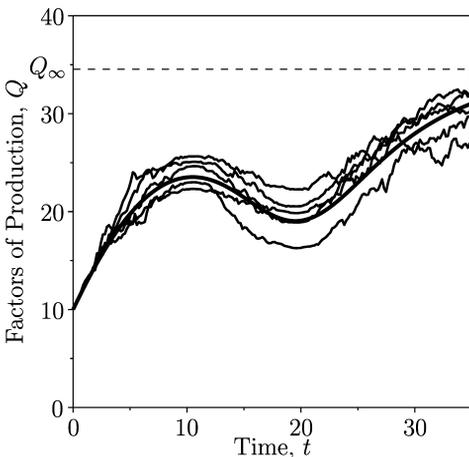


Рис. 3. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (22), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1.5$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$

[Figure 3. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16) and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 1.5$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$]

Таблица 1

Статистические данные по выпуску продукции ПАО «Челябинский трубопрокатный завод» [25] [Factors of Production and Total Production for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant [25]]

Years	Time, t	Factors of Production, Q (mln rubles)	Total Production, V (mln rubles)
2008	0	72.698296	63.721902
2009	1	77.103839	66.246199
2010	2	87.578960	72.564189
2011	3	92.435837	76.645429
2012	4	97.656699	84.048139
2013	5	100.399083	82.721179
2014	6	115.118761	97.184656
2015	7	123.270175	112.285286
2016	8	128.353653	109.806604
2017	9	142.265642	116.090570

На рис. 5 представлено сравнение графиков пяти стохастических кривых численной реализации случайного процесса, описываемого алгоритмом (16), и графика математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$, построенного в результате численного решения задачи Коши (22), (23) с расчетными коэффициентами, с соответствующими статистическими данными для ПАО «Челябинский трубопрокатный завод».

2. Математическая модель развития предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций. Обобщим теперь рассмотренные выше уравнения стохастической модели развития предприятия на тот случай, когда помимо внутренних инвестиций в структуру производства привлекаются внешние инвестиции.

Составим уравнения баланса для объема фактора производства $Q(t)$ такого предприятия. Очевидно, что приращение объема фактора производства $\Delta Q(t)$ за некоторый малый промежуток времени Δt будет образовано суммой четырех слагаемых:

$$\Delta Q = \Delta Q^A + \Delta Q^I + \Delta Q^G + \Delta Q^W. \quad (25)$$

Здесь приращение амортизации фактора производства ΔQ^A , приращение частичного восстановления фактора производства за счет внутренних инвестиций ΔQ^I , случайные колебания приращения объема фактора производства, обусловленные волатильностью процесса выпуска продукции ΔQ^W , по-прежнему задаются формулами (3), (6) и (7).

Приращение внешних инвестиций за промежуток времени определим соотношением

$$\Delta Q^G(t) = \theta(t) G(t) \cdot \Delta t. \quad (26)$$

Здесь $G(t)$ — объем внешних инвестиций.

Моделирование функции объема внешних инвестиций существенно зависит от условий инвестирования. Если уровень объема внешних инвестиций определяется уровнем объема производственного фактора, то функция $G(t)$ и функция фактора производства $Q(t)$ будут связаны между собой некоторым соотношением. Ограничимся здесь степенной зависимостью функций

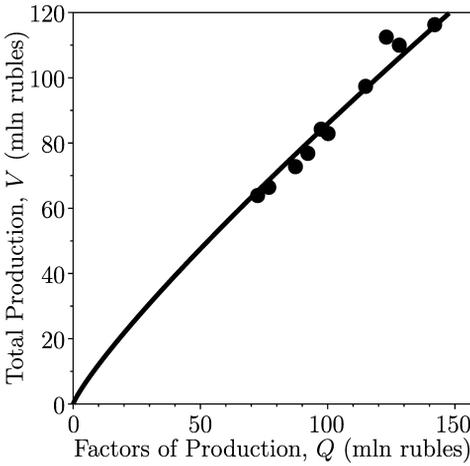


Рис. 4. График функции выпуска (24) и статистические данные для ПАО «Челябинский трубопрокатный завод». Расчетные значения: $P = 0.914$, $a = 0.9843$; точки соответствуют данным табл. 1

[Figure 4. The production function (24) and statistical data for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant. Calculated values: $P = 0.914$, $a = 0.9843$; the points correspond to the data in Table 1]

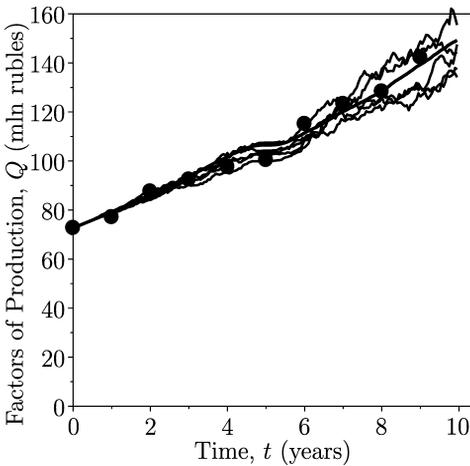


Рис. 5. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), статистические данные (точки) и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (22), (23) для ПАО «Челябинский трубопрокатный завод». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 72.698296$, $P = 0.914$, $a = 0.9843$, $A = 0.12$, $u = 0.94$, $B = 0.2$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 5$, $\sigma = 0.35$; точки соответствуют данным табл. 1

[Figure 5. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16), statistical data, and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (22), (23) for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant. Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 72.698296$, $P = 0.914$, $a = 0.9843$, $A = 0.12$, $u = 0.94$, $B = 0.2$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 5$, $\sigma = 0.35$; the points correspond to the data in Table 1]

$G(t)$ и $Q(t)$ [27]:

$$G(t) = C Q^v(t). \tag{27}$$

Константа C в формуле (27) представляет собой стоимость привлеченных внешних инвестиций на единичный объем ресурса $Q(t)$, а показатель степени v описывает интенсивность внедрения внешних инвестиций в предприятие ($0 < v \leq 1$).

Таким образом, приращение объема внешних инвестиций (27) примет вид

$$\Delta Q^G(t) = C \theta(t) Q^v(t) \cdot \Delta t. \tag{28}$$

С помощью соотношения (28) уравнение баланса (25) сводится к стохастическому дифференциальному уравнению (9), в котором коэффициент сноса

определяется выражением

$$S(Q) = -A Q^u + B P Q^a + C Q^v, \quad (29)$$

коэффициент волатильности по-прежнему определяется формулой (11), а начальное условие задается соотношением (12).

Структура уравнения (9) с коэффициентами (29) и (11) показывает, что предприятие будет стабильно развиваться до тех пор, пока объем внутренних и внешних инвестиций $I_Q = B P Q^a + C Q^v$ будет превосходить амортизационные отчисления $A_Q = A Q^u$.

Случайный процесс вблизи значения Q_∞ становится почти детерминированным, поэтому предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ является решением уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + C Q^v = 0. \quad (30)$$

Очевидно, что уравнение (30) в отличие от уравнения (13) может быть решено только численно. Численное решение уравнения (9) с коэффициентом сноса (29), коэффициентом волатильности (11) и начальным условием (12) выполняется методом Эйлера–Маруямы в соответствии с алгоритмом (16).

Статистическое осреднение стохастического уравнения (9) с коэффициентами (29) и (11) приводит к уравнению, содержащему статистические моменты $\langle Q^u(t) \rangle$, $\langle Q^a(t) \rangle$ и $\langle Q^v(t) \rangle$:

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta(t) (-A \langle Q^u \rangle + B P \langle Q^a \rangle + C \langle Q^v \rangle). \quad (31)$$

Вычисляя эти моменты по формуле (21), находим

$$\begin{aligned} \langle Q^u \rangle &\approx \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \\ \langle Q^a \rangle &\approx \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right), \\ \langle Q^v \rangle &\approx \langle Q \rangle^v \left(1 + \frac{v(v-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти статистические моменты в уравнение (31), находим дифференциальное уравнение для математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} &= -A \theta \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \\ &+ B P \theta \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \\ &+ C \theta \langle Q \rangle^v \left(1 + \frac{v(v-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \quad (32) \end{aligned}$$

Начальным условием для уравнения (32) по-прежнему является условие (23).

Если уровень объема внешних инвестиций никак не связан с уровнем объема производственного фактора, то функция $G(t)$ задается непосредственно исходя из наблюдаемых статистических данных.

В этом случае уравнение баланса (26) сводится к стохастическому дифференциальному уравнению (9), в котором коэффициент сноса определяется выражением

$$S(Q(t), t) = -A Q^u(t) + B P Q^a(t) + G(t), \quad (33)$$

коэффициент волатильности по-прежнему вычисляется по формуле (11), а начальное условие задается соотношением (12).

Из уравнения (9) с коэффициентами (33) и (11) следует, что предприятие будет развиваться до тех пор, пока объем внутренних и внешних инвестиций $I_Q = B P Q^a + G(t)$ будет превосходить амортизационные отчисления $A_Q = A Q^u$.

Вблизи значения Q_∞ развитие предприятия становится почти детерминированным, поэтому предельное значение Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ является решением уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + G_\infty = 0. \quad (34)$$

В уравнении (34) величина $G_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ представляет собой предельное значение внешних инвестиций.

Численное решение уравнения (9) с коэффициентом сноса (33), коэффициентом волатильности (11) и начальным условием (12) реализуется методом Эйлера–Маруамы в соответствии с алгоритмом (16).

Статистическое осреднение стохастического уравнения (9) с коэффициентами (33) и (11) приводит к уравнению

$$\frac{d\langle Q \rangle}{dt} = \theta(t) (-A \langle Q^u \rangle + B P \langle Q^a \rangle + G). \quad (35)$$

Подстановка статистических моментов $\langle Q(t)^u \rangle$ и $\langle Q(t)^a \rangle$ в уравнение (35) приводит к дифференциальному уравнению для математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = & -A \theta \langle Q \rangle^u \left(1 + \frac{u(u-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \\ & + B P \theta \langle Q \rangle^a \left(1 + \frac{a(a-1)}{2} \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) + \theta G. \end{aligned} \quad (36)$$

Начальным условием для уравнения (36) по-прежнему является условие (23).

Рассмотрим вариант развития предприятия, при котором наибольший размер внешних инвестиций вкладывается в производство в начальный момент времени, а затем уровень этих внешних инвестиций постепенно снижается до определенного предела.

Пусть снижение объема внешних инвестиций $\Delta G(t)$ за время Δt будет пропорционально отклонению функции $G(t)$ от минимального значения этих инвестиций G_{\min} :

$$\Delta G(t) = -\lambda(G(t) - G_{\min}) \cdot \Delta t.$$

Переход к пределу при условии $\Delta t \rightarrow 0$ приводит к дифференциальному уравнению для функции $G(t)$:

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\lambda(G(t) - G_{\min}),$$

решение которого с начальным условием $G(0) = G_{\max}$ дает объемы внешних вложений в предприятие в виде

$$G(t) = G_{\min} + (G_{\max} - G_{\min}) \exp(-\lambda t). \quad (37)$$

Здесь константа G_{\max} представляет собой максимальную стоимость привлеченных внешних инвестиций, λ — параметр, характеризующий скорость снижения объемов внешних инвестиций.

Если для всех значений аргумента t функция внешних инвестиций $G(t) = G_{\max}$, то предельное значение объема производственного фактора Q_{∞}^{\max} находится из уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + G_{\max} = 0. \quad (38)$$

Если для всех значений аргумента t функция внешних инвестиций $G(t) = G_{\min}$, то предельное значение объема производственного фактора Q_{∞}^{\min} находится из уравнения

$$I_Q - A_Q = -A Q^u + B P Q^a + G_{\min} = 0. \quad (39)$$

В уравнениях (38) и (39) предполагается, что $A \neq B P$. Такое предположение экономически вполне оправдано, поскольку норма накопления инвестиций и норма амортизации всегда близки друг другу и лежат в пределах $0.1 \div 0.2$.

На рис. 6 представлены численные реализации решений алгоритма (16) с коэффициентом сноса (33) в виде семейства стохастических траекторий и трех кривых для математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, полученных в результате численных решений задачи Коши (36), (23), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором функция $\theta(t) \equiv 1$, размер отклонения $\omega = 0$.

Верхняя кривая соответствует максимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\max}$, нижняя кривая соответствует минимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\min}$, средняя кривая соответствует убывающим инвестициям $G(t)$, вычисленным по формуле (37). Значения величин $Q_{\max}^{\infty} = 69.0189$ и $Q_{\min}^{\infty} = 38.3290$ являются численными решениями уравнений (38) и (39) соответственно.

Рассмотрим еще один вариант развития предприятия, при котором внешние инвестиции вкладываются в производство на небольшом временном интервале. При этом эти инвестиции сначала увеличиваются до своего максимального значения, а затем уменьшаются.

Пример таких объемов внешних вложений в предприятие можно описать формулой

$$G(t) = G_{\max} \exp\left(-\frac{(t - t_G)^2}{2\sigma_G^2}\right). \quad (40)$$

Здесь G_{\max} — максимальная стоимость привлеченных внешних инвестиций; t_G — момент времени, отвечающий максимальному значению внешних инвестиций; σ_G — радиус временного интервала значимого вложения внешних инвестиций.

На рис. 7 представлены численные реализации решений алгоритма (16) с коэффициентом сноса (33) в виде семейства пяти стохастических траекторий и трех кривых для математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, полученных в результате численных решений задачи Коши (36), (23), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором функция $\theta(t) \equiv 1$, размер отклонения $\omega = 0$.

Верхняя кривая соответствует максимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\max}$, нижняя кривая соответствует минимальным инвестициям $G(t) \equiv G_{\min} = 0$, средняя кривая соответствует убывающим инвестициям $G(t)$, вычисленным по формуле (37). Значения величин $Q_{\max}^{\infty} = 55.8837$ и $Q_{\min}^{\infty} = 34.5511$ являются численными решениями уравнений (38) и (39) соответственно.

Применим построенную модель для расчета показателей развития ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод». Статистические данные по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 2 [26].

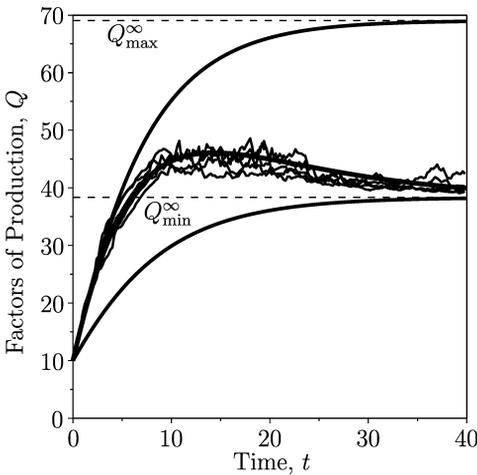


Рис. 6. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численной реализацией алгоритма (16), и кривые математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (32), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$

[Figure 6. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementation of the (16) algorithm and $\langle Q(t) \rangle$ mathematical expectation curves constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (32), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$]

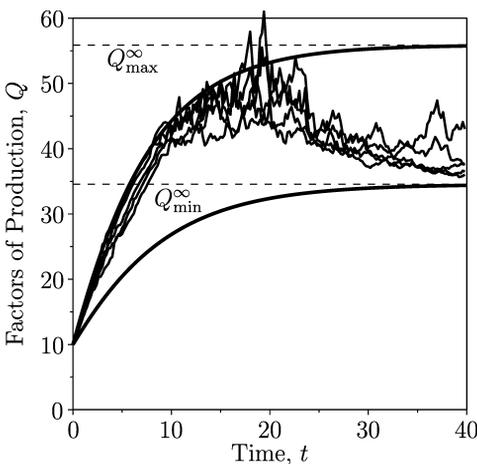


Рис. 7. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численной реализацией алгоритма (16), и кривые математических ожиданий $\langle Q(t) \rangle$, построенные по результатам численных решений задачи Коши (32), (23). Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$

[Figure 7. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementation of the (16) algorithm and $\langle Q(t) \rangle$ mathematical expectation curves constructed from the results of numerical solutions of the Cauchy problem (32), (23). Parameters for calculating: $n = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 10$, $a = 0.35$, $u = 1$, $A = 0.2$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$]

Таблица 2

Статистические данные по выпуску продукции ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод» [26] [Factors of Production and Total Production for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC [26]]

Years	Time, t	Factors of Production, Q (mln rubles)	Total Production, V (mln rubles)
2008	0	13.217574	8.456392
2009	1	14.207309	8.931730
2010	2	14.955581	9.372198
2011	3	17.083839	10.683700
2012	4	17.801323	11.779749
2013	5	21.029907	13.996108
2014	6	40.349890	22.646566
2015	7	47.985065	29.901182
2016	8	59.579269	45.173967
2017	9	72.758050	52.328860

Переменная времени t по-прежнему изменяется на отрезке $[0, 10]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2008 до 2017.

Анализ статистических данных табл. 2 показывает, что до 2013 года предприятие развивалось монотонно за счет внутренних инвестиций, а после 2013 года на развитие предприятия стали существенно влиять внешние инвестиции.

Данные табл. 2 до 2013 года могут быть хорошо аппроксимированы теоретической кривой

$$Q(t) = 13.217574 + 0.26 t^{0.21}. \quad (41)$$

На рис. 8 представлено сравнение графиков функции объема фактора производства $Q(t)$, построенного по данным табл. 2 (сплошная ломаная линия), и функции (41) (штриховая линия).

Сравнение этих графиков показывает, что на развитие предприятия после 2013 года существенно влияют внешние инвестиции. Статистический график функции этих инвестиций представляет собой ломаную линию, полученную в результате разности графиков функций, изображенных на рис. 8. Такой график функции объема внешних инвестиций может быть достаточно точно аппроксимирован с помощью функции (40).

На рис. 9 показано сравнение графика функции объема внешних инвестиций, построенного по статистическим данным табл. 2, и графика функции, построенного по формуле (40).

Построенная по данным табл. 2 производственная функция (1) записывается в виде

$$V = 0.75 \cdot Q^{0.951}. \quad (42)$$

На рис. 10 представлено сравнение графиков пяти стохастических кривых численной реализации случайного процесса, описываемого алгоритмом (16), и графика математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$ функции производственного фактора $Q(t)$, построенного в результате численного решения задачи Коши (36), (23) с производственной функцией (42) и расчетными коэффициентами, соответствующими статистическим данным работы ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод».

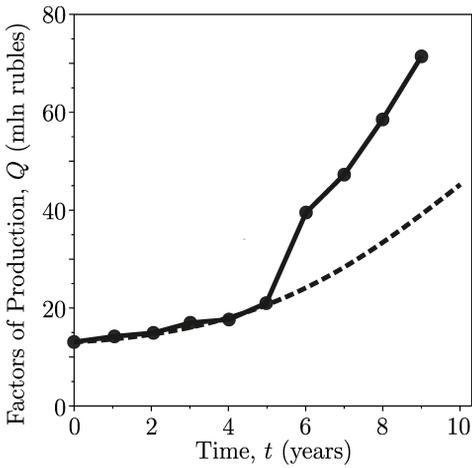


Рис. 8. Объем факторов производства $Q(t)$ для ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод» по данным табл. 2 (сплошная ломаная линия) и функция (41) (штриховая линия)

[Figure 8. The volume of factors of production $Q(t)$ for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC by data of Table 2 (solid broken line) and the function (41) (dashed line)]

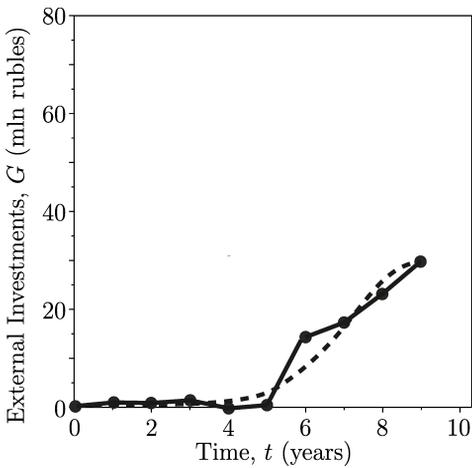


Рис. 9. Объем внешних инвестиций $G(t)$ для ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод» на основании данных табл. 2 (сплошная ломаная линия) и функция (40) (штриховая линия). Расчетные значения: $G_{\max} = 33.25$, $t_G = 9$, $\sigma_G = 1.85$

[Figure 9. The volume of external investments $G(t)$ for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC based on data from Table 2 (solid broken line) and the function (40) (dashed line). Parameters for calculating: $G_{\max} = 33.25$, $t_G = 9$, $\sigma_G = 1.85$]

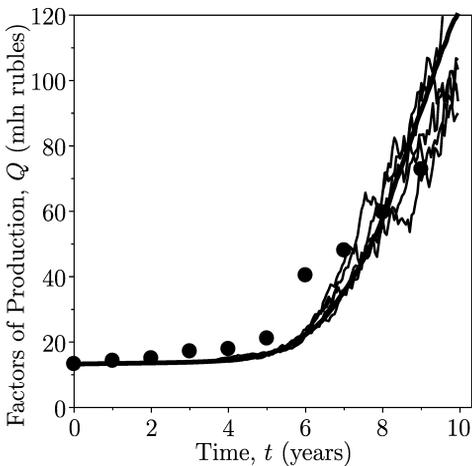


Рис. 10. Семейство стохастических траекторий, построенных в соответствии с численными реализациями алгоритма (16), статистические данные (точки) и кривая математического ожидания $\langle Q(t) \rangle$, построенная по результатам численного решения задачи Коши (36), (23) для ООО «ЛАДА Ижевский автомобильный завод». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 13.217574$, $P = 0.75$, $a = 0.95$, $A = 0.12$, $u = 1.0$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$; точки соответствуют данным табл. 2

[Figure 10. The family of stochastic trajectories constructed in accordance with the numerical implementations of the algorithm (16), statistical data, and the expectation curve $\langle Q(t) \rangle$ constructed from the results of a numerical solution of the Cauchy problem (36), (23) for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC. Parameters for calculating: $n = 200$, $\Delta t = 0.05$, $m = 200$, $Q_0 = 13.217574$, $P = 0.75$, $a = 0.95$, $A = 0.12$, $u = 1.0$, $B = 0.2$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$; the points correspond to the data in Table 2]

Заключение. Разработаны новые стохастические модели динамического развития однофакторных производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций.

Построены стохастические дифференциальные уравнения баланса для таких предприятий, описывающие случайные процессы увеличения выпуска продукции и роста факторов производства.

Исследовано взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями.

Сформулированы условия равновесного состояния работы предприятия и получены уравнения для определения предельных значений факторов производства, при достижении которых дальнейший рост выпуска продукции предприятием прекращается.

Рассмотрены три варианта развития предприятий. В первом случае предприятие развивается стабильно и поступательно. Во втором случае предприятие временно приостанавливает рост выпуска продукции, переоснащая производство и заменяя технологическое оборудование. В третьем случае предприятие вынуждено временно сворачивать производство при смене технологического уклада.

Представлен алгоритм построения стохастических траекторий для случайной функции фактора производства на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий.

Разработан вариант метода статистического осреднения стохастических дифференциальных уравнений баланса предприятий, с помощью которого установлены дифференциальные уравнения для определения математических ожиданий случайных функций факторов производства.

Показано, что численные решения этих уравнений и статистическое среднее значение функции фактора производства, вычисленное по двумстам реализациям стохастических траекторий, дают почти одинаковые результаты.

Численный анализ разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным работы производственного предприятия.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Колемаев В. А. *Математическая экономика*. М., 2005. 399 с.
2. Артемьев С. С., Якунин М. А. *Математическое и статистическое моделирование в финансах*. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2008. 174 с.
3. Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю. Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // *Финансы и бизнес*, 2013. № 2. С. 33–51.
4. Курзенев В. А., Лычагина Е. Б. Стохастическое моделирование динамики экономической системы // *Управленческое консультирование*, 2013. № 5. С. 78–83.
5. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамические стохастические модели

- общего экономического равновесия // *Управление экономическими системами*, 2014. Т. 67, № 7, <http://www.uecs.ru/uecs67-672014/item/2998-2014-07-30-07-14-51>.
6. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия России // *Вестник Нижегородского университета. Сер. Социальные науки*, 2015. № 2(38). С. 18–25.
 7. Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // *Вестник Пермского университета. Сер. Экономика*, 2015. № 4. С. 8–32.
 8. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion processes and their sample paths* / *Classics in Mathematics*. Berlin: Springer. xv+321 pp. doi: 10.1007/978-3-642-62025-6.
 9. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations* / *Mathematical Modelling: Theory and Applications*. vol. 22. Netherlands: Springer, 2007. xii+230 pp. doi: 10.1007/978-1-4020-5953-7.
 10. Степанов С. С. *Стохастический мир*, 2009, <https://synset.com/pdf/ito.pdf>; дата обращения: 27.02.2020.
 11. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations // *World Applied Sciences Journal*, 2011. vol. 13, no. 11. pp. 2288–2295.
 12. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes* / *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. vol. 24. Oxford: Oxford University Press, 2014. xiv+352 pp. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001.
 13. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function // *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996. vol. 104, no. 1. pp. 43–60. doi: 10.1007/BF01303802.
 14. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density // *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996. vol. 2, no. 2. pp. 93–128. doi: 10.1515/mcma.1996.2.2.93.
 15. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008. vol. 77, no. 4. pp. 408–420, arXiv: 1303.4510 [math.NA]. doi: 10.1016/j.matcom.2007.04.016.
 16. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods // *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008. vol. 4, no. 2. pp. 83–93.
 17. Кузнецов Д. С. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2007. 800 с. doi: 10.18720/SPBPU/2/s17-229.
 18. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities // *J. Theor. Probab.*, 2011. vol. 24. pp. 454–478. doi: 10.1007/s10959-010-0291-x.
 19. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients // *Electron. J. Probab.*, 2017. vol. 22, 46. 47 pp., arXiv: 1604.00771 [math.PR]. doi: 10.1214/17-EJP53.
 20. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit // *J. Stat. Phys.*, 2012. vol. 146, no. 4. pp. 762–773. doi: 10.1007/s10955-012-0418-9.
 21. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme // *Bernoulli*, 2018. vol. 24, no. 3. pp. 1653–1691. doi: 10.3150/16-BEJ909.
 22. Соловьев В. И. *Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения*. М.: Вега-Инфо, 2009. 176 с.
 23. Ильина Е. А., Сараев А. Л., Сараев Л. А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // *Экономика и предпринимательство*, 2017. № 9–4(86). С. 1130–1134.

24. Кузнецова И. Ю. Численное решение стохастического дифференциального уравнения методом Эйлера–Маруямы // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2013. № 11–1(18). С. 8–11.
25. *Бухгалтерская отчетность ПАО “Челябинский трубопрокатный завод” ИНН 7449006730 за 2017 год*, <https://e-ecolog.ru/buh/2017/7449006730>; дата обращения: 27.02.2020.
26. *Бухгалтерская отчетность ООО “ЛАДА Ижевский автомобильный завод” ИНН 1834051678 за 2017 год*, <https://e-ecolog.ru/buh/2017/1834051678>; дата обращения: 27.02.2020.
27. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // *Экономика и предпринимательство*, 2018. № 11. С. 1237–1241.

MSC: 60H10

Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise

A. L. Saraev, L. A. Saraev

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The article proposes mathematical models of the stochastic dynamics of the single-factor manufacturing enterprises development through internal and external investments. Balance equations for such enterprises are formulated, describing random processes of continuous increase in output and growth of production factors. The interaction of proportional, progressive and digressive depreciation with internal and external investments is investigated. Equations are obtained to determine the equilibrium state of the enterprise and the limiting values of the factors of production are calculated. The cases of the stable progressive development of the enterprise, the suspension of its work during the re-equipment of production and the temporary crisis of production shutdown during equipment replacement are considered.

The algorithm for the numerical solution of stochastic differential equations of enterprise development is constructed in accordance with the Euler–Maruyama method. For each implementation of this algorithm, the corresponding stochastic trajectories are constructed for the random function of the production factor. A variant of the method for calculating the expectation of a random function of a factor of production is developed and the corresponding differential equation is obtained for it. It is shown that the numerical solution of this equation and the average value of the function of the production factor calculated from two hundred realizations of stochastic trajectories give almost identical results. Numerical analysis of the developed models showed good compliance with the known statistical data of the production enterprise.

Keywords: production factors, production function, stochastic equations, Wiener process, drift coefficient, volatility factor, Euler–Maruyama method.

Received: 7th May, 2019 / Revised: 27th February, 2020 /Accepted: 16th March, 2020 / First online: 3rd May, 2020

Research Article

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. doi: 10.14498/vsgtu1700 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander L. Saraev  <https://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

Cand. Econom. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: alex.saraev@gmail.com

Leonid A. Saraev  <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Kolemayev V. A. *Matematicheskaja ekonomika* [Mathematical Economics]. Moscow, 2005, 399 pp. (In Russian)
2. Artemyev S. S., Yakunin M. A. *Matematicheskoe i statisticheskoe modelirovanie v finansakh* [Mathematical and Statistical Modeling in Finances]. Novosibirsk, 2008, 174 pp. (In Russian)
3. Vorontsovskii A. V., Dikarev A. Yu. Forecasting macroeconomic indicators in simulation mode based on stochastic models of economic growth, *Finansy i Biznes*, 2013, no. 2, pp. 33–51 (In Russian).
4. Kurzenev V. A., Lychagina E. B. Stochastic Modelling of Dynamics of Economic System, *Upravlencheskoe konsultirovanie*, 2013, no. 5, pp. 78–83 (In Russian).
5. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic general economic equilibrium models, *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of Economic Systems], 2014, vol. 67, no. 7 (In Russian), <http://www.uecs.ru/uecs67-672014/item/2998-2014-07-30-07-14-51>.
6. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic model of Russia's general economic equilibrium, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta, Ser. Sotsialnye nauki*, 2015, no. 2(38), pp. 18–25 (In Russian).
7. Andrianov D. L., Arbuzov V. O., Ivliev S. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Dynamic models of economics: Theory, applications, software implementation, *Vestnik Permskogo Universiteta, Ser. Ekonomika*, 2015, no. 4, pp. 8–32 (In Russian).
8. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion processes and their sample paths*, Classics in Mathematics. Berlin, Springer, xv+321 pp. doi: 10.1007/978-3-642-62025-6.
9. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 22. Netherlands, Springer, 2007, xii+230 pp. doi: 10.1007/978-1-4020-5953-7.
10. Stepanov S. S. *Stokhasticheskii mir* [Stochastic World] (In Russian), <https://synset.com/pdf/ito.pdf>; Accessed February 27, 2020.
11. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations, *World Applied Sciences Journal*, 2011, vol. 13, no. 11, pp. 2288–2295.
12. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 24. Oxford, Oxford University Press, 2014, xiv+352 pp. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001.
13. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function, *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996, vol. 104, no. 1, pp. 43–60. doi: 10.1007/BF01303802.
14. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density, *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 93–128. doi: 10.1515/mcma.1996.2.2.93.
15. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 77, no. 4, pp. 408–420, arXiv: 1303.4510 [math.NA]. doi: 10.1016/j.matcom.2007.04.016.
16. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods, *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 83–93.

17. Kuznetsov D. S. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia* [Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Solution]. St. Petersburg, Polytechnic Univ., 2007, 800 pp. (In Russian). doi: 10.18720/SPBPU/2/s17-229.
18. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities, *J. Theor. Probab.*, 2011, vol. 24, pp. 454–478. doi: 10.1007/s10959-010-0291-x.
19. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients, *Electron. J. Probab.*, 2017, vol. 22, 46, 47 pp., arXiv: 1604.00771 [math.PR]. doi: 10.1214/17-EJP53.
20. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit, *J. Stat. Phys.*, 2012, vol. 146, no. 4, pp. 762–773. doi: 10.1007/s10955-012-0418-9.
21. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme, *Bernoulli*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 1653–1691. doi: 10.3150/16-BEJ909.
22. Solov'ev V. I. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie rynka programmnogo obespicheniia* [Economic and Mathematical Modeling of the Software Market]. Moscow, Vega-Info, 2009, 176 pp. (In Russian)
23. Ilyina E. A., Saraev A. L., Saraev L. A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2017, no. 9–4(86), pp. 1130–1134 (In Russian).
24. Kuznetzova I. Yu. Numerical solution of a stochastic differential equation by the Euler–Maruyama method, *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*, 2013, no. 11–1(18), pp. 8–11 (In Russian).
25. *Accounting (financial) statements for PJSC Chelyabinsk Tube Rolling Plant after 2017* (In Russian), <https://e-ecolog.ru/buh/2017/7449006730>; Accessed February 27, 2020.
26. *Accounting (financial) statements for LADA Izhevsk Automobile Plant LLC after 2017* (In Russian), <https://e-ecolog.ru/buh/2017/1834051678>; Accessed February 27, 2020.
27. Saraev A. L., Saraev L. A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2018, no. 11, pp. 1237–1241 (In Russian).



УДК 533.6.011.6, 533.6.011.7, 517.958:531.332

Течение Куэтта горячего вязкого газа

А. Н. Хорин, А. А. Конохова

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Найдено новое точное решение уравнений движения вязкого газа для плоского стационарного сдвигового течения горячего (800–1500 К) газа между движущимися с разными скоростями параллельными пластинами (аналог несжимаемого течения Куэтта). Одна из пластин считалась теплоизолированной. Для зависимости коэффициента вязкости от температуры принята формула Сазерленда. В отличие от других известных точных решений, вместо аналогии Рейнольдса (предположение о линейной связи между коэффициентами вязкости и теплопроводности) для вычисления коэффициента теплопроводности использована более точная формула, имеющая в рассматриваемом диапазоне температур ту же точность, что и формула Сазерленда (2%). С использованием полученного точного решения исследовано качественное влияние сжимаемости на напряжение трения и на профили температуры и скорости. Показано, что (если одна из пластин теплоизолирована) сжимаемость газа приводит к увеличению напряжения трения. Проведено сравнение нового точного решения с известным точным решением (V. N. Golubkin, G. B. Sizykh, 2018), полученным с использованием формулы Сазерленда для коэффициента вязкости и аналогии Рейнольдса для коэффициента теплопроводности. Обнаружено, что оба решения приводят к одинаковым выводам о качественном влиянии сжимаемости на напряжение трения и на профили температуры и скорости. Однако прирост напряжения трения, вызванный сжимаемостью, при использовании аналогии Рейнольдса оказался недооцененным в два раза. Это показывает, что предположение о линейной связи между коэффициентами вязкости и теплопроводности может приводить к заметным количественным ошибкам.

Ключевые слова: вязкий газ, горячий газ, точные решения, формула Сазерленда, формула для теплопроводности, аналогия Рейнольдса.

Получение: 1 ноября 2019 г. / Исправление: 14 марта 2020 г. /

Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 17 июня 2020 г.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хорин А. Н., Конохова А. А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378. doi: 10.14498/vsgtu1751.

Сведения об авторах

Александр Николаевич Хорин  <https://orcid.org/0000-0002-5251-4930>

студент; факультет аэромеханики и летательной техники; e-mail: khorin.an@phystech.edu

Анастасия Анатольевна Конохова  <https://orcid.org/0000-0002-7872-6974>

студент; факультет аэромеханики и летательной техники; e-mail: stasy.mare@gmail.com

Введение. Одним из первых точных решений, описывающих течения вязкой жидкости, было решение задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными пластинами, движущимися в своих плоскостях с разными скоростями (течение Куэтта [1]). Уравнения движения вязкого (сжимаемого) газа значительно сложнее уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости [2–5]. Поэтому первое точное решение [6] для течения Куэтта вязкого газа удалось получить только при двух упрощающих предположениях. Во-первых, предполагалась линейная связь между коэффициентами вязкости μ и теплопроводности λ . Во-вторых, для коэффициента вязкости была принята степенная зависимость от температуры:

$$\mu = \mu_0(T/T_0)^n, \quad (1)$$

где $n = 0.76$. Позже было получено точное решение [7], в котором оба предположения оставались в силе, но показатель степени n мог быть равен любому числу от 0.5 до 1. Однако более близкой к реальности является не степенная зависимость (1), а формула Сазерленда [2–4]:

$$\mu = \mu^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + T_S}{T + T_S}, \quad (2)$$

где для воздуха $T^* = 273$ К, $T_S = 111$ К, $\mu^* = 1.715 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Сравнение с экспериментальными данными, приведенными в таблицах [8], показывает, что точность этой формулы не хуже 2% для диапазона температур 170–1900 К при давлении менее 10 атм (предполагалось, что воздух сухой и в нем отсутствует диссоциация).

Недавно в статье [9] получено точное решение для течения Куэтта вязкого газа с использованием для вычисления μ более точной (по сравнению со степенной зависимостью) формулы Сазерленда (2). Однако в [9] осталось в силе предположение о линейной связи между коэффициентами вязкости и теплопроводности. Это предположение считается общепринятым [3, 5] и используется до сих пор для различных течений вязкого газа (не только для течения Куэтта) как в теоретических исследованиях [10, 11], так и в численных расчетах [12–15]. Однако в недавней статье [16] на основе экспериментальных данных [8] было показано, что отношение λ/μ для воздуха не постоянно и меняется на 3.5% только в диапазоне $275 \text{ К} \leq T \leq 375 \text{ К}$, а вне этого диапазона отношение λ/μ меняется еще больше. Следовательно, использование линейной связи коэффициентов λ и μ приводит к ошибке вычисления λ , превосходящей ошибку вычисления μ по формуле Сазерленда (2%). Таким образом, в решении [9] точность вычисления λ была хуже точности вычисления μ . В данной статье предпринята попытка улучшить результат [9] путем использования для вычисления λ более точной формулы, ошибка которой не превышает 2%.

В настоящее время известны две такие формулы. Одна формула имеет точность 2% для температур $T < 1000$ К. Она предложена в монографии [4] и имеет вид

$$\lambda = \lambda^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + T_\lambda}{T + T_\lambda}, \quad (3)$$

где для воздуха $T^* = 273$ К, $T_\lambda = 194$ К, $\lambda^* = 2.412 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К). Другая

формула

$$\lambda = \beta \frac{T - T_S}{\sqrt{T}}, \quad (4)$$

где для сухого воздуха $\beta = 0.2415 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К^{3/2}), предложена в [16] и имеет точность 2% для горячего ($800 \text{ К} \leq T \leq 1500 \text{ К}$) вязкого газа.

Использование (3) привело авторов данной статьи к дифференциальному уравнению, точное решение которого получить не удалось. Точное решение, которое приведено ниже, удалось получить с помощью формулы (4).

Таким образом, данная статья посвящена получению точного решения для течения Куэтта вязкого газа с использованием формул (2) и (4), имеющих точность 2% для горячего ($800 \text{ К} \leq T \leq 1500 \text{ К}$) газа. Новизна исследования состоит в использовании для вычисления λ более точной формулы (4) вместо предположения о линейной связи λ и μ .

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное плоское сдвиговое течение совершенного вязкого газа между двумя движущимися в своих плоскостях параллельными пластинами, расположенными горизонтально на расстоянии H друг от друга (аналог несжимаемого течения Куэтта). Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy , в которой ось Ox направлена вдоль нижней пластины, а ось Oy перпендикулярна пластинам. Будем считать, что нижняя пластина неподвижна, а верхняя пластина перемещается со скоростью u_1 (рис. 1). Обозначим: u — скорость одномерного течения вдоль оси x , ρ — плотность, T — температура, $\mu = \mu(T)$, $\lambda = \lambda(T)$ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газа, определяемые формулами (2) и (4) соответственно.

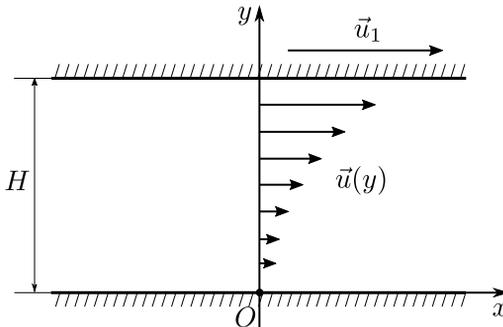


Рис. 1. Сдвиговое течение газа между неподвижной (нижней) и движущейся (верхней) пластинами

[Figure 1. Shear gas flow between the stationary (bottom) and moving (top) plates]

Течение вязкого газа описывается уравнением неразрывности, уравнением импульсов и уравнением баланса энергии [3, 4]. Давление, плотность и температура совершенного газа связаны уравнением состояния Менделеева–Клапейрона. Будем считать, что движение газа вызвано только силами вязкости за счет перемещения верхней пластины, а продольный градиент давления отсутствует, т. е. давление постоянно $p = p_0 = \text{const}$. В рассматриваемой одномерной задаче скорость, плотность, температура и давление зависят только от координаты y . Поэтому уравнение неразрывности выполняется тождественно. Остальные уравнения движения газа приводят к следующей системе:

$$(\mu u'_y)'_y = 0, \quad (5)$$

$$(\lambda T'_y)'_y + \mu (u'_y)^2 = 0, \quad (6)$$

$$p = R\rho T = p_0 > 0. \quad (7)$$

Здесь и далее нижними индексами « $_0$ » и « $_1$ » обозначаются значения величин на поверхности нижней ($y = 0$) и верхней ($y = H$) пластин соответственно. R — отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе.

Задача состоит в нахождении решения u , ρ и T системы (2), (4)–(7) при заданных значениях u_1 , ρ_0 и T_0 .

Как сказано во введении, эта задача отличается от задачи, решенной в [9], формулой для коэффициента теплопроводности. В [9] использована линейная зависимость: $\lambda(T) = \mu(T)\lambda_0/\mu_0$, а в данной работе — формула (4).

2. Точное решение. Из (5) следует, что напряжение трения $\tau = \mu u'_y$ одинаково во всех точках течения, то есть $\mu u'_y = \tau_0$. Возьмем в качестве характерных значений плотности, вязкости, теплопроводности и температуры их значения при $y = 0$, в качестве характерного значения скорости — скорость верхней пластины u_1 , а в качестве характерной длины — расстояние между пластинами H . Перейдем к безразмерным переменным: $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$, $\bar{\mu} = \mu/\mu_0$, $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$, $\bar{T} = T/T_0$, $\bar{T}_S = T_S/T_0$, $\bar{u} = u/u_1$, $\bar{y} = y/H$, где μ_0 и λ_0 вычислены по формулам (2) и (4) для $T = T_0$. Тогда для безразмерных коэффициентов вязкости и теплопроводности имеем

$$\bar{\mu} = \bar{T}^{3/2} \frac{1 + \bar{T}_S}{\bar{T} + \bar{T}_S} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{T} - \bar{T}_S}{(1 - \bar{T}_S)\sqrt{\bar{T}}}. \quad (8)$$

Введем вместо координаты \bar{y} новую безразмерную переменную η , выполняя преобразование

$$\eta = \int_0^{\bar{y}} \frac{d\xi}{\bar{T}(\xi)},$$

предложенное в [16]. В рассматриваемом случае (постоянное давление) это преобразование совпадает с преобразованием Дородницына [5]. Тогда

$$\frac{d}{d\bar{y}} = \frac{1}{\bar{T}} \frac{d}{d\eta},$$

и уравнения (5), (6) примут вид (далее всюду штрих будет обозначать дифференцирование по новой безразмерной координате η)

$$\bar{u}' = \frac{\tau_0 H \bar{T}}{u_1 \mu_0 \bar{\mu}}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} \bar{T}' \right)' + \frac{\mu_0 u_1^2 \bar{\mu}}{\lambda_0 T_0 \bar{T}} (u')^2 = 0.$$

С помощью (9) исключим \bar{u}' из последнего уравнения:

$$\left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} \bar{T}' \right)' + \frac{\tau_0^2 H^2 \bar{T}}{\mu_0 \lambda_0 T_0 \bar{\mu}} = 0. \quad (10)$$

Подстановка выражений (8) в формулу (10) дает

$$\left(\frac{\bar{T} - \bar{T}_S}{\sqrt{\bar{T}}} \frac{1}{\bar{T}} \bar{T}'\right)' + 2 \frac{\bar{T} + \bar{T}_S}{\sqrt{\bar{T}}} B^2 = 0, \quad (11)$$

где $B = \tau_0 H / \sqrt{2(1 + \bar{T}_S)\mu_0\beta T_0\sqrt{\bar{T}_0}}$. Уравнение (11) нелинейно относительно $\bar{T} = \bar{T}(\eta)$. Однако замена

$$f(\eta) = \frac{\bar{T}(\eta) + \bar{T}_S}{\sqrt{\bar{T}(\eta)}} \quad (12)$$

сводит его к уравнению колебаний

$$f'' + B^2 f = 0.$$

Поэтому функция $f(\eta)$ представляется в виде $f(\eta) = A \cos(B\eta + \varphi)$, где $A > 0$ и $\varphi \in (-\pi, \pi]$ — некоторые константы, которые будут определены ниже. Из условия $\bar{T}(0) = 1$ и из уравнения (12) вытекает связь констант A и φ :

$$A \cos \varphi = 1 + \bar{T}_S. \quad (13)$$

Искомая зависимость $\bar{T}(\eta)$ выражается через функцию $f(\eta)$ из уравнения (12), которое имеет два решения:

$$\sqrt{\bar{T}(\eta)} = 0.5 \left(f(\eta) \pm \sqrt{f^2(\eta) - 4\bar{T}_S} \right).$$

Однако условию $\bar{T}(0) = 1$ с учетом (13) удовлетворяет только одно из них (при $T_0 > T_S = 111$ K):

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{T}(\eta)} &= 0.5 \left(f(\eta) + \sqrt{f^2(\eta) - 4\bar{T}_S} \right) = \\ &= 0.5 \left(A \cos(B\eta + \varphi) + \sqrt{A^2 \cos^2(B\eta + \varphi) - 4\bar{T}_S} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

т.е.

$$\bar{T}(\eta) = 0.25 A^2 \left(\cos(B\eta + \varphi) + \sqrt{\cos^2(B\eta + \varphi) - 4\bar{T}_S/A^2} \right)^2. \quad (15)$$

Из уравнения состояния (7) —

$$\bar{\rho}(\eta) = 1/\bar{T}(\eta).$$

При заданном распределении температуры $\bar{T}(\eta)$ плотность определяется по формуле (7), а координата \bar{y} — как интеграл с переменным верхним пределом:

$$\bar{y}(\eta) = \int_0^\eta \bar{T}(\xi) d\xi = Y(\eta) - Y(0), \quad (16)$$

где для точного решения существенно, что этот интеграл берется и первообразная Y имеет явную форму:

$$Y(\eta) = 0.25A^2B^{-1} \left(\cos(B\eta + \varphi) + \sqrt{\cos^2(B\eta + \varphi) - \alpha^2} \right) \sin(B\eta + \varphi) + 0.25A^2B^{-1}(1 - \alpha^2) \left((B\eta + \varphi) + \arcsin\left(\frac{\sin(B\eta + \varphi)}{\sqrt{1 - \alpha^2}}\right) \right), \quad \alpha^2 = 4\bar{T}_S/A^2.$$

Поскольку рассматривается только такой диапазон изменения координаты η , в котором температура $T > 0$, формула (16) всегда задает взаимно однозначное соответствие координат η и \bar{y} .

Из (9) следует, что скорость \bar{u} определяется как интеграл с переменным верхним пределом:

$$\bar{u}(\eta) = \frac{\tau_0 H}{u_1 \mu_0} \int_0^\eta \frac{\bar{T}(\xi)}{\bar{\mu}(\xi)} d\xi.$$

Подынтегральное выражение, согласно (10), имеет представление

$$\frac{\bar{T}}{\bar{\mu}} = -\frac{\mu_0 \lambda_0 T_0}{\tau_0^2 H^2} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} \bar{T}' \right)'$$

Поэтому

$$\bar{u}(\eta) = -\frac{\lambda_0 T_0}{u_1 \tau_0 H} \int_0^\eta \left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} \bar{T}' \right)' d\xi = -\frac{\lambda_0 T_0}{u_1 \tau_0 H} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} \bar{T}' \right) \Big|_0^\eta. \quad (17)$$

Далее рассмотрим случай теплоизолированной верхней (подвижной) пластины. Это значит, что $\bar{T}'(\eta_1) = 0$, где η_1 — значение координаты η на верхней пластине. Дифференцируя (15), получим

$$\bar{T}'(\eta) = -\frac{2B\bar{T}(\eta)}{\sqrt{\cos^2(B\eta + \varphi) - \alpha^2}} \sin(B\eta + \varphi). \quad (18)$$

Поэтому равенство $\bar{T}'(\eta_1) = 0$ означает, что

$$\sin(B\eta_1 + \varphi) = 0. \quad (19)$$

На верхней пластине $\bar{u}(\eta_1) = 1$, и уравнение (17) для теплоизолированной верхней пластины после применения (18) дает

$$1 = -\frac{\lambda_0 T_0}{u_1 \tau_0 H} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\bar{T}} \bar{T}' \right) \Big|_0^{\eta_1} = 0 + \frac{\lambda_0 T_0}{u_1 \tau_0 H} \frac{\bar{\lambda}(0)}{\bar{T}(0)} \bar{T}'(0) = -\frac{\lambda_0 T_0}{u_1 \tau_0 H} \frac{2B}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \alpha^2}} \sin \varphi.$$

Поскольку из (13) следует

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos^2 \varphi - \alpha^2} &= \sqrt{\cos^2 \varphi - 4\bar{T}_S/A^2} = \cos \varphi \sqrt{1 - 4\bar{T}_S/(1 + \bar{T}_S)^2} = \\ &= \cos \varphi (1 - \bar{T}_S)/(1 + \bar{T}_S), \end{aligned}$$

имеем

$$1 = -\frac{\lambda_0 T_0}{u_1 \tau_0 H} \frac{2B(1 + \bar{T}_S) \sin \varphi}{(1 - \bar{T}_S) \cos \varphi},$$

что позволяет явно выразить φ через параметры задачи:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{u_1}{2\lambda_0 T_0} \frac{(1 - \bar{T}_S)}{(1 + \bar{T}_S)} \left(\frac{\tau_0 H}{B} \right) = \\ &= -\frac{u_1}{2\lambda_0 T_0} \frac{(1 - \bar{T}_S)}{(1 + \bar{T}_S)} \sqrt{2(1 + \bar{T}_S)\mu_0\beta T_0\sqrt{T_0}} = \\ &= -\frac{u_1(1 - \bar{T}_S)}{\lambda_0\sqrt[4]{T_0}} \sqrt{\frac{\mu_0\beta}{2(1 + \bar{T}_S)}}. \end{aligned}$$

После этого константы $A > 0$ и $\alpha^2 = 4\bar{T}_S/A^2$ определяются формулой (13).

Для окончательного решения задачи осталось определить константу B .

Поскольку $\sqrt{\bar{T}(\eta)} > 0$ и $A > 0$, из (14) заключаем, что $\cos(B\eta + \varphi) > |\alpha|$ при всех $\eta \in [0, \eta_1]$. В частности, при $\eta = 0$ имеем $\cos \varphi > |\alpha|$. Вместе с условием $\varphi \in (-\pi, \pi]$ это означает, что $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, и, следовательно, $(B\eta + \varphi) \in (-\pi/2, \pi/2]$ при всех $\eta \in [0, \eta_1]$. Поэтому из (19) следует, что

$$B\eta_1 + \varphi = 0. \quad (20)$$

Учитывая (20) и (13), из (16) и из условия $\bar{y}(\eta_1) = 1$ получим

$$\begin{aligned} 1 &= Y(\eta_1) - Y(0) = 0 - Y(0) = \\ &= -0.25A^2B^{-1}(\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi - \alpha^2}) \sin \varphi - \\ &= -0.25A^2B^{-1}(1 - \alpha^2) \left(\varphi + \arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) \right) = \\ &= -0.5AB^{-1} \sin \varphi - 0.25A^2B^{-1}(1 - \alpha^2) \left(\varphi + \arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получается явное выражение для константы B через другие константы, найденные ранее:

$$B = -0.5A \sin \varphi - 0.25A^2(1 - \alpha^2) \left(\varphi + \arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) \right).$$

Таким образом, приходим к следующему результату. Для любых положительных значений скорости верхней пластины u_1 , расстояния между пластинами H , значений вязкости μ_0 и теплопроводности λ_0 на нижней пластине, относительной температуры Сазерленда \bar{T}_S и значений температуры нижней пластины T_0 из заданного диапазона $800 \text{ K} \leq T \leq 1500 \text{ K}$ формулы (15) и (17) дают точное решение уравнений движения вязкого сжимаемого газа в зависимости от переменной η . Переход к исходной переменной \bar{y} осуществляется по формуле (16). Это решение описывает вязкое сжимаемое течение Куэтта между нижней неподвижной пластиной и параллельной ей верхней пластиной, движущейся со скоростью u_1 , для общего случая, когда коэффициент вязкости и температура связаны формулой Сазерленда (2), коэффициент теплопроводности и температура связаны формулой (4), а верхняя подвижная пластина теплоизолирована.

В связи со сложностью полученных формул для демонстрации свойств решения в следующих разделах будут приведены профили безразмерных скорости, температуры и напряжения трения u , T и τ .

3. Профили скорости и температуры. На рис. 2 представлена функция зависимости безразмерного значения температуры \bar{T} от безразмерного значения поперечной координаты \bar{y} при различных значениях параметров T_0 и u_1 . Как можно видеть из графика, при увеличении скорости верхней пластины u_1 температура верхней (теплоизолированной) пластины $\bar{T}|_{\bar{y}=1}$ возрастает. Однако при постоянном значении u_1 чем выше значение температуры нижней пластины T_0 , тем незначительнее отличается от нее температура верхней пластины $\bar{T}|_{\bar{y}=1}$.

При различных значениях параметров T_0 и u_1 профиль скорости близок к прямолинейному отрезку, соединяющему начальную и конечную точки профиля, так что визуально на графике это незаметно. При значительном приближении к центральной части профиля (рис. 3) можно заметить, что по мере увеличения скорости верхней стенки u_1 и уменьшения температуры нижней стенки T_0 растет отличие профиля скорости от отрезка прямой.

4. О применимости аналогии Рейнольдса. Как было упомянуто выше, в статье [9] получено точное решение для течения Куэтта вязкого газа с использованием формулы Сазерленда (2). Однако в [9] осталось в силе предположение о линейной связи между коэффициентами вязкости и теплопроводности (аналогия Рейнольдса). Полученное в данной статье точное решение вместе с решением [9] позволило оценить влияние упрощающего предположения о линейной связи коэффициентов вязкости и теплопроводности на результаты расчетов для течения Куэтта. Для этого расчеты профилей температур и зависимостей напряжения трения от числа Маха M_1 при теплоизолированной верхней пластине были проведены как по полученным в данной статье формулам, так и по формулам [9].

Сравнение профилей температур проведено при $u_1 = 150$ м/с. Как можно видеть из рис. 4, все выводы, сделанные в предыдущем разделе относительно профилей температуры, справедливы и в случае линейной зависимости. Однако для одинаковых значений температуры нижней пластины T_0 температура верхней пластины $\bar{T}|_{\bar{y}=1}$ в предположении о линейной связи оказывается больше.

5. Напряжение трения. Как показывает уравнение (5), напряжение трения $\tau = \mu u'_y$ одинаково во всех точках течения и может быть вычислено, например, на нижней пластине. Для исследования влияния сжимаемости введем безразмерный коэффициент напряжения трения $\bar{\tau}_0 = \tau_0/\tau_{00}$, где $\tau_{00} = (\mu_0 u_1)/H$ — коэффициент напряжения трения для несжимаемого течения Куэтта с постоянным коэффициентом динамической вязкости μ_0 . А также введем безразмерный коэффициент — число Маха: $M_1 = u_1/a_0$, где u_1 — скорость верхней пластины, а a_0 — скорость звука на нижней пластине, которая вычисляется по формуле $a_0 = \sqrt{kRT_0}$, $k = C_p/C_v$ (для рассматриваемого диапазона температур принималось значение $k = 1.365$). На рис. 5 представлены зависимости безразмерного коэффициента напряжения трения $\bar{\tau}_0$ от числа Маха M_1 , которые вычислены при разных значениях температуры нижней пластины T_0 . Из графиков на рис. 5 следует, что при теплоизолированной верхней пластине сжимаемость газа приводит только к увеличению напряжения трения. Однако при линейной зависимости между коэффициентами вязкости и теплопроводности прирост напряжения трения оказывается недооцененным примерно в два раза.

Закключение. Найдено точное решение уравнений движения горячего

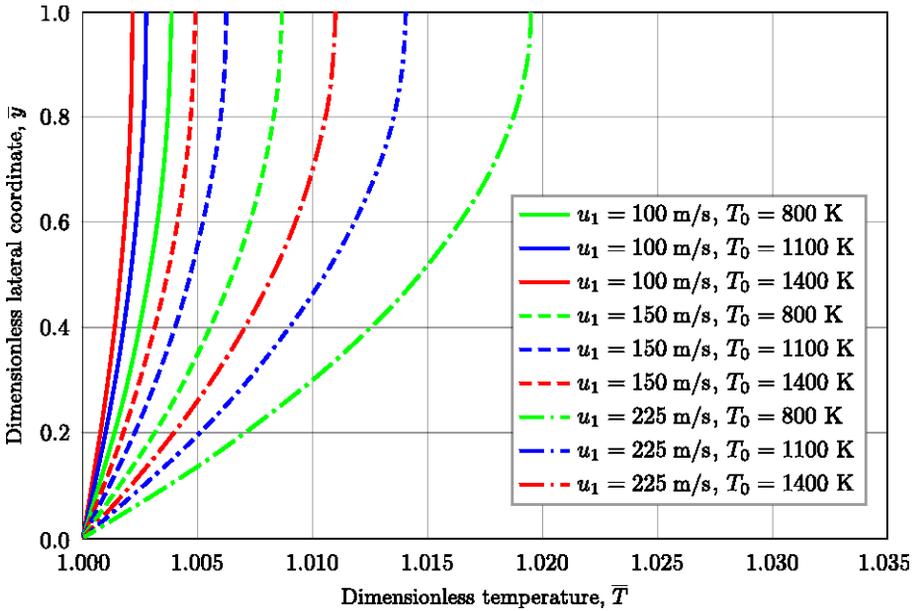


Рис. 2. Профили температур для различных значений T_0 и u_1
 [Figure 2. The temperature profiles for various values of T_0 and u_1]

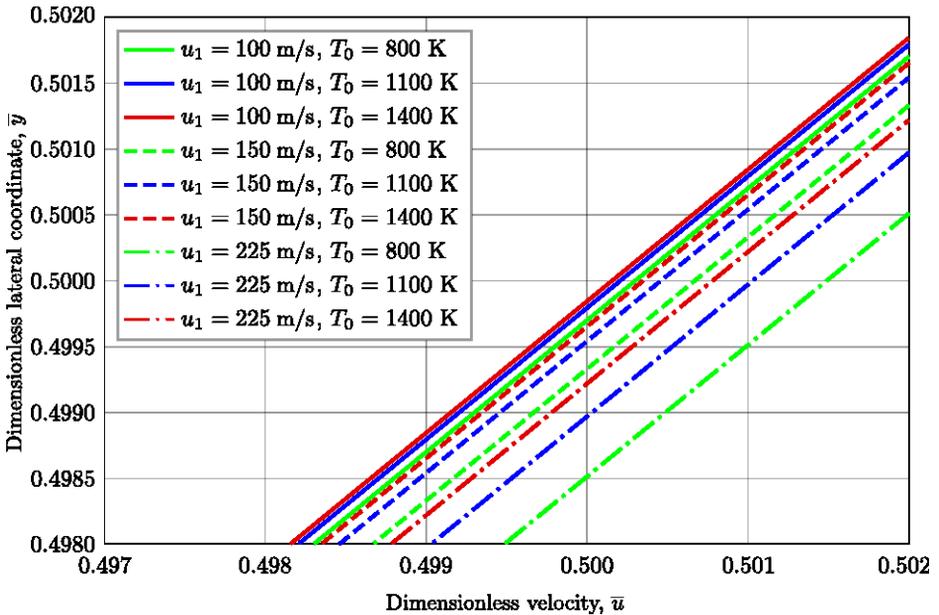


Рис. 3. Центральная часть профилей скорости при значительном приближении для различных значений T_0 и u_1
 [Figure 3. Central part of velocity profiles with a significant increase for various values of T_0 and u_1]

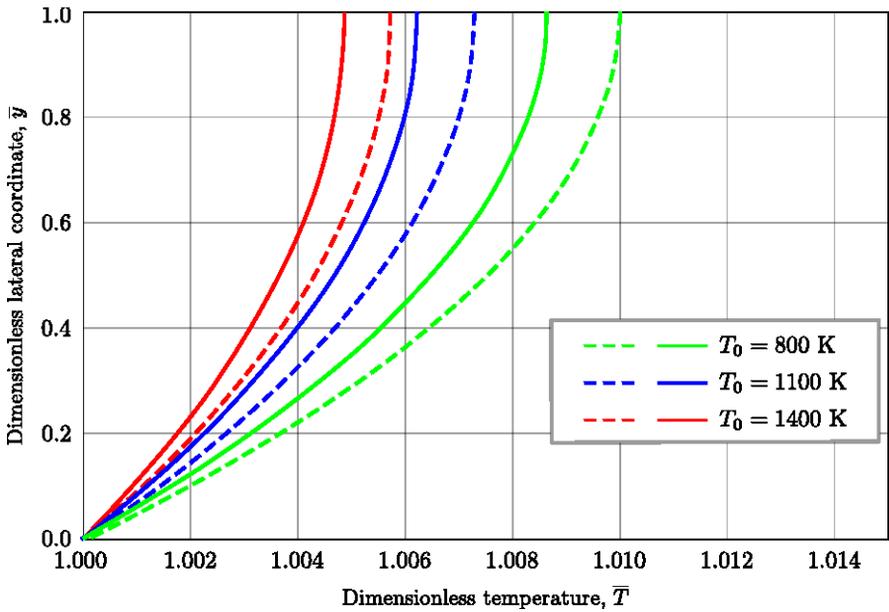


Рис. 4. Профили температур при теплоизолированной верхней пластине для различных значений T_0 и $u_1 = 150$ м/с; сплошные линии — по теории авторов; штриховые линии — по данным работы [9]

[Figure 4. The temperature profiles in the presence of thermal insulation on the top plate for various values of T_0 and $u_1 = 150$ m/s; solid lines are consistent with this study; dashed lines correspond to data from [9]]

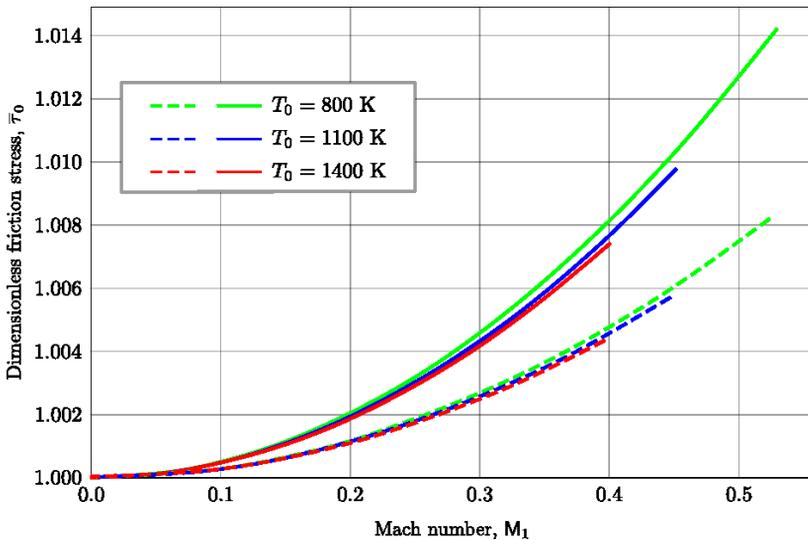


Рис. 5. Зависимость напряжения трения от числа Маха M_1 при теплоизолированной верхней пластине для различных значений T_0 ; сплошные линии — по теории авторов; штриховые линии — по данным работы [9]

[Figure 5. The dependence of the friction stress on the Mach number M_1 in the presence of thermal insulation on the top plate for various values of T_0 ; solid lines are consistent with this study; dashed lines correspond to data from [9]]

вязкого газа, в которых формулы для вязкости и теплопроводности имеют точность не хуже 2%. Вязкость зависит от температуры по формуле Сазерленда (2), а теплопроводность — по формуле (4). Решение описывает плоское стационарное сдвиговое течение горячего ($800 \text{ K} \leq T \leq 1500 \text{ K}$) газа между двумя параллельными пластинами, вызванное движением одной из них (сжимаемое течение Куэтта). Полученное точное решение позволило исследовать качественное влияние сжимаемости на напряжение трения и на профили температуры и скорости. Несмотря на то, что расчеты, проведенные с использованием аналогии Рейнольдса, показывают аналогичные качественные эффекты, в полной мере количественное влияние сжимаемости для течения Куэтта исследовано именно в данной работе.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Вклад авторов: А. Хорин — 60%, А. Конохова — 40%. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Couette M. Études sur le frottement des liquides // *Ann. Chim. Phys., Ser. 6*, 1890. vol. 21. pp. 433–510.
2. Schlichting H., Gersten K. *Grenzschicht-Theorie*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. doi: 10.1007/3-540-32985-4.
3. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
4. White F. *Viscous Fluid Flow* / McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering Book Series. New York: McGraw Hill, 2006.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика. Ч. II*. М.: Физматлит, 1963.
6. Гродзовский Г. Л. Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными стенками и между двумя вращающимися цилиндрами // *ПММ*, 1955. Т. 19, № 1. С. 99–102.
7. Жмулин Е. М. Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами // *Уч. записки ЦАГИ*, 1971. Т. 2, № 4. С. 31–37.
8. Rogers G. F. C., Mayhew Y. R. *Thermodynamic and Transport Properties of Fluids: S.I. Units*. Malden, USA: Blackwell, 1995.
9. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. О сжимаемом течении Куэтта // *Уч. записки ЦАГИ*, 2018. Т. 49, № 1. С. 27–38.
10. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для плоской струи из линейного источника // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 644–656. doi: 10.31857/S003282350002270-7.
11. Брутян М. А., Ибрагимов У. Г. Автомодельные и неавтомодельные течения вязкого газа, истекающего из вершины конуса // *Труды МФТИ*, 2018. Т. 10, № 4. С. 113–121.
12. Bosnyakov S., Mikhaylov S. V., Morozov A. N., et al. Implementation of high-order discontinuous Galerkin method for solution of practical tasks in external aerodynamics and aeroacoustics / N. Kroll, C. Hirsch, F. Bassi, C. Johnston, K. Hillewaert (eds.), *IDIHOM: Industrialization of High-Order Methods – A Top-Down Approach* / Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 128. Cham: Springer, 2015. pp. 337–379. doi: 10.1007/978-3-319-12886-3_16.

13. Bosnyakov S., Mikhaylov S. V., Podaruev V. Yu., et al. Application of high-order discontinuous Galerkin method to LES/DES test cases using computers with high number of cores // *23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (AIAA Aviation 2017, USA, Denver, Colorado, 5–9 June 2017)*, 2017. pp. 2017–3943. doi: 10.2514/6.2017-3943.
14. Егоров И. В., Новиков А. В. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного обтекания плоской пластины при гиперзвуковых скоростях потока // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2016. Т. 56, № 6. С. 1064–1081. doi: 10.7868/S0044466916060120.
15. Егоров И. В., Пальчиковская Н. В., Шведченко В. В. Влияние пространственных возмущений сверхзвукового потока на тепловой поток к поверхности затупленных тел // *ТВТ*, 2015. Т. 53, № 5. С. 713–726. doi: 10.7868/S0040364415040092.
16. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667. doi: 10.31857/S003282350002271-8.

MSC: 76N15, 80A20

Couette flow of hot viscous gas

A. N. Khorin, A. A. Konyukhova

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141701, Russian Federation.

Abstract

A new exact solution is found for the equations of motion of a viscous gas for a stationary shear flow of hot (800–1500 K) gas between two parallel plates moving at different speeds (an analog of the incompressible Couette flow). One of the plates was considered thermally insulated. For the dependence of the coefficient of viscosity on temperature, the Sutherland formula is adopted. Unlike other known exact solutions, instead of a linear association between the viscosity and thermal conductivity coefficients, a more accurate formula was used to calculate the thermal conductivity coefficient, having the same accuracy in the temperature range under consideration as the Sutherland formula (2%). Using the obtained exact solution, the qualitative effect of compressibility on the friction stress and the temperature, and velocity profiles were investigated. It is shown that the compressibility of the gas leads to an increase in the friction stress, if one of the plates is thermally insulated. The new exact solution was compared with the known exact solution (Golubkin, V.N. & Sizykh, G.B., 2018) obtained using the Sutherland formula for the viscosity coefficient and the Reynolds analogy for the thermal conductivity coefficient. It was found that both solutions lead to the same conclusions about the qualitative effect of compressibility on the friction stress and on the temperature and velocity profiles. However, the increase in friction stress caused by compressibility of the gas turned out to be underestimated twice when using the Reynolds analogy. This shows that the assumption of a linear relationship between the coefficients of viscosity and thermal conductivity can lead to noticeable quantitative errors.

Keywords: viscous gas, hot gas, exact solutions, Sutherland formula, thermal conductivity formula.

Received: 1st November, 2019 / Revised: 14th March, 2020 /

Accepted: 16th March, 2020 / First online: 17th June, 2020

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khorin A. N., Konyukhova A. A. Couette flow of hot viscous gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378. doi: 10.14498/vsgtu1751 (In Russian).

Authors' Details:

Aleksandr N. Khorin  <https://orcid.org/0000-0002-5251-4930>

Student; Dept. of Aeromechanics and Flight Engineering; e-mail: khorin.an@phystech.edu

Anastasia A. Konyukhova  <https://orcid.org/0000-0002-7872-6974>

Student; Dept. of Aeromechanics and Flight Engineering; e-mail: stasy.mare@gmail.com

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Wrote the paper: A. Khorin (60 %) and A. Konyukhova (40 %). The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Couette M. Études sur le frottement des liquides, *Ann. Chim. Phys., Ser. 6*, 1890, vol. 21, pp. 433–510.
2. Schlichting H., Gersten K. *Grenzschicht-Theorie*. Berlin, Springer-Verlag, 2006. doi: 10.1007/3-540-32985-4.
3. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford, Pergamon Press, 1966. doi: 10.1016/c2013-0-05328-5.
4. White F. *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering Book Series. New York, McGraw Hill, 2006.
5. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical Hydromechanics*. New York, Wiley Interscience, 1965.
6. Grodzovskii G. L. Viscous gas flow between two moving parallel walls and between two rotating cylinders, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1955, vol. 19, no. 1, pp. 99–102 (In Russian).
7. Zhmulin E. M. Viscous gas flow between two moving parallel plates, *Uch. Zap. TsAGI*, 1971, vol. 2, no. 4, pp. 31–37 (In Russian).
8. Rogers G. F. C., Mayhew Y. R. *Thermodynamic and Transport Properties of Fluids: S.I. Units*. Malden, USA, Blackwell, 1995.
9. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the compressible Couette flow, *TsAGI Science Journal*, 2018, vol. 49, no. 1, pp. 29–41. doi: 10.1615/TsAGISciJ.2018026781.
10. Brutyan M. A., Krapivsky P. L. Exact solutions to the steady Navier–Stokes equations of viscous heat-conducting gas flow induced by the plane jet issuing from the line source, *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 1–10. doi: 10.1134/S0015462818060022.
11. Brutyan M. A., Ibragimov U. G. Selfsimilar and nonselfsimilar solutions of the viscous compressible flow inside a cone, *Proceedings of MIPT*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 113–121 (In Russian).
12. Bosnyakov S., Mikhaylov S. V., Morozov A. N., et al. Implementation of high-order discontinuous Galerkin method for solution of practical tasks in external aerodynamics and aeroacoustics, In: *N. Kroll, C. Hirsch, F. Bassi, C. Johnston, K. Hillewaert (eds.), IDIHOM: Industrialization of High-Order Methods – A Top-Down Approach*, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 128. Cham, Springer, 2015, pp. 337–379. doi: 10.1007/978-3-319-12886-3_16.
13. Bosnyakov S., Mikhaylov S. V., Podaruev V. Yu., et al. Application of high-order discontinuous Galerkin method to LES/DES test cases using computers with high number of cores, In: *23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference (AIAA Aviation 2017, USA, Denver, Colorado, 5–9 June 2017)*, 2017, pp. 2017–3943. doi: 10.2514/6.2017-3943.
14. Egorov I. V., Novikov A. V. Direct numerical simulation of laminar-turbulent flow over a flat plate at hypersonic flow speeds, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1048–1064. doi: 10.1134/S0965542516060129.
15. Egorov I. V., Pal'chekovskaya N. V., Shvedchenko V. V. The effect of spatial perturbations of a supersonic flow on heat flux to the surface of blunt bodies, *High Temp.*, 2015, vol. 53, no. 5, pp. 677–689. doi: 10.1134/S0018151X15040094.
16. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Viscous gas flow between vertical walls, *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 11–18. doi: 10.1134/S0015462818060046.



Short Communications

MSC: 26A33, 32A10

α -Differentiable functions in complex plane

R. Pashaei¹, A. Pishkoo², M. S. Asgari¹,
D. Ebrahimi Bagha¹

¹ Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

² Nuclear Science and Technology Research Institute, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, the conformable fractional derivative of order α is defined in complex plane. Regarding to multi-valued function $z^{1-\alpha}$, we obtain fractional Cauchy–Riemann equations which in case of $\alpha = 1$ give classical Cauchy–Riemann equations. The properties relating to complex conformable fractional derivative of certain functions in complex plane have been considered. Then, we discuss about two complex conformable differential equations and solutions with their Riemann surfaces. For some values of order of derivative, α , we compare their plots.

Keywords: conformable fractional derivative, Cauchy–Riemann equations, limit based fractional derivative.

Received: 9th August, 2019 / Revised: 19th February, 2020 /

Accepted: 16th March, 2020 / First online: 25th May, 2020

Short Communication

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Pashaei R., Pishkoo A., Asgari M. S., Ebrahimi Bagha D. α -Differentiable functions in complex plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 379–389. doi: 10.14498/vsgtu1734.

Authors' Details:

Ronak Pashaei; Ph.D. Student in Mathematics (Analysis); Dept. of Mathematics; Faculty of Basic Sciences

Amir Pishkoo <https://orcid.org/0000-0001-6211-5493>

Physics and Accelerators Research School; e-mail: apishkoo@gmail.com

Mohammad Sadegh Asgari <https://orcid.org/0000-0002-0675-0262>

Associate Professor of Pure Mathematics; Dept. of Mathematics; Faculty of Basic Sciences; e-mail: moh.asgari@iauctb.ac.ir

Davood Ebrahimi Bagha; Professor in Mathematics; Dept. of Mathematics; Faculty of Basic Sciences; e-mail: dav.ebrahimi_bagha@iauctb.ac.ir

1. Introduction

The *fractional calculus* is an area of intensive research and development that can be historically divided into old and new parts. In [1], the old part of fractional calculus is referred to during the period 1695–1970. The books [2, 3] are valuable resources for enthusiasts in detailed historical background. About the starting point of fractional derivative, it should be said that L'Hopital asked the question “what does derivative of order $1/2$ mean?” namely $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}f$ in 1695. Two years later, in a letter to J. Wallis, Leibniz discussed the infinite product of Wallis for π and used the notation $d^{1/2}y$ to denote the derivative of order $1/2$ [4, 5]. Many researchers have been trying to generalize the concept of an ordinary derivative and integral to a fractional derivative and integral. Discussing the inversion of the integral equation by Grünwald in 1867, and proposing the sum of orders in the product of fractional derivatives by Letnikov in 1868 opened new ways. In 1872, Letnikov clarified the generalization of Cauchy's integral formula and utilized fractional derivatives to address differential equations. Relative to theory and applications of fractional calculus these references should be suggested [6–8].

There are many different types of fractional derivatives which have been suggested by famous researchers such as Riemann, Liouville, Riesz, Caputo, etc. The fractional derivatives of non-integer orders are utilized in the applied sciences to describe the processes and systems. Most of the fractional derivatives of non-integer orders form integro-differential operators. We can name them as “*integral based*” fractional derivatives which have a set of non-standard properties [10–14].

On the other hand, in recent years a few types of operators have been proposed that are attempted to be classified entitled “*limit based*” fractional derivatives. In 2014, Khalil et al. from one side and a few months later Katugampola from the other side proposed two limit based fractional derivatives as conformable derivatives [11, 12]. However, the main idea in these definitions has been originated from works of Tarasov within the framework of the model of continuous fractal media in [15] (for instance see Eq. (1.1)) and also works of Li and Ostojja–Starzewski in [16–19] which is called “fractal derivative”:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{|x|^{1-\alpha}}{\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

In this paper, we focus on just the limit based form of fractional derivative, namely conformable fractional derivative, in complex plane.

Complex functions provide an almost inexhaustible supply of harmonic functions which means that solutions to the two-dimensional Laplace equation. In modern mathematics, the fractional derivatives of non-integer order have been introduced by such famous mathematicians as Riemann, Liouville, Riesz, Erdelyi, Kober and other. Many of definitions for the fractional derivatives are of type an integral form such as Riemann–Liouville definition and Caputo definition. In general, the fractional derivatives of non-integer orders include a set of non-standard properties [11, 13, 20, 21].

There exists inconsistencies in the existing fractional derivatives (integral based) as follows [11].

1. All fractional derivatives do not satisfy the known formula of the derivative of the product of two functions: $D_a^\alpha(fg) = fD_a^\alpha g + gD_a^\alpha f$.
2. All fractional derivatives do not satisfy the known formula of the derivative

of the quotient of two functions:

$$D_a^\alpha \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g D_a^\alpha f - f D_a^\alpha g}{g^2}.$$

3. All fractional derivatives do not satisfy: $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$ in general.
4. Fractional derivatives do not have a corresponding *Rolle's Theorem*.
5. Fractional derivatives do not have a corresponding *Mean Value Theorem*.
6. All fractional derivatives do not obey the *Chain Rule*:

$$D_a^\alpha (f \circ g)(t) = f^{(\alpha)}(g(t)) g^{(\alpha)}(t).$$

The conformable fractional derivative has been applied in a variety of methods introduced to solve fractional differential equations. These methods include variational iteration method, sub-equation method, functional variable method, differential transform method.

In [22] different types of fractional-order logistic models in the framework of Caputo type fractional operators generated by conformable derivatives are discussed. In [23], R. W. Ibrahim et al. establish new analytic solution collections of nonlinear conformable time-fractional water wave dynamical equation in a complex domain. A new fractional model for the falling body problem has been suggested in [24], and [25]. The conformable two dimensional wave equation is solved by using differential transform method [26]. W. Chung [27], in his paper, uses the conformable fractional derivative and integral to give the fractional Newtonian mechanics. His model has been applied for fractional harmonic oscillator problem, the fractional damped oscillator problem, and the forced oscillator problem in the one-dimensional fractional dynamics. Since the conformable derivative is theoretically very more comfortable to handle, in [28], the mathematical modeling method for the fractional Bergman's model which involves fractional conformable derivative in Liouville–Caputo sense, and the fractional operators of Attangana–Baleanu–Caputo fractional derivative, is introduced. In many problems, analytic and exact solutions of fractional differential equations are not available, and numerical solutions are possible. Problems involving conformable derivative may be solved via shifted Legendre polynomials [29]. Sometimes the problem is to solve fractional conformable differential equation with integral boundary condition [30].

In the last few decades physicists, applied scientists and engineers realized that fractional differential equations provide a natural framework for fractional modeling of different processes such as viscoelastic systems, signal processing, diffusion processes, control processing, etc. [20,31–36]. Several authors have introduced the fractional derivative of complex functions. M. D. Ortigueira defines a generalized Caputo derivative for complex functions with respect to a given direction of the complex plane [37]. Since the Caputo definition is very welcome in applied science and engineering, C. Li et. al [38] generalize the Caputo derivative in real line to that in complex plane and discuss its properties. In [39], S. Owa discusses how to extend the fractional derivative to analytical functions on the unit circle $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

In 2014, R. Khalil et al. introduces limit based for fractional derivative which is called conformable fractional derivative [11] which is not really fractional. T. Abdeljawad [40] develops the definitions and the basic concepts in this new simple

interesting fractional calculus. He proposes and discusses the conformable fractional versions of chain rule, exponential functions, integration by parts, Taylor power series expansions, Laplace transforms and linear differential systems.

2. Main Results

Many complex functions are not complex differentiable of integer order at a point or some points. It is possible to define a new complex derivative which can be α -complex differentiable, but not differentiable. Let, for instance, $\alpha = 1/2$, $f(z) = z^\alpha|_{\alpha=1/2} = \sqrt{z} = z^{1/2}$ which is not differentiable at $z = 0$ ($f'(z)|_{z=0}$ does not exist). Can we define a new derivative which is differentiable at $z = 0$?

DEFINITION 2.1. *A complex function $f(z)$ is conformable fractional differentiable at a point $z \in \mathbb{C}$ if and only if the following limiting difference quotient exists:*

$$T_\alpha(f)(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z + \varepsilon z^{1-\alpha}) - f(z)}{\varepsilon}$$

for all z , and $\alpha \in (0, 1)$. If f is α -differentiable in an open set U , and $\lim_{z \rightarrow 0} f^{(\alpha)}(z)$ exists, then define $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f^{(\alpha)}(z)$.

For $x > 0$ and $0 < \alpha < 1$ the function $x^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha)\log x}$ is perfectly well defined and ready to handle. However, in the above definition the complex power function $z^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha)\log z}$ in general is multiple valued. For a multiple valued function we can not talk about its derivatives unless we restrict ourselves to a single valued branch of logarithm, like principal value branch.

THEOREM 2.1. *If a function $f(z)$ is α -differentiable at z_0 and $\alpha \in (0, 1]$, then f is continuous at z_0 .*

Let $z \in \mathbb{C}$, $r = |z|$, and $\theta = \arg z$ then for all $n \in \mathbb{N}$ De Moivre's formula is

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)].$$

Let $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ with $w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ then for n -th roots of $w = z^n$ there exist the number of n by the following formula

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\theta/n} = r^{1/n} (e^{i\theta})^{1/n} = r^{1/n} \left[\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) \right].$$

When one takes conformable fractional derivative of function $f(z)$ the following things can happen.

REMARK 1. *Before derivation the function $f(z) = z^{1/n}$ at $z = z_0$ has "n" roots while after derivation $T_\alpha f(z)$ at $z = z_0$ has "m" roots.*

EXAMPLE 2.1. *Let $n = 2$, $\alpha = 1/3$, so $m = 6$*

$$T_\alpha z^{1/n}|_{n=2, \alpha=1/3} = T_{1/3} z^{1/2} = (1/2) z^{1/2-1/3} = (1/2) z^{1/6}.$$

REMARK 2. *Before derivation the function $f(z)$ is holomorphic on \mathbb{C} (entire function) while after conformable fractional derivation, the function $T_\alpha f(z)$ is not entire function (but holomorphic on $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$).*

EXAMPLE 2.2. Let $f(z) = z$ (holomorphic on \mathbb{C}), $\alpha = 1/3$, so

$$T_\alpha f(z)|_{\alpha=1/3} = T_{1/3}f(z) = z^{2/3} \text{ (holomorphic on } \mathbb{C} \setminus \{0\}\text{)}.$$

REMARK 3. Before derivation the function $f(z)$ is holomorphic on $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ while after conformable fractional derivation, the function $T_\alpha f(z)$ is entire function (holomorphic on \mathbb{C}).

EXAMPLE 2.3. Let $f(z) = z^{1/2}$, $\alpha = 1/2$, so

$$T_\alpha f(z)|_{\alpha=1/2} = T_{1/2}f(z) = 1/2.$$

THEOREM 2.2. Let $\alpha \in (0, 1]$, and $f(z), g(z)$ be α -differentiable at a point z_0 . Then

1. $T_\alpha(c_1f(z) + c_2g(z)) = c_1T_\alpha f(z) + c_2T_\alpha g(z)$ for all $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.
2. $T_\alpha(z^c) = cz^{c-\alpha}$ for all $c \in \mathbb{C}$.
3. $T_\alpha(\mu) = 0$ for all constant functions $f(z) = \mu$.
4. $T_\alpha(f(z)g(z)) = f(z)T_\alpha g(z) + g(z)T_\alpha f(z)$.
5. $T_\alpha\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{g(z)T_\alpha f(z) - f(z)T_\alpha g(z)}{g^2(z)}$.
6. If, in addition, f is analytic, then $T_\alpha f(z)|_{z=z_0} = z_0^{1-\alpha} \frac{d}{dz} f(z_0)$.

Complex conformable fractional derivative of certain complex functions are as follows:

- $T_\alpha(z^c) = cz^{c-\alpha}$ for all $c \in \mathbb{C}$;
- $T_\alpha(1) = 0$;
- $T_\alpha(e^{cz}) = cz^{1-\alpha}e^{cz}$, $c \in \mathbb{C}$;
- $T_\alpha(\sin cz) = cz^{1-\alpha} \cos cz$, $c \in \mathbb{C}$;
- $T_\alpha(\cos cz) = cz^{1-\alpha} \sin cz$, $c \in \mathbb{C}$;
- $T_\alpha(\alpha^{-1}z^\alpha) = 1$.

Unlike the real line where there are only two directions to access a limiting point, in complex plane, there are an infinite variety of directions to access the point z . $\varepsilon = \lambda + i\omega$ accesses 0 through points in the plane not along the real axis or any line. The definition 2.1 requires that all of these “directional derivatives” must agree such that this requirement imposes severe restrictions on complex conformable fractional derivatives.

If the function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is analytic, then its first derivative is $f'(z)$ or $\frac{d}{dz}f(z)$, and we have Cauchy–Riemann equations for $u(x, y)$ and $v(x, y)$. However, if instead of $f'(z)$ we have conformable fractional derivative of the function $f(z)$, namely $T_\alpha f(z) = z^{1-\alpha} \frac{df}{dz}(z)$, then we can verify its real and imaginary parts for the generalized Cauchy–Riemann equations. So we give the following theorem as the necessary condition.

THEOREM 2.3. A complex function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ depending on $z = x + iy$ has α -conformable fractional derivative of $f(z)$ of order α if and only if its real and imaginary parts are continuously differentiable and satisfy the following “conformable Cauchy–Riemann” equations:

$$\operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial u}{\partial x} - \operatorname{Im}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial v}{\partial y} + \operatorname{Im}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\operatorname{Im}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Im}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial v}{\partial y} - \operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Proof. As in classical approach, we first choose $\varepsilon = \lambda$ (namely $\omega = 0$) for which we have

$$\begin{aligned} T_\alpha f(z) \Big|_{\varepsilon=\lambda} &= [\operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) + i \operatorname{Im}(z^{1-\alpha})] \frac{df(z)}{dz} \Big|_{\varepsilon=\lambda} = \\ &= [\operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) + i \operatorname{Im}(z^{1-\alpha})] \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Now, choosing $\varepsilon = i\omega$ (namely $\lambda = 0$) gives us

$$\begin{aligned} T_\alpha f(z) \Big|_{\varepsilon=i\omega} &= [\operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) + i \operatorname{Im}(z^{1-\alpha})] \frac{df(z)}{dz} \Big|_{\varepsilon=i\omega} = \\ &= [\operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) + i \operatorname{Im}(z^{1-\alpha})] \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

REMARK 4. For the value of $\alpha = 1$, it gives

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) &= [(x^2 + y^2)^{(1-\alpha)/2} \cos[(1 - \alpha) \arg(x + iy)]], & \lim_{\alpha \rightarrow 1} \operatorname{Re}(z^{1-\alpha}) &= 1; \\ \operatorname{Im}(z^{1-\alpha}) &= [(x^2 + y^2)^{(1-\alpha)/2} \sin[(1 - \alpha) \arg(x + iy)]], & \lim_{\alpha \rightarrow 1} \operatorname{Im}(z^{1-\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

So we obtain classical Cauchy–Riemann equations from their fractional counterpart.

3. Complex Conformable Differential Equations

Let $T_\alpha(z^c) = cz^{c-\alpha}$ for all $c \in \mathbb{C}$. Multiplying both sides by the coefficient c^{-1} gives

$$T_\alpha(c^{-1}z^c) = z^{c-\alpha} \text{ for all } c \in \mathbb{C}.$$

EXAMPLE 3.1. If $c = \alpha$ we obtain the simplest complex conformable differential equation:

$$T_\alpha f(z) - 1 = 0,$$

where its solution is $f(z) = \alpha^{-1}z^\alpha$.

In Fig. 1 vertical axis shows the real part of $f(z) = 2\sqrt{z}$ while the imaginary part of $f(z) = 2\sqrt{z}$ has been represented by the coloration of the points.

EXAMPLE 3.2. Now let us calculate $T_\alpha(e^{\alpha^{-1}z^\alpha})$ which gives us $e^{\alpha^{-1}z^\alpha}$. So we deduce another complex conformable differential equation:

$$T_\alpha g(z) - g(z) = 0,$$

where its solution is $g(z) = e^{\alpha^{-1}z^\alpha}$.

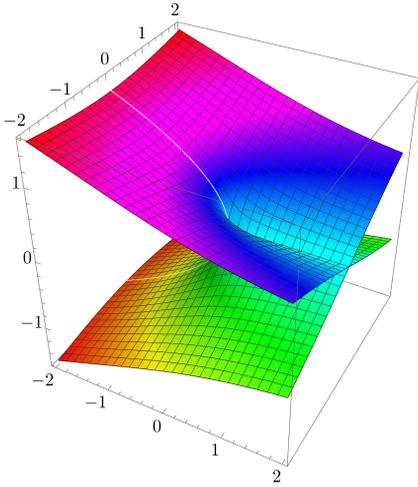


Figure 1. Riemann surface for the function $f(z) = 2\sqrt{z}$ for which $\alpha = 1/2$

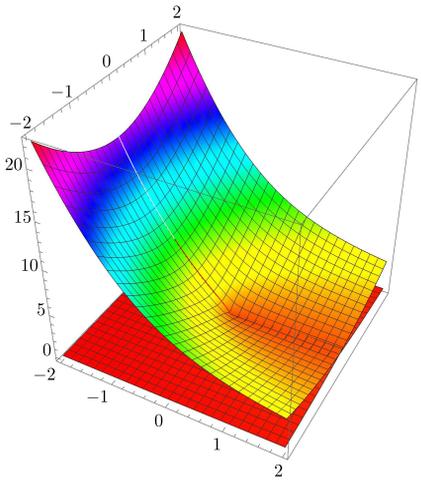


Figure 2. Riemann surface for the function $g(z) = e^{2\sqrt{z}}$ for which $\alpha = 1/2$

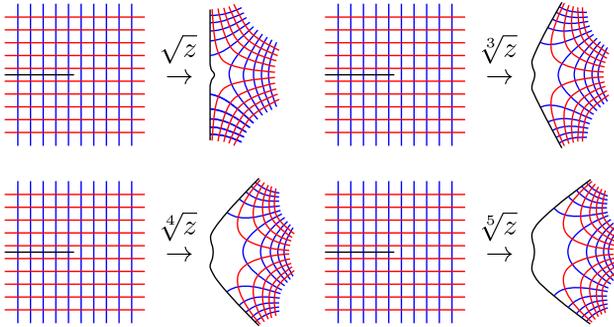


Figure 3. Mapping of lines by $z^{1/2}, z^{1/3}, z^{1/4}, z^{1/5}$ for $x \in [-1, 1]$

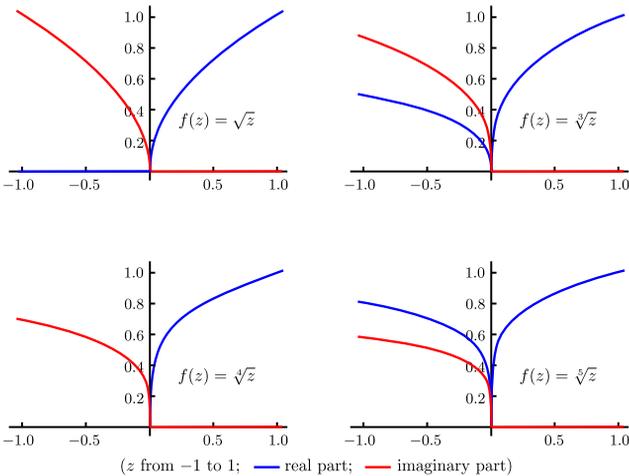


Figure 4. Real and imaginary parts of functions $z^{1/2}, z^{1/3}, z^{1/4}, z^{1/5}$

Similarly, in Fig. 2 vertical axis shows the real part of $g(z) = e^{2\sqrt{z}}$ while the imaginary part of $g(z) = e^{2\sqrt{z}}$ has been represented by the coloration of the points.

To solve boundary value problems for the Laplace equation, the study of analytic maps is very important. Comparing the plots with different values of α has been shown in Fig. 3 and Fig. 4.

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship or publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript. Mrs Ronak Pashaei is Ph.D. student in mathematics whose supervisors are Dr. Mohammad Sadegh Asgari and Dr. Amir Pishkoo, and her advisor is Dr. Davood Ebrahimi Bagha.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers and the editor for valuable remarks which contributed to the improvement of the paper.

References

1. Tenreiro Machado J., Kiryakova V., Mainardi F. A poster about the recent history of fractional calculus, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 329–334, <http://eudml.org/doc/219594>.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Neq York, Gordon and Breach Science Publ., 1993, xxxvi+976 pp.
3. Oldham K., Spanier J. *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 111. New York, London, Academic Press, 1974, xiii+234 pp.
4. de Oliveira E. C. *Solved Exercises in Fractional Calculus*, Studies in Systems, Decision and Control, vol. 240. Cham, Springer, 2019, xviii+321 p. doi: 10.1007/978-3-030-20524-9.
5. Tenreiro Machado J., Kiryakova V., Mainardi F. Recent history of fractional calculus, *Comm. Nonlinear Science Numerical Simulation*, 2011, vol. 16, no. 3, pp. 1140–1153. doi: 10.1016/j.cnsns.2010.05.027.
6. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp.
7. Podlubny J. *Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, CA, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
8. Miller K. S., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, John Wiley and Sons, 1993, xiii+366 pp.
9. Pashaei R., Asgari M., Pishkoo A. Conformable derivatives in Laplace equation and fractional Fourier series solution, *Int. Ann. Sci.*, 2019, vol. 9, no. 1, pp. 1–7. doi: 10.21467/ias.9.1.1-7.
10. Ortigueira M. D. *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*, Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 84. Dordrecht, Springer, 2011, xiv+152 p. doi: 10.1007/978-94-007-0747-4.
11. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M. A new definition of fractional derivative, *J. Comp. Appl. Math.*, 2014, vol. 264, pp. 65–70. doi: 10.1016/j.cam.2014.01.002.
12. Katugampola U. N. *A new fractional derivative with classical properties*, 2014, arXiv: 1410.6535 [math.CA].

13. Ortigueira M. D., Tenreiro Machado J. A. What is a fractional derivative?, *J. Comp. Phys.*, 2015, vol. 293, pp. 4–13. doi: 10.1016/j.jcp.2014.07.019.
14. Tarasov V. E. No nonlocality. No fractional derivative, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2018, vol. 62, pp. 157–163, arXiv:1803.00750 [math.CA]. doi: 10.1016/j.cnsns.2018.02.019.
15. Tarasov V. E. Electromagnetic fields on fractals, *Modern Phys. Lett. A.*, 2006, vol. 21, no. 20, pp. 1587–1600, arXiv:0711.1783. doi: 10.1142/S0217732306020974.
16. Li J., Ostoja-Starzewski M. Fractal solids, product measures and fractional wave equations, *Proc. R. Soc. A.*, vol. 465, no. 2108, pp. 2521–2536. doi: 10.1098/rspa.2009.0101.
17. Ostoja-Starzewski M., Li J. Fractal materials, beams, and fracture mechanics, *Z. angew. Math. Phys.*, 2009, vol. 60, no. 6, pp. 1194–1205. doi: 10.1007/s00033-009-8120-8.
18. Ostoja-Starzewski M. Electromagnetism on anisotropic fractal media, *Z. angew. Math. Phys.*, 2013, vol. 64, no. 2, pp. 381–390. doi: 10.1007/s00033-012-0230-z.
19. Ostoja-Starzewski M., Li J., Joumaa H., Demmie P. N. From fractal media to continuum mechanics, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 94, no. 5, pp. 373–401. doi: 10.1002/zamm.201200164.
20. Ortigueira M. D. *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*, Lecture Notes in Electrical Engineering, vol. 84. Dordrecht, Springer, 2011, xiv+154 p. doi: 10.1007/978-94-007-0747-4.
21. Olver P. J. *Complex Analysis and Conformal Mapping*, Lecture Notes, 2018, 84 pp., http://www-users.math.umn.edu/~olver/ln_/cml.pdf.
22. Abdeljawad T., Al-Mdallal Q. M., Jarad F. Fractional logistic models in the frame of fractional operators generated by conformable derivatives, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, vol. 119, pp. 94–101. doi: 10.1016/j.chaos.2018.12.015.
23. Ibrahim R. W., Meshram C., Hadid S. B., Momani S. Analytic solutions of the generalized water wave dynamical equations based on time-space symmetric differential operator, *J. Ocean Eng. Sci.*, 2020, vol. 5, no. 2, pp. 186–195. doi: 10.1016/j.joes.2019.11.001.
24. Ebaid A., Masaedeh B., El-Zahar E. A new fractional model for the falling body problem, *Chinese Phys. Lett.*, vol. 34, no. 2, 020201. doi: 10.1088/0256-307X/34/2/020201.
25. Alharbi F.M., Baleanu D., Ebaid A. Physical properties of the projectile motion using the conformable derivative, *Chinese J. Phys.*, 2019, vol. 58, pp. 18–28. doi: 10.1016/j.cjph.2018.12.010.
26. Kaabar M.K.A. *Novel methods for solving the conformable wave equation*, 2019, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02267015>.
27. Chung W. S. Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative, *J. Comp. Appl. Math.*, 2015, vol. 290, pp. 150–158. doi: 10.1016/j.cam.2015.04.049.
28. Morales-Delgado V. F., Gómez-Aguilar J. F., Taneco-Hernández M. A. Mathematical modeling approach to the fractional Bergman’s model, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 805–821. doi: 10.3934/dcdss.2020046.
29. Çerdik Yaslan H., Mutlu F. Numerical solution of the conformable differential equations via shifted Legendre polynomials, *Int. J. Comp. Math.*, 2020, vol. 97, no. 5, pp. 1016–1028. doi: 10.1080/00207160.2019.1605059.
30. Meng S., Cui Y. The extremal solution to conformable fractional differential equations involving integral boundary condition, *Mathematics*, 2019, vol. 7, no. 2, 186. doi: 10.3390/math7020186.
31. Sibatov R. T. Anomalous grain boundary diffusion: Fractional calculus approach, *Adv. Math. Phys.*, vol. 2019, 8017363, 9 p. doi: 10.1155/2019/8017363
32. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *J. Comp. Phys.*, 2015, vol. 280, pp. 424–438, arXiv:1404.5221 [math.NA]. doi: 10.1016/j.jcp.2014.09.031.
33. Amanov D., Ashyralyev A. Initial-boundary value problem for fractional partial differential equations of higher order, *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, 973102, 16 p. doi: 10.1155/2012/973102

34. *Application of Fractional Calculus in Physics*, ed. R. Hilfer. Singapore, World Scientific, 2000. doi: 10.1142/3779.
35. Muslih S. I., Baleanu D. Fractional multipoles in fractional space, *Nonlinear Anal. RWA*, 2007, vol. 8, no. 1, pp. 198–203. doi: 10.1016/j.nonrwa.2005.07.001.
36. Tavazoei M. S., Haeri M. Stabilization of unstable fixed points of chaotic fractional order systems by a state fractional PI controller, *Eur. J. Control*, 2008, vol. 14, no. 3, pp. 247–257. doi: 10.3166/ejc.14.247-257.
37. Ortigueira M. D. A coherent approach to non-integer order derivatives, *Signal Processing*, 2006, vol. 86, no. 10, pp. 2505–2515. doi: 10.1016/j.sigpro.2006.02.002.
38. Li C., Dao X., Guoa P. Fractional derivatives in complex planes, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications*, 2009, vol. 71, no. 5–6, pp. 1857–1869. doi: 0.1016/j.na.2009.01.021.
39. Owa S. Some properties of fractional calculus operators for certain analytic functions, *RIMS Kôkyûroku*, 2009, vol. 1626, pp. 86–92, <http://hdl.handle.net/2433/140314>.
40. Abdeljawad T. On conformable fractional calculus, *J. Comp. Appl. Math.*, 2015, vol. 279, pp. 57–66. doi: 10.1016/j.cam.2014.10.016.

УДК 517.548

 **α -Дифференцируемые функции
в комплексной плоскости****R. Pashaei¹, A. Pishkoo², M. S. Asgari¹,
D. Ebrahimi Bagha¹**¹ Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.² Nuclear Science and Technology Research Institute, Tehran, Iran.**Аннотация**

В комплексной плоскости вводится взвешенная дробная производная порядка α . Относительно многозначной функции $z^{1-\alpha}$ получены дробные уравнения Коши–Римана, которые при $\alpha = 1$ совпадают с классическими уравнениями Коши–Римана. Для некоторых функций в комплексной плоскости рассмотрены свойства, относящиеся к комплексной взвешенной дробной производной. Обсуждаются два комплексных дифференциальных уравнения специальной формы. Для некоторых значений α приводятся римановы поверхности их решений и сравниваются их графики.

Ключевые слова: взвешенная дробная производная, уравнения Коши–Римана, предельная дробная производная.

Получение: 9 августа 2019 г. / Исправление: 19 февраля 2020 г. /

Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 25 мая 2020 г.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи. Ronak Pashaei — соискатель степени Ph.D. в математике. Доктор Mohammad Sadegh Asgari и доктор Amir Pishkoo являются её руководителями. Доктор Davood Ebrahimi Bagha является её советником.

Благодарности. Авторы благодарны рецензентам и редактору за ценные замечания, которые способствовали улучшению рукописи статьи.

Краткое сообщение

© © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Pashaei R., Pishkoo A., Asgari M. S., Ebrahimi Bagha D. α -Differentiable functions in complex plane. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 379–389. doi: 10.14498/vsgtu1734.

Сведения об авторах

Ronak Pashaei; Ph.D. Student in Mathematics (Analysis); Dept. of Mathematics; Faculty of Basic Sciences

Amir Pishkoo ✉ ⓘ <https://orcid.org/0000-0001-6211-5493>

Physics and Accelerators Research School; e-mail: apishkoo@gmail.com

Mohammad Sadegh Asgari ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-0675-0262>

Associate Professor of Pure Mathematics; Dept. of Mathematics; Faculty of Basic Sciences; e-mail: moh.asgari@iauctb.ac.ir

Davood Ebrahimi Bagha; Professor in Mathematics; Dept. of Mathematics; Faculty of Basic Sciences; e-mail: dav.ebrahimi_bagha@iauctb.ac.ir



MSC: 76T10

An undamped oscillation model with two different contact angles for a spherical droplet impacting on solid surface

*Shi Chen, Bozhong Cong, Dongqi Zhang,
Xiaohui Liu, Shengqiang Shen*

Dalian University of Technology,
Dalian, 116024, China.

Abstract

In order to further elucidate the dynamic theory of droplet oscillating on solid surface, a new handling method of contact angle of the droplet during the process of the oscillation was founded, which is based on the spherical model. The influence of gravity on the contact angle and spreading radius was discussed. Thus, an equation between the spreading radius of the droplet and time flow was founded. The results of theoretical calculation were compared with smoothed numerical results.

Keywords: droplet oscillation, contact angle, theoretical analysis, spectrum analysis.

Received: 2nd January, 2020 / Revised: 12th March, 2020 /

Accepted: 16th March, 2020 / First online: 30th June, 2020

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Chen S., Cong B., Zhang D., Liu X., Shen S. An undamped oscillation model with two different contact angles for a spherical droplet impacting on solid surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 390–400. doi: 10.14498/vsgtu1763.

Authors' Details:

Shi Chen; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: dlthermo@dlut.edu.cn

Bozhong Cong; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: ttcbz@mail.dlut.edu.cn

Dongqi Zhang; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education

Xiaohui Liu ✉; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: lxh723@dlut.edu.cn

Shengqiang Shen; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: zzbshen@dlut.edu.cn

1. Introduction

As a common phenomenon in nature, droplets impacting on solid surfaces exists in many fields, such as engineering, chemical industry, agriculture, aerospace and energy. For examples, the liquid fuel injection in the internal combustion engine [1], the ink jet of the printer [2], the process of seawater evaporation in desalination system [3], the spraying of the refrigerant in the evaporator in the refrigeration system [4], etc. The study of relationships among the dynamic parameters, initial parameters of droplets and initial can be beneficial to predict the processes of droplets impacting on solid flats.

For a droplet impacting on solid surfaces, according to the initial parameters, there may be oscillations, bounces, splashes, etc. Compared with other circumstances, the oscillations have more value and possibility to be studied. Since T. Young [5] presented that the contact angle between liquid and solid surface was constant, and P.S. Laplace [6] inferred the relationship between additional pressure and radius of curvature, many studies have been done by experiments, numerical simulations and theoretical analysis.

In the aspect of experimental studies, M. Marengo et al. [7] studied the effects of the impact parameters on the droplet impingement, and found that the surface wettability had a strong influence on the spreading of droplet in the later stages of the process. I.S. Bayer [8] studied the dynamic characters of contact angle between smooth surface and droplets with different wettability. M. Remer et al. [9] studied the variation of droplet dynamical contact angle after impacting on three kinds of coating surfaces.

In the aspect of numerical simulation, S.F. Lunkad et al. [10] simulated the drop impact and spreading process on horizontal and inclined surfaces using the volume of fluid (VOF) method, and investigated the effects of surface inclination, surface wetting characteristics, liquid properties and impact velocity on the droplet oscillation by using static contact angle (SCA) and dynamic contact angle (DCA) models. Y. Yao et al. [11] analyzed droplets oscillation with VOF method and introduced a model of dynamical contact angle to improve the accuracy of simulation. Š. Šikalo et al. [12] carried out the numerical simulations of a single drop impacting onto a dry, partially wettable substratum.

In the aspect of theoretical analysis, S. Vafaei et al. [13, 14] explained the dependence of contact angle on the size of liquid droplets on smooth solid substrates, and demonstrated that for sessile droplets on smooth surfaces, the contact angle can be uniquely determined for given droplet mass (or volume) and liquid/solid/gas properties. I.V. Roisman et al. [15] studied the normal impact of a liquid drop on a dry solid surface theoretically, and introduced a strictly theoretical model to predict the evolution of the drop diameter.

The purpose of this paper is to establish an amended theoretical model of undamped droplet oscillation. Compared with original model, in which droplet contact angle keeps constant value, the droplet contact angle in new model varies with spreading radius and droplet volume. The waveform of droplet spreading radius obtained from new model, original model and numerical simulation were compared.

2. Theoretical Model

2.1. The Oscillating Equation of Spherical Segment Droplet with Changing Contact Angle

For a droplet oscillating on a horizontal solid surface, when the size of droplet is short enough that the influence of gravity on the droplet shape can be ignored. The shape of the droplet can be considered as a sphere, shown in Fig. 1.

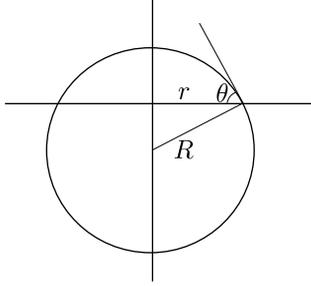


Figure 1. The geometrical model of droplet

At a certain moment of oscillation, spreading radius of droplet in horizontal direction is r , the radius of the sphere is R , the height is z and the contact angle between the droplet and the solid surface is θ . According to the geometrical relationship, the equation between r , R , and θ can be written as:

$$\frac{3V}{\pi r^3} = (1 - \cos \theta)^2(2 + \cos \theta), \quad (1)$$

$$R = \frac{r}{\sin \theta}, \quad (2)$$

$$z = r \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad (3)$$

where V is the droplet volume.

When a droplet impacts on a solid surface, the shape of droplet is strongly irregular and hard to describe in beginning several oscillation periods after impact. But the oscillation will be gradually stabilized with close periods and amplitudes. Thus, it can be assumed that the droplet keeps the shape of spherical cap in the hereafter oscillation.

In previous study [16], the oscillation of droplet could be seen as the result of interaction of the surface tension, the internal pressure and the inertial force. A differential element is selected in the segment droplet of the angle, shown in Fig. 2.

And the oscillating equation of spherical segment droplet can be written as [16]:

$$\left[-\frac{\pi \rho R^4 \theta}{4r} + \frac{\pi \rho (R - z)}{12} (2r^2 + 3R^2) \right] \frac{d^2 r}{dt^2} - 2\pi \sigma (l - r \cos \varphi) + \frac{4\pi \sigma A}{R} + 2\pi \rho g \left(RA - \frac{r^3}{3} \right) = 0, \quad (4)$$

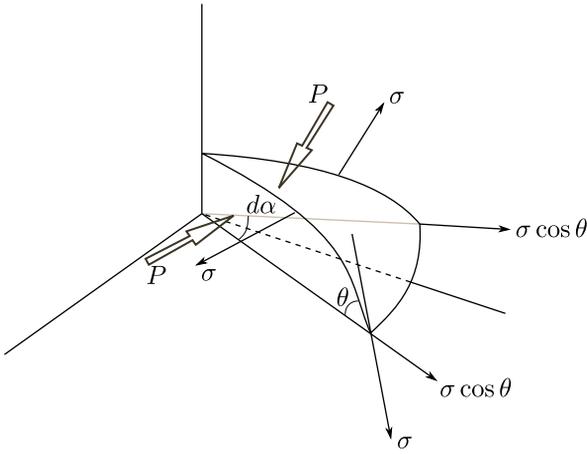


Figure 2. The force analysis of droplet differential. The surface tension and the internal pressure equally and vertically act on each vertical section of the droplet. The surface tension points to the inside of differential element and the internal pressure points to the outside of differential element

where φ — the intrinsic contact angle of the droplet; θ — the dynamic contact angle of the droplet;¹ σ — the surface tension coefficient;

$$l = RA \tag{5}$$

— arc length of the great circle of droplet;

$$A = \frac{1}{2} [Rl - r(R - z)] \tag{6}$$

— the sectional area of the droplet in the vertical plane.

Eq. (4) can be also written as:

$$\begin{aligned} P \frac{d^2 r}{dt^2} + Q + W &= 0, \tag{7} \\ P &= -\frac{\pi \rho R^4 \theta}{4r} + \frac{\pi \rho (R - z)}{12} (2r^2 + 3R^2), \\ Q &= -2\pi \sigma (l - r \cos \varphi) + \frac{4\pi \sigma A}{R}, \\ W &= 2\pi \rho g \left(RA - \frac{r^3}{3} \right), \end{aligned}$$

where P — the factor of inertia, Q — the factor of surface tension and internal pressure, W — the factor of gravity.

When substituted equations of geometrical relationship (Eq. (1)–(3), and Eq. (5), (6)), P , Q , and W can be written as:

$$P = \pi \rho r^3 \left(\frac{\cos \theta}{6 \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{4 \sin^3 \theta} \frac{\theta}{4 \sin^4 \theta} \right), \tag{8}$$

¹The angle φ is determined by the involved surface energies. When the gravity is absent and the droplet is static on the horizontal solid surface, $\varphi = \theta$. The angle θ can be influenced by inertial force and gravity of the droplet.

$$Q = 2\pi\sigma r(\cos \varphi - \cos \theta), \tag{9}$$

$$W = \pi\rho gr^3\left(\frac{\theta}{\sin^3 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{2}{3}\right). \tag{10}$$

In this model, the intrinsic contact angle is a constant value, which determines direction of the contact force from the solid surface. And the dynamic contact angle determines the shape of droplet. The geometrical relationship between them is shown in Fig. 3.

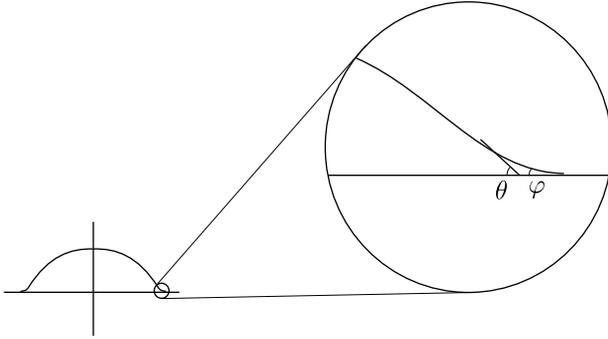


Figure 3. The geometrical relationship between the intrinsic contact angle and the dynamic contact angle

The deviation between the intrinsic contact angle and the dynamic contact angle increases with the increase of acceleration of the droplet. And the expression of the contact force from the solid surface in Fig. 2, “ $\sigma \cos \theta$ ” can be replaced by “ $\sigma \cos \varphi$ ”.

2.2. The Influence of Gravity

When the spreading radius r reaches the balance value (or the droplet keeps static):

$$P \frac{d^2 r}{dt^2} + Q + W = 0.$$

Substituted Eq. (8)–(10) and multiplied:

$$\cos \varphi = \cos \theta - \frac{\rho gr^2}{2\sigma} \left(\frac{\theta}{\sin^3 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \frac{2}{3} \right).$$

Obviously, in the absence of gravity, $\theta = \varphi$. In normal gravity condition that the droplet can still keep the shape of spherical segment (called micro gravity in followings), the dynamic contact angle θ can be calculated by iteration from Eq. (1) and Eq. (5). The influence of gravity is shown in Fig. 4.

With the increase of droplet volume, the deviation between the micro gravity solutions and the absence gravity solutions on dynamic contact angle and spreading radius becomes larger, but that of spreading radius is quite small.

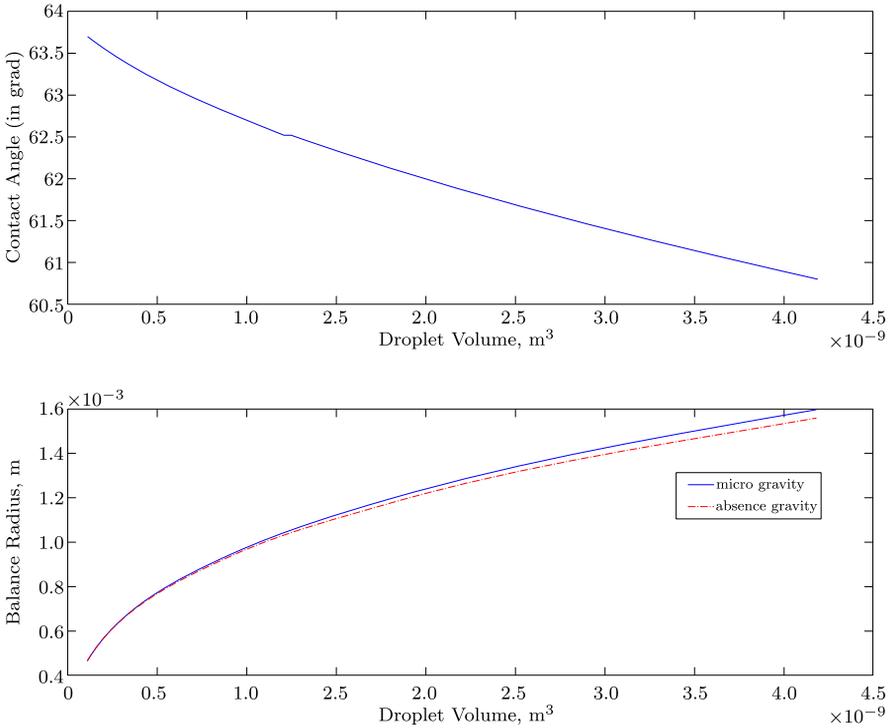


Figure 4. (top) the influence of droplet volume on contact angle θ (here, the gravity of droplet depends on the droplet volume); (bottom) the influence of gravity on balance radius

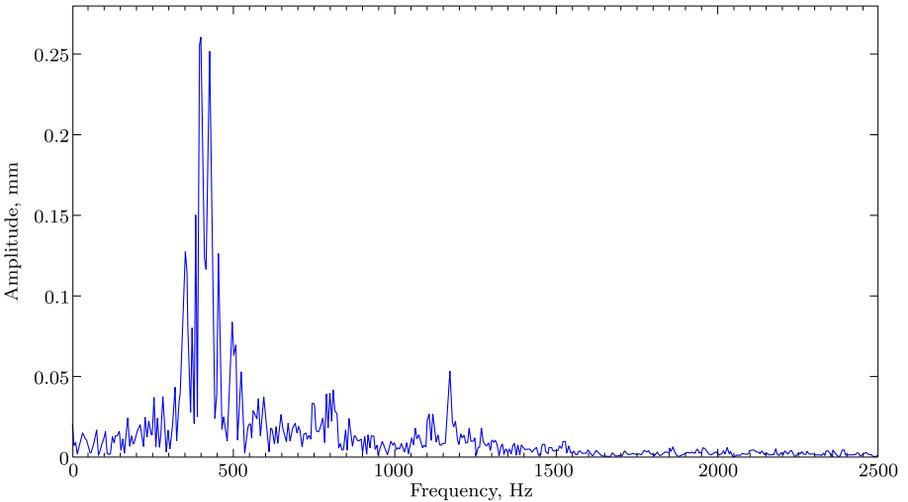


Figure 5. The frequency spectrum of numerical data

3. Numerical Simulation

3.1. Original Case

For the numerical solution, the processes of drop oscillation are simulated by using the VOF model of Fluent. The body force weighted model is used to calculate of pressure and gravity balance. The PISO algorithm is used to couple the droplet velocity and pressure in the momentum equation. The slip boundary condition is used and the shear stress is 0 Pa. The viscosity of water is $1.003 \cdot 10^{-5}$ Pa \cdot s which is multiplied by 0.01 in order to simulate the undamped oscillation of droplet. The time step is $4 \cdot 10^{-6}$ s, and the residual error is $1 \cdot 10^{-5}$. Others keep the default algorithm.

3.2. Spectral Analysis

The data from original case contains much ingredient of noise. This is because the oscillation is influenced by many minimal factors. After eliminating several data points with extreme deviation, the data was resampled by FFT operation. The spectral analysis of the original data is shown in Fig. 5.

In Fig. 5, the main frequency of the oscillation is concentrate upon [250 Hz, 550 Hz]. The corresponding frequency value of the peak value in figure is 426 Hz, which means the periods of the oscillation is about 2.35 ms with the same initial parameters shown in Tab. 1.

Table 1

The initial parameters of theoretical and numerical calculation

Initial Speed	Droplet Volume	Gravity	Density	Surface Tension
0.8 m/s	$1.1310 \cdot 10^{-10}$ m ³	9.8 m/s	1003 kg/m ³	0.073 N/m

3.3. Data Smoothing

To eliminate the noise, a Butterworth filter was applied. The response type is bandpass with the pass band [400 Hz, 500 Hz], the fluctuate is less than 1 dB. On the both side of pass band, the signal is decreased to 10 dB. The frequency spectrum after smoothing is shown in Fig. 6.

After smoothing, the data can be regarded as a superposition of several sine curves, with close frequency, amplitude and phase position.

4. Comparison

Eq. (7) is solved by using the fourth-order Runge–Kutta method in MATLAB R2016a.

The relationship between spreading radius and time flow of theoretical and numerical results (after smoothing) is shown in Fig. 7, with the same initial parameter shown in Tab. 1.

The period of theoretical results is 2.37 ms, which is almost equal to the average periods of numerical results. The amplitude of theoretical results is about 10 % larger than the average value of the numerical results. Compared with constant contact angle model [16], the average periods were more close to the numerical data (1.8 ms). The relationship between spreading radius and its accelerated velocity is shown in Fig. 8.

When ζ is approaching or higher than the balance value (0), the deviation between theoretical and numerical results is relatively small, but when ζ is far

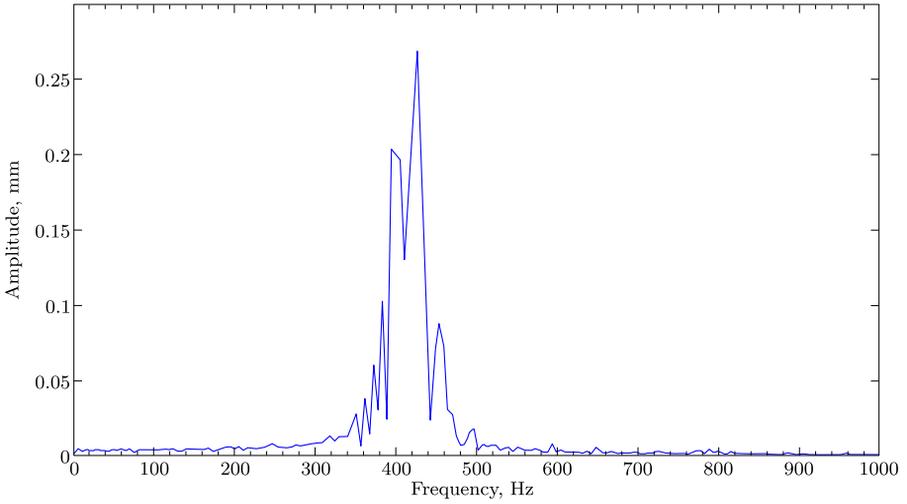


Figure 6. The frequency spectrum after smoothing

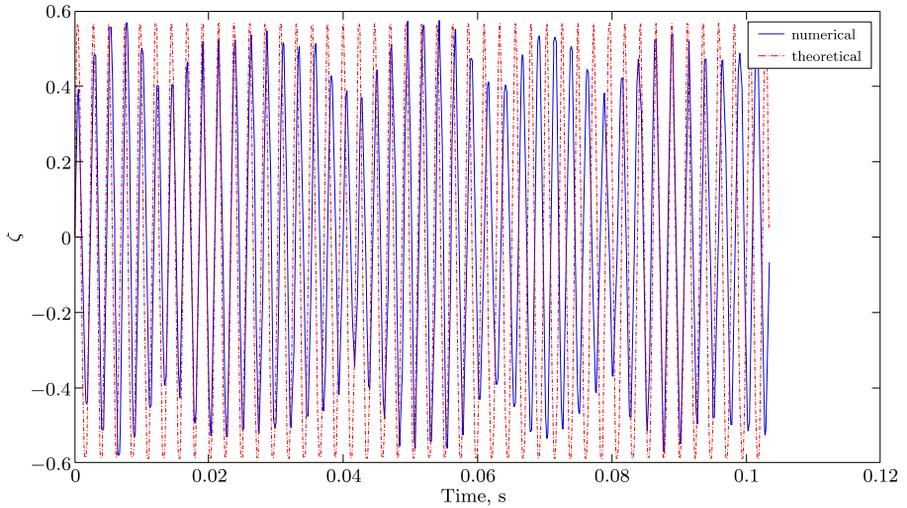


Figure 7. The relationship between spreading radius and time flow ($\zeta = (r - r_b)/r_b$, r_b is the theoretical balance radius)

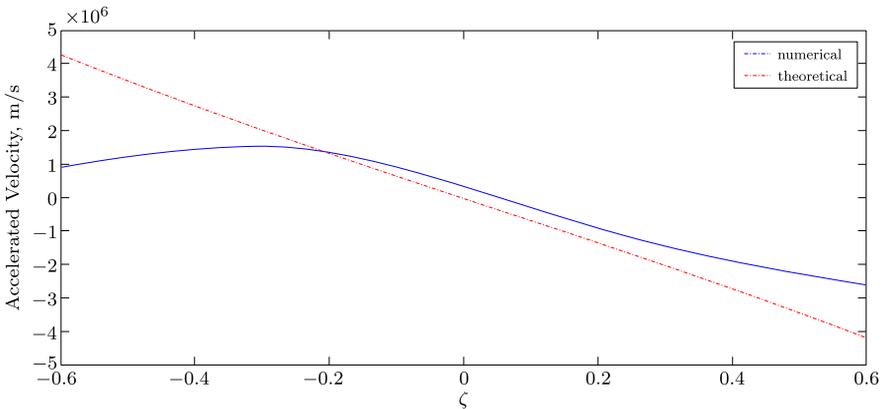


Figure 8. The relationship between spreading radius and its accelerated velocity

below the balance value, the deviation is considerable. This is because an obvious distortion would happen on the shape of droplet and the above-mentioned relationships (Eq. (8)–(10)) would lose efficacy. Besides, because the relationship between spreading radius and its acceleration in present model is not linear, the oscillation period is related to the initial velocity.

5. Discussion

The process of undamped oscillation for a droplet impacting on solid surface was theoretically described by an equation based on spherical segment model. Followings are several conclusions.

The contact of the droplet is changing in the oscillation and geometrically calculated. The influence of gravity on contact angle and spreading radius was analyzed quantitatively, the deviation was lower than the constant contact angle model. However, the result was based on the geometrical model of spherical segment of droplet, which might be inaccurate under the influence of gravity. More study was needed in this content.

After spectrum analyzing and smoothing by a filter, the numerical solutions can be regarded as a superposition of several sine curves with close frequency, amplitude and phase positions. The relationship between spreading radius and its accelerated velocity was founded by polynomial fit, and the curve was symmetrical about the balance point and strongly linear.

By comparing the results of theoretical and numerical calculation, when the spreading radius of the droplet approaches the balance value, the deviation between two solutions are small, but when the spreading radius is far from the balance value, the deviation can be considerable. And the deviation of far below from the balance value is larger than that of far above from the balance value. This is possibly because when the spreading radius is far from the balance value, the shape of the droplet would also deviate from spherical segment. More work about the amendment of the shape of the droplet in oscillation is needed in later study.

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship or publication of this paper.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research was funded by National Natural Science Foundation of China (grant no. 51936002).

References

1. Nakayama Y., Kidokoro T., Sakurai K. *Fuel injection control system of an internal combustion engine*, US Patent no. US9169758B2, 2015, <https://patents.google.com/patent/US9169758B2/>.
2. Slater S.D., Clippingdale A.J., Newcombe G.C.F. *Printing process and liquid ink jet ink*, US Patent no. US9156256B2, 2015, <https://patents.google.com/patent/US9156256B2/>.

3. Qi C.H., Feng H.J., Lv H.Q., Miao C. Numerical and experimental research on the heat transfer of seawater desalination with liquid film outside elliptical tube, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2016, vol. 93, pp. 207–216. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.043.
4. Hartfield J.P., Sanborn D.F. *Falling film evaporator with refrigerant distribution system*, Canada Patent no. CA2219676A1, 1995, <https://patents.google.com/patent/CA2219676A1/>.
5. Young T. An essay on the cohesion of fluids, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1805, vol. 95, pp. 65–87. doi: 10.1098/rstl.1805.0005.
6. Laplace P.S. Sur l'action capillaire. Supplément à la théorie de l'action capillaire, In: *Traité de mécanique céleste*, vol. 4, Supplement 1, Livre X. Paris, Gauthier–Villars et fils, 1805, pp. 771–777.
7. Šikalo Š., Marengo M., Tropea C., Ganić E.N. Analysis of impact of droplets on horizontal surfaces, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2002, vol. 25, no. 7, pp. 503–510. doi: 10.1016/S0894-1777(01)00109-1.
8. Bayer I. S., Megaridis C. M. Contact angle dynamics in droplets impacting on flat surfaces with different wetting characteristics, *J. Fluid Mechanics*, 2006, vol. 558, pp. 415–449. doi: 10.1017/S0022112006000231.
9. Remer M., Psarski M., Gumowski K., Rokicki J., Sobieraj G., Kaliush M., Pawlak D., Celichowski G. Dynamic water contact angle during initial phases of droplet impingement, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2016, vol. 508, pp. 57–69. doi: 10.1016/j.colsurfa.2016.08.028.
10. Lunkad S. F., Buwa V. V., Nigam K.D.P. Numerical simulations of drop impact and spreading on horizontal and inclined surfaces, *Chem. Eng. Sci.*, 2007, vol. 62, no. 24, pp. 7214–7224. doi: 10.1016/j.ces.2007.07.036.
11. Yao Y., Meng S., Li C., Chen X., Yang R. Droplet oscillation after impact on a solid surface, *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2016, vol. 7, Fluids Engineering, IMECE2016-66025. doi: 10.1115/IMECE2016-66025.
12. Šikalo Š., Wilhelm H.-D., Roisman I. V., Jakirlić S., Tropea C. Dynamic contact angle of spreading droplets: Experiments and simulations, *Phys. Fluids*, 2005, vol. 17, no. 6, 062103. doi: 10.1063/1.1928828.
13. Vafaei S., Podowski M. Z. Theoretical analysis on the effect of liquid droplet geometry on contact angle, *Nuclear Eng. Design*, 2005, vol. 235, no. 10–12, pp. 1293–1301. doi: 10.1016/j.nucengdes.2005.02.026.
14. Vafaei S., Podowski M. Z. Analysis of the relationship between liquid droplet size and contact angle, *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2005, vol. 113, no. 2–3, pp. 133–146. doi: 10.1016/j.cis.2005.03.001.
15. Roisman I. V., Rioboo R., Tropea C. Normal impact of a liquid drop on a dry surface: model for spreading and receding, *Proc. Royal. Soc. A*, 2002, vol. 458, pp. 1411–1430. doi: 10.1098/rspa.2001.0923.
16. Chen S., Zhang D., Shen S., Liu X., Chen Y. Spherical drop impact on solid surfaces: Undamped oscillation theoretical model, *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 1984, no. 1, 020032. doi: 10.1063/1.5046616.

УДК 517.958:531.32

Модель незатухающего колебания для сферической капли на твердой поверхности с двумя различными углами контакта

*Shi Chen, Bozhong Cong, Dongqi Zhang,
Xiaohui Liu, Shengqiang Shen*

Dalian University of Technology,
Dalian, 116024, China.

Аннотация

Предложен нелинейный подход описания колебания сферической капли на твердой поверхности. Интегрирование уравнений движений осуществляется без использования линеаризации тригонометрических функций, зависящих от угла контакта. Иными словами, угол контакта является произвольной конечной величиной. Проведено исследование влияния силы тяжести на угол контакта и радиус распространения капли по твердой поверхности. Таким образом, было найдено нелинейное уравнение, описывающее изменение радиуса распространения капли в зависимости от времени. Данное уравнение было численно проинтегрировано. Исследование численной сходимости осуществлялось посредством сравнения с известными модельными точными решениями и известными экспериментальными данными. На основании исследования методами численного интегрирования полученного в статье уравнения можно сделать вывод о целесообразности использования математической модели для описания и исследования новых физических эффектов при колебании капель.

Ключевые слова: колебание капли, угол контакта, теоретический анализ, спектральный анализ.

Получение: 2 января 2020 г. / Исправление: 12 марта 2020 г. /
Принятие: 16 марта 2020 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2020 г.

Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Chen S., Cong B., Zhang D., Liu X., Shen S. An undamped oscillation model with two different contact angles for a spherical droplet impacting on solid surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 390–400. doi: 10.14498/vsgtu1763.

Сведения об авторах

Shi Chen; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: dlthermo@dlut.edu.cn

Bozhong Cong; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: ttcbz@mail.dlut.edu.cn

Dongqi Zhang; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education

Xiaohui Liu ✉; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: lxh723@dlut.edu.cn

Shengqiang Shen; Key Laboratory of Ocean Energy Utilization and Energy Conservation of Ministry of Education; e-mail: zzbshen@dlut.edu.cn