ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Физико-математические науки»

Т. 25, № 1 – 2021

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Март — 2021

Серия
«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 25, № 1 – 2021)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 25, № 1 – 2021)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова
Выпускающий редактор Е. В. Абрамова
Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен на кафедре прикладной математики и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 31 марта 2021 г.
Дата выхода в свет 30 апреля 2021 г.
Формат 70 × 108 1/16.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 31/2021.
Заказ № 1-2691-lv.

Отпечатано в
ООО «Типография Фурсова»
196105, г. Санкт-Петербург,
ул. Благодатная, 69
Тел.: +7 (812) 646 33 77

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 (1.1.2) – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 01.02.04 (1.1.8) – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 05.13.18 (1.2.2) – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «Эко-Вектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
March — 2021

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2021, vol. 25, no. 1

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova

Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
49, Blagodatnaya st., Saint Petersburg, 196105, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i1

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Абдуллаев О. Х. “Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью” 7

Балкизов Ж. А. “Задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода” 21

Зарубин А. Н. “Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа” 35

Сабитов К. Б., Фадеева О. В. “Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки” 51

Механика деформируемого твёрдого тела

Акопян В. Н., Григорян А. А. “Плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости с периодической системой полубесконечных межфазных трещин” 67

Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. “Решение задачи Ламе для составных трансверсально-изотропных сфер с общим центром” 83

Попов А. Л., Садовский С. А. “О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным” 97

Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. “Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины” 111

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Зотеев В. Е., Ганигин С. Ю., Деморецкий Д. А., Ненашев М. В., Губинский А. В. “Математическое моделирование и помехоустойчивая оценка параметров импульса ударной волны на основе результатов эксперимента при подводных взрывах” 127

Крамаренко Н. В. “Обзор способов вывода критериев подобия в механике” 163

Краткие сообщения

Кукуджанов К. В., Левитин А. Л., Угурчиев У. Х. “Залечивание трещин в пластинах сильным электромагнитным полем” 193

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i1

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Abdullayev O. Kh. "On a problem for the parabolic-hyperbolic type equation of fractional order with non-linear loaded term" 7

Balkizov Zh. A. "The problem with shift for a degenerate hyperbolic equation of the first kind" 21

Zarubin A. N. "Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation" 35

Sabitov K. B., Fadeeva O. V. "Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam" 51

Mechanics of Solids

Hakobyan V. N., Grigoryan A. A. "Plane stress state of a uniformly piecewise homogeneous plane with a periodic system of semi-infinite interphase cracks" . 67

Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A. "Solution of the Lamé problem for combined transversely isotropic spheres with a general center" 83

Popov A. L., Sadovsky S. F. "On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data" 97

Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. "Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate" 111

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Zoteev V. E., Ganigin S. Yu., Demoretsky D. A., Nenashev M. V., Gubinsky A. V. "Mathematical modeling and noise-proof estimation of shock wave pulse parameters based on the results of an experiment in underwater explosions" . 127

Kramarenko N. V. "A review of methods for developing similarity criteria in mechanics" 163

Short Communications

Kukudzhanov K. V., Levitin A. L., Ugurchiev U. Kh. "Healing of cracks in plates by strong electromagnetic field" 193

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 7–20
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1777

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью

© ***О. Х. Абдуллаев***

Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4-а.

Аннотация

Работа посвящена доказательству единственности и существования решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для уравнения параболо-гиперболического типа с дробной производной Капуто и с нагруженным нелинейным оператором. С использованием метода интегралов энергии доказана единственность решения, а существование решения доказано методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, параболо-гиперболический тип, производная Капуто, нелинейные интегральные уравнения, интегральное условие склеивания, единственность и существование решения.

Получение: 31 марта 2020 г. / Исправление: 13 февраля 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Абдуллаев О. Х. Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 7–20. https://doi.org/10.14498/vsgtu1777.

Сведения об авторе
Обиджон Хайруллаевич Абдуллаев https://orcid.org/0000-0001-8503-1268
кандидат физико-математических наук, доцент; докторант; отд. дифференциальных уравнений и их применения; e-mail: obidjon.mth@gmail.com

Введение. При интенсивных исследованиях проблем оптимального управления агроэкономической системой регулирования меток грунтовых вод и влажности почвы возникла необходимость исследовать краевые задачи для нагруженных уравнений в частных производных (см. [1, 2] и ссылки в них). Сходные результаты по теории краевых задач для нагруженных уравнений параболического, параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов были опубликованы в [3–5].

Наряду с теорией нагруженных уравнений теория краевых задач для уравнения смешанного типа дробного порядка также является одним из интенсивно развивающихся направлений исследования уравнений в частных производных. Следует отметить, что локальные и нелокальные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа, включающие различные интегро-дифференциальные операторы дробного порядка, исследовались многими авторами (см. работы [6–8] и ссылки в них).

В качестве продолжения этого направления в данной работе мы рассмотрим следующее уравнение параболо-гиперболического типа дробного порядка, включающее нелинейный нагруженный член:

$$f(x)=\begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + a_1(x) u^{p_1}(x,0), & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}+a_2(x)u^{p_2}(x,0), & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$${}_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)\,dt, \quad 0<\alpha<1, \tag{2}$$

$a_i(x)$ — заданные функции; $p_i>0$, $0<\alpha<1$ — константы, $i=1,2$.

Имеются немногочисленные работы (см. [9, 10] и ссылки в них), в которых исследуются локальные и нелокальные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа с оператором Капуто (без нагруженной части). Кроме того, аналогичные задачи рассматривались для нагруженных уравнений параболического типа, след решения которых включается в интегро-дифференциальные операторы дробного порядка Римана—Лиувилля, Эрдейи—Кобера и др. [11–13]. Хотелось бы отметить, что уравнения в приведенных выше работах имеют только линейные нагруженные члены.

Основная цель данной работы — доказать существование и единственность решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для уравнения (1).

1. Постановка задачи. Пусть Ω — область, ограниченная отрезками

$$A_1A_2=\{(x,y): x=1, 0<y<h\}, \quad B_1B_2=\{(x,y): x=0, 0<y<h\},$$

$$B_2A_2=\{(x,y): y=h, 0<x<1\}$$

при $y>0$, и характеристиками

$$A_1C: x-y=1, \quad B_1C: x+y=0$$

уравнения (1) при $y<0$, где $A_1(1,0)$, $A_2(1,h)$, $B_1(0,0)$, $B_2(0,h)$ и $C(1/2,-1/2)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega^+ = \Omega\cap(y>0), \quad \Omega^- = \Omega\cap(y<0),$$

$$I_1 = \{x : 0 < x < 1/2\}, \quad I_2 = \{x : 1/2 < x < 1\}.$$

Задача NL. *Требуется найти функцию* $f(x)$ *и решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1) *из класса функций*

$$W = \{u(x,y) : u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-);\ u_{xx} \in C(\Omega^+);\ {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+);\ u(x,y) \in C^1(\bar{\Omega}^- \setminus A_1B_1)\},$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{A_1A_2} = \varphi_1(y), \quad u(x,y)\big|_{B_1B_2} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h; \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}u(\theta(x)) = b_1(x)u_y(x,0) + b_2(x)u_x(x,0) + b_3(x)u(x,0) + b_4(x),\ 0 < x < 1; \tag{4}$$

$$u_n(x,y)\big|_{B_1C} = \psi_1(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \quad u_n(x,y)\big|_{A_1C} = \psi_2(x),\ 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \tag{5}$$

и интегральному условию склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lambda_1(x)u_y(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0) + \\ + \lambda_3(x)\int_0^x r(t)u(t,0)\,dt + \lambda_4(x)u(x,0) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

где $\theta(x) = \theta(x/2, -x/2)$ *и* $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $b_j(x)$, $\lambda_k(x)$ — *заданные функции* ($i = 1,2$; $j = \overline{1,4}$; $k = \overline{1,5}$), *причем*

$$\psi_1(1/2) = \psi_2(1/2), \quad \sum_{j=1}^{3} b_j^2(x) \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{4} \lambda_k^2(x) \neq 0.$$

2. Необходимые функциональные соотношения. Введем обозначения

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ f_2(x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{7}$$

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad u_y(x,-0) = \nu^-(x),\ 0 < x < 1, \tag{8}$$

причем $f_1(1/2) = f_2(1/2)$.

Отметим, что общее решение уравнения (1) в области Ω^- с учетом (7) имеет вид

$$u(x,y) = F_1(x+y) + F_2(x-y) + \omega(x), \tag{9}$$

где

$$\omega(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x (x-t)\big(f_1(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt + c_1x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ \displaystyle\int_x^1 (t-x)\big(f_2(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt + c_2(1-x), & 1/2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Функция $\omega(x)$ должна быть дважды непрерывно дифференцируемой при $0 < x < 1$. Это требование приводит к следующим значениям c_1 и c_2:

$$c_1 = \int_0^{1/2} (t-1)\big(f_1(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt + \int_{1/2}^{1} (t-1)\big(f_2(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt,$$

$$c_2 = -\int_0^{1/2} t\big(f_1(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt - \int_{1/2}^{1} t\big(f_2(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt.$$

Воспользуемся условием (5) и, учитывая обозначение (8), из (9) найдем

$$F_1(x) = \tau(x) - F_2(x) - \omega(x), \tag{11}$$

$$F_1'(x) = \nu(x) + F_2'(x), \tag{12}$$

$$2F_1'(0) + \int_0^x \big(f_1(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)\,dt = \sqrt{2}\psi_1(x), \tag{13}$$

$$-2F_2'(1) + \int_x^1 \big(f_2(t) - a_2(t)\tau^{p_2}(t)\big)dt = \sqrt{2}\psi_2(x). \tag{14}$$

Таким образом, учитывая (11) и (12), из (9) решение задачи NL в области Ω^- можем представить в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\big(\tau(x-y) + \tau(x+y)\big) - \frac{1}{2}\big(\omega(x-y) + \omega(x+y)\big) - \\ - \frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y} \nu(t)\,dt + \omega(x). \tag{15}$$

Используя условие (4), из (15) дифференцированием (13) и (14) по x находим

$$\big(2b_1(x) + 1\big)\nu^-(x) = \big(1 - 2b_2(x)\big)\tau'(x) - 2b_3(x)\tau(x) - \\ - 2b_4(x) + \omega'(x/2) - \omega'(x), \quad 0 < x < 1, \tag{16}$$

и

$$f_j(x) - a_2(x)\tau^{p_2}(x) = (-1)^{j-1}\sqrt{2}\psi_j'(x) \ \ (j = 1,2). \tag{17}$$

Следовательно, из (10), учитывая (17), находим $\omega(x)$ в явном виде:

$$\omega(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\displaystyle\int_0^x \psi_1(t)\,dt - \sqrt{2}x\bigg(\psi_1(1/2) + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{1/2} \psi_1(t)\,dt - \int_{1/2}^1 \psi_2(t)dt\bigg), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ \sqrt{2}\displaystyle\int_x^1 \psi_2(t)dt - \sqrt{2}(1-x)\bigg(\psi_2(1/2) - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^{1/2} \psi_1(t)\,dt + \int_{1/2}^1 \psi_2(t)\,dt\bigg), \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{18}$$

Учитывая обозначение (8), соотношение

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \nu^+(x)$$

и условие склеивания (6), находим

$$\nu^+(x) = \lambda_1(x)\nu^-(x) + \lambda_2(x)\tau'(x) + \\ + \lambda_3(x)\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt + \lambda_4(x)\tau(x) + \lambda_5(x), \quad 0 < x < 1. \quad (19)$$

Далее из уравнения (1) при $y \to +0$, учитывая (2), (19) и

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} f(y) = \Gamma(\alpha) \lim_{y\to 0} y^{1-\alpha} f(y),$$

находим

$$\tau''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau'(x) - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt - \Gamma(\alpha)\lambda_4(x)\tau(x) - \\ - \Gamma(\alpha)\lambda_5(x) - f(x) + a_1(x)\tau^{p_1}(x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (20)$$

3. Единственность задачи NL.

Теорема 1. *Пусть $p_j = 2n-1$, $n = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2$, и для заданных функций имеют место условия*

$$2b_1(x) + 1 \neq 0, \quad A'(x) + 2B(x) + \lambda_2'(x) - 2\lambda_4(x) \leqslant 0; \quad (21)$$

$$\Big(\frac{\lambda_3(x)}{r(x)}\Big)' \leqslant 0, \quad \frac{\lambda_3(1)}{r(1)} \geqslant 0, \quad a_1(x) \leqslant 0, \quad a_2(x) \geqslant 0, \quad (22)$$

где

$$A(x) = \frac{\lambda_1(x)(1-2b_2(x))}{1+2b_1(x)}, \quad B(x) = \frac{2\lambda_1(x)b_3(x)}{1+2b_1(x)}.$$

Тогда решение $u(x,y)$ задачи NL единственно.

Доказательство. Пусть $\psi_j(x) \equiv b_4(x) \equiv 0$ $(j = 1, 2)$. Тогда из (18) имеем $\omega(x) = 0$. Следовательно, из (16) при $2b_1(x) + 1 \neq 0$ находим

$$\nu^-(x) = \frac{1-2b_2(x)}{1+2b_1(x)}\tau'(x) - \frac{2b_3(x)}{2b_1(x)+1}\tau(x). \quad (23)$$

Далее, полагая $\lambda_5(x) \equiv 0$ и умножая уравнение (20) на $\tau(x)$, интегрируя его от 0 до 1, с учетом (17) получим

$$\int_0^1 \tau''(x)\tau(x)\,dx - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_1(x)\tau(x)\nu^-(x)\,dx - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_2(x)\tau(x)\tau'(x)\,dx - \\ - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_3(x)\tau(x)\,dx\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt - \Gamma(\alpha)\int_0^1 \tau^2(x)\lambda_4(x)\,dx + \\ + \int_0^1 (a_1(x)\tau^{p_1}(x) - a_2(x)\tau^{p_2}(x))\tau(x)\,dx = 0. \quad (24)$$

Подставляя (23) в уравнение (24) и учитывая

$$\tau(0)=\varphi_2(0)=0,\quad \tau(1)=\varphi_1(0)=0,$$

имеем

$$-\int_0^1 \tau'^2(x)\,dx+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1 A'(x)\tau^2(x)\,dx+\Gamma(\alpha)\int_0^1 B(x)\tau^2(x)\,dx+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1 {\lambda_2}'(x)\tau^2(x)\,dx-\Gamma(\alpha)\int_0^1 \lambda_4(x)\tau^2(x)\,dx-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)\lambda_3(1)}{2r(1)}\left(\int_0^1 r(x)\tau(x)\,dx\right)^2+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int_0^1\left(\frac{\lambda_3(x)}{r(x)}\right)'\left(\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt\right)^2dx+$$
$$+\int_0^1 a_1(x)\tau^{p_1+1}(x)\,dx-\int_0^1 a_2(x)\tau^{p_2+1}(x)\,dx. \quad (25)$$

В силу условий теоремы 1 из (25), учитывая $\tau(0)=\tau(1)=0$, заключаем, что $\tau(x)=0$. Таким образом, при нулевых данных (т.е. при $\psi_j(x)=b_4(x)=0$, $j=1,2$) получим, что $\omega(x)=0$ и $u(x,0)=\tau(x)=0$, т.е. нелинейные нагруженные части уравнения (1) обнуляются. Далее из (23) получим $\nu^-(x)=0$. Следовательно, в силу решения первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω^+ (см. [14]) и из решения задачи Коши в области Ω^- получим $u(x,y)\equiv 0$ в замкнутых областях $\bar\Omega^+$ и $\bar\Omega^-$. $\Box$

Замечание 1. Если $2b_1(x)+1=0$, $2b_2(x)-1\neq 0$, $x\in[0,1]$, то, учитывая (18), из (16) получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\tau(x)$.

Заметим, что получаемое дифференциальное уравнение имеет единственное решение с учетом условий $\tau(0)=\varphi_2(0)$ (или $\tau(1)=\varphi_1(0)$). Следовательно, однозначное решение исследуемой задачи определяется в области Ω^+ как решение первой краевой задачи для уравнения (1) [8, 12]. Далее из решения первой краевой задачи с учетом

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\nu^+(x)$$

и условия склеивания (6) находим $\nu^-(x)$ при $\lambda_1(x)\neq 0$. Решение задачи NL в области Ω^- построим как решение задачи Коши.

Замечание 2. Если $2b_1(x)+1=2b_2(x)-1=0$, $b_3(x)\neq 0$, $x\in[0,1]$, то однозначная разрешимость исследуемой задачи следует из однозначного определения $\tau(x)$ из (16).

Итак, пусть $2b_1(x)+1=0$, $2b_2(x)-1=0$ (или $2b_2(x)-1\neq 0$) и $b_3(x)\neq 0$. Тогда исследуемая задача однозначно разрешима при $\lambda_1(x)\neq 0$.

4. Существование решения задачи NL.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (21), (22) *и*

$$\varphi_i(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h),\ \psi_i(x)\in C(\overline{I}_i)\cap C^1(I_i)a_i(x)\in C[0,1]\ (i{=}1,2), \quad (26)$$
$$b_j(x),\ \lambda_k(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)\quad (j=\overline{1,4},\ k=\overline{1,5}), \quad (27)$$

то решение задачи NL существует.

Доказательство. Решение уравнения (см. уравнение (20))

$$\tau''(x) = F(x), \quad 0 < x < 1,$$

удовлетворяющее условиям $\tau(1) = \varphi_1(0)$, $\tau(0) = \varphi_2(0)$, имеет вид

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)F(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)F(t)\,dt + \\ + (1-x)\varphi_2(0) + x\varphi_1(0), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (28)$$

где

$$F(x) = \Gamma(\alpha)(\lambda_4(x) - B(x))\tau(x) + \Gamma(\alpha)(A(x) + \lambda_2(x))\tau'(x) + \\ + \Gamma(\alpha)\lambda_3(x)\int_0^x r(t)\tau(t)\,dt + f(x) - a_1(x)\tau^{p_1}(x) + \\ + \Gamma(\alpha)C(x)\big(\omega'(x/2) - \omega'(x) - 2b_4(x)\big) + \Gamma(\alpha)\lambda_5(x), \quad (29)$$

$$C(x) = \frac{\lambda_1(x)}{1 + 2b_1(x)}.$$

Подставляя (29) в уравнение (28), после несложных упрощений получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\tau(x) = \int_0^1 K(x,t)\tau(t)\,dt + \Phi(x,\tau(x)), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (30)$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} K_1(x,t), & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ K_2(x,t), & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad (31)$$

$$K_1(x,t) = \Gamma(\alpha)t(x-1)\big(\lambda_4(t) - B(t)\big) - \Gamma(\alpha)(x-1)\big(t\lambda_2(t) + tA(t)\big)' + \\ + \Gamma(\alpha)r(t)\int_t^x (x-z)\lambda_3(z)\,dz - \Gamma(\alpha)r(t)\int_t^1 x(1-z)\lambda_3(z)\,dz,$$

$$K_2(x,t) = \Gamma(\alpha)x\big[(1-t)\big(\lambda_2(t) + A(t)\big)\big]' - \Gamma(\alpha)x(1-t)\big(\lambda_4(t) - B(t)\big) - \\ - \Gamma(\alpha)r(t)\int_t^1 x(1-z)\lambda_3(z)\,dz,$$

$$\Phi(x,\tau(x)) = \int_0^x (x-t)\big(a_2(t)\tau^{p_2}(t) - a_1(t)\tau^{p_1}(t)\big)\,dt - \\ - x\int_0^1 (1-t)\big(a_2(t)\tau^{p_2}(t) - a_1(t)\tau^{p_1}(t)\big)\,dt + F_1(x), \quad (32)$$

$$F_1(x)=\Gamma(\alpha)\int_0^x(x-t)C(t)\big(\omega'(t/2)-\omega'(t)-2b_4(t)\big)\,dt+\Gamma(\alpha)\int_0^x(x-t)\lambda_5(t)dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)x\int_0^1(1-t)C(t)\big(\omega'(t/2)-\omega'(t)-2b_4(t)\big)\,dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)x\int_0^1(1-t)\lambda_5(t)\,dt+\Gamma(\alpha)\int_0^x(x-t)\psi(t)\,dt-$$
$$-\Gamma(\alpha)x\int_0^1(1-t)\psi(t)\,dt+(1-x)\varphi_2(0)+x\varphi_1(0),$$

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\psi_1(x), & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ -\sqrt{2}\psi_2(x), & 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Из (31), (32) с учетом класса заданных функций можно убедиться, что $|K(x,y)|\leqslant\mathrm{const}$, $|\Phi(x,\tau(x))|\leqslant\mathrm{const}$. Далее в силу теории интегральных уравнений Фредгольма и единственности решения исследуемой задачи заключаем, что интегральное уравнение (30) имеет единственное решение в классе $C[0,1]\cap C^2(0,1)$. Это решение записываем через резольвенту $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$:

$$\tau(x)=\int_0^1 R(x,t)\Phi(t,\tau(t))\,dt+\Phi(x,\tau(x)). \tag{33}$$

Подставляя (32) в решение (33), получим нелинейное интегральное уравнение

$$\tau(x)=\int_0^1\big(a_2(t)\tau^{p_2}(t)-a_1(t)\tau^{p_1}(t)\big)K^*(x,t)\,dt+F_2(x), \tag{34}$$

$$K^*(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_t^1 R(x,z)(z-t)\,dz-(1-t)\int_0^1 tR(x,t)\,dt+t(x-1), & 0\leqslant t\leqslant x,\\ \displaystyle\int_t^1 R(x,z)(z-t)\,dz-(1-t)\int_0^1 tR(x,t)\,dt+x(t-1), & x\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$F_2(x)=\int_0^1 R(x,t)F_1(t)\,dt+F_1(x).$$

Разрешимость интегрального уравнения (34) доказываем методом последовательных приближений. Предполагая $\tau_0(x)=F_2(x)$, из рекуррентной формулы

$$\tau_n(x)=\int_0^1\big(a_2(t)\tau_{n-1}^{p_2}(t)-a_1(t)\tau_{n-1}^{p_1}(t)\big)K^*(x,t)\,dt+F_2(x)$$

составим функциональную последовательность $\{\tau_n(x)\}$.

Пусть для произвольной функции

$$g(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$$

и

$$G(x,t)\in C([0,1]\times[0,1])\cap C^{2,0}((0,1)\times(0,1))$$

рассматривается следующая норма:

$$\|g(x)\|_C = \max\left\{|g(x)| : x \in [0,1]\right\},$$

$$\|G(x,t)\|_C = \max\left\{|G(x,t)| : (x,t) \in [0,1]\times[0,1]\right\}.$$

Тогда, учитывая

$$\|K^*(x,t)\|_C \leqslant M, \quad \|a_j(x)\|_C \leqslant m_j,\ j=1,2, \quad \|F_2(x)\|_C \leqslant m_3$$

(см. (26) и (27)), где M, m_1, m_2, $m_3 > 0$, получим

$$\|\tau_1(x) - \tau_0(x)\|_C \leqslant m^* M|m_1 + m_2|, \tag{35}$$

где $m^* = \max\{m_3^{p_1}; m_3^{p_2}\}$.

Далее, учитывая неравенство

$$|g_2^p(x) - g_1^p(x)| \leqslant cp|g_2(x) - g_1(x)|,$$

где $c = \max\big\{|g_1^{p-1}(x)|, |g_2^{p-1}(x)|\big\} > 0$ — константа, для непрерывно-дифференцируемых функций получим

$$\|\tau_2(x) - \tau_1(x)\|_C \leqslant cpM|m_1 + m_2|\,\|\tau_1(x) - \tau_0(x)\|_C,$$

где $p = \max\{p_1; p_2\}$. Окончательно имеем:

$$\|\tau_n(x) - \tau_{n-1}(x)\|_C \leqslant cpM|m_1 + m_2|\,\|\tau_{n-1}(x) - \tau_{n-2}(x)\|_C. \tag{36}$$

Пусть $cpM|m_1 + m_2| < 1$, тогда из оценки (36) следует, что оператор в правой части (34) является сжимающим. Из оценок (35) и (36) заключаем, что для оператора (34) существует единственная неподвижная точка. Следовательно, интегральное уравнение (34) имеет единственное решение в классе $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Замечание 3. В силу теории интегральных уравнений Фредгольма с учетом единственности решения задачи NL следует заключить, что функциональная последовательность $\{\tau_n(x)\}$ имеет единственную предельную функцию $\tau(x)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n(x) = \tau(x)$.

После определения $\tau(x)$ из (16) находим $\nu(x)$. Далее, учитывая (18), решение исследуемой задачи в области Ω^- определяем из (15), а в области — Ω^+ как решение первой краевой задачи для уравнения (1), которое имеет вид [12, 14]:

$$u(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y,0,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y,1,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta +$$
$$+ \int_0^1 G_0(x-\xi,y)\tau(\xi)\,d\xi + \int_0^y\int_0^1 G(x,y,\xi,\eta)\big(f(\xi) - a_1(\xi)\tau^{p_1}(\xi)\big)\,d\xi\,d\eta,$$

где

$$G_0(x-\xi,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y (y-\eta)^{-\alpha} G(x,\eta,\xi,0)\,d\eta,$$

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\Big(-\frac{|x-\xi+2n\|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\Big)-$$
$$-e^{1,\alpha/2}_{1,\alpha/2}\Big(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\Big)\Big]$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω^+ [6],

$$e^{1,\delta}_{1,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\delta-\delta n)}$$

— функция типа Райта [14], $f(x)$ — определяется из (17). □

Замечание 4. Пусть $b_j(x)\equiv 0$, $\lambda_k(x)\equiv 0$ $(j=\overline{1,3},\ k=\overline{2,5})$ и $\lambda_1(x)=1$. Тогда задача NL является локальной задачей (т. е. аналогом задачи Трикоми) с непрерывным условием склеивания. Отметим, что полученные результаты остаются верными и в этом случае.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применения.* М.: Наука, 2012. 232 с.
3. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. №6. С. 31–42.
4. Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. №6(80). С. 39–47.
5. Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного уравнения смешанного типа с интегральным оператором // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, №2. С. 220–240. https://doi.org/10.14498/vsgtu1485.
6. Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009. Т. 73, №2. С. 141–182. https://doi.org/10.4213/im2429.
7. Kilbas A. A. Repin O. A An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010. vol. 13, no. 1. pp. 69–84. https://eudml.org/doc/219592.
8. Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative // *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014. vol. 2014, no. 57. pp. 1–7.
9. Салахитдинов М. С., Каримов Э Т. Об одной нелокальной задаче с условиями сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболического уравнения с оператором Капуто // *Докл. Акад. наук респ. Узбек.*, 2014. №4. С. 6–9.
10. Berdyshev A. S., Cabada A., Karimov E. T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann–Liouville fractional differential operator // *Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl.*, 2012. vol. 75, no. 6. pp. 3268–3273. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.12.033.

11. Sadarangani K., Abdullaev O. K. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative // *Adv. Differ. Equ.*, 2016. vol. 2016, 241. `https://doi.org/10.1186/s13662-016-0969-1`.
12. Abdullaev O. Kh. Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators of fractional order // *Uzbek. Math. J.*, 2019. no. 3. pp. 4–18. `https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-3-1`.
13. Abdullaev O. K. On the problem for a mixed-type degenerate equation with Caputo and Erdélyi–Kober pperators of fractional order // *Ukr. Math. J.*, 2019. vol. 71, no. 6. pp. 825–842. `https://doi.org/10.1007/s11253-019-01682-z`.
14. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 200 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 7–20
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1777

MSC: 34K37, 35R11, 35M10

On a problem for the parabolic-hyperbolic type equation of fractional order with non-linear loaded term

© ***O. Kh. Abdullayev***

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Science,
4-a, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

We study the existence and uniqueness of solution of the non-local problem for the parabolic-hyperbolic type equation with non linear loaded term involving Caputo derivative

$$f(x) = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + a_1(x) u^{p_1}(x,0), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2(x) u^{p_2}(x,0), & y < 0, \end{cases}$$

where

$${}_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$a_i(x)$ are given functions, p_i, $\alpha = \text{const}$, besides $p_i > 0$ $(i = 1, 2)$, $0 < \alpha < 1$ in the domain Ω bounded with segments:

$$A_1A_2 = \{(x, y) : x = 1, 0 < y < h\}, \quad B_1B_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < h\},$$

$$B_2A_2 = \{(x, y) : y = h, 0 < x < 1\}$$

at the $y > 0$, and characteristics:

$$A_1C : x - y = 1, \quad B_1C : x + y = 0$$

of the considered equation at $y < 0$, where $A_1(1, 0)$, $A_2(1, h)$, $B_1(0, 0)$, $B_2(0, h)$, and $C(1/2, -1/2)$.

Uniqueness of solution of the investigated problem was proved by an integral of energy. The existence of solution of the problem was proved by the method of integral equations. The theory of the second kind Fredholm type integral equations and the successive approximations method were widely used. We notice, that boundary value problems for the mixed type equations of fractional order with non linear loaded term have not been investigated.

Research Article

Please cite this article in press as:
Abdullayev O. Kh. On a problem for the parabolic-hyperbolic type equation of fractional order with non-linear loaded term, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 7–20. https://doi.org/10.14498/vsgtu1777 (In Russian).

Author's Details:
Obidjon Kh. Abdullayev https://orcid.org/0000-0001-8503-1268
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Doctoral Student; Dept. of Differential Equations and Their Application; e-mail: obidjon.mth@gmail.com

Keywords: loaded equation, parabolic-hyperbolic type, Caputo fractional derivative, nonlinear integral equation, integral gluing condition, existence and uniqueness of solution.

Received: 31st March, 2020 / Revised: 13th February, 2021 / Accepted: 10th March, 2021 / First online: 31st March, 2021

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
2. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primeneniia* [Loaded Equations and Their Applications]. Moscow, Nauka, 2012, 232 pp. (In Russian)
3. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 23–33. https://doi.org/10.3103/S1066369X15060055.
4. Melisheva E. P. Dirichlet problem for loaded equation of Lavrentiev–Bizadze, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2010, no. 6(80), pp. 39–47 (In Russian).
5. Abdullayev O. Kh. A non-local problem for a loaded mixed-type equation with a integral operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 220–240 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1485.
6. Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 351–392. https://doi.org/10.1070/IM2009v073n02ABEH002450.
7. Kilbas A. A. Repin O. A An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partial fractional derivative, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 69–84. https://eudml.org/doc/219592.
8. Kadirkulov B. J. Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 2014, no. 57, pp. 1–7.
9. Salakhitdinov M. S. Karimov E. T. On a nonlocal problem with gluing condition of integral form for parabolic-hyperbolic equation with Caputo operator, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzbekistan*, 2014, no. 4, pp. 6–9 (In Russian).
10. Berdyshev A. S., Cabada A., Karimov E. T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann–Liouville fractional differential operator, *Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl.*, 2012, vol. 75, no. 6, pp. 3268–3273. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.12.033.
11. Sadarangani K., Abdullaev O. K. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative, *Adv. Differ. Equ.*, 2016, vol. 2016, 241. https://doi.org/10.1186/s13662-016-0969-1.
12. Abdullaev O. Kh. Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators of fractional order, *Uzbek. Math. J.*, 2019, no. 3, pp. 4–18. https://doi.org/10.29229/uzmj.2019-3-1.

13. Abdullaev O. K. On the problem for a mixed-type degenerate equation with Caputo and Erdélyi–Kober pperators of fractional order, *Ukr. Math. J.*, 2019, vol. 71, no. 6, pp. 825–842. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01682-z.
14. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Fractional Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2005, 200 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 21–34
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1783

УДК 517.956.326

Задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода

© *Ж. А. Балкизов*

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Рассматривается вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода второго порядка, содержащее слагаемое с младшей производной, для которого исследованы две краевые задачи со смещением, обобщающие известные первую и вторую задачи Дарбу. При определенных условиях на заданные функции и параметры, входящие в постановку исследуемых задач, доказаны теоремы о существовании единственного регулярного решения задач. Выявлены свойства всех регулярных решений рассматриваемого уравнения, являющиеся аналогами теорем о среднем значении для волнового уравнения.

Ключевые слова: вырождающиеся гиперболические уравнения, задача Гурса, задача Дарбу, задача со смещением, теорема о среднем значении.

Получение: 20 апреля 2020 г. / Исправление: 12 февраля 2021 г. /
Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 29 марта 2021 г.

Введение. Постановка задач. На евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \quad y < 0, \tag{1}$$

где λ и m — заданные действительные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leqslant m/2$; $u = u(x, y)$ — искомая функция действительных переменных (x, y).

Уравнение (1) рассматривается в области Ω, ограниченной его характеристиками

$$AC: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0 \quad \text{и} \quad BC: \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = r,$$

Научная статья

Образец для цитирования

Балкизов Ж. А. Задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 21–34. https://doi.org/10.14498/vsgtu1783.

Сведения об авторе

Жираслан Анатольевич Балкизов https://orcid.org/0000-0001-5329-7766
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; отд. уравнений смешанного типа; e-mail: giraslan@yandex.ru

выходящими из точки $C=(r/2,y_c)$, $y_c=-\left[\frac{(m+2)r}{4}\right]^{2/(m+2)}$ и проходящими через точки $A=(0,0)$ и $B=(r,0)$ соответственно, а также отрезком AB прямой $y=0$.

Обозначим через $\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},h(x)\right)$, $\theta_r(x)=\left(\frac{r+x}{2},h(r-x)\right)$, где $h(x)= =-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2/(m+2)}x^{2/(m+2)}$ — аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)$, с характеристиками AC и BC соответственно; $D^{\gamma}_{0x}f(t)$ и $D^{\gamma}_{xr}f(t)$ — обобщенные операторы дробного (в смысле Римана—Лиувилля) интегро-дифференцирования порядка γ $[1,2]$;

$$I=\big\{(x,y)\ :\ 0<x<r, y=0\big\};\quad \alpha=\frac{m-2\lambda}{2(m+2)},\quad \beta=\frac{m+2\lambda}{2(m+2)}.$$

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем всякую функцию $u=u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup I)\cap C^2(\Omega)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение $u=u(x,y)$ уравнения* (1) *из класса $x^{-\alpha}u_y(x,0)$, $(r-x)^{-\beta}u_y(x,0)\in L_1(I)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,0)=\tau(x)\quad \forall x\in\bar{I}, \tag{2}$$

$$a(x)D^{1-\beta}_{0x}u[\theta_0(t)]+b(x)D^{1-\alpha}_{xr}u[\theta_r(t)]=\psi(x)\quad \forall x\in I, \tag{3}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\tau(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции, причем $a^2(x)+b^2(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{I}$.

Задача 2. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u_y(x,0)=\nu(x)\quad \forall x\in I, \tag{4}$$

$$a(x)D^{\alpha}_{0x}\big\{t^{\alpha+\beta-1}u[\theta_0(t)]\big\}+b(x)D^{\beta}_{xr}\big\{(r-t)^{\alpha+\beta-1}u[\theta_r(t)]\big\}=\psi(x)\ \ \forall x\in I, \tag{5}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $\nu(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции, причем $a^2(x)+b^2(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{I}$.

Уравнение (1) является уравнением гиперболического типа с параболическим вырождением вдоль прямой $y=0$, причем прямая $y=0$ сама не является характеристикой уравнения (1). Поэтому уравнение (1) относится к классу вырождающихся гиперболических уравнений первого рода [3, с. 6].

При $a(x)\equiv 0$, $b(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{I}$ или $b(x)\equiv 0$, $a(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{I}$ из задачи 1 в силу обратимости операторов D^{γ}_{0x} и D^{γ}_{xr} приходим к соответствующей первой задаче Дарбу с данными $u(x,0)=\tau(x)$, $u[\theta_r(x)]=\psi_1(x)$ или $u(x,0)=\tau(x)$, $u[\theta_0(x)]=\psi_1(x)$ для уравнения (1). А задача 2 при $a(x)\equiv 0$, $b(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{I}$ или $b(x)\equiv 0$, $a(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar{I}$ переходит во вторую задачу Дарбу для уравнения (1), где заданы

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad u|_{BC}=u[\theta_r(x)]=\psi_1(x),\quad 0<x<r \tag{6}$$

или

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad u|_{AC}=u[\theta_0(x)]=\psi_1(x),\quad 0<x<r, \tag{7}$$

соответственно.

При $m = 2$ уравнение (1) переходит в уравнение Бицадзе—Лыкова [4, с. 47; 5; 6, с. 234]. В работе [7] показано, что для уравнения Бицадзе—Лыкова, которое рассматривается в области D, ограниченной характеристиками AC : $2x - y^2 = 0$, BC : $2x + y^2 = 2r$ и отрезком I, при $\lambda = 1$ корректно поставлена вторая задача Дарбу с данными (7), в то время как однородная вторая задача Дарбу для уравнения Бицадзе—Лыкова, соответствующая задаче (6), имеет ненулевые решения. Аналогично, для уравнения Бицадзе—Лыкова при $\lambda = -1$ будет корректно поставлена вторая задача Дарбу с данными (6), в то время как однородная вторая задача Дарбу, соответствующая задаче (7), будет обладать ненулевыми решениями. Это говорит о неравноправности характеристик AC и BC как носителей второй задачи Дарбу для уравнения Бицадзе—Лыкова при $\lambda = \pm 1$.

Частным случаем уравнения (1) также является уравнение Трикоми, являющееся теоретической основой околозвуковой газовой динамики и математической биологии [8; 9, с. 38; 10 с. 280].

При $\lambda = 0$ из уравнения (1) приходим к уравнению Геллерстедта

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{8}$$

которое, как показано в монографии [2, с. 234], находит применение в задаче определения формы прорези плотины.

Основным отличием уравнений (1) и (8) является тот факт, что для уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ нарушено условие Геллерстедта [11], гарантирующее однозначную разрешимость задачи Коши для класса вырождающихся гиперболических уравнений с начальными данными на линии вырождения. Но упомянутое условие Геллерстедта, гарантирующее корректность задачи Коши, не является необходимым для ее однозначной разрешимости. И в монографиях [3, 4, 6] уравнение (1) приводится как пример уравнения, для которого при $|\lambda| \leqslant m/2$ решение задачи Коши выписывается в замкнутом виде, несмотря на то, что для него нарушено условие Геллерстедта при $\lambda \neq 0$. Исследованию первой и второй задач Дарбу для уравнения (1) посвящены работы [12, 13]. В работе [14] исследован критерий непрерывности решения задачи Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения вида (1). В [15] в явном виде выписано регулярное решение задачи Гурса для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, а в [16] найдено решение первой краевой задачи для такого же уравнения. За последние годы многими авторами изучены задачи для разного рода вырождающихся гиперболических уравнений [17–28]. Достаточно полная библиография по исследованию различных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений имеется в монографиях [29–34].

Исследуемые в рамках данной работы задачи 1 и 2 относятся к классу нелокальных краевых задач, сформулированных в работе [35], где дана методика постановки нелокальных краевых задач со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения вида (8) с использованием понятия оператора дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана—Лиувилля). В [35] были найдены критерии однозначной разрешимости задачи с условиями вида (2) и (3) для рассматриваемого уравнения, где $\theta_0(x)$, $\theta_r(x)$, как и выше, определяются как аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (8), причем здесь $\alpha = \beta = m/[2(m+2)] = \varepsilon$. Также в [35] было получено свойство всех регулярных решений уравнения (8), удовлетворяющих начальному условию (2), являющееся аналогом теоремы о среднем значении для волнового уравнения в характеристическом четырехугольнике.

Пользуясь методом, предложенным в работе [35], в данной работе найдены достаточные условия существования единственного регулярного решения исследуемых задач 1 и 2. Получены свойства регулярных решений уравнения (1), удовлетворяющих начальным условиям (2) или (4). Полученные свойства обобщают известные теоремы о среднем значении для уравнения (8) [35] и для волнового уравнения [8, с. 165] в характеристическом четырехугольнике.

1. Исследование задачи 1. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть заданные функции $a(x)$, $b(x)$, $\tau(x)$, $\psi(x)$ таковы, что*

$$D_{0x}^{-\alpha-\beta}\tau(t),\ D_{xr}^{-\alpha-\beta}\tau(t) \in C^1(\bar{I}) \cup C^3(I); \tag{9}$$

$$a(x),\ b(x),\ \psi(x)\ \in C(\bar{I}) \cap C^2(I); \tag{10}$$

$$\Gamma(1-\beta)a(x)(r-x)^{\beta} + \Gamma(1-\alpha)b(x)x^{\alpha} \neq 0\ \forall x \in \bar{I}. \tag{11}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1.

Доказательство. Воспользуемся представлением решения задачи Коши для уравнения (1) с данными $u(x,0)=\tau(x)$ и $u_y(x,0)=\nu(x)$ на линии вырождения $y=0$. Для различных значений числа λ данные представления выписаны, например, в [3, с. 13] и они имеют вид

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \tau\Big[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big]t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)y}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^1 \nu\Big[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big]t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt,$$
$$-\frac{m}{2} < \lambda < \frac{m}{2}; \tag{12}$$

$$u(x,y) = \tau\Big(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\Big) +$$
$$+ \frac{2y}{m+2}\int_0^1 \nu\Big[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}dt, \quad \lambda = -\frac{m}{2}; \tag{13}$$

$$u(x,y) = \tau\Big(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\Big) +$$
$$+ \frac{2y}{m+2}\int_0^1 \nu\Big[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}dt, \quad \lambda = \frac{m}{2}. \tag{14}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $-m/2 < \lambda < m/2$. Из представления (12) в этом случае находим

$$u[\theta_0(x)] = u\Big(\frac{x}{2}, -\Big(\frac{m+2}{4}\Big)^{\frac{2}{m+2}}x^{\frac{2}{m+2}}\Big) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \tau(xt)t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt -$$
$$- \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\Big(\frac{4}{m+2}\Big)^{-\frac{2}{m+2}}x^{\frac{2}{m+2}}\int_0^1 \nu(xt)t^{-\alpha}(1-t)^{\beta}dt.$$

После введения новой переменной интегрирования $z = xt$ последнее равенство перепишется в виде

$$u[\theta_0(x)] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{1-\alpha-\beta} \int_0^x \frac{\tau(z) z^{\beta-1}}{(x-z)^{1-\alpha}} dz - \\ - \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} [2(1-\alpha-\beta)]^{\alpha+\beta-1} \int_0^x \frac{z^{-\alpha}\nu(z)}{(x-z)^{\beta}} dz.$$

Воспользовавшись далее определением оператора интегрирования дробного порядка

$$\int_0^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha) D_{0x}^{-\alpha} g(t),$$

находим

$$u[\theta_0(x)] = \gamma_1 x^{1-\alpha-\beta} D_{0x}^{-\alpha}[t^{\beta-1}\tau(t)] - \gamma_2 D_{0x}^{\beta-1}[t^{-\alpha}\nu(t)], \tag{15}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} [2(1-\alpha-\beta)]^{\alpha+\beta-1}.$$

С помощью аналогичных вычислений из формулы (12) получаем, что

$$u[\theta_r(x)] = \gamma_3 (r-x)^{1-\alpha-\beta} D_{xr}^{-\beta}[(r-t)^{\alpha-1}\tau(t)] - \gamma_4 D_{xr}^{\alpha-1}[(r-t)^{-\beta}\nu(t)], \tag{16}$$

где

$$\gamma_3 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \gamma_4 = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} [2(1-\alpha-\beta)]^{\alpha+\beta-1}.$$

Воспользовавшись следующими законами композиции операторов дробного дифференцирования и интегрирования [1; 2, с. 18]:

$$D_{0x}^{\alpha} t^{\alpha+\beta} D_{0t}^{\beta} g(s) = x^{\beta} D_{0x}^{\alpha+\beta} t^{\alpha} g(t),$$
$$D_{xr}^{\alpha} (r-t)^{\alpha+\beta} D_{tr}^{\beta} g(s) = (r-x)^{\beta} D_{xr}^{\alpha+\beta} (r-t)^{\alpha} g(t),$$

из (15) и (16) находим

$$D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(t)] = x^{-\alpha}[\gamma_1 D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) - \gamma_2 \nu(x)], \tag{17}$$

$$D_{xr}^{1-\alpha} u[\theta_r(t)] = (r-x)^{-\beta}[\gamma_3 D_{xr}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) - \gamma_4 \nu(x)]. \tag{18}$$

Подставляя значения $D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(t)]$ и $D_{xr}^{1-\alpha} u[\theta_r(t)]$ из (17) и (18) в граничное условие (3), будем иметь

$$a(x) x^{-\alpha}[\gamma_1 D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) - \gamma_2\nu(x)] + \\ + b(x)(r-x)^{-\beta}[\gamma_3 D_{xr}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) - \gamma_4\nu(x)] = \psi(x),$$

откуда

$$[\gamma_2 a(x)(r-x)^{\beta} + \gamma_4 b(x) x^{\alpha}]\nu(x) = \\ = \gamma_1 a(x)(r-x)^{\beta} D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) + \gamma_3 b(x) x^{\alpha} D_{xr}^{1-\alpha-\beta}\tau(t) - x^{\alpha}(r-x)^{\beta}\psi(x). \tag{19}$$

Если для всех $x \in \bar{I}$ выполнено условие (11) теоремы 1, то из (19) можно однозначно определить функцию $u_y(x,0) = \nu(x)$. Тогда единственное регулярное решение задачи 1 будет выписываться по формуле (12). При $\lambda = -m/2$ подобные рассуждения с использованием формулы (13) вновь приводят к уравнению вида (19) относительно функции $u_y(x,0) = \nu(x)$, но при $\alpha = m/(m+2)$: $\beta = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2^{\alpha-1}(1-\alpha)^{\alpha}$, $\gamma_3 = 1$, $\gamma_4 = 2^{\alpha-1}(1-\alpha)^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)$, а при $\lambda = m/2$: $\alpha = 0$, $\beta = m/(m+2)$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \Gamma(1-\beta)2^{\beta-1}(1-\beta)^{\beta}$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 2^{\beta-1}(1-\beta)^{\beta}$. И в том и в другом случае после нахождения функции $u_y(x,0) = \nu(x)$ решение задачи 1 выписывается по соответствующей формуле (13) или (14). Условия (9), (10) на заданные функции обеспечивают регулярность полученного решения. $\square$

Пусть теперь для всех $x \in \bar{I}$ нарушено условие (11) теоремы 1, то есть пусть

$$\Gamma(1-\beta)a(x)(r-x)^{\beta} + \Gamma(1-\alpha)b(x)x^{\alpha} \equiv 0 \quad \forall x \in \bar{I}.$$

В этом случае из (3) и (19) после простых вычислений приходим к равенству

$$\sin(\pi\beta)\big[\Gamma(\beta)x^{\alpha}D_{0x}^{1-\beta}u[\theta_0(t)] - \Gamma(\alpha+\beta)D_{0x}^{1-\alpha-\beta}\tau(t)\big] = \\ = \sin(\pi\alpha)\big[\Gamma(\alpha)(r-x)^{\beta}D_{xr}^{1-\alpha}u[\theta_r(t)] - \Gamma(\alpha+\beta)D_{xr}^{1-\alpha-\beta}\tau(t)\big]. \quad (20)$$

Формула (20) выражает свойство всех регулярных решений уравнения (1), удовлетворяющих условию (2), и является одним из аналогов теоремы о среднем значении для волнового уравнения [8, с. 165]. В частном случае уравнения (1), когда $\lambda = 0$, $\alpha = \beta = m/[2(m+2)]$, формула (20) получена в работе [35].

2. Исследование задачи 2. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть заданные функции $a(x)$, $b(x)$, $\nu(x)$, $\psi(x)$ таковы, что они обладают свойствами*

$$a(x),\ b(x),\ \psi(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I); \quad (21)$$

$$\nu(x) \in C^2(I); \quad x^{-\alpha}\nu(x),\ (r-x)^{-\beta}\nu(x) \in L_1(I) \quad (22)$$

$$\Gamma(\alpha)a(x)(r-x)^{1-\alpha} + \Gamma(\beta)b(x)x^{1-\beta} \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I} \quad (23)$$

$$\text{при } a(x)b(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I};$$

$$\lambda \neq \frac{m}{2} \ \text{при } a(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \bar{I}; \quad (24)$$

$$\lambda \neq -\frac{m}{2} \quad \text{при} \ \ b(x) \equiv 0 \quad \forall x \in \bar{I}. \quad (25)$$

Тогда существует единственное решение задачи 2.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, из формул (12), (15), (16) находим, что

$$D_{0x}^{\alpha}\big\{t^{\alpha+\beta-1}u[\theta_0(t)]\big\} = x^{\beta-1}[\gamma_1\tau(x) - \gamma_2 D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\nu(t)], \quad (26)$$

$$D_{xr}^{\beta}\big\{(r-t)^{\alpha+\beta-1}u[\theta_r(t)]\big\} = (r-x)^{\alpha-1}[\gamma_3\tau(x) - \gamma_4 D_{xr}^{\alpha+\beta-1}\nu(t)]. \quad (27)$$

Подставляя значения $D_{0x}^{\alpha}\big\{t^{\alpha+\beta-1}u[\theta_0(t)]\big\}$ и $D_{xr}^{\beta}\big\{(r-t)^{\alpha+\beta-1}u[\theta_r(t)]\big\}$ из (26) и (27) в граничное условие (5), будем иметь

$$[\gamma_1 a(x)(r-x)^{1-\alpha}+\gamma_3 b(x)x^{1-\beta}]\tau(x)=\psi(x)(r-x)^{1-\alpha}x^{1-\beta}+ \\ +\gamma_2 a(x)(r-x)^{1-\alpha}D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\nu(t)+\gamma_4 b(x)x^{1-\beta}D_{xr}^{\alpha+\beta-1}\nu(t). \quad (28)$$

При условиях (23), (24), (25) из (28) однозначно определяется искомая функция $u(x,0)=\tau(x)$. Тогда единственное регулярное решение задачи 2 в зависимости от значений $|\lambda|<m/2$, $\lambda=-m/2$ или $\lambda=m/2$ будет выписываться по одной из формул (12), (13) или (14) соответственно. Условия (21), (22) обеспечивают регулярность полученного решения. □

Пусть далее для всех $x\in\bar I$ нарушено условие (23), то есть пусть

$$\Gamma(\alpha)a(x)(r-x)^{1-\alpha}+\Gamma(\beta)b(x)x^{1-\beta}\equiv 0 \quad \forall x\in\bar I$$

при $a(x)b(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar I$.

Тогда из граничного условия (5) и соотношения (28) приходим к равенству

$$\Gamma(\beta)x^{1-\beta}D_{0x}^{\alpha}\big[t^{\alpha+\beta-1}u[\theta_0(t)]\big]-\Gamma(\alpha)(r-x)^{1-\alpha}D_{rx}^{\beta}\big[(r-t)^{\alpha+\beta-1}u[\theta_r(t)]\big]= \\ =\gamma_5\big[\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\alpha+\beta-1}\nu(t)-\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)D_{rx}^{\alpha+\beta-1}\nu(t)\big], \quad (29)$$

где

$$\gamma_5=-\frac{[2(1-\alpha-\beta)]^{\alpha+\beta-1}}{B(1-\alpha,1-\beta)},$$

$B(p,q)$ — бета-функция.

Равенство (29), так же как и (20), выражает один из аналогов теоремы о среднем значении для волнового уравнения, которым обладают все регулярные решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (4).

3. Неравноправие характеристик как носителей данных задачи 2. Выше было отмечено, что задача 2 при $a(x)\equiv 0$, $b(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar I$ или $b(x)\equiv 0$, $a(x)\neq 0$ $\forall x\in\bar I$ переходит во вторую задачу Дарбу для уравнения (1). Покажем, что при $\lambda=\pm m/2$ характеристики AC и BC, ограничивающие область Ω, являются неравноправными как носители данных задачи 2 и из разрешимости задачи 2 с данными на одной из характеристик, вообще говоря, не следует разрешимость этой задачи с данными на другой характеристике.

Пусть для всех $x\in\bar I$ нарушено условие (24), то есть

$$\lambda=\frac{m}{2} \text{ и } a(x)\equiv 0,\ b(x)\neq 0 \quad \forall x\in\bar I,$$

и пусть $D_{xr}^{-\beta}\big[\frac{\psi(t)(r-t)}{b(t)}\big]\in C^1(\bar I)\cup C^3(I)$. В этом случае однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 2 ($\nu(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$), обладает ненулевыми решениями вида

$$u(x,y)=g\Big(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\Big),$$

где $g(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$ — произвольная функция, а сама неоднородная задача 2 разрешима тогда и только тогда, когда относительно заданных функций $b(x)$, $\nu(x)$ и $\psi(x)$ выполнено дополнительное условие согласования

$$\nu(x) = -\frac{1}{\gamma_4} D_{xr}^{1-\beta}\Big[\frac{\psi(t)(r-t)}{b(t)}\Big] = \psi_*(x). \tag{30}$$

Если условие (30) выполнено, то совокупность всех решений задачи 2 будет выражаться по формуле

$$u(x,y) = g\Big(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\Big) + \\ + \frac{2y}{m+2}\int_0^1 \psi_*\Big[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}dt,$$

где, как и выше, $g(x)$ — произвольная функция из класса $C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$, а $\psi_*(x)$ определяется из формулы (30).

В то же время отметим, что задача 2 в случае, когда

$$\lambda = m/2,\ b(x) \equiv 0,\ a(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I},$$

имеет единственное решение, которое выписывается по формуле (14), где

$$\tau(x) = \frac{\psi(x)x^{1-\beta}}{a(x)} + \gamma_2 D_{0x}^{\beta-1}\nu(t).$$

Аналогично, если для всех $x \in \bar{I}$ нарушено условие (25), то есть если

$$\lambda = -m/2,\ b(x) \equiv 0,\ a(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I},$$

и заданные функции $a(t)$, $\psi(t)$ обладают свойствами

$$D_{0x}^{-\alpha}\Big[\frac{\psi(t)t}{a(t)}\Big] \in C^1(\bar{I}) \cup C^3(I),$$

то в этом случае однородная задача, соответствующая исследуемой задаче 2, будет иметь нетривиальные решения вида

$$u(x,y) = g\Big(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\Big),$$

где $g(x) \in C^1\left(\bar{I}\right) \cap C^2(I)$ — произвольная функция, а задача 2 будет разрешима тогда и только тогда, когда относительно заданных функций $a(x)$, $\nu(x)$ и $\psi(x)$ выполнено условие согласования вида

$$\nu(x) = -\frac{1}{\gamma_2} D_{0x}^{1-\alpha}\Big[\frac{\psi(t)t}{a(t)}\Big] = \psi_*(x). \tag{31}$$

Если условие (31) выполнено, то множество решений задачи 2 будет выражаться по формуле

$$u(x,y) = g\Big(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\Big) + \\ + \frac{2y}{m+2}\int_0^1 \psi_*\Big[x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\Big](1-t)^{-\frac{m}{m+2}}dt.$$

Если же
$$\lambda = -m/2,\ a(x) \equiv 0,\ b(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{I},$$
то задача 2 однозначно разрешима и его единственное решение выписывается по формуле (13), где

$$\tau(x) = \frac{\psi(x)(r-x)^{1-\alpha}}{b(x)} + \gamma_4 D_{xr}^{\alpha-1}\nu(t).$$

Приведенные выше рассуждения еще раз подтверждают эффект неравноправия характеристик AC и BC как носителей данных второй задачи Дарбу для уравнения (1), полученный А. М. Нахушевым в работе [7] в случае, когда $m = 2$ и $\lambda = \pm 1$.

Заключение. В работе исследованы две нелокальные краевые задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения первого рода второго порядка вида (1), являющиеся обобщением обычных первой и второй задач Дарбу для таких уравнений.

Найдены достаточные условия существования единственного регулярного решения исследуемых задач. Получены равенства, выражающие свойства всех регулярных решений рассматриваемого уравнения (1), удовлетворяющие либо начальному условию $u(x,0) = \tau(x)$, либо условию $u_y(x,0) = \nu(x)$.

Полученные свойства являются аналогами теорем о среднем значении для волнового уравнения и найдут применение при дальнейших исследованиях различных локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа с вырождающимся гиперболическим оператором вида (1) в главной части.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения.* Минск: Выш. шк., 1977. 160 с.
4. Бицадзе А. В. *Уравнения смешанного типа.* М.: АН СССР, 1959. 164 с.
5. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло и массообмена // *Инж.-физ. ж.*, 1965. Т. 9, № 3. С. 287–304.
6. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.

7. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 1971. Т. 7, № 1. С. 49–56.
8. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
9. Берс Л. *Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики.* М.: Иностр. литер., 1961. 208 с.
10. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике.* М.: Наука, 1973. 711 с.
11. Gellerstedt S. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937. vol. 25, no. 29. pp. 1–23.
12. Кальменов Т. Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1971. Т. 7, № 1. С. 178–181.
13. Кальменов Т. Ш. О задаче Дарбу для одного вырождающегося уравнения // *Диффер. уравн.*, 1974. Т. 10, № 1. С. 59–68.
14. Кальменов Т. Ш. Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося уравнения // *Диффер. уравн.*, 1972. Т. 8, № 1. С. 41–54.
15. Балкизов Ж. А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Изв. вуз. Северо-Кавказ. регион. Сер. Естеств. науки*, 2016. № 1(189). С. 5–10. https://doi.org/10.18522/0321-3005-2016-1-5-10.
16. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Владикавк. матем. журн.*, 2016. Т. 18, № 2. С. 19–30.
17. Кириченко С. В. Смешанная задача с интегральным условием для вырождающегося уравнения гиперболического типа // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2011. Т. 17, № 8. С. 29–36. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2011-17-8-29-36.
18. Репин О. А., Кумыкова С. К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012. Т. 18, № 9. С. 52–60. https://doi.org/10.18287/2541-7525-2012-18-9-52-60.
19. Репин О. А., Кумыкова С. К. Задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1(34). С. 37–47. https://doi.org/10.14498/vsgtu1280.
20. Репин О. А., Кумыкова С. К. Об одном классе нелокальных задач для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 4(37). С. 22–32. https://doi.org/10.14498/vsgtu1348.
21. Эргашев Т. Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2017. № 46. С. 41–49. https://doi.org/10.17223/19988621/46/6.
22. Макаова Р. Х. Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 651–664. https://doi.org/10.14498/vsgtu1574.
23. Sabitov K. B., Zaitseva N. V. Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind // *Lobachevskii J. Math.*, 2018. vol. 39, no. 9. pp. 1419–1427. https://doi.org/10.1134/S1995080218090299.
24. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В. Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 10. С. 75–86. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-75-86.
25. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа / *Дифференциальные уравнения. Математическая физика* / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 137. Москва: ВИНИТИ РАН, 2017. С. 26–60.
26. Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Укр. матем. журн.*, 2020. Т. 72, № 1. С. 100–118.

27. Макаова Р. Х. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части / *Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики»* (Кабардино-Балкария, Нальчик, 17–21 мая 2017 г.) / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Т. 149. М.: ВИНИТИ РАН, 2018. С. 64–71.
28. Кожанов А. И. Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2021. Т. 18. С. 43–53. `https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.004`.
29. Нахушев А. М. *Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка.* Нальчик: Эльбрус, 1992. 155 с.
30. Репин О. А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов.* Самара: Саратовск. гос. унив., Самарск. фил., 1992. 164 с.
31. Кальменов Т. Ш. *Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа.* Шымкент: Гылая, 1993. 328 с.
32. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
33. Сабитов К. Б. *К теории уравнений смешанного типа.* М.: Физматлит, 2014. 301 с.
34. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Уфа: Гилем, 2015. 240 с.
35. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Докл. АН СССР*, 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 21–34
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1783

MSC: 35L80, 35L81

The problem with shift for a degenerate hyperbolic equation of the first kind

© ***Zh. A. Balkizov***

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

For a degenerate first-order hyperbolic equation of the second order containing a term with a lower derivative, we study two boundary value problems with an offset that generalize the well-known first and second Darboux problems. Theorems on an existence of the unique regular solution of problems are proved under certain conditions on given functions and parameters included in the formulation of the problems under study. The properties of all regular solutions of the equation under consideration are revealed, which are analogues of the mean value theorems for the wave equation.

Keywords: degenerate hyperbolic equations, Goursat problem, Darboux problem, problem with shift, mean value theorem.

Received: 20th April, 2020 / Revised: 12th February, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 29th March, 2021

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* New York, Gordon and Breach, 1993, xxxvi+976 pp.
2. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)

Research Article

Please cite this article in press as:
Balkizov Zh. A. The problem with shift for a degenerate hyperbolic equation of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 21–34. https://doi.org/10.14498/vsgtu1783 (In Russian).

Author's Details:
Zhiraslan A. Balkizov https://orcid.org/0000-0001-5329-7766
Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Dept. of Mixed Type Equations;
e-mail: giraslan@yandex.ru

3. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Hyperbolic Equations]. Minsk, Vysh. shk., 1977, 160 pp. (In Russian)
4. Bitsadze A. V. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type]. Moscow, USSR Acad. Sci., 1959, 164 pp. (In Russian)
5. Luikov A. V. Application of the methods of thermodynamics of irreversible processes to the investigation of heat and mass transfer, *J. Eng. Phys.*, 1965, vol. 9, no. 3, pp. 189–202. https://doi.org/10.1007/BF00828333.
6. Bitsadze A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
7. Nakhushev A. M. The Darboux problem for degenerate hyperbolic equations, *Differ. Uravn.*, 1971, vol. 7, no. 1, pp. 49–56 (In Russian).
8. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
9. Bers L. *Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics*, Surveys in Applied Mathematics, vol. 3. New York, John Wiley & Sons, 1958, xv+278 pp.
10. Frankl' F. I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works in Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 711 pp. (In Russian)
11. Gellerstedt S. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte, *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937, vol. 25, no. 29, pp. 1–23.
12. Kal'menov T. Sh. A criterion for the uniqueness of the solution of the Darboux problem for a certain degenerate hyperbolic equation, *Differ. Uravn.*, 1971, vol. 7, no. 1, pp. 178–181 (In Russian).
13. Kal'menov T. Sh. The Darboux problem for a certain degenerate equation, *Differ. Uravn.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 59–68 (In Russian).
14. Kal'menov T. Sh. A criterion for the continuity of the solution of the Goursat problem for a certain degenerate equation, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 1, pp. 41–54 (In Russian).
15. Balkizov Zh. A. The boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation in the area, *Izv. Vuz. Severo-Kavkaz. Region. Ser. Estestv. Nauki*, 2016, no. 1(189), pp. 5–10 (In Russian). https://doi.org/10.18522/0321-3005-2016-1-5-10.
16. Balkizov Zh. A. The first boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 19–30 (In Russian).
17. Kirichenko S. V. A mixed problem with integral condition for a degenerative equation of the hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2011, vol. 17, no. 8, pp. 29–36 (In Russian). https://doi.org/10.18287/2541-7525-2011-17-8-29-36.
18. Repin O. A., Kumykova S. K. On a problem with generalized operators of fractional differentiation for a degenerated inside a domain hyperbolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2012, vol. 18, no. 9, pp. 52–60 (In Russian). https://doi.org/10.18287/2541-7525-2012-18-9-52-60.
19. Repin O. A., Kumykova S. K. A boundary-value problem with shift for a hyperbolic equation degenerate in the interior of a region, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 1(34), pp. 37–47 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1280.
20. Repin O. A., Kumykova S. K. On a class of nonlocal problems for hyperbolic equations with degeneration of type and order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 4(37), pp. 22–32 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1348.
21. Ehrgashev T. G. Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2017, no. 46, pp. 41–49 (In Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/46/6.
22. Makaova R. Kh. A boundary value problem for a third order hyperbolic equation with degeneration of order inside the domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 651–664 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1574.

23. Sabitov K. B., Zaitseva N. V. Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind, *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 9, pp. 1419–1427. https://doi.org/10.1134/S1995080218090299.
24. Sabitov K. B., Zaitseva N. V. The second initial-boundary value problem for a B-hyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 10, pp. 66–76. https://doi.org/10.3103/S1066369X19100086.
25. Sabitov K. B., Sidorov S. N. Initial-boundary-value problem for inhomogeneous degenerate equations of mixed parabolic-hyperbolic type, *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 236, no. 6, pp. 603–640. https://doi.org/10.1007/s10958-018-4136-y.
26. Urinov A. K., Okboev A. B. Modified Cauchy problem for one degenerate hyperbolic equation of the second kind, *Ukr. Math. J.*, 2020, vol. 72, no. 1, pp. 114–135. https://doi.org/10.1007/s11253-020-01766-1.
27. Makaova R. Kh. Boundary-value problem for a third-order hyperbolic equation that is degenerate inside a domain and contains the Aller operator in the principal part, *J. Math. Sci.*, 2020, vol. 250, pp. 780–787. https://doi.org/10.1007/s10958-020-05043-1.
28. Kozhanov A. I. Initial-boundary value problems for degenerate hyperbolic equations, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2021, vol. 18, pp. 43–53 (In Russian). https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.004.
29. Nakhushev A. M. *Ob odnom klasse lineinykh kraevykh zadach dlia giperbolicheskogo i smeshannogo tipov uravnenii vtorogo poriadka* [On a Class of Linear Boundary Value Problems for Second Order Hyperbolic and Mixed Type Equations]. Nal'chik, El'brus, 1992, 155 pp. (In Russian)
30. Репин О. А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*. Самара, Саратовск. гос. унив., Самарск. фил., 1992, 164 с.
31. Кальменов Т. Ш. *Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа*. Шымкент, Гылая, 1993, 328 с.
32. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)
33. Sabitov K. B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the Theory of Mixed-Type Equations]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 301 pp. (In Russian)
34. Sabitov K. B. *Priamye i obratnye zadachi dlia uravnenii parabolo-giperbolicheskogo tipa* [Direct and Inverse Problems for Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type]. Ufa, Gilem, 2015, 240 pp. (In Russian)
35. Nakhushev A. M. A new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation, *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, no. 4, pp. 935–938.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 35–50
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1835

УДК 517.956.6

Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа

© *А. Н. Зарубин*

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева,
Россия, 302026, Орел, Улица Комсомольская, 95.

Аннотация

Исследуется краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с некарлемановскими отклонениями по всем аргументам искомой функции. Применена редукция к уравнению смешанного типа без отклонений. Используются симметричные попарно коммутативные матрицы коэффициентов уравнения. Доказаны теоремы единственности и существования. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, дифференциально-разностное уравнение, интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение, сосредоточенное запаздывание и опережение.

Получение: 5 ноября 2020 г. / Исправление: 13 февраля 2021 г. / Принятие: 22 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 10 марта 2021 г.

Введение. Дифференциально-разностные уравнения (как обыкновенные, так и с частными производными, с сосредоточенным карлемановским или некарлемановским запаздыванием и опережением) служат математическими моделями для многих прикладных задач таких как, вихреобразование, перемежаемость, формирование сложных когерентных пятен [1]; многослойные оболочки и пластины [2]; плазма [3]; колебания кристаллической решетки [4]; проблема оптимизации лечения онкологических заболеваний [5].

Данная работа посвящена изучению краевой задачи Трикоми для нелокального уравнения смешанного типа Лаврентьева—Бицадзе с сосредоточенным запаздыванием и опережением по всем аргументам искомой функции вида

Научная статья

Образец для цитирования

Зарубин А. Н. Нелокальная краевая задача Трикоми для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 35–50. https://doi.org/10.14498/vsgtu1835.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Зарубин https://orcid.org/0000-0002-0611-5752
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений; e-mail: aleks_zarubin@mail.ru; matdiff@yandex.ru

$$\sum_{k=-1}^{1}\sum_{n=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\big[(\operatorname{sgn} y)b_{n+1,k+1}U_{yy}(x+n\tau,y+kh)+a_{n+1,k+1}U_{xx}(x-n\tau,y+kh)\big]=0 \quad (1)$$

в области $D=D^+\cup D^-\cup I^0$, где

$$D^+=\big\{(x,y):0<x<3\tau,0<y<2h\big\}=\bigcup_{k=0}^{2}\Big(\bigcup_{j=0}^{1}D^+_{kj}\Big),$$

и

$$D^-=\bigcup_{k=0}^{2}D^-_{k0}=\bigcup_{k=0}^{2}\Big(\bigcup_{j=0}^{1}D^{\gamma_{j0}}_{k0}\Big)$$

— эллиптическая и гиперболическая части области D, причем

$$D^+_{kj}=\big\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,jh<y<(j+1)h\big\},\quad k=-\overline{1,3},\quad j=0,1,2;$$

$0<\tau$, h, $a_{n+1,k+1}$, $b_{n+1,k+1}\equiv\text{const}$; $H(\zeta)$ — функция Хевисайда; $D^{\gamma_{j0}}_{k0}=$ $=\big\{(x,y):-y\gamma_{j0}+k\tau<x<y\gamma_{j0}+(k+1)\tau;-\tau/2\gamma_{j0}<y<0\big\}$, $k=-\overline{1,3}$, $j=0,1$; γ^2_{jk} — собственные значения матрицы коэффициентов уравнения (1).

Пусть $D_k=D^-_{k0}\bigcup\limits_{j=0}^{1}D^+_{kj}\bigcup\limits_{l=0}^{1}I^l_k$, $k=-\overline{1,3}$, где

$$I^l=\bigcup_{k=0}^{2}I^l_k,\quad I^l_k=\big\{(x,y):k\tau<x<(k+1)\tau,y=lh\big\},\quad l=0,1,$$

а

$$J=\bigcup_{k=0}^{1}J_k,\quad J_k=\big\{(x,y):x=(k+1)\tau,0<y<2h\big\}.$$

Тогда $D=\bigcup\limits_{k=0}^{2}D_k\bigcup\limits_{j=0}^{1}J_j$.

1. Постановка задачи. Редукция. Дифференциально-разностное уравнение смешанного типа (1) запишем в виде

$$\sum_{k=-1}^{1}H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\Big\{(\operatorname{sgn} y)\big[b_{0(k+1)}U_{yy}(x-\tau,y+kh)+b_{1(k+1)}U_{yy}(x,y+kh)+$$
$$+b_{2(k+1)}U_{yy}(x+\tau,y+kh)\big]+$$
$$+\big[a_{0(k+1)}U_{xx}(x+\tau,y+kh)+a_{1(k+1)}U_{xx}(x,y+kh)+$$
$$+a_{2(k+1)}U_{xx}(x-\tau,y+kh)\big]\Big\}=0,\quad (x,y)\in D. \quad (2)$$

Задача T. *В области* $D=\bigcup\limits_{k=0}^{2}D_k\bigcup J$ *найти решение* $U(x,y)\in C(\overline{D})\bigcap$ $\bigcap C^2\Big(D\backslash\Big(J\bigcup\limits_{l=0}^{1}I^l\Big)\Big)$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее следующим условиям:*

$$U(x,y)=r(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D}_{-1}; \quad (3)$$

$$U(x,y)=\rho(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D}_3; \tag{4}$$

$$U(x,y)=\delta(x,y),\quad (x,y)=\overline{\bigcup_{k=0}^{2} D_{k2}^{+}}; \tag{5}$$

$$U(x,(k\tau-x)/\gamma_{j0})=\psi_{kj}(x),\ k\tau\leqslant x\leqslant(2k+1)\tau/2,\ j=0,1,\ k=0,1,2, \tag{6}$$

и условиям сопряжения

$$U(x,0-)=U(x,0+)=\omega(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 3\tau;$$
$$U_y(x,0-)=U_y(x,0+)=\nu(x),\quad 0<x<3\tau,\ x\neq\tau,2\tau.$$

Причем

$$\psi_{0j}(0)=r(0,0),\quad r(0,2h)=\delta(0,2h),\quad \rho(3\tau,2h)=\delta(3\tau,2h),$$
$$r(0,y)=\rho(3\tau,y),\quad 0\leqslant y\leqslant 2h;$$

γ_{jk}^2 — *собственные значения матрицы коэффициентов уравнения* (2), $j=0,1$, $k=0,1,2$; $r(x,y)$, $\rho(x,y)$, $\delta(x,y)$, $\psi_{kj}(x)$ — *заданные непрерывные достаточно гладкие функции*; $\omega(x)$, $\nu(x)$ — *функции, подлежащие определению в процессе решения задачи* T.

Теорема 1. *Если*

$$r(x,y)\in C(\overline{D}_{-1})\bigcap C^4(D_{-1});\quad \rho(x,y)\in C(\overline{D}_2)\bigcap C^4(D_2);$$

$$\delta(x,y)\in C\Big(\overline{\bigcup_{k=0}^{2} D_{k2}^{+}}\Big)\bigcap C^4\Big(\bigcup_{k=0}^{2} D_{k2}^{+}\Big);$$

$$\psi_{kj}(x)\in C\left[k\tau,(2k+1)\tau/2\right]\bigcap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2),\quad k=0,1,2,\ j=0,1;$$

$r(0,y)=\rho(3\tau,y)$, $0\leqslant y\leqslant 2h$; $r(0,0)=\psi_{0j}(0)$; $r(0,2h)=\delta(0,2h)$; $\rho(3\tau,2h)=$ $=\delta(3\tau,2h)$, *то существует единственное решение задачи* T.

Для *доказательства* теоремы произведем редукцию опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) сначала к системе трех уравнений смешанного типа без отклонений по переменной x, а затем к системе шести уравнений смешанного типа без отклонений и по аргументу y.

В терминах функций

$$U_k(x,y)=U(x,y),\quad (x,y)\in D_k,\quad k=-\overline{1,3}, \tag{7}$$

учитывая (3), (4), переводя D_k заменой x на $x+k\tau$ ($k=0,1,2$) в D_0 и используя вектор

$$\overline{U}(x,y)=\big(U_0(x,y),U_1(x+\tau,y),U_2(x+2\tau,y)\big)^{\top},\quad (x,y)\in D_0, \tag{8}$$

запишем уравнение (2) в областях D_k ($k=0,1,2$) в форме

$$\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\left\{(\operatorname{sgn}y)B_k\overline{U}_{yy}(x,y+kh)+A_k\overline{U}_{xx}(x,y+kh)\right\}=$$

$$= -\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\big\{(\operatorname{sgn} y)B_k^0\overline{m}_{yy}(x,y+kh)+A_k^0\overline{m}_{xx}(x,y+kh)\big\},\quad (x,y)\in D_0,\quad (9)$$

где

$$B_k=\begin{pmatrix} b_{1(k+1)} & b_{2(k+1)} & 0\\ b_{0(k+1)} & b_{1(k+1)} & b_{2(k+1)}\\ 0 & b_{0(k+1)} & b_{1(k+1)}\end{pmatrix},\quad A_k=\begin{pmatrix} a_{1(k+1)} & a_{0(k+1)} & 0\\ a_{2(k+1)} & a_{1(k+1)} & a_{0(k+1)}\\ 0 & a_{2(k+1)} & a_{1(k+1)}\end{pmatrix},$$

$$\overline{m}(x,y+kh)=\big(r(x-\tau,y+kh),0,\rho(x+3\tau,y+kh)\big)^{\top},$$

причем

$$B_k^0=\begin{pmatrix} b_{0(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{2(k+1)}\end{pmatrix},\quad A_k^0=\begin{pmatrix} a_{2(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{0(k+1)}\end{pmatrix}.$$

Когда $b_{2(k+1)}=b_{0(k+1)}$, $b_{1(k+1)}>\sqrt{2}b_{0(k+1)}>0$, $a_{2(k+1)}=a_{0(k+1)}$, $a_{1(k+1)}>$ $>\sqrt{2}a_{0(k+1)}>0$, матрицы B_k, A_k симметричны и попарно коммутативны. Поэтому [6] существует невырожденная матрица T такая, что

$$T^{-1}B_kT=\Lambda_{B_k}=\begin{pmatrix} \alpha^2_{0(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & \alpha^2_{1(k+1)} & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2_{2(k+1)}\end{pmatrix},$$

где $\alpha^2_{j(k+1)}=b_{1(k+1)}-(-1)^j j\sqrt{2}b_{0(k+1)}2^{1-j}$ ($j=\overline{0,2}$; $k=-\overline{1,1}$) — собственные значения матрицы B_k;

$$T^{-1}A_kT=\Lambda_{A_k}=\begin{pmatrix} \beta^2_{0(k+1)} & 0 & 0\\ 0 & \beta^2_{1(k+1)} & 0\\ 0 & 0 & \beta^2_{2(k+1)}\end{pmatrix},$$

где $\beta^2_{j(k+1)}=a_{1(k+1)}-(-1)^j j\sqrt{2}a_{0(k+1)}2^{1-j}$ ($j=\overline{0,2}$; $k=-\overline{1,1}$) — собственные значения матрицы A_k. При этом

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2\\ 1 & \sqrt{2} & 1\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\overline{P}_0\\ \overline{P}_1\\ \overline{P}_2\end{pmatrix}.$$

Умножая слева матричное уравнение (9) на T^{-1} и учитывая соотношения

$$T^{-1}B_k=\Lambda_{B_k}T^{-1},\quad T^{-1}A_k=\Lambda_{A_k}T^{-1},$$

$$T^{-1}B_k^0\overline{m}=b_{0(k+1)}T^{-1}\overline{m},\quad T^{-1}A_k^0\overline{m}=a_{0(k+1)}T^{-1}\overline{m},$$

после преобразований получим три отдельных опережающе-запаздывающих только по переменной y уравнения смешанного типа:

$$\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\big\{(\operatorname{sgn} y)\alpha^2_{j(k+1)}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+kh)\rangle_{yy}+\beta^2_{j(k+1)}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+kh)\rangle_{xx}\big\}=$$
$$=-\sum_{k=-1}^{1} H\big((-1)^{(k-1)/2}k(y+(k-1)h/2)\big)\times$$
$$\times\big\{(\operatorname{sgn} y)b_{0(k+1)}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+kh)\rangle_{yy}+$$
$$+a_{0(k+1)}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+kh)\rangle_{xx}\big\},\quad (x,y)\in D_0,\quad (10)$$

где $\langle\overline{P}_j,\overline{U}\rangle$, $\langle\overline{P}_j,\overline{m}\rangle$ — скалярное произведение векторов, $j=0,1,2$; область $D_0=D^-_{00}\bigcup D^+_{00}\bigcup D^+_{01}$.

Уравнение (10) в области D^-_{00} является гиперболическим без отклонений аргументов x и y:

$$-\alpha^2_{j1}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle_{yy}+\beta^2_{j1}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle_{xx}=$$
$$=b_{01}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle_{yy}-a_{01}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle_{xx},\quad (x,y)\in D^-_{00},\ \ j=0,1,2,\quad (11)$$

причем, так же как в (8), (7), будем считать

$$\begin{aligned}&\overline{U}(x,y)=\big(U_{00}(x,y),U_{10}(x+\tau,y),U_{20}(x+2\tau,y)\big)^\top,\\&\overline{U}(x,y+h)=\big(U_{01}(x,y+h),U_{11}(x+\tau,y+h),U_{21}(x+2\tau,y+h)\big)^\top\end{aligned}\quad (12)$$

при $(x,y)\in D_{00}$. Здесь

$$U_{kj}(x,y)=U_k(x,y)=U(x,y),\quad (x,y)\in D_{kj},\ \ k=0,1,2,\ \ j=0,1.\quad (13)$$

В терминах функций (13), (12), учитывая (5) и переводя D^+_{0k} заменой y на $y+kh$ $(k=0,1)$ в D^+_{00}, запишем уравнение (10) в областях D^+_{0k} $(k=0,1)$ в виде системы

$$M\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}+N\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{xx}=$$
$$=-M_0\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}+N_0\begin{pmatrix}\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)\rangle\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+h)\rangle\end{pmatrix}_{xx}-$$
$$-H(y)\alpha^2_{j2}\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}-H(y)\beta^2_{j2}\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{xx}-$$
$$-H(y)b_{02}\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{yy}-H(y)a_{02}\begin{pmatrix}0\\ \langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\end{pmatrix}_{xx},$$
$$(x,y)\in D^+_{00},\ \ j=0,1,2,\quad (14)$$

где, согласно (12), (13), (5),

$$\overline{U}^{\delta}(x,y{+}2h)=\big(\delta(x,y+2h),\delta(x+\tau,y+2h),\delta(x+2\tau,y+2h)\big)^{\top},\quad (x,y)\in D_{00}^{+},$$

причем

$$M=\begin{pmatrix}\alpha_{j1}^2 & H(y)\alpha_{j2}^2\\ H(y)\alpha_{j0}^2 & \alpha_{j1}^2\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}\beta_{j1}^2 & H(y)\beta_{j2}^2\\ H(y)\beta_{j0}^2 & \beta_{j1}^2\end{pmatrix},$$

а

$$M_0=\begin{pmatrix}b_{01} & H(y)b_{02}\\ H(y)b_{00} & b_{01}\end{pmatrix},\quad N_0=\begin{pmatrix}a_{01} & H(y)a_{02}\\ H(y)a_{00} & a_{01}\end{pmatrix}.$$

При $\alpha_{j2}^2=\alpha_{j0}^2$, $\beta_{j2}^2=\beta_{j1}^2$ (в этом случае $b_{02}=b_{00}$, $a_{02}=a_{00}$) матрицы M и N (матрицы M_0 и N_0) симметричны и попарно коммутативны. Поэтому [6] существует невырожденная матрица Q такая, что

$$Q^{-1}MQ=\Lambda_M=\begin{pmatrix}\alpha_{j1}^2+H(y)\alpha_{j0}^2 & 0\\ 0 & \alpha_{j1}^2-H(y)\alpha_{j0}^2\end{pmatrix},$$

где $\alpha_{j1}^2+(-1)^k\alpha_{j0}^2$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы M;

$$Q^{-1}NQ=\Lambda_N=\begin{pmatrix}\beta_{j1}^2+H(y)\beta_{j0}^2 & 0\\ 0 & \beta_{j1}^2-H(y)\beta_{j0}^2\end{pmatrix},$$

где $\beta_{j1}^2+(-1)^k\beta_{j0}^2$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы N;

$$Q^{-1}M_0Q=\Lambda_{M_0}=\begin{pmatrix}b_{01}+H(y)b_{00} & 0\\ 0 & b_{01}-H(y)b_{00}\end{pmatrix},$$

где $b_{01}+(-1)^k b_{00}$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы M_0;

$$Q^{-1}N_0Q=\Lambda_{N_0}=\begin{pmatrix}a_{01}+H(y)a_{00} & 0\\ 0 & a_{01}-H(y)a_{00}\end{pmatrix},$$

где $a_{01}+(-1)^k a_{00}$ $(k=0,1)$ — собственные значения матрицы N_0. При этом

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad Q^{-1}=\frac{1}{2}Q.$$

Умножая слева матричное уравнение (14) на Q^{-1} и учитывая соотношения

$$Q^{-1}M=\Lambda_M Q^{-1},\quad Q^{-1}N=\Lambda_N Q^{-1},$$
$$Q^{-1}M_0=\Lambda_{M_0} Q^{-1},\quad Q^{-1}N_0=\Lambda_{N_0} Q^{-1},$$

после преобразований получим шесть отдельных уравнений эллиптического типа без отклонения аргументов:

$$\begin{aligned}&\big(\alpha_{j1}^2+(-1)^kH(y)\alpha_{j0}^2\big)\big(\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)+(-1)^k\overline{U}(x,y+h)\rangle\big)_{yy}+\\&\quad+\big(\beta_{j1}^2+(-1)^kH(y)\beta_{j0}^2\big)\big(\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)+(-1)^k\overline{U}(x,y+h)\rangle\big)_{xx}=\\&=-\big(b_{01}+(-1)^kH(y)b_{00}\big)\big(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)+(-1)^k\overline{m}(x,y+h)\rangle\big)_{yy}-\\&\quad-\big(a_{01}+(-1)^kH(y)a_{00}\rangle\big)\big(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y)+(-1)^k\overline{m}(x,y+h)\rangle\big)_{xx}-\end{aligned}$$

$$-H(y)\alpha_{j2}^2(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\big)_{yy}-H(y)\beta_{j2}^2(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{U}^\delta(x,y+2h)\rangle\big)_{xx}-$$
$$-H(y)b_{02}(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\big)_{yy}-H(y)a_{02}(-1)^k\big(\langle\overline{P}_j,\overline{m}(x,y+2h)\rangle\big)_{xx},$$
$$(x,y)\in D_{00}^+,\quad j=0,1,2,\quad k=0,1. \quad (15)$$

Таким образом, опережающе-запаздывающее уравнение смешанного типа (2) в силу (11), (15) приведено к системе шести уравнений смешанного типа без отклонений аргументов:

$$(\operatorname{sgn} y)q_{jkyy}(x,y)+\gamma_{jk}^2 q_{jkxx}(x,y)=n_{jk}(x,y),\quad (x,y)\in D_{00}, \quad (16)$$

где

$$q_{jk}(x,y)=\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,y)+(-1)^kH(y)\overline{U}(x,y+h)\rangle, \quad (17)$$
$$\gamma_{jk}^2=\frac{\beta_{j1}^2+(-1)^kH(y)\beta_{j0}^2}{\alpha_{j1}^2+(-1)^kH(y)\alpha_{j0}^2},$$

$$n_{jk}(x,y)=-\frac{1}{8[\alpha_{j1}^2+(-1)^kH(y)\alpha_{j0}^2]}\Big\{\Big\langle\overline{P}_j,\Big[(\operatorname{sgn} y)\big(b_{01}+(-1)^kH(y)b_{00}\big)\frac{\partial^2}{\partial y^2}+$$
$$+\big(a_{01}+(-1)^kH(y)a_{00}\big)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\big(\overline{m}(x,y)+(-1)^kH(y)\overline{m}(x,y+h)\big)\Big\rangle+$$
$$+H(y)(-1)^k\Big\langle\overline{P}_j,\Big[(\operatorname{sgn} y)\alpha_{j2}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\beta_{j2}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\overline{U}^\delta(x,y+2h)\Big\rangle+$$
$$+H(y)(-1)^k\Big\langle\overline{P}_j,\Big[(\operatorname{sgn} y)b_{02}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{02}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big]\overline{m}(x,y+2h)\Big\rangle\Big\}.$$

Множество решений $q_{jk}(x,y)$, $(x,y)\in D_{00}$ $(j=0,1,2,\ k=0,1)$ шести неоднородных уравнений смешанного типа Лаврентьева—Бицадзе (16) содержит все решения $U(x,y)=U_{jk}(x,y)$, $(x,y)\in D_{jk}$ $(j=0,1,2,\ k=0,1)$ опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2), которые в силу (12) можно выделить из системы (17) в виде

$$\begin{pmatrix}U_{0l}(x,y+lh)\\ U_{1l}(x+\tau,y+lh)\\ U_{2l}(x+2\tau,y+lh)\end{pmatrix}=\overline{U}(x,y+lh)=$$
$$=T\begin{pmatrix}q_{00}(x,y)+(-1)^lq_{01}(x,y)\\ q_{10}(x,y)+(-1)^lq_{11}(x,y)\\ q_{20}(x,y)+(-1)^lq_{21}(x,y)\end{pmatrix},\quad (x,y)\in D_{00},\ l=0,1. \quad (18)$$

Таким образом, поставленная задача T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^+\bigcup D^-\bigcup I$ относительно искомой функции $U(x,y)$ редуцирована к шести задачам Трикоми для шести уравнений смешанного типа (16) без отклонений в области $D_{00}=D_{00}^+\bigcup D_{00}^-\bigcup I_0$ относительно функций $q_{jk}(x,y)$ вида (17).

Задача T_{jk}. *В области* $D_{00}=D_{00}^{+}\bigcup D_{00}^{-}\bigcup I_0$ *найти решение* $q_{jk}(x,y)\in$ $\in C(\overline{D}_{00})\bigcap C^2(D_{00}\backslash I_0)$ *уравнения* (16), *удовлетворяющее условиям*

$$q_{jk}(0,y)=q_{jk}(\tau,y)=\overline{r}_{jk}(y)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(0,y)+(-1)^k\overline{U}(0,y+h)\rangle,\ 0\leqslant y\leqslant h; \quad (19)$$

$$q_{jk}(x,h)=\overline{\delta}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,h)+(-1)^k\overline{U}(x,2h)\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau; \quad (20)$$

$$q_{jk}(x,-x/\gamma_{jk})=\overline{\psi}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,-x/\gamma_{jk})\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau/2, \quad (21)$$

условиям сопряжения

$$q_{jk}(x,0-)=q_{jk}(x,0+)=\overline{\omega}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}(x,0)\rangle,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau; \quad (22)$$

$$q_{jky}(x,0-)=q_{jky}(x,0+)=\overline{\nu}_{jk}(x)\equiv\frac{1}{8}\langle\overline{P}_j,\overline{U}_y(x,0)\rangle,\quad 0<x<\tau; \quad (23)$$

причем

$$\overline{r}_{jk}(0)=\overline{\psi}_{jk}(0),\quad \overline{r}_{jk}(h)=\overline{\delta}_{jk}(0),\quad \overline{r}_{jk}(h)=\overline{\delta}_{jk}(\tau),$$

где $\overline{r}_{jk}(y)$, $\overline{\delta}_{jk}(x)$, $\overline{\psi}_{jk}(x)$ *— заданные непрерывные достаточно гладкие функции;* $\overline{\omega}_{jk}(x)$, $\overline{\nu}_{jk}(x)$ *— функции, подлежащие определению в процессе решения задачи* T_{jk}. Здесь и далее $j=0,1,2$, $k=0,1$.

2. Однозначная разрешимость задачи *T*. *Единственность решения задачи* T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D=D^{+}\bigcup D^{-}\bigcup I$ следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $U(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$ в смысле ее эквивалентности, согласно (1), (18), тривиальному решению $q_{jk}(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}_{00}=\overline{D}_{00}^{+}\bigcup\overline{D}_{00}^{-}\bigcup I_0$ однородной задаче T_{jk} для однородного уравнения (16) при однородных условиях (19)–(21).

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\beta_{jk}=\int_0^{\tau}\overline{\omega}_{jk}(x)\overline{\nu}_{jk}(x)dx.$$

Лемма 1. *Если* $q_{jk}(x,y)$ *— решение однородного уравнения* (16) *в области* $\overline{D}_{00}^{+}$ *из класса* $C(\overline{D}_{00}^{+})\bigcap C^2(D_{00}^{+})$, *обращающееся в нуль при* $x=0$, $x=\tau$ $(0\leqslant y\leqslant h)$ *и* $y=h$ $(0\leqslant x\leqslant\tau)$, *то*

$$\beta_{jk}\leqslant 0, \quad (24)$$

$$\beta_{jk}+\iint\limits_{D_{00}^{+}}\big[q_{jky}^2(x,y)+\gamma_{jk}^2q_{jkx}^2(x,y)\big]dxdy=0. \quad (25)$$

Лемма 2. *Если* $q_{jk}(x,y)\in C(\overline{D}_{00}^{-})\bigcap C^2(D_{00}^{-})$ *— решение однородного уравнения* (16) *в области* D_{00}^{-}, *обращающееся в нуль на характеристике* $x=-\gamma_{jk}y$ $(0\leqslant x\leqslant\tau/2)$, *то*

$$\beta_{jk}\geqslant 0. \quad (26)$$

Доказательство лемм 1, 2 можно провести аналогично [7, 8].

Из неравенств (24), (26) следует $\beta_{jk} = 0$, поэтому из равенства (25) получим положительно определенную форму, равную нулю, и, значит, $q_{jkx}(x, y) \equiv 0$, $q_{jky}(x, y) \equiv 0$, т. е. $q_{jk}(x, y) \equiv \text{const}$ в D^+_{00}. Однородность граничных условий в D^+_{00} и $q_{jk}(x, y) \in C(\overline{D}^+_{00})$ позволяют утверждать, что $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}^+_{00}$ и, в частности, $q_{jk}(x, 0) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$. Последнее равенство в совокупности с однородным условием (21) обеспечивает тривиальность решений $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D}^-_{00}$. Из полученной тривиальности решений $q_{jk}(x, y)$ в $\overline{D}^+_{00}$ и $\overline{D}^-_{00}$ следует тривиальность $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}$.

Таким образом, единственность решения задачи T_{jk} для уравнения (16) и граничных условий (19)–(21) в области $\overline{D}_{00}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) и однородных граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$ следует из $q_{jk}(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D}_{00}$ и равенств (18), (12), (13): $U(x, y) = U_{jk}(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \overline{D}_{jk}$. Это означает единственность решения задачи T для уравнения (2) при граничных условиях (3)–(6) в области $\overline{D}$.

Доказательство существования решения $U(x, y)$ задачи T в области $\overline{D}$ для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) основано на решениях задач T_{jk} в области эллиптичности D^+_{00} и гиперболичности D^-_{00} для уравнения (16).

Задача Неймана—Дирихле. *В области* D^+_{00} *найти решение* $q^+_{jk}(x, y) \in C(\overline{D}^+_{00}) \bigcap C^2(D^+_{00})$ *уравнения* (16):

$$q^+_{jkyy}(x, y) + \gamma^2_{jk} q^+_{jkxx}(x, y) = n^+_{jk}(x, y), \quad (x, y) \in D^+_{00}, \tag{27}$$

где $n^+(x, y) = n_{jk}(x)$, *удовлетворяющее условиям* (19), (20), (23).

Задача Дарбу. *В области* D^-_{00} *найти решение* $q^-_{jk}(x, y) \in C(\overline{D}^-_{00}) \bigcap C^2(D^-_{00})$ *уравнения* (16):

$$\begin{aligned} q^-_{jkyy} - \gamma^2_{jk} q^-_{jkxx}(x, y) = n^-_{jk}(x, y) \equiv \\ \equiv \frac{1}{8\alpha^2_{j1}} \langle \overline{P}_j, (b_{01}\partial^2/\partial y^2 - a_{01}\partial^2/\partial x^2)\overline{m}(x, y) \rangle, \quad (x, y) \in D^-_{00}, \end{aligned} \tag{28}$$

удовлетворяющее условиям (21), (23).

Вопрос существования решения $q_{jk}(x, y)$ задачи T_{jk} для уравнения (16) в области $D_{00} = D^+_{00} \bigcup D^-_{00} \bigcup I_0$ связан с разрешимостью полного [9] сингулярного интегрального уравнения относительно $\overline{\nu}_{jk}(x)$, $0 < x < \tau$, которое будет получено из функциональных соотношений между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$, привнесенных на $y = 0$, $0 < x < \tau$ решениями задачи Неймана—Дирихле из D^+_{00} и задачи Дарбу из D^-_{00}.

Лемма 3. *Если имеют место включения*

$$\overline{r}_{jk}(y) \in C[0, h] \bigcap C^2(0, h), \quad \overline{\delta}_{jk}(x) \in C[0, \tau] \bigcap C^2(0, \tau), \quad \overline{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0, \tau),$$

то существует единственное решение задачи Неймана—Дирихле $q_{jk}^{+}(x,y) \in \in C(\overline{D}_{00}^{+}) \bigcap C^2(D_{00}^{+})$, *которое имеет вид*

$$q_{jk}^{+}(x,y) = \int_0^\tau \overline{\delta}_{jk}(t)\frac{\partial}{\partial y}G_{jk}(x,t;0,y)dt- \\ - \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(t)G_{jk}(x,t;0,h-y)dt - \int_0^h d\zeta \int_0^\tau n_{jk}^{+}(t,\zeta)\Gamma_{jk}(x,t;\zeta,y)dt+ \\ + \int_0^h d\zeta \int_0^\tau \overline{r}_{jk}(\zeta)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Gamma_{jk}(x,t;\zeta,y)dt, \quad (29)$$

где

$$\Gamma_{jk}(x,y;\zeta,y) = \begin{cases} G_{jk}(x,t;\zeta,h-y), & y>\zeta, \\ G_{jk}(x,t;y,h-\zeta), & \zeta>y; \end{cases}$$

причем

$$G_{jk}(x,t;r,z) = \frac{2}{\tau}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m z)\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m r)}{\gamma_{jk}\lambda_m \operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}\sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_m t).$$

Доказательство. Решение задачи Неймана—Дирихле для уравнения (27) в области D_{00}^{+} будем искать в форме ряда

$$q_{jk}^{+}(x,y) = \overline{r}_{jk}(x,y) + \sum_{m=1}^{+\infty} R_{mjk}(y)\sin(\lambda_m x), \quad (x,y)\in \overline{D}_{00}^{+},\ \lambda_m = m\pi/\tau, \quad (30)$$

в котором функция $R_{mjk}(y)$, удовлетворяющая уравнению

$$R_{mjk}''(y) - \gamma_{jk}^2\lambda_m^2 R_{mjk}(y) = f_{mjk}(y) \equiv \\ \equiv \frac{2}{\tau}\int_0^\tau [n_{jk}^{+}(\zeta,y) - \overline{r}_{jk}''(y)]\sin(\lambda_m\zeta)d\zeta, \quad 0<y<h,$$

и, в силу (20), (23), условиям

$$R_{mjk}(h) = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau [\overline{\delta}_{jk}(\zeta) - \overline{r}_{jk}(h)]\sin(\lambda_m\zeta)d\zeta,$$
$$R_{mjk}'(0) = \frac{2}{\tau}\int_0^\tau [\overline{\nu}_{jk}(\zeta) - \overline{r}_{jk}'(0)]\sin(\lambda_m\zeta)d\zeta,$$

имеет вид

$$R_{mjk}(y) = \frac{\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m y)}{\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}R_{mjk}(h) - \frac{\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m(h-y))}{\gamma_{jk}\lambda_m\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}R_{mjk}'(0)- \\ - \frac{\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m y)}{\gamma_{jk}\lambda_m\operatorname{ch}(\gamma_{jk}\lambda_m h)}\int_0^h f_{mjk}(\zeta)\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m(h-\zeta))d\zeta+ \\ + \frac{1}{\gamma_{jk}\lambda_m}\int_0^y f_{mjk}(\zeta)\operatorname{sh}(\gamma_{jk}\lambda_m(y-\zeta))d\zeta, \quad 0\leqslant y\leqslant h.$$

Подстановка последнего равенства в (30) и необходимые преобразования приводят к искомому решению (29) задачи Неймана—Дирихле (27), (19), (20), (23). □

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$ привнесенное из D_{00}^{+} на $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$, найдем из решения задачи Неймана—Дирихле (29), полагая $y = 0$ и дифференцируя соответствующее выражение:

$$\overline{\omega}'_{jk}(x) = \frac{1}{2\tau\gamma_{jk}} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\zeta)[\mathrm{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \mathrm{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)]d\zeta - \\ - \frac{1}{\tau\gamma_{jk}} \int_0^\tau \overline{\nu}_{jk}(\zeta) M_{jk}(x,\zeta)d\zeta + \mu_{jk}(x), \quad 0 < x < \tau, \quad (31)$$

где

$$M_{jk}(x,\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \Big[\frac{\sin(\pi(\zeta - x)/\tau)}{\cos(\pi(\zeta - x)/\tau) - \mathrm{ch}(2(n+1)\gamma_{jk}\pi h/\tau)} + \\ + \frac{\sin(\pi(\zeta + x)/\tau)}{\cos(\pi(\zeta + x)/\tau) - \mathrm{ch}(2(n+1)\gamma_{jk}\pi h/\tau)}\Big],$$

$$\mu_{jk}(x) = \int_0^\tau \overline{\delta}_{jk}(t) \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial}{\partial y} G_{jk}(x,t;0,y)\Big]_{y=0} dt - \\ - \int_0^h d\zeta \int_0^\tau n_{jk}^{+}(t,\zeta) \frac{\partial}{\partial x} G_{jk}(x,y;0,h-\zeta)dt + \\ + \int_0^h d\zeta \int_0^\tau \overline{r}_{jk}(\zeta) \frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2}{\partial y^2} G_{jk}(x,t;y,h-\zeta)\Big]_{y=0} dt,$$

причем $M_{jk}(x,\zeta) \in C^2(0 < x, \zeta < \tau)$, $\mu_{jk}(x) \in C^1(0,\tau)$.

Лемма 4. *Если выполняются включения*

$$\overline{\nu}_{jk}(x) \in C^1(0,\tau), \quad \overline{\psi}_{jk}(x) \in C[0,\tau/2] \bigcap C^2(0,\tau/2)$$

и $\overline{\psi}_{jk}(0) = \overline{r}_{jk}(0)$, *то существует единственное решение задачи Дарбу* $q_{jk}^{-}(x,y) \in C(\overline{D_{00}^{-}}) \bigcap C^2(D_{00}^{-})$, *которое имеет вид*

$$q_{jk}^{-}(x,y) = \frac{1}{\gamma_{jk}} \int_0^{x+y\gamma_{jk}} \overline{\nu}_{jk}(\zeta)d\zeta + P_{jk}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_{00}^{-}}, \qquad (32)$$

где

$$P_{jk}(x,y) = -\overline{\psi}_{jk}(0) + \overline{\psi}_{jk}\big((x - y\gamma_{jk})/2\big) + \overline{\psi}_{jk}\big((x + y\gamma_{jk})/2\big) - B_{jk}(x,y) + \\ + B_{jk}\big((x - y\gamma_{jk})/2, -(x - y\gamma_{jk})/2\gamma_{jk}\big) + \\ + B_{jk}\big((x + y\gamma_{jk})/2, -(x + y\gamma_{jk})/2\gamma_{jk}\big),$$

$$B_{jk}(x,y)=\frac{1}{2\gamma_{jk}}\int_0^y dt\int_{x-(y-t)\gamma_{jk}}^{x+(y-t)\gamma_{jk}} n^-_{jk}(\zeta,t)d\zeta.$$

Доказательство формулы (32) следует из общего решения неоднородного уравнения (28) колебания струны

$$q^-_{jk}(x,y)=L^1_{jk}(x-y\gamma_{jk})+L^2_{jk}(x+y\gamma_{jk})+ \\ +B_{jk}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D^-_{00}},\ L^s_{jk}(\zeta)\in C^2[0,\tau]\quad (s=1,2)$$

и краевых условий (21), (23).

Функциональное соотношение между $\overline{\omega}_{jk}(x)$ и $\overline{\nu}_{jk}(x)$, привнесенное из D^-_{00} на $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\tau$, найдем из решения (32) Дарбу, полагая в нем $y=0$ и дифференцируя соответствующее выражение:

$$\overline{\omega}'_{jk}(x)=\frac{1}{\gamma_{jk}}\overline{\nu}_{jk}(x)+P'_{jk}(x,0),\quad 0<x<\tau, \tag{33}$$

где

$$P'_{jk}(x,0)=\overline{\psi}_{jk}(x/2)+\frac{1}{\gamma_{jk}}\int_0^{-x/2\gamma_{jk}} n^-_{jk}(x+t\gamma_{jk},t)dt,$$

причем

$$P'_{jk}(x,0)\in C^1(0,\tau).$$

Вопрос существования решения задачи T_{jk} (16), (19)–(21) в силу условий сопряжения (22)–(23) и функциональных соотношений (31), (33) сведен к разрешимости полного сингулярного интегрального уравнения нормального типа [9]

$$\overline{\nu}_{jk}(x)-\frac{1}{2\tau}\int_0^\tau\overline{\nu}_{jk}(\zeta)[\mathrm{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau)-\mathrm{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]d\zeta=d_{jk}(x)\equiv \\ \equiv\gamma_{jk}[\mu_{jk}(x)-P'_{jk}(x,0)]-\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\overline{\nu}_{jk}(\zeta)M_{jk}(x,\zeta)d\zeta,\quad 0<x<\tau, \tag{34}$$

$d_{jk}(x)\in C^1(0,\tau)$, которое после преобразований и замены переменных и функций по формулам

$$\overline{\nu}_{jk}(x)=\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y),\quad d_{jk}(x)=\overline{d}_{jk}(y),\quad y=\cos(\pi x/\tau), \tag{35}$$

примет вид

$$\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\overline{\overline{\nu}}_{jk}(t)\frac{dt}{t-y}=\overline{d}_{jk}(y),\quad -1<y<1. \tag{36}$$

Индекс [9] нормального сингулярного интегрального уравнения (36) равен нулю. В силу единственности решения задачи T_{jk} (16), (19)–(21) уравнение (36) однозначно обратимо в классе функций $\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y)$, удовлетворяющих условию Гельдера при $-1<y<1$, методом сингуляризации [10, 11].

Действительно, действуя на обе части уравнения (36) оператором

$$Kv \equiv v(s) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v(P)\frac{dP}{P-s},$$

используя формулу Пуанкаре—Бертрана [9] для перестановки порядка интегрирования в сингулярном повторном интеграле с ядром Коши и необходимые при этом преобразования, придем к решению уравнения (36) вида

$$\overline{\overline{\nu}}_{jk}(y) = \frac{1}{2}\overline{d}_{jk}(y) + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \overline{d}_{jk}(P)\frac{dP}{P-y}, \quad -1 < y < 1.$$

Возврат к старым переменным и функциям по формулам (35) с подстановкой правой части уравнения (34) приводит к уравнению Фредгольма [12]

$$\overline{\nu}_{jk}(x) + \int_{0}^{\tau} \overline{\nu}_{jk}(t)W_{jk}(x,t)dt = Q_{jk}(x), \quad 0 < x < \tau, \tag{37}$$

где

$$W_{jk}(x,t) = \frac{1}{2\tau}M_{jk}(x,t) + \\ + \frac{1}{4\tau^2}\int_{0}^{\tau}[\mathrm{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \mathrm{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)]M_{jk}(\zeta,t)d\zeta,$$

$$Q_{jk}(x) = \frac{\gamma_{jk}}{2}[\mu_{jk}(x) - P'_{jk}(x,0)] + \\ + \frac{\gamma_{jk}}{4\tau}\int_{0}^{\tau}[\mathrm{ctg}(\pi(\zeta - x)/2\tau) - \mathrm{ctg}(\pi(\zeta + x)/2\tau)][\mu_{jk}(\zeta) - P'_{jk}(\zeta,0)]d\zeta,$$

причем

$$Q_{jk}(x) \in C^1(0,\tau), W_{jk}(x,t) \in C^1(0 < x, t < \tau).$$

Разрешимость уравнения [12] Фредгольма (37) следует из единственности решения задачи T_{jk} в области $\overline{D}_{00}$.

Определив $\overline{\nu}_{jk}(x)$ из уравнения (37), найдем $\overline{\omega}_{jk}(x)$ из (31) или (33), а затем по формулам (29) и (32) получим решения $q^{+}_{jk}(x,y)$ и $q^{-}_{jk}(x,y)$ задачи Неймана—Дирихле и Дарбу соответственно в областях D^{+}_{00} и D^{-}_{00}. Таким образом, существование решения $q_{jk}(x,y)$ задачи T_{jk} в области $D_{00} = D^{+}_{00} \bigcup D^{-}_{00} \bigcup I_0$ доказано.

Вернемся к задаче T для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа (2) в области $D = D^{+} \bigcup D^{-} \bigcup I$. Ее решение в силу (18) и (29) имеет в области $\overline{D}^{+} = \bigcup\limits_{j=0}^{2}\Big(\bigcup\limits_{k=0}^{1}\overline{D}^{+}_{jk}\Big)$ следующий вид:

$$\overline{U}(x,y) = \overline{U}^{+}(x,y+lh) = T\begin{pmatrix} q^{+}_{00}(x,y) + (-1)^l q^{+}_{01}(x,y) \\ q^{+}_{10}(x,y) + (-1)^l q^{+}_{11}(x,y) \\ q^{+}_{20}(x,y) + (-1)^l q^{+}_{21}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$(x,y) \in \overline{D}_{jk} \quad j = 0,1,2,\ k,l = 0,1,$$

а в области $\overline{D}^- = \bigcup\limits_{j=0}^{2} \overline{D}_{j0}^-$, согласно (18) и (32), имеем

$$\overline{U}(x,y) = \overline{U}^-(x,y) = T \begin{pmatrix} q_{00}^-(x,y) + q_{01}^-(x,y) \\ q_{10}^-(x,y) + q_{11}^-(x,y) \\ q_{20}^-(x,y) + q_{21}^-(x,y) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, теорема доказана.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Шарковский А. Н., Майстренко Ю. А., Романенко Е. Ю. *Разностные уравнения и их приложения.* Киев: Наук. думка, 1986. 280 с.
2. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформированного тела // *Прикл. механика*, 1979. Т. 15, № 5. С. 39–47.
3. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравн.*, 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
4. Маслов В. П. *Операторные методы.* М.: Наука, 1973. 544 с.
5. Ганцев Ш. Х., Бахтизин Р. Н., Франц М. В., Ганцев К. Ш. Опухолевый рост и возможности математического моделирования системных процессов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 131–151. https://doi.org/10.14498/vsgtu1661.
6. Беллман Р. *Введение в теорию матриц.* М.: Наука, 1976. 352 с.
7. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике.* М.: Наука, 1973. 712 с.
8. Зарубин А. Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом.* Орел: ОГУ, 1997. 225 с.
9. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* М.: Наука, 1977. 640 с.
10. Флайшер Н. М. Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1965. Т. 10, № 5. С. 615–620.
11. Бабурин Ю. С. О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений / *Дифференциальные уравнения*, Выпуск 10. Рязань, 1977. С. 14–24.
12. Краснов М. Л. *Интегральные уравнения.* М.: Наука, 1975. 303 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 35–50
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1835

MSC: 35M12

Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation

© ***A. N. Zarubin***

Orel State University named after I. S. Turgenev,
95, Komsomolskaya st., Orel, 119192, Russian Federation.

Abstract

We investigate the Tricomi boundary value problem for a differential-difference leading-lagging equation of mixed type with non-Carleman deviations in all arguments of the required function. A reduction is applied to a mixed-type equation without deviations. Symmetric pairwise commutative matrices of the coefficients of the equation are used. The theorems of uniqueness and existence are proved. The problem is unambiguously solvable.

Keywords: mixed-type equation, differential-difference equation, integral equation, singular integral equation, concentrated lag and lead.

Received: 5th November, 2020 / Revised: 13th February, 2021 /
Accepted: 22nd February, 2021 / First online: 10th March, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu *Difference Equations and Their Applications*, Mathematics and Its Applications, vol. 250. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1993, xii+358 pp. https://doi.org/10.1007/978-94-011-1763-0.
2. Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Differential equations with displaced arguments in stationary problems in the mechanics of a deformable body, *Sov. Appl. Mech.*, 1979, vol. 15, no. 5, pp. 391–397. https://doi.org/10.1007/BF01074069.
3. Samarskii A. A. Some problems of the theory of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935 (In Russian).

Research Article

Please cite this article in press as:
Zarubin A. N. Nonlocal Tricomi boundary value problem for a mixed-type differential-difference equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 35–50. https://doi.org/10.14498/vsgtu1835 (In Russian).

Author's Details:
Aleksandr N. Zarubin https://orcid.org/0000-0002-0611-5752
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations; e-mail: aleks_zarubin@mail.ru; matdiff@yandex.ru

4. Maslov V. P. *Operatornye metody* [Operational Methods]. Moscow, Nauka, 1973, 544 pp. (In Russian)
5. Gantsev Sh., Bakhtizin R. N., Frants M. V., Gantsev K. Sh. Tumor growth and mathematical modeling of system processes, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 131–151 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1661`.
6. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 19. Philadelphia, PA, 1997, xxviii+403 pp.
7. Frankl F. I. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973, 712 pp. (In Russian)
8. Zarubin A. N. *Uravneniia smeshannogo tipa s zapazdyvaiushchim argumentom* [Mixed-Type Equations with Retarded Argument]. Orel, Orel State Univ., 1997, 225 pp. (In Russian)
9. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol. 85. Oxford, Pergamon Press, 1966, xix+564 pp. `https://doi.org/10.1016/C2013-0-01739-2`.
10. Flaysher N. M. A new closed-form solution method for some classes of singular integral equations with a regular part, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 1965, vol. 10, no. 5, pp. 615–620 (In Russian).
11. Baburin Yu. S. On the singularization of singular integral equations, In: *Differentsial'nye uravneniia* [Differential Equations], Issue 10. Ryazan, 1977, pp. 14–24 (In Russian).
12. Krasnov M. L. *Integral'nye uravneniia* [Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1975, 303 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1845

УДК 517.954

Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки

© *К. Б. Сабитов, О. В. Фадеева*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Изучена начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольно закрепленной балки. Такое линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка описывает изгибные поперечные колебания однородной балки при воздействии внешней силы при отсутствии вращательного движения при изгибе.

Методом разделения переменных построена система собственных функций одномерной спектральной задачи, которая является ортогональной и полной в пространстве квадратично-суммируемых функций. Единственность решения начально-граничной задачи доказана двумя способами — с применением интеграла энергии и с использованием свойства полноты системы собственных функций.

Решение задачи вначале найдено при отсутствии внешней силы и однородных граничных условиях, а затем рассмотрен общий случай при наличии внешней силы и неоднородных граничных условиях. В обоих случаях решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

Получены оценки коэффициентов этих рядов и системы собственных функций. На основании установленных оценок найдены достаточные условия на начальные функции, выполнение которых обеспечивает равномерную сходимость построенных рядов в классе регулярных решений уравнения колебаний балки, т.е. доказаны теоремы существования решения поставленной начально-граничной задачи. Установлена устойчивость решений начально-граничной задачи в зависимости от начальных данных и правой части рассматриваемого уравнения в классах квадратично-суммируемых и непрерывных функций.

Ключевые слова: консольно закрепленная балка, вынужденные колебания, начальные и граничные условия, спектральный метод, аналитическое решение, единственность, существование, устойчивость.

Получение: 11 февраля 2021 г. / Исправление: 16 февраля 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66. https://doi.org/10.14498/vsgtu1845.

Сведения об авторах

Камиль Басирович Сабитов https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
доктор физико-математических наук; профессор; каф. высшей математики;
e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Оксана Владиславовна Фадеева https://orcid.org/0000-0003-1704-9524
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: faoks@yandex.ru

Введение. Рассмотрим однородную консольно закрепленную балку длины l. Вынужденные изгибные поперечные колебания такой балки под действием непрерывной внешней силы $G(x,t)$ в случае отсутствия вращательного движения описываются следующим уравнением [1, с. 143–145; 2, с. 276–277]:

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} = G(x,t),$$

где ρ — линейная плотность балки, S — площадь поперечного сечения, E — модуль упругости материала, J — момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси. Это уравнение можно записать в виде

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/(\rho S)$, $F(x,t) = G(x,t)/(\rho S)$.

Отметим, что задачи о колебательных процессах балок, стержней и пластин играют важную роль в строительной механике [3, с. 326].

В данной работе для уравнения (1) изучается начально-граничная задача в области

$$D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\},$$

где l и T — заданные положительные действительные числа.

Начально-граничная задача. *В области D найти решение $u(x,t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}), \tag{2}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

где $F(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные функции, обладающие достаточной гладкостью.

Отметим, что в учебниках и монографиях [1, с. 145–147; 2, с. 277; 3, с. 346–350; 4, с. 35–38; 5, с. 149–158; 6, с. 321–330] найдены собственные частоты и виды собственных колебаний для уравнения (1) с различными граничными условиями, но начально-граничные задачи не изучены. В последние годы к исследованию линейных и нелинейных начально-граничных задач для уравнения колебаний балки наблюдается повышенный интерес [7–15].

В данной работе на основе [11,12] решение начально-граничной задачи для уравнения (1) вначале построено при отсутствии внешней силы и однородных граничных условиях, а затем рассмотрен общий случай при наличии внешней силы и неоднородных граничных условиях.

1. Единственность решения начально-граничной задачи. Для доказательства единственности решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением из работы [12].

Теорема 1 [12]. *Если существует решение начально-граничной задачи* (1)–(4), *то для любого t, $0 \leqslant t \leqslant T$, справедлива оценка*

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2)\,\mathrm{d}x \leqslant e^T \left[\int_0^l (\psi^2(x) + \alpha^2(\varphi''(x))^2)\,\mathrm{d}x + \iint\limits_{\overline{D}} F^2(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right]. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(4), то она единственна.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, являющиеся решениями данной задачи. Тогда разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$$

и нулевым начальным и граничным условиям. Для этой разности в силу оценки (5) при любом $t \in [0,T]$ имеем

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Это возможно только в случае, когда $u_t = u_{xx} \equiv 0$ в области D, т.е. $u(x,t) = c_1 x + c_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Из выполнимости граничных условий (3) получаем $c_1 = c_2 = 0$, т.е. $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$, откуда и следует утверждение теоремы. □

2. Существование решения начально-граничной задачи. Рассмотрим решение задачи для случая отсутствия внешней силы — $F(x,t) \equiv 0$. Разделяя в уравнении (1) переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$, получим спектральную задачу относительно функции $X(x)$:

$$X^{IV} + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{6}$$

$$X(0) = X'(0) = X''(l) = X'''(l) = 0. \tag{7}$$

Если $\lambda > 0$, то, полагая $\lambda = 4d^4$, $d > 0$, найдем общее решение уравнения (6):

$$X(x) = e^{dx}(a_1 \cos dx + a_2 \sin dx) + e^{-dx}(a_3 \cos dx + a_4 \sin dx),$$

где a_i — произвольные постоянные, $i = \overline{1,4}$. Подчиняя функцию $X(x)$ и ее производные до третьего порядка граничным условиям (7), получим линейную систему относительно неизвестных постоянных a_i:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0, \\ a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} \sin dl - a_2 e^{dl} \cos dl - a_3 e^{-dl} \sin dl + a_4 e^{-dl} \cos dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} - a_4 e^{-dl})(\cos dl + \sin dl) - (a_2 e^{dl} + a_3 e^{-dl})(\cos dl - \sin dl) = 0, \end{cases}$$

определитель которой равен

$$\Delta = e^{2dl} + e^{-2dl} + 2(1 + \cos^2 dl).$$

Поскольку определитель отличен от нуля, система имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda = 0$, то спектральная задача (6), (7) также имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda < 0$, то, полагая $\lambda = -d^4$, $d > 0$, строим общее решение уравнения (6) в виде

$$X(x) = a_1 e^{dx} + a_2 e^{-dx} + a_3 \cos dx + a_4 \sin dx,$$

где a_i — произвольные пока неизвестные постоянные, $i = \overline{1,4}$. Удовлетворяя функцию $X(x)$ граничным условиям (7), получим следующую систему относительно неизвестных постоянных:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0, \\ a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl} - a_3 \cos dl - a_4 \sin dl = 0, \\ (a_1 e^{dl} + a_2 e^{-dl}) + a_3 \sin dl - a_4 \cos dl = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Определитель системы (8) равен

$$\Delta = -4(\operatorname{ch} dl \cos dl + 1).$$

Чтобы система (8) имела ненулевые решения, потребуем, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\operatorname{ch} dl \cos dl = -1. \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет счетное множество корней d_n [1, с. 146; 9]:

$$d_n = \frac{\pi}{l}\Big(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n\Big), \quad \Theta_n = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \tag{10}$$

Итак, получили собственные значения спектральной задачи (6), (7):

$$\lambda_n = -d_n^4,$$

где d_n — корень уравнения (9).

Находя общее решение системы (8) и учитывая равенство (9) при $d = d_n$ получаем систему собственных функций:

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sh} d_n l + \sin d_n l}{\operatorname{ch} d_n l + \cos d_n l}(\operatorname{ch} d_n x - \cos d_n x) + \sin d_n x - \operatorname{sh} d_n x.$$

Отсюда, учитывая

$$\operatorname{sh} d_n l = \sqrt{\operatorname{ch}^2 d_n l - 1} = |\operatorname{tg} d_n l| = -\frac{|\sin d_n l|}{\cos d_n l},$$

получаем две подсистемы:

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n \operatorname{ch} d_n(x - l/2) + b_n \sin d_n(x - l/2), & n = 2k - 1, \\ c_n \operatorname{sh} d_n(x - l/2) + f_n \cos d_n(x - l/2), & n = 2k, \end{cases} \tag{11}$$

где $a_n = \operatorname{sh}^{-1}(d_n l/2)$, $b_n = \cos^{-1}(d_n l/2)$, $c_n = -\operatorname{ch}^{-1}(d_n l/2)$, $f_n = \sin^{-1}(d_n l/2)$.

Таким образом, построена система собственных функций задачи (6), (7) по формуле (11). Эта система ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$ [16, с. 99]. Для удобства дальнейших исследований нормируем систему функций (11). Для нахождения норм собственных функций вычислим интеграл

$$I_{nn} = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Для $n = 2k-1$ имеем

$$I_{nn} = \int_0^l \big[a_n \operatorname{ch} d_n(x-l/2) + b_n \sin d_n(x-l/2)\big]^2\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{a_n^2+b_n^2}{2}l + \frac{a_n^2}{2d_n}\operatorname{sh} d_n l - \frac{b_n^2}{2d_n}\sin d_n l.$$

Тогда, с учетом равенства (9), находим

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = l\frac{\operatorname{ch} d_n l + 1}{\operatorname{ch} d_n l - 1} = l\operatorname{cth}^2(d_n l/2). \tag{12}$$

Аналогично для $n = 2k$ получаем

$$I_{nn} = \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\mathrm{d}x = l\frac{\operatorname{ch} d_n l - 1}{\operatorname{ch} d_n l + 1} = l\operatorname{th}^2(d_n l/2). \tag{13}$$

На основании равенств (12) и (13) нормируем систему функций (11):

$$Y_n(x) = \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}, \quad \|X_n(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l}\operatorname{cth}(d_n l/2), & n = 2k-1, \\ \sqrt{l}\operatorname{th}(d_n l/2), & n = 2k. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)–(4). Следуя [11, 12], рассмотрим вспомогательные функции

$$u_n(t) = \int_0^l u(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Дифференцируя (15) дважды и учитывая (1), при условии $F(x,t) \equiv 0$ получим

$$u_n''(t) = -\alpha^2\int_0^l u_{xxxx}(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Интегрируя последнее равенство четыре раза по частям и принимая во внимание условия (3) и (7), получим уравнение

$$u_n''(t) + \alpha^2 d_n^4 u_n(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u_n(t) = \alpha_n \cos\alpha d_n^2 t + \beta_n \sin\alpha d_n^2 t, \tag{16}$$

где α_n, β_n — произвольные постоянные.

Для нахождения постоянных α_n, β_n, подчинив функции (15) условиям (4), получим начальные условия:

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \varphi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \varphi_n, \tag{17}$$

$$u_n'(0) = \int_0^l u_t(x,0)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \psi_n. \tag{18}$$

Удовлетворяя функции (16) полученным начальным условиям (17) и (18), находим $\alpha_n = \varphi_n$, $\beta_n = \psi_n/(\alpha d_n^2)$ и явный вид функций

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \alpha d_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2} \sin \alpha d_n^2 t. \tag{19}$$

Поскольку для функций (15) получен явный вид (19), на основании полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ можно доказать единственность решения задачи (1)–(4). Действительно, пусть существуют различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решения данной задачи. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ есть решение однородной задачи (1)–(4), где $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Тогда из (17)–(19) следует, что $u_n(t) = 0$ при любом $t \in [0,T]$, что, с учетом (15), влечет выполнимость равенства

$$\int_0^l u(x,t)Y_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ получаем, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Так как $u(x,t)$ в силу условия (2) непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ на $\overline{D}$.

Решение поставленной задачи (1)–(4) будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n(x), \tag{20}$$

где $u_n(t)$ и $Y_n(x)$ определяются формулами (19) и (14).

Лемма 1. *Для любых $t \in [0,T]$ и больших $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \leqslant C_1\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big), \quad |u_n''(t)| \leqslant C_2 n^4\Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big),$$

где C_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость этих оценок вытекает непосредственно из формулы (19).

Лемма 2. *Для любых $x \in [0,l]$ и больших $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|Y_n^{(i)}(x)| \leqslant C_{i+3} n^i, \quad i = \overline{0,4}. \tag{21}$$

Доказательство. Для случая $n = 2k-1$ на основании формулы (11) имеем

$$X_n(x) = a_n \operatorname{ch} d_n(x-l/2) + b_n \sin d_n(x-l/2) =$$
$$= \frac{2\operatorname{sh}(d_n l/2)}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \operatorname{ch} d_n(x-l/2) + \frac{2\operatorname{ch} d_n l \cos(d_n l/2)}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \sin d_n(x-l/2).$$

Из данного представления при всех $x \in [0,l]$ и $n \in \mathbb{N}$ оценим $X_n(x)$:

$$|X_n(x)| \leqslant \frac{\operatorname{sh} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} + \frac{2\operatorname{ch} d_n l}{\operatorname{ch} d_n l - 1} \leqslant \frac{4}{(1-e^{-d_1 l})^2} = C_3.$$

Теперь из формулы (12) следует, что

$$\|X_n(x)\| \geqslant \sqrt{l}, \quad \lim_{n\to\infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}.$$

Отсюда вытекает, что существует номер n_1 такой, что при всех $n > n_1$: $\sqrt{l} \leqslant \|X_n(x)\| \leqslant 2\sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0,l]$

$$|Y_n(x)| \leqslant \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} < \frac{C_3}{\sqrt{l}}.$$

При $n = 2k$ на основании формулы (14) имеем

$$X_n(x) = c_n \operatorname{sh} d_n(x-l/2) + f_n \cos d_n(x-l/2) =$$
$$= \frac{\operatorname{sh} d_n(x-l/2)}{\operatorname{ch}(d_n l/2)} - \frac{2\operatorname{ch} d_n l \sin(d_n l/2)}{\operatorname{ch} d_n l + 1} \cos d_n(x-l/2),$$

откуда при всех $x \in [0,l]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|X_n(x)| \leqslant \frac{\operatorname{sh}(d_n l/2)}{\operatorname{ch}(d_n l/2)} + \frac{2\operatorname{ch} d_n l}{1 + \operatorname{ch} d_n l} \leqslant 3.$$

Из (13) имеем

$$\|X_n(x)\| \leqslant \sqrt{l}, \quad \lim_{n\to\infty} \|X_n(x)\| = \sqrt{l}.$$

Отсюда следует, что существует номер n_2 такой, что при всех $n > n_2$ выполняется неравенство $\sqrt{l}/2 \leqslant \|X_n(x)\| \leqslant \sqrt{l}$. Тогда при больших n и любых $x \in [0,l]$ справедлива оценка

$$|Y_n(x)| \leqslant \frac{|X_n(x)|}{\|X_n(x)\|} \leqslant \frac{6}{\sqrt{l}}.$$

Вычисляя производные функций $Y_n(x)$ до четвертого порядка включительно, с учетом асимптотической формулы (10) для d_n убеждаемся в справедливости оценок (21) для больших $n \in \mathbb{N}$ и любых $x \in [0,l]$. $\square$

Далее, дифференцируя почленно ряд (20), составим ряды из производных:

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) Y_n(x), \tag{22}$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 u_n(t) Y_n(x). \tag{23}$$

Полученные ряды (22) и (23), как и ряд (20), на основании лемм 1 и 2 при любых $(x,t) \in \overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_8 \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2} \Big).$$

Лемма 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x) \in C^6[0,l], \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{V}(0) = 0,$$
$$\psi(x) \in C^4[0,l], \quad \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(l) = \psi'''(l) = 0,$$

то имеют место следующие представления:

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(6)}}{d_n^6}, \quad \psi_n = \frac{\psi_n^{(4)}}{d_n^4},$$

где

$$\varphi_n^{(6)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\|X_n\|} \displaystyle\int_0^l \varphi_n^{(6)}(x) \big(a_n \operatorname{ch} d_n(x - l/2) + b_n \sin d_n(x - l/2) \big)\, \mathrm{d}x, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\|X_n\|} \displaystyle\int_0^l \varphi_n^{(6)}(x) \big(c_n \operatorname{sh} d_n(x - l/2) - f_n \cos d_n(x - l/2) \big)\, \mathrm{d}x, & n = 2k, \end{cases}$$

$$\psi_n^{(4)} = \int_0^l \psi^{(4)}(x) Y_n(x)\, \mathrm{d}x.$$

Доказательство. Заметим, что непосредственным дифференцированием можно убедиться в том, что

$$Y_n^{(4)}(x) = d_n^4 Y_n(x).$$

Тогда на основании (17) имеем

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \varphi(x) Y_n^{(4)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Интегрируя последнее равенство четыре раза по частям и учитывая граничные условия (3), получаем

$$\varphi_n = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) Y_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{d_n^8} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) Y_n^{(4)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

Интегрируя в последнем интеграле дважды по частям, приходим к справедливости первого представления леммы 3.

Аналогично, на основании (18) получим

$$\psi_n = \int_0^l \psi(x) Y_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_n^4} \int_0^l \psi(x) Y_n^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_n^4} \psi_n^{(4)}.$$

□

На основании леммы 3 ряды (20), (22), (23) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \big(|\varphi_n^{(6)}| + |\psi_n^{(4)}|\big),$$

т.е. они сходятся равномерно на $\overline{D}$. Таким образом, сумма ряда (20) удовлетворяет условиям задачи (1)–(4).

Итак, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение задачи* (1)–(4) (*где* $F(x,t) \equiv 0$) *и оно определяется суммой ряда* (20).

3. Устойчивость решения начально-граничной задачи. Для обоснования устойчивости решения задачи (1)–(4) рассмотрим пространство квадратично-суммируемых функций $L_2[0,l]$.

Теорема 4. *Для решения* (20) *начально-граничной задачи* (1)–(4) *справедливы оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant C_{10}\big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\big),$$
$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{11}\big(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\psi(x)\|_{C_{[0,l]}}\big).$$

Доказательство. Так как система функций $Y_n(x)$ ортонормирована, из представления (20) в силу леммы 1 получим

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n^2 + \psi_n^2) = \\ = C_{10}\big(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]}\big).$$

Из полученного неравенства следует справедливость первой оценки.

Из (20) на основании лемм 1 и 2 при любых $(x,t) \in \overline{D}$ имеем

$$|u(x,t)| \leqslant C_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big) \leqslant C_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{|\varphi_n^{(4)}|}{n^4} + \frac{|\psi_n|}{n^2}\Big) \leqslant \\ \leqslant C_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \big(|\varphi_n^{(4)}| + |\psi_n|\big).$$

Отсюда, используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \leqslant C_{13}\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Bigr)^{1/2}\Bigl[\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(4)}|^2\Bigr)^{1/2}+\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr] =$$
$$= C_{14}\bigl(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,l]}+\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\bigr).$$

Из полученной оценки непосредственно следует вторая оценка теоремы 4. □

4. Вынужденные колебания балки с неоднородными граничными условиями. Рассмотрим начально-граничную задачу с неоднородными граничными условиями для случая, когда внешняя сила отлична от нуля: *найти в области* D *решение* $u(x,t)$ *уравнения* (1), *обладающее свойствами* (2), (4) *и*

$$\begin{aligned} &u(0,t)=h_1(t), \quad u_x(0,t)=h_2(t),\\ &u_{xx}(l,t)=g_1(t), \quad u_{xxx}(l,t)=g_2(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \end{aligned} \tag{24}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ — *заданные достаточно гладкие функции, подчиненные условиям согласования с начальными функциями* (4):

$$\begin{aligned} &h_1(0)=\varphi(0), \quad h_1'(0)=\psi(0), \quad h_2(0)=\varphi'(0), \quad h_2'(0)=\psi'(0),\\ &g_1(0)=\varphi''(l), \quad g_1'(0)=\psi''(l), \quad g_2(0)=\varphi'''(l), \quad g_2'(0)=\psi'''(l). \end{aligned} \tag{25}$$

Поставленную неоднородную задачу можно свести к решению начально-граничной задачи для неоднородного уравнения колебаний балки с однородными начальными и граничными условиями и новой правой частью.

Введем в рассмотрение функцию

$$v(x,t)=u(x,t)-z(x,t)-w(x,t), \tag{26}$$

где

$$z(x,t)=h_1(t)+xh_2(t)+\frac{x^2}{2}g_1(t)+\Bigl(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Bigr)g_2(t), \tag{27}$$

$$\begin{aligned} w(x,t)=\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\frac{x^2}{2}\varphi''(l)-\Bigl(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Bigr)\varphi'''(l)+\\ +t\Bigl(\psi(x)-\psi(0)-x\psi'(0)-\frac{x^2}{2}\psi''(l)-\Bigl(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Bigr)\psi'''(l)\Bigr). \end{aligned} \tag{28}$$

Отметим, что функция $z(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (24), а функция $w(x,t)$ — нулевым граничным условиям. В силу условий согласования (25) функция (26) удовлетворяет уравнению

$$v_{tt}+\alpha^2 v_{xxxx}=\tilde F(x,t), \tag{29}$$

где

$$\tilde F(x,t)=F(x,t)+h_1''(t)+xh_2''(t)+\frac{x^2}{2}g_1''(t)+\Bigl(\frac{x^4}{24l}-\frac{lx^2}{4}\Bigr)g_2''(t)+$$
$$+\frac{\alpha^2}{l}\bigl(g_2(t)+l\varphi^{IV}(x)+t\psi^{IV}(x)-g_2(0)-tg_2'(0)\bigr)$$

и нулевым начальным и граничным условиям:

$$v(0,t) = v_x(0,t) = v_{xx}(l,t) = v_{xxx}(l,t) = 0, \quad v(x,0) = v_t(x,0) = 0.$$

Поэтому ниже будем изучать задачу для уравнения (29) с нулевыми начальными и граничными условиями в классе функций (2). Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) Y_n(x), \tag{30}$$

где $Y_n(x)$ — собственные функции задачи (1)–(4), определяемые по формулам (14).

Пусть функция $\tilde{F}(x,t)$ такова, что она на отрезке $[0,l]$ разлагается в ряд Фурье по системе функций $Y_n(x)$:

$$\tilde{F}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n(t) Y_n(x),$$

где

$$\tilde{F}_n(t) = \int_0^l \tilde{F}(x,t) Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Подставляя функции $v(x,t)$ и $\tilde{F}(x,t)$ в уравнение (29), найдем

$$T_n(t) = \frac{1}{\alpha d_n^2} \int_0^l \tilde{F}_n(s) \sin \alpha d_n^2 (t-s)\,\mathrm{d}s. \tag{31}$$

Лемма 4. *Для любых $t \in [0,T]$ справедливы оценки*

$$|T_n(t)| \leqslant C_{15} \frac{\|\tilde{F}_n(t)\|}{n^2}, \quad |T_n''(t)| \leqslant C_{16} n^2 \|\tilde{F}_n(t)\|,$$

где

$$\|\tilde{F}_n(t)\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\tilde{F}_n(t)|.$$

Справедливость этих оценок следует непосредственно из формулы (31). Формально продифференцируем ряд (30):

$$v_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) Y_n(x), \quad v_{xxxx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 T_n(t) Y_n(x).$$

Эти ряды, как и ряд (30), для любых $(x,t) \in \overline{D}$ мажорируются рядом

$$C_{17} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \|\tilde{F}_n(t)\|.$$

Лемма 5. *Если функция $\tilde{F}(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^4_x(\overline{D})$ и при любых $t \in [0,T]$*

$$\tilde{F}(0,t) = \tilde{F}_x(0,t) = \tilde{F}_{xx}(l,t) = \tilde{F}_{xxx}(l,t) = 0,$$

то справедливо следующее представление:

$$\tilde{F}_n(t) = \frac{1}{d_n^4} F_n^{(4)}(t), \quad F_n^{(4)}(t) = \int_0^l \tilde{F}_x^{(4)}(x,t) Y_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.

При условии выполнения леммы 5 функции $v(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$, $v_{xxxx}(x,t)$ мажорируются сходящимся рядом

$$C_{18} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\tilde{F}_n^{(4)}(t)\|}{n^2},$$

а значит, сходятся равномерно на $\overline{D}$. Таким образом, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 5. *Если функция $\tilde{F}(x,t)$ удовлетворяет условиям леммы 5, то существует единственное решение задачи для уравнения* (29) *с нулевыми начальными и граничными условиями, определяемое суммой ряда* (30).

Теорема 6. *Для функции $v(x,t)$, определяемой формулой* (30), *справедливы оценки*

$$\|v(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant C_{19} \|\tilde{F}(x,t)\|_{L_2(D)},$$

$$\|v(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant C_{20} \|\tilde{F}(x,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Доказательство. Поскольку система (14) ортонормирована в $L_2(D)$, то из формулы (30) на основании леммы 4 получим

$$\|v(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 d_n^4} \left(\int_0^t \tilde{F}_n(s) \sin \alpha d_n^2 (t-s)\,\mathrm{d}s \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 d_n^4} \int_0^t \tilde{F}_n^2(s)\,\mathrm{d}s \leqslant C_{21} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n^2(s)\,\mathrm{d}s = C_{21} \int_0^t \int_0^l \tilde{F}^2(x,s)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s =$$

$$= C_{21} \int_0^t \|\tilde{F}(x,t)\|^2_{L_2[0,l]}\,\mathrm{d}s \leqslant C_{19}^2 \|\tilde{F}(x,t)\|^2_{L_2(D)}.$$

В силу лемм 4 и 5 для любой точки $(x,t) \in \overline{D}$ имеем

$$|v(x,t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |T_n(t)| \leqslant C_{15} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\tilde{F}_n(t)\|}{n^2} \leqslant C_{20} \|\tilde{F}(x,t)\|_{C(\overline{D})}.$$

Из полученных оценок следует справедливость теоремы. □

Теорема 7. *Если выполняются условия*

$$F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^4(\overline{D}),$$
$$h_1(t),\ h_2(t),\ g_1(t),\ g_2(t) \in C^2[0,T],$$
$$\varphi(x),\ \psi(x) \in C^7[0,l]$$

и при любом $t \in [0,T]$

$$F(0,t) + h_1''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(g_2(t) + l\varphi^{IV}(0) + t\psi^{IV}(0) - g_2(0) - tg_2'(0)\right) =$$
$$= F_x(0,t) + h_2''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{V}(0) + t\psi^{V}(0)\right) =$$
$$= F_{xx}(l,t) + g_1''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{VI}(l) + t\psi^{VI}(l)\right) =$$
$$= F_{xxx}(l,t) + g_2''(t) + \frac{\alpha^2}{l}\left(l\varphi^{VII}(l) + t\psi^{VII}(l)\right) = 0,$$

то существует единственное устойчивое решение начально-граничной задачи (1), (2), (4), (24), *определяемое по формуле*

$$u(x,t) = v(x,t) + z(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ *определяется рядом* (30), *а функции* $z(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *— формулами* (27) *и* (28) *соответственно.*

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Релей Л. *Теория звука.* М.: Гостехиздат, 1955. 503 с.
3. Крылов А. Н. *Вибрация судов.* Л., М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 442 с.
4. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения с техническими приложениями.* М.: Наука, 1968. 503 с.
5. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний.* М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
6. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле.* М.: Физматлит, 1967. 444 с.
7. Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями // *Диффер. уравн.*, 2012. Т. 48, № 6. С. 814–825.
8. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for abeam member with uncertain boundary conditions // *J. Sound Vibrat.*, 2013. vol. 332, no. 4. pp. 795–806. `https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.019`.

9. Рудаков И. А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки с однородными граничными условиями // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015. Т. 79, № 5. С. 215–238. https://doi.org/10.4213/im8250.
10. Ванг И., Фанг Ж. Колебания упругой балки на нелинейных опорах // *ПМТФ*, 2015. Т. 56, № 2. С. 196–206. https://doi.org/10.15372/PMTF20150220.
11. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
12. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. https://doi.org/10.1134/S0374064117010083.
13. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. https://doi.org/10.1134/S0374064117050090.
14. Касимов Ш. Г., Мадрахимов У. С. Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки в многомерном случае // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1379–1391. https://doi.org/10.1134/S0374064119100091.
15. Сабитов К. Б., Акимов А. А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 5. С. 632–645. https://doi.org/10.1134/S0374064120050076.
16. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* Москва: Наука, 1969. 528 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1845

MSC: 35G16

Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam

© ***K. B. Sabitov, O. V. Fadeeva***

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In this paper, an initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam is studied. Such a linear differential equation of the fourth order describes bending transverse vibrations of a homogeneous beam under the action of an external force in the absence of rotational motion during bending.

The system of eigenfunctions of the one-dimensional spectral problem, which is orthogonal and complete in the space of square-summable functions, is constructed by the method of separation of variables. The uniqueness of the solution to the initial-boundary value problem is proved in two ways: (i) using the energy integral; (ii) relying on the completeness property of the system of eigenfunctions.

The solution to the problem was first found in the absence of an external force and homogeneous boundary conditions, and then the general case was considered in the presence of an external force and inhomogeneous boundary conditions. In both cases, the solution of the problem is constructed as the sum of the Fourier series.

Estimates of the coefficients of these series and the system of eigenfunctions are obtained. On the basis of the established estimates, sufficient conditions were found for the initial functions, the fulfillment of which ensures the uniform convergence of the constructed series in the class of regular solutions of the beam vibration equation, i.e. existence theorems for the solution of the stated initial-boundary value problem are proved. Based on the solutions obtained, the stability of the solutions of the initial-boundary value problem is established depending on the initial data and the right-hand side of the equation under consideration in the classes of square-summable and continuous functions.

Keywords: cantilevered beam, forced vibrations, initial and boundary conditions, spectral method, analytical solution, uniqueness, existence, stability.

Received: 11th February, 2021 / Revised: 16th February, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 31st March, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:
Sabitov K. B., Fadeeva O. V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66. https://doi.org/10.14498/vsgtu1845 (In Russian).

Authors' Details:

Kamil B. Sabitov https://orcid.org/0000-0001-9516-2704
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Oksana V. Fadeeva https://orcid.org/0000-0003-1704-9524
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: faoks@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Rayleigh L. *Teoriia zvuka* [The Theory of Sound]. Moscow, Gostehizdat, 1955, 503 pp. (In Russian)
3. Krylov A. N. *Vibratsiia sudov* [The Ship Vibration]. Leningrad, Moscow, 1936, 442 pp. (In Russian)
4. Collatts L. *Zadachi na sobstvennye znacheniia s tekhnicheskimi prilozheniiami* [The Eigenvalue Problem with Technical Applications]. Moscow, Nauka, 1968, 503 pp. (In Russian)
5. Biderman V. L. *Teoriia mekhanicheskikh kolebanii* [Theory of Mechanical Vibrations]. Moscow, Vyssh. shk., 1980, 408 pp. (In Russian)
6. Timoshenko S. P. *Kolebaniia v inzhenernom dele* [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Fizmatlit, 1967, 444 pp. (In Russian)
7. Rudakov I. A. Periodic solutions of the quasilinear beam vibration equation with homogeneous boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 820–831. https://doi.org/10.1134/S0012266112060067.
8. Li S., Reynders E., Maes K., De Roeck G. Vibration-based estimation of axial force for abeam member with uncertain boundary conditions, *J. Sound Vibrat.*, 2013, vol. 332, no. 4, pp. 795–806. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.019.
9. Rudakov I. A. Periodic solutions of the quasilinear equation of forced beam vibrations with homogeneous boundary conditions, *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 1064–1086. https://doi.org/10.1070/IM2015v079n05ABEH002772.
10. Wang Y.-R., Fang Z.-W. Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 2. https://doi.org/10.1134/S0021894415020200.
11. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1406.
12. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. https://doi.org/10.1134/S0012266117010086.
13. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. https://doi.org/10.1134/S0012266117050093.
14. Kasimov S. G., Madrakhimov U. S. Initial-boundary value problem for the beam vibration equation in the multidimensional case, *Differ. Equ.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1336–1348. https://doi.org/10.1134/S0012266119100094.
15. Sabitov K. B., Akimov A. A. Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 621–634. https://doi.org/10.1134/S0012266120050079.
16. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 67–82
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1816

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 517.958:531–133

Плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости с периодической системой полубесконечных межфазных трещин

© *В. Н. Акопян, А. А. Григорян*

Институт механики НАН Республики Армения,
Республика Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б.

Аннотация

Рассмотрено плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости, полученной при помощи поочередного соединения двух разнородных полос, которая по линиям стыков разнородных полос расслаблена периодической системой двух полубесконечных межфазных трещин и деформируется под воздействием нормальных нагрузок, приложенных к берегам трещин. Выделена базовая ячейка задачи в виде двухкомпонентной полосы и при помощи обобщенного преобразования Фурье получена определяющая система уравнений задачи в виде одного сингулярного интегрального уравнения второго рода относительно комплексной комбинации контактных напряжений в зоне стыка полос.

В частном случае путем устремления ширины полос к бесконечности получено определяющее уравнение задачи для двухкомпонентной плоскости из двух разнородных полуплоскостей с двумя полубесконечными межфазными трещинами и построено его точное решение. Получено также определяющее уравнение поставленной задачи в виде одного сингулярного интегрального уравнения первого рода относительно нормальных контактных напряжений еще в одном частном случае, когда все полосы изготовлены из одного и того же материала, т.е. в случае однородной плоскости, расслабленной периодической системой параллельных полубесконечных трещин.

Научная статья

Образец для цитирования

Акопян В. Н., Григорян А. А. Плоско-деформированное состояние равномерно кусочно-однородной плоскости с периодической системой полубесконечных межфазных трещин // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 67–82. https://doi.org/10.14498/vsgtu1816.

Сведения об авторах

Ваграм Наслетникович Акопян https://orcid.org/0000-0003-3684-9471
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; отд. теории упругости и вязкоупругости; e-mail: vhakobyan@sci.am

Арам Арутюнович Григорян https://orcid.org/0000-0001-7582-1960
аспирант; младший научный сотрудник; отд. теории упругости и вязкоупругости; e-mail: grigoryan.aram.4@gmail.com

В общем же случае определено поведение искомой функции в концевых точках интервала интегрирования и решение задачи численно-аналитическим методом механических квадратур сведено к решению системы алгебраических уравнений. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности напряжений, J-интеграла Черепанова–Райса и раскрытия трещин. Проведен численный расчет. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений и интеграла Черепанова–Райса в концевых точках трещин в зависимости от упругих характеристик разнородных полос и геометрических параметров задачи.

Ключевые слова: периодическая задача, смешанная задача, кусочно-однородная плоскость, межфазные трещины.

Получение: 10 августа 2020 г. / Исправление: 29 января 2021 г. / Принятие: 12 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 24 февраля 2021 г.

Введение. Определение локальных полей напряжений вокруг одинарно расположенных или периодически повторяющихся дефектов в однородных и составных массивных телах всегда было и остается одним из приоритетных направлений развития механики разрушения и смешанных задач теории упругости. Изучению этой проблемы и решению различных задач для упругих однородных и составных массивных тел с различными конечными и полубесконечными концентраторами напряжений типа трещин, штампов и включений посвящено много работ. Полученные в них многие основополагающие результаты приведены в монографиях [1–7] и в избранных трудах Г.Я. Попова [8]. Для кусочно-однородных равномерно слоистых тел с периодическими и двоякопериодическими внутренними или межфазными дефектами аналогичные исследования начали проводиться совсем недавно.

В работах [9–11] поставлены и методами разрывных решений и сингулярных интегральных уравнений построены замкнутые или эффективные решения ряда периодических и двоякопериодических антиплоских и плоских задач для кусочно-однородного, равномерно слоистого пространства с межфазными дефектами различного типа. Особо отметим работу [9], которая более тесно связана с рассматриваемой здесь задачей. Здесь построены разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с межфазными двоякопериодическими конечными дефектами и получены решения двух конкретных задач, когда дефекты представляют собой трещину и абсолютно жесткое включение. Укажем также на работу [11], где построены замкнутые решения двух антиплоских задач для кусочно-однородного равномерно слоистого пространства с периодической системой межфазных туннельных полубесконечных трещин.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть кусочно-однородная плоскость, изготовленная при помощи поочередного соединения двух разнородных полос равной толщины $2h$ с коэффициентами Ламэ μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2 и находящаяся в плоско-деформированном состоянии, на линиях соединения полос $y = 2nh$, $n \in \mathbb{Z}$, по бесконечным отрезкам $L = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$ расслаблена периодической системой параллельных полубесконечных трещин (рис. 1).

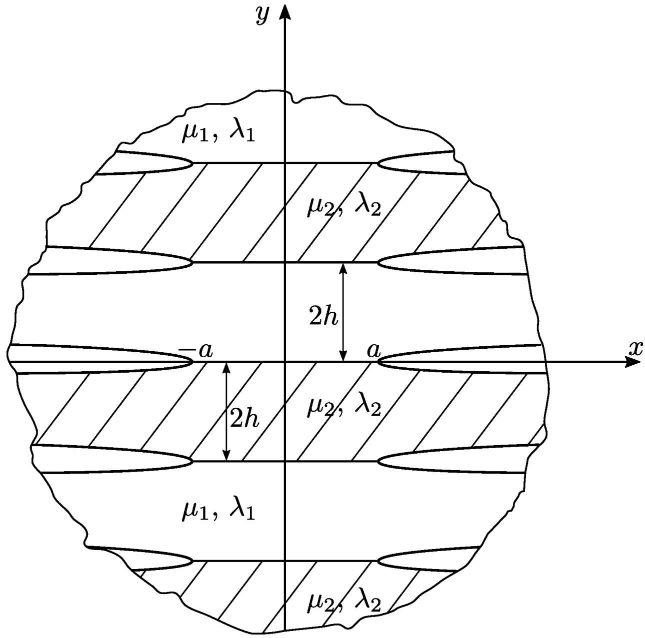


Рис. 1. Кусочно-однородная плоскость
[Figure 1. The piecewise-homogeneous plane with a periodic system of parallel semi-infinite cracks]

Будем полагать, что плоскость деформируется под воздействием одинаковых, самоуравновешенных распределенных нагрузок $p(x)$, действующих на берегах трещин и имеющих конечную результирующую P.

Необходимо построить решение поставленной задачи и изучить закономерности изменения контактных напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в концевых точках трещин в зависимости от соотношения упругих постоянных и геометрических характеристик разнородных полос.

При такой постановке задачи линии $y = (2n + 1)h$, $n \in \mathbb{Z}$, являются линиями симметрии, вследствие чего напряженное состояние в составных полосах, находящихся между линиями симметрии $y = (2n - 1)h$ и $y = (2n + 1)h$, будет одинаковым. Это означает, что для определения напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной плоскости достаточно рассмотреть напряженно-деформированное состояние только двухкомпонентной полосы (базовой ячейки) между линиями симметрии $y = \pm h$ (рис. 2).

Поставленная задача математически эквивалентна следующей граничной задаче для базовой ячейки:

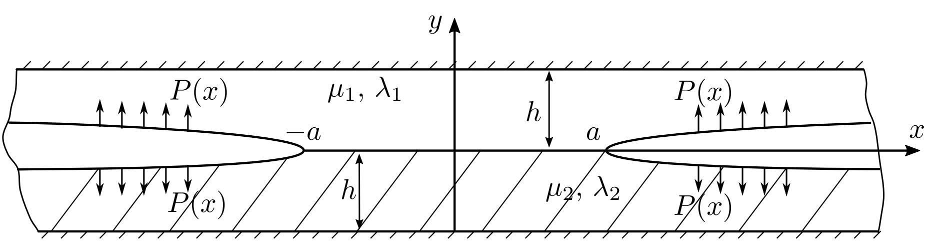


Рис. 2. Базовая ячейка [Figure 2. The basic calculation cell]

$$\begin{cases} v_j\big(x,(-1)^{j+1}h\big)=0, & -\infty<x<\infty;\ j=1,2; \\ \tau_{yz}^{(j)}\big(x,(-1)^{j+1}h\big)=0, & -\infty<x<\infty;\ j=1,2; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sigma_y^{(j)}(x,0)=-p(x), & |x|>a;\ j=1,2; \\ \tau_{xy}^{(j)}(x,0)=0, & |x|>a;\ j=1,2; \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0), & |x|<a; \\ \sigma_y^{(1)}(x,0)=\sigma_y^{(2)}(x,0), & |x|<a; \\ v_1(x,0)=v_2(x,0), & |x|<a; \\ u_1(x,0)=u_2(x,0), & |x|<a. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u_j(x,y)$ и $v_j(x,y)$, $j=1,2$ — соответственно горизонтальные и вертикальные составляющие смещений точек разнородных полос, удовлетворяющие, каждая в своей области определения, уравнениям Ламэ и связанные с компонентами нормальных $\sigma_y^{(j)}(x,y)$ и касательных $\tau_{xy}^{(j)}(x,y)$ напряжений известными соотношениями [2].

Для решения поставленной задачи мысленно разделим базовую ячейку на две однородные полосы и введем в рассмотрение неизвестные нормальные и касательные контактные напряжения $q(x)$ и $\tau(x)$, действующие в зонах контакта разнородных полос:

$$\begin{cases} \tau_{xy}^{(j)}(x,0)=\tau(x), & |x|<a;\ \ j=1,2; \\ \sigma_y^{(j)}(x,0)=q(x), & |x|<a;\ \ j=1,2. \end{cases} \tag{2}$$

Далее решим вспомогательные задачи для каждой из разнородных полос, занимающих соответственно области $\{-\infty<x<\infty; 0\leqslant y\leqslant h\}$ и $\{-\infty<x<\infty; -h\leqslant y\leqslant 0\}$, когда на лицевой линии первой полосы $y=h$ и на лицевой линии второй полосы $y=-h$ заданы условия симметрии, а на линии $y=0$ заданы напряжения, и определим смещения точек зоны контакта обеих полос через введенные неизвестные контактные напряжения $q(x)$ и $\tau(x)$, т. е. решим граничную задачу (1), заменив последние четыре условия условиями (2) при каждом из значений $j=1,2$.

С этой целью, следуя [7], решения уравнений Ламэ представим в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} u_j(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big[(A_j+iyB_j^*)\operatorname{ch}(sy)+(B_j+iyA_j^*)\operatorname{sh}(sy)\big]e^{-isx}ds, \\ v_j(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big[(C_j-yA_j^*)\operatorname{ch}(sy)+(D_j-yB_j^*)\operatorname{sh}(sy)\big]e^{-isx}ds, \end{aligned} \tag{3}$$

где A_j, B_j, C_j и D_j — неизвестные постоянные, подлежащие определению, а коэффициенты A_j^* и B_j^* определяются формулами

$$A_j^*=\frac{s}{\varkappa_j}(D_j-iA_j),\quad B_j^*=\frac{s}{\varkappa_j}(C_j-iB_j);\quad \varkappa_j=\frac{\lambda_j+3\mu_j}{\lambda_j+\mu_j},\quad j=1,2.$$

При этом напряжения записываются следующим образом:

$$\sigma_y^{(j)}(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\big[\vartheta_2^{(j)}sD_j+\vartheta_1^{(j)}isA_j-\mu_j syB_j^*\big]\operatorname{ch}(sy)+\\ +\big[\vartheta_2^{(j)}sC_j+\vartheta_1^{(j)}isB_j-\mu_j syA_j^*\big]\operatorname{sh}(sy)\Big\}e^{-isx}ds,$$

$$\tau_{xy}^{(j)}(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\big[\vartheta_2^{(j)}sB_j-\vartheta_1^{(j)}isC_j+\mu_j isyA_j^*\big]\operatorname{ch}(sy)+\\ +\big[\vartheta_2^{(j)}sA_j-\vartheta_1^{(j)}isD_j+\mu_j isyB_j^*\big]\operatorname{sh}(sy)\Big\}e^{-isx}ds;\quad (4)$$

$$\vartheta_1^{(j)}=\frac{\mu_j^2}{\lambda_j+3\mu_j},\qquad \vartheta_2^{(j)}=\frac{(\lambda_j+2\mu_j)\mu_j}{\lambda_j+3\mu_j},\qquad j=1,2.$$

Используя представления (3) и (4), удовлетворим условиям указанных вспомогательных граничных задач и выразим неизвестные коэффициенты, входящие в эти представления, через трансформанты Фурье функций $Q(x)$ и $T(x)$. Для постоянных A_j и C_j получим следующие выражения:

$$A_1=-\frac{\varkappa_1\vartheta_1^{(1)}}{2is\mu_1^2}\Big[\frac{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta-\mu_1\beta/\varkappa_1\vartheta_1^{(1)}}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}\Big]\bar{Q}(s)-\frac{\varkappa_1\vartheta_2^{(1)}\operatorname{ch}^2\beta}{2s\mu_1^2(\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta)}\bar{T}(s),$$

$$C_1=-\frac{\varkappa_1\vartheta_2^{(1)}\operatorname{sh}^2\beta}{2s\mu_1^2(\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta)}\bar{Q}(s)+\frac{\varkappa_1\vartheta_1^{(1)}}{2is\mu_1^2}\Big[\frac{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta-\mu_1\beta/\varkappa_1\vartheta_1^{(1)}}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}\Big]\bar{T}(s),$$

$$A_2=-\frac{\varkappa_2\vartheta_1^{(2)}}{2is\mu_2^2}\Big[\frac{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta-\mu_2\beta/\varkappa_2\vartheta_1^{(2)}}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}\Big]\bar{Q}(s)+\frac{\varkappa_2\vartheta_2^{(2)}\operatorname{ch}^2\beta}{2s\mu_2^2(\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta)}\bar{T}(s),$$

$$C_2=\quad\frac{\varkappa_2\vartheta_2^{(2)}\operatorname{sh}^2\beta}{2s\mu_2^2(\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta)}\bar{Q}(s)+\frac{\varkappa_2\vartheta_1^{(2)}}{2is\mu_2^2}\Big[\frac{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta-\mu_2\beta/\varkappa_2\vartheta_1^{(2)}}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}\Big]\bar{T}(s).$$

Остальные же постоянные даются формулами

$$B_j=\frac{i\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}}C_j+\frac{1}{2s\vartheta_2^{(j)}}\bar{T}(s),\quad A_j^*=-\frac{is}{\varkappa_j}\Big(1+\frac{\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}}\Big)A_j+\frac{1}{2\varkappa_j\vartheta_2^{(j)}}\bar{Q}(s),$$

$$D_j=-\frac{i\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}}A_j+\frac{1}{2s\vartheta_2^{(j)}}\bar{Q}(s),\quad B_j^*=\frac{s}{\varkappa_j}\Big(1+\frac{\vartheta_1^{(j)}}{\vartheta_2^{(j)}}\Big)C_j+\frac{i}{2\varkappa_j\vartheta_2^{(j)}}\bar{Q}(s),$$

где

$$Q(x)=\begin{cases}q(x), & |x|<a,\\ -p(x), & |x|>a,\end{cases}\qquad T(x)=\begin{cases}\tau(x), & |x|<a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}\quad (5)$$

$$\bar{Q}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)e^{isx}dx,\quad \bar{T}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}T(x)e^{isx}dx,\quad \beta=hs.$$

Используя полученные выражения для коэффициентов A_j и C_j, $j=1,2$, и значение интеграла [12]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(s)e^{isx}ds=\frac{2i}{x},$$

определим производные от смещений точек зоны контакта разнородных полос ($-\infty < x < \infty$, $j = 1, 2$):

$$
\begin{aligned}
u_j'(x,0) &= \frac{\varkappa_j \vartheta_1^{(j)}}{2\mu_j^2} Q(x) + (-1)^j \frac{\varkappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\pi\mu_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s)ds}{s-x} - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}^{(j)}(s-x) Q(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_{12}^{(j)}(s-x) T(s) ds, \\
v_j'(x,0) &= -\frac{\varkappa_j \vartheta_1^{(j)}}{2\mu_j^2} T(x) + (-1)^j \frac{\varkappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\pi\mu_j^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(s)ds}{s-x} - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} K_{21}^{(j)}(s-x) Q(s) ds + \int_{-\infty}^{\infty} K_{22}^{(j)}(s-x) T(s) ds.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
K_{11}^{(j)}(x) = K_{22}^{(j)}(x) &= \frac{1-\nu_j}{2\pi\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} e^{isx} ds, \\
K_{12}^{(j)}(x) &= i(-1)^{j+1} \frac{1-\nu_j}{2\pi\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{ch}\beta - |\beta|}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} e^{isx} ds, \\
K_{21}^{(j)}(x) &= i(-1)^{j+1} \frac{1-\nu_j}{2\pi\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{sh}|\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} e^{isx} ds.
\end{aligned}
$$

Теперь, используя соотношения (6), удовлетворим последним двум соотношениям (1). В итоге, учитывая (5), после некоторых несложных выкладок для определения контактных напряжений $q(x)$ и $\tau(x)$ получим следующую систему определяющих сингулярных интегральных уравнений ($-a < x < a$):

$$
\begin{aligned}
&Aq(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\tau(s)ds}{s-x} - \int_{-a}^{a} R_{11}(s-x) q(s) ds + \\
&\qquad + \int_{-a}^{a} R_{12}(s-x) \tau(s) ds = F_1(x), \\
&-A\tau(x) - \frac{B}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{q(s)ds}{s-x} - \int_{-a}^{a} R_{21}(s-x) q(s) ds + \\
&\qquad + \int_{-a}^{a} R_{22}(s-x) \tau(s) ds = F_2(x),
\end{aligned} \tag{7}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R_{11}(x) = R_{22}(x) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} e^{isx} ds, \\
R_{12}(x) &= \frac{iB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{ch}|\beta| - |\beta|}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} e^{isx} ds, \\
R_{21}(x) &= \frac{iB}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\beta|} \operatorname{sh}|\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch}\beta \operatorname{sh}\beta + \beta} e^{isx} ds;
\end{aligned}
$$

$$F_1(x) = f_1^{(2)}(x) - f_1^{(1)}(x), \quad F_2(x) = f_2^{(2)}(x) - f_2^{(1)}(x);$$
$$A = \frac{\varkappa_1 \vartheta_1^{(1)}}{2\mu_1^2} - \frac{\varkappa_2 \vartheta_1^{(2)}}{2\mu_2^2}, \quad B = \frac{\varkappa_1 \vartheta_2^{(1)}}{2\mu_1^2} + \frac{\varkappa_2 \vartheta_2^{(2)}}{2\mu_2^2}, \quad C = A + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\Big);$$
$$f_2^{(j)}(x) = -\frac{(-1)^j \varkappa_j \vartheta_2^{(j)}}{2\pi\mu_j^2}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right)\frac{p(s)ds}{s-x} + \\ + \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right)K_{21}^{(j)}(s-x)p(s)ds,$$
$$f_1^{(j)}(x) = \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right)K_{11}^{(j)}(s-x)p(s)ds, \quad j = 1, 2.$$

Систему определяющих уравнений (7) нужно рассматривать вместе с условием равновесия верхней или нижней полуплоскости, которое при самоуравновешенных нагрузках можно представить в виде

$$\int_{-a}^{a} q(s)ds = \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{\infty}\right)p(s)ds = P, \quad \int_{-a}^{a} \tau(s)ds = 0. \tag{8}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению определяющей системы (7) при условиях (8). Отметим, что когда все полосы изготовлены из одного и того же материала, т. е. в случае однородной плоскости с периодической системой параллельных полубесконечных трещин $A = C = F_1(x) = 0$ и из первого уравнения (7) для определения касательных контактных напряжений приходим к однородному сингулярному интегральному уравнению первого рода при втором однородном условии (8). Откуда следует, что $\tau(x) = 0$. Для определения же нормальных контактных напряжений из второго уравнения (7) получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода

$$\frac{B}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{q(s)ds}{s-x} + \int_{-a}^{a} R_{21}(s-x)q(s)ds = -F_2(x), \quad -a < x < a,$$

которое нужно рассматривать при первом условии (8). Отметим, что при помощи несложных математических выкладок из полученного уравнения нетрудно получить определяющее интегральное уравнение этой же задачи, приведенной в [1]. В общем случае, чтобы построить решение определяющей системы интегральных уравнений, из первого уравнения (7) вычтем второе уравнение, первоначально умножив его на мнимую единицу. В результате, введя комплексную комбинацию контактных напряжений $\chi(x) = q(x) - i\tau(x)$, приходим к следующему сингулярному интегральному уравнению второго рода:

$$A\chi(x) + \frac{B}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(s)ds}{s-x} + \int_{-a}^{a} Q_{11}(s-x)\chi(s)ds + \\ + \int_{-a}^{a} Q_{12}(s-x)\bar{\chi}(s)ds = F(x), \quad -a < x < a. \tag{9}$$

При этом условия (7) примут вид

$$\int_{-a}^{a} \chi(s)ds = P. \tag{10}$$

Здесь

$$Q_{11}(x) = -R_{11}(x) + \frac{1}{2i}\big[R_{21}(x) - R_{12}(x)\big],$$
$$Q_{12}(x) = \frac{1}{2i}\big[R_{21}(x) + R_{12}(x)\big], \quad F(x) = F_1(x) + iF_2(x),$$

а черточка над знаком функций здесь и в дальнейшем будет обозначать комплексно-сопряженную величину этих функций.

2. Составная плоскость с двумя полубесконечными межфазными трещинами. Прежде чем перейти к решению определяющей системы (9) в общем случае, рассмотрим еще один частный случай поставленной задачи, когда ширина полос стремится к бесконечности, т. е. рассмотрим задачу о плоско-деформированном состоянии составной упругой плоскости из двух разнородных полуплоскостей, содержащей симметрично расположенные две межфазные полубесконечные трещины. Заметим, что указанная задача рассматривается впервые и представляет самостоятельный интерес. В этом случае регулярные части в уравнении (9) исчезают и мы приходим к следующему определяющему сингулярному интегральному уравнению:

$$A\chi(x) + \frac{B}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{\chi(s)ds}{s-x} = F(x), \quad -a < x < a, \tag{11}$$

которое нужно решать при условиях (10).

Решение уравнения (11) при условиях (10) будет даваться формулой [11]

$$\chi(x) = \frac{1}{A(1-\alpha^2)}\left\{F(x) - \frac{\alpha\omega(x)}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{F(s)ds}{\omega(s)(s-x)}\right\} + \\ + \frac{P\sin(\pi\gamma_j)}{\pi}\omega(x), \quad -a < x < a,$$

где

$$\omega(x) = (x+a)^{-(1/2)-i\gamma}(a-x)^{-(1/2)+i\gamma}, \quad \alpha = \frac{B}{A}, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu_1 + \varkappa_1\mu_2}{\mu_2 + \varkappa_2\mu_1}.$$

Вычислим коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и интеграл Черепанова—Райса в концевых точках трещины $x = \pm a$:

$$K[(-a)^j] = K_I[(-a)^j] - iK_{II}[(-a)^j] = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to(-1)^j(a+0)} \omega^{-1}(x)\chi(x) = \\ = -\frac{\sqrt{2\pi}}{(1-\alpha^2)}\left\{\frac{\alpha}{A\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{F(s)ds}{\omega(s)(s-(-a)^j)} - \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}P\right\}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда интеграл Черепанова—Райса в концевых точках трещины будет даваться формулой [13]

$$J(\pm a) = \tilde{\mu}K(\pm a)\bar{K}(\pm a),$$

где

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\Big) = \frac{B}{4}.$$

3. Решение определяющего уравнения в общем случае. Решение определяющего сингулярного интегрального уравнения (9) в общем случае будем строить методом механических квадратур. Для этого при помощи замены переменных $\{x, s\} = \{a\eta, a\xi\}$ запишем уравнение (9) на интервале $(-1, 1)$:

$$\varphi(\eta) + \frac{\alpha}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \int_{-1}^{1} Q_{11}^*(\xi-\eta)\varphi(\xi)d\xi + \\ + \int_{-1}^{1} Q_{12}^*(\xi-\eta)\bar{\varphi}(\xi)d\xi = F_*(\eta), \quad (12)$$

где

$$\varphi(\eta) = \frac{a}{P}\chi(a\eta), \quad F_*(\eta) = \frac{a}{PA}F(a\eta),$$

$$Q_{11}^*(\eta) = \frac{a}{A}Q_{11}(a\eta) = \frac{1}{4\pi lA}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Be^{-2|\beta|}+2C\beta-2B|\beta|}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}e^{i\beta\eta/l}d\beta,$$

$$Q_{12}^*(\eta) = \frac{a}{A}Q_{12}(a\eta) = \frac{B}{4\pi lA}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta\eta/l}d\beta}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}, \qquad l = h/a.$$

Условие (10) при этом принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\varphi\,(\xi)\,d\xi = 1. \quad (13)$$

Учитывая регулярность функции $Q_{ij}^*(\eta)$, несложно установить, что искомая функция $\varphi(\eta)$ в концевых точках интервала интегрирования имеет показательную особенность и ее можно представить в виде

$$\varphi(\eta) = \varphi^*(\eta)(1+\eta)^{-(1/2)-i\gamma}(1-\eta)^{-(1/2)+i\gamma},$$

где $\varphi^*(\eta)$ — непрерывная функция, ограниченная вплоть до концов отрезка $[-1, 1]$. Подставляя значение функции $\varphi^*(\eta)$ в (12) и (13) и используя соотношения, приведенные в [14], по стандартной процедуре, придем к системе алгебраических уравнений относительно значений $\varphi^*(\xi_i)$, где ξ_i — корни многочлена Якоби $P_n^{(-(1/2)+i\gamma,-(1/2)-i\gamma)}(\xi_i) = 0$.

После определения функции $\varphi^*(\xi_i)$ нетрудно восстановить функцию $\varphi(\eta)$, $-1 < \eta < 1$, тем самым определив комплексную комбинацию безразмерных контактных напряжений, действующих в зоне стыка разнородных полос. После чего довольно просто определить комплексные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений и, следовательно, известные J-интегралы Черепанова—Райса по формулам

$$K(\pm1) = K_I(\pm1) - iK_{II}(\pm1) = \\ = \sqrt{2\pi}\lim_{x\to\pm1\mp0}(1\mp\eta)^{(1/2)\mp i\gamma}\big[\sigma_y^{(j)}(a\eta) - i\tau_{xy}^{(j)}(a\eta)\big] =$$

$$= \frac{P\sqrt{2\pi}}{a} \lim_{x\to\pm1\mp0}(1\mp\eta)^{(1/2)\mp i\gamma}\varphi(\eta) = \frac{P\sqrt{2\pi}}{a}2^{-(1/2)\mp i\gamma}\varphi^*(\pm1),$$

$$J(\pm1) = \tilde{\mu}K(\pm1)\bar{K}(\pm1) = \frac{\pi\tilde{\mu}P^2}{a^2}\left|\varphi^*(\pm1)\right|^2.$$

Выпишем также формулу для определения раскрытия трещины. С этой целью, используя второе из соотношений (6), составим нормальную составляющую дислокаций смещений точек берегов полубесконечных трещин и, перейдя на интервал $(-1,1)$, представим их при помощи функции $\varphi(\eta)$ в следующем виде:

$$v'(a\eta) = v_1'(a\eta) - v_2'(a\eta) = -\frac{PB}{a}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re}\varphi(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \right.$$
$$\left. + \int_{-1}^{1}Q_1(\xi-\eta)\operatorname{Re}\varphi(\xi)d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}Q_2(\xi-\eta)\operatorname{Im}\varphi(\xi)d\xi\right\} - F_2(a\eta),$$

где

$$Q_1(\eta) = \frac{\pi a}{B}R_{21}(a\eta) = \frac{i}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-|\beta|}\operatorname{sh}|\beta| + |\beta|}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}e^{i\eta\beta/l}d\beta,$$

$$Q_2(\eta) = \frac{\pi a}{B}R_{22}(a\eta) = \frac{C}{2Bl}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta e^{i\beta\eta/l}d\beta}{\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta+\beta}.$$

Тогда безразмерное раскрытие трещин, находящихся соответственно на интервалах (a,∞) и $(-\infty,-a)$, можно определить по формулам:

$$v_*(\eta) = \frac{v(a\eta)}{a} = \int_{1}^{\eta}v'(a\xi)d\xi, \qquad 1<\eta<\infty,$$
$$v_*(\eta) = \frac{v(a\eta)}{a} = \int_{-1}^{\eta}v'(a\xi)d\xi, \quad -\infty<\eta<-1.$$

4. Численные расчеты. Проведен численный расчет и изучены закономерности изменения контактных напряжений, действующих в зонах контактов разнородных полос, и безразмерных интегралов Черепанова—Райса $J_*(\pm a) = 10^2\cdot(a/P)\cdot J(\pm1)$ в концевых точках трещин в зависимости от соотношения $\mu=\mu_1/\mu_2$ в случае фиксированных значений коэффициентов Пуассона ν_j, $j=1,2$, а также от изменения параметра $l=h/a$. При этом считается, что кусочно-однородная плоскость деформируется под воздействием симметрично расположенных относительно оси Oy сосредоточенных нагрузок величины $P/2$, т. е. принято $(a/P)\cdot p(a\eta) = [\delta(\eta-b)+\delta(\eta+b)]/2$, $b=\eta_0/a$, где η_0 — расстояние сосредоточенных нагрузок от начала координат и $(P/a)\cdot\mu_2 = 0.1$.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 3–6.

На рис. 3 приведены графики безразмерных контактных напряжений в зависимости от параметра μ в случае, когда $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.25$, $b=2$ и $l=1$. Они показывают, что нормальные контактные напряжения мало зависят от параметра μ (графики при $\mu=1$ и $\mu=0.5$ практически совпадают), в то время как касательные контактные напряжения при приближении параметра μ к единице стремятся к нулю.

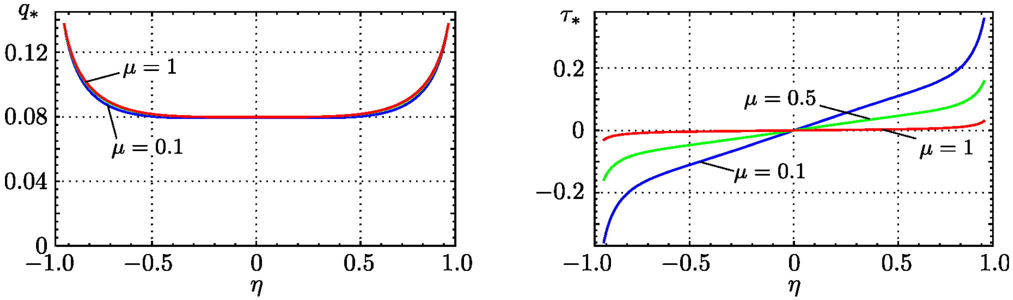


Рис. 3. Безразмерные контактные напряжения (при различных значениях параметра μ): слева — нормальные контактные напряжения, справа — тангенциальные контактные напряжения

[Figure 3. Dimensionless contact stresses when $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$, $b = 2$, and $l = 1$ for different values of the parameter μ: on the left — normal contact stresses; on the right — tangential contact stresses]

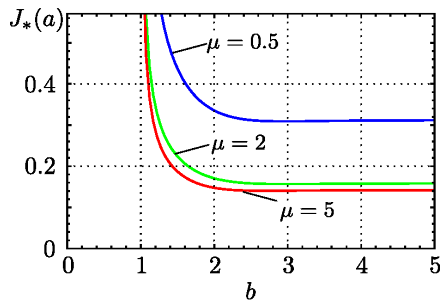


Рис. 4. Изменение интеграла $J_*(a)$

[Figure 4. Variation of J-integral depending on the parameter b when $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$, $l = 1$]

На рис. 4 приведены графики изменения значения интеграла Черепанова—Райса $J_*(a) = J_*(-a)$ в концевых точках трещин в зависимости от параметра b, описывающего степень удаленности точек приложения внешней нагрузки от вершин трещин, в случае, когда $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.25$ и $l = 1$ при некоторых значениях μ. Из них видно, что при удалении точек приложения внешних нагрузок от концевых точек трещин интеграл Черепанова—Райса, монотонно убывая, стремится к определенному пределу. Причем чем модуль сдвига первой из полос больше, тем меньше значение интеграла Черепанова—Райса, т. е. меньше вероятность распространения трещины.

На рис. 5 приведены графики безразмерных контактных напряжений в зависимости от параметра l в случае, когда $\mu = 2$, $b = 2$, $\nu_1 = 0.3$ и $\nu_2 = 0.25$. Они показывают, что при возрастании l, т. е. при увеличении ширины полосы, когда длина контактной зоны остается неизменной, нормальные контактные напряжения в средней части контактной зоны уменьшаются, а у концевых точек зоны контакта увеличиваются. Касательные же контактные напряжения при этом по абсолютной величине уменьшаются.

На рис. 6 приведены графики интеграла Черепанова—Райса $J_*(a) = J_*(-a)$ в вершинах трещин в случае, когда $\nu_1 = 0.3$ $\nu_2 = 0.25$, $b = 2$: слева — в зависимости от параметра l при значениях параметра $\mu = 0.5$, 1 и 5 и справа — в зависимости от параметра μ при значениях параметра $l = 0.5$, 1 и 5.

Из рис. 6 слева следует, что при увеличении ширины полос интеграл $J_*(\pm a)$ возрастает, стремясь к определенному пределу, соответствующему значению интеграла Черепанова—Райса в случае двухкомпонентной плоскости с двумя симметричными полубесконечными трещинами. При этом, как и выше, чем жестче первая из полос, тем меньше значение интеграла Черепанова—Райса.

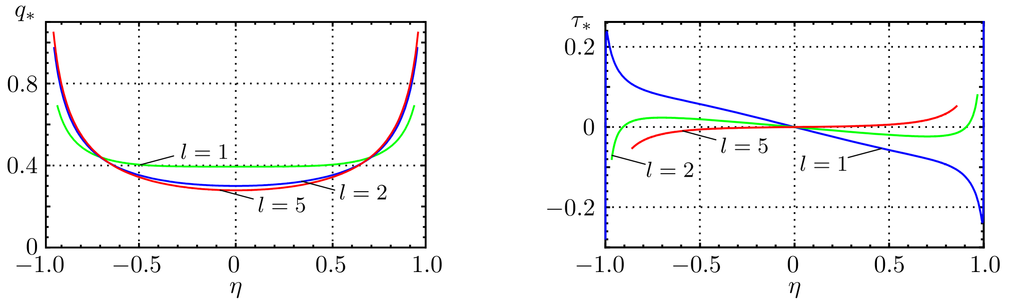


Рис. 5. Безразмерные контактные напряжения (при различных значениях параметра l): слева — нормальные контактные напряжения, справа — тангенциальные контактные напряжения

[Figure 5. Dimensionless contact stresses when $\mu = 2$, $b = 2$, $\nu_1 = 0.3$, and $\nu_2 = 0.25$ for different values of the parameter l: on the left — normal contact stresses; on the right — tangential contact stresses]

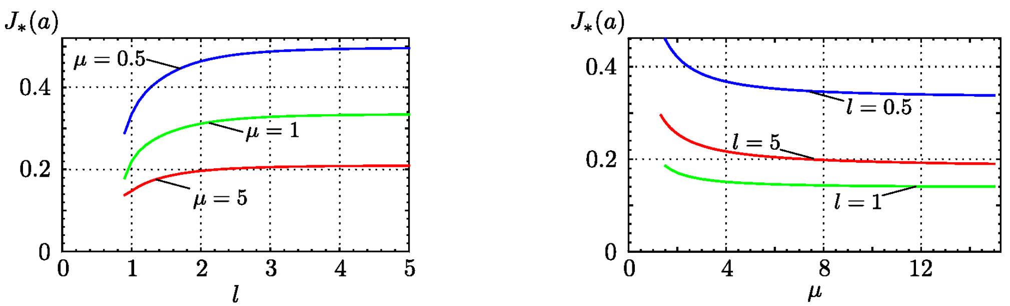


Рис. 6. Изменение интеграла $J_*(a)$ [Figure 6. Variation of J-integral when $\nu_1 = 0.3$ $\nu_2 = 0.25$, $b = 2$: on the left — depending on the parameter l; on the right — depending on the parameter μ]

Из рис. 6 справа следует, что при возрастании параметра μ значение J-интеграла, монотонно убывая, стремится к постоянному значению, которое представляет из себя значение интеграла Черепанова—Райса в случае, когда первая из полос абсолютно жесткая.

5. Заключение. Таким образом, выведено определяющее уравнение плоской задачи теории упругости для равномерно кусочно-однородного пространства с периодической системой двух полубесконечных параллельных межфазных трещин в виде сингулярного интегрального уравнения второго рода относительно комплексной комбинации контактных напряжений, действующих в зонах стыка разнородных полос.

Выяснено поведение искомой функции в концевых точках интервалов интегрирования и построено решение определяющего уравнения численно-аналитическим методом механических квадратур. Получены простые формулы для определения комплексного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений и J-интеграла Черепанова—Райса в концевых точках трещин.

При помощи численных расчетов изучено поведение контактных напряжений и J-интеграла в зависимости от физико-механических и геометрических характеристик задачи. Показано, что при выбранных параметрах увеличение жесткости одной из полос, когда жесткость второй полосы остается неизменной, значение J-интеграла стремится к определенной постоянной, соответствующей значению интеграла Черепанова—Райса в случае, когда первая из полос абсолютно жесткая.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. В.Н. Акопян — идея исследования, поиск методов решения, руководство и консультирование, чистовик рукописи. А.А. Григорян — анализ литературы, реализация алгоритмов на компьютере, расчеты и визуализация результатов, черновик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.* Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
2. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966. 708 с.
3. *Развитие теории контактных задач в СССР* / ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 493 с.
4. Попов Г. Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* М.: Наука, 1982. 344 с.
5. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г. *Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле.* Киев: Наукова думка, 1983. 288 с.
6. Барзокас Д. И., Фильштинский Л. А., Фильштинский М. Л. *Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах.* Т. 1. М., Ижевск, 2010. 864 с.
7. Акопян В. Н. *Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов.* Ереван: Гитутюн, 2014. 322 с.
8. Попов Г. Я. *Избранные труды. В 2-х томах.* Одесса: ВМВ, 2007.
9. Акопян В. Н., Даштоян Л. Л. Разрывные решения двоякопериодической задачи для кусочно-однородной плоскости с межфазными дефектами // *Мех. композ. матер.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 863–879.
10. Hakobyan V. N., Sahakyan A. V., Aghayan K. L. Periodic problem for a plane composed of two-layer strips with a system of longitudinal internal inclusions and cracks / *Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials.* vol. 109. Cham: Springer, 2019. pp. 11–22. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_2.
11. Hakobyan V. N., Grigoryan A. H. Anti-plane stressed state uniformly piece-homogeneous space with a periodic system of parallel semi-infinite interfacial cracks // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020. vol. 1474, 012017. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012017.
12. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций / Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., Т. 20. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 78–115.
13. *Stress Intensity Factors Handbook.* vol. 1 / ed. Y. Murakami. Oxford: Pergamon, 1987.
14. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018. vol. 991, 012070. https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 67–82
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) `https://doi.org/10.14498/vsgtu1816`

MSC: 74A45

Plane stress state of a uniformly piece-wise homogeneous plane with a periodic system of semi-infinite interphase cracks

© ***V. N. Hakobyan, A. A. Grigoryan***

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia,
24B, Marshal Baghramyan ave., Yerevan, 0019, Republic of Armenia.

Abstract

The plane stress state of a uniformly piecewise-homogeneous plane obtained by alternately joining two dissimilar strips is considered, which along the lines of joints of dissimilar strips is weakened by a periodic system of two semi-infinite interfacial cracks and is deformed using normal loads applied to the crack banks. The basic cell of the problem in the form of a two-component strip is considered and, using the generalized Fourier transform, a governing system of equations for the problem is obtained in the form of one singular integral equation of the second kind for a complex combination of contact stresses in the junction zone of the strips.

As a special case, tending the height of the strips to infinity, the governing equation of the problem for a two-component plane of two dissimilar half-planes with two semi-infinite interfacial cracks is obtained and its exact solution is constructed. The governing equation for the stated problem is also obtained in the form of one singular integral equation of the first kind with respect to normal contact stresses in another particular case, when all strips are made of the same material, i.e. in the case of a homogeneous plane, a weakened periodic system of parallel, two semi-infinite cracks.

In the general case, the behavior of the unknown function at the end points of the integration interval is determined and the solution of the problem by the numerical-analytical method of mechanical quadratures is reduced to solving a system of algebraic equations. Simple formulas are obtained to determine the intensity factors, the Cherepanov–Rice integral and crack opening. A numerical calculation has been performed. Regularities of changes in contact stresses and the Cherepanov–Rice integral at the endpoints of cracks are revealed, depending on the elastic characteristics of heterogeneous strips and the geometric parameters of the problem.

Research Article

Please cite this article in press as:
Hakobyan V. N., Grigoryan A. A. Plane stress state of a uniformly piece-wise homogeneous plane with a periodic system of semi-infinite interphase cracks, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 67–82. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1816` (In Russian).

Authors' Details:

Vahram N. Hakobyan `https://orcid.org/0000-0003-3684-9471`
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Dept. of Elasticity and Viscoelasticity;
e-mail: `vhakobyan@sci.am`

Aram A. Grigoryan `https://orcid.org/0000-0001-7582-1960`
Postgraduate Student; Junior Researcher; Dept. of Elasticity and Viscoelasticity;
e-mail: `grigoryan.aram.4@gmail.com`

Keywords: periodic problem, mixed boundary value problem, piece-wise homogeneous plane, interface cracks.

Received: 10th August, 2020 / Revised: 29th January, 2021 /
Accepted: 12th February, 2021 / First online: 24th February, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. V.N. Hakobyan: Idea of study; Search for methods of solution; Supervision and consulting; Writing — review & editing. A.A. Grigoryan: Literature review; Implementation of the computer algorithms; Performing calculations and visualizing results; Writing — original draft. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshin A. P. *Raspredelenie napriazhenii okolo treshchin v plastinakh i obolochkakh* [Stress Distribution Around Cracks in Plates and Shells]. Kiev, Naukova Dumka, 1976, 443 pp. (In Russian)
2. Muskhelishvili N. I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Netherlands, Springer, 1977, xxxi+732 pp. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1
3. *Razvitie teorii kontaktnykh zadach v SSSR* [The Development of Theory of Contact Problems in USSR], ed. L. A. Galin. Moscow, Nauka, 1976, 493 pp. (In Russian)
4. Popov G. Ya. *Kontsentratsiia uprugikh napriazhenii vozle shtampov, razrezov, tonkikh vkliuchenii i podkreplenii* [Concentration of Elastic Stress around Stamps, Cuts, Thin Inclusions, and Reinforcements]. Moscow, Nauka, 1982, 344 pp. (In Russian)
5. Berezhnitskii L. T., Panasyuk V. V., Stashchuk N. G. *Vzaimodeistvie zhestkikh lineinykh vkliuchenii i treshchin v deformiruemom tele* [The Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body]. Kiev, Naukova Dumka, 1983, 288 pp. (In Russian)
6. Barzokas D. I., Fil'shtinskii L. A., Fil'shtinskii M. L. *Aktual'nye problemy sviazannykh fizicheskikh polei v deformiruemykh telakh* [Actual Problems of Coupled Physical Fields in Deformable Bodies], vol. 1. Moscow, Izhevsk, 2010, 864 pp. (In Russian)
7. Hakobyan V. N. *Smeshannye granichnye zadachi o vzaimodeistvii sploshnykh deformiruemykh tel s kontsentratorami napriazhenii razlichnykh tipov* [Mixed Boundary-Value Problems on the Interaction of Continuous Deformable Bodies with Stress Concentrators of Various Types]. Yerevan, Gitutiun, 2014, 322 pp. (In Russian)
8. Popov G. Ya. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. In 2 volumes. Odessa, VMV, 2007 (In Russian).
9. Hakobyan V. N., Dashtoyan L. L. Discontinuous solutions of a doubly periodic problem for a piecewise homogeneous plate with interphase defects, *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 601–612. https://doi.org/10.1007/s11029-017-9690-8.
10. Hakobyan V. N., Sahakyan A. V., Aghayan K. L. Periodic problem for a plane composed of two-layer strips with a system of longitudinal internal inclusions and cracks, In: *Wave Dynamics, Mechanics and Physics of Microstructured Metamaterials*, vol. 109. Cham, Springer, 2019, pp. 11–22. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_2.
11. Hakobyan V. N., Grigoryan A. H. Anti-plane stressed state uniformly piece-homogeneous space with a periodic system of parallel semi-infinite interfacial cracks, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1474, 012017. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1474/1/012017.

12. Brychkov Yu. A., Prudnikov A. P. Integral transforms of generalized functions, *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 34, no. 3, pp. 1630–1655. https://doi.org/10.1007/BF01262407.
13. *Stress Intensity Factors Handbook*, vol. 1, ed. Y. Murakami. Oxford, Pergamon, 1987.
14. Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 991, 012070. https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012070.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 83–96
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1830

УДК 539.311

Решение задачи Ламе для составных трансверсально-изотропных сфер с общим центром

© *А. В. Зайцев, Ю. В. Соколкин, А. А. Фукалов*

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

Аннотация

Получено точное аналитическое решение задачи Ламе о равновесии составного тела, состоящего из двух посаженных с натягом трансверсально-изотропных сфер с общим центром. Тело находится под действием равномерных внешнего и внутреннего давлений. Определено давление натяга на поверхности контакта в предположении, что оно является следствием различия в параметрах геометрии частей составной сферы. Проанализированы закономерности влияния анизотропии материалов (материальные постоянные удовлетворяют ограничениям в виде неравенств, обеспечивающих положительность собственных значений оператора упругости) и величины давления натяга на распределение напряжений в поперечных сечениях составных центрально-симметричных сосудов давления. Проведенная оценка влияния анизотропии материалов показала возможность «управления» величинами и характером распределения напряжений в составных конструкциях, оптимально соответствующих заданным режимам эксплуатации. Полученные результаты свидетельствуют, что изменение показателя анизотропии — увеличение его значений во внутренних или внешних частях сфер приводит к возрастанию или снижению абсолютных величин напряжений соответственно. Это увеличение или уменьшение показателей анизотропии материалов создаваемых конструкций может быть реализовано на этапе их проектирования благодаря изменению схемы армирования при сохранении свойств отдельных элементов структуры. На основе многокритериального подхода проведена оценка начальной прочности составных центрально-симметричных сосудов по механизмам растяжения или сжатия в радиальном и окружном направлениях. Установлено, что

Научная статья

Образец для цитирования

Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Решение задачи Ламе для составных трансверсально-изотропных сфер с общим центром // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 83–96. https://doi.org/10.14498/vsgtu1830.

Сведения об авторах

Алексей Вячеславович Зайцев https://orcid.org/0000-0003-0578-7917
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

Юрий Викторович Соколкин https://orcid.org/0000-0003-3255-1360
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. механики композиционных материалов и конструкций

Антон Александрович Фукалов https://orcid.org/0000-0003-3009-7379
старший преподаватель; каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: mr_aa@mail.ru

увеличение давления натяга может привести к появлению областей материала, потерявших способность сопротивляться сжатию в окружном направлении. Эти области располагаются вблизи внутренней поверхности сосуда, на которой действует равномерно распределенное давление, меньшее по абсолютной величине по сравнению с внешним давлением. Обнаружено, что точки составного сосуда, находящиеся на поверхности контакта, становятся наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения по механизму сжатия в радиальном направлении.

Ключевые слова: аналитическое решение, задача Ламе, составная трансверсально-изотропная сфера, анизотропия, многокритериальная оценка начальной прочности, составные сферические сосуды, контактное давление.

Получение: 5 октября 2020 г. / Исправление: 18 февраля 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 30 марта 2021 г.

1. Введение. Вопросы безопасной транспортировки и хранения жидких и газообразных сред не теряют своей актуальности на протяжении десятилетий. Одним из способов повышения эффективности, в т.ч. и экономической, используемых для этих целей сосудов является повышение рабочего давления. Это, в свою очередь, предопределяет повышенные требования к «живучести» и безопасной эксплуатации элементов конструкций, работающих при многократно изменяющихся внутренних давлениях в течение длительного времени. Увеличение толщины стенки конструкции, за счет чего оказывается возможным рост рабочего давления, не всегда оправдано. Это достигается применением многослойных композиционных материалов, обладающих естественной, ярко выраженной анизотропией свойств. Поэтому при проектировании современных сосудов давления используются решения, в которых конструкция и материал изготавливаются одновременно. Если конструкции будут еще и составными, то появится возможность управления величинами, характером и знаком напряжений за счет изменения схемы армирования. А это позволит создавать конструкции, оптимально соответствующие режимам эксплуатации. Таким образом, изучение влияния характера анизотропии свойств материалов на напряженно-деформированное состояние эксплуатируемых и вновь создаваемых конструкций составных сферических резервуаров (газгольдеры или шаровые хранилища) является актуальным.

Кроме того, аналитические решения позволяют установить и проиллюстрировать качественные эффекты, вызванные предельными переходами (геометрия, соотношение деформационных свойств и т.п.). В отличие от численных или численно-аналитических методов, применение которых не может гарантировать полноту проводимых исследований для выявления экстремальных и предельных случаев, аналитические решения не требуют больших объемов вычислений и при этом позволяют выявить характерные закономерности поведения полей напряжений и деформаций в элементах конструкций, закономерности их деформирования, а также пределы применимости используемых гипотез.

Несмотря на то, что многие современные конструкционные и функциональные композиционные материалы имеют ярко выраженную анизотропию деформационных и прочностных свойств, большинство авторов ограничивается лишь частным случаем, когда справедливо предположение об их изотропии, а количество работ, где учитываются другие типы упругой симметрии материалов, весьма ограничено. Так, например, решение задачи о равновесии упругой анизотропной полой сферы, приведенное в монографии С. Г. Лехницкого [1], было получено впервые в 1865 г. B. Saint–Venant [2]. Равновесие анизотропных сфер рассматривается также в работе [3], а в статье [4] получено решение задачи о центрально-симметричной деформации полого шара из упругого радиально неоднородного трансверсально-изотропного материала, с помощью которого установлено наличие эффектов, вызванных неоднородностью, и проведено их качественное исследование. В работах [5–7] получены решения задач о равновесии упругих центрально-симметричных тел с закреплением на внешней или внутренней поверхности, находящихся в поле гравитационных сил под действием равномерных внутреннего или внешнего давлений соответственно. В настоящей работе для изучения влияния анизотропии материалов на характер распределения напряжений в поперечных сечениях составных сфер рассмотрен более простой случай, когда при решении краевой задачи отсутствует необходимость учета массовых сил.

2. Аналитическое решение задачи Ламе для составной трансверсально-изотропной сферы. Рассмотрим составное толстостенное центрально-симметричное тело, на которое действует равномерно распределенное внутреннее p_1 и внешнее p_2 давление. Будем считать, что тело состоит из двух полых толстостенных сфер с общим центром, в который поместим начало сферической ортогональной системы координат ρ, θ и φ. Материал каждой из сфер однородный, трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из общего центра в данную точку. Будем предполагать, что составное тело ограничено сферическими поверхностями с радиусами ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Кроме того, в результате проведения технологических операций по изготовлению составные толстостенные сферические части тела образуют неразъемное соединение (достигается посадкой с натягом), объединены в единую механическую систему с известной поверхностью контакта между ними, находящейся на расстоянии ρ_c от общего центра. Примем еще одну гипотезу: в процессе создания конструкции (в силу ее центральной симметрии) внешний радиус внутренней сферы уменьшился на величину радиального перемещения $u^{(1)}$ (имеет отрицательный по отношению к направлению радиальной координаты знак), а внутренний радиус внешней сферы увеличился на величину $u^{(2)}$. Обратим внимание на то, что алгебраическая сумма $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ равна величине натяга δ. В дальнейшем все константы и функции, относящиеся к внутренней сфере, будем обозначать стоящими в круглых скобках верхним индексом (1), а к внешней — индексом (2) соответственно.

Поскольку составное сферическое тело обладает центральной симметрией и нагрузка, действующая на него, также центрально-симметрична, то отсутствуют сдвиги. Поэтому все точки будут перемещаться при нагружении только в радиальном направлении. Как следствие — напряжения, деформации и перемещения зависят только от одной переменной ρ. Тогда геометрические соотношения и уравнения равновесия для внутренней ($\alpha = 1$) и внешней

($\alpha = 2$) частей составной сферы записываются следующим образом:

$$\varepsilon_{\rho\rho}^{(\alpha)} = du^{(\alpha)}/d\rho, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(\alpha)} = u^{(\alpha)}/\rho, \tag{1}$$

$$d\sigma_{\rho\rho}^{(\alpha)}/d\rho + 2(\sigma_{\rho\rho}^{(\alpha)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)})/\rho = 0, \tag{2}$$

а определяющие соотношения для трансверсально-изотропного тела в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(\alpha)} &= A_{11}^{(\alpha)}\varepsilon_{\rho\rho}^{(\alpha)} + A_{12}^{(\alpha)}(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(\alpha)}), \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} &= A_{12}^{(\alpha)}\varepsilon_{\rho\rho}^{(\alpha)} + A_{22}^{(\alpha)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(\alpha)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(\alpha)} &= A_{12}^{(\alpha)}\varepsilon_{\rho\rho}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)}\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} + A_{22}^{(\alpha)}\varepsilon_{\theta\theta}^{(\alpha)} \end{aligned} \tag{3}$$

содержат коэффициенты

$$A_{11}^{(\alpha)} = \tilde{E}^{(\alpha)}(1 - \nu^{(\alpha)})/m^{(\alpha)}, \quad A_{12}^{(\alpha)} = E^{(\alpha)}\tilde{\nu}^{(\alpha)}/m^{(\alpha)},$$
$$A_{23}^{(\alpha)} = E^{(\alpha)}(\nu^{(\alpha)} + s^{(\alpha)})/(m^{(\alpha)} + \nu^{(\alpha)}m^{(\alpha)}), \quad s^{(\alpha)} = \tilde{\nu}^{(\alpha)2}E^{(\alpha)}/\tilde{E}^{(\alpha)},$$
$$A_{22}^{(\alpha)} = E^{(\alpha)}(1 - s^{(\alpha)})/(m^{(\alpha)} + \nu^{(\alpha)}m^{(\alpha)}), \quad m^{(\alpha)} = 1 - \nu^{(\alpha)} - 2s^{(\alpha)},$$

вычисляемые при помощи упругих постоянных. Здесь $\tilde{E}^{(\alpha)}$ и $E^{(\alpha)}$ — модули Юнга для растяжения вдоль радиус-вектора ρ и в перпендикулярном к нему направлении; $\tilde{\nu}^{(\alpha)}$ — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечную деформацию при растяжении в направлении ρ; $\nu^{(\alpha)}$ — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости, нормальной к радиус-вектору ρ при растяжении в той же плоскости.

Последовательная подстановка геометрических соотношений (1) в определяющие (3), а полученного результата — в уравнения равновесия (2) позволяет записать обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$2(A_{12}^{(\alpha)} - A_{22}^{(\alpha)} - A_{23}^{(\alpha)})u^{(\alpha)} + 2\rho A_{11}^{(\alpha)}du^{(\alpha)}/d\rho + \rho^2 A_{11}^{(\alpha)}d^2u^{(\alpha)}/d\rho^2 = 0,$$

общие решения которых выглядят следующим образом [1]:

$$u^{(\alpha)} = \rho^{-1/2-k^{(\alpha)}}(C_1^{(\alpha)} + \rho^{2k^{(\alpha)}}C_2^{(\alpha)}). \tag{4}$$

Здесь $k^{(\alpha)} = \sqrt{1/4 + 2(A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} - A_{12}^{(\alpha)})/A_{11}^{(\alpha)}}$ — показатель анизотропии для центрально-симметричного тела, находящегося под действием центрально-симметричной нагрузки (введенный С. Г. Лехницким [1]), который для изотропной среды принимает значение 3/2.

Определение перемещений и напряжений в составном центрально-симметричном теле (в силу линейной упругости его составных частей) осуществляется в результате суперпозиции решений следующих задач: составная сфера находится в равновесии под действием равномерно распределенных внутреннего и внешнего давлений (первая задача) и две отдельно рассматриваемые части составной сферы, находящиеся под действием технологических напряжений (на внутренней или внешней поверхности радиуса ρ_c) при отсутствии других внешних силовых воздействий (вторая задача).

В процессе создания составных конструкций возникают собственные технологические напряжения, определение закона распределения которых в поперечных сечениях представляет самостоятельную задачу, выходящую за рамки настоящего исследования. Будем предполагать, что эти напряжения известны, имеют единственную, отличную от нуля, радиальную составляющую и равномерно распределены только на поверхности контакта радиуса ρ_c. Будем также считать, что остальные поверхности составных частей анизотропной сферы свободны от собственных напряжений. Сделаем еще одно предположение: радиальное напряжение (давление) натяга на известной поверхности контакта, вызванное технологическими операциями процесса изготовления конструкции, обусловлено только разницей в параметрах геометрии внутренней и внешней частей.

Итак, сумма перемещений на поверхности контакта равна величине натяга:

$$u^{(2)}\big|_{\rho=c} - u^{(1)}\big|_{\rho=c} = \delta. \tag{5}$$

Рассмотрим решение второй задачи для внутренней и внешней части составного центрально-симметричного тела. Для этой задачи граничные условия

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}\big|_{\rho=\rho_c} = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\big|_{\rho=\rho_c} = -p_\delta, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\big|_{\rho=\rho_2} = 0$$

позволяют найти константы интегрирования, подстановка которых в уравнения (4) и условие (5) позволяет определить контактное давление натяга:

$$p_\delta = \frac{\delta}{2\rho_c}(b_+^{(1)} b_-^{(1)} b_+^{(2)} b_-^{(2)} c_1 c_2) Z_2,$$

где

$$b_+^{(\alpha)} = 4A_{12}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)}(1 + 2k^{(\alpha)}), \quad b_-^{(\alpha)} = 4A_{12}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)}(1 - 2k^{(\alpha)}),$$
$$c_\alpha = \rho_c^{2k^{(\alpha)}} - \rho_\alpha^{2k^{(\alpha)}}, \quad g_\alpha = b_+^{(\alpha)}\rho_c^{2k^{(\alpha)}} - b_-^{(\alpha)}\rho_\alpha^{2k^{(\alpha)}}, \quad q_\alpha = c_\alpha b_+^{(\alpha)} b_-^{(\alpha)},$$
$$Z_\alpha = g_\beta q_\alpha - g_\alpha q_\beta, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \alpha = 2, \\ 2, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Перемещения, возникающие в составной сфере, находящейся в равновесии под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений (первая задача), определяются уравнениями (4), а константы интегрирования $C_1^{(\alpha)}$ и $C_2^{(\alpha)}$, входящие в него, находятся из граничных условий

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = -p_1, \quad \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\big|_{\rho=\rho_2} = -p_2,$$
$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}\big|_{\rho=\rho_c} = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}\big|_{\rho=\rho_c}, \quad u^{(1)}\big|_{\rho=\rho_c} = u^{(2)}\big|_{\rho=\rho_c}$$

и записываются следующим образом:

$$Z_\alpha C_1^{(\alpha)} = 2\rho_c^{k^{(\alpha)}}\rho_\alpha^{k^{(\alpha)}}\big[p_\alpha \rho_c^{k^{(\alpha)}}\rho_\alpha^{3/2}(q_\beta - g_\beta b_-^{(\alpha)}) -$$
$$- 4p_\beta A_{11}^{(\beta)} k^{(\beta)} b_-^{(\alpha)} \rho_c^{k^{(\beta)}} \rho_\alpha^{k^{(\alpha)}} \rho_\beta^{3/2+k^{(\beta)}}\big],$$

$$Z_\alpha C_2^{(\alpha)} = 2\big[4p_\beta A_{11}^{(\beta)} b_+^{(\alpha)} k^{(\beta)} \rho_c^{k^{(\alpha)}+k^{(\beta)}} \rho_\beta^{3/2+k^{(\beta)}} - p_\alpha \rho_\alpha^{3/2+k^{(\alpha)}} (q_\beta - g_\beta b_+^{(\alpha)})\big].$$

По известным после определения постоянных $C_1^{(\alpha)}$ и $C_2^{(\alpha)}$ перемещениям из уравнений (1) могут быть определены деформации:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\rho\rho}^{(\alpha)} &= -\rho^{-3/2-k^{(\alpha)}} \big[C_1^{(\alpha)}(1+2k^{(\alpha)}) + C_2^{(\alpha)}(1-2k^{(\alpha)})\rho^{2k^{(\alpha)}}\big], \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(\alpha)} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \rho^{-3/2-k^{(\alpha)}} (C_1^{(\alpha)} + C_2^{(\alpha)} \rho^{2k^{(\alpha)}}), \end{aligned} \tag{6}$$

а из уравнений (3) — напряжения:

$$\begin{aligned} 2\sigma_{\rho\rho}^{(\alpha)} &= \rho^{-3/2-k^{(\alpha)}} (C_1^{(\alpha)} b_+^{(\alpha)} + C_2^{(\alpha)} b_-^{(\alpha)} \rho^{2k^{(\alpha)}}), \\ 2\sigma_{\theta\theta}^{(\alpha)} &= 2\sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = \rho^{-3/2-k^{(\alpha)}} (C_1^{(\alpha)} B_+^{(\alpha)} + C_2^{(\alpha)} B_-^{(\alpha)} \rho^{2k^{(\alpha)}}), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$B_+^{(\alpha)} = 2Q^{(\alpha)} - A_{12}^{(\alpha)}(1+2k^{(\alpha)}), \quad B_-^{(\alpha)} = 2Q^{(\alpha)} - A_{12}^{(\alpha)}(1-2k^{(\alpha)}),$$
$$Q^{(\alpha)} = A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)}.$$

В частном случае для изотропной составной сферы проведем замену

$$\tilde{E}^{(\alpha)} = E^{(\alpha)}, \quad \tilde{\nu}^{(\alpha)} = \nu^{(\alpha)}, \tag{8}$$

значительно упростим коэффициент $A_{11}^{(\alpha)}$:

$$A_{11}^{(\alpha)} = E^{(\alpha)}(1-\nu^{(\alpha)})/\big[(1+\nu^{(\alpha)})(1-2\nu^{(\alpha)})\big]$$

и запишем выражения для перемещений, деформаций и напряжений:

$$\begin{gathered} \rho^2 u^{(\alpha)} = C_1^{(\alpha)} + C_2^{(\alpha)}\rho^3, \\ \varepsilon_{\rho\rho}^{(\alpha)} = C_2^{(\alpha)} - 2C_1^{(\alpha)}/\rho^3, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(\alpha)} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = C_1^{(\alpha)}/\rho^3 + C_2^{(\alpha)}, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(\alpha)} = (C_1^{(\alpha)} b_+^{(\alpha)} + C_2^{(\alpha)} b_-^{(\alpha)} \rho^3)/(2\rho^3), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(\alpha)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(\alpha)} = C_2^{(\alpha)} b_-^{(\alpha)}/2 - C_1^{(\alpha)} b_+^{(\alpha)}/(4\rho^3), \\ Z_\alpha C_1^{(\alpha)} = 2\big[p_\alpha(c_\beta b_+^{(\beta)} b_-^{(\beta)} - g_\beta b_-^{(\alpha)}) - 6p_\beta A_{11}^{(\beta)} b_-^{(\alpha)} \rho_\beta^3\big]\rho_c^3 \rho_\alpha^3, \\ Z_\alpha C_2^{(\alpha)} = 2\big[6p_\beta A_{11}^{(\beta)} b_+^{(\alpha)} \rho_c^3 \rho_\beta^3 - p_\alpha \rho_\alpha^3 (c_\beta b_+^{(\beta)} b_-^{(\beta)} - b_+^{(\alpha)} g_\beta)\big], \\ c_\alpha = \rho_c^3 - \rho_\alpha^3, \quad g_\alpha = b_+^{(\alpha)} \rho_c^3 - b_-^{(\alpha)} \rho_\alpha^3, \\ b_+^{(\alpha)} = -4E^{(\alpha)}/(1+\nu^{(\alpha)}), \quad b_-^{(\alpha)} = 2E^{(\alpha)}/(1-2\nu^{(\alpha)}). \end{gathered}$$

Если замену упругих постоянных (8) провести в (4), (6) и (7) только в выражениях, записанных для одной из частей составной сферы, то получим соотношения еще для двух частных случаев: решение задачи о равновесии составной центрально-симметричной конструкции, состоящей из изотропной внутренней или внешней и трансверсально-изотропной внешней или внутренней частей соответственно.

3. Влияние анизотропии и технологического давления на напряженное состояние составных сферических сосудов. Полученные выражения позволяют найти распределение напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов и определить закономерности взаимного влияния внутренней и внешней частей, обусловленные анизотропией материалов и величин давления на поверхности контакта, а также провести многокритериальную оценку начальной прочности.

На основе введенных в работе [8] величин

$$2J_\sigma^{\mathrm{I}} = \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}, \quad J_\sigma^{\mathrm{II}} = \sigma_{\rho\rho},$$
$$J_\sigma^{\mathrm{III}} = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\sigma_{\varphi\theta}^2}, \quad J_\sigma^{\mathrm{IV}} = \sqrt{\sigma_{\varphi\rho}^2 + \sigma_{\theta\rho}^2},$$

инвариантных относительно ортогональных преобразований, допустимых над трансверсально-изотропным телом, авторами [9] были сконструированы критериальные условия, позволяющие описать различные механизмы исчерпания несущей способности.

Поскольку составные сферические сосуды давления и характер нагрузки, действующей на них, центрально-симметричны, то отсуствуют сдвиговые деформации и касательные напряжения. Поэтому $J_\sigma^{\mathrm{III}} = J_\sigma^{\mathrm{IV}} = 0$.

На рис. 1 и рис. 2 представлены распределения ненулевых инвариантов тензора напряжений $J_\sigma^{(\bullet)}$ в поперечных сечениях составных сферических сосудов давления, находящихся под действием внутреннего $p_1 = 1$ МПа и внешнего $p_2 = 5$ МПа равномерных давлений, вдоль обезразмеренной радиальной координаты $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$ в зависимости от показателя анизотропии материала внутренней и внешней части соответственно. Эти распределения получены на основе решения первой задачи. В расчетах полагалось, что $\rho_1 = 3$ м, $\rho_c = 4.7$ м, $\rho_2 = 6.0$ м. А деформационные характеристики, соответствующие различным значениям показателя $k^{(\alpha)}$ (см. таблицу), выбирались с учетом положительности собственных значений оператора упругости для трансверсально-изотропного тела [10]:

$$A_{22}^{(\alpha)} - A_{23}^{(\alpha)} > 0,$$
$$A_{11}^{(\alpha)} + A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} \pm \sqrt{8A_{12}^{(\alpha)\,2} + (A_{22}^{(\alpha)} + A_{23}^{(\alpha)} - A_{11}^{(\alpha)})^2} > 0.$$

Представленные на рис. 1 и рис. 2 результаты отражают влияние анизотропии материалов внешней и внутренней частей составного сосуда соответственно. При увеличении показателя анизотропии $k^{(1)}$ происходит увеличение абсолютной величины первого J_σ^{I} и второго J_σ^{II} инвариантов тензора

Деформационные характеристики материалов [Materials constants]

$k^{(\alpha)}$	$E^{(\alpha)}$, GPa	$\tilde{E}^{(\alpha)}$, GPa	$\nu^{(\alpha)}$	$\tilde{\nu}^{(\alpha)}$
2.198	55.0	23.0	0.29	0.32
2.349	55.0	20.0	0.29	0.32
1.500	45.0	45.0	0.30	0.30
1.060	23.0	55.0	0.32	0.29
1.005	20.0	55.0	0.32	0.29

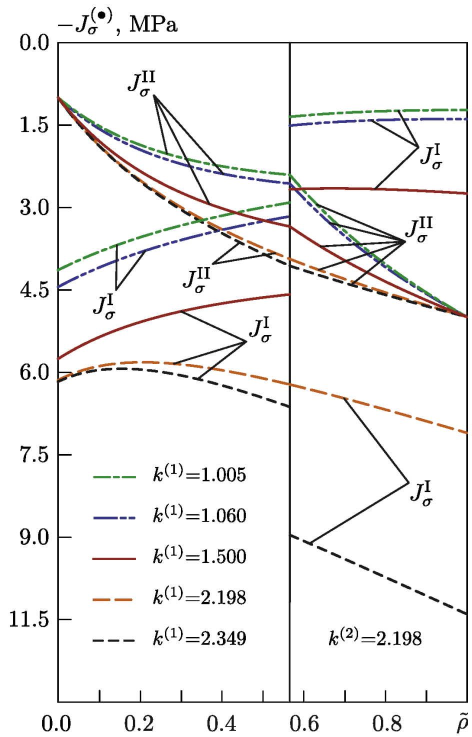


Рис. 1. Распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов в зависимости от показателя анизотропии материала внутренней части

[Figure 1. Distribution of stress tensor invariants in cross sections of combined pressure vessels depending on the anisotropy index of the material of the inner part]

напряжений и во внутренней, и во внешней части составной конструкции. Вместе с тем увеличение показателя анизотропии $k^{(2)}$, напротив, приводит к уменьшению по абсолютной величине J_σ^{I} и J_σ^{II}. Изотропному материалу соответствует $k^{(\alpha)} = 1.5$.

Оценка начальной прочности позволяет сделать вывод, что разрушение от растяжения или сжатия в радиальном направлении может начаться в точках внешней поверхности, на которую действует большее давление, а, соответственно, второй инвариант тензора напряжений J_σ^{II} имеет большее (по абсолютной величине) значение, либо на поверхности контакта, если показатель анизотропии материала внутренней части составной сферы будет больше, чем у внешней. С точки зрения возможности начала разрушения от растяжения или сжатия в окружном направлении наиболее опасными являются точки внешней, или контактной, поверхности при условии, что $k^{(1)} \geqslant k^{(2)}$, а при $k^{(1)} < k^{(2)}$ — точки внутренней поверхности составной центрально-симметричной конструкции.

Обнаруженные закономерности влияния анизотропии материалов внутренней и внешней частей сферических сосудов давления свидетельствуют о возможности «управления» величинами и характером распределения напряжений при проектировании составных элементов конструкций, оптимально соответствующих заданным режимам эксплуатации. Это «управление», на-

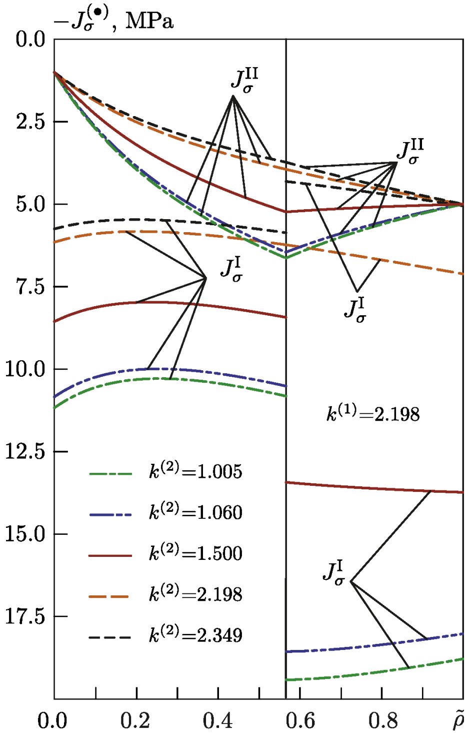


Рис. 2. Распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов в зависимости от показателя анизотропии материала внешней части

[Figure 2. Distribution of stress tensor invariants in cross sections of combined pressure vessels depending on the anisotropy index of the material of the outer part]

пример, может быть реализовано только изменением схемы армирования анизотропного материала при сохранении свойств отдельных элементов структуры.

Обратим внимание на то, что в частном случае, когда составные части сосуда давления изготовлены из одного и того же материала, составную конструкцию можно рассматривать как однородную толстостенную сферу. Тогда на поверхности контакта, определяемой ρ_c, будут выполняться условия непрерывности для всех компонент тензора напряжений, а, следовательно, полученные соотношения будут соответствовать решению задачи Ламе для однородной толстостенной трансверсально-изотропной сферы, находящейся под действием распределенных внешнего и внутреннего давлений [1].

На рис. 3 показано влияние контактного давления натяга p_δ, равномерно распределенного на поверхности контакта, на зависимости ненулевых инвариантов тензора напряжений от координаты $\tilde\rho$ в поперечных сечениях составных сосудов давления, изготовленных из трансверсально-изотропных материалов и находящихся под действием внутреннего $p_1 = 1$ МПа и внешнего $p_2 = 5$ МПа равномерных давлений. Это оказалось возможным благодаря использованию суперпозиции решений первой и второй задач. Геометрические параметры и упругие постоянные материалов частей центрально-симметричной конструкции полагались следующими: $\rho_1 = 3$ м, $\rho_c = 4.7$ м и $\rho_2 = 6.0$ м; $E^{(\alpha)} = 55$ ГПа, $\tilde E^{(\alpha)} = 23$ ГПа, $\nu^{(\alpha)} = 0.29$ и $\tilde\nu^{(\alpha)} = 0.32$.

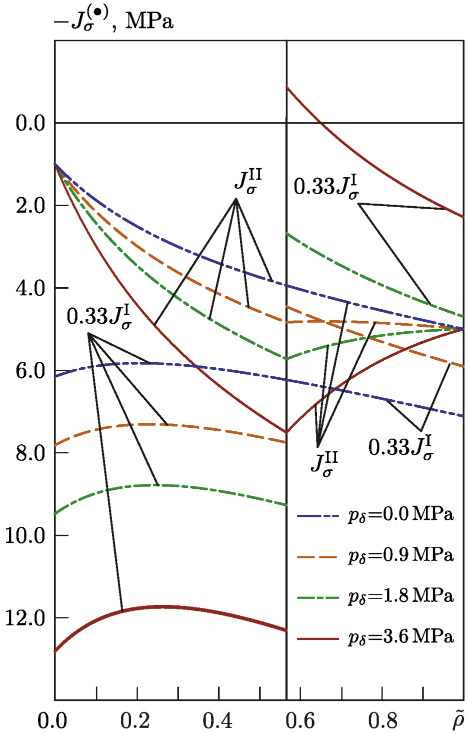


Рис. 3. Распределение инвариантов тензора напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов в зависимости от величин технологического давления

[Figure 3. Distribution of stress tensor invariants in cross sections of combined pressure vessels depending on the contact process pressure values]

С увеличением технологического давления натяга p_δ возрастает J_σ^{II} и увеличивается скачок J_σ^{I} на поверхности контакта, при этом характер распределения напряжений в поперечных сечениях составных сферических сосудов давления становится более нелинейным. Это приводит к тому, что наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения становятся (по сравнению с $p_\delta = 0.0$ МПа) другие точки в конструкции. Так, например, при $p_\delta > 0.9$ МПа разрушение по механизму сжатия в окружном направлении может быть инициировано в точках, принадлежащих внутренней поверхности составной конструкции. Последнее имеет место, несмотря но то, что внешнее давление по абсолютной величине выше внутреннего и превосходит давление натяга. Точки составного сосуда давления, находящиеся на поверхности контакта, становятся наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения по механизму сжатия в радиальном направлении.

4. Заключение. Полученное точное аналитическое решение задачи Ламе для составных трансверсально-изотропных сфер с общим центром могут быть использованы как для определения полей перемещений, деформаций и напряжений в сферических резервуарах (газгольдеры или шаровые хранилища для находящихся под избыточным давлением сжиженных газов, высокоагрессивных сред и легковоспламеняющихся жидкостей) [11], так и для «управления» напряженным состоянием составных сферических конструкций при их проектировании с целью увеличения эффективности. Кроме того, полученные результаты будут полезны для тестирования алгоритмов численного решения задач для сферических конструкций, изготовленных из анизотропных материалов, и при отработке методик экспериментов для центрально-симметричных тел.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.В. Зайцев — идея исследования, получение аналитических решений и их анализ, аналитический обзор, черновик и чистовик рукописи. Ю.В. Соколкин — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, анализ аналитических решений, консультирование, работа с черновиком рукописи. А.А. Фукалов — получение аналитических решений и их анализ, визуализация и верификация результатов, черновик и чистовик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ FSNM–2020–0027 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2020 г. и плановый период 2021 и 2022 гг. и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 19–41–590026_а).

Библиографический список

1. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела.* М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Saint-Venant B. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité semi-polaire ou cylindrique et sur les homogénéités polaires ou sphéri-coniques et sphériques // *J. Math. Pures Appl.*, 1865. vol. 10. pp. 297–349.
3. Шармазанашвили А. Х. Расчет анизотропных толстостенных сферических оболочек // *Вестн. инж. и техников*, 1938. № 7. С. 35–37.
4. Колчин Г. Б., Ковалов Е. К. Центрально-симметричная деформация упругого радиально-неоднородного трансверсально-изотропного полого шара // *Изв. РАН. МТТ*, 1995. № 6. С. 42–47.
5. Зайцев А. В., Фукалов А. А. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жёстко закреплённой внутренней поверхностью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 85–95. https://doi.org/10.14498/vsgtu818.
6. Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2013. № 4. С. 59–74. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.59-74.
7. Zaitsev A. V., Fukalov A. A., Sokolkin Y. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass / *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes.* Cham: Springer, 2019. pp. 463–471. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_46.
8. Победря Б. Е. *Механика композиционных материалов.* М.: МГУ, 1984. 336 с.
9. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов.* М.: Наука, 1997. 288 с.
10. Mityushov E. A., Berestova S. A., Odintsova N. Yu. Effective elastic properties of textured cubic polycrystals // *Texture, Stress, and Microstructure*, 2002. vol. 35, no. 2. pp. 99–111. https://doi.org/10.1080/0730330021000000227.
11. Бобрицкий Н. В., Юфин В. А. *Основы нефтяной и газовой промышленности.* М.: Недра, 1988. 200 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 83–96
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1830

MSC: 74B05

Solution of the Lamé problem for combined transversely isotropic spheres with a general center

© ***A. V. Zaitsev***, $\boxed{\textit{Yu. V. Sokolkin}}$, ***A. A. Fukalov***

Perm State National Research Polytechnical University,
29, Komsomolskiy pr., 614990, Perm, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with obtaining an exact analytical solution to the Lamé problem on the equilibrium state of a combined body consisting of two tightly fitted transversely isotropic spheres with a common center. The body is influenced by uniformly distributed external and internal pressures. The process pressure on the contact surface is determined assuming that it is a consequence of the difference in the geometry of the individual parts of the combined sphere only. We analyzed the laws of the influence of the materials' anisotropy (the material constants satisfy the relations in the form of inequalities that ensure the positivity of the eigenvalues of the elasticity operator) and the values of the contact process pressure on the stress distribution in the cross sections of pressure vessels. The influence assessment of the materials' anisotropy shows an opportunity to control the values and nature of the stress distribution in the combined structures that are optimal for the specified operating conditions. The obtained results indicate that a change in the anisotropy index, i.e. an increase in its values in the inner or outer parts of the spheres leads to an increase or decrease in the absolute values of stresses, respectively. This increase or decrease in the anisotropy indices can be realized at the stage of structures' design due to a change in the reinforcement scheme while maintaining the properties of the individual structural elements. Based on a multicriteria approach, the initial strength of combined pressure vessels was estimated using the mechanisms of tension or compression in the radial and hoop directions. It was found that an increase in the pressure on the contact surface can lead to the material domains that do not resist compression in the hoop direction. These domains

Research Article

Please cite this article in press as:
Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A. Solution of the Lamé problem for combined transversely isotropic spheres with a general center, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 83–96. https://doi.org/10.14498/vsgtu1830 (In Russian).

Authors' Details:
Alexey V. Zaitsev https://orcid.org/0000-0003-0578-7917
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

$\boxed{\textit{Yuriy V. Sokolkin}}$ https://orcid.org/0000-0003-3255-1360
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures

Anton A. Fukalov https://orcid.org/0000-0003-3009-7379
Senior Lecturer; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures;
e-mail: mr_aa@mail.ru

are located in the vicinity of the internal surface of the vessel, on which a uniformly distributed pressure acts, which is less in the absolute value than the external pressure. It was found that the points of the combined vessel located on the contact surface become most dangerous from the point of beginning the damage by the compression in the radial direction.

Keywords: analytical solution, Lamé problem, combined transversely isotropic sphere, anisotropy, multi-criteria evaluation of initial strength, combined spherical vessels, contact pressure.

Received: 5$^{\text{th}}$ October, 2020 / Revised: 18$^{\text{th}}$ February, 2021 / Accepted: 10$^{\text{th}}$ March, 2021 / First online: 30$^{\text{th}}$ March, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. A.V. Zaitsev: Idea of study; Obtaining analytical solutions and their analysis; Literature review; Writing — original draft and review & editing. Yu.V. Sokolkin: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Consulting; Writing — original draft. A. A. Fukalov: Obtaining analytical solutions and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study is supported by the Russian Ministry of Science and Education (State Assignment FSNM–2020–0027 for Basic Researches in 2020–2022) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–41–590026_a).

References

1. Lekhnitskii S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body.* Moscow, Mir Publ., 1981, 430 pp.
2. Saint-Venant B. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité semi-polaire ou cylindrique et sur les homogénéités polaires ou sphéri-coniques et sphériques, *J. Math. Pures Appl.*, 1865, vol. 10, pp. 297–349.
3.
4. Kolchin G. B., Kovalov E. K. Centrally symmetric deformation of an elastic radially inhomogeneous transversely isotropic hollow sphere, *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1995, no. 6, pp. 42–47 (In Russian).
5. Zaitsev A. V., Fukalov A. A. Elastic equilibrium state of thick-walled heavy transversely-isotropic spheres fixed on the interior surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 5(21), pp. 85–95 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu818`.
6. Zaytsev A. V., Sokolkin Y. V., Fukalov A. A. Initial damage mechanisms of reinforced concrete monolithic supports for spherical mine workings located in sedimentary rock mass, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 4, pp. 54–74 (In Russian). `https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.59-74`.
7. Zaitsev A. V., Fukalov A. A., Sokolkin Y. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass, In: *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes.* Cham, Springer, 2019, pp. 463–471. `https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_46`.
8. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Moscow State Univ., 1984, 336 pp. (In Russian)

9. Vildeman V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Inelastic Deformation and Fracture of Composite Materials]. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian)
10. Mityushov E. A., Berestova S. A., Odintsova N. Yu. Effective elastic properties of textured cubic polycrystals, *Texture, Stress, and Microstructure*, 2002, vol. 35, no. 2, pp. 99–111. `https://doi.org/10.1080/0730330021000000227`.
11. Bobritskii N. V., Yufin V. A. *Osnovy neftianoi i gazovoi promyshlennosti* [Fundamentals of Oil and Gas Industry]. Moscow, Nedra, 1988, 200 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 97–110
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1827

УДК 539.3

О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным

© ***А. Л. Попов***[1]***, С. А. Садовский***[2]

[1] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.
[2] Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Аннотация

Рассматривается ряд теоретических моделей для описания продольных колебаний стержня. Наиболее простая и распространенная основана на волновом уравнении. Далее идет модель, учитывающая поперечное смещение (поправка Рэлея). Более совершенной считается модель Бишопа, учитывающая как поперечное смещение, так и деформацию сдвига. Казалось бы, чем совершеннее теоретическая модель, тем она лучше должна согласовываться с экспериментальными данными. Тем не менее, при сравнении с реально определенным экспериментальным спектром продольных колебаний стержня на большой базе собственных частот оказывается, что это не совсем так. Причем, в относительном проигрыше оказывается наиболее сложная модель Бишопа. Сопоставления проведены для стержня с малыми кольцевыми проточками, моделирующими поверхностные дефекты, который рассматривается как ступенчатый стержень. Затронуты также вопросы уточнения с помощью экспериментально найденных частот скорости продольных волн и коэффициента Пуассона материала стержня.

Ключевые слова: ступенчатый стержень, продольные колебания, волновое уравнение, поправка Рэлея, поправка Бишопа, экспериментальные данные.

Получение: 25 сентября 2020 г. / Исправление: 13 января 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 17 марта 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Попов А. Л., Садовский С. А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня с кольцевыми дефектами экспериментальным данным // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 97–110. https://doi.org/10.14498/vsgtu1827.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Попов https://orcid.org/0000-0002-4841-5657
доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций; e-mail: popov@ipmnet.ru

Сергей Александрович Садовский https://orcid.org/0000-0002-6190-5861
аспирант; лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций; e-mail: bigostart@rambler.ru

Введение. Продольные колебания стержня рассматривались многими авторами. Достаточно упомянуть классические монографии [1–3]. Наиболее распространенной и простой моделью их описания является волновое уравнение. При его использовании предполагается, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с длиной. Это позволяет при определении продольных смещений пренебречь влиянием поперечных деформаций, сопровождающих деформации расширения-сжатия в процессе продольных колебаний стержня. Вывод уточненного уравнения, учитывающего поперечную деформацию при продольных колебаниях стержня, приведен в [2]. Получающаяся из него поправка для частот колебаний совпадает с поправкой Рэлея, выведенной из энергетических соображений [1]. Обобщением модели Рэлея является модель, предложенная Бишопом [4] для безграничного стержня, в которой, наряду с поперечными деформациями, учитываются и деформации сдвига. Эта модель описывается дифференциальным уравнением более высокого — 4-го порядка по продольной координате. Формулировка граничных условий для уравнения продольных колебаний с поправкой Бишопа приведена в [5]. Считается, что модель Бишопа лучше описывает колебания толстых коротких стержней, чем две предыдущие [6, 7].

При рассмотрении стержня с малыми кольцевыми проточками, моделирующими поверхностные дефекты, как ступенчатого стержня, участки под проточками могут быть отнесены к толстым коротким стержням. На первый взгляд это не согласуется с классическим определением стержня как тела, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. В динамике это определение наиболее важно при описании поперечных колебаний, где направление колебаний не совпадает с направлением распространения волн. Однако при продольных колебаниях подобной поляризации не возникает, так как направление продольных колебаний совпадает с направлением их распространения. Вследствие этого поперечные размеры тела малосущественны при продольных колебаниях. Характерным примером является прохождение плоских звуковых волн через жидкий слой, разделяющий два акустических полупространства с параметрами, отличными от слоя. При нормальном падении звука волны сдвига в слое не возбуждаются вне зависимости от того, является ли он жидким или упругим, что в полной мере относится и к слою в виде упругой пластины. При этом в ней возникают колебания, симметричные относительно средней плоскости [8]. Именно такое возбуждение и подобные колебания происходят в коротком участке стержня под кольцевой проточкой между двумя длинными участками стержня при продольных колебаниях.

Предложенный подход к моделированию дефектов является альтернативой их учету с помощью пружин, работающих при продольных колебаниях на растяжение-сжатие; жесткости таких пружин увязываются с размерами трещин [9].

Экспериментальные исследования продольных колебаний стержней берут начало с экспериментов Кундта, выполненных с помощью изобретенной им трубы [10]. В дальнейшем и по настоящее время используются два способа возбуждения колебаний: кратковременным ударным воздействием, вызывающим свободно затухающие колебания стержня (метод свободных колебаний), либо непрерывным воздействием с плавно изменяющейся частотой (резонансный метод) [11]. С появлением современных спектроанализаторов первый способ, позволяющий определять сразу множество собственных частот, становится более предпочтительным. Ниже с помощью этого способа на большом числе прецизионно измеряемых собственных частот колебаний ступенчатого металлического стержня рассмотрено соответствие теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным. Рассмотрение проводится на трех моделях в порядке возрастания их сложности.

1. Базовая теоретическая модель на основе волнового уравнения. Рассмотрим сначала свободные продольные колебания ступенчатого стержня с описанием колебаний каждого из участков с помощью волнового уравнения [12]:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{E/\rho}, \tag{1}$$

где $u_j = u_j(x,t)$, $0 \leqslant x \leqslant l_j$ — функции продольных перемещений по участкам длиной l_j, $j = 1, 2, \ldots, N$; $\sum_{j=1}^{N} l_j = l$, E — модуль упругости, ρ — плотность стержня, N — число участков.

В случае гармонических колебаний стержня с круговой частотой ω решения этих уравнений могут быть представлены в виде

$$u_j(x,t) = (C_{1j}\cos\lambda x + C_{2j}\sin\lambda x)\exp(i\omega t), \quad \lambda = \omega/c, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{2}$$

где C_{1j}, C_{2j} — постоянные, определяемые из граничных условий на концах участков стержня, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Естественными граничными условиями для системы (1) являются следующие условия на концах стержня:

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u_k}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad k = 1, N. \tag{3}$$

Физический смысл этих условий состоит в отсутствии усилий на концах стержня; поэтому их называют условиями свободных концов.

В случае закрепления одного или двух концов стержня в качестве граничных условий вместо условий (3) может быть задано отсутствие перемещений на этом конце, например, $u_N|_{x=l} = 0$.

Для определения всех констант к граничным условиям необходимо добавить условия сопряжения по участкам [12, 13]:

$$u_j\big|_{x=l_j} = u_{j+1}\big|_{x=l_j}, \ \left[F_j\frac{\partial u_j}{\partial x}\right]_{x=l_j} = \left[F_{j+1}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x}\right]_{x=l_j}, \ j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{4}$$

где F_j — площадь поперечного сечения j-того участка ступенчатого стержня.

При подстановке решения (2) в граничные условия и условия сопряжения выводятся частотные уравнения для собственных частот продольных колебаний стержня. В общем случае для N участков они имеют громоздкий вид. Компактная запись для двух участков приведена в [13]. Ниже рассмотрен экспериментальный стержень (рис. 1, *а*) с двумя одинаковыми кольцевыми проточками, симметричными относительно середины его длины. Несмотря на то, что общее число участков такого стержня равно пяти, а частотное уравнение имеет сложный ненаглядный вид, получающийся спектр частот при

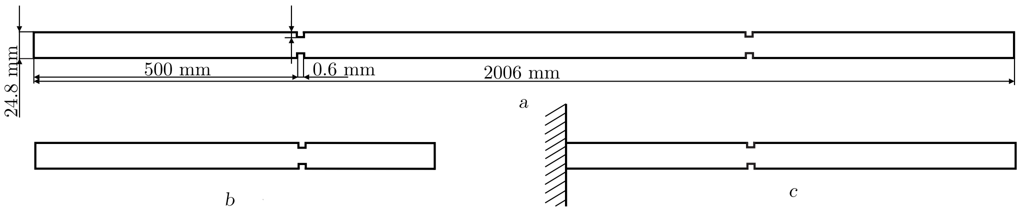


Рис. 1. Схема экспериментального стержня с малыми кольцевыми проточками: стержень полной длины (a); стержни половинной длины со свободными (b) и закрепленно-свободными концами (c)

[Figure 1. Design diagram of an experimental rod with small annular cut grooves: a full-length rod (a), a half-length rod with free ends (b), a half-length rod with fixed-free ends (c)]

однотипных граничных условиях по его концам будет состоять, как указывал еще Рэлей [1], из чередующихся частот колебаний стержня половинной длины с закрепленно-свободным и свободно-свободным концами, т.е. из частот колебаний трехступенчатых стержней. На рис. 1, b, c показана трансформация пятиступенчатого стержня в 2 трехступенчатых с $F_2 = F_1$. Выпишем соответствующие частотные уравнения:

– для свободно-свободного стержня половинной длины:

$$\operatorname{tg}\lambda l_1 + \operatorname{tg}\lambda l_3 + \operatorname{tg}\lambda l_2 \Big(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_1}{F_2}\operatorname{tg}\lambda l_1 \operatorname{tg}\lambda l_3\Big) = 0, \tag{5}$$

– для закрепленно-свободного стержня половинной длины:

$$1 - \operatorname{tg}\lambda l_1 \operatorname{tg}\lambda l_3 - \operatorname{tg}\lambda l_2 \Big(\frac{F_1}{F_2}\operatorname{tg}\lambda l_3 + \frac{F_2}{F_1}\operatorname{tg}\lambda l_1\Big) = 0. \tag{6}$$

Здесь l_1 — расстояние от центра стержня до проточки, l_2 — ширина проточки, l_3 — расстояние от проточки до конца стержня.

В частном случае (при $l_3 = 0$) из (5), (6) получаются частотные уравнения для двухступенчатых стержней со свободными и закрепленно-свободными концами.

2. Экспериментальное измерение спектра продольных колебаний стержня. В эксперименте наиболее просто реализуются продольные колебания стержня с условиями свободных концов, например, при горизонтальной подвеске стержня на двух нитях (рис. 2). Для возбуждения свободно затухающих продольных колебаний стержня и регистрации их спектра использовалась экспериментальная установка, схема которой показана на рис. 2.

Колебания стержня создавались однократным ударом шарика из закаленной стали по одному из торцов стержня. Регистрация колебаний осуществлялась с помощью лабораторного микрофона, установленного вблизи другого торца. Сигнал от микрофона передавался на анализатор спектра A19-U2 и далее на компьютер, где обрабатывался с помощью программного комплекса ZETLab (`https://zetlab.com/`).

В качестве образца для исследования был выбран прямолинейный цилиндрический стержень из алюминиевого сплава длиной $L = 2006$ мм диаметром 24.8 мм с двумя одинаковыми кольцевыми проточками шириной 0.6 мм и глубиной 1 мм на расстояниях 500 мм от торцов (рис. 1). На рис. 3 сверху показан фрагмент микрофонной записи многочастотного сигнала звукоизлучения

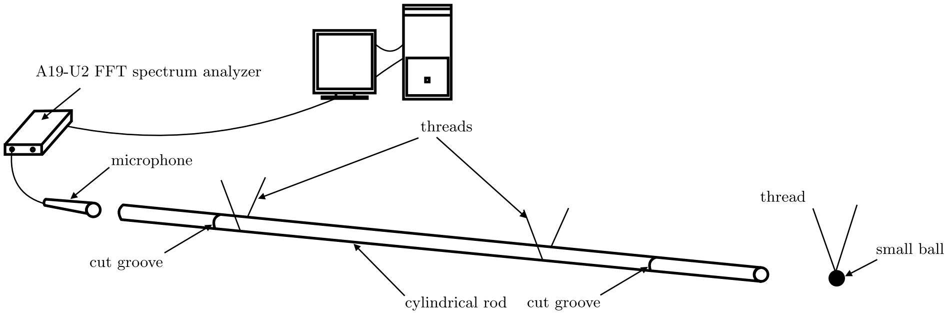


Рис. 2. Схема установки [Figure 2. The measurement setup block diagram]

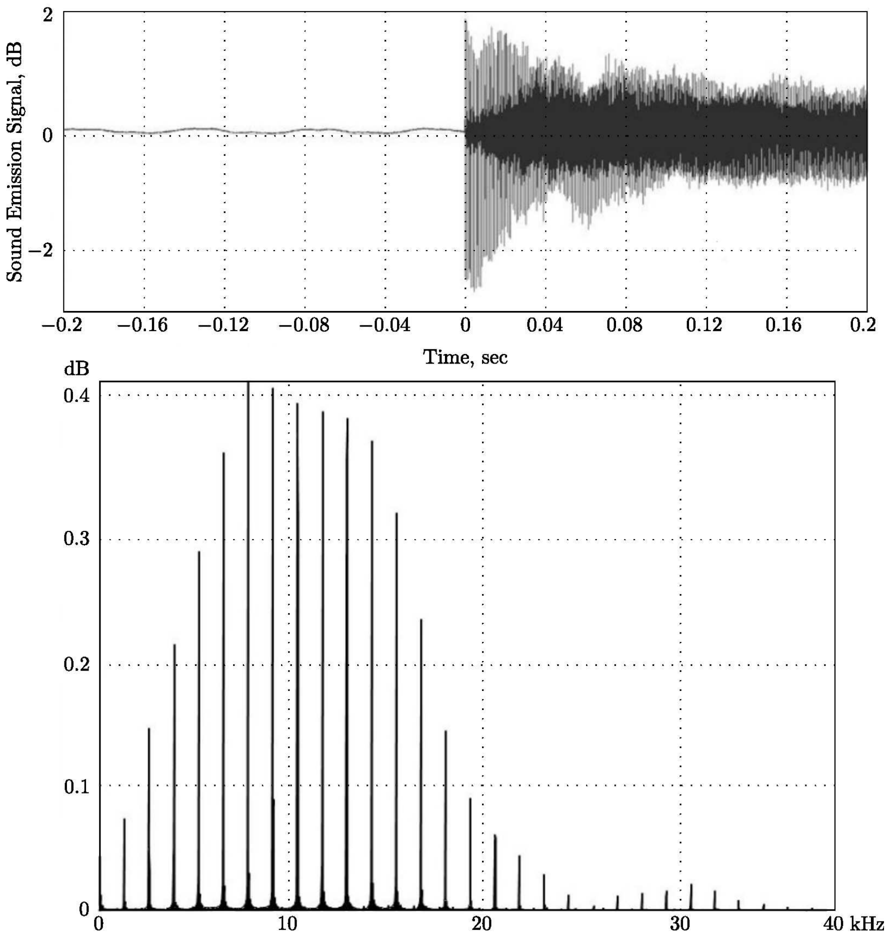


Рис. 3. Запись многочастотного сигнала звукоизлучения стержня после ударного воздействия по его торцу (сверху) и спектр этого сигнала (снизу)

[Figure 3. The multi-frequency signal recording of sound emission of a rod after impact on its end (top), and the spectrum of this signal (bottom)] стержня продолжительностью 0.2 с после ударного воздействия в момент времени $t = 0$, а снизу — графическое отображение спектра этого сигнала в ГГц (амплитуды по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала (дБ), передаваемого с микрофона).

В таблице приведены значения первых 30 экспериментально измеренных собственных частот продольных колебаний стержня с проточками.

Собственные частоты колебаний стержня с двумя проточками (в Гц)
[Natural vibration frequencies of a rod with two cut grooves (in Hz)]

f_{1-6}	1297.78	2594.90	3893.03	5192.81	6488.18	7781.71
f_{7-12}	9080.34	10380.51	11671.76	12959.86	14259.11	15556.23
f_{13-18}	16842.64	18125.61	19421.21	20717.67	21996.85	23272.82
f_{19-24}	24565.13	25857.51	27131.27	28396.33	29682.21	30969.38
f_{25-30}	32232.40	33488.83	34766.42	36046.22	37279.97	38524.60

Для сопоставления экспериментальных и теоретических частот колебаний стержня в частотных уравнениях (5), (6) должна быть известна скорость волн сжатия-расширения c, которая определяется из (1) через модуль упругости E и плотность ρ материала стержня. Справочные значения этих параметров для стержня из алюминиевого сплава имеют некоторый разброс [14]: $E = (69 \div 72.5)$ ГПа, $\rho = (2650 \div 2850)$ кг/м^3, что приводит к интервальным расчетным значениям для скорости продольных волн $c = (4980 \div 5230)$ м/с.

Для уточнения скорости звука в стержне применен подход к ее вычислению через найденную в эксперименте собственную частоту колебаний и длину стержня, реализованный впервые в трубке Кундта [10]. Используя найденную по спектроанализатору первую экспериментальную частоту продольных колебаний стержня $f_{1\,\mathrm{exp}} = 1297.78$ Гц, считая ее практически совпадающей с первой частотой свободных колебаний стержня без повреждений ($f_{10} = 1297.81$ Гц) и применяя явное выражение частоты для стержня со свободными концами [13], находим $c = 2Lf_{1\,\mathrm{exp}} = 5206.8$ м/с.

3. Поправка Рэлея. В уточненной теории продольных колебаний стержня дополнительно учитывается инерция поперечных смещений, посредством которой сечения растягиваются или сжимаются в своих плоскостях при продольных колебаниях стержня. В соответствии с эффектом Пуассона перемещения будут иметь вид [5]

$$u = u(x,t), \quad v = -\nu y\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = -\nu z\frac{\partial u}{\partial x},$$

где через ν обозначен коэффициент Пуассона; y, z — расстояния от нейтральной оси до выбранной точки поперечного сечения.

Уравнения уточненной теории продольных колебаний участков ступенчатого стержня имеют вид [2]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - g_j\frac{\partial^4 u_j}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad g_j = \nu^2\frac{I_j}{F_j}, \tag{7}$$

где $I_j = \displaystyle\int_{F_j} (y^2 + z^2)\, dF_j$ — полярные моменты инерции поперечных сечений участков стержня, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Граничные условия для уравнений на крайних участках стержня сводятся к тем же, что и в случае волнового уравнения [12].

Для решения уравнений (7) могут быть использованы представления, подобные (2):

$$u_j(x,t) = (C_{1j} \cos \lambda_j x + C_{2j} \sin \lambda_j x) \exp(i\omega t), \quad \lambda_j = \lambda(1 - g_j \lambda^2)^{-1/2}.$$

Подстановка их в условия (4) приводит к несколько более сложным, чем (5), (6), частотным уравнениям:

– для свободно-свободного стержня половинной длины:

$$\frac{\operatorname{tg} \lambda_1 l_1}{\cos \lambda_2 l_2 \cos \lambda_1 l_3} + \operatorname{tg} \lambda_1 l_3 + \frac{F_2}{F_1}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \lambda_2 l_2 - \frac{F_1}{F_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{tg} \lambda_1 l_1 \operatorname{tg} \lambda_2 l_2 \operatorname{tg} \lambda_1 l_3 = 0;$$

– для закрепленно-свободного стержня половинной длины:

$$1 - \operatorname{tg} \lambda_1 l_1 \operatorname{tg} \lambda_3 l_3 - \operatorname{tg} \lambda_2 l_2 \Big(\frac{F_1}{F_2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \operatorname{tg} \lambda_3 l_3 + \frac{F_2}{F_1}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \lambda_1 l_1\Big) = 0.$$

4. Поправка Бишопа для стержня ступенчатого поперечного сечения. Главной особенностью модели Бишопа является учет не только поперечных, но и сдвиговых деформаций [4, 5]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\nu y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\nu z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Система уравнений продольных колебаний ступенчатого стержня по этой модели может быть представлена в виде

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} - g_j \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^2 \partial t^2} + g_j \eta c^2 \frac{\partial^4 u_j}{\partial x^4} = 0, \ \eta = \frac{1}{2(1+\nu)}, \ j = 1, 2, \ldots, N. \quad (8)$$

С учетом того, что система (8) состоит из уравнений 4-го порядка по координате, решения по участкам выражаются через тригонометрические и гиперболические функции:

$$u_j(x,t) = (C_{1,j} \operatorname{ch} \beta_{1,j} x + C_{2,j} \operatorname{sh} \beta_{1,j} x + C_{3,j} \cos \beta_{2,j} x + C_{4,j} \sin \beta_{2,j} x) \exp(i\omega t),$$
$$\beta^2_{1,2,j} = \Big(a_j^2 + \frac{\lambda^2}{\eta g_j}\Big)^{-1/2} \pm a_j, \quad a_j = \frac{1}{2\eta}\Big(\frac{1}{g_j} - \lambda^2\Big), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \quad (9)$$

На свободных концах стержня и границах между участками ставятся следующие условия [7]:

$$
\begin{gathered}
u_j\big|_{x=l_j} = u_{j+1}\big|_{x=l_j}, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x}\bigg|_{x=l_j} = \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x}\bigg|_{x=l_j}, \\
\Big[I_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\Big]_{x=l_j} = \Big[I_{j+1}\frac{\partial^2 u_{j+1}}{\partial x^2}\Big]_{x=l_j}, \quad \big[\Gamma_j u_j\big]_{x=l_j} = \big[\Gamma_{j+1}u_{j+1}\big]_{x=l_j}, \\
j = 1, 2, \ldots, N-1; \\
\big[\Gamma_j u_j\big]_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \big[\Gamma_j u_j\big]_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\bigg|_{x=l} = 0, \\
j = 1, N; \\
\Gamma_j u_j = \Big(-EF_j\frac{\partial}{\partial x} - \rho\nu^2 I_j\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} + \nu^2\eta I_j \frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big)u_j, \ j = 1, 2, \ldots, N.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Подстановка выражений (9) в граничные и переходные условия (10) с последующим приравниванием нулю определителя получающейся системы алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{k,j}$ ($k = 1, \ldots, 4$, $j = 1, \ldots, N$) приводит к частотному уравнению для ступенчатого стержня (ввиду громоздкости оно не выписывается).

Заметим, что при рассмотрении ступенчатого стержня по модели волнового уравнения и с поправкой Рэлея в решении сохраняются только осциллирующие компоненты, а в условиях перехода — соотношения для перемещений и продольных сил, что кардинально упрощает проведение расчетных операций по определению собственных частот.

Для сравнения расчетных значений частот по моделям Рэлея и Бишопа с экспериментально измеренными частотами необходимо, кроме скорости продольных волн, знание и коэффициента Пуассона материала стержня. Здесь так же как и в случае с другими упругими параметрами, справочные данные по алюминиевым сплавам имеют достаточно большой разброс в пределах $0.31 \div 0.33$ [14], $0.32 \div 0.36$ [15]. Для уточнения этого значения применительно к материалу испытываемого стержня используем подход к определению коэффициента Пуассона, предложенный в [16].

Суть подхода в следующем. Задавая коэффициент Пуассона в возможном интервале значений $(0.31 \div 0.36)$ и вычисляя значения собственных частот колебаний стержня, получаем набор расчетных частот, соответствующий измеренным экспериментальным частотам. Далее, составляя модули разностей экспериментальных и расчетных частот с одинаковыми номерами и суммируя эти разности с делением на число частот, получаем критерий отклонения расчетных значений частот от экспериментальных при выбранном значении коэффициента Пуассона:

$$
\Delta(\nu) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big|\Delta f_n(\nu)\big|, \quad \Delta f_n(\nu) = f_n^{\mathrm{calc}}(\nu) - f_n^{\mathrm{exp}}(\nu). \tag{11}
$$

На рис. 4 приведен график зависимости $\Delta(\nu)$, из которого видно, что минимальное отклонение между экспериментальным и расчетным наборами

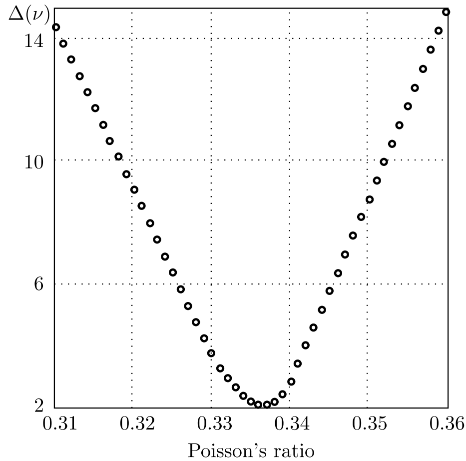


Рис. 4. Определение коэффициента Пуассона из условия минимума разницы между наборами экспериментальных и расчетных частот (см. (11))

[Figure 4. Determination of Poisson's ratio from the minimum difference condition between the sets of experimental and calculated frequencies (11)]

частот имеет место при $\nu = 0.337$. Данный результат был проверен экспериментально при статических испытаниях образца из материала стержня. С точностью до 2-х значащих цифр коэффициент Пуассона был определен равным 0.34.

При выбранном таким образом значении коэффициента Пуассона были рассчитаны 30 собственных частот продольных колебаний стержня и их отличия от экспериментальных частот. На рис. 5 представлены сравнительные диаграммы распределений отличий расчетных частот стержня с двумя проточками от соответствующих экспериментальных частот в зависимости от номера частоты.

Из приведенных диаграмм видно, что, как и в случае гладкого стержня, более простая модель Рэлея намного точнее описывает спектр частот продольных колебаний стержня с малыми дефектами, чем более сложная модель, предложенная Бишопом.

Из рис. 5 также видно, что изменение отличий расчетных частот от экспериментальных в зависимости от номера частот при наличии дефектов носит неравномерный, похожий на волновой характер, что может указывать на разную чувствительность к одним тем же дефектам частот колебаний стержня при разном сочетании граничных условий. Имея в виду, что как расчетный, так и измеренный экспериментально, спектры частот продольных колебаний стержня со свободными концами могут быть сведены к двум подспектрам чередующихся частот колебаний стержня половинной длины с закрепленно-свободными и свободно-свободными концами и симметричное расположение кольцевых проточек относительно середины длины стержня не нарушает эту закономерность, для этих подспектров можно составить следующие критерии:

$$\delta_n = f_1(2n-1) - f_{2n-1}, \quad \eta_n = f_2 n - f_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots, N/2,$$

первый из которых показывает отличие от равномерного распределения частот подспектра колебаний стержня половинной длины с закрепленно-свободными концами (f_{2n-1}), а второй — со свободно-свободными концами (f_{2n}); N — четное число учитываемых частот стержня полной длины.

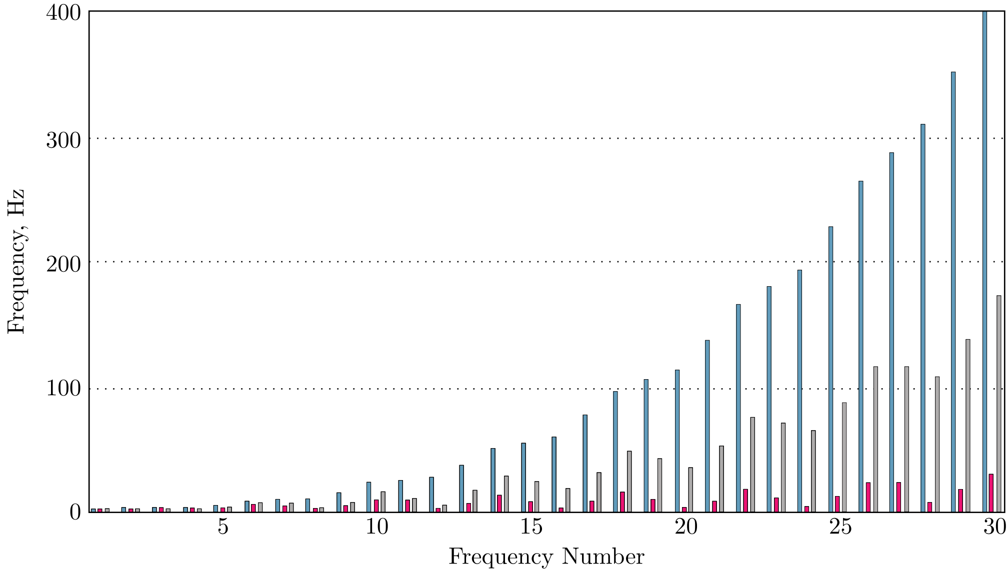


Рис. 5. Отличия расчетных частот, вычисленных по волновому уравнению и с поправками Рэлея и Бишопа от экспериментальных частот при $\nu = 0.34$: голубой — волновое уравнение, розовый — поправка Рэлея, серый — поправка Бишопа (онлайн в цвете)

[Figure 5. (color online) Differences between the calculated frequencies calculated by the wave equation (blue) with Rayleigh (pink) and Bishop (grey) corrections from the experimental frequencies]

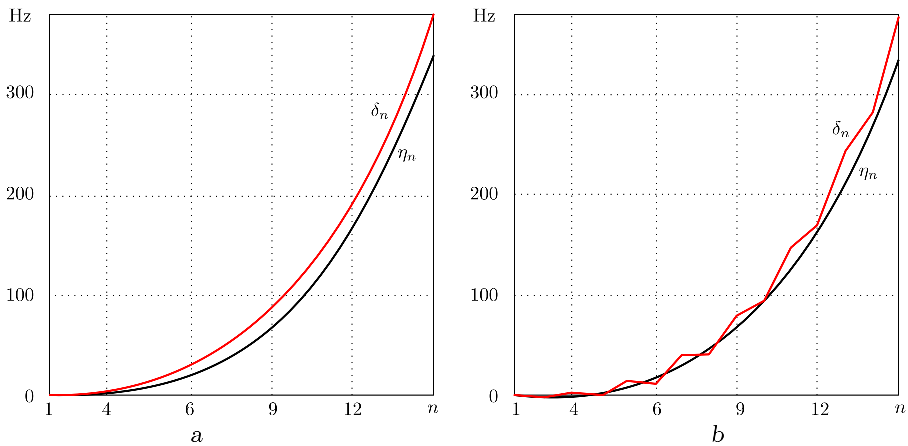


Рис. 6. Отличия от равномерного распределения частот продольных колебаний стержня без дефектов (*а*) и с малой кольцевой проточкой (*б*); красные линии — консольный стержень, черные линии — стержень со свободными концами

[Figure 6. Differences from the uniform distribution of the frequencies of longitudinal vibrations of the rod without defects (*a*) and with a small annular cut groove (*b*); red lines — the cantilever rod, black lines — the rod with free ends]

На рис. 6 показаны графики зависимостей значений δ_n и η_n от номеров частот продольных колебаний стержня половинной длины в отсутствии (рис. 6, a) и при наличии (рис. 6, b) малой кольцевой проточки указанного выше вида.

Из рис. 6 видна значительная чувствительность частот продольных колебаний консольно закрепленного стержня к наличию малого кольцевого дефекта при почти полном отсутствии чувствительности частот колебаний стержня со свободными концами к такому же дефекту. Это может быть использовано в развитии экспериментальной методики диагностики наличия дефектов в стержне.

Заключение. Широко распространено положение о том, что чем больше теоретически возможных факторов учитывается в математической модели, тем она совершеннее и должна лучше согласовываться с экспериментальными данными. В работе на примере продольных колебаний стержня ступенчатого поперечного сечения были рассмотрены три уровня таких моделей: волновое уравнение, уточненное уравнение, учитывающее влияние поперечной деформации стержня, и уравнение четвертого порядка по координате, учитывающее, наряду с предыдущим, также и сдвиговые деформации. Спектры частот колебаний стержня, полученные по этим моделям, сравнивались с экспериментальным набором частот, определенным с помощью высокоточной спектроанализирующей аппаратуры. Результат этого сравнения оказался неочевидным.

Сравнение экспериментальных частот с частотами, полученными по модели волнового уравнения, показало их быстро увеличивающееся расхождение с ростом номера частоты. Наилучшее согласование с экспериментальными частотами показали расчетные значения, вычисленные с поправкой Рэлея, т.е. в модели, учитывающей влияние поперечной деформации. Частоты, определенные из более сложной модели, разработанной Бишопом, учитывающей как поперечные, так и сдвиговые деформации, несколько улучшают результаты, полученные из волнового уравнения, но несравненно хуже аппроксимируют их значения при сравнении с экспериментом, чем частоты, вычисленные только с учетом поперечной деформации. Это может быть объяснено принципиальным свойством симметричности деформации поперечного сечения стержня при продольных колебаниях.

Возможно, конечно, рассмотрение вариантов продольных колебаний стержней несимметричного поперечного сечения, которые, скорее всего, будут сопровождаться и колебаниями других типов. В этих случаях, вероятно, сдвиговые деформации будут играть какую-то роль в уточнении расчетных частот продольных колебаний стержня. Однако для длинных стержней с симметричным поперечным сечением при расчете частот продольных колебаний не требуется перехода к более сложной модели, чем уравнение колебаний с учетом поперечной деформации.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.Л. Попов — идея исследования, общая постановка задачи, анализ литературы, теоретический анализ, разработка алго-

ритмов, анализ результатов, руководство и консультирование, черновик рукописи. С.А. Садовский — реализация алгоритмов на компьютере, расчеты, визуализация результатов расчетов и экспериментов, чистовик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19–01–00100).

Библиографический список

1. Strutt Lord Rayleigh J. W. *The Theory of Sound (in two volumes)*. vol. 1. New York: Dover Publications, 1877.
2. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: University Press, 1920.
3. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. New York: D. Van Nostrand, 1955.
4. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // *Aeronautical Journal*, 1952. vol. 3, no. 4. pp. 280–293. `https://doi.org/10.1017/S0001925900000706`.
5. Rao S. S. *Vibration of Continuous Systems*. New York: John Wiley & Sons, 2007.
6. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю., Тенкам Э. М. Продольные колебания стержня Рэлея–Бишопа // *Доклады Академии наук*, 2010. Т. 435, № 5. С. 613–618.
7. Marais J., Fedotov I., Shatalov M. Longitudinal vibrations of a cylindrical rod based on the Rayleigh–Bishop theory // *Afrika Matematika*, 2015. vol. 26, no. 7–8. pp. 1549–1560. `https://doi.org/10.1007/s13370-014-0286-3`.
8. Шендеров Е. Л. *Волновые задачи гидроакустики*. Л.: Судостроение, 1972.
9. Лебедев И. М., Шифрин Е. И. Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга–Марквардта // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 4. С. 8–26. `https://doi.org/10.1134/S0572329919040056`.
10. Kundt A. Acoustic Experiments // *London Edinburgh Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, 1868. vol. 35, no. 4. pp. 41–48. `https://doi.org/10.1080/14786446808639937`.
11. *Неразрушающий контроль и диагностика*: Справочник / ред. В. В. Клюев. М.: Машиностроение, 2003.
12. *Вибрации в технике*: Справочник в 6-ти т. Т. 1: Колебания линейных систем / ред. В. Н. Челомей. М.: Машиностроение, 1978.
13. *Прочность, устойчивость, колебания*: Справочник в 3 т. Т. 3 / ред. И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
14. *Физические величины*. Т. Справочник / ред. И. С. Григорьев, Е. З. Мейлихов. М.: Энергоатомиздат, 1991.
15. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. *Справочник по сопротивлению материалов* / ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наук. думка, 1988.
16. Akulenko L. D., Nesterov S. V. *High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications*. New York: CRC Press, 2004.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 97–110
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1827

MSC: 74H45, 74K10

On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data

© ***A. L. Popov*[1], *S. A. Sadovsky*[2]**

[1] Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
[2] National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

The paper considers a number of theoretical models for describing longitudinal vibrations of a rod. The most simple and common is based on the wave equation. Next comes the model that takes into account the lateral displacement (Rayleigh correction). Bishop's model is considered to be more perfect, taking into account both transverse displacement and shear deformation. It would seem that the more perfect the theoretical model, the better it should agree with the experimental data. Nevertheless, when compared with the actually determined experimental spectrum of longitudinal vibrations of the rod on a large base of natural frequencies, it turns out that this is not entirely true. Moreover, the most complex Bishop's model turns out to be a relative loser. The comparisons were made for a bar with small annular grooves that simulate surface defects, which is considered as a stepped bar. The questions of refinement with the help of experimentally found frequencies of the velocity of longitudinal waves and Poisson's ratio of the rod material are also touched upon.

Keywords: stepped bar, longitudinal vibrations, Rayleigh correction, Bishop's correction, wave equation, experimental data.

Received: 25th September, 2020 / Revised: 13th January, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 17th March, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Research Article

Please cite this article in press as:
Popov A. L., Sadovsky S. F. On the conformity of theoretical models of longitudinal rod vibrations with ring defects experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 97–110. https://doi.org/10.14498/vsgtu1827 (In Russian).

Authors' Details:

Alexandr L. Popov https://orcid.org/0000-0002-4841-5657
Dr. Phys.& Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Strength and Fracture Mechanics of Materials and Structures; e-mail: popov@ipmnet.ru

Sergei A. Sadovsky https://orcid.org/0000-0002-6190-5861
Postgraduate Student; Leading Researcher; Lab. of Strength and Fracture Mechanics of Materials and Structures; e-mail: bigostart@rambler.ru

Author's Responsibilities. A.L. Popov: Idea of study; General Problem Statement; Literature review; Theoretical analysis, Development of algorithms; Analysis of results; Supervision and consulting; Writing — original draft. S.A. Sadovsky: Implementation of the computer algorithms; Performing Calculations; Visualization of experimental and calculated results; Writing — review & editing. We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–01–00100).

References

1. Strutt Lord Rayleigh J. W. *The Theory of Sound (in two volumes)*, vol. 1. New York, Dover Publications, 1877.
2. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge, University Press, 1920.
3. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. New York, D. Van Nostrand, 1955.
4. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams, *Aeronautical Journal*, 1952, vol. 3, no. 4, pp. 280–293. https://doi.org/10.1017/S0001925900000706.
5. Rao S. S. *Vibration of Continuous Systems*. New York, John Wiley & Sons, 2007.
6. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Yu., Tenkam H. M. Longitudinal vibrations of a Rayleigh–Bishop rod, *Dokl. Phys.*, 2010, vol. 55, pp. 609–614. https://doi.org/10.1134/s1028335810120062.
7. Marais J., Fedotov I., Shatalov M. Longitudinal vibrations of a cylindrical rod based on the Rayleigh–Bishop theory, *Afrika Matematika*, 2015, vol. 26, no. 7–8, pp. 1549–1560. https://doi.org/10.1007/s13370-014-0286-3.
8. Shenderov E. L. *Volnovye zadachi gidroakustiki* [Wave Problems of Hydroacoustic]. Leningrad, Sudostroenie, 1972 (In Russian).
9. Lebedev I. M., Shifrin E. I. Solution of the inverse spectral problem for a rod weakened by transverse cracks by the Levenberg—Marquardt optimization algorithm, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 857–872. https://doi.org/10.3103/S0025654419060025.
10. Kundt A. Acoustic Experiments, *London Edinburgh Dublin Philos. Mag. J. Sci.*, 1868, vol. 35, no. 4, pp. 41–48. https://doi.org/10.1080/14786446808639937.
11. *Nerazrushaiushchii kontrol' i diagnostika* [Non-destructive Testing and Diagnostics], Handbook, ed. V. V. Klyuev. Moscow, Mashinostroenie, 2003 (In Russian).
12. *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in Engineering], Handbook in 6 volumes, vol. 1, Kolebaniia lineinykh sistem [Oscillations of Linear Systems], ed. V. N. Chelomei. Moscow, Mashinostroenie, 1978 (In Russian).
13. *Prochnost', ustoichivost', kolebaniia* [Strength, Stability, Vibration], Handbook in 3 volumes, vol. 3, ed. I. A. Birger, Ya. G. Panovko. Moscow, Mashinostroenie, 1968 (In Russian).
14. *Handbook of Physical Quantities*, ed. I. S. Grigoriev, E. Z. Meilikhov. Boca Raton, CRC Press, 1997.
15. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Spravochnik po soprotivleniiu materialov* [Handbook on Strength of Materials], ed. G. S. Pisarenko. Kiev, Nauk. Dumka, 1988 (In Russian).
16. Akulenko L. D., Nesterov S. V. *High-Precision Methods in Eigenvalue Problems and Their Applications*. New York, CRC Press, 2004.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 111–126
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1793

УДК 539.31

Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины

© *А. О. Сердюк*[1], *Д. О. Сердюк*[1], *Г. В. Федотенков*[1,2]

[1] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.
[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Работа посвящена исследованию нестационарных колебаний тонкой анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа при воздействии на нее произвольных нестационарных нагрузок.

Подход к решению основан на принципе суперпозиции и методе функций влияния (функций Грина), суть которого заключается в связи искомого решения с нагрузкой при помощи интегрального оператора типа свертки по пространственным переменным и по времени. Ядром этого оператора является функция Грина для анизотропной пластины, которая представляет собой нормальные перемещения в ответ на воздействие единичной сосредоточенной нагрузки по координатам и времени, математически описываемой дельта-функциями Дирака. Для построения функции Грина использованы прямые и обратные интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Обратное интегральное преобразование Лапласа найдено аналитически. Обратное двумерное интегральное преобразование Фурье найдено численно методом интегрирования быстро осциллирующих функций. Полученное фундаментальное решение позволило представить искомый нестационарный прогиб в виде тройной свертки по пространственным координатам и по времени функции Грина с функцией нестационарной нагрузки. Для вычисления интеграла свертки и построения искомого решения использован метод прямоугольников.

Научная статья

Образец для цитирования

Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Нестационарная функция прогиба для неограниченной анизотропной пластины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 111–126. https://doi.org/10.14498/vsgtu1793.

Сведения об авторах

Александр Олегович Сердюк https://orcid.org/0000-0002-2109-7900
аспирант; каф. сопротивление материалов, динамика и прочность машин; e-mail: serduksaha@yandex.ru

Дмитрий Олегович Сердюк https://orcid.org/0000-0003-0082-1856
кандидат технических наук; доцент; каф. сопротивление материалов, динамика и прочность машин; e-mail: d.serduk55@gmail.com

Григорий Валерьевич Федотенков https://orcid.org/0000-0002-9556-7442
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. сопротивление материалов, динамика и прочность машин[1]; ст. научный сотрудник; лаб. динамических испытаний[2]; e-mail: greghome@mail.ru

Найденная функция прогиба позволяет исследовать пространственно-временное поведение изгибных нестационарных колебаний в неограниченной пластине Кирхгофа для различных вариантов симметрии упругой среды: анизотропная, ортотропная, трансверсально-изотропная и изотропная. Представлены примеры расчетов.

Ключевые слова: нестационарная динамика, анизотропный материал, функция Грина, нестационарный прогиб, пластина Кирхгофа, интегральные преобразования, квадратурные формулы, метод прямоугольников, быстро осциллирующие функции.

Получение: 28 июня 2020 г. / Исправление: 3 февраля 2021 г. /
Принятие: 8 февраля 2021 г. / Публикация онлайн: 12 февраля 2021 г.

Введение. Пластины представляют широкий класс конструктивных элементов в авиации, космонавтике, а также в общем машиностроении и строительстве в целом. Исследование их поведения в ответ на статические и динамические воздействия является неотъемлемым этапом проектирования. Наиболее трудоемким является исследование поведения конструкций при нестационарных динамических воздействиях, поскольку в этом случае присутствует существенная неоднородность по координатам и времени.

В [1] представлено аналитическое решение задачи об изгибных нестационарных колебаниях в изотропной неограниченной пластине Кирхгофа. Получено фундаментальное решение. Представлены пространственно-временные зависимости функции влияния для перемещения. В работе [2] рассматривается нестационарная динамическая задача для изотропной кольцевой пластины Тимошенко кусочно-переменной толщины. В работе [3] получены точные аналитические решения нестационарных задач для изотропных прямоугольных и круглых пластин типа Тимошенко при наиболее общих граничных условиях для широкого класса динамических нагрузок.

В работе [4] рассматривается задача о воздействии на тонкую неограниченную ортотропную пластину локальной динамической нагрузки, распределенной по круговой области. Построено фундаментальное решение, приведены численные результаты прогиба точки пластины, соответствующей центру площадки нагружения.

В работах [5–16] эффективно использован метод функций влияния применительно к решению различных нестационарных задач теории упругости и теории оболочек. Исследуются нестационарные контактные задачи для тонких цилиндрических, сферических оболочек и упругого полупространства. Исследуется нестационарная динамика анизотропных оболочек. Рассматривается случай нестационарного воздействия жесткого индентора на упругую полуплоскость.

Вопросы, связанные с изгибными нестационарными колебаниями пластин, обладающих анизотропией, на данный момент являются наименее изученными. Данная работа посвящена построению нестационарной функции прогиба для анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа, разработке и реализации метода решения задач о колебаниях анизотропных пластин при воздействии на них различных нестационарных нагрузок. В качестве примеров решены задачи о воздействии на пластину сосредоточенной и распределенной по прямоугольной области нестационарной нагрузки.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является неограниченная тонкая пластина постоянной толщины h (см. рис. 1). Материал пластины принят упругим и анизотропным. Далее будем полагать, что тензор упругих постоянных среды обладает симметрией относительно срединной плоскости пластины.

В начальный момент времени принимаем, что пластина находится в невозмущенном состоянии. Затем к пластине прикладывается нестационарное давление $p(x_1, x_2, t)$, распределенное произвольно по пространственным координатам и произвольно зависящее от времени. Движение пластины рассматривается относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины.

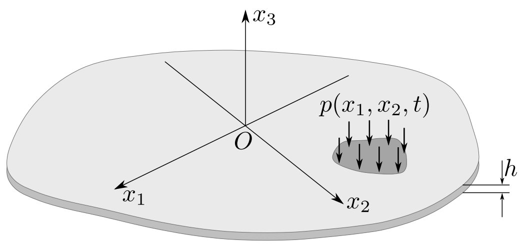


Рис. 1. Неограниченная пластина под воздействием нестационарного давления

[Figure 1. An unlimited plate under unsteady pressure]

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой пластины Кирхгофа, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой пластины [1, 17].

Материал анизотропной пластины Кирхгофа с учетом симметрии относительно срединной плоскости характеризуется шестью независимыми упругими постоянными C^{1111}, C^{1112}, C^{1122}, C^{1212}, C^{1222}, C^{2222} [19].

Уравнение движения анизотропной пластины Кирхгофа в перемещениях имеет вид [19, 20]

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -ID(w) + p, \tag{1}$$

где

$$D(w) = C_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + C_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2(C_{12} + 2C_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ + 4C_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4C_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3},$$

$C_{11} = C^{1111}$, $C_{12} = C^{1122}$, $C_{16} = C^{1112}$, $C_{22} = C^{2222}$, $C_{26} = C^{2212}$, $C_{66} = C^{1212}$, $I = h^3/12$.

Запишем уравнение движения в перемещениях (1) в безразмерной форме. Для этого введем систему безразмерных величин, которые обозначим штрихом:

$$w' = \frac{w}{L},\ x_1' = \frac{x_1}{L},\ x_2' = \frac{x_2}{L},\ \tau = \frac{C_* t}{L},\ C_* = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}},\ p' = \frac{pL}{\rho h C_*^2},\ L = \frac{h}{2\sqrt{3}}. \tag{2}$$

В соотношениях (1), (2) τ — безразмерное время, L — характерный размер, C_* — характерная скорость, h — толщина, ρ — плотность, p — давление; x_1, x_2 — координаты.

Уравнение движения (1) в безразмерной форме записи примет вид (штрихи в безразмерных величинах опущены)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -R(w) + p(x_1, x_2, \tau), \tag{3}$$

где

$$R(w) = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + C_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3},$$
$$C_1 = \frac{C_{22}}{C_{11}}, \quad C_2 = \frac{2(C_{12} + 2C_{66})}{C_{11}}, \quad C_3 = \frac{4C_{16}}{C_{11}}, \quad C_4 = \frac{4C_{26}}{C_{11}}.$$

Уравнение (3) совместно с начальными условиями

$$w\big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0 \tag{4}$$

образуют начальную задачу.

Цель исследования заключается в определении распределения нормальных перемещений $w(x_1, x_2, \tau)$ в ответ на воздействие нестационарной нагрузки $p(x_1, x_2, \tau)$.

2. Построение нестационарной функции прогиба. Решение начальной задачи (3), (4) может быть построено с помощью функции влияния (функции Грина) $G(x_1, x_2, \tau)$ [1, 19, 20]:

$$w(x_1, x_2, \tau) = G(x_1, x_2, \tau) *** p(x_1, x_2, \tau). \tag{5}$$

В (5) через $*$ обозначены свертки по пространственным координатам x_1, x_2 и безразмерному времени τ.

Определим функцию влияния для прогиба пластины $G(x_1, x_2, \tau)$ как решение следующей задачи [19, 20]:

$$\frac{\partial^2 G(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau^2} = -R(G) + \delta(x_1, x_2)\delta(\tau), \tag{6}$$
$$G(x_1, x_2, \tau)\big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial G(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0.$$

В (6) $\delta(\,\cdot\,)$ — дельта-функция Дирака.

Для решения задачи (6) используем интегральные преобразования Лапласа по времени τ и двумерное преобразование Фурье по пространственным координатам x_1 и x_2:

$$f^{LF} = \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty dx_1 \int_{-\infty}^\infty f(x_1, x_2, \tau) e^{-i(q_1 x_1 + q_2 x_2) + s\tau} dx_2.$$

Здесь и далее верхний индекс L у функции означает ее преобразование по Лапласу, а F — ее преобразование по Фурье; s — параметр преобразования Лапласа; q_1, q_2 — параметры преобразования Фурье.

Применяя к (6) интегральное преобразование Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам с учетом свойств интегральных преобразований дельта-функции [1], получим алгебраическое уравнение относительно изображения G^{LF} функции влияния в пространстве преобразований Фурье и Лапласа. Решив алгебраическое уравнение, получим изображение функции влияния:

$$G^{LF}(q_1, q_2, s) = \frac{1}{s^2 + P(q_1, q_2)}, \tag{7}$$

где

$$P(q_1, q_2) = q_1^3(q_1 + C_3 q_2) + q_2^3(C_1 q_2 + C_4 q_1) + C_2 q_1^2 q_2^2.$$

Найдем оригинал функции влияния (7). Выполним обратное интегральное преобразование Лапласа с помощью таблиц [21]. В зависимости от сочетания упругих констант исследуемой анизотропной пластины оригинал по Лапласу может принимать следующий вид:

$$G^F(q_1, q_2, \tau) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{P(q_1,q_2)}\tau)}{\sqrt{P(q_1,q_2)}}, & P(q_1, q_2) > 0; \\ \tau, & P(q_1, q_2) = 0; \\ \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{P(q_1,q_2)}\tau)}{\sqrt{P(q_1,q_2)}}, & P(q_1, q_2) < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Оригинал по Фурье функции влияния (8) в общем случае определяется по известной формуле обращения [1]

$$G(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G^F(q_1, q_2, \tau) e^{i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} dq_1 dq_2. \tag{9}$$

Для построения оригинала по Фурье (9) будем использовать численный алгоритм интегрирования быстро осциллирующих функций [22], в результате чего оригинал функции влияния примет вид [19, 20]

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \tau) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-Q}^{Q} S(q_1, x_2, \tau) e^{iq_1 x_1} dq_1 = \\ &= \frac{\Delta}{2} \Big(e^{i(q_{1_{k+1}} x_1 + q_{1_k} x_1)/2} \big(D_1 S(q_{1_k}, x_2, \tau) + D_2 S(q_{1_{k+1}}, x_2, \tau) \big) \Big), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} S(q_1, x_2, \tau) &= \int_{-Q}^{Q} G^F(q_1, q_2, \tau) e^{iq_2 x_2} dq_2 = \\ &= \frac{\Delta}{2} \Big(e^{i(q_{2_{k+1}} x_2 + q_{2_k} x_2)/2} \big(D_1 G^F(q_1, q_{2_k}, \tau) + D_2 G^F\big(q_1, q_{2_{k+1}}, \tau\big) \big) \Big), \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{2Q}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i,$$
$$q_{2_k} = Q + k\Delta, \quad q_{2_{k+1}} = Q + (k+1)\Delta, \quad k = 0, \ldots, N-1,$$
$$q_{1_k} = Q + k\Delta, \quad q_{1_{k+1}} = Q + (k+1)\Delta, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

В случае воздействия на пластину сосредоточенной нагрузки по закону от времени $P(\tau)H(\tau)$ выражение для нагрузки $p(x_1, x_2, \tau)$ из (5) запишется так:

$$p(x_1, x_2, \tau) = P(\tau)H(\tau)\delta(x_1)\delta(x_2), \tag{11}$$

где $H(\tau)$ — функция Хэвисайда.

Тогда соотношение (5) с учетом (11) и свойств дельта-функции Дирака преобразуется к виду

$$w(x_1, x_2, \tau) = G(x_1, x_2, \tau) *** p(x_1, x_2, \tau) = \int_0^\tau G(x_1, x_2, \tau - t)P(t)dt. \tag{12}$$

Для вычисления интеграла в (12) используем метод прямоугольников [22]. Тогда приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид

$$w(x_1, x_2, \tau) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\tau}{n} G\Big(x_1, x_2, \tau - \frac{\tau i}{n}\Big) P\Big(\frac{\tau i}{n}\Big). \tag{13}$$

Также рассмотрим случай воздействия на пластину распределенной нагрузки

$$p(x_1, x_2, \tau) = P(\tau)H(\tau)\Big[H\Big(x_1 + \frac{a}{2}\Big) - H\Big(x_1 - \frac{a}{2}\Big)\Big] \times \\ \times \Big[H\Big(x_2 + \frac{b}{2}\Big) - H\Big(x_2 - \frac{b}{2}\Big)\Big], \tag{14}$$

что соответствует приложению к пластине давления, распределенного по области $D = \{(x_1, x_2) : -a/2 \leqslant x_1 \leqslant a/2, -b/2 \leqslant x_2 \leqslant b/2\}$ и изменяющегося во времени по закону $P(\tau)H(\tau)$.

Безразмерные нормальные перемещения пластины определяются по формуле (4) с учетом (14), в которой интеграл с учетом геометрии области D заменяется повторным интегралом:

$$w(x_1, x_2\tau) = G(x_1, x_2, \tau) *** p(x_1, x_2, \tau) = \\ = \int_0^\tau dt \int_{-a/2}^{a/2} d\xi \int_{-b/2}^{b/2} G(x_1 - \xi, x_2 - \zeta, \tau - t)p(\xi, \zeta, t)d\zeta. \tag{15}$$

Для вычисления интеграла в (15) используем квадратурную формулу метода прямоугольников:

$$w(x_1, x_2, \tau) \approx \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{p} \frac{b}{m} \frac{\tau}{n} G_{ijk}(x_1, x_2, \tau) P\Big(\frac{\tau}{n} k\Big), \tag{16}$$

$$G_{ijk}(x_1, x_2, \tau) = G\Big(x_1 - \frac{a}{p} i + \frac{a}{2}, x_2 - \frac{b}{m} j + \frac{b}{2}, \tau - \frac{\tau}{n} k\Big).$$

В соотношениях (10), (13) и (16) $Q = 10$, $N = 125$, $p = 2$, $m = 2$, $n = 10$ приняты на основании оценки сходимости по норме Чебышева.

Соотношения (13) и (16) позволяют исследовать пространственно-временное поведение изгибных нестационарных колебаний в неограниченной пластине Кирхгофа. При этом найденная нестационарная функция прогиба (13) и (16) является универсальной по отношению к свойствам материала пластины, который может быть изотропным, трансверсально-изотропным, ортотропным или анизотропным.

3. Примеры расчетов. Оценим характер поведения изгибных нестационарных колебаний в неограниченной пластине для нескольких вариантов симметрии упругой среды: изотропной, ортотропной, анизотропной.

Для вычисления необходимых упругих постоянных C^{ijkl}, входящих в функции (13) и (16) через технические константы, воспользуемся связью матрицы упругих постоянных C с матрицей податливости D:

$$C = D^{-1} \tag{17}$$

где [23]

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{E_1} & \dfrac{-\mu_{21}}{E_2} & \dfrac{-\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & \dfrac{\kappa_{12.1}}{G_{12}} \\ \dfrac{-\mu_{12}}{E_1} & \dfrac{1}{E_2} & \dfrac{-\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & \dfrac{\kappa_{12.2}}{G_{12}} \\ \dfrac{-\mu_{13}}{E_1} & \dfrac{-\mu_{23}}{E_2} & \dfrac{1}{E_3} & 0 & 0 & \dfrac{\kappa_{12.3}}{G_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{23}} & \dfrac{\eta_{31.23}}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\eta_{23.31}}{G_{23}} & \dfrac{1}{G_{31}} & 0 \\ \dfrac{\kappa_{1.12}}{E_1} & \dfrac{\kappa_{2.12}}{E_2} & \dfrac{\kappa_{3.12}}{E_3} & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\frac{\mu_{lk}}{E_l} = \frac{\mu_{kl}}{E_k}, \quad \frac{\kappa_{i.kl}}{E_i} = \frac{\kappa_{kl.i}}{G_{kl}}, \quad \frac{\eta_{ik.lm}}{G_{ik}} = \frac{\eta_{lm.ik}}{G_{lm}}.$$

Здесь E_i — модули упругости первого рода; G_{ik} — модули упругости второго рода; μ_{lk} — коэффициенты Пуассона; $\kappa_{i.kl}$, $\kappa_{kl.i}$ — коэффициенты взаимного влияния; $\eta_{ik.lm}$ — коэффициенты Ченцова.

В качестве примера нестационарного воздействия рассмотрим два типа нагрузок — единичную сосредоточенную нагрузку вида (11) и равномерно распределенную по прямоугольной площадке с соотношением сторон $b/a = 5$ нагрузку вида (14), где $P(\tau) = 2\sin(\tau)e^{-2\tau}$.

На рис. 2 для справки представлены характер изменения нагрузки во времени τ (слева) и ориентация площадки распределенной нагрузки относительно координат x_1 и x_2 соответственно в момент времени $\tau = 0.35$ (справа). Сосредоточенная нагрузка действует в центре координат.

3.1. Изотропная среда. Исследуем нестационарную динамику металлической пластины с модулем Юнга $E = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0.3$. Коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты Ченцова нулевые.

Компоненты тензора упругих постоянных согласно (17) , (18) примут следующие значения (в Па):

$$C_{11} = 2.692 \cdot 10^{11}, \quad C_{12} = 1.154 \cdot 10^{11}, \quad C_{16} = 0,$$
$$C_{22} = 2.692 \cdot 10^{11}, \quad C_{66} = 7.692 \cdot 10^{10}, \quad C_{26} = 0.$$

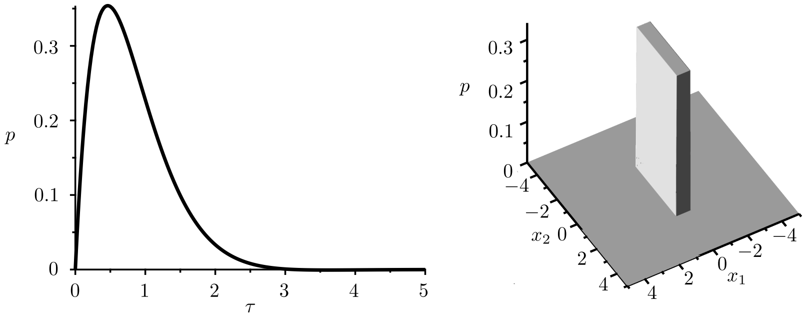


Рис. 2. Характер нагрузки [Figure 2. The nature of the load: the change in load over time τ (left); the orientation of the distributed load relative to the coordinates x_1 and x_2 at the time $\tau = 0.35$ (right)]

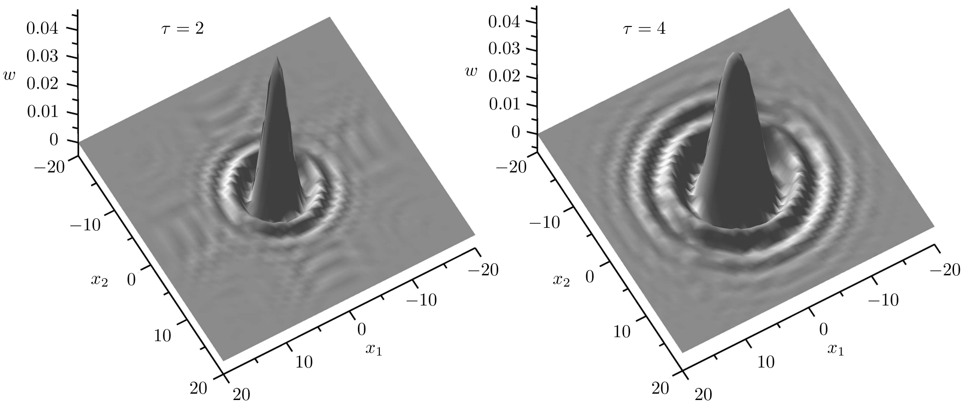


Рис. 3. Пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной пластины при воздействии сосредоточенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 3. Spatial dependences of unsteady deflection of an isotropic plate under the influence of a concentrated load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

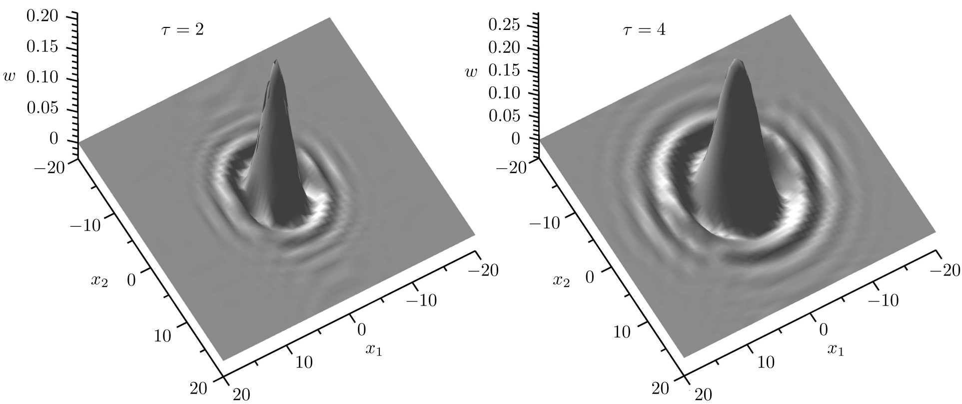


Рис. 4. Пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной пластины при воздействии распределенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 4. Spatial dependences of non-stationary deflection of an isotropic plate under the influence of distributed load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

Соответствующие безразмерные упругие константы в (3) таковы:

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{19}$$

На рис. 3 и 4 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба изотропной пластины при воздействии сосредоточенной и распределенной нагрузки соответственно.

3.2. Ортотропная среда. Исследуем нестационарную динамику полимерной композитной пластины с симметричной относительно срединной плоскости схемой армирования. Приведенные характеристики пакета примем следующими (модули упругости в Па):

$$E_1 = 1.21 \cdot 10^{11}, \quad E_2 = 8.6 \cdot 10^9, \quad E_3 = 8.6 \cdot 10^9,$$
$$G_{12} = 4.7 \cdot 10^9, \quad G_{23} = 3.1 \cdot 10^9, \quad G_{31} = 4.7 \cdot 10^9,$$
$$\mu_{12} = 0.27, \qquad \mu_{23} = 0.4, \qquad \mu_{13} = 0.27.$$

Коэффициенты взаимного влияния и коэффициенты Ченцова нулевые.

Компоненты тензора упругих постоянных согласно (17) , (18) примут следующие значения (в Па):

$$C_{11} = 1.231 \cdot 10^{11}, \quad C_{12} = 3.938 \cdot 10^9, \quad C_{16} = 0,$$
$$C_{22} = 1.036 \cdot 10^{10}, \quad C_{66} = 4.700 \cdot 10^9, \quad C_{26} = 0.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы в (3) таковы:

$$C_1 = 0.084, \quad C_2 = 0.218, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0. \tag{20}$$

На рис. 5 и 6 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба ортотропной пластины при воздействии сосредоточенной и распределенной нагрузки соответственно.

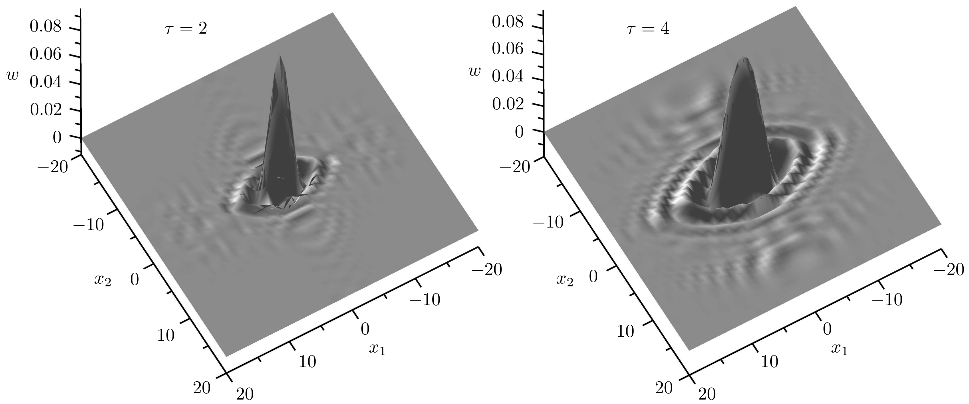


Рис. 5. Пространственные зависимости нестационарного прогиба ортотропной пластины при воздействии сосредоточенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 5. Spatial dependences of unsteady deflection of an orthotropic plate under the influence of a concentrated load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

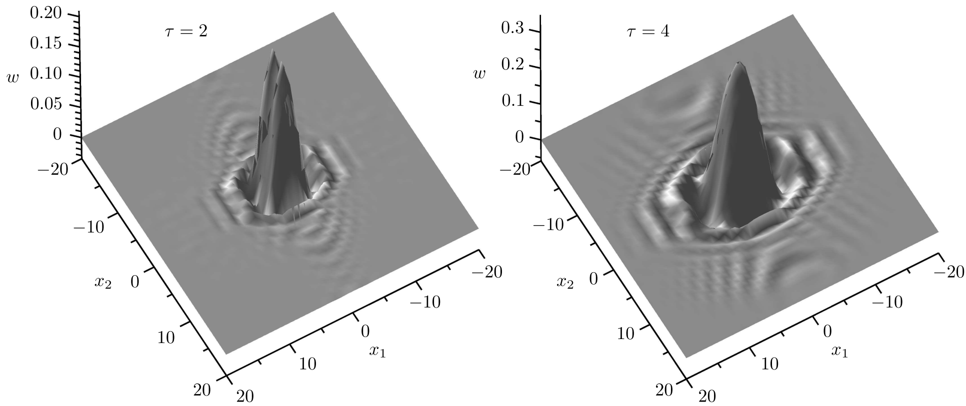


Рис. 6. Пространственные зависимости нестационарного прогиба ортотропной пластины при воздействии распределенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 6. Spatial dependences of unsteady deflection of an orthotropic plate under the influence of distributed load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

3.3. Анизотропная среда. Исследуем нестационарный прогиб анизотропной пластины со следующими значениями упругих констант:

$$C_{11} = 9.699 \cdot 10^{10}, \quad C_{12} = 2.539 \cdot 10^{10}, \quad C_{16} = -2.299 \cdot 10^{10},$$
$$C_{22} = 7.130 \cdot 10^{10}, \quad C_{66} = 3.799 \cdot 10^{10}, \quad C_{26} = -3.660 \cdot 10^{10}.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы в (3) таковы:

$$C_1 = 0.735, \quad C_2 = 2.090, \quad C_3 = -0.948, \quad C_4 = -1.509. \tag{21}$$

На рис. 7 и 8 представлены пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной пластины при воздействии сосредоточенной и распределенной нагрузки соответственно.

На рис. 3, 5 и 7 представлен класс решений (толщина и плотность материала безразмерны) для изотропных, ортотропных и анизотропных пластин при отношениях упругих постоянных согласно (19)–(21) в виде пространственных зависимостей прогиба пластин при воздействии сосредоточенной нагрузки, а на рис. 4, 6 и 8 — распределенной нагрузки в безразмерные моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$ соответственно.

Из рис. 3 видно, что в случае изотропного материала пластины прогиб обладает осевой симметрией. Изгибные колебания в полимерной композитной пластине на рис. 5 согласуются с особенностями ортотропной среды, а именно присутствуют две плоскости симметрии. Решение, полученное для анизотропного материала (см. рис. 7), демонстрирует асимметричную динамику колебаний.

Из результатов, представленных на рис. 4, 6 и 8, видно, что в случае воздействия на пластину распределенной по прямоугольной области нагрузки характер изгибных колебаний соответствует особенностям рассматриваемых вариантов симметрии упругих сред.

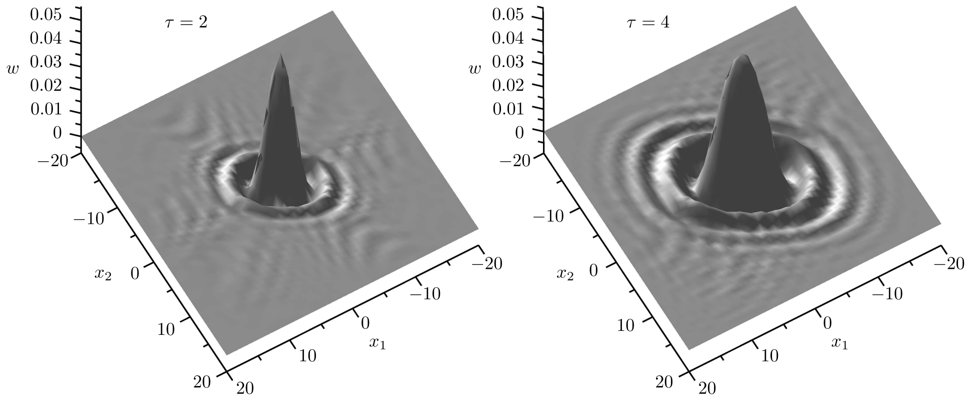


Рис. 7. Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной пластины при воздействии сосредоточенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 7. Spatial dependences of unsteady deflection of an anisotropic plate under the influence of a concentrated load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

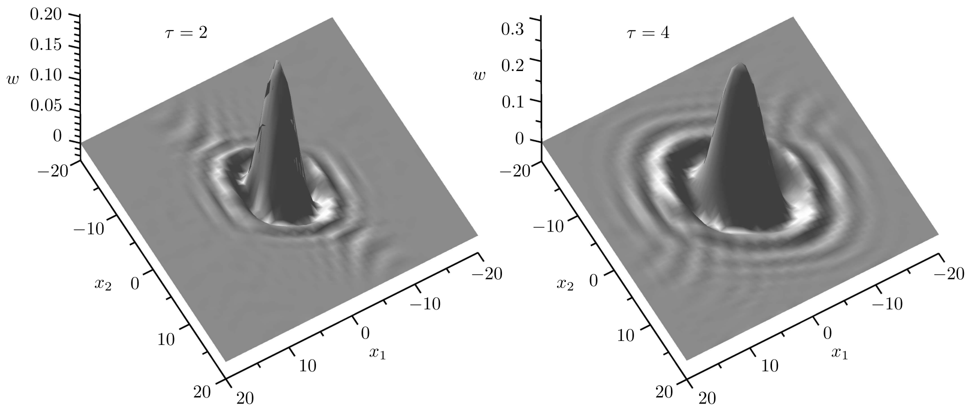


Рис. 8. Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной пластины при воздействии распределенной нагрузки в моменты времени $\tau = 2$ и $\tau = 4$

[Figure 8. Spatial dependences of non-stationary deflection of an anisotropic plate under the influence of distributed load at the times $\tau = 2$ and $\tau = 4$]

Представленные на рис. 3–8 результаты демонстрируют универсальность построенных нестационарных функций прогибов (13) и (16) для анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа в вопросе исследования нестационарной динамики и в частных случаях анизотропии материала пластины.

Реализация алгоритмов для соотношений (10), (13), (16) и построение приведенных изображений выполнено при помощи программного пакета системы компьютерной алгебры `Maple`.

Выводы. В работе представлен подход к построению фундаментального решения (функции Грина) применительно к анизотропной тонкой бесконечной пластине Кирхгофа. Полученное фундаментальное решение позволило выразить искомую функцию нестационарного прогиба в виде тройной свертки функции Грина с функцией нестационарной нагрузки. Найденная функция прогиба позволила исследовать пространственно-временное поведение нестационарных колебаний в неограниченной пластине Кирхгофа с учетом анизотропии материала. В качестве примера рассмотрено воздействие на пластину нестационарной сосредоточенной и распределенной по прямоугольной области нагрузки для нескольких вариантов симметрии упругой среды (анизотропной, ортотропной и изотропной), чем продемонстрирована универсальность построенного решения. Для рассмотренных вариантов симметрии проведено исследование характера нестационарных колебаний, позволившее дать оценку адекватности решения.

Стоит отметить, что найденную функцию Грина возможно применить для исследования вынужденных нестационарных колебаний анизотропных пластин не только для равномерно распределенной по заданной области нагрузки, но и для произвольных случаев распределения нагрузки. Кроме того, и сама область воздействия в общем случае может быть произвольной.

Построенная нестационарная функция прогиба при переходе в размерные величины открывает возможности для выработки инженерных рекомендаций при решении прикладных задач, связанных с исследованием нестационарных перемещений, а также для анализа напряженного состояния при высокоскоростном нелинейном нагружении с учетом всевозможных вариантов анизотропии материала.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.О. Сердюк — анализ литературы, реализация алгоритмов на компьютере, расчеты и визуализация результатов, черновик рукописи. Д.О. Сердюк — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, анализ литературы, теоретический анализ, выполнение расчетов, анализ и верификация расчетов, черновик рукописи. Г.В. Федотенков — идея исследования, поиск методов решения, руководство и консультирование, чистовик рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20–19–00217).

Библиографический список

1. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
2. Моргачев К. С. Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 162–164. https://doi.org/10.14498/vsgtu548.
3. Дьяченко Ю. Г. *Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке*: Автореф. ...дис. канд. физ-мат. наук.. Саратов: Саратов. гос. ун-т, 2008. 19 с.
4. Шевченко В. П., Ветров О. С. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок // *Труды ИПММ НАН Украины*, 2011. Т. 22. С. 207–215.
5. Михайлова Е. Ю., Федотенков Г. В. Нестационарная осесимметричная задача об ударе сферической оболочки по упругому полупространству (начальный этап взаимодействия) // *Изв. РАН. МТТ.*, 2011. № 2. С. 98–108.
6. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2014. № 2. С. 69–76.

7. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // *Изв. РАН. МТТ.*, 2015. №2. С. 118–128.
8. Вестяк А. В., Игумнов Л. А., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим заполнителем // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2016. Т. 9, №4. С. 443–452. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37.
9. Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Yu., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp // *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2016. vol. 111, no. 2. pp. 331–342. https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16.
10. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space / *Shell Structures: Theory and Applications*. vol. 4. London: CRC Press, 2017. pp. 301–304. https://doi.org/10.1201/9781315166605-67.
11. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall / *Shell Structures: Theory and Applications*. vol. 4. London: CRC Press, 2017. pp. 305–308. https://doi.org/10.1201/9781315166605-68.
12. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier / *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*. vol. 5. Cham: Springer, 2019. pp. 385–386. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92.
13. Fedotenkov G. V., Kalinchuk V. V., Mitin A. Y. Three-Dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell // *Lobachevskii J. Math.*, 2019. vol. 40, no. 3. pp. 311–320. https://doi.org/10.1134/S1995080219030107.
14. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междун. симп. им. А. Г. Горшкова.* Т. 2. М., 2020. С. 90–91.
15. Okonechnikov A. S., Tarlakovski D. V., Ul'yashina A. N., Fedotenkov G. V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012073. https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073.
16. Okonechnikov A. S., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force // *Lobachevskii J. Math.*, 2019. vol. 40, no. 4. pp. 489–498. https://doi.org/10.1134/S1995080219040115.
17. Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. *Упругие пластины и пологие оболочки.* М.: МАИ, 2018. 92 с.
18. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. *Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости.* М.: МАИ-Принт, 2009. 112 с.
19. Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Функция Грина для неограниченной тонкой анизотропной пластины / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междун. симп. им. А. Г. Горшкова.* Т. 2. М., 2020. С. 106–108.
20. Сердюк А. О., Сердюк Д. О., Федотенков Г. В. Функция влияния для пластины с произвольной анизотропией материала / *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVI Междун. симп. им. А. Г. Горшкова.* Т. 2. М., 2020. С. 108–110.
21. Doetsch G. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation.* Berlin: Springer Verlag, 1974. vii+326 pp.
22. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы.* М.: Наука, 1975. 630 с.
23. Ашкенази Е. К. *Анизотропия древесины и древесных материалов.* М.: Лесн. пром., 1978. 224 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111–126
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1793

MSC: 74H45, 74S99, 74K99

Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate

© ***A. O. Serdyuk*[1], *D. O. Serdyuk*[1], *G. V. Fedotenkov*[1,2]**

[1] Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.
[2] Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

This work is devoted to the study of non-stationary vibrations of a thin anisotropic unbounded Kirchhoff plate under the influence of random non-stationary loads.

The approach to the solution is based on the principle of superposition and the method of influence functions (the so-called Green functions), the essence of which is to link the desired solution to the load using an integral operator of the type of convolution over spatial variables and over time. The convolution core is the Green function for the anisotropic plate, which represents normal displacements in response to the impact of a single concentrated load in coordinates and time, mathematically described by the Dirac delta functions. Direct and inverse integral transformations of Laplace and Fourier are used to construct the Green function. The inverse integral Laplace transform is found analytically. The inverse two-dimensional integral Fourier transform is found numerically by integrating rapidly oscillating functions. The obtained fundamental solution allowed us to present the desired non-stationary deflection in the form of a triple convolution in spatial coordinates and time of the Green function with the non-stationary load function. The rectangle method is used to calculate the convolution integral and construct the desired solution.

The found deflection function makes it possible to study the space-time propagation of non-stationary waves in an unbounded Kirchhoff plate for

Research Article

Please cite this article in press as:
Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. Unsteady bending function for an unlimited anisotropic plate, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 111–126. https://doi.org/10.14498/vsgtu1793 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander O. Serdyuk https://orcid.org/0000-0002-2109-7900
Postgraduate Student; Dep. of Materials Resistance, Dynamics and Machine Strength; e-mail: serduksaha@yandex.ru

Dmitry O. Serdyuk https://orcid.org/0000-0003-0082-1856
PhD, Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dep. of Materials Resistance, Dynamics and Machine Strength; e-mail: d.serduk55@gmail.com

Grigory V. Fedotenkov https://orcid.org/0000-0002-9556-7442
PhD, Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dep. of Materials Resistance, Dynamics and Machine Strength[1]; Senior Researcher; Lab. of Dynamic Tests[2]; e-mail: greghome@mail.ru

various versions of the symmetry of the elastic medium: anisotropic, orthotropic, transversally isotropic, and isotropic. Examples of calculations are presented.

Keywords: non-stationary dynamics, anisotropic material, Green function, non-stationary deflection, Kirchhoff plate, integral transforms, quadrature formulas, rectangle method, rapidly oscillating functions.

Received: 28th June, 2020 / Revised: 3rd February, 2021 /
Accepted: 8th February, 2021 / First online: 12th February, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. A.O. Serdyuk: Literature review; Implementation of the computer algorithms; Performing calculations and visualizing results; Writing — original draft. D.O. Serdyuk: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Literature review; Theoretical analysis; Performing calculations, their analysis and verification; Writing — original draft. G.V. Fedotenkov: Idea of study; Search for methods of solution; Supervision and consulting; Writing — review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project 20–19–00217).

References

1. Gorshkov A. G., Medvedskii A. L., Rabinskii L. N., Tarlakovskii D. V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 472 pp. (In Russian)
2. Morgachev K. S. Non-stationary dynamics of Timoshenko circular plate of variable thickness, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2007, no. 2(15), pp. 162–164 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu548`.
3. Dyachenko Yu. G. *The unsteady problem of variable section plate dynamics in a refined formulation*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Saratov, Saratov State Univ., 2008, 19 pp. (In Russian)
4. Shevchenko V. P., Vetrov S. O. The dynamics of an orthotropic plate under the action of local suddenly applied loads, *Trudy Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, 2011, vol. 22, pp. 207–215 (In Russian).
5. Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction), *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239–247. `https://doi.org/10.3103/S0025654411020129`.
6. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. `https://doi.org/10.3103/S1052618814010178`.
7. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell, *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208–217. `https://doi.org/10.3103/S0025654415020107`.
8. Vestyak A. V., Igumnov L. A., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The influence of non-stationary pressure on a thin spherical shell with an elastic filler, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 443–452 (In Russian). `https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37`.
9. Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Yu., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the

perfectly rigid stamp, *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2016, vol. 111, no. 2, pp. 331–342. https://doi.org/10.12732/ijpam.v111i2.16.

10. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space, In: *Shell Structures: Theory and Applications*, vol. 4. London, CRC Press, 2017, pp. 301–304. https://doi.org/10.1201/9781315166605-67.
11. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall, In: *Shell Structures: Theory and Applications*, vol. 4. London, CRC Press, 2017, pp. 305–308. https://doi.org/10.1201/9781315166605-68.
12. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier, In: *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, vol. 5. Cham, Springer, 2019, pp. 385–386. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92.
13. Fedotenkov G. V., Kalinchuk V. V., Mitin A. Y. Three-Dimensional non-stationary motion of Timoshenko-type circular cylindrical shell, *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 3, pp. 311–320. https://doi.org/10.1134/S1995080219030107.
14. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. Unsteady dynamics of thin anisotropic elastic cylindrical shells, In: *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media*, vol. 2. Moscow, 2020, pp. 90–91 (In Russian).
15. Okonechnikov A. S., Tarlakovski D. V., Ul'yashina A. N., Fedotenkov G. V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012073. https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073.
16. Okonechnikov A. S., Tarlakovsky D. V., Fedotenkov G. V. Transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force, *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 489–498. https://doi.org/10.1134/S1995080219040115.
17. Mikhailova E. Yu., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. *Uprugie plastiny i pologie obolochki* [Elastic Plates and Shallow Shells]. Moscow, Moscow Aviation Inst., 2018, 92 pp. (In Russian)
18. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. *Obshchie sootnosheniia i variatsionnye printsipy matematicheskoi teorii uprugosti* [General Relations and Variational Principles of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, MAI-Print, 2009, 112 pp. (In Russian)
19. Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. Green's function for an unbounded thin anisotropic plate, In: *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media*, vol. 2. Moscow, 2020, pp. 106–108 (In Russian).
20. Serdyuk A. O., Serdyuk D. O., Fedotenkov G. V. Influence function for a plate with arbitrary material anisotropy, In: *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media*, vol. 2. Moscow, 2020, pp. 108–110 (In Russian).
21. Doetsch G. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation.* Berlin, Springer Verlag, 1974, vii+326 pp.
22. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1975, 630 pp. (In Russian)
23. Ashkenazi E. K. *Anizotropiia drevesiny i drevesnykh materialov* [Anisotropy of Wood and Wood Materials]. Moscow, Lesn. Prom., 1978, 224 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 127–162
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1849

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:532.595.2

Математическое моделирование и помехоустойчивая оценка параметров импульса ударной волны на основе результатов эксперимента при подводных взрывах

© *В. Е. Зотеев, С. Ю. Ганигин, Д. А. Деморецкий, М. В. Ненашев, А. В. Губинский*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассматривается построение на основе натурных экспериментов и численно-аналитических исследований математической модели импульса подводной ударной волны, наблюдаемого на выходе датчика давления. Представлены разработка и сравнительный анализ различных численных методов нелинейного оценивания параметров этой модели. Предлагается численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натурных испытаниях как на бесконечном промежутке времени, так и при заданной длительности импульса. Приведены результаты апробации разработанных численных методов математического моделирования импульса подводной ударной волны при обработке результатов эксперимента при взрыве эталонного заряда взрывчатого вещества. Достоверность и эффективность представленных в работе алгоритмов вычислений и методов нелинейного оценивания подтверждаются результатами численно-аналитических исследований и построенными на основе экспериментальных данных математическими моделями импульсов избыточного давления ударной волны.

Ключевые слова: импульс подводной ударной волны, математическая модель, нелинейный регрессионный анализ, система разностных уравнений, обобщенная регрессионная модель, среднеквадратическое оценивание, статистическая обработка результатов эксперимента.

Научная статья

Образец для цитирования

Зотеев В. Е., Ганигин С. Ю., Деморецкий Д. А., Ненашев М. В., Губинский А. В. Математическое моделирование и помехоустойчивая оценка параметров импульса ударной волны на основе результатов эксперимента при подводных взрывах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 127–162. https://doi.org/10.14498/vsgtu1849.

Сведения об авторах

Владимир Евгеньевич Зотеев https://orcid.org/0000-0001-7114-4894
доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Получение: 12 февраля 2021 г. / Исправление: 6 марта 2021 г. /
Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 29 марта 2021 г.

Введение. При проведении подводных испытаний боеприпасов и зарядов взрывчатых веществ основной задачей является получение таких величин, как максимальное избыточное давление ударной волны и энергия импульса фазы сжатия. Эти параметры являются основными поражающими факторами взрыва [1–3]. Кроме того, на их основе определяют тротиловый эквивалент взрыва и работоспособность изделия. Как правило, ударную волну представляют в виде разрывного скачка давления, за которым следует экспоненциальное затухание в течение некоторого промежутка времени [4–8]. Предсказание поведения давления на ниспадающей части экспериментальной кривой дают теоретические положения [4, 9]. Отрезок кривой давления (до 30 % от максимального значения) описывается экспонентой, а оставшаяся часть кривой давления — по степенному закону $t^{-4/5}$. Таким образом, аппроксимация описывается суммой двух функций на двух различных временных интервалах. В большинстве практических случаев используют более грубое приближение, соответствующее экспоненциальному закону

$$P(t) = P_{\max} \exp(-t/\theta), \tag{1}$$

где $P_{\max}$ — начальное пиковое давление, θ — постоянная времени экспоненциального затухания.

В этих же работах [4, 9] указывается на то, что повышение точности описания экспериментальной кривой давления нецелесообразно и сопряжено со значительными затратами при постановке экспериментов. Однако, с другой стороны, в [4] отмечается существенное отклонение формы подводной ударной волны от экспоненциальной модели. Эти отклонения определяются формой заряда, типом взрывчатого вещества, гидродинамическими процессами отражения волн давления от границ раздела, движущихся в газообразных продуктах детонации.

При оценке эффективности новых перспективных взрывчатых веществ и конструкций боевых частей при подводном взрыве применение математической модели (1) может привести к значительным ошибкам в оценках параметров ударной волны. В частности, можно отметить результаты, приводимые в работах, посвященных исследованию подводного взрыва металлизированных взрывчатых веществ [5, 10–13]. В этих работах указано на существенное

Сергей Юрьевич Ганигин https://orcid.org/0000-0001-5778-6516
доктор технических наук; декан инженерно-технологического факультета, профессор; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Дмитрий Анатольевич Деморецкий https://orcid.org/0000-0002-4523-1465
доктор технических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: dda74@inbox.ru

Максим Владимирович Ненашев https://orcid.org/0000-0003-3918-5340
доктор физико-математически наук, профессор; первый проректор – проректор по научной работе; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Алексей Владимирович Губинский https://orcid.org/0000-0002-9732-2596
аспирант; каф. технологии твердых химических веществ; e-mail: gubinskiy.av@samgtu.ru

изменение формы кривой давления на спаде вследствие догорания металлических компонентов взрывчатых веществ или заряда.

При проведении акваторных испытаний полезный сигнал давления испытывает сильные аддитивные и мультипликативные возмущения, возникающие при действии импульса давления на элементы измерительной системы — разъемы и кабели, длина которых составляет десятки и сотни метров. При этом проявляется колебательный характер измерительной системы, собственные колебания которой имеют значительную амплитуду.

Кроме того, давление, действующее на элементы измерительной системы, приводит к помехам замирания сигнала и его исчезновению (выпадают участки полезного сигнала, несущего информацию) или появлению резких скачков сигнала. Использование известных методов фильтрации приводит к искажению сигнала и потере информации. Кроме того, большой объем измерительной информации приводит к необходимости автоматизации обработки результатов наблюдений в ходе эксперимента или натурных испытаний. При этом одной из важнейших задач является выделение полезного сигнала подводной ударной волны на фоне помех.

Таким образом, решение проблемы построения адекватной математической модели, описывающей форму подводной ударной волны, и помехоустойчивая оценка её параметров является актуальной задачей. Эта задача может быть решена только на основе методов статистической обработки результатов эксперимента, методов нелинейной регрессии с использованием современных средств вычислений и обработки информации.

1. Организация и техническое обеспечение натурных экспериментов. Исследования на основе натурных экспериментов проводились с применением современного оборудования и широко используемых в настоящее время методик [5, 13, 14]. Статистическому анализу подвергались большие массивы экспериментальных данных, полученных при проведении взрывов малых зарядов взрывчатых веществ (до 2 кг) в искусственном бассейне и больших зарядов (до 300 кг) в открытом водоеме с выполнением условий подводного взрыва, при которых расстояния от заряда до поверхности, дна и берегов водоема настолько велики, что отраженная волна появляется через промежуток времени не менее 6θ. При проведении экспериментальных исследований использовались датчики подводной ударной волны PCB Piezotronic 138A05 [10, 15]. Схема проведения натурных испытаний по измерению избыточного давления импульса подводной ударной волны приведена на рис. 1.

Эксперименты проводились как со сферическими, так и с цилиндрическими зарядами металлизированных и индивидуальных взрывчатых веществ. При обработке экспериментальных данных тротиловый эквивалент определялся на основании измеренных давлений подводной ударной волны и вычисления энергии импульса в предположении, что спад давления подчиняется экспоненциальному закону. Однако использование современных металлизированных взрывчатых веществ приводит к дополнительному искажению формы сигнала за счет растягивания фронта при догорании компонентов взрывчатого вещества [10, 17]. В связи с этим необходимы поиск наилучшей формы математической модели, аппроксимирующей результаты эксперимента, и помехоустойчивая оценка ее параметров.

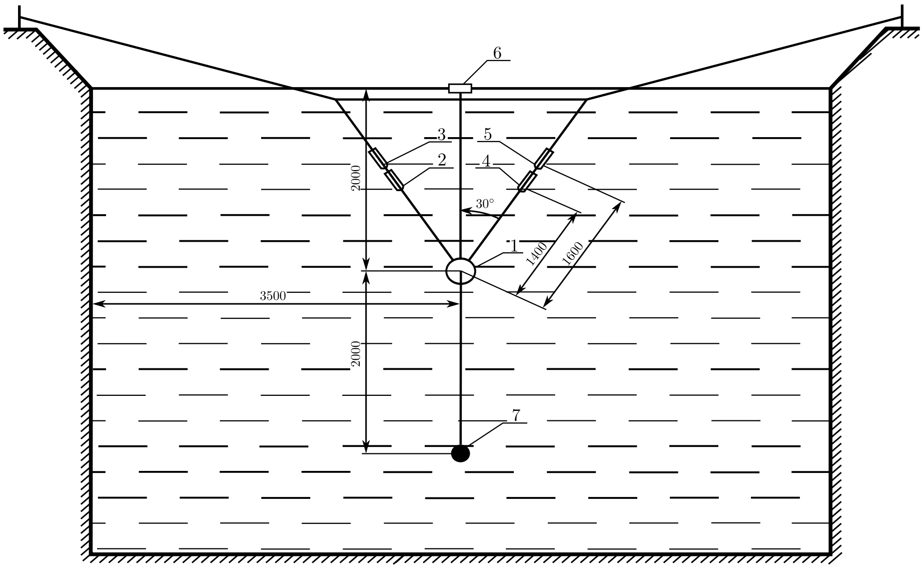


Рис. 1. Схема проведения исследований по измерению избыточного давления импульса подводной ударной волны: 1 — заряд взрывчатого вещества; 2–5 — датчики давления; 6 — поплавок; 7 — груз

[Figure 1. Research design on measuring the overpressure of an underwater shockwave pulse: 1 — the explosive charge; 2–5 — the pressure sensors; 6 — the float; 7 — the weight]

2. Постановка задачи исследования и методы ее решения. Основной задачей научных исследований, результаты которых представлены в данной работе, является построение на основе натурных экспериментов и численно-аналитических исследований математической модели импульса подводной ударной волны, наблюдаемого на выходе датчика давления, а также разработка и сравнительный анализ различных численных методов оценки параметров этой модели. Кроме того, в данной работе рассматриваются задачи, связанные с построением и параметрической идентификацией математической модели датчика давления — важнейшего элемента системы формирования результатов натурного эксперимента — в форме линейного дифференциального оператора второго порядка. Предлагается численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натурных испытаниях. При решении поставленных задач используются как известные статистические методы обработки результатов эксперимента [19] и линейной и нелинейной регрессии [20–25], так и новые методы параметрической идентификации нелинейных систем на основе разностных уравнений [26–28].

3. Анализ результатов эксперимента в виде осциллограмм избыточного давления и выбор на его основе формы математической модели. Ударная волна при подводных взрывах представляет собой разрывной скачок давления $P(t)$ с последующим монотонным спадом на длительном промежутке времени. Анализ форм осциллограмм избыточного давления, полученных при натурных испытаниях (рис. 2, 3), позволяет сделать вывод о некоторых свойствах непрерывной функции $y(t)$, лежащей в основе

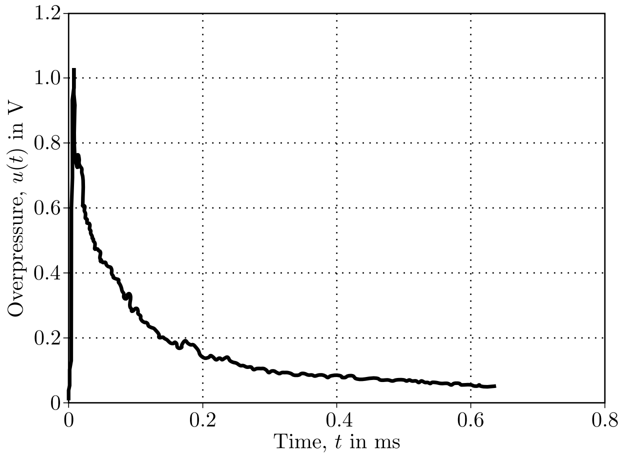


Рис. 2. Осциллограмма избыточного давления, полученная при натурных испытаниях малых зарядов взрывчатых веществ (500 грамм пластита)

[Figure 2. The overpressure trace curve from field tests of small explosive charges (500 grams of plastic explosives)]

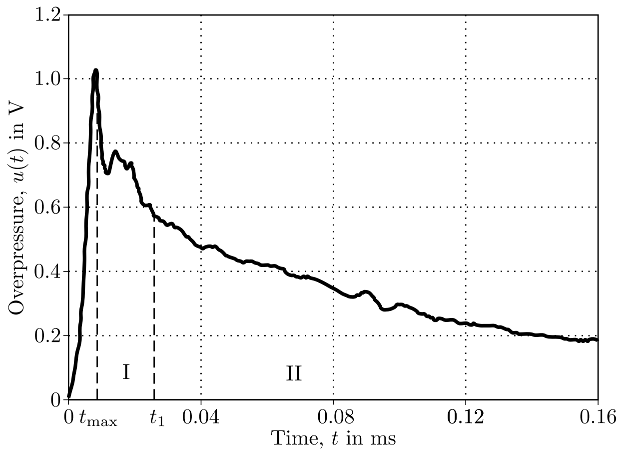


Рис. 3. Выделение области влияния инерционности датчика давления на выходной сигнал

[Figure 3. Highlighting an area of the influence of the inertia of the pressure sensor to the output signal]

математической модели подводной ударной волны:

$$y(0) = y_{\max}, \quad \frac{dy}{dt} < 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} > 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

В качестве такой функции с учетом некоторых допущений были рассмотрены различные зависимости:

$$y(t) = Ae^{-\alpha t}, \quad y(t) = A(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}), \quad y(t) = At^n e^{-\alpha t},$$

$$y(t) = \frac{c_0 + c_1 t}{1 + c_2 t}, \quad y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}$$

и некоторые другие.

Проведенные на основе компьютерного моделирования численно-аналитические исследования для различных математических моделей, описывающих монотонный спад давления на промежутке времени, в котором отсутствует влияние инерционности датчика давления на выходной сигнал, показали, что наиболее адекватной результатам эксперимента является дробно-рациональная трехпараметрическая нелинейная зависимость вида

$$y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}.$$

Очевидно, что для того, чтобы эта функция удовлетворяла указанным выше свойствам, достаточно выполнения условий

$$c_1 > 0, \quad 0 < c_2 < c_1^2/4.$$

При анализе начальных участков осциллограмм избыточного давления $P(t)$ можно выделить две основные области (рис. 3): область I — промежуток времени $t \in [0, t_1]$, в котором проявляется инерционность датчика давления, и область II — промежуток времени $t \in [t_1, \infty)$, в котором отсутствует влияние инерционности датчика давления на выходной сигнал. Сравнение формы сигналов на входе $P(t)$ и выходе $u(t)$ датчика давления позволяет сделать вывод о заметном влиянии инерционности датчика в области I на выходной сигнал.

Такой подход к построению математической модели динамического процесса, наблюдаемого на выходе датчика давления — в виде суммы двух аддитивных составляющих, одна из которых $z(t)$ описывает реакцию датчика на скачок давления, а другая $y(t)$ аппроксимирует медленный спад избыточного давления, — позволяет предложить модель датчика давления в виде линейного дифференциального оператора второго порядка

$$Lu = m(t)u''(t) + b(t)u'(t) + u(t) \tag{2}$$

с переменными (в общем случае) коэффициентами $m(t)$ и $b(t)$.

На рис. 4 представлена блок-схема математической модели датчика давления, в которой $P(t)$ — избыточное давление на входе датчика (в атм.); $u(t)$ — наблюдаемый на выходе датчика давления сигнал (в вольтах); k_d — коэффициент преобразования давления в выходной сигнал датчика давления.

Линейный характер дифференциального оператора второго порядка (2) позволяет представить сигнал с выхода датчика давления в виде суммы

$$u(t) = z(t) + y(t),$$

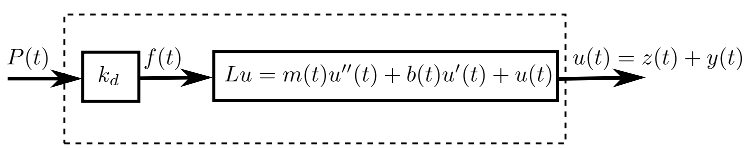


Рис. 4. Блок-схема математической модели датчика давления
[Fig. 4. The block diagram of the mathematical model of the pressure sensor]

где функция $z(t)$ аппроксимирует реакцию датчика на разрывной скачок давления в начальный момент времени и является решением однородного дифференциального уравнения $Lu = 0$; функция $y(t)$ описывает медленный спад избыточного давления $P(t)$ в импульсе ударной волны, наблюдаемом на выходе датчика.

Выбор вида модели $z(t)$ осуществляется на основе анализа осциллограмм избыточного давления, полученных в ходе эксперимента. По результатам анализа многочисленных осциллограмм избыточного давления, вид которых оказался идентичным кривым, представленным на рис. 2 и 3, можно отметить, что реакция датчика на скачок давления представляет собой быстро затухающие колебания, период которых нестационарен (область I на рис. 3). При этом был сделан вывод о целесообразности использования в качестве аппроксимации $z(t)$ реакции датчика на разрывной скачок давления модели вида

$$z(t) = e^{-\alpha t}[A_0 \cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + B_0 \sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)], \tag{3}$$

где с учетом быстрого затухания амплитуды колебаний параметр $\alpha > 0$ имеет достаточно большую величину; параметры β_1 и β_2 характеризуют изменение частоты свободных колебаний датчика давления; A_0 и B_0 — некоторые произвольные постоянные.

С учетом выбранной формы математической модели (3) были получены соотношения, связывающие коэффициенты $m(t)$ и $b(t)$ в линейном дифференциальном операторе второго порядка (2) с динамическими характеристиками α, β_1 и β_2 затухающих свободных колебаний (3):

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{\beta_1 + 2\beta_2 t}{\alpha^2(\beta_1 + 2\beta_2 t) - 2\alpha\beta_2 + (\beta_1 + 2\beta_2 t)^3}, \\ b(t) &= \frac{2\alpha(\beta_1 + 2\beta_2 t) - 2\beta_2}{\alpha^2(\beta_1 + 2\beta_2 t) - 2\alpha\beta_2 + (\beta_1 + 2\beta_2 t)^3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, что при больших значениях времени t функции $m(t)$ и $b(t)$ стремятся к нулю, а математическая модель датчика давления для области II (монотонного спада давления) сводится к коэффициенту k_d. Можно также отметить, что при значениях параметра β_2, близких к нулю, когда реакция на выходе датчика представляет собой затухающие гармонические колебания с постоянной частотой β_1, математическая модель (2) вырождается в известный линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами $m = (\alpha^2 + \beta_1^2)^{-1}$ и $b = 2\alpha(\alpha^2 + \beta_1^2)^{-1}$ [18].

Таким образом, общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$m(t)u''(t) + b(t)u'(t) + u(t) = f(t),$$

описывающее математическую модель сигнала на выходе датчика давления, можно представить в виде

$$u(t) = e^{-\alpha t}[A_0 \cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + B_0 \sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)] + \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}.$$

В качестве начальных условий для этой аппроксимирующей функции принимаем значения, соответствующие результатам эксперимента:

$$u(0) = u_0 \quad \text{и} u'(0) = u'_0.$$

Здесь величина u'_0 может быть найдена по одной из известных формул численного дифференцирования, например,

$$u'_0 = \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\tau},$$

где u_0, u_1, u_2 — результаты эксперимента. При таких начальных условиях имеем

$$A_0 = u_0 - c_0 \quad \text{и} \quad B_0 = \frac{(u_0 - c_0)\alpha + c_0 c_1 + u'_0}{\beta_1}.$$

Введем обозначения

$$a_0 = c_0 - u_0, \quad b_0 = \frac{c_0 c_1 + u'_0}{c_0 - u_0}. \tag{5}$$

Тогда математическая модель сигнала с датчика давления с учетом начальных условий принимает вид

$$u(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2} - a_0 e^{-\alpha t}\left[\cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + \frac{\alpha - b_0}{\beta_1}\sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)\right]. \tag{6}$$

Функция

$$z(t) = -a_0 e^{-\alpha t}\left[\cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + \frac{\alpha - b_0}{\beta_1}\sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)\right]$$

представляет собой решение однородного дифференциального уравнения

$$m(t)z''(t) + b(t)z'(t) + z(t) = 0$$

с переменными коэффициентами (4). С учетом этого дифференциальное уравнение

$$m(t)u''(t) + b(t)u'(t) + u(t) = f(t),$$

где $u(t) = z(t) + y(t)$, принимает вид

$$m(t)y''(t) + b(t)y'(t) + y(t) = f(t).$$

Таким образом, восстановить математическую модель импульса взрывной волны $f(t)$ можно по формуле

$$f(t) = y(t) + b(t)y'(t) + m(t)y''(t). \tag{7}$$

С учетом выбранной формы аппроксимации

$$y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}$$

формула (7) принимает вид

$$f(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}\left[1 - b(t)\frac{2c_2 t + c_1}{1 + c_1 t + c_2 t^2} + 2m(t)\frac{(c_1^2 - c_2) + 3c_1 c_2 t + 3c_2^2 t^2}{(1 + c_1 t + c_2 t^2)^2}\right].$$

При малых значениях функций $m(t)$ и $b(t)$ на участке II (см. рис. 3) монотонного спада давления можно положить

$$f(t) \approx y(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2}.$$

4. Разработка и сравнительный анализ численных методов оценки параметров математической модели, аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне. При оценке параметров математической модели, аппроксимирующей спад избыточного давления, следует использовать только те результаты наблюдений u_k, для которых аддитивной составляющей

$$z(t) = -a_0 e^{-\alpha t}\left[\cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + \frac{\alpha - b_0}{\beta_1}\sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)\right]$$

можно пренебречь: $z(t) \approx 0$.

Анализ многочисленных осциллограмм избыточного давления, полученных в ходе натурных испытаний, показал, что колебания на начальном участке практически полностью затухают за промежуток времени $[0, t_1]$, равный $3t_{\max}$, где $t_{\max}$ — момент времени, соответствующий максимальному значению в выборке результатов наблюдения (рис. 3).

Отсюда следует, что N_1 — номер отсчета, начиная с которого аддитивной составляющей $z(t)$ можно пренебречь: $z_k \approx 0$, — может быть найден по формуле

$$N_1 = \frac{3t_{\max}}{\tau} + 1 = 3k_{\max} + 1, \tag{8}$$

где $k_{\max}$ — номер отсчета, соответствующий максимуму импульса ударной волны.

Однако численно-аналитические исследования на основе компьютерного моделирования показали, что игнорирование отброшенных на основании формулы (8) результатов наблюдений: $u_0, u_1, \ldots, u_{N_1-1}$, существенно влияет на точность математического моделирования спада избыточного давления. Экспериментально было установлено, что наиболее эффективной является трехшаговая процедура построения модели, аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

На первом шаге эта модель — $\hat{y}_1(t)$ — строится по выборке результатов наблюдений u_k, $k = \overline{N_1, N-1}$, N — объем выборки результатов эксперимента. На втором шаге формируется выборка результатов вычислений $z_k = u_k - \hat{y}_{1k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, на основе которой строится математическая модель $\hat{z}(t)$, аппроксимирующая свободные колебания датчика давления. На третьем, заключительном шаге находятся уточненные среднеквадратичные оценки параметров модели (6), описывающей сигнал на выходе датчика давления, в том числе и параметры модели $\hat{y}(t)$, аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

В основе параметрической идентификации математической модели

$$\hat{y}(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2} \tag{9}$$

лежит минимизация остаточной суммы квадратов Q_{res} на множестве коэффициентов дробно-рациональной (гиперболической) функции (9):

$$Q_{\text{res}} = \|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 \to \min,$$

где y_k — данные, полученные в ходе эксперимента; $\hat{y}_k$ — результаты вычислений на основе построенной модели, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ [19]. Эта задача может быть решена известными методами нелинейной регрессии [20–23]. Основными проблемами при этом являются выбор начального приближения вектора оценок параметров модели (9), а также сходимость итерационных процедур, используемых в методах нелинейного оценивания.

Рассмотрим *три алгоритма* среднеквадратичного оценивания параметров нелинейной модели (9), в основе которых лежат линейные регрессионные модели, коэффициенты которых известным образом связаны с параметрами нелинейной модели (9). Такой подход позволяет свести задачу нелинейного оценивания к задаче линейного прикладного регрессионного анализа [24, 25], решение которой сводится к простому решению системы линейных алгебраических уравнений.

Первый алгоритм. Рассмотрим *первый алгоритм* среднеквадратичной оценки параметров нелинейной математической модели (9). Характерной чертой этого алгоритма является линеаризация регрессионной модели, построенной на основе нелинейной функциональной зависимости (9). Этот подход позволил избежать применения итерационных процедур уточнения оценок коэффициентов регрессионной модели, тем самым существенно упростив алгоритм вычислений.

На основе непрерывной зависимости (9) можно получить модель в форме дискретной функции вида

$$\hat{y}_k = \frac{c_0}{1 + c_1 \tau k + c_2 \tau^2 k^2}, \tag{10}$$

где τ — период дискретизации; $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$; N — объем выборки результатов эксперимента.

Результаты наблюдений y_k, используемые при решении задачи параметрической идентификации, отличаются от результатов вычислений $\hat{y}_k$ по формуле (10) на случайную величину ε_k разброса данных эксперимента относительно построенной модели: $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Отсюда следует, что

$$y_k = \hat{y}_k \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{\hat{y}_k}\right) = \hat{y}_k \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k - \varepsilon_k}\right) = \hat{y}_k \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{y_k}\right)^{-1}.$$

При малых значениях случайной величины ε_k имеем $|\varepsilon_k/y_k| \ll 1$:

$$\Big(1 - \frac{\varepsilon_k}{y_k}\Big)^{-1} = 1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k} + \frac{\varepsilon_k^2}{y_k^2} + \frac{\varepsilon_k^3}{y_k^3} + \ldots \approx 1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k}. \tag{11}$$

Отсюда с точностью до $O(\varepsilon_k^2)$ имеем равенство

$$y_k = \hat{y}_k\Big(1 + \frac{\varepsilon_k}{y_k}\Big) \quad \text{или} \quad \frac{y_k^2}{\hat{y}_k} = y_k + \varepsilon_k$$

и из формулы (10) получаем

$$\Big(\frac{1}{c_0} + \frac{c_1}{c_0}\tau k + \frac{c_2}{c_0}\tau^2 k^2\Big) y_k^2 = y_k + \varepsilon_k,$$

или

$$y_k = \lambda_1 y_k^2 + \lambda_2 k y_k^2 + \lambda_3 k^2 y_k^2 - \varepsilon_k, \tag{12}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{c_0}, \quad \lambda_2 = \frac{c_1\tau}{c_0} = c_1\tau\lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{c_2\tau^2}{c_0} = c_2\tau^2\lambda_1. \tag{13}$$

Среднеквадратичные оценки линейной регрессионной модели (12) $\hat{\lambda}_1$, $\hat{\lambda}_2$ и $\hat{\lambda}_3$ находятся из условия минимизации

$$\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \lambda_1 y_k^2 - \lambda_2 k y_k^2 - \lambda_3 k^2 y_k^2)^2 \to \min$$

на основе решения нормальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \sum\limits_{k=0}^{N-1} y_k^4 + \lambda_2 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k y_k^4 + \lambda_3 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^4 = \sum\limits_{k=0}^{N-1} y_k^3; \\ \lambda_1 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k y_k^4 + \lambda_2 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^4 + \lambda_3 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^3 y_k^4 = \sum\limits_{k=0}^{N-1} k y_k^3; \\ \lambda_1 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^4 + \lambda_2 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^3 y_k^4 + \lambda_3 \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^4 y_k^4 = \sum\limits_{k=0}^{N-1} k^2 y_k^3. \end{cases} \tag{14}$$

С учетом среднеквадратичных оценок коэффициентов модели (12) и соотношений (13) оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления, могут быть найдены по формулам

$$\hat{c}_0 = \frac{1}{\hat{\lambda}_1}, \quad \hat{c}_1 = \frac{\hat{\lambda}_2}{\tau\hat{\lambda}_1}, \quad \hat{c}_2 = \frac{\hat{\lambda}_3}{\tau^2\hat{\lambda}_1}. \tag{15}$$

Основным достоинством данного алгоритма среднеквадратичного оценивания параметров модели (9) является его простота — вычисление оценок сводится к решению системы линейных уравнений (14) — и отсутствие в алгоритме итерационных процедур уточнения среднеквадратичных оценок параметров. Однако применение аппроксимации (11) при построении линейной регрессионной модели (12), лежащей в основе вычисления оценок параметров нелинейной зависимости (20), не позволяет достигнуть точного минимума остаточной суммы квадратов

$$Q_{\text{res}} = \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2.$$

Проведенные на основе компьютерного моделирования численно-аналитические исследования показали, что при малых значениях величины случайной помехи ε_k в данных эксперимента y_k (до 3 %) относительное отклонение остаточной суммы квадратов Q_{res} от ее минимально возможного значения $\min Q_{\text{res}}$ не превышает 5 %. Однако при случайной помехе величиной 10 % относительное отклонение от $\min Q_{\text{res}}$ составляет порядка 20 %.

Второй алгоритм. Во *втором алгоритме* среднеквадратичного оценивания параметров модели (9) математическая модель, описывающая результаты эксперимента

$$y_k = \frac{c_0}{1 + c_1\tau k + c_2\tau^2 k^2} + \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

приводится к виду

$$y_k + c_1\tau k y_k + c_2\tau^2 k^2 y_k = c_0 + (1 + c_1\tau k + c_2\tau^2 k^2)\varepsilon_k,$$

или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} y_k = \lambda_1 + \lambda_2 k y_k + \lambda_3 k^2 y_k + \eta_{k+1}; \\ \eta_{k+1} = (1 - \lambda_2 k - \lambda_3 k^2)\varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\lambda_1 = c_0, \quad \lambda_2 = -c_1\tau, \quad \lambda_3 = -c_2\tau^2. \tag{17}$$

В матричной форме уравнения (16) можно представить в виде

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \tag{18}$$

где $b = (y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1})^\top$ — вектор результатов эксперимента; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов, известным образом — по формулам (17) — связанный с параметрами модели (18);

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y_1 & y_1 \\ 1 & 2y_2 & 4y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (N-1)y_{N-1} & (N-1)^2 y_{N-1} \end{bmatrix}$$ — матрица размера $[N\times 3]$;

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_N)^\top$ — вектор эквивалентного случайного возмущения (невязка); P_λ — диагональная матрица линейного преобразования вектора случайной помехи в результатах эксперимента:

$$P_\lambda = \operatorname{diag}[1,\ 1 - \lambda_2 - \lambda_3,\ 1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3,\ \ldots,\ 1 - (N-1)\lambda_2 - (N-1)^2\lambda_3]; \tag{19}$$

$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{N-1})^\top$ — вектор случайной помехи в результатах эксперимента.

При условии $\det P_\lambda \neq 0$ из (18) получаем регрессионную модель в форме

$$P_\lambda^{-1} b = P_\lambda^{-1} F\lambda + \varepsilon, \tag{20}$$

где P_λ^{-1} — диагональная матрица вида

$$P_\lambda^{-1} = \operatorname{diag}\Big[1,\ \frac{1}{1-\lambda_2-\lambda_3},\ \frac{1}{1-2\lambda_2-4\lambda_3},\ \ldots,\ \frac{1}{1-(N-1)\lambda_2-(N-1)^2\lambda_3}\Big].$$

Очевидно, что регрессионная модель (20) нелинейна по параметрам λ_2 и λ_3, и среднеквадратичная оценка ее параметров относится к задаче нелинейной регрессии [20–23]. Однако если в диагональной матрице P_λ^{-1} использовать некоторые известные оценки $\hat\lambda_2^{(i)}$ и $\hat\lambda_3^{(i)}$, то мы получим линейную регрессионную модель

$$P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} b = P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} F\lambda + \varepsilon, \tag{21}$$

аппроксимирующую нелинейную регрессию (20).

При этом среднеквадратичные оценки коэффициентов линейной регрессионной модели (21), удовлетворяющие условию

$$\|\varepsilon\|^2 = \left\|P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} b - P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} F\lambda\right\|^2 = (b - F\lambda)^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} (b - F\lambda) \to \min,$$

находятся из решения нормальной системы линейных алгебраических уравнений

$$F^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} F\lambda = F^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} b \tag{22}$$

по формуле

$$\lambda = \left(F^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} F\right)^{-1} F^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} b, \tag{23}$$

где $\Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} = (P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1})^\top P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} = (P_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1})^2$ — диагональная матрица с элементами

$$\omega_{kk}^{-1} = \frac{1}{[1-(k-1)\hat\lambda_2^{(i)} - (k-1)^2\hat\lambda_3^{(i)}]^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Формула (23) лежит в основе итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели (18):

$$\hat\lambda^{(i+1)} = (F^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} F)^{-1} F^\top \Omega_{\hat\lambda^{(i)}}^{-1} b, \tag{24}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации.

За начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat\lambda^{(0)}$ можно принять решение системы уравнений

$$F^\top F\lambda = F^\top b$$

по формуле

$$\hat\lambda^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top b,$$

которая может быть получена из условия минимизации невязки:

$$\|\eta\|^2 = \|b - F\lambda\| \to \min.$$

Очевидно, что начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$ может быть получено из формулы (24) при условии

$$P_{\hat{\lambda}^{(i)}} = P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} = \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i)}} = E,$$

где E — единичная матрица, которое выполняется при $\hat{\lambda}_2^{(i)} = \hat{\lambda}_3^{(i)} = 0$.

С учетом среднеквадратичных оценок коэффициентов модели (16) и соотношений (17) оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления, могут быть найдены по формулам

$$\hat{c}_0 = \hat{\lambda}_1, \quad \hat{c}_1 = -\frac{\hat{\lambda}_2}{\tau}, \quad \hat{c}_2 = -\frac{\hat{\lambda}_3}{\tau^2}. \tag{25}$$

Отметим, что и в этом алгоритме также не гарантируется точный минимум остаточной суммы квадратов из-за аппроксимации нелинейной модели (20) линейной регрессионной моделью (21), что позволило существенно упростить построение нормальной системы линейных алгебраических уравнений (22) в методе наименьших квадратов.

При этом численно-аналитические исследования показали, что при значениях величины случайной помехи ε_k в данных эксперимента y_k до 4 % относительное отклонение остаточной суммы квадратов Q_{res} от ее минимально возможного значения $\min Q_{\text{res}}$ не превышает 1 %, а при случайной помехе величиной 10 % относительное отклонение от $\min Q_{\text{res}}$ составляет порядка 5 %. Очевидно, что этот алгоритм среднеквадратичного оценивания параметров модели (9), хотя и не обеспечивает минимум остаточной суммы квадратов, существенно (в четыре раза) точнее первого алгоритма.

Третий алгоритм. Для устранения основного недостатка первых двух алгоритмов среднеквадратичного оценивания параметров модели (20) предлагается *третий алгоритм*, в основе которого лежит построение нормальной системы уравнений в методе наименьших квадратов, решение которой обеспечивает достижение точного минимума остаточной суммы квадратов.

Среднеквадратичные оценки коэффициентов нелинейной регрессионной модели (20), удовлетворяющие условию

$$Q_{\text{res}} = \varepsilon^\top\varepsilon = \|\varepsilon\|^2 = \|P_\lambda^{-1}b - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2 = (b - F\lambda)^\top\Omega_\lambda^{-1}(b - F\lambda) \to \min,$$

находятся в соответствии с методикой, описанной в [26–28]. Используя аппарат матричной алгебры и формулы дифференцирования вектора, матрицы, обратной матрицы и произведения матриц по вектору аргументов, можно получить следующее соотношение [28]:

$$\frac{\partial Q_{\text{res}}}{\partial\lambda} = \Big[\frac{\partial(\varepsilon^\top\varepsilon)}{\partial\lambda}\Big]^\top = -2\Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial\lambda}B_\varepsilon\Big)^\top\Omega_\lambda^{-1}(b - F\lambda) = \bar{0}, \tag{26}$$

где $\Omega_\lambda^{-1} = (P_\lambda^{-1})^\top P_\lambda^{-1} = (P_\lambda^{-1})^2$ — диагональная матрица с элементами

$$\omega_{kk}^{-1} = \frac{1}{[1 - (k-1)\lambda_2 - (k-1)^2\lambda_3]^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, N;$$

$B_\varepsilon(\lambda) = \begin{bmatrix} P_\lambda^{-1}(b-F\lambda) & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b-F\lambda) & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b-F\lambda) \end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица размера $[3N\times 3]$; $\bar{0}$ — нулевой вектор размера $[N\times 1]$;
$\dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_1} & \dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_2} & \dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_3} \end{bmatrix}$ — блочная матрица-строка размера $[N\times 3N]$, блоки которой с учетом формулы (19) описываются следующим образом:
$\dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_1}$ — нулевая квадратная матрица размера $[N\times N]$, $\dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_2}$ и $\dfrac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_3}$ — диагональные матрицы размера $[N\times N]$ вида

$$\frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_2} = \mathrm{diag}[0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -(N-1)], \quad \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda_3} = \mathrm{diag}[0,\ -1,\ -4,\ \ldots,\ -(N-1)^2].$$

Из формулы (26) получаем нормальную систему уравнений, решение которой — вектор $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3)^\top$ — обеспечивает точный минимум остаточной суммы квадратов:

$$\Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\Big)^\top \Omega_\lambda^{-1} F\lambda = \Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\Big)^\top \Omega_\lambda^{-1} b. \tag{27}$$

Система алгебраических уравнений в матричной форме (27) нелинейна относительно коэффициентов обобщенной регрессионной модели (16). Однако ее решение достаточно просто можно найти итерационными методами [29]. Из (27) получаем

$$\lambda = \Big[\Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\Big)^\top \Omega_\lambda^{-1} F\Big]^{-1} \Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon\Big)^\top \Omega_\lambda^{-1} b.$$

Отсюда итерационная формула уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (9) принимает вид

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \Big[\Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon^{(i)}\Big)^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F\Big]^{-1} \Big(F + \frac{\partial P_\lambda}{\partial \lambda} B_\varepsilon^{(i)}\Big)^\top \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации.

По сравнению с классическими методами нелинейного оценивания в данном алгоритме не требуется предварительной оценки начального приближения параметров модели. Начальные оценки коэффициентов обобщенной регрессионной модели формируются в самом алгоритме вычислений. За начальное приближение вектора среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}^{(0)}$, как и во втором алгоритме, может быть принято либо решение $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^\top F)^{-1} F^\top b$ системы уравнений $F^\top F\lambda = F^\top b$, которая формируется из условия минимизации невязки:

$$\|\eta\|^2 = \|b - F\lambda\| \to \min,$$

либо нулевой вектор оценок коэффициентов:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \hat{\lambda}_2^{(0)} = \hat{\lambda}_3^{(0)} = 0.$$

Оценки параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления, могут быть найдены по формулам (25), как и во втором алгоритме.

На основе численно-аналитических исследований с использованием имитационного моделирования проведен сравнительный анализ трех рассмотренных выше алгоритмов среднеквадратичного оценивания параметров математической модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

Условия проведения численных экспериментов с использованием имитационного моделирования и учетом реальных осциллограмм избыточного давления, полученных при натурных испытаниях, были следующими. На основе формулы (10) при заданных значениях параметров $c_0 = 1$, $c_1 = 20$ и $c_2 = 12$ с шагом дискретизации $\tau = 0.002$ сек была сформирована выборка $\hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, объемом $N = 400$.

К результатам имитационного моделирования $\hat{y}_k$ добавлялась случайная помеха ε_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, мощность которой

$$\varepsilon = \frac{\|\varepsilon\|}{\|\hat{y}\|} \cdot 100\,\% = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2 \Big/ \sum_{k=0}^{N-1} \hat{y}_k^2} \cdot 100\,\%$$

изменялась от $0\,\%$ до $10\,\%$ с шагом $1\,\%$.

По сформированным данным $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, моделирующим результаты натурного эксперимента, с использованием каждого из трех описанных алгоритмов вычислялись среднеквадратичные оценки параметров модели (9), их относительные погрешности, а также остаточная сумма квадратов и среднеквадратические отклонения в относительных единицах, характеризующие адекватность модели данным эксперимента. Кроме этого, фиксировалось время вычислений для каждого алгоритма. Вычисления при каждом значении ε (в %) случайной помехи повторялись $M = 20$ раз, и результаты этих вычислений усреднялись.

Результаты усредненных вычислений для каждого из трех алгоритмов приведены в табл. 1–3, где

$$\delta c_i = \frac{|c_i - \hat{c}_i|}{|c_i|} \cdot 100\,\%, \quad i = 0, 1, 2$$

— относительная погрешность среднеквадратичной оценки $\hat{c}_i$ параметра модели (9);

$$Q_{\mathrm{res}} = \|y - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2$$

— остаточная сумма квадратов;

$$s = \frac{\|y - \hat{y}\|}{\|y\|} \cdot 100\,\%$$

— оценка среднеквадратичного отклонения модели от результатов эксперимента в относительных единицах; t_{calc} — время требуемых расчетов на основе соответствующего алгоритма вычислений (в сек).

Таблица 1

Результаты вычислений при использовании первого алгоритма [The calculation results using first algorithm]

ε, %	δc_0, %	δc_1, %	δc_2, %	Q_{res}	s, %	t_{calc}, sec
0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.31
1	0.1	0.3	1.8	0.002	1.0	0.31
2	0.2	0.8	8.1	0.009	2.0	0.31
3	0.4	1.5	18.1	0.021	3.1	0.31
4	0.7	2.7	29.9	0.039	4.2	0.31
5	0.8	3.5	43.3	0.065	5.4	0.31
6	0.6	3.5	55.7	0.098	6.6	0.31
7	1.4	5.5	73.9	0.142	8.0	0.31
8	1.1	6.2	92.8	0.196	9.4	0.31
9	1.1	6.0	104.4	0.258	10.7	0.31
10	1.5	7.0	117.2	0.329	12.1	0.31

Таблица 2

Результаты вычислений при использовании второго алгоритма [The calculation results using second algorithm]

ε, %	δc_0, %	δc_1, %	δc_2, %	Q_{res}	s, %	t_{calc}, sec
0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.0	0.63
1	0.1	0.2	0.9	0.002	1.0	0.94
2	0.2	0.4	2.5	0.009	2.0	1.05
3	0.3	0.7	5.0	0.020	3.0	1.25
4	0.5	1.0	8.7	0.036	4.0	1.24
5	0.8	1.6	12.3	0.057	5.0	1.37
6	1.5	2.6	14.5	0.083	6.1	1.56
7	1.6	2.7	19.9	0.115	7.2	1.55
8	2.7	3.8	28.6	0.153	8.3	1.68
9	3.6	5.6	31.4	0.196	9.3	1.86
10	3.9	6.5	35.9	0.244	10.4	1.87

Таблица 3

Результаты вычислений при использовании третьего алгоритма [The calculation results using third algorithm]

ε, %	δc_0, %	δc_1, %	δc_2, %	Q_{res}	s, %	t_{calc}, sec
0	0.0	0.0	0.0	0.000	0.0	3.00
1	0.1	0.2	0.9	0.002	1.0	5.56
2	0.2	0.5	1.6	0.009	2.0	6.73
3	0.2	0.7	2.6	0.020	3.0	7.75
4	0.4	1.1	3.5	0.035	4.0	8.01
5	0.4	1.3	5.5	0.055	5.0	8.13
6	0.4	1.2	6.1	0.080	6.0	8.27
7	0.7	1.6	4.3	0.109	7.0	8.27
8	0.8	1.8	4.2	0.142	8.0	8.91
9	0.9	2.0	8.4	0.179	8.9	9.17
10	0.8	2.5	8.2	0.219	9.8	9.94

Результаты вычислений на основе третьего алгоритма, представленные в табл. 3, обеспечивают точный минимум остаточной суммы квадратов. Видно, что при использовании этого алгоритма оценки параметров модели (9) имеют наименьшую погрешность. Однако время вычисления этих оценок из-за итерационной процедуры их уточнения по сравнению с двумя другими алгоритмами относительно велико. Из-за отсутствия итерационных процедур наибольшим быстродействием обладает первый из представленных алгоритмов вычислений. Однако в силу того, что он не обеспечивает минимума остаточной суммы квадратов, среднеквадратичные оценки параметров модели, вычисленные на его основе, имеют достаточно высокую погрешность при величине случайной помехи в результатах наблюдений более 3 %. Оптимальным можно считать второй алгоритм вычислений, результаты которых представлены в табл. 2. Этот алгоритм обладает как быстродействием, так и достаточной для практических расчетов точностью вычисления оценок.

5. Построение и параметрическая идентификация математической модели датчика давления. Преобразование сигнала в виде избыточного давления $P(t)$ на входе датчика давления в напряжение на его выходе описывается линейным дифференциальным оператором второго порядка с переменными коэффициентами (2). С учетом начальных условий $u(0) = u_0$ и $u'(0) = u'_0$ аддитивная составляющая $z(t)$ в равенстве $u(t) = z(t) + y(t)$, описывающем сигнал на выходе датчика давления, имеет вид

$$z(t) = -\hat{a}_0 e^{-\alpha t}\Big[\cos(\beta_1 t + \beta_2 t^2) + \frac{\alpha - \hat{b}_0}{\beta_1}\sin(\beta_1 t + \beta_2 t^2)\Big], \tag{28}$$

где $\hat{a}_0$ и $\hat{b}_0$ — известные (найденные по формулам (5) с учетом результатов вычислений $\hat{c}_0$ и $\hat{c}_1$) оценки параметров модели (9).

Исходными данными для параметрической идентификации динамической модели датчика давления в виде (28), описывающей его реакцию на разрывной скачок давления, служат результаты вычислений $z_k = u_k - \hat{y}_k$, где u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, — данные натурного эксперимента, $\hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, — результаты расчета по построенной модели (9), аппроксимирующей спад избыточного давления в подводной ударной волне.

Так как время затухания колебаний, описываемых формулой (28), достаточно мало по сравнению с временем наблюдения и анализа импульса подводной ударной волны, при оценке параметров модели (28) целесообразно использовать только начальный участок осциллограммы избыточного давления, полученной при натурных испытаниях. Анализ результатов натурных испытаний показал, что при $t > 3t_{\max}$, где $t_{\max}$ — момент времени, соответствующий максимуму импульса ударной волны, имеем $\hat{z}_k \approx 0$, $k = \overline{N_1, N-1}$, где N_1 — номер отсчета, который находится по формуле (8). Поэтому объем выборки результатов вычислений $z_k = u_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, равен $N_1 = 3k_{\max} + 1$.

В основе параметрической идентификации математической модели (28) лежит минимизация остаточной суммы квадратов Q_{res} на множестве трех параметров α, β_1 и β_2:

$$Q_{\text{res}} = \|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_1-1}(z_k - \hat{z}_k)^2 = \sum_{k=0}^{N_1-1}\varepsilon_k^2 \to \min,$$

где $z_k = u_k - \hat{y}_k$ — результаты расчетов с использованием среднеквадратичных оценок параметров модели (9), полученных на основе одного из алгоритмов, описанных выше; $\hat{z}_k$ — результаты вычислений на основе построенной модели (28):

$$\hat{z}_k = -\hat{a}_0 e^{-\alpha\tau k}\Big[\cos(\beta_1\tau k + \beta_2\tau^2k^2) + \frac{\alpha - \hat{b}_0}{\beta_1}\sin(\beta_1\tau k + \beta_2\tau^2k^2)\Big]. \qquad (29)$$

Задача среднеквадратичного оценивания параметров α, β_1 и β_2 модели (28) по результатам расчетов z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, относится к задаче нелинейного прикладного регрессионного анализа [20–23]. Для данной задачи применим метод среднеквадратичного оценивания параметров нелинейной модели (28), в основе которого лежит параметрическая линеаризация этой модели в окрестности точки $(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$ [21]:

$$\hat{z}_k(\alpha, \beta_1, \beta_2) \approx \hat{z}_k^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \alpha}(\alpha - \hat{\alpha}^{(i)}) + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_1}(\beta_2 - \hat{\beta}_1^{(i)}) + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_2}(\beta_2 - \hat{\beta}_2^{(i)}), \quad (30)$$

где $\hat{z}_k^{(i)} = \hat{z}_k(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$, а частные производные в точке $(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$ вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \alpha} = \hat{a}_0 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k}\Big[t_k \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) + \\ + \frac{t_k(\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0) - 1}{\hat{\beta}_1^{(i)}}\sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2)\Big], \quad (31)$$

$$\frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_1} = -\hat{a}_0 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k}\Big[t_k \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{c}_1}{\hat{\beta}_1^{(i)}}\cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \\ - \Big(t_k + \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_{01}}{(\hat{\beta}_1^{(i)})^2}\Big)\sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2)\Big], \quad (32)$$

$$\frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_2} = -\hat{a}_0 t_k^2 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k}\Big[\frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0}{\hat{\beta}_1^{(i)}}\cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \\ - \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2)\Big], \quad k = 0, 1, \ldots, N_1 - 1. \quad (33)$$

Сформированная на основе формулы (30) линейная обобщенная регрессионная модель имеет вид

$$\Delta z^{(i)} = F^{(i)} \Delta a^{(i)} + \varepsilon, \qquad (34)$$

где

$$F^{(i)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{z}_0^{(i)}}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \hat{z}_0^{(i)}}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial \hat{z}_0^{(i)}}{\partial \beta_2} \\ \dfrac{\partial \hat{z}_1^{(i)}}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \hat{z}_1^{(i)}}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial \hat{z}_1^{(i)}}{\partial \beta_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \hat{z}_{N_1-1}^{(i)}}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \hat{z}_{N_1-1}^{(i)}}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial \hat{z}_{N_1-1}^{(i)}}{\partial \beta_2} \end{bmatrix}, \quad \Delta z^{(i)} = z - \hat{z}^{(i)} = \begin{bmatrix} z_0 - \hat{z}_0^{(i)} \\ z_1 - \hat{z}_1^{(i)} \\ \vdots \\ z_{N_1-1} - \hat{z}_{N_1-1}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{35}$$

— матрица регрессоров размера $[N_1 \times 3]$ и вектор размера $[N_1 \times 1]$ соответственно; $\hat{a}^{(i)} = (\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})^\top$ — вектор промежуточных оценок размера $[3\times 1]$; $\Delta a^{(i)} = a - \hat{a}^{(i)} = (\Delta\hat{\alpha}^{(i)}, \Delta\hat{\beta}_1^{(i)}, \Delta\hat{\beta}_2^{(i)})^\top = (\alpha - \hat{\alpha}^{(i)}, \beta_1 - \hat{\beta}_1^{(i)}, \beta_2 - \hat{\beta}_2^{(i)})^\top$ — вектор коэффициентов, подлежащих нахождению, размера $[3 \times 1]$;
$\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{N_1-1})^\top$ — вектор случайной помехи в результатах расчета.

С учетом среднеквадратичного критерия вычисления оценки вектора $\Delta\hat{a}^{(i)}$ коэффициентов модели (34):

$$\|\varepsilon\|^2 = \|\Delta z^{(i)} - F^{(i)} \Delta a^{(i)}\|^2 \to \min$$

алгоритм вычислений — уточнения оценок параметров — принимает вид

$$\Delta\hat{a}^{(i)} = [F^{(i)\top} F^{(i)}]^{-1} F^{(i)\top} \Delta z^{(i)}, \quad \hat{a}^{(i+1)} = \hat{a}^{(i)} + \Delta\hat{a}^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{36}$$

Начальные оценки элементов $\hat{\alpha}^{(0)}$, $\hat{\beta}_1^{(0)}$, $\hat{\beta}_2^{(0)}$ вектора $\Delta\hat{a}^{(0)}$ можно найти по формулам

$$\hat{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{t_{\min} - t_{\max}} \ln\left|\frac{z_{\max}}{z_{\min}}\right|, \ \hat{\beta}_1^{(0)} = \frac{\pi}{t_{\min} - t_{\max}}, \ \hat{\beta}_2^{(0)} = \frac{\pi}{t_2^2 - t_1^2} - \frac{\hat{\beta}_1^{(0)}}{t_1 + t_2}, \tag{37}$$

где $t_{\max}$ и $t_{\min}$ — моменты времени, соответствующие первому максимальному $z_{\max}$ и следующему за ним первому минимальному $z_{\min}$ значениям в последовательности результатов расчета z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_1 - 1$; t_1 и t_2 — два первых последовательных момента времени, в которых функция $z(t)$ принимает нулевое значение.

Условием завершения итерационной процедуры уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (28) может служить выполнение неравенства $\|\Delta\hat{a}^{(i)}\| < 0.01\|\hat{a}^{(i)}\|$.

6. Численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натурных испытаниях. Одной из основных задач при проведении подводных испытаний боеприпасов является достоверная оценка информативных параметров импульса ударной волны, таких как максимальное избыточное давление $P_{\max}$ и энергия импульса ударной волны на промежутке времени $t \in [0,\ t_{0.95}]$:

$$\int_0^{t_{0.95}} P^2(t)dt = 0.95 \int_0^{\infty} P^2(t)dt.$$

Рассмотрим решение этой задачи на основе математической модели

$$f(t) = k_d P(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2},$$

описывающей монотонный спад избыточного давления, параметры которой идентифицируются представленными выше алгоритмами по результатам эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления.

С учетом монотонного характера спада избыточного давления, наблюдаемого при натурных испытаниях, к аппроксимирующей функции $f(t)$ предъявляются следующие требования: $f(t) > 0$, $f'(t) < 0$ и $f''(t) > 0$ при $t \in [0; \infty)$. По результатам проведенных аналитических исследований сделан вывод о том, что для выполнения этих требований достаточно, чтобы параметры этой функции удовлетворяли условию: $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ и $0 < c_2 \leqslant c_1^2$.

Очевидно, что максимальное значение функция

$$f(t) = \frac{c_0}{1 + c_1 t + c_2 t^2},$$

аппроксимирующая монотонный спад избыточного давления на промежутке времени $t \geqslant 0$, принимает в начальный момент времени $t = 0$: $f_{\max} = f(0) = c_0$.

Для вычисления интеграла

$$\int_0^{t_{0.95}} P^2(t)dt = \frac{1}{k_d^2} \int_0^{t_{0.95}} f^2(t)dt,$$

описывающего энергию импульса ударной волны, найдена первообразная

$$F(t) = \int f^2(t)dt = \int \frac{c_0^2}{(1 + c_1 t + c_2 t^2)^2} dt =$$
$$= \begin{cases} -\frac{c_0^2(2c_2 t + c_1)}{D(1 + c_1 t + c_2 t^2)} + \frac{4c_0^2 c_2}{D}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}\, t}{c_1 t + 2}\right), & D < 0; \\ -\frac{16c_0^2}{3c_1(c_1 t + 2)^3}, & D = 0; \\ -\frac{c_0^2(2c_2 t + c_1)}{D(1 + c_1 t + c_2 t^2)} - \frac{2c_0^2 c_2}{D\sqrt{D}} \ln \frac{2c_2 t + c_1 - \sqrt{D}}{2c_2 t + c_1 + \sqrt{D}}, & D > 0, \end{cases} \tag{38}$$

где $D = c_1^2 - 4c_2$ — дискриминант квадратного трехчлена $1 + c_1 t + c_2 t^2$.

Отсюда получаем

$$F(0) = \begin{cases} -\frac{c_0^2}{c_1}, & D < 0; \\ -\frac{2c_0^2}{3c_1}, & D = 0; \\ -\frac{c_0^2}{D}\left(c_1 + \frac{2c_2}{\sqrt{D}} \ln \frac{c_1 - \sqrt{D}}{c_1 + \sqrt{D}}\right), & D > 0 \end{cases} \tag{39}$$

и

$$F(\infty) = \begin{cases} \frac{4c_0^2 c_2}{D}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}}{c_1}\right), & D < 0; \\ 0, & D \geqslant 0. \end{cases}$$

Энергия импульса ударной волны на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ может быть найдена по формуле

$$J_\infty = \int_0^\infty f^2(t)dt = F(\infty) - F(0) = \begin{cases} \frac{c_0^2}{D}\left(c_1 - \frac{4c_2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}}{c_1}\right), & D < 0; \\ \frac{2c_0^2}{3c_1}, & D = 0; \\ \frac{c_0^2}{D}\left(c_1 + \frac{2c_2}{\sqrt{D}} \ln \frac{c_1 - \sqrt{D}}{c_1 + \sqrt{D}}\right), & D > 0. \end{cases} \quad (40)$$

Одним из основных информативных параметров импульса ударной волны в натурных экспериментах является энергия импульса

$$J_\alpha = \int_0^{t_\alpha} f^2(t)dt \quad (41)$$

за некоторый промежуток времени t_α, величина которого задается с помощью коэффициента α. Этот коэффициент характеризует отношение энергии импульса ударной волны J_α за промежуток времени $[0, t_\alpha]$ к энергии импульса

$$J_\infty = \int_0^\infty f^2(t)dt$$

на бесконечном промежутке времени: $\alpha = J_\alpha / J_\infty$. Обычно величина α задается равной $\alpha = 0.95$.

При вычислении интеграла (41), характеризующего энергию импульса ударной волны за промежуток времени $[0, t_\alpha]$, воспользуемся формулами (38) и (39):

$$J_\alpha(t_\alpha) = \begin{cases} -\frac{c_0^2(2c_2 t_\alpha + c_1)}{D(1 + c_1 t_\alpha + c_2 t_\alpha^2)} + \frac{c_0^2}{D}\left(c_1 - \frac{4c_2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D} \cdot t_\alpha}{c_1 t_\alpha + 2}\right), & D < 0; \\ \frac{2c_0^2}{3c_1}\left[1 - \frac{8}{(c_1 t_\alpha + 2)^3}\right], & D = 0; \\ -\frac{c_0^2(2c_2 t_\alpha + c_1)}{D(1 + c_1 t_\alpha + c_2 t_\alpha^2)} + \frac{c_0^2}{D}\left[c_1 + \frac{2c_2}{\sqrt{D}} \ln \frac{(c_1 - \sqrt{D})t_\alpha + 2}{(c_1 + \sqrt{D})t_\alpha + 2}\right], & D > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Полученная формула (42) позволяет оценить энергию J_α импульса ударной волны, длительность которого равна t_α. На бесконечном промежутке времени $[0, \infty]$ полная энергия J_∞ импульса ударной волны находится по формуле (40).

Рассмотрим обратную задачу определения длительности t_α исследуемого импульса ударной волны при заданной величине его энергии J_α в относительных к J_∞ единицах.

Алгоритм решения этой задачи включает следующие шаги:

– по представленным выше методикам находятся оценки параметров c_0, c_1 и c_2 математической модели (9) импульса ударной волны;
– проверяется выполнение условий $0 < c_2 \leqslant c_1^2$ и вычисляется дискриминант $D = c_1^2 - 4c_2$;
– задается величина отношения $\alpha = J_\alpha / J_\infty$, например, $\alpha = 0.95$;
– в зависимости от величины D по формуле (40) вычисляется значение J_∞;
– решается нелинейное уравнение $J_\alpha(t) = \alpha J_\infty$, в котором функция $J_\alpha(t)$ описывается соотношением (42) в зависимости от величины дискриминанта D. Корень этого уравнения t_α соответствует длительности им-

пульса ударной волны, энергия которого составляет $\alpha, \%$ от полной энергии импульса на бесконечном промежутке времени.

При решении нелинейного трансцендентного уравнения $J_\alpha(t) = \alpha J_\infty$ можно воспользоваться разработанным численным методом, алгоритм которого включает итерационную процедуру уточнения корня уравнения:

$$t_\alpha^{(i+1)} = t_\alpha^{(i)} \left[1 - \frac{0.01[J_\alpha(t_\alpha^{(i)}) - \alpha J_\infty]}{J_\alpha(1.01 t_\alpha^{(i)}) - J_\alpha(t_\alpha^{(i)})} \right], \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где величина $J_\alpha(t_\alpha^{(i)})$ вычисляется по формуле (42), а J_∞ — по формуле (40).

В качестве начального приближения переменной $t_\alpha^{(0)}$ можно выбрать значение $t_\alpha^{(0)} = 0.1 t_{N-1}$, где t_{N-1} — момент времени последнего наблюдения в выборке результатов эксперимента.

7. Апробация численных методов математического моделирования ударной волны при обработке результатов натурного эксперимента. Разработанный численный метод математического моделирования импульса ударной волны был апробирован при обработке результатов эксперимента при взрыве 500 грамм пластита.

Непосредственно с датчика давления была получена выборка результатов эксперимента u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, объемом $N = 1723$ с периодом дискретизации $\tau = 0.0004$ мсек. Графики наблюдаемого на выходе датчика давления импульса ударной волны, построенные по результатам эксперимента, приведены на рис. 2 и 3.

Построение математической модели (6), описывающей сигнал на выходе датчика давления, по результатам эксперимента осуществлялось в три этапа.

На первом шаге алгоритма идентификации импульса ударной волны решалась *задача предварительной оценки параметров математической модели* (9), аппроксимирующей спад избыточного давления. После предварительной обработки экспериментальных данных, снятых с датчика давления, была сформирована выборка результатов наблюдений u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, объемом $N = 200$ с периодом дискретизации $\tau = 0.0032$ мсек.

Найденный по выборке результатов эксперимента номер отсчета, соответствующий максимальному значению в этой выборке $u_{\max} = 0.824$, равен $k_{\max} = 3$. По формуле (8) находим $N_1 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$. Используя с 10-го по 199-й члены выборки результатов наблюдения y_k, $k = 10, 11, 12, \ldots, 199$, в соответствии с *первым* (наиболее простым) алгоритмом среднеквадратичной оценки параметров нелинейной математической модели (9) сформирована нормальная система линейных алгебраических уравнений (14):

$$\begin{cases} 0.738\lambda_1 + 14.58\lambda_2 + 418.91\lambda_3 = 1.919; \\ 14.58\lambda_1 + 418.91\lambda_2 + 21223.2\lambda_3 = 49.311; \\ 418.91\lambda_1 + 21223.2\lambda_2 + 1863557\lambda_3 = 2244.1. \end{cases}$$

Из решения этой системы уравнений найдены следующие предварительные оценки коэффициентов регрессионной модели (12):

$$\hat{\lambda}_1 = 0.983, \quad \hat{\lambda}_2 = 0.0796, \quad \hat{\lambda}_3 = 0.0000762.$$

По формулам (15) вычислены оценки параметров математической модели (8), аппроксимирующей спад избыточного давления:

$$\hat{c}_0 = 1.017, \quad \hat{c}_1 = 25.32, \quad \hat{c}_2 = 7.566.$$

График построенной зависимости, аппроксимирующей спад избыточного давления

$$\hat{y}(t) = \frac{1.017}{1 + 25.32t + 7.566t^2}, \tag{43}$$

представлен на рис. 5.

Остаточная сумма квадратов и остаточная дисперсия, характеризующие среднеквадратическое отклонение построенной модели (43) от результатов наблюдения, следующие:

$$Q_{\text{res1}} = \|u - \hat{y}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \hat{y}_k)^2 = 0.0172, \quad s^2_{\text{res1}} = 0.000091,$$

что в относительных единицах составляет

$$\frac{\|u - \hat{y}\|}{\|u\|} \cdot 100\,\% = 5.4\,\%.$$

При найденных параметрах построенной модели (43) вычислим энергию импульса ударной волны:

$$J_{0.95} = 0.95 J_\infty.$$

Интеграл J_∞ на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ вычисляется по формуле (40):

$$J_\infty = 0.0383.$$

Отсюда

$$J_{0.95} = 0.95 \cdot 0.0373 = 0.0364.$$

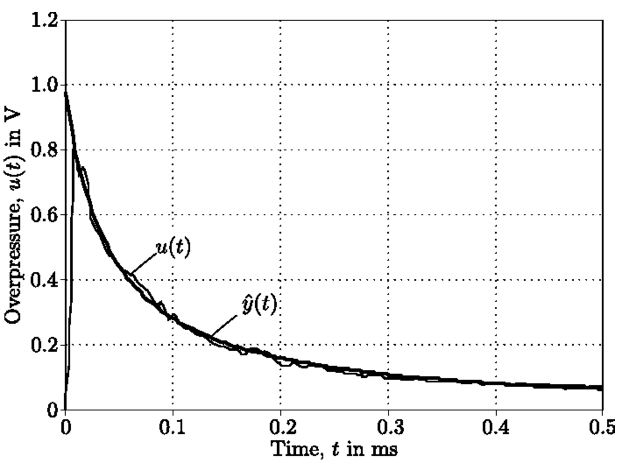


Рис. 5. График функции $\hat{y}(t)$, аппроксимирующей спад избыточного давления
[Fig. 5. The graph of the function $\hat{y}(t)$ which approximates the overpressure decrease]

С использованием описанного выше алгоритма и формулы (42) найдена длительность импульса $t_{0.95} = 0.428$ мсек ударной волны с энергией $J_{0.95} = 0.0364$.

На втором этапе алгоритма построения математической модели наблюдаемого сигнала решалась задача параметрической идентификации модели $\hat{z}(t)$, описывающей реакцию датчика на разрывной скачок давления.

График зависимости $z(t) = u(t) - \hat{y}(t)$, где $u(t)$ — наблюдаемый сигнал, $\hat{y}(t)$ — построенная на предыдущем шаге модель (43), представлен точками z_k на рис. 6.

При оценке параметров модели (29):

$$\hat{z}_k = -\hat{a}_0 e^{-\alpha\tau k}\Big[\cos(\beta_1\tau k + \beta_2\tau^2k^2) + \frac{\alpha - \hat{b}_0}{\beta_1}\sin(\beta_1\tau k + \beta_2\tau^2k^2)\Big]$$

по результатам расчета $z_k = u_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_2-1$, при $\tau = 0.0004$ мсек и известных $\hat{a}_0 = 1.009$ и $\hat{b}_0 = 29.06$ воспользуемся одним из методов нелинейного оценивания, в основе которого лежит параметрическая линеаризация нелинейной зависимости (28) по параметрам α, β_1 и β_2. Объем выборки N_2 результатов расчета с периодом дискретизации $\tau = 0.0004$ мсек вычислялся по формуле (8): $N_2 = 3k_{\max} + 1 = 3 \cdot 20 + 1 = 61$, где $k_{\max} = 20$.

Результаты расчетов $z_k = u_k - \hat{y}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_2-1$, можно представить в виде суммы $z_k = \hat{z}_k(\alpha, \beta_1, \beta_2) + \varepsilon_k$, где случайная величина ε_k описывает естественный разброс результатов расчета относительно модели (29) в точках t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_2-1$. Оценки параметров модели находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонений

$$\|\varepsilon\|^2 = \|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_2-1}\big[z_k - \hat{z}_k(\alpha, \beta_1, \beta_2)\big]^2 \to \min.$$

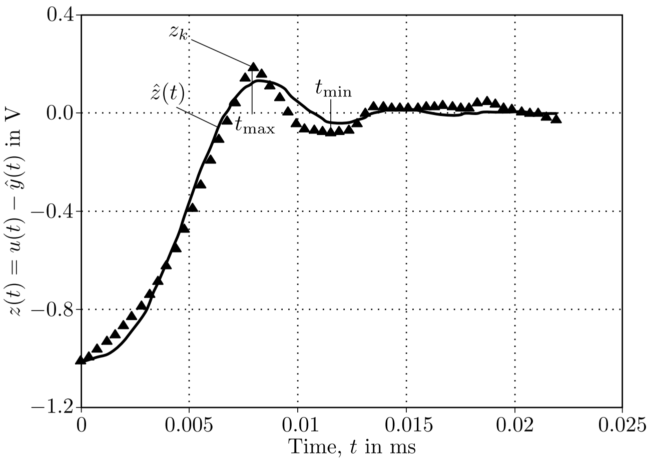


Рис. 6. Данные зависимости $z(t)$ (маркеры), описывающей реакцию датчика на разрывной скачок давления, и их аппроксимация (44) (сплошная линия)

[Fig. 6. Data of the dependence $z(t)$ (markers) which describes the sensor response to a pressure surge, and their approximation (44) (solid line)]

В соответствии с описанным выше алгоритмом среднеквадратичного оценивания и формулами (31)–(33) для нахождения частных производных в точке $(\hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)})$ на каждой итерации вычисления оценок $\Delta\hat{a}^{(i)}$ и $\hat{a}^{(i+1)}$ по формулам (35) формировались матрица регрессоров $F^{(i)}$ и вектор $\Delta z^{(i)}$.

Начальные оценки параметров $\hat{\alpha}^{(0)}$, $\hat{\beta}_1^{(0)}$ и $\hat{\beta}_2^{(0)}$ вычислялись по формулам (37) при $t_{\max} = 0.0080$, $z_{\max} = 0.1868$, $t_{\min} = 0.0116$, $z_{\min} = -0.0794$, $t_1 = 0.0070$ и $t_2 = 0.0098$:

$$\hat{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{0.0036} \ln\left|\frac{0.1868}{-0.0794}\right| = 237.6, \quad \hat{\beta}_1^{(0)} = \frac{\pi}{0.0080} = 392.7,$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{0.000047} - \frac{392.7}{0.0168} = 43410.6.$$

Уточнение среднеквадратичных оценок параметров модели (29) по формуле (36) завершается при выполнении условия

$$\max\left\{\left|\frac{\Delta\alpha^{(i)}}{\hat{\alpha}^{(i)}}\right|, \left|\frac{\Delta\beta_1^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}}\right|, \left|\frac{\Delta\beta_2^{(i)}}{\hat{\beta}_2^{(i)}}\right|\right\} < 0.001 \quad (0.1\,\%).$$

В табл. 4 представлены результаты вычислений среднеквадратичных оценок параметров модели (29) для каждой итерации.

Таким образом, оценки параметров, обеспечивающие минимум суммы квадратов отклонения модели (29) от результатов расчета z_k, принимают следующие значения:

$$\hat{\alpha} = 333.2, \quad \hat{\beta}_1 = 146.0, \quad \hat{\beta}_2 = 37273.5.$$

Таблица 4

Оценка параметров модели (29) для каждой итерации
[Estimates of model parameters (29) for each iteration]

Iteration number	Estimates of model parameters		
	$\hat{\alpha}^{(i)}$	$\hat{\beta}_1^{(i)}$	$\hat{\beta}_2^{(i)}$
0	237.56	392.70	43410.61
1	407.63	294.34	55790.40
2	695.81	155.03	67142.47
3	751.13	75.77	30353.65
4	302.43	207.68	50559.76
5	403.52	173.17	49174.47
6	395.61	158.65	38597.13
7	340.38	159.95	34848.08
8	343.26	150.89	36484.60
9	339.33	148.24	36853.76
10	336.78	147.04	37043.28
11	335.23	146.46	37148.29
12	334.30	146.19	37207.88
13	333.74	146.05	37242.12
14	333.41	145.99	37261.95
15	333.21	145.96	37273.47

А сама математическая модель, описывающая реакцию датчика на разрывной скачок давления, имеет вид

$$\hat{z}(t) = -1.009e^{-333.2t}\big[\cos(146.0t + 37273.5t^2)+ \\ + 29.06\sin(146.0t + 37273.5t^2)\big]. \quad (44)$$

При оценке ее адекватности исходным данным z_k, $k = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$, можно воспользоваться величиной остаточной суммы квадратов

$$Q_{\text{res2}} = \|z - \hat{z}\|^2 = \sum_{k=0}^{N_2-1} (z_k - \hat{z}_k)^2 = 0.094, \quad s^2_{\text{res2}} = 0.0016,$$

что в относительных единицах составляет $\frac{\|z-\hat{z}\|}{\|z\|} \cdot 100\,\% = 10.2\,\%$.

График зависимости (44) представлен на рис. 6.

На последнем шаге алгоритма параметрической идентификации импульса ударной волны по результатам эксперимента u_k, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, с $\tau = 0.0004$ мсек и $N = 1723$ оценки всех параметров математической модели (6) уточняются непосредственно из условия минимизации остаточной суммы квадратов

$$\|\varepsilon\|^2 = \|u - \hat{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \big[u_k - \hat{u}_k(c_0, c_1, c_2, \alpha, \beta_1, \beta_2)\big]^2 \to \min,$$

где

$$\hat{u}_k = \frac{c_0}{1 + c_1 t_k + c_2 t_k^2} - a_0(c_0)e^{-\alpha t_k}\Big[\cos(\beta_1 t_k + \beta_2 t_k^2)+ \\ + \frac{\alpha - b_0(c_0, c_1)}{\beta_1}\sin(\beta_1 t_k + \beta_2 t_k^2)\Big]. \quad (45)$$

Эта задача решается аналогично на основе линеаризации нелинейной зависимости (45) по параметрам c_0, c_1, c_2, α, β_1 и β_2:

$$\Delta u_k \approx \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial c_0}\Delta c_0^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial c_1}\Delta c_1^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial c_2}\Delta c_2^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \alpha}\Delta \alpha^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1^{(i)} + \frac{\partial \hat{z}_k^{(i)}}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2^{(i)},$$

где

$$\Delta u_k^{(i)} = u_k - \hat{u}_k^{(i)}, \quad \hat{u}_k^{(i)} = \hat{u}_k(\hat{c}_0^{(i)}, \hat{c}_1^{(i)}, \hat{c}_2^{(i)}, \hat{\alpha}^{(i)}, \hat{\beta}_1^{(i)}, \hat{\beta}_2^{(i)}),$$

$$\Delta c_0^{(i)} = c_0 - \hat{c}_0^{(i)}, \quad \Delta c_1^{(i)} = c_1 - \hat{c}_1^{(i)}, \quad \Delta c_2^{(i)} = c_2 - \hat{c}_2^{(i)},$$

$$\Delta \alpha^{(i)} = \alpha - \hat{\alpha}^{(i)}, \quad \Delta \beta_1^{(i)} = \beta_1 - \hat{\beta}_1^{(i)}, \quad \Delta \beta_2^{(i)} = \beta_2 - \hat{\beta}_2^{(i)};$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial c_0} = \frac{\hat{u}_k^{(i)}}{\hat{c}_0^{(i)}} - e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k}\Big[\cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) + \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{c}_1^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}}\sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2)\Big],$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial c_1} = -\frac{\hat{c}_0^{(i)} t_k}{(1+\hat{c}_1^{(i)} t_k + \hat{c}_2^{(i)} t_k^2)} + \frac{\hat{c}_0^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2),$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial c_2} = -\frac{\hat{c}_0^{(i)} t_k^2}{(1+\hat{c}_1^{(i)} t_k + \hat{c}_2^{(i)} t_k^2)},$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial \alpha} = \hat{a}_0^{(i)} e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \Big[t_k \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) + \\ + \frac{t_k(\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}) - 1}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \Big],$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial \beta_1} = -\hat{a}_0^{(i)} e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \Big[t_k \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \\ - \Big(t_k + \frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}}{(\hat{\beta}_1^{(i)})^2} \Big) \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \Big],$$

$$\frac{\partial \hat{u}_k^{(i)}}{\partial \beta_2} = -\hat{a}_0^{(i)} t_k^2 e^{-\hat{\alpha}^{(i)} t_k} \Big[\frac{\hat{\alpha}^{(i)} - \hat{b}_0^{(i)}}{\hat{\beta}_1^{(i)}} \cos(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) - \sin(\hat{\beta}_1^{(i)} t_k + \hat{\beta}_2^{(i)} t_k^2) \Big]$$

при

$$\hat{a}_0^{(i)} = \hat{c}_0^{(i)} - u_0 \quad \text{и} \quad \hat{b}_0^{(i)} = \frac{\hat{c}_0^{(i)} \hat{c}_1^{(i)} + u_0'}{\hat{c}_0^{(i)} - u_0}.$$

В качестве начального приближения принимаются оценки, полученные на предыдущих этапах:

$$\hat{c}_0^{(0)} = 1.017, \quad \hat{c}_1^{(0)} = 25.32, \quad \hat{c}_2^{(0)} = 7.566,$$

$$\hat{\alpha}^{(i)} = 333.2, \quad \hat{\beta}_1^{(0)} = 146.0, \quad \hat{\beta}_2^{(0)} = 37273.5$$

и, соответственно, $\hat{a}_0^{(0)} = 1.009$ и $\hat{b}_0^{(0)} = 29.06$.

В табл. 5 представлены результаты вычислений среднеквадратичных оценок параметров модели (45) для каждой итерации.

Таблица 5

Оценка параметров модели (45) для каждой итерации [Estimates of model parameters (45) for each iteration]

Iteration number	Estimates of model parameters					
	$\hat{c}_0^{(i)}$	$\hat{c}_1^{(i)}$	$\hat{c}_2^{(i)}$	$\hat{\alpha}^{(i)}$	$\hat{\beta}_1^{(i)}$	$\hat{\beta}_2^{(i)}$
0	1.017	25.32	7.566	333.2	146.0	37273.5
1	0.982	24.17	8.718	301.4	154.9	36223.5
2	0.985	24.27	8.672	312.2	151.4	37238.6
3	0.983	24.20	8.746	306.5	152.9	36763.4
4	0.984	24.23	8.716	309.5	152.1	37019.9
5	0.984	24.22	8.733	307.9	152.5	36888.9
6	0.984	24.22	8.724	308.7	152.3	36957.5
7	0.984	24.22	8.729	308.3	152.4	36922.0

Таким образом, оценки параметров, минимизирующие среднеквадратичное отклонение модели (45) от результатов эксперимента u_k, принимают следующие значения:

$$\hat{c}_0 = 0.984,\ \hat{c}_1 = 24.22,\ \hat{c}_2 = 8.729,\ \hat{\alpha} = 308.3,\ \hat{\beta}_1 = 152.4,\ \hat{\beta}_2 = 36922.0,$$

а сама математическая модель, описывающая импульс подводной ударной волны, наблюдаемый на выходе датчика давления, имеет вид

$$\hat{u}(t) = \frac{0.984}{1 + 24.22t + 8.729t^2} - 0.976e^{-308.3t}\big[\cos(152.4t + 36922.0t^2) + \\ + 28.08\sin(152.4t + 36922.0t^2)\big]. \quad (46)$$

При оценке адекватности модели (46) результатам эксперимента u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, можно воспользоваться величиной остаточной суммы квадратов

$$Q_{\text{res}} = \|u - \hat{u}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - \hat{u}_k)^2 = 0.231, \quad s^2_{\text{res}} = 0.00013,$$

что в относительных единицах составляет $\frac{\|u-\hat{u}\|}{\|u\|} \cdot 100\,\% = 5.3\,\%$.

График зависимости (46) представлен на рис. 7.

Выделяя из формулы (46) составляющую, описывающую монотонный спад давления на выходе датчика, получаем математическую модель вида

$$\hat{y}(t) = \frac{0.984}{1 + 24.22t + 8.729t^2}. \quad (47)$$

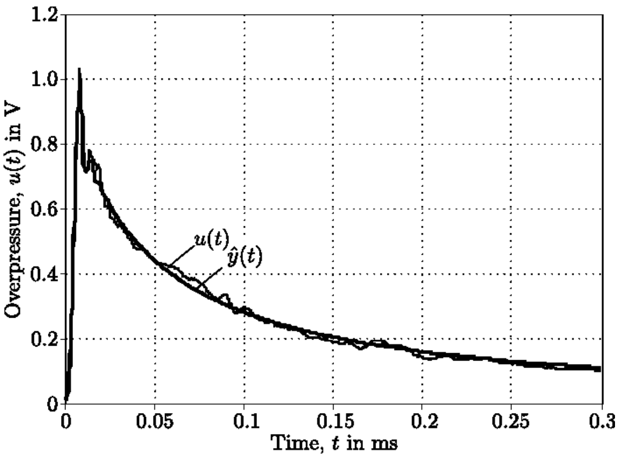


Рис. 7. Экспериментальные данные и кривая зависимости, построенная на основе математической модели (46), аппроксимирующей импульс подводной ударной волны

[Fig. 7. Experimental data dependence curve which approximates the impulse underwater shock wave built on the basis of the mathematical model (46)]

С учетом параметров построенной модели (47) вычислим энергию импульса ударной волны:

$$J_{0.95} = 0.95 J_{\infty}.$$

Интеграл J_{∞} на бесконечном промежутке $t \in [0, \infty)$ вычисляется по формуле (40):

$$J_{\infty} = 0.0370.$$

Отсюда

$$J_{0.95} = 0.95 \cdot 0.0370 = 0.0352.$$

Длительность импульса $t_{0.95}$ ударной волны с энергией $J_{0.95} = 0.0352$, найденная в соответствии с формулой (42) и описанным выше алгоритмом, составляет величину $t_{0.95} = 0.420$ мсек.

Проведен сравнительный анализ математических моделей (43) и (47), аппроксимирующих спад избыточного давления, где модель (43) была построена на первом шаге алгоритма идентификации импульса ударной волны, когда решалась задача предварительной оценки параметров. Результаты сравнения систематизированы в табл. 6.

Таблица 6

Сравнительный анализ математических моделей (43) и (47) [Comparative analysis of mathematical models (43) and (47)]

	Mathematical models which approximate the overpressure decrease at the outlet of the pressure sensor	
	The model (43)	The model (47)
The model equation	$\hat{y}(t) = \dfrac{1.017}{1 + 25.32t + 7.566t^2}$	$\hat{y}(t) = \dfrac{0.984}{1 + 24.22t + 8.729t^2}$
The residual sum of squares for a model deviation from test results $t \in [0.032; 0.637]$	$Q_{\text{res}} = 0.0172, \quad 5.4\%$	$Q_{\text{res}} = 0.0169, \quad 5.3\%$
Energy and duration of a shock wave	$J_{\infty} = 0.0383$, $J_{0.95} = 0.0364$, $t_{0.95} = 0.428$ msec	$J_{\infty} = 0.0370$, $J_{0.95} = 0.0352$, $t_{0.95} = 0.420$ msec

По результатам сравнения можно сделать вывод о статистической эквивалентности обеих моделей. Различие в результатах вычисления основных параметров модели импульса подводной ударной волны не превышает 5 %, что соизмеримо с естественным разбросом данных эксперимента относительно построенных моделей. Поэтому при оценке основных информативных характеристик импульса ударной волны — максимального избыточного давления и энергии импульса в первом приближении можно использовать достаточно простой алгоритм построения математической модели, описывающий монотонный спад избыточного давления на выходе датчика.

Заключение. В данной работе разработаны и описаны алгоритмы построения математических моделей импульса подводной ударной волны, а также алгоритмы методов нелинейного оценивания параметров этих моделей на основе результатов натурных испытаний.

Приведены результаты численно-аналитических исследований и сравнительный анализ помехозащищенности и быстродействия различных алгоритмов нелинейного оценивания параметров математических моделей подводной ударной волны.

На основе анализа данных натурного эксперимента построена математическая модель датчика давления в форме линейного дифференциального оператора второго порядка с переменными коэффициентами, а также модель в виде импульсной характеристики. Описана область применения этих моделей.

Разработан и описан алгоритм численного метода построения математической модели импульса подводной ударной волны, наблюдаемого на выходе датчика давления, учитывающей инерционные свойства датчика давления.

Разработан и реализован численный метод оценки энергии импульса ударной волны на основе результатов эксперимента в форме осциллограммы избыточного давления, полученной при натурных испытаниях, как на бесконечном промежутке времени, так и при заданной длительности импульса.

Приведены результаты апробации разработанных численных методов математического моделирования импульса подводной ударной волны при обработке результатов эксперимента при взрыве 500 грамм пластита, которые вместе с результатами численно-аналитических исследований подтверждают достоверность и эффективность представленных в работе алгоритмов вычислений и методов нелинейного оценивания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. В.Е. Зотеев — получение аналитических решений и их анализ, визуализация и верификация результатов, черновик и чистовик рукописи. С.Ю. Ганигин — консультирование, анализ экспериментов, черновик части рукописи. Д.А. Деморецкий — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, руководство и консультирование, анализ результатов расчетов. М.В. Ненашев — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, консультирование, анализ результатов расчетов. А.В. Губинский — анализ литературы, анализ экспериментов, черновик части рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. A-man Z., Wen-shan Y., Xiong-liang Y. Numerical simulation of underwater contact explosion // *Applied Ocean Research*, 2012. vol. 34. pp. 10–20. `https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.009`.
2. Zong Z., Zhao Y., Li H. A numerical study of whole ship structural damage resulting from close-in underwater explosion shock // *Marine Structures*, 2013. vol. 31. pp. 24–43. `https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2013.01.004`.
3. Zhang N., Zong Z. Hydro-elastic-plastic dynamic response of a ship hull girder subjected to an underwater bubble // *Marine Structures*, 2012. vol. 29, no. 1. pp. 177–197. `https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.05.008`.
4. Cole R. H. *Underwater explosions*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1948. 437 pp.
5. Song F., Guo-ning, Jin-hua P. Experimental Study and Numerical Simulation of CL-20-

Based Aluminized Explosive in Underwater Explosion Hanneng Cailiao // *Chinese J. Energetic Materials*, 2018. vol. 26, no. 8. pp. 686–695. https://doi.org/10.11943/CJEM2017376.

6. Kowsarinia E., Alizadeh Y., Salavati pour H. S. Experimental evaluation of blast wave parameters in underwater explosion of hexogen charges // *Int. J. Eng.*, 2012. vol. 25, no. 1(B). pp. 63–70. https://doi.org/10.5829/idosi.ije.2012.25.01b.08.
7. Lawrence G. W. Shock wave pressure in free water as a function of explosive composition / *12th International Detonation Symposium* (San Diego, California, August 11–16, 2002), 2002. Retrieved from http://www.intdetsymp.org/detsymp2002/PaperSubmit/FinalManuscript/pdf/Lawrence-221.pdf (March 29, 2021).
8. Moon S.-J., Kwon J.-I, Park J.-W., Chung J.-H. Assessment on shock pressure acquisition from underwater explosion using uncertainty of measurement // *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.*, 2017. vol. 9, no. 6. pp. 589–597. https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2017.04.002.
9. Кедринский В. К. *Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели.* Новосибирск: СО РАН, 2000. 435 с.
10. Фань Чж.-Ц., Ма Х.-Х., Шень Чж.-У, Линь М.-Цз. Измерение давления при подводном взрыве алюминизированных взрывчатых веществ ПВДФ-датчиком // *Физика горения и взрыва*, 2015. Т. 51, № 3. С. 106–111. https://doi.org/10.15372/FGV20150301.
11. Wedberg R. Using underwater explosion and cylinder expansion tests to calibrate afterburn models for aluminized explosives // *AIP Conf. Proc.*, 2018. vol. 1979, 150040. https://doi.org/10.1063/1.5044996.
12. Huang C., Liu M., Wang B., Zhang Y. Underwater explosion of slender explosives: Directional effects of shock waves and structure responses // *Int. J. Impact Eng.*, 2019. vol. 130. pp. 266–280. https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2019.04.018.
13. De Candia S. M., Ojeda R., Reid W., Ratcliffe M., Binns J. The whipping response of a submerged free-free cylinder due to underwater explosions / *Proc. of the Pacific 2017 International Maritime Conference*, Australia, Sydney, October 3–5, 2017, 2017. Retrieved from https://eprints.utas.edu.au/31578/ (March 29, 2021).
14. Park I.-K., Kim J.-C., An C.-W., Cho D.-S. Measurement of naval ship responses to underwater explosion shock loadings // *Shock and Vibration*, 2003. vol. 10. pp. 365–377, 803475. https://doi.org/10.1155/2003/803475.
15. Murata K., Takahashi K., Kato Y. Precise measurements of underwater explosion phenomena by pressure sensor using fluoropolymer // *J. Mater. Process. Technol.*, 1999. vol. 85, no. 1–3. pp. 39–42. https://doi.org/10.1016/S0924-0136(98)00251-9.
16. Озерецковский О. И. *Действие взрыва на подводные объекты* / ред. Е. С. Шахиджанова. М.: ЦНИИХМ, 2007. 262 с.
17. Geetha M., Nair U. R., Sarwade D. B., Gore G. M., Asthana S. N., Singh H. Studies on CL-20: The most powerful high energy material // *J. Therm. Anal. Calor.*, 2003. vol. 73, no. 3. pp. 913–922. https://doi.org/10.1023/A:1025859203860.
18. Пановко Я. Г. *Основы прикладной теории колебаний и удара.* Л.: Машиностроение, 1976. 320 с.
19. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях.* Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с. [Granovskii V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of processing experimental data in measurements]. Leningrad: Energoatomizdat, 1990. 288 pp. (In Russian)]
20. Draper N. R., Smith H. Applied Regression Analysis / Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1998. xix+716 pp. https://doi.org/10.1002/9781118625590.
21. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии.* М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
22. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1963. vol. 11, no. 2. pp. 431–441. https://doi.org/10.1137/0111030.

23. Hartley H. O., Booker A. Nonlinear least squares estimation // *Ann. Math. Statist.*, 1965. vol. 36, no. 2. pp. 638–650. https://doi.org/10.1214/aoms/1177700171.
24. Себер Дж. *Линейный регрессионный анализ.* М.: Мир, 1980. 456 с.
25. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков О. *Прикладной линейный регрессионный анализ.* М.: Финансы и статистика, 1987. 238 с.
26. Зотеев В. Е. *Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений.* М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
27. Зотеев В. Е., Стукалова Е. Д., Башкинова Е. В. Численный метод оценки параметров нелинейного дифференциального оператора второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 556–580. https://doi.org/10.14498/vsgtu1560.
28. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. https://doi.org/10.14498/vsgtu1643.
29. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984. 320 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 127–162
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1849

MSC: 76L05

Mathematical modeling and noise-proof estimation of shock wave pulse parameters based on the results of an experiment in underwater explosions

© ***V. E. Zoteev, S. Yu. Ganigin, D. A. Demoretsky, M. V. Nenashev, A. V. Gubinsky***

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The article deals with the construction of a mathematical model of the underwater shock wave pulse based on the results of the experiment and numerical and analytical scientific research. The results of the development and comparative analysis of various numerical methods for nonlinear estimation of the parameters of this model are presented. A numerical method is proposed for estimating the pulse energy of a shock wave based on the experimental results in the form of an overpressure waveform both over an infinite period of time and at a given pulse duration. The results of testing the developed numerical methods for mathematical modeling of the underwater shock wave pulse when processing the results of the experiment at the explosion of model charge are presented. The reliability and efficiency of the computational algorithms and numerical methods of nonlinear estimation presented in this paper is confirmed by the results of numerical and analytical studies and mathematical models constructed on the basis of experimental data.

Keywords: underwater shock wave pulse, mathematical model, nonlinear regression analysis, generalized regression model, root-mean-square estimation, statistical processing of experimental results.

Received: 12th February, 2021 / Revised: 6th March, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 29th March, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. V.E. Zoteev: Obtaining analytical solutions and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original

Research Article

Please cite this article in press as:
Zoteev V. E., Ganigin S. Yu., Demoretsky D. A., Nenashev M. V., Gubinsky A. V. Mathematical modeling and noise-proof estimation of shock wave pulse parameters based on the results of an experiment in underwater explosions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 127–162. https://doi.org/10.14498/vsgtu1849 (In Russian).

Authors' Details:
Vladimir E. Zoteev https://orcid.org/0000-0001-7114-4894
Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: zoteev-ve@mail.ru

draft and review & editing. S.Yu. Ganigin: Consulting; Analysis of experiments; Writing — part of the original draft. D.A. Demoretsky: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Supervision and consulting; Analysis of calculation results. M.V. Nenashev: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Consulting; Analysis of calculation results. A.V. Gubinsky: Literature review; Analysis of experiments; Writing — part of the original draft. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. A-man Z., Wen-shan Y., Xiong-liang Y. Numerical simulation of underwater contact explosion, *Applied Ocean Research*, 2012, vol. 34, pp. 10–20. https://doi.org/10.1016/j.apor.2011.07.009.
2. Zong Z., Zhao Y., Li H. A numerical study of whole ship structural damage resulting from close-in underwater explosion shock, *Marine Structures*, 2013, vol. 31, pp. 24–43. https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2013.01.004.
3. Zhang N., Zong Z. Hydro-elastic-plastic dynamic response of a ship hull girder subjected to an underwater bubble, *Marine Structures*, 2012, vol. 29, no. 1, pp. 177–197. https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.05.008.
4. Cole R. H. *Underwater explosions*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1948, 437 pp.
5. Song F., Guo-ning, Jin-hua P. Experimental Study and Numerical Simulation of CL-20-Based Aluminized Explosive in Underwater Explosion Hanneng Cailiao, *Chinese J. Energetic Materials*, 2018, vol. 26, no. 8, pp. 686–695. https://doi.org/10.11943/CJEM2017376.
6. Kowsarinia E., Alizadeh Y., Salavati pour H. S. Experimental evaluation of blast wave parameters in underwater explosion of hexogen charges, *Int. J. Eng.*, 2012, vol. 25, no. 1(B), pp. 63–70. https://doi.org/10.5829/idosi.ije.2012.25.01b.08.
7. Lawrence G. W. Shock wave pressure in free water as a function of explosive composition, In: *12th International Detonation Symposium* (San Diego, California, August 11–16, 2002), 2002. Retrieved from http://www.intdetsymp.org/detsymp2002/PaperSubmit/FinalManuscript/pdf/Lawrence-221.pdf (March 29, 2021).
8. Moon S.-J., Kwon J.-I, Park J.-W., Chung J.-H. Assessment on shock pressure acquisition from underwater explosion using uncertainty of measurement, *Int. J. Nav. Archit. Ocean Eng.*, 2017, vol. 9, no. 6, pp. 589–597. https://doi.org/10.1016/j.ijnaoe.2017.04.002.
9. Kedrinskiy V. K. *Hydrodynamics of Explosion. Experiment and Models*. Berlin, Springer, 2005, xii+362 pp. https://doi.org/10.1007/3-540-28563-6.
10. Fan Z., Ma H., Shen Z., Lin M.Application of polyvinylidene fluoride for pressure measurements in an underwater explosion of aluminized explosives, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 381–386. https://doi.org/10.1134/S0010508215030156.

Sergey Yu. Ganigin https://orcid.org/0000-0001-5778-6516
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Solid Chemical Technology;
e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Dmitry A. Demoretsky https://orcid.org/0000-0002-4523-1465
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Solid Chemical Technology;
e-mail: dda74@inbox.ru

Maxim V. Nenashev https://orcid.org/0000-0003-3918-5340
Dr. Tech. Sci., Professor; First Vice-Rector — Vice-Rector for Research;
e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Aleksey V. Gubinsky https://orcid.org/0000-0002-9732-2596
Postgraduate Student; Dept. of Solid Chemical Technology; e-mail: gubinskiy.av@samgtu.ru

11. Wedberg R. Using underwater explosion and cylinder expansion tests to calibrate afterburn models for aluminized explosives, *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 1979, 150040. `https://doi.org/10.1063/1.5044996`.
12. Huang C., Liu M., Wang B., Zhang Y. Underwater explosion of slender explosives: Directional effects of shock waves and structure responses, *Int. J. Impact Eng.*, 2019, vol. 130, pp. 266–280. `https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2019.04.018`.
13. De Candia S. M., Ojeda R., Reid W., Ratcliffe M., Binns J. The whipping response of a submerged free-free cylinder due to underwater explosions, In: *Proc. of the Pacific 2017 International Maritime Conference*, Australia, Sydney, October 3–5, 2017, 2017. Retrieved from `https://eprints.utas.edu.au/31578/` (March 29, 2021).
14. Park I.-K., Kim J.-C., An C.-W., Cho D.-S. Measurement of naval ship responses to underwater explosion shock loadings, *Shock and Vibration*, 2003, vol. 10, pp. 365–377, 803475. `https://doi.org/10.1155/2003/803475`.
15. Murata K., Takahashi K., Kato Y. Precise measurements of underwater explosion phenomena by pressure sensor using fluoropolymer, *J. Mater. Process. Technol.*, 1999, vol. 85, no. 1–3, pp. 39–42. `https://doi.org/10.1016/S0924-0136(98)00251-9`.
16. Ozeretskovskii O. I. *Deistvie vzryva na podvodnye ob"ekty* [The Effect of an Explosion on Underwater Objects], ed. E. S. Shakhidzhanova. Moscow, Central Scientific Research Institute of Chemistry and Mechanics, 2007, 262 pp. (In Russian)
17. Geetha M., Nair U. R., Sarwade D. B., Gore G. M., Asthana S. N., Singh H. Studies on CL-20: The most powerful high energy material, *J. Therm. Anal. Calor.*, 2003, vol. 73, no. 3, pp. 913–922. `https://doi.org/10.1023/A:1025859203860`.
18. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoi teorii kolebanii i udara* [Fundamentals of Applied Theory of Vibrations and Shock]. Leningrad, Mashinostroenie, 1976, 320 pp. (In Russian)
19. Granovskii V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of processing experimental data in measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
20. Draper N. R., Smith H. Applied Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Statistics. New York, John Wiley & Sons, 1998, xix+716 pp. `https://doi.org/10.1002/9781118625590`.
21. Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow, Finance and Statistics, 1981, 302 pp. (In Russian)
22. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 431–441. `https://doi.org/10.1137/0111030`.
23. Hartley H. O., Booker A. Nonlinear least squares estimation, *Ann. Math. Statist.*, 1965, vol. 36, no. 2, pp. 638–650. `https://doi.org/10.1214/aoms/1177700171`.
24. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, xvi+565 pp. `https://doi.org/10.1002/9780471722199`.
25. Vuchkov I., Boyadzhieva L., Solakov O. *Prikladnoi lineinyi regressionnyi analiz* [Applied Linear Regression Analysis]. Moscow, Finance and Statistics, 1987, 238 pp. (In Russian)
26. Zoteev V. E. *Parametricheskaia identifikatsiia dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravnenii* [Parametric Identification of Dissipative Mechanical Systems Based on Difference Equations]. Moscow, Mashinostroenie, 2009, 344 pp. (In Russian)
27. Zoteev V. E., Stukalova E. D., Bashkinova E. V. Numerical method of estimation of parameters of the nonlinear differential operator of the second order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 556–580 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1560`.
28. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1643`.
29. Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A. *Matritsy i vychisleniia* [Matrixes and Computations]. Moscow, Nauka, 1984, 320 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 163–192
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1791

УДК 517.958:530.17

Обзор способов вывода критериев подобия в механике

© *Н. В. Крамаренко*

Новосибирский государственный технический университет,
Россия, 630073, Новосибирск, пр-т Карла Маркса, 20.

Аннотация

Дается обзор различных способов получения критериев подобия, приводится их классификация, которая включает пять способов их вывода из дифференциальных уравнений и семь способов — из анализа размерностей. Все способы сравниваются на одной задаче механики о вынужденных колебаниях груза, приводящей к четырем числам подобия. Такой подход помогает сравнить трудозатраты, необходимые для вывода чисел подобия различными способами. По каждому способу дается перечень литературы, где он упоминается, и краткое описание задач, которые там решаются. В конце приводится сводная таблица, показывающая, какие способы рассмотрены в упоминаемых работах. Из таблицы видна сравнительная популярность способов.

Ключевые слова: теория подобия, методы подобия, критерии подобия, числа подобия, индикаторы подобия, анализ размерностей.

Получение: 12 июня 2020 г. / Исправление: 2 марта 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 29 марта 2021 г.

Введение

О преподавании. Теория подобия преподается во многих вузах. О желательности преподавания теории подобия для студентов технических специальностей говорится уже давно. Например, в 1979 году на Всесоюзном совещании-семинаре заведующих кафедрами механики вузов страны Л. Г. Лойцянский в своем докладе [26] отмечал «важность введения в преподаваемые курсы теоретической механики хотя бы элементарных сведений о подобии и размерности». В 1998 году такую же мысль высказывал И. Ш. Коган [17]: «Основы теории подобия следует излагать перед началом изучения технических дисциплин, с тем чтобы применять полученные знания при изучении каждой из них».

Обзор

Образец для цитирования
Крамаренко Н. В. Обзор способов вывода критериев подобия в механике // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 163–192. https://doi.org/10.14498/vsgtu1791.

Сведения об авторе
Николай Владимирович Крамаренко https://orcid.org/0000-0002-6301-1255
кандидат технических наук, доцент; каф. прочности летательных аппаратов;
e-mail: kramnv@rambler.ru ; e-mail: n.kramarenko@corp.nstu.ru

О терминах. В литературе используются термины «*методы* подобия» и «*теория* подобия». Какой более правильный? С общефизической точки зрения теорией можно называть такой раздел физики, где изучаются те или иные реальные физические процессы, происходящие с веществом или полем. Поэтому с этих позиций правильнее говорить «методы подобия» в той или иной физической теории, по аналогии с названиями других методов, например, численные методы, вариационные методы, методы оптимизации. С математической точки зрения все методы решения физических задач имеют свою теорию, и с этих позиций естественно говорить «теория подобия». В данной работе будем употреблять оба термина.

Кроме того, в литературе используется термин «теория подобия и анализ размерностей», т. е. теория *подобия* противопоставляется анализу *размерностей*. Такое противопоставление может сформировать неправильное понимание предмета. Для целостного восприятия методов подобия будем вместо термина «теория подобия» использовать термин «анализ уравнений». Таким образом, теория подобия делится на два направления: анализ уравнений и анализ размерностей. Такая терминология не нова, она встречается, например, в работах М. В. Кирпичева [14, с. 90], С. С. Кутателадзе [23, введение]. Добавим, что в [23] термины «теория» и «методы» подобия заменены единым термином «анализ» подобия.

Еще одна неоднозначность возникает при употреблении терминов *критерий* подобия и *число* подобия. Согласно сборнику рекомендуемых терминов по теории подобия [32], эти термины равнозначны, и на английском языке они обозначаются единым выражением similarity criterion. Для того чтобы отличать входные параметры задачи от выходных, в [32] вводятся понятия определяющего и определяемого критериев подобия. Под определяющим (англ. independent similarity criterion) понимается критерий подобия, содержащий независимую переменную, под определяемым (англ. dependent similarity criterion) — критерий подобия, содержащий зависимую переменную (искомую величину). Для того чтобы выделить эти различия, например, Л. А. Шаповалов [44] вводит подчеркивание в критериальном уравнении:

$$\pi_1 = f(\underline{\pi_2, \pi_3, \ldots}).$$

Здесь подчеркнуты определяющие критерии, слева – определяемый критерий подобия. В противоположность сборнику [32] Л. Г. Лойцянский [24–26] для разграничения понятий называет критериями только определяющие критерии подобия, а под числами подобия понимает все критерии — и определяющие, и определяемые: «критериев подобия меньше, чем чисел подобия». В качестве обоснования такой позиции Л. Г. Лойцянский приводит рассуждение о том, что если равны критерии, то подобие двух сравниваемых явлений («модели» и «натуры») будет обеспечено независимо от остальных чисел подобия.

Об обозначениях. Традиционно безразмерные числа и критерии подобия обозначаются прописной или строчной греческой буквой «пи». Такое обозначение возникло, вероятно, от первой буквы греческого слова παραμετρο (параметр, аргумент)[1].

О получении критериев подобия. В классическом представлении числа подобия, или инварианты, можно получить двумя путями: либо из диффе-

[1] По материалам сайта `Wikipedia`.

ренциальных уравнений, описывающих процесс или явление, либо из анализа размерностей параметров задачи.

1. Способы вывода критериев подобия из дифференциальных уравнений

Рассмотрим следующие пять способов вывода чисел подобия из дифференциальных уравнений, которые для краткости обозначим через Д1–Д5:

Д1. Способ нормализации уравнения, или приведения уравнения к безразмерному виду;
Д2. Способ упрощенной нормализации уравнения;
Д3. Способ деления уравнения на одно из слагаемых;
Д4. Способ сравнения двух уравнений через индикаторы подобия;
Д5. Способ сравнения двух сил через индикаторы подобия.

Общие положения по выводу чисел подобия будем иллюстрировать примерами для задачи о вынужденных колебаниях груза, которые описываются уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+cx=P\sin\omega t, \tag{1}$$

где m — масса груза (материальной точки); k — коэффициент демпфирования; c — жесткость пружины; P, ω — амплитуда и круговая частота возмущающей силы. В этом уравнении четыре слагаемых, и каждое слагаемое есть сила: первое — сила инерции F_m, второе — сила сопротивления F_k, третье — сила упругости F_c, справа стоит внешняя возмущающая сила F_ω, например, от вращающегося дебаланса:

$$F_m=m\frac{d^2x}{dt^2},\quad F_k=k\frac{dx}{dt},\quad F_c=cx,\quad F_\omega=P\sin\omega t. \tag{2}$$

Д1. Способ нормализации уравнения, или приведения уравнения к безразмерному виду. Выберем характерные значения для аргумента t, функции x и параметров

$$t_*,\ x_*,\ m_*,\ k_*,\ c_*,\ P_*,\ \omega_*. \tag{3}$$

На первом этапе рассуждений эти величины остаются произвольными. Определим соответствующие безразмерные величины:

$$\overline{t}=\frac{t}{t_*},\quad \overline{x}=\frac{x}{x_*},\quad \overline{m}=\frac{m}{m_*},\quad \overline{k}=\frac{k}{k_*},\quad \overline{c}=\frac{c}{c_*},\quad \overline{P}=\frac{P}{P_*},\quad \overline{\omega}=\frac{\omega}{\omega_*}.$$

Тогда размерные величины и размерные производные примут следующий вид:

$$t=\overline{t}t_*,\quad x=\overline{x}x_*,\quad m=\overline{m}m_*,\quad k=\overline{k}k_*,\quad c=\overline{c}c_*,\quad P=\overline{P}P_*,\quad \omega=\overline{\omega}\omega_*;$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{x_*}{t_*}\right)\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{x_*}{t_*^2}\right)\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2}.$$

Подставим их в уравнение (1):

$$\left(m_*\frac{x_*}{t_*^2}\right)\overline{m}\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2}+\left(k_*\frac{x_*}{t_*}\right)\overline{k}\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}}+(c_*x_*)\overline{cx}=P_*\overline{P}\sin(\omega_*t_*\overline{\omega t}).$$

Поделим все слагаемые на первую скобку:

$$\overline{m}\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2}+\left(\frac{k_*t_*}{m_*}\right)\overline{k}\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}}+\left(\frac{c_*t_*^2}{m_*}\right)\overline{cx}=\left(\frac{P_*t_*^2}{m_*x_*}\right)\overline{P}\sin\big((\omega_*t_*)\overline{\omega t}\big).$$

Далее проведем следующие логические рассуждения:

1) здесь первое слагаемое есть величина безразмерная, следовательно, все остальные слагаемые тоже должны быть безразмерными по правилу одинаковых размерностей Фурье;
2) в каждом слагаемом скобка умножается на безразмерную величину, следовательно, каждая скобка тоже должна быть величиной безразмерной.

Обозначим выражения в скобках через безразмерные параметры π и получим безразмерное уравнение

$$\overline{m}\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2}+\pi_1\overline{k}\frac{d\overline{x}}{d\overline{t}}+\pi_2\overline{cx}=\pi_3\overline{P}\sin(\pi_4\overline{\omega t}). \tag{4}$$

Здесь первые три безразмерных параметра π имеют физический смысл отношения соответствующих сил, а четвертый — угла поворота дебаланса:

$$\pi_1=\frac{F_k}{F_m}=\frac{k_*t_*}{m_*},\quad \pi_2=\frac{F_c}{F_m}=\frac{c_*t_*^2}{m_*},\quad \pi_3=\frac{F_\omega}{F_m}=\frac{P_*t_*^2}{m_*x_*},\quad \pi_4=\omega_*t_*. \tag{5}$$

На втором этапе рассуждений характерным размерным величинам (3) следует задать конкретные значения. Если эти значения будут близки к максимально возможным для этой задачи, то безразмерное уравнение (4) *нормализуется*, т. е. каждое слагаемое уравнения будет по модулю меньше единицы или равно ей. Зададим следующие значения:

$$\begin{aligned} &t_*=t_p,\quad x_*=x_s=P/c,\quad m_*=m,\\ &k_*=k,\quad c_*=c,\quad P_*=P,\quad \omega_*=\omega_0=\sqrt{c/m}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь t_p — время периода колебаний; x_s — статическое отклонение груза под действием постоянной силы P; m, k, c, P — соответствующие параметры задачи; ω_0 — частота собственных колебаний без демпфирования. Тогда безразмерное отклонение $\overline{x}$ и безразмерное время $\overline{t}$ будут измеряться в долях от статического отклонения x_s и от периода колебаний t_p соответственно:

$$\overline{x}=\frac{x}{x_*}=\frac{x}{x_s},\quad \overline{t}=\frac{t}{t_*}=\frac{t}{t_p},$$

а безразмерные масса, коэффициент демпфирования, жесткость пружины и внешняя сила будут равны единице:

$$\overline{m}=\frac{m}{m_*}=\frac{m}{m}=1,\quad \overline{k}=\frac{k}{k_*}=\frac{k}{k}=1,\quad \overline{c}=\frac{c}{c_*}=\frac{c}{c}=1,\quad \overline{P}=\frac{P}{P_*}=\frac{P}{P}=1.$$

В результате уравнение (4) и коэффициенты π (5) примут вид

$$\frac{d^2\overline{x}}{d\overline{t}^2} + \pi_1 \frac{d\overline{x}}{d\overline{t}} + \pi_2 \overline{x} = \pi_3 \sin\left(\pi_4 \overline{\omega t}\right); \tag{7}$$

$$\pi_1 = \frac{k t_p}{m}, \quad \pi_2 = \frac{c t_p^2}{m}, \quad \pi_3 = \frac{P t_p^2}{m x_s}, \quad \pi_4 = \omega_0 t_p.$$

В теории подобия безразмерные коэффициенты π получили название чисел (критериев) подобия. Число π_4 называется числом гомохронности, число π_3 называется числом подобия Ньютона (отношение внешней силы к силе инерции). В дальнейшем у времени t_p, смещения x_s и частоты ω_0 индексы для краткости не будем писать, но подразумеваем, что это конкретные характерные значения (6).

Уравнение в безразмерном виде имеет три преимущества по сравнению с размерным уравнением:

1) из условия безразмерности чисел подобия π можно без решения дифференциального уравнения (7) провести сравнительный анализ параметров задачи, т. е. определить, во сколько раз изменится какой-либо параметр, если изменятся другие параметры;
2) приведение уравнения к безразмерному виду позволяет в общем случае сократить количество параметров, от которых зависит искомая функция, а это облегчает как проведение экспериментов, так и дальнейший анализ задачи;
3) безразмерная форма уравнений позволяет проводить аналоговое моделирование процесса в другой физической среде, например, изучать колебания сложной механической системы на электрической схеме. Такие исследования проводились на аналоговых ЭВМ до появления цифровых компьютеров с развитыми численными методами.

В результате получили, что натура и модель описываются одинаковыми безразмерными уравнениями (7), отличия только в характерных параметрах (6) и безразмерных комплексах π_1, π_2, π_3, π_4. Для подобия натуры и модели требуется, чтобы их π-коэффициенты совпадали:

$$\pi_1 = \frac{kt}{m} = \mathrm{idem}, \ \pi_2 = \frac{ct^2}{m} = \mathrm{idem}, \ \pi_3 = \frac{Pt^2}{mx} = \mathrm{idem}, \ \pi_4 = \omega t = \mathrm{idem}, \tag{8}$$

где idem в буквальном переводе с латинского означает «одно и то же».

Способ Д1 описан под разными названиями у многих авторов и применялся для различных задач.

К. С. Басниев и другие [6] рассматривают задачу о приведении уравнений к безразмерному виду на примере системы уравнений движения однородной вязкой несжимаемой жидкости. Из уравнения движения и граничных условий получают числа подобия Фруда, Рейнольдса, Эйлера, Струхаля. Для выяснения физического смысла чисел подобия авторы рассматривают в жидкости параллелепипед, на который действуют сила тяжести, сила локальной инерции, сила конвективной инерции и сила трения. Далее показывают, что числа подобия есть отношения этих сил.

Г. Биркгоф [7] со ссылкой на Руарка [54] называет этот способ инспекционным анализом и отмечает, что он основан на старой идее, которая была предложена Эренфест—Афанасьевой [51,52]. Инспекционный анализ — это нормализация дифференциальных уравнений и оценка малости отдельных слагаемых. Г. Биркгоф показывает применение этого способа на уравнениях Навье—Стокса для несжимаемой вязкой жидкости и получает числа Рейнольдса, Фруда, кавитации. На основе сравнения их величин делает следующие выводы о необходимых условиях приближенного моделирования:

– если влияние силы тяжести, сжимаемости и кавитации незначительно, то модель должна иметь то же самое число Рейнольдса;
– если не имеют значения сжимаемость, кавитация и вязкость, то моделировать надо по числу Фруда;
– если можно пренебречь сжимаемостью и вязкостью, но надо учитывать гравитационные и кавитационные эффекты, то следует сохранять неизменными число Фруда и число кавитации.

В. А. Винников и Г. Г. Каркашадзе [10] числа подобия Фруда, Рейнольдса, Эйлера, а также число Струхаля для вязких несжимаемых жидкостей получают из уравнения Навье—Стокса в векторной форме, которое приводят к безразмерному виду. Такую запись называют уравнением движения Навье—Стокса в критериальной форме.

А. А. Гухман [11] безразмерные уравнения называет уравнениями в относительной форме и получает числа подобия в трех задачах:

1) в задаче о температурном поле в твердом теле из уравнения теплопроводности выводит число Фурье, из уравнения для граничных условий выводит число Био;
2) в задаче о движении сплошной среды из уравнений сплошности и движения выводит числа Рейнольдса, Фруда, Эйлера;
3) в задаче о переносе тепла в движущейся среде выводит числа Пекле, Прандтля, Нуссельта, Маха.

В работах [20, 21] способом Д1 решаются две прикладные задачи. В работе [20] рассматривается задача о моделировании с помощью теории подобия свободных движений твердого тела в гравитационном поле, в работе [21] решается задача о моделировании жесткости балки.

А. А. Кудинов [22] на примере одномерного движения несжимаемой жидкости показывает приведение к безразмерному виду дифференциального уравнения Навье—Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями. Отмечает, что если исходная система уравнений содержала 11 переменных, то система уравнений в безразмерном виде содержит всего 8 обобщенных переменных. Сокращение числа переменных упрощает исследование.

С. С. Кутателадзе [23] рассматривает сложные задачи гидромеханики с учетом влияния температуры и массопереноса и при этом использует прием сведения дифференциальных уравнений к безразмерному виду.

Л. Г. Лойцянский [24, 25] при рассмотрении различных задач гидромеханики также использует этот прием.

В. С. Швыдкий и другие [28] получают условия, при которых достигается динамическое подобие двух течений, путем записи уравнений движения жидкости в безразмерной форме и приравнивания числовых коэффициентов в обеих системах.

Б. Т. Породнов [34] рассматривает изотермическое уравнение движения для невязких одноатомных газов и уравнение непрерывности. После приведения этих уравнений к безразмерному виду получает числа динамического подобия потоков Струхаля, Майевского, Рейнольдса, Фруда.

О. Я. Романов и В. В. Ходосов [35] кратко описывают этот способ, но примеров не приводят.

Дж. Серрин [39] кратко обсуждает вопросы динамического подобия. Замечает, что понятие динамического подобия принадлежит Стоксу (G. Stokes). В его работе [55] 1850 года о движении маятника в тормозящей жидкой среде не только впервые было сформулировано понятие динамического подобия, но и впервые фигурировала комбинация параметров течения, носящая сейчас название числа Рейнольдса.

С. С. Силин [40] использует способ безразмерных уравнений для задач резания материалов. Приводит формулу для безразмерной величины — числа пластичности B, характеризующего степень пластических деформаций металла снимаемого припуска и поверхностного слоя обрабатываемой детали. В эту формулу входят три безразмерных комплекса (числа подобия):

– число Пекле Pe, характеризующее степень влияния режимных условий процесса по сравнению с влиянием теплофизических свойств обрабатываемого материала;
– число F, отражающее влияние геометрии инструмента и отношения теплопроводностей инструментального и обрабатываемого материалов;
– число D, характеризующее геометрию сечения среза.

Этот способ также описывает В. А. Соколов [41].

Л. А. Шаповалов [44] со ссылкой на работу С. Дж. Клайна [16] отмечает, что под нормализацией физических уравнений и соответствующих им начальных и краевых условий подразумевается процедура, состоящая из двух операций:

1) уравнения приводятся к безразмерному виду;
2) все безразмерные параметры ограничиваются единицей.

Для успешной нормализации исходных размерных уравнений необходимо в качестве характерных размерных параметров выбрать их максимальные значения. Тогда соответствующие им безразмерные величины будут принимать значения в диапазоне от нуля до единицы. Нормализация помогает отбросить малые члены уравнений и затем проводить приближенное моделирование без соблюдения некоторых исходных критериев подобия.

Дальнейшим развитием способа нормализации уравнений является переход к естественным координатам, т. е. такое преобразование безразмерных аргументов, функций и параметров, чтобы в безразмерном уравнении не осталось параметров, и тогда безразмерная функция будет зависеть только от безразмерных аргументов без параметров. Такой способ преобразования переменных в [44] рассматривается на примере моделирования собственных поперечных колебаний балки постоянного поперечного сечения.

Л. А. Эпштейн [46] использует способ приведения уравнений к безразмерному виду в различных задачах гидромеханики.

Д2. Способ упрощенной нормализации уравнения. Суть способа состоит в том, что уравнение приводится к безразмерному виду путем умножения на алгебраический комплекс с обратной размерностью и затем у каждого одночлена отбрасываются знаки дифференциалов. В нашей задаче о вынужденных колебаниях груза в исходном уравнении (1) каждое слагаемое имеет размерность силы. Умножив его на величину с обратной размерностью

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + cx = P\sin(\omega t) \quad \Big| \quad \times\frac{t^2}{mx},$$

получим

$$\frac{t^2}{x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t^2k}{mx}\frac{dx}{dt} + \frac{t^2c}{m} = \frac{Pt^2}{mx}\sin(\omega t).$$

Отбросив знаки дифференциалов, в результате получаем в скобках те же числа подобия (8):

$$\frac{t^2}{x}\frac{x}{t^2} + \frac{t^2k}{mx}\frac{x}{t} + \frac{t^2c}{m} = \frac{Pt^2}{mx}\sin(\omega t);$$

$$1 + \left(\frac{kt}{m}\right) + \left(\frac{ct^2}{m}\right) = \left(\frac{Pt^2}{mx}\right)\sin(\omega t).$$

М. В. Кирпичев [14] этот способ называет *методом относительных единиц*. Для определения подобия он использует два термина: константы подобия (индикаторы) и инварианты (критерии) в зависимости от того, какое определение оказывается более удобным в смысле простоты изложения. Применяя способ упрощенной нормализации, из уравнения динамики точки М. В. Кирпичев выводит число Ньютона, из уравнения Навье—Стокса находит числа Фруда, Эйлера, Рейнольдса, а из них — числа Лагранжа, Галилея, Кирхгофа.

Р. Х. Санников [36] отмечает, что при получении чисел подобия по известным уравнениям исследуемых процессов возможны два случая.

Случай 1. Все члены уравнения — однородные функции параметров и их производных. При этом все члены уравнения имеют общий множитель, который может быть вынесен за скобки. В этом случае все члены уравнения делятся на какой-либо из них, и посредством элементарных преобразований получают числа подобия. В нашей задаче о колебаниях груза такой случай возникает в случае собственных колебаний, когда в правой части стоит ноль.

Случай 2. Часть членов уравнения — неоднородные функции параметров, не допускающие выноса за знак функции общего множителя. В этом случае числа подобия могут быть получены методом «интегральных аналогов». При этом используется то свойство подобных процессов, должны быть равны аргументы неоднородных функций. Далее в [36] описывается порядок действий из 8 пунктов. Такой алгоритм соответствует нашему способу Д2 — упрощенной нормализации уравнения.

Д3. Способ деления уравнения на одно из слагаемых. Суть способа состоит в том, что исходное дифференциальное уравнение записывается через размерности, а затем оно делится на одно из слагаемых. Рассмотрим нашу задачу о вынужденных колебаниях груза. Представим уравнение движения (1) через размерности, входящие в него:

$$\left[m\frac{d^2x}{dt^2}\right] + \left[k\frac{dx}{dt}\right] + [cx] = [P\sin(\omega t)], \quad \left[m\frac{x}{t^2}\right] + \left[k\frac{x}{t}\right] + [cx] = [P\sin(\omega t)].$$

Разделим все члены уравнения на первое слагаемое:

$$1 + \left[\frac{kt}{m}\right] + \left[\frac{ct^2}{m}\right] = \left[\frac{Pt^2}{mx}\right][\sin(\omega t)].$$

В скобках последнего равенства находим те же числа подобия (8).

П. М. Алабужев и др. [1] показывают применение этого способа на примере вынужденных колебаний груза.

В. А. Веников [9] называет этот способ методом интегральных аналогов и показывает его применение на том же примере вынужденных колебаний груза.

М. В. Кирпичев [14] также описывает этот способ, но примеров не приводит.

Д4. Способ сравнения двух уравнений через индикаторы подобия. В нашей задаче о вынужденных колебаниях груза натурный объект оставим без номера, а модельный обозначим номером 1. Запишем для них уравнения процесса — для натуры это будет уравнение (1), для модели — похожее уравнение:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} + k_1 \frac{dx_1}{dt_1} + c_1 x_1 = P_1 \sin(\omega_1 t_1). \tag{9}$$

Введем коэффициенты подобия:

$$t_c = \frac{t_1}{t}, \ \ x_c = \frac{x_1}{x}, \ \ m_c = \frac{m_1}{m}, \ \ k_c = \frac{k_1}{k}, \ \ c_c = \frac{c_1}{c}, \ \ P_c = \frac{P_1}{P}, \ \ \omega_c = \frac{\omega_1}{\omega}.$$

Определим параметры модели и ее производные через параметры натуры:

$$\begin{gathered} t_1 = t_c t, \quad x_1 = x_c x, \quad m_1 = m_c m, \\ k_1 = k_c k, \quad c_1 = c_c c, \quad P_1 = P_c P, \quad \omega_1 = \omega_c \omega; \\ \frac{dx_1}{dt_1} = \frac{x_c}{t_c}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} = \frac{x_c}{t_c^2}\frac{d^2 x}{dt^2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Подставим эти значения в уравнение модели (9) и сгруппируем коэффициенты подобия:

$$\left(\frac{m_c x_c}{t_c^2}\right) m \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{k_c x_c}{t_c}\right) k \frac{dx}{dt} + (c_c x_c) c x = (P_c) P \sin\big((\omega_c t_c)\omega t\big). \tag{11}$$

Для того чтобы модель была подобна натуре, необходимо, чтобы уравнение модели (11) совпадало с уравнением натуры (1). Это означает, что четыре комплексных коэффициента должны равняться между собой, а коэффициент под синусом должен равняться единице:

$$\frac{m_c x_c}{t_c^2} = \frac{k_c x_c}{t_c} = c_c x_c = P_c, \quad \omega_c t_c = 1.$$

Первые три равенства поделим на один из членов, например, на первый:

$$1 = \frac{k_c t_c}{m_c} = \frac{c_c t_c^2}{m_c} = \frac{P_c t_c^2}{m_c x_c}.$$

В результате получим четыре уравнения для индикаторов подобия:

$$\lambda_1 = \frac{k_c t_c}{m_c} = 1, \quad \lambda_2 = \frac{c_c t_c^2}{m_c} = 1, \quad \lambda_3 = \frac{P_c t_c^2}{m_c x_c} = 1, \quad \lambda_4 = \omega_c t_c = 1. \qquad (12)$$

Таким образом, если уравнение модели (11) совпадает с уравнением натуры (1), то все индикаторы подобия (12) равны единице, и модель будет подобна натуре. Подставим значения коэффициентов подобия в индикаторы подобия:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \frac{k_c t_c}{m_c} = 1, &\quad \frac{k_1}{k}\frac{t_1}{t}\frac{m}{m_1} = 1, \quad \frac{k_1 t_1}{m_1} = \frac{kt}{m};\\
\lambda_2 = \frac{c_c t_c^2}{m_c} = 1, &\quad \frac{c_1}{c}\frac{t_1^2}{t^2}\frac{m}{m_1} = 1, \quad \frac{c_1 t_1^2}{m_1} = \frac{ct^2}{m};\\
\lambda_3 = \frac{P_c t_c^2}{m_c x_c} = 1, &\quad \frac{P_1}{P}\frac{t_1^2}{t^2}\frac{m}{m_1}\frac{x}{x_1} = 1, \quad \frac{P_1 t_1^2}{m_1 x_1} = \frac{Pt^2}{mx};\\
\lambda_4 = \omega_c t_c = 1, &\quad \frac{\omega_1}{\omega}\frac{t_1}{t} = 1, \quad \omega_1 t_1 = \omega t.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Отсюда следуют те же числа подобия (8).

Таким образом, видим, что числа подобия π получаются из индикаторов подобия λ формальной заменой коэффициентов подобия на соответствующие параметры, т.е. путем отбрасывания индексов c.

В. Л. Кирпичев [13] для иллюстрации способа сравнения двух уравнений рассматривает подобие механических движений двух точек и через коэффициенты подобия находит число подобия Ньютона.

М. В. Кирпичев [14] способ Д4 называет *методом констант подобия* и иллюстрирует его на двух примерах. В первом примере рассматривает самый простой случай безвихревого течения вязкой жидкости между двумя бесконечными параллельными стенками. Уравнение Навье—Стокса и уравнение сплошности в этом случае принимают очень простой вид. Во втором примере рассматривает общий случай ламинарного течения жидкости в канале, имеющем переменные сечения и направления. Уравнениями связи для этого случая будут уравнение сплошности и уравнение движения потока Навье—Стокса. Здесь получается число гомохронности, числа Фруда, Эйлера, Рейнольдса, Лагранжа, числа Галилея, Кирхгофа. Через индикаторы подобия из уравнения динамики точки также получено число Ньютона.

С. Д. Корнеев [18] способом Д4 из уравнения динамики точки выводит динамический закон подобия Ньютона.

А. А. Кудинов [22] при выводе чисел подобия использует способ двух уравнений — для натуры и модели, получает индикатор, а затем число подобия Ньютона.

В. С. Швыдкий и др. [28] рассматривают уравнения для двух подобных потоков, из которых устанавливают коэффициенты подобия, а затем индикаторы и числа подобия Ньютона, Фруда, Рейнольдса, Эйлера.

О. Я. Романов и В. В. Ходосов [35], а также Р. Х. Санников [36] кратко описывают этот способ, но примеров не приводят.

О. С. Сергель [38] получает безразмерные числа подобия из уравнений Навье—Стокса одномерного течения для натуры и модели. Уравнение движения, описывающее модельное течение, записывает в параметрах натурного и, сравнивая их, получает индикаторы подобия, а из них — число Струхаля или временной однородности (гомохронности), число Фруда, число Эйлера, число Рейнольдса.

Л. А. Шаповалов [44] называет способ сравнения двух уравнений через индикаторы подобия *методом масштабных преобразований*. Применяя этот способ к задаче изгиба консольной балки сосредоточенной силой и моментом, показывает, что условия механического подобия не зависят от операторов дифференцирования в физических уравнениях. Для этого он сначала рассматривает выражения для нормального и касательного напряжений, осевой деформации и поперечного перемещения в алгебраической форме, а затем дифференциальные уравнения изгиба. Сравнивая результаты, показывает, что масштабные преобразования краевой задачи как для дифференциальных уравнений, так и для интеграла этих уравнений в алгебраической форме дают одинаковый результат.

Д5. Способ сравнения двух сил через индикаторы подобия. Суть способа состоит в том, что вместо всего уравнения рассматриваются отдельные его слагаемые. Такой подход используется при рассмотрении задач, которые описываются несколькими уравнениями, и применение для них предыдущего способа Д4 приводит к громоздким выкладкам. Кроме того, этот способ выявляет физический смысл чисел подобия. При таком подходе базовым критерием подобия выступает число Ньютона, в котором произвольная сила сравнивается с силой инерции.

Рассмотрим нашу задачу о вынужденных колебаниях груза, которая описывается уравнением (1). В этом уравнении четыре слагаемых, и каждое слагаемое есть сила (2). Сравним силы сопротивления и инерции. Для подобия колебаний модели (с индексом 1) и натуры (без индекса) отношения этих сил должны быть одинаковыми:

$$\frac{F_{k1}}{F_k} = \frac{F_{m1}}{F_m}, \quad \frac{k_1\dot{x}_1}{k\dot{x}} = \frac{m_1\ddot{x}_1}{m\ddot{x}}, \quad \frac{k_1}{k}\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}} = \frac{m_1}{m}\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}}.$$

С учетом значений параметров модели (10) получаем первый индикатор подобия, а из него по (13) — число подобия π_1:

$$k_c\frac{x_c}{t_c} = m_c\frac{x_c}{t_c^2}, \quad \frac{k_c x_c}{t_c}\frac{t_c^2}{m_c x_c} = 1, \quad \lambda_1 = \frac{k_c t_c}{m_c} = 1, \quad \pi_1 = \frac{kt}{m}.$$

Проводя аналогичные сравнения силы упругости и силы инерции, а также внешней силы и силы инерции, найдем остальные числа подобия:

$$\frac{F_{c1}}{F_c} = \frac{F_{m1}}{F_m}, \quad \frac{c_1}{c}\frac{x_1}{x} = \frac{m_1}{m}\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}}, \quad \lambda_2 = \frac{c_c t_c^2}{m_c} = 1, \quad \pi_2 = \frac{ct^2}{m};$$

$$\frac{F_{\omega 1}}{F_\omega} = \frac{F_{m1}}{F_m}, \quad \frac{P_1}{P}\frac{\sin(\omega_1 t_1)}{\sin(\omega t)} = \frac{m_1}{m}\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}}, \quad \omega_1 t_1 = \omega t, \quad \pi_4 = \omega t;$$

$$\lambda_3 = \frac{P_c t_c^2}{m_c x_c} = 1, \quad \pi_3 = \frac{Pt^2}{mx}.$$

Таким образом, видим, что этот способ приводит к тем же числам подобия (8).

К. С. Басниев и др. [6] для выяснения физического смысла чисел подобия рассматривают в жидкости параллелепипед. На него действуют сила тяжести, сила локальной инерции, сила конвективной инерции, сила трения. Далее показывают, что числа подобия есть отношения соответствующих сил к силе инерции.

Аналогично действуют П. М. Алабужев и др. [2].

В. А. Винников и Г. Г. Каркашадзе [10], а также В. П. Корпачев [19] выводят основные числа подобия в жидкости из соотношения сил:

- составляя отношение силы тяжести к силе инерции, получает число подобия Фруда;
- в случае, когда на жидкость действуют только силы вязкого трения и влиянием сил тяжести можно пренебречь, из отношения сил инерции к силам трения получается число подобия Рейнольдса;
- из отношения параметра давления к удвоенной величине динамического (скоростного) напора получается число подобия Эйлера.

А. А. Кудинов [22] при выводе чисел подобия использует способ двух уравнений — для натуры и модели, получает индикатор, а затем число подобия Ньютона как отношение внешней силы к силе инерции. Затем рассматривает действие отдельных сил:

- если внешняя сила является силой тяжести, то из числа Ньютона получается число Фруда;
- если внешняя сила является силой давления, то получается число Эйлера;
- если внешняя сила является силой внутреннего трения, то получается число Рейнольдса.

А. К. Мартынов [27], а также А. М. Мхитарян [30] выводят используемые в аэродинамике числа подобия Эйлера, Рейнольдса, Фруда, Маха, Струхаля как отношения соответствующих сил к силе инерции.

При использовании способа Д5 нужно быть осторожным и не забывать, что этот способ является следствием более общего способа Д4, в противном случае можно сделать неверное заключение. В частности, в учебнике Б. М. Яворского и А. А. Пинского [47, с. 107] при рассмотрении задачи о движении тела в жидкости сначала через анализ размерностей выводятся выражения для двух сил — для силы сопротивления R, возникающей вследствие разности давлений на передней и задней кромках обтекаемого тела, и для силы вязкого трения T. Затем составляется отношение R/T и получается выражение, совпадающее с числом Рейнольдса. Отсюда авторы делают вывод, что число Рейнольдса есть отношение сопротивления давления R к сопротивлению трения T. Такое толкование физического смысла числа Рейнольдса противоречит общепринятому, которое следует из безразмерного уравнения — это отношение сил инерции к силам сопротивления трения за счет вязкости.

2. Способы вывода критериев подобия из анализа размерностей

Решения задач методом анализа размерностей основано на второй, или Пи-теореме. Такое название, происходящее от традиционного обозначения безразмерных комбинаций с помощью прописной или строчной греческой буквы «пи», используется в русскоязычной литературе. В англоязычной литературе теорему обычно связывают с именем Букингема (E. Buckingham), а во франкоязычной — с именем Ваши (A. Vaschy)[2].

Здесь рассмотрим следующие семь способов вывода чисел подобия из анализа размерностей, которые для краткости обозначим через P1–P7:

P1. Способ комбинации переменных, или способ непосредственных рассуждений, или способ Бертрана;
P2. Ранние способы Аппелля, Федермана, Толмэна, Ипсена;
P3. Способ преобразования формул размерностей в степенные комплексы;
P4. Способ частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема;
P5. Способ полного двустороннего комплекса, или способ Рэлея;
P6. Способ полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия;
P7. Способ качественного физико-математического анализа, или способ Морозова.

Отметим, что приведенная терминология в названиях способов не устоялась и в разных источниках названия методов могут отличаться. Общие положения по выводу чисел подобия будем иллюстрировать примерами для задачи о вынужденных колебаниях груза, которые описываются уравнением (1). В безразмерном виде задача сводится к уравнению (7) и четырем критериям подобия (8). Покажем, что те же числа подобия можно вывести через анализ размерностей, не обращаясь к уравнению колебаний.

P1. Способ комбинации переменных, или способ непосредственных рассуждений, или способ Бертрана. В уравнение колебаний (1) входит семь ($n = 7$) размерных параметров

$$m, \quad x, \quad t, \quad P, \quad \omega, \quad c, \quad k, \tag{14}$$

размерности которых в классе LMT известны:

$$\begin{gathered}[m] = M, \quad [x] = L, \quad [t] = T, \quad [P] = MLT^{-2}, \\ [\omega] = T^{-1}, \quad [c] = MT^{-2}, \quad [k] = MT^{-1}.\end{gathered} \tag{15}$$

Здесь три ($k = 3$) независимые размерности — L, M, T. В соответствии с Пи-теоремой задачу можно описать с помощью трех размерных и четырех ($p = n - k = 7 - 3 = 4$) безразмерных параметров.

Величины m, x, t имеют простейшие размерности — килограмм, метр и секунда, которые невозможно свести к безразмерному виду. Остались величины

$$k, \quad c, \quad P, \quad \omega.$$

[2] По материалам сайта `Wikipedia`.

Рассмотрим коэффициент демпфирования k. Поскольку его размерность есть M/T, то для создания безразмерного комплекса его нужно умножить на время и поделить на массу:

$$[k] = \frac{M}{T}, \quad \pi_1 = k\frac{t}{m}, \quad [\pi_1] = \frac{M}{T}\frac{T}{M} = 1.$$

Рассмотрим коэффициент упругости пружины c. Поскольку его размерность есть M/T^2, для создания безразмерного комплекса его нужно умножить на время в квадрате и поделить на массу:

$$[c] = \frac{M}{T^2}, \quad \pi_2 = c\frac{t^2}{m}, \quad [\pi_2] = \frac{M}{T^2}\frac{T^2}{M} = 1.$$

Точно так же составляем безразмерные комбинации для амплитуды P и круговой частоты ω возмущающей силы:

$$[P] = \frac{LM}{T^2}, \quad \pi_3 = P\frac{t^2}{mx}, \quad [\pi_3] = \frac{LM}{T^2}\frac{T^2}{ML} = 1;$$

$$[\omega] = \frac{1}{T}, \quad \pi_4 = \omega t, \quad [\pi_4] = \frac{1}{T}T = 1.$$

В результате приходим к тем же критериям подобия (8).

Способ Р1 описан под разными названиями у многих авторов и применялся для различных задач.

П. М. Алабужев и др. [1, 2] называют этот способ методом анализа размерностей.

П. В. Бриджмен [8] этим способом решает задачу о периоде колебаний маятника (с. 12), задачу Рэлея 1915 года о колебаниях капли жидкости в невесомости под влиянием сил поверхностного натяжения (с. 14), задачу о жесткости прогибающейся балки (с. 78).

Г. И. Баренблатт [4, 5] рассматривает свою работу как продолжение книги П. Бриджмена [8] и способ Р1 применяет в задачах для периода колебаний математического маятника, для поступательного движения шара в газе с большой скоростью, для доказательства теоремы Пифагора (с. 55). Этим способом Г. И. Баренблатт выводит критерии Рейнольдса (с. 62) и Фруда (с. 64), из задачи о конвективном теплообмене в горизонтальном слое жидкости (с. 71) выводит критерии Грасгофа, Рэлея и Прандтля.

В. А. Веников [9] называет этот способ методом непосредственных рассуждений (с. 92) и, применяя его к задаче о теплоотдаче от круглой трубы к поперечно омывающему ее потоку жидкости, получает критерии Нуссельта и Рейнольдса.

М. В. Кирпичев [14] способ Р1 называет способом Бертрана (с. 75) и отмечает, что суть его состоит в попытках комбинировать между собою размерные величины так, чтобы получились безразмерные произведения. Как отмечает М. В. Кирпичев, «руководящей нитью в таком рассуждении являются чутье и догадка».

С. С. Кутателадзе [23] при рассмотрении сложных задач гидромеханики с учетом влияния температуры и массопереноса формирует безразмерные комплексы путем подбора размерных величин.

Л. Г. Лойцянский [24–26] применяет способ рассуждений при рассмотрении различных задач гидромеханики. Разделяя полученные безразмерные комплексы на критерии подобия и числа подобия (функции от критериев), Л. Г. Лойцянский показывает, что можно в некоторых задачах предсказать вид решения и перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, что позволяет найти решение задачи в замкнутом виде.

Л. И. Седов [37] применяет этот способ к решению следующих задач:

– о периоде колебаний математического маятника (с. 36);
– об истечении весомой жидкости (с. 39);
– о движении жидкости в трубах (с. 40);
– о движении тела в жидкости (с. 46);
– о теплоотдаче тела в потоке жидкости с упоминанием решения Рэлея и парадокса Рябушинского (с. 53);
– о равновесии упругих конструкций с моделированием на центрифуге и выводом соотношений между внешней нагрузкой и собственным весом (с. 60);
– об установившемся (с. 67) и неустановившемся (с. 71) движении твердого тела в сжимаемой жидкости;
– о движении корабля с обоснованием удешевления перевозок для больших судов и самолетов (с. 76);
– о глиссировании по поверхности воды (с. 84);
– об ударе о воду, о рикошете, о посадке гидросамолета (с. 91);
– о вертикальном ударе о воду (с. 96);
– о погружении клина в воду (с. 99).

В. А. Соколов [41] показывает применение этого способа на примерах для задач, возникающих в нефтегазодобыче.

Р2. Ранние способы Аппелля, Федермана, Толмэна, Ипсена. К этой группе способов вывода критериев подобия из анализа размерностей отнесем такие способы, которые упоминаются в литературе, но широкого применения не получили. В силу громоздкости и сложности действий по этим способам, а также их непопулярности, мы их применять к задаче о колебаниях груза не будем.

М. В. Кирпичев [14] описывает три ранних способа: Аппелля [48,49] 1893 г., Федермана [42] 1911 г., Толмэна [56–58] 1914 г. Применение способа Аппелля показано на примере отыскания периода колебаний математического маятника. Способ Федермана описан на примере отыскания скорости истечения жидкости через отверстие, сделанное в сосуде на известной глубине. Способ Толмэна описан на примере вывода закона состояния для идеального газа.

Х. Шенк [45] описывает способ последовательного исключения размерностей, или поэтапный способ Ипсена, и его модификацию — способ линейных пропорциональностей Барра. При этом Х. Шенк отмечает, что этот способ «не так прост, особенно при большом числе переменных и при наличии 4–5 основных размерностей».

Ю. А. Дьячков и М. А. Черемшанов [12] показывают применение способов Ипсена и Барра к задаче движения автомобильного амортизатора.

Р3. Способ преобразования формул размерностей в степенные комплексы. Рассмотрим нашу задачу о колебаниях груза. Для каждой величины заменим ее размерность (15) соответствующими параметрами и разделим каждое равенство на его правую часть:

$$\frac{m}{m} = 1, \quad \frac{x}{x} = 1, \quad \frac{t}{t} = 1, \quad \frac{k}{mt^{-1}} = \frac{kt}{m} = \pi_1,$$

$$\frac{c}{mt^{-2}} = \frac{ct^2}{m} = \pi_2, \quad \frac{P}{xmt^{-2}} = \frac{Pt^2}{mx} = \pi_3, \quad \frac{\omega}{t^{-1}} = \omega t = \pi_4.$$

Опять получаем те же критерии подобия (8).

Этот способ описывает А. А. Гухман [11]. Он показывает его применение в задаче о гидродинамическом сопротивлении при стационарном течении несжимаемой жидкости по каналу-трубе (с. 280). В этой задаче получает критерии Эйлера и Рейнольдса.

Р4. Способ частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема. В задачу о вынужденных колебаниях груза входят 7 размерных величин (14), которые имеют размерности (15). По способу Букингема «из 7 размерных величин выделяются 3 первичных и ищут 4 критерия, содержащих каждый по одной вторичной величине, подбирая для них комбинацию первичных, образующих безразмерный комплекс» [15].

Выберем в качестве первичных, или основных, параметры m, x, t, которые образуют базовую тройку, т. к. содержат все три независимые размерности задачи — килограмм, метр и секунду (M, L, T). Будем добавлять по одному размерному параметру к базовой тройке и формировать безразмерный комплекс.

1. Параметры $(m, x, t) + c$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{41} = \frac{c}{m^a x^b t^d}.$$

Эта же формула в размерностях:

$$M^0 L^0 T^0 = [\pi_{41}] = \frac{MT^{-2}}{M^a L^b T^d} = M^{1-a} L^{-b} T^{-2-d}.$$

Уравнивая показатели степеней в левой и правой частях уравнения, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно показателей:

$$M : 1 - a = 0, \quad L : -b = 0, \quad T : -2 - d = 0.$$

Разрешаем эту систему уравнений:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad d = -2$$

и получаем уже знакомый критерий подобия π_2:

$$\pi_{41} = \frac{c}{m^1 x^0 t^{-2}} = \frac{ct^2}{m} = \pi_2.$$

2. Параметры $(m, x, t) + P$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{42} = \frac{P}{m^a x^b t^d}.$$

Записываем эту формулу в размерностях, уравниваем показатели степеней слева и справа, находим показатели степеней:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad d = -2.$$

Подставляя найденные значения в исходное выражение, получаем уже знакомый критерий подобия π_3:

$$\pi_{42} = \frac{P}{m^1 x^1 t^{-2}} = \frac{Pt^2}{mx} = \pi_3.$$

3. Параметры $(m, x, t) + \omega$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{43} = \frac{\omega}{m^a x^b t^d}.$$

Действуя точно так же, как и в предыдущих случаях, находим

$$a = 0, \quad b = 0, \quad d = -1;$$

$$\pi_{43} = \frac{\omega}{m^0 x^0 t^{-1}} = \omega t = \pi_4.$$

4. Параметры $(m, x, t) + k$. Формируем безразмерный комплекс в виде

$$\pi_{44} = \frac{k}{m^a x^b t^d}.$$

Аналогичные действия дают следующий результат:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad d = -1;$$

$$\pi_{44} = \frac{k}{m^1 x^0 t^{-1}} = \frac{kt}{m} = \pi_1.$$

В результате получили те же четыре критерия (8).

Этот способ основан на выводе теоремы Федермана—Букингема (Пи-теоремы, 1914 г.) и предложен Букингемом [50].

П. М. Алабужев и др. [1] называют этот способ методом нулевых размерностей и показывают его применение на примере вынужденных колебаний груза. В [2] приводится применение этого способа для многочисленных задач из различных отраслей техники.

Г. И. Баренблатт [4, 5] представляет способ Р4 как следствие доказательства Пи-теоремы (с. 15, 44). Этим способом решает задачу о распределении скорости в пристеночной области сдвигового турбулентного потока (с. 115), задачу для расплывания грунтовых вод (с. 126).

П. В. Бриджмен [8] решает этим способом задачу о периоде колебаний ящика с жидкостью (с. 69), задачу Стокса о скорости падающей сферы в жидкости (с. 75), задачу о давлении идеального газа (с. 80).

В. А. Веников [9] отмечает, что этот способ вытекает из Пи-теоремы Букингема, показывает его применение на примере вынужденных колебаний груза (с. 73), а также на задаче о падении давления при движении вязкой жидкости в трубе, из которой получает критерии Рейнольдса и Эйлера (с. 90).

Ю. А. Дьячков и М. А. Черемшанов [12] называют этот способ способом Букингема и показывают его применение на примере движения автомобильного амортизатора.

М. В. Кирпичев [14] также называет этот способ способом Букингема, т. к. он вытекает из Пи-теоремы Букингема, и показывает его применение на примере теплопередачи между стенкой трубки и потоком жидкости.

С. Д. Корнеев [18] и С. И. Пинчук [33] упоминают этот способ, но примеров не приводят.

О. Я. Романов и В. В. Ходосов [35] способ Р4 называют способом предварительной группировки и показывают его применение на задаче о движении капли жидкости в потоке вязкого газа при изотермических условиях, в которой получаются два независимых критерия — Вебера и Рейнольдса.

Р. Х. Санников [36] при описании способов получения критериев подобия на основе Пи-теоремы выделяет классический способ (в нашем случае способ Р6) и видоизмененный классический способ (в нашем случае способ Р4). Применение этих способов показывает на примере для вынужденных колебаний груза.

Р5. Способ полного двустороннего комплекса, или способ Рэлея. В задачу о вынужденных колебаниях груза входит 7 величин (14). Допустим, необходимо найти коэффициент силы сопротивления k, который может зависеть от всех остальных параметров задачи. Составим полный двусторонний комплекс в виде

$$k = C_0 m^u x^v t^w c^q P^r \omega^s, \tag{16}$$

где C_0 — безразмерный коэффициент. Перепишем уравнение (16) в размерностях (15):

$$MT^{-1} = M^u L^v T^w (MT^{-2})^q (LMT^{-2})^r (T^{-1})^s,$$
$$MT^{-1} = M^{u+q+r} L^{v+r} T^{w-2q-2r-s}.$$

Поскольку размерности левой и правой частей этого уравнения должны быть одинаковыми, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$M : 1 = u + q + r, \quad L : 0 = v + r, \quad T : -1 = w - 2q - 2r - s. \tag{17}$$

Из трех уравнений (17) можно определить только три неизвестных. Будем искать u, v, w. Тогда показатели степеней q, r, s будут считаться независимыми:

$$u = 1 - q - r, \quad v = -r, \quad w = -1 + 2q + 2r + s.$$

Подставляя полученные значения в исходное уравнение (16), получим

$$k = C_0 m^{1-q-r} x^{-r} t^{-1+2q+2r+s} c^q P^r \omega^s.$$

Группируем сомножители по степеням

$$k = C_0(m^1t^{-1})(m^{-1}ct^2)^q(m^{-1}x^{-1}t^2P)^r(t\omega)^s,$$

и в окончательном виде получаем

$$\left(\frac{kt}{m}\right) = C_0\left(\frac{ct^2}{m}\right)^q\left(\frac{Pt^2}{mx}\right)^r(\omega t)^s.$$

Безразмерные комплексы в скобках дают те же четыре критерия подобия (8).

Классическая форма записи искомой функции по способу Рэлея имеет вид (16). Однако некоторые авторы используют модифицированную запись, в которой слева стоит не искомая величина, а константа

$$C_0 = km^{u1}x^{v1}t^{w1}c^{q1}P^{r1}\omega^{s1}.$$

Отличие последней записи от (16) только в знаках показателей степеней. Поэтому делать различия в классической и модифицированной записях способа Рэлея мы не будем.

Сам Рэлей разрабатывал свой способ вывода критериев подобия в 1900-х годах и применял его к различным задачам, которые до сих пор упоминаются как задачи Рэлея [53].

В. А. Архипов и А. П. Березиков [3] показывают применение этого способа на задаче о теплообмене при стационарном турбулентном течении теплоносителя (газа или жидкости) в трубе.

Г. Биркгоф [7] использует способ Р5 при определении силы сопротивления жидкости в зависимости от ее плотности, а также скорости и диаметра движущегося тела (с. 125).

П. В. Бриджмен [8] решает этим способом задачу о периоде вращения двух масс (с. 16), две задачи Рэлея — о скорости переноса тепла в жидкости (с. 19) и о скорости волны в жидкости (с. 66).

М. В. Кирпичев [14] определяет этот способ как метод Рэлея (с. 81) и показывает его использование на примере теплоотдачи.

А. А. Кудинов [22] рассматривает анализ размерностей по способам Р5 и Р6. Способом Р5, который называет методом Рэлея, получает критерии подобия Фруда, Эйлера, Рейнольдса, Струхаля и делает вывод, что анализ уравнений и анализ размерностей являются, по существу, разными методами одной и той же системы исследования, основанной на использовании обобщенных безразмерных переменных.

С. И. Пинчук [33] упоминает этот способ, но примеров не приводит.

Л. И. Седов [37] способом Р5 решает задачу о малых волнах на поверхности жидкости (с. 101).

Г. Хантли [43] приводит решение этим способом 45 задач из области механики твердых тел, гидромеханики, теплопередачи, электричества.

Х. Шенк [45] описывает способ Р5 как рэлеевский метод решения на основании теоремы Букингема.

Л. А. Эпштейн [46] использует способ Рэлея в модифицированном виде в различных задачах гидромеханики.

Р6. Способ полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия. Рассмотрим нашу задачу о вынужденных колебаниях груза. Составим глобальный критерий подобия, включающий все параметры задачи (14):

$$\pi = m^u x^v t^w c^q P^r \omega^s k^h. \tag{18}$$

Перепишем уравнение (18) в размерностях:

$$1 = M^u L^v T^w (MT^{-2})^q (LMT^{-2})^r (T^{-1})^s (MT^{-1})^h,$$

$$1 = M^{u+q+r+h} L^{v+r} T^{w-2q-2r-s-h}.$$

Уравнивая размерности слева и справа, получим следующую СЛАУ:

$$u + q + r + h = 0, \quad v + r = 0, \quad w - 2q - 2r - s - h = 0. \tag{19}$$

Из трех уравнений можем определить три неизвестных, остальные 4 можем задать произвольно. Выберем в качестве базовых три параметра m, x, t, размерности которых содержат все три независимые размерности задачи M, L, T. Тогда соответствующие показатели степеней u, v, w находятся из СЛАУ (19), а остальные четыре показателя q, r, s, h для параметров c, P, ω, k задаются произвольно. Перепишем СЛАУ (19) так, чтобы показатели степеней u, v, w находились в левой части:

$$u = -q - r - h, \quad v = -r, \quad w = 2q + 2r + s + h. \tag{20}$$

В СЛАУ (20) справа стоят 4 независимых показателя q, r, s, h. Поочередно будем задавать одному из них значение 1, а остальным — значение 0. Всего наберется 4 комбинации.

Комбинация 1. Примем $q = 1$, $r = s = h = 0$. В соответствии с (18) это равносильно тому, что к базовой тройке параметров m, x, t добавляется четвертый параметр c. Если сравнить эту комбинацию со способом Р4, то она эквивалентна формированию безразмерного комплекса π_{41}. Тогда из (20) получим

$$u = -1, \quad v = 0, \quad w = 2.$$

Подставляем эти значения в (18) и находим, что такому набору показателей соответствует знакомый критерий подобия π_2:

$$\pi = m^{-1} x^0 t^2 c^1 P^0 \omega^0 k^0 = \frac{ct^2}{m} = \pi_2.$$

Комбинация 2. Примем $q = 0$, $r = 1$, $s = h = 0$. В соответствии с (18) это равносильно тому, что к базовой тройке параметров m, x, t добавляется четвертый параметр P. Такая комбинация эквивалентна формированию безразмерного комплекса π_{42} в способе Р4. Решая СЛАУ (20), получим

$$u = -1, \quad v = -1, \quad w = 2.$$

Подставляя эти значения в (18), находим критерий подобия π_3:

$$\pi = m^{-1} x^{-1} t^2 c^0 P^1 \omega^0 k^0 = \frac{Pt^2}{mx} = \pi_3.$$

Комбинация 3. Примем $q = r = 0$, $s = 1$, $h = 0$. Действуя, как и в предыдущих случаях, находим

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1,$$

$$\pi = m^0 x^0 t^1 c^0 P^0 \omega^1 k^0 = \omega t = \pi_4.$$

Комбинация 4. Примем $q = r = s = 0$, $h = 1$. Аналогичные действия дают

$$u = -1, \quad v = 0, \quad w = 1,$$

$$\pi = m^{-1} x^0 t^1 c^0 P^0 \omega^0 k^1 = \frac{kt}{m} = \pi_1.$$

В результате получили те же четыре критерия подобия (8). Сопоставляя процедуры действия данного способа со способом Р4, видим, что способ глобального критерия является обобщением способа Букингема.

П. М. Алабужев и др. [1] показывают применение этого способа на примере вынужденных колебаний груза.

А. А. Кудинов [22] получает этим способом критерии подобия Фруда, Эйлера, Рейнольдса, Струхаля.

С. И. Пинчук [33] упоминает этот способ, но примеров не приводит.

О. Я. Романов и В. В. Ходосов [35] называют этот способ способом глобального критерия и показывают его применение в задаче по определению силы сопротивления движению твердого тела в несжимаемой жидкости, в которой из 7 размерных параметров, имеющих 3 независимых размерности, следуют 4 критерия подобия — коэффициент силы сопротивления, угол атаки в радианах, число Рейнольдса и число Фруда.

Р. Х. Санников [36] называет этот способ классическим способом анализа размерностей и показывает его применение на примере для вынужденных колебаний груза.

Л. А. Шаповалов [44] применяет этот способ для составления проекта проведения работ по моделированию прочности и жесткости элементов конструкций в различных задачах.

Р7. Способ качественного физико-математического анализа, или способ Морозова. Все ранее описанные способы опирались на Пи-теорему. Обязательным условием их применения было наличие полного списка всех размерных и безразмерных величин, участвующих в задаче. В отличие от них способ Морозова не требует знания всех величин задачи. Подход Морозова похож на способ Рэлея — также ищется одна неизвестная величина в виде алгебраического степенного комплекса, составленного из остальных величин. Но в отличие от способа Рэлея у Морозова в исходной формуле участвуют не все параметры задачи. Так же, как и в способе подбора, здесь необходимо правильно угадать исходную зависимость искомой функции от параметров задачи.

Н. А. Морозов разрабатывал свой способ в 1890–1906 годах, опубликовал его в 1908 году [29], задолго до появления Пи-теоремы Федермана—Букингема (1914 г.). Поэтому в его изложении отсутствует понятие безразмерного критерия подобия. Морозов не различает размерную величину и ее размерность, и то и другое обозначает одной буквой. Из-за этого трудно понять, о чем конкретно идет речь. По способу Морозова невозможно получить

Номер	Авторы	Способы Д					Способы Р						
1	П. М. Алабужев и др.	—	—	Д3	—	—	Р1	—	—	Р4	—	Р6	—
2	П. М. Алабужев и др.	—	—	—	—	Д5	Р1	—	—	Р4	—	—	—
3	В. А. Архипов, А. П. Березиков	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Р5	—	—
4, 5	Г. И. Баренблатт	—	—	—	—	—	Р1	—	—	Р4	—	—	—
6	К. С. Басниев	Д1	—	—	—	Д5	—	—	—	—	—	—	—
7	G. Birkhoff	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	Р5	—	—
8	P. W. Bridgman	—	—	—	—	—	Р1	—	—	Р4	Р5	—	—
9	В. А. Веников	—	—	Д3	—	—	Р1	—	—	Р4	—	—	—
10	В. А. Винников, Г. Г. Каркашадзе	Д1	—	—	—	Д5	—	—	—	—	—	—	—
11	А. А. Гухман	Д1	—	—	—	—	—	—	Р3	—	—	—	—
12	Ю. А. Дьячков, М. А. Черемшанов	—	—	—	—	—	—	Р2	—	Р4	Р5	—	—
13	В. Л. Кирпичев	—	—	—	Д4	—	—	—	—	—	—	—	—
14	М. В. Кирпичев	—	Д2	Д3	Д4	—	Р1	Р2	—	—	Р5	—	—
15	М. В. Кирпичев, П. К. Конаков	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Р5	—	—
16	S. J. Kline	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	С. Д. Корнеев	—	—	—	Д4	—	—	—	—	Р4	—	—	—
19	В. П. Корпачев	—	—	—	—	Д5	—	—	—	—	—	—	—
20, 21	Н. В. Крамаренко и др.	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	А. А. Кудинов	Д1	—	—	Д4	Д5	—	—	—	—	Р5	Р6	—
23	С. С. Кутателадзе	Д1	—	—	—	—	Р1	—	—	—	—	—	—
24, 25, 26	Л. Г. Лойцянский	Д1	—	—	—	—	Р1	—	—	—	—	—	—
27	А. К. Мартынов	—	—	—	—	Д5	—	—	—	—	—	—	—
28	В. С. Швыдкий и др.	Д1	—	—	Д4	—	—	—	—	—	—	—	—
29	Н. А. Морозов	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Р7
30	А. М. Мхитарян	—	—	—	—	Д5	—	—	—	—	—	—	—

Номер	Авторы	Способы Д					Способы Р						
33	С. И. Пинчук	—	—	—	—	—	—	—	—	Р4	Р5	Р6	—
34	Б. Т. Породнов	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
35	О. Я. Романов, В. В. Ходосов	Д1	—	—	Д4	—	—	—	—	Р4	—	Р6	—
36	Р. Х. Санников	—	Д2	—	Д4	—	—	—	—	Р4	—	Р6	—
37	Л. И. Седов	—	—	—	—	—	Р1	—	—	—	Р5	—	—
38	О. С. Сергель	—	—	—	Д4	—	—	—	—	—	—	—	—
39	J. Serrin	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
40	С. С. Силин	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
41	В. А. Соколов	Д1	—	—	—	—	Р1	—	—	—	—	—	—
42	А. Федерман	—	—	—	—	—	—	Р2	—	—	—	—	—
43	H. E. Huntley	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Р5	—	—
44	Л. А. Шаповалов	Д1	—	—	Д4	—	—	—	—	—	—	Р6	—
45	H. Schenck	—	—	—	—	—	—	Р2	—	—	Р5	—	—
46	Л. А. Эпштейн	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	Р5	—	—
48, 49	P. Appell	—	—	—	—	—	—	Р2	—	—	—	—	—
50	E. Buckingham	—	—	—	—	—	—	—	—	Р4	—	—	—
51, 52	T. A. Ehrenfest–Afanassjewa	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
53	L. Reyleigh	—	—	—	—	—	—	—	—	—	Р5	—	—
54	A. E. Ruark	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
55	G. Stokes	Д1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
56, 57, 58	R. C. Tolman	—	—	—	—	—	—	Р2	—	—	—	—	—

несколько критериев подобия, как это имеет место в нашей задаче о вынужденных колебаниях груза.

В наше время такой подход не используется. С. С. Кутателадзе [23] называет его «несколько наивным». Здесь этот способ упоминается для подчеркивания исторического приоритета российского ученого Н. А. Морозова в разработке анализа размерностей. Для знакомства с этим способом можно рекомендовать обратиться к первоисточнику [29], в котором автор показывает применение своего способа к задаче о собственных колебаниях струны.

Заключение

На основании рассмотрения одной задачи о колебаниях груза видим, что одни и те же числа подобия можно получить как из анализа уравнений, так и из анализа размерностей. Приведем сводную таблицу использования авторами цитируемых работ перечисленных способов вывода критериев подобия. Из этой таблицы видно, что наиболее употребительными являются следующие способы:

- Д1. Способ нормализации уравнения, или приведения уравнения к безразмерному виду;
- Д4. Способ сравнения двух уравнений через индикаторы подобия;
- Р4. Способ частичных комплексов, или способ предварительной группировки, или способ нулевых размерностей, или способ Букингема;
- Р5. Способ полного двустороннего комплекса, или способ Рэлея;
- Р6. Способ полного одностороннего комплекса, или способ глобального критерия.

В дополнение к перечисленным общепризнанным способам хочется отметить изящный способ А. А. Гухмана Р3, который в силу своей простоты и скорости достижения результата можно назвать «экспресс-способом».

В заключение добавим, что получить доступ ко многим классическим источникам по теории подобия, а также прочитать ценные комментарии к ним можно на веб-странице [31].

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Алабужев П. М., Геронимус В. В., Минкевич Л. М., Шеховцов Б. А. *Теория подобия и размерностей. Моделирование.* М.: Высш. шк., 1968. 206 с.
2. Алабужев П. М., Кирнарский М. Ш., Полищук В. Г., Соколов В. С., Чижов А. Е., Юшин В. В. *Основы теории подобия, размерности, моделирования.* Курск: Курск. политехнич. ин-т, 1993. 103 с.
3. Архипов В. А., Березиков А. П. *Основы теории инженерно-физического эксперимента.* Томск: Томск политехнич. ун-т, 2008. 206 с.
4. Баренблатт Г. И. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике.* Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.
5. Баренблатт Г. И. *Анализ размерностей.* М.: МФТИ, 1987. 168 с.

6. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. *Нефтегазовая гидромеханика.* М., Ижевск: Инст. комп. исслед., 2005. 544 с.
7. Биркгоф Г. *Гидродинамика. Методы, факты, подобие.* М.: Иностр. лит-ра, 1963. 246 с.
8. Бриджмен П. В. *Анализ размерностей.* Л.-М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. 119 с.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 148 с.
9. Веников В. А. *Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики).* М.: Высш. шк., 1976. 479 с.
10. Винников В. А., Каркашадзе Г. Г. *Гидромеханика.* М.: Моск. госуд. горн. ун-т, 2003. 302 с.
11. Гухман А. А. *Введение в теорию подобия.* М.: Высш. шк., 1973. 296 с.
12. Дьячков Ю. А., Черемшанов М. А. *Моделирование систем автомобилестроения.* Пенза: ПГУ, 2009. 240 с.
13. Кирпичев В. Л. *Беседы о механике.* М., Л.: ГИТТЛ, 1950. 360 с.
14. Кирпичев М. В. *Теория подобия.* М.: АН СССР, 1953. 96 с.
15. Кирпичев М. В., Конаков П. К. *Математические основы теории подобия.* М.: АН СССР, 1949. 106 с.
16. Клайн С. Дж. *Подобие и приближенные методы.* М.: Мир, 1968. 302 с.
17. Коган И. Ш. О желательности расширения масштабов применения теории подобия при преподавании технических наук / *Машиностроение. Конструкции и технологии*: Сб. научных тр. Т. 3. Киров: ВятГТУ, 1998. С. 64–69.
18. Корнеев С. Д. *Гидрогазодинамика.* М.: МГИУ, 2011. 230 с.
19. Корпачев В. П. *Теоретические основы водного транспорта леса.* М.: Акад. естествознания, 2009. 236 с.
20. Крамаренко Н. В., Ситнов К. В. Теория подобия и спецэффекты в кино / *Наука. Промышленность. Оборона*: Тр. 15 Всерос. науч.-техн. конф. (Новосибирск, 23–25 апреля 2014 г.). Новосибирск: НГТУ, 2014. С. 347–351.
21. Крамаренко Н. В., Капустина А. А., Лаврина В. М., Скоробогатова А. А. Использование теории подобия для проведения инженерного эксперимента / *Наука. Промышленность. Оборона*: Тр. 20 Всерос. науч.-техн. конф. Т. 1 (Новосибирск, 17–19 апреля 2019 г.). Новосибирск: НГТУ, 2019. С. 96–101.
22. Кудинов А. А. *Техническая гидромеханика.* Самара: СамГТУ, 2006. 295 с.
23. Кутателадзе С. С. *Анализ подобия и физические модели.* Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
24. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа.* М.: Наука, 1970. 904 с.
25. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа.* М.: Дрофа, 2003. 840 с.
26. Лойцянский Л. Г. Методы подобия и размерностей в механике жидкости и газа / *Сб. метод. статей по теорет. механике*, Вып. 11. М.: Высш. шк., 1981. 22–31 с.
27. Мартынов А. К. *Прикладная аэродинамика.* М.: Машиностроение, 1972. 448 с.
28. Швыдкой В. С. (ред.) *Механика жидкости и газа.* М.: Академкнига, 2003. 464 с.
29. Морозов Н. А. *Основы качественного физико-математического анализа и новые физические факторы, обнаруживаемые им в различных явлениях природы.* М., 1908. 402 с.
30. Мхитарян А. М. *Аэродинамика.* М.: Машиностроение, 1976. 448 с.
31. *Некоторые обзорные работы и первоисточники по истории пи-теоремы и теории подобия.* Режим доступа: `http://gidropraktikum.narod.ru/pi-theorem-history.htm` (дата обращения: 29.03.2021).
32. *Основы теории подобия и моделирования. Терминология. Сборник рекомендуемых терминов* / Вып. 88. М.: Наука, 1973. 50 с.
33. Пинчук С. И. *Организация эксперимента при моделировании и оптимизации технических систем.* Днепропетровск: Дива, 2008. 248 с.
34. Породнов Б. Т. *Численные методы решения задач механики сплошных сред.* Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008.

35. Романов О. Я., Ходосов В. В. *Моделирование при проектировании сложных технических систем.* СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2006. 60 с.
36. Санников Р. Х. *Теория подобия и моделирования. Планирование инженерного эксперимента.* Уфа: УГНТУ, 2010. 253 с.
37. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике.* М.: Наука, 1977. 440 с.
38. Сергель О. С. *Прикладная гидрогазодинамика.* М.: Машиностроение, 1981. 374 с.
39. Серрин Дж. *Математические основы классической механики жидкости.* М.: Иностр. лит-ра, 1963. 256 с.
40. Силин С. С. *Метод подобия при резании материалов.* М.: Машиностроение, 1979. 152 с.
41. Соколов В. А. *Основы теории подобия и анализа размерностей в нефтегазодобыче.* Ухта: УГТУ, 2001. 159 с.
42. Федерман А. О некоторых общих методах интегрирования уравнений с частными производными первого порядка // *Известия Санкт-Петербургского политехнического института императора Петра Великого. Отдел техники, естествознания и математики*, 1911. Т. 16, № 1. С. 97–155.
43. Хантли Г. *Анализ размерностей.* М.: Мир, 1970. 176 с.
44. Шаповалов Л. А. *Моделирование в задачах механики элементов конструкций.* М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
45. Шенк Х. *Теория инженерного эксперимента.* М.: Мир, 1972. 384 с.
46. Эпштейн Л. А. *Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов.* Л.: Судостроение, 1970. 208 с.
47. Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики.* Т. 1. М.: Физматлит, 2003. 576 с.
48. Appell P. *Traité de mécanique rationnelle.* Paris: Gauthier–Villars, 1893.
49. Appell P., Dautheville S. *Précis de mécanique rationnelle.* Paris: Gauthier–Villars, 1923.
50. Buckingham E. On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations // *Phys. Rev., Ser. 2*, 1914. vol. 4, no. 4. pp. 345–376. `https://doi.org/10.1103/physrev.4.345`.
51. Ehrenfest–Afanassjewa T. A. Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen // *Math. Ann.*, 1916. vol. 77, no. 2. pp. 259–276. `https://doi.org/10.1007/BF01456903`.
52. Ehrenfest–Afanassjewa T. A. Dimensional analysis viwed from standpoint of the theore of similitude // *Philos. Magazine*, 1926. vol. 7, no. 1. pp. 257–272.
53. Reyleigh L. The principle of similitude // *Nature*, 1915. vol. 95. pp. 66–68. `https://doi.org/10.1038/095066c0`.
54. Ruark A. E. Inspectional analysis: A method wich supplements dimensional analysis // *J. Mitchell Soc.*, 1935. vol. 51. pp. 127–133.
55. Stokes G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums / *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* vol. IX, part II, 1850. pp. 8–106.
56. Tolman R. C. The principle of similitude // *Phys. Rev., Ser. 2*, 1914. vol. 3, no. 4. pp. 244–255. `https://doi.org/10.1103/physrev.3.244`.
57. Tolman R. C. The principle of similitude and the principle of dimensional homogeneity // *Phys. Rev., Ser. 2*, 1915. vol. 6. pp. 219–233.
58. Ehrenfest–Afanassjewa T. A. On Mr. R. C. Tolman's "Principle of Similitude" // *Phys. Rev., Ser. 2*, 1916. vol. 8. pp. 1–7. `https://doi.org/10.1103/physrev.8.1`.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 163–192
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1791

MSC: 00A73

A review of methods for developing similarity criteria in mechanics

© *N. V. Kramarenko*

Novosibirsk State Technical University,
20, pr. K. Marksa, Novosibirsk, 630073, Russian Federation.

Abstract

Similarity theory is the theoretical basis for modeling and drafting experiments. In addition, it can be used to conduct a comparative analysis of changes in the desired parameters of the problem without solving equations and without conducting experiments. All arguments in similarity theory are based on dimensionless power complexes, which are called similarity criteria (numbers), or invariants. In the literature of different years of release, various methods of obtaining similarity criteria are described, but the author was not able to find a unified classification of these methods and their comparison.

The article provides a review of various methods for obtaining similarity criteria, their classification, which includes five methods from differential equations and seven methods from dimension analysis. All methods are compared on a single problem of mechanics about forced vibrations of the load, which leads to four similarity numbers. This approach helps you compare the labor required to output similarity numbers in different ways. For each method, a list of references is given where it is mentioned, and a brief description of the tasks that are solved there. At the end is a summary table showing which methods are considered in the mentioned works. The table shows the relative popularity of methods.

Keywords: similarity theory, similarity methods, similarity criteria, similarity numbers, similarity indicators, dimensional analysis.

Received: 12th June, 2020 / Revised: 2nd March, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 29th March, 2021

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Review Article

Please cite this article in press as:
K r a m a r e n k o N. V. A review of methods for developing similarity criteria in mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 163–192. https://doi.org/10.14498/vsgtu1791 (In Russian).

Author's Details:
Nikolay V. Kramarenko https://orcid.org/0000-0002-6301-1255
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Aircraft Strength; e-mail: kramnv@rambler.ru; n.kramarenko@corp.nstu.ru

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Alabuzhev P. M., Geronimus V. V., Minkevich L. M., Shekhovtsov B. A. *Teoriia podobiia i razmernostei. Modelirovanie* [Theory of Similarity and Dimensionalities: Mathematical Modeling]. Moscow, Vyssh. shk., 1968, 206 pp. (In Russian)
2. Alabuzhev P. M., Kirnarskii M. Sh., Polishchuk V. G., Sokolov V. S., Chizhov A. E., Iushin V. V. *Osnovy teorii podobiia, razmernosti, modelirovaniia* [Basics of the Similarity Theory, Dimensionalities, and Modeling]. Kursk, Kursk Polytechnic Inst., 1993, 103 pp. (In Russian)
3. Arkhipov V. A., Berezikov A. P. *Osnovy teorii inzhenerno-fizicheskogo eksperimenta* [Basic Theory of Engineering Physics Experiment]. Tomsk, Tomsk Polytechnic Univ., 2008, 206 pp. (In Russian)
4. Barenblatt G. I. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics. Dimensional Analysis and Intermediate Asymptotics*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, vol. 14. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996, xxii+386 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9781107050242.
5. Barenblatt G. I. *Dimensional Analysis.* New York, Gordon & Breach Sci. Publ., 1987, 135 pp.
6. Basniev K. S., Dmitriev N. M., Rozenberg G. D. *Neftegazovaia gidromekhanika* [Oil-Gas Hydromechanics]. Moscow, Izhevsk, Inst. Komp. Issled., 2005, 544 pp. (In Russian)
7. Birkhoff G. *Hydrodynamics. A study in logic, fact and similitude.* Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1960, xi+184 pp.
8. Bridgman P. W. *Dimensional Analysis.* New Haven, Yale Univ. Press, 1932; Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press, 1921.
9. Venikov V. A. *Teoriia podobiia i modelirovaniia (primenitel'no k zadacham elektroenergetiki)* [The Theory of Similarity and Modeling (Applied to the Problems of Electric Power Industry)]. Moscow, Vyssh. shk., 1976, 479 pp. (In Russian)
10. Vinnikov V. A., Karkashadze G. G. *Gidromekhanika* [Hydromechanics]. Moscow, Moscow State Mining Univ., 2003, 302 pp. (In Russian)
11. Gukhman A. A. *Introduction to the Theory of Similarity.* New York, Academic Press, 1965, xxi+256 pp.
12. D'iachkov Yu. A., Cheremshanov M. A. *Modelirovanie sistem avtomobilestroeniia.* Penza, Penza State Univ., 2009, 240 pp. (In Russian)
13. Kirpichev V. L. *Besedy o mekhanike* [Conversations about Mechanics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950, 360 pp. (In Russian)
14. Kirpichev M. V. *Teoriia podobiia* [Theory of Similarity]. Moscow, USSR Acad. Sci., 1953, 96 pp. (In Russian)
15. Kirpichev M. V., Konakov P. K. *Matematicheskie osnovy teorii podobiia* [Mathematical Basics of the Similarity Theory]. Moscow, USSR Acad. Sci., 1949, 106 pp. (In Russian)
16. Kline S. J. *Similitude and Approximation.* New York, Springer Verlag, 1986, xix+229 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61638-9.
17. Kogan I. Sh. On the desirability of expanding the scope of application of the theory of similarity in teaching technical sciences, In: *Mashinostroenie. Konstruktsii i tekhnologii* [Mechanical Engineering. Designs and Technologies], vol. 3. Kirov, Vyatka State Technical Univ., 1998, pp. 64–69 (In Russian).
18. Korneev S. D. *Gidrogazodinamika* [Fluid and Gas Dynamics]. Moscow, Moscow State Industrial Univ., 2011, 230 pp. (In Russian)
19. Korpachev V. P. *Teoreticheskie osnovy vodnogo transporta lesa* [Theoretical Foundations of Waterborne Transport of Forests]. Moscow, Akad. Estestvoznaniia, 2009, 236 pp. (In Russian)

20. Kramarenko N. V., Sitnov K. V. Similarity theory and special effects in cinema, In: *Science. Industry. Defense* (Novosibirsk, April 23–25, 2014). Novosibirsk, Novosibirsk State Technical Univ., 2014, pp. 347–351 (In Russian).
21. Kramarenko N. V., Kapustina A. A., Lavrina V. M., Skorobogatova A. A. Using similarity theory to conduct an engineering experiment, In: *Science. Industry. Defense*, vol. 1 (Novosibirsk, April 17–19, 2019). Novosibirsk, Novosibirsk State Technical Univ., 2019, pp. 96–101 (In Russian).
22. Kudinov A. A. *Tekhnicheskaia gidromekhanika* [Technical Hydromechanics]. Samara, Samara State Technical Univ., 2006, 295 pp. (In Russian)
23. Kutateladze S. S. *Analiz podobiia i fizicheskie modeli* [Similarity Analysis and Physical Models]. Novosibirsk, Nauka, 1986, 296 pp. (In Russian)
24. Loitsianskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Liquid and Gas Mechanics]. Moscow, Nauka, 1970, 904 pp. (In Russian)
25. Loitsianskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Liquid and Gas Mechanics]. Moscow, Drofa, 2003, 840 pp. (In Russian)
26. Loitsianskii L. G. Similarity and dimensional methods in fluid and gas mechanics, In: *Collection of Methodological Papers on Theoretical Mechanics*, issue 11. Moscow, Vyssh. shk., 1981, 22–31 pp. (In Russian)
27. Martynov A. K. *Prikladnaia aerodinamika* [Applied Aerodynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1972, 448 pp. (In Russian)
28. Shvydkoi V. S. (ed.) *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Liquid and Gas Mechanics]. Moscow, Akademkniga, 2003, 464 pp. (In Russian)
29. Morozov N. A. *Osnovy kachestvennogo fiziko-matematicheskogo analiza i novye fizicheskie faktory, obnaruzhivaemye im v razlichnykh iavleniiakh prirody* [Fundamentals of qualitative physical and mathematical analysis and new physical factors found by it in various natural phenomena]. Moscow, 1908, 402 pp. (In Russian)
30. Mkhitarian A. M. *Aerodinamika* [Aerodynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1976, 448 pp. (In Russian)
31. *Some survey papers and primary sources on the history of pi-theorem and similarity theory* (In Russian). Retrieved from `http://gidropraktikum.narod.ru/pi-theorem-history.htm` (March 29, 2021).
32. *Osnovy teorii podobiia i modelirovaniia. Terminologiia. Sbornik rekomenduemykh terminov* [Basics of the Similarity Theory and Modeling. Terminology. Compendium of Recommended Terms], issue 88. Moscow, Nauka, 1973, 50 pp. (In Russian)
33. Pinchuk S. I. *Organizatsiia eksperimenta pri modelirovanii i optimizatsii tekhnicheskikh sistem* [Organization of Experiment in Modeling and Optimization of Technical Systems]. Dnepropetrovsk, Diva, 2008, 248 pp. (In Russian)
34. Porodnov B. T. *Chislennye metody resheniia zadach mekhaniki sploshnykh sred* [Numerical Methods for Solving Problems of Continuum Mechanics]. Ekaterinburg, UGTU-UPI, 2008 (In Russian).
35. Romanov O. Ya., Khodosov V. V. *Modelirovanie pri proektirovanii slozhnykh tekhnicheskikh sistem* [Modeling in the Design of Complex Technical Systems]. St. Petersburg, Baltic State Technical Univ., 60 pp. (In Russian)
36. Sannikov R. Kh. *Teoriia podobiia i modelirovaniia. Planirovanie inzhenernogo eksperimenta* [Similarity and Modeling Theory. Planning of Engineering Experiment]. Ufa, Ufa State Petroleum Technical Univ., 2010, 253 pp. (In Russian)
37. Sedov L. I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. New York, Academic Press, 1959, 363 pp. `https://doi.org/10.1016/C2013-0-08173-X`.
38. Sergel' O. S. *Prikladnaia gidrogazodinamika* [Applied Fluid and Gas Dynamics]. Moscow, Mashinostroenie, 1981, 374 pp. (In Russian)
39. Serrin J. *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, Fluid Dynamics I. Berlin, Springer, 1959. `https://doi.org/10.1007/978-3-642-45914-6_2`.

40. Silin S. S. *Metod podobiia pri rezanii materialov* [Similarity Methods in Metal Cutting]. Moscow, Mashinostroenie, 1979, 152 pp. (In Russian)
41. Sokolov V. A. *Osnovy teorii podobiia i analiza razmernostei v neftegazodobyche* [Fundamentals of the Theory of Similarity and Dimensional Analysis in Oil and Gas Production]. Ukhta, UGTU, 2001, 159 pp. (In Russian)
42. Federman A. On some general methods of integration of first-order partial differential equations, *Proceedings of the Saint-Petersburg Polytechnic Institute. Section of Technics, Natural Science, and Mathematics*, 1911, vol. 16, no. 1, pp. 97–155 (In Russian).
43. Huntley H. E. *Dimensional Analysis*, Dover Books on Intermediate and Advanced Mathematics. New York, Dover Publ., 1967.
44. Shapovalov L. A. *Modelirovanie v zadachakh mekhaniki elementov konstruktsii* [Modeling in the Problems of the Mechanics of Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie, 1990, 288 pp. (In Russian)
45. Schenck H. *Theories of Engineering Experimentation*. New York, McGraw-Hill Book Comp., 1961, x+239 pp.
46. Epshteyn L. A. *Metody teorii razmernostei i podobiia v zadachakh gidromekhaniki sudov* [Methods of the Dimensional Analysis and Similarity Theory in Problems of Ship Hydromechanics]. Leningrad, Sudostroenie, 1970, 208 pp. (In Russian)
47. Yavorsky B. M., Pinsky A. A. *Fundamentals of Physics*, vol. 1. Moscow, Mir Publ., 1975, 544 pp.
48. Appell P. *Traité de mécanique rationnelle*. Paris, Gauthier–Villars, 1893.
49. Appell P., Dautheville S. *Précis de mécanique rationnelle*. Paris, Gauthier–Villars, 1923.
50. Buckingham E. On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations, *Phys. Rev., Ser. 2*, 1914, vol. 4, no. 4, pp. 345–376. https://doi.org/10.1103/physrev.4.345.
51. Ehrenfest–Afanassjewa T. A. Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen, *Math. Ann.*, 1916, vol. 77, no. 2, pp. 259–276. https://doi.org/10.1007/BF01456903.
52. Ehrenfest–Afanassjewa T. A. Dimensional analysis viwed from standpoint of the theore of similitude, *Philos. Magazine*, 1926, vol. 7, no. 1, pp. 257–272.
53. Reyleigh L. The principle of similitude, *Nature*, 1915, vol. 95, pp. 66–68. https://doi.org/10.1038/095066c0.
54. Ruark A. E. Inspectional analysis: A method wich supplements dimensional analysis, *J. Mitchell Soc.*, 1935, vol. 51, pp. 127–133.
55. Stokes G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. IX, part II, 1850, pp. 8–106.
56. Tolman R. C. The principle of similitude, *Phys. Rev., Ser. 2*, 1914, vol. 3, no. 4, pp. 244–255. https://doi.org/10.1103/physrev.3.244.
57. Tolman R. C. The principle of similitude and the principle of dimensional homogeneity, *Phys. Rev., Ser. 2*, 1915, vol. 6, pp. 219–233.
58. Ehrenfest–Afanassjewa T. A. On Mr. R. C. Tolman's "Principle of Similitude", *Phys. Rev., Ser. 2*, 1916, vol. 8, pp. 1–7. https://doi.org/10.1103/physrev.8.1.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 193–202
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1831

Short Communications

MSC: 74F15, 74F05, 74C20

Healing of cracks in plates by strong electromagnetic field

© ***K. V. Kukudzhanov***[1], ***A. L. Levitin***[1], ***U. Kh. Ugurchiev***[2]

[1] Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
[2] Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, 4, M. Khariton'evskii per., Moscow, 101990, Russian Federation.

Abstract

The problem of a pulsed high-energy electromagnetic field action on an edge crack in a thin plate, reproducing the pioneering experiment of Soviet scientists on the destruction of the crack tip by a strong electromagnetic field, is considered. The numerical simulation is based on the proposed electrothermomechanical model of a short-pulse high-energy electromagnetic field (HEMF) action on a material with a crack. The model takes the phase transformations (melting and evaporation) of the material occurring in the vicinity of defects and the corresponding changes in the rheology of the material in the areas of these transformations into account, as well as the possibility of electric current flowing between the free surfaces of the crack (breakdown due to electron emission). All physical and mechanical properties of the material are considered temperature-dependent. The model equations are coupled and solved together on a moving finite element grid using the arbitrary Euler–Lagrangian method. The processes of localization of the current density and temperature fields, phase transformations (melting and evaporation) at the crack tip, autoelectronic and thermoelectronic emissions between free crack surfaces, and the effect of these processes on crack healing are investigated. The simulation results are compared with the available experimental data on the pulse field action on the edge crack in the plate. The average metal heating rate, temperature gradients and time forming of the crater obtained in the vicinity of the crack tip are in good quantitative agreement with the experimental data. Away from the crack, as well as on the crack sides away from the tip, the temperature rises slightly. The process of modeling the electromagnetic field action, similar to the experiment,

Review Article

Please cite this article in press as:
Kukudzhanov K. V., Levitin A. L., Ugurchiev U. Kh. Healing of cracks in plates by strong electromagnetic field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 193–202. https://doi.org/10.14498/vsgtu1831 (In Russian).

Authors' Details:

Konstantin V. Kukudzhanov https://orcid.org/0000-0001-9060-2838
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; e-mail: kconstantin@mail.ru

Alexander L. Levitin https://orcid.org/0000-0003-2077-8808
Leading Programmer; e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

Umar Kh. Ugurchiev https://orcid.org/0000-0003-2072-6354
Researcher; e-mail: umar77@bk.ru

was accompanied by melting at the crack tip, as well as metal evaporation. Thus, under the considered current action, a crater is formed at the crack tip, which prevents the further spread of the crack, leading to its healing. It was not possible to obtain similar results using the previously proposed models.

Keywords: pulsed electromagnetic action, defect healing, crack arrest, high-energy field.

Received: 11th October, 2020 / Revised: 15th February, 2021 /
Accepted: 10th March, 2021 / First online: 23rd March, 2021

Introduction. An external electromagnetic field is applied to the conductive sample, which induces a current in the material with a current density of 10^8 to 10^{11} A/m^2 during short time interval. A pulsed electromagnetic field is called a high-energy electromagnetic field (HEMF) if electromagnetic action during $10^{-4} - 10^{-3}$ s leads to amount of the scattering specific electromagnetic energy in the material within the range $10^8 \leqslant q \leqslant 10^{10}$ J/m^3.

The presence of defects in the conductive solid leads to the localization (concentration) of the electric field in their vicinity. This causes a locally inhomogeneous temperature distribution in the material, due to the increased dissipation of electromagnetic energy in the area of defects, or rather in their sharp tips. The use of this circumstance to explain the healing by short pulses of high-density current of cracks propagating in siliceous iron under the influence of pulsed HEMF was carried out for the first time in [1].

Experiments [1, 2] show that HEMF action leads to a sharp temperature increase at the microcracks tips. As a result, melting, evaporation, microexplosion, and crater formation occur at the macrocracks tips.

Thus, the resulting crater prevents the further crack propagation and leads to crack healing.

In particular, these experiments showed that when short pulses of high-density current induced by the HEMF were applied to the edge crack in a thin plate in the vicinity of its tip, a sharp temperature increase was observed: the measured heating rate was 10^7 °C/s, the temperature gradients were 10^6–10^7 °C/m, and the temperature away from the crack did not exceed 10 °C. Such rates and localities of heat release led to melting and evaporation of the material at the tip of the crack, accompanied by a microexplosion, which ejected the explosion products from the crack tip in a direction perpendicular to the plate plane. At the same time, a crater formed at the crack tip [1].

A number of researchers have attempted to model the electrical, thermal, and mechanical processes that occur during the above-described pulsed action of the HEMF on a crack in a plate.

These processes were considered both in quasistatics [3–9] and in dynamics [11]. The plate material was assumed to be thermoelastic [7, 9], thermo-rigid-plastic [10], thermoelastoplastic [11], and the deformations were small. The process of thermal conductivity is described by Fourier's law. In the works [3–5], the magnetic effects arising under the HEMF pulse action were also taken into account.

The simulation showed that an inhomogeneous temperature field occurs near the macrocrack and temperature localization reaches the melting point in the vicinity of the macrocrack tip. Compressive stresses occurring in the vicinity of the crack tip led not only to the crack arrest, but also to the convergence of its sides (partial closure of the defect). However, these models allowed to describe the process of heating and deformation only qualitatively: the heating rate, temperature gradients, and the time of the beginning of melting in the vicinity of the crack tip, obtained as a result of modeling, were significantly different from those observed in experiments [1, 2]. Within the considered above models the temperature at the crack tip could not reach the evaporation temperature, therefore these models failed to describe the processes of explosion and the formation of a crater in the tip.

Due to mathematical difficulties in the analytical solution of electrothermoelastic (rigid-plastic) and numerical solution of electro-thermoelastic problems, none of the models [3–10] allowed (in the context of the assumption of small deformations) to trace the effects of the stress-strain state in the vicinity of the defect tip on the electric and temperature fields consistently. In addition, none of these models took into account the phase transformations in the metal and the resulting changes in rheology, including the dependence of the physical and mechanical properties of the metal on temperature after changes in the aggregate state of the substance during deformation. Therefore, the models under consideration did not allow coupling study of the determining processes occurring at the crack tip under the current pulse action.

Meanwhile, as shown in [1], the absolute temperature values (and its gradients) obtained in experiments are very large, they obviously exceed the melting point and reach the evaporation temperature of the metal. Under such conditions, it is necessary to take into account the changes in the aggregate state of the substance, the dependence of the properties of the metal on temperature and their influence on the stress-strain state.

To eliminate these lacks, we propose a quasi-stationary model of pulsed HEMF action on cracks in metal and a numerical method for solving the resulting system of equations.

On the basis of the developed model, the problem of the short-term HEMF action on the edge crack (with a rounded tip) in the plate is solved, which numerically reproduces the experiment performed in [1]. Changes in the electromagnetic and temperature fields, as well as in the aggregate states in the vicinity of the crack, are studied.

The study of these processes will allow us to understand the mechanism of healing of microcracks in plates under the HEMF action better and get closer to explaining the experimentally observed processes of healing fatigue cracks by welding their sides.

1. Electrothermomechanical model. Consider the dynamic response of a conducting plate to a HEMF pulse that induces a high-density electric current in the plate material for 10^{-4} s. There is an edge crack in the plate, as shown in Fig. 1. Our purpose is to reproduce the experiment carried out in the work [1] and to quantify the observed effects.

We formulate the assumptions and equations of the analytical model for describing the electrical, thermal and mechanical processes occurring in the plate

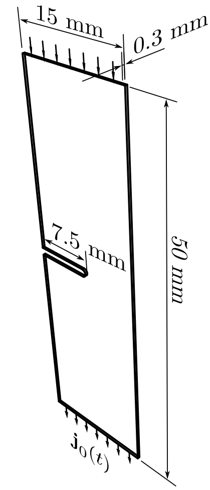


Figure 1. The sketch of the specimen 15×50×0.3 mm with the edge crack (the crack length is 7.5 mm, including the rounding at the tip with a radius of 10 μm, the crack has parallel sides and thickness is 20 μm); only the upper half of the sample is simulated in FEM due to the symmetry; $\mathbf{j}_0(t)$ are electrical current density vector applied to plate sides

material. The characteristic time of each of these processes is approximately inversely proportional to the propagation velocity of the corresponding perturbations. If we neglect the electromagnetic induction and viscosity during the propagation of mechanical disturbances, then the time required to establish the electromagnetic and mechanical processes considered in this model is 10^{-13}–10^{-12} s and 10^{-8}–10^{-7} s, respectively. This is significantly less than the time of the external action of the HEMF source (10^{-4} s).

Therefore, to obtain the electric potential φ in a conducting material, we use the law of conservation of charge (assuming that the current in the sample is steady). Since we search for a numerical solution by the finite element method, we use it in the variational formulation (1) [12]. At the same time, the laws of Ohm and Joule–Lenz are considered valid for the material.

The displacement field $\mathbf{u}$ is determined from the equilibrium equations written in the form of the virtual work principle (2) [12]. The deformations are assumed to be finite. In this case, the additivity of the rates of elastic, plastic, and temperature deformations is assumed (2). For the velocities of elastic and plastic deformations, Hooke's law for an isotropic body (3) and the associated flow law with the Mises plasticity (4) condition are assumed to be valid, respectively. The rates of temperature deformations are assumed to be linearly related to the temperature derivative (5).

The analytical estimates show that during pulsed electromagnetic field action, the current density at the crack tip is such that the relative temperature change at the distances of the order of the free path of phonons (and electrons) is greater than one. It is also evidenced by the measured temperature gradients in the vicinity of the crack vertices, which turn out to be very large [1] It is not correct to apply the Fourier law of thermal conductivity in this case. In addition, the time of electromagnetic impact on the material is small, 10^{-4} s. Therefore, thermal conductivity should be neglected and the process of HEMF exposure should be considered adiabatic (6).

The temperature field T is determined from the law of conservation of energy. In this case, we take into account the heat released in the unit volume in the current configuration of the body per unit time (6) due to the flow of electric current in accordance with the Joule–Lenz law (7), the heat released during plastic deformation (8), as well as the latent heat absorbed in the processes of melting and evaporation. Therefore, the resulting evolutionary equation for temperature should be extended with equations (9) and (10), which represent the conditions for the absorption of latent heat during the transition of a substance from one aggregate state to another: from solid to molten during melting and from liquid to gaseous during evaporation.

As noted above, during the current action on the crack in the plate, the metal temperature changed from room temperature to the evaporation temperature [1]. Therefore, all the physical and mechanical characteristics of the model (density, specific heat, electrical conductivity, coefficient of thermal expansion, elastic modulus, yield strength, etc.) are assumed to depend on the temperature over the entire range until the evaporation temperature is reached.

At the points where condition (9) is realized, the material is considered molten. In this case, there is a sharp change in all the physical properties of the material: electrical conductivity, heat capacity, density, coefficient of linear expansion and all other mechanical characteristics of the material. Such a change in the properties of the material corresponds to the available experimental data given in [14–16], which shows the dependence of the properties of various metals on temperature. In this case, there is a decrease in some (elastic modulus, yield strength, linear expansion coefficient, etc.) and an increase in others (density, etc.) of the physical characteristics of the material [15, 16].

Thus, in the model under consideration, when the melting temperature was reached the material does not lose the ability to conduct an electric current [15,16] and after the metal completely passes into the molten state, the melt is heated further. As the result, elastic modulus decreases and the yield limit falls to zero which allows us to describe the behavior of the molten material by the same constitutive equations (3)–(5), which degenerate for the melt into thermoviscoelastic with nonlinear viscosity.

At the points where condition (10) is realized the material is considered to have completely evaporated. At all subsequent times, the current density $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, the stress tensor $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ and the temperature are assumed to be constant $T = T_{\text{evap}}$. Therefore, in the model under consideration, from the time when the material completely evaporates, the metal loses its ability to conduct an electric current, its further heating does not occur, it loses the properties of a viscous liquid and is considered as a rarefied gas.

The complete system of equations of the considered electrothermomechanical model has the form [12, 13]:

$$\int_V \nabla\,\delta\varphi\,\sigma^{\mathrm{E}}(T)\,\nabla\,\varphi\,dV = \int_S \delta\varphi\,j\,dS, \qquad \mathbf{j} = \sigma^{\mathrm{E}}(T)\,\mathbf{E} = -\sigma^{\mathrm{E}}(T)\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}, \tag{1}$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}\!:\!\boldsymbol{\varepsilon}\,dV = \int_S \mathbf{t}\cdot\delta\mathbf{u}\,dS + \int_V \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}\,dV, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{el}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{th}}, \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(T)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{el}}\!:\!\mathbf{I} + 2\,\mu(T)\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{el}} \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}} = \dot{\Lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\Lambda}\,\mathbf{s}, \qquad \bar{\sigma} = \sigma_{\mathrm{Y}}(T), \qquad \bar{\sigma} = \sqrt{\tfrac{3}{2}\mathbf{s}\!:\!\mathbf{s}} \tag{4}$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} = \alpha(T)\,\mathbf{I}\,dT, \tag{5}$$

$$\rho(T)\,c(T)\,\dot{T} = r^{\mathrm{E}} + r^{\mathrm{pl}} + r^{\mathrm{melt}} + r^{\mathrm{eval}} \tag{6}$$

$$r^{\mathrm{E}} = \eta^{\mathrm{E}}\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \eta^{\mathrm{E}}\,\nabla\varphi\cdot\sigma^{\mathrm{E}}\cdot\nabla\varphi, \tag{7}$$

$$r^{\mathrm{pl}} = \eta^{\mathrm{pl}}\,\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{pl}}, \tag{8}$$

$$T = T_{\mathrm{melt}}, \qquad t_{\mathrm{sol}} \leqslant t \leqslant t_{\mathrm{liq}}, \qquad \int_{t_{\mathrm{sol}}}^{t_{\mathrm{liq}}} (r^{\mathrm{E}} + r^{\mathrm{pl}})\,dt = \rho\,\Lambda_{\mathrm{melt}}, \tag{9}$$

$$T = T_{\mathrm{evap}}, \qquad t_{\mathrm{eliq}} \leqslant t \leqslant t_{\mathrm{evap}}, \qquad \int_{t_{\mathrm{eliq}}}^{t_{\mathrm{evap}}} (r^{\mathrm{E}} + r^{\mathrm{pl}})\,dt = \rho\,\Lambda_{\mathrm{evap}}. \tag{10}$$

The notation in this equations is given in [12, 13].

The boundary and contact conditions for the electrical potential φ, displacements $\mathbf{u}$ and stresses $\boldsymbol{\sigma}$ at the boundaries of the integration domain used in this model, as well as the initial conditions, coincide with those considered in [12, 13].

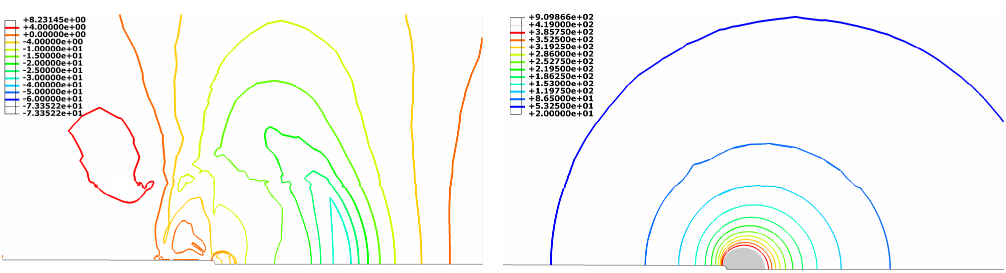
2. Results of numerical simulation. Equations (1)–(10) of the electrothermomechanical problem coupled with boundary, contact, and initial conditions were solved by the finite element method for a plate with an edge crack in a 3D formulation. The calculations were done using 20-node quadratic brick finite elements.

Simulation was done for zinc samples, the physical and mechanical properties of which and their dependence on temperature were taken in accordance with [15, 16].

The electric potential difference and its change from t used in the calculations were selected so that the induced current density coincided with the one measured in the experiment [1]. The pulse duration was 160 µs.

Fig. 2 *a* shows the stress field σ_{33} in the vicinity of the crack tip at $t = 29.5$ µs. Fig. 2 *a* shows that compressive stresses occur at the crack tip, which prevent further crack propagation. This result corresponds to the results obtained using models [3–6, 10], which also predicted the appearance of stresses compressing the crack sides at the crack tip. At the same time, calculations show that the residual plastic deformations in the vicinity of the crack tip reach tens of percent. This gives reason to believe that the restoration of the distance between the banks of the crack to the original size will not occur and after the relaxation of the temperature the sides will remain close together.

A sharp increase in temperature in the vicinity of the crack tip under HEMF pulse action was observed in the experiments presented in [1]. The measured



a *b*

Figure 2. *a*) normal stress field σ_{33} along vertical axis in the vicinity of the crack tip at $t = 29.5$ µs; *b*) temperature field in the vicinity of the crack tip at time $t = 38$ µs immediately after the forming of the crater (the gray area is the crater zone)

heating rate in the vicinity of the crack tip was on the order of $10^7\,℃/s$, the local temperature gradients were $6.0 \cdot 10^6 - 5.0 \cdot 10^7\,℃/m$, and the temperature change did not exceed 10 ℃ away from the crack. At the same time, melting and evaporation of the material was observed at the tip of the crack, accompanied by a microexplosion with the release of products from the crack tip in the direction perpendicular to the plate plane and the formation of a crater.

The results obtained by the proposed model are in good quantitative agreement with the experiment: the calculated average heating rate (in the vicinity of the crack tip with a radius of 10 μm) was $6.3 \cdot 10^7\,℃/s$, and the local temperature gradients were 10^7–$10^8\,℃/m$. Away from the crack, the temperature did not rise more than 10 ℃ (at times exceeding 100 μs), nor did heating occur on the sides of the crack away from the tip.

The process was accompanied by melting at the crack tip, as well as evaporation of the metal. Melting begins at the crack tip at time $t = 6.5$ μs, and the melt moves in a direction perpendicular to the plate plane. Evaporation begins at the time $t = 31$ μs. The time of crater formation can be associated with an interval of 31–38 μs. In the experiment, the crater was formed at 38–45 μs.

Thus, under the considered current action, a crater is formed at the crack tip, which prevents the further spread of the crack, leading to its healing.

Fig. 2 *b* shows the temperature field in the vicinity of the crack tip at time $t = 38$ μs (immediately after the forming of the crater).

Calculations based on the proposed model showed that the autoelectronic (tunnel) emission between the free surfaces (sides) of the crack does not occur due to the insufficient potential difference for this under the considered HEMF action. While the thermoelectronic emission current between the crack banks can be neglected, since its density is significantly less than the current density induced by the HEMF in the vicinity of the crack tip.

3. Conclusions. Thus, there is reason to believe that the model reproduces the main features of electrothermomechanical processes in the vicinity of microdefect correctly, describing the process of healing a crack and forming a crater.

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. K.V. Kukudzhanov: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Theoretical analysis; Analysis of calculation results; Supervision and consulting; Writing — original draft and review & editing. A.L. Levitin: Performing calculations, their analysis and verification; Writing — original draft and review & editing. U.Kh. Ugurchiev: Literature review; Analysis of experiments; Analysis of calculation results; Writing — part of the original draft. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study of K.V. Kukudzhanov is supported by the Russian Science Foundation (project no. 19–19–00616).

References

1. Finkel V. M., Golovin Yu. I., Sletkov A. A. Disintegration of a crack tip with a strong electromagnetic field, *Sov. Phys. Dokl.*, 1977, vol. 22, pp. 683–685.
2. Finkel V. M., Golovin Yu. I., Sletkov A. A. Possibility of braking rapid cracks by pulses of current, *Sov. Phys. Dokl.*, 1976, vol. 21, no. 4, pp. 216–218.

3. Kudryavtsev B. A., Parton V. Z., Rubinskii B. D. Electromagnetic and thermoelastic fields in a conducting plate with a cut of finite length, *Mech. Solids*, 1982, vol. 17, no. 1, pp. 110–118.
4. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A., Rubinskii B. D. Crack propagation under the action of an electromagnetic field, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1980, vol. 250, no. 5, pp. 1096–1100 (In Russian).
5. Cai G. X., Yuan F. G. Stresses around the crack tip due to electric current and self-induced magnetic field, *Adv. Eng. Software*, 1998, vol. 29, no. 3–6, pp. 297–306. `https://doi.org/10.1016/S0965-9978(97)00078-1`.
6. Cai G. X., Yuan F. G. Electric current-induced stresses at the crack tip in conductors, *Int. J. Fract.*, 1999, vol. 96, no. 3, pp. 279–301. `https://doi.org/10.1023/A:1018670829822`.
7. Liu T. J. C. Effects of temperature-dependent material properties on stress and temperature in cracked metal plate under electric current load, *World Academy of Science, Engineering and Technology. Int. J. Mechanical and Mechatronics Eng.*, 2010, vol. 4, no. 5, pp. 474–479. `https://doi.org/10.5281/zenodo.1072134`.
8. Yu J., Zhang H., Deng D., Hao S., Iqbal A. Numerical calculation and experimental research on crack arrest by detour effect and joule heating of high pulsed current in remanufacturing, *Chin. J. Mech. Eng.*, 2014, vol. 27, no. 4, pp. 745–753. `https://doi.org/10.3901/CJME.2014.0414.075`.
9. Gallo F., Satapathy S., Ravi-Chandar K. Melting and crack growth in electrical conductors subjected to short-duration current pulses, *Int. J. Fract.*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 183–193. `https://doi.org/10.1007/s10704-010-9543-0`.
10. Ovchinnikov I.V. *Influence of electric current on the plasticity of metals*, PhD Thesis. Moscow, 1989, 123 pp. (In Russian)
11. Kukudzhanov K. V., Levitin A. L. Deformation processes of elastoplastic material with defects under electrodynamic loading, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 106–120 (In Russian). `https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.07`.
12. Kukudzhanov K.V. Modeling the treatment of high-energy pulsed electromagnetic field of the micro-cracks in a polycrystalline metal, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 138–158 (In Russian). `https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.09`.
13. Kukudzhanov K. V., Levitin A. L. Modeling the healing of microcracks in metal stimulated by a pulsed high-energy electromagnetic field. Part I, *Int. J. Nanomech. Sci. Tech.*, 2015, vol. 6, no. 3, pp. 233–249. `https://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v6.i3.60`.
14. Sivukhin D. V. *Termodinamika i molekulyarnaya fizika* [Thermodynamics and Molecular Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 544 pp. (In Russian)
15. Pikunov M. V. *Plavka metallov. Kristallizatsiia splavov. Zatverdevanie otlivok* [Metal Smelting. Alloy Crystallization. The Solidification of Castings]. Moscow, MISiS, 1997, 374 pp. (In Russian)
16. Pikunov M. V. *Metallurgiia rasplavov. Kurs lektsii* [Metallurgy of the Melts. A Course of Lectures]. Moscow, MISiS, 2005, 286 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 193–202
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1831

УДК 517.958:531-133

Залечивание трещин в пластинах сильным электромагнитным полем

© *К. В. Кукуджанов*[1], *А. Л. Левитин*[1], *У. Х. Угурчиев*[2]

[1] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.
[2] Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
Россия, 101990, Москва, М. Харитоньевский пер., 4.

Аннотация

Рассматривается задача о воздействии импульсным высокоэнергетическим электромагнитным полем на краевую трещину в тонкой пластине, воспроизводящая пионерский эксперимент советских ученых по разрушению вершины трещины сильным электромагнитным полем. Численное моделирование осуществляется на основе предложенной электромеханической модели воздействия короткоимпульсным высокоэнергетическим электромагнитным полем на материал с трещиной. Модель учитывает фазовые превращения (плавление и испарение) материала, происходящие в окрестности дефектов, и соответствующие изменения реологии материала в областях этих трансформаций, а также возможность протекания электрического тока между свободными поверхностями трещины (пробоя за счет эмиссии электронов). Все физико-механические характеристики материала считаются зависящими от температуры. Уравнения модели связаны и решаются совместно на подвижной конечно-элементной сетке с применением смешанного метода Эйлера–Лагранжа. Исследуются процессы локализации полей плотности тока и температуры, фазовых превращений (плавления и испарения) в вершине трещины, автоэлектронной и термоэлектронной эмиссии между свободными поверхностями трещины и влияние этих процессов на залечивание трещины. Проводится сравнение результатов моделирования с имеющимися экспериментальными данными по воздействию импульсного поля на краевую трещину в пластине. Полученные в окрестности вершины трещины средняя скорость нагрева металла и градиенты температуры неплохо количественно согласуются с экспериментальными данными.

Обзор

Образец для цитирования

Кукуджанов К. В., Левитин А. Л., Угурчиев У. Х. Залечивание трещин в пластинах сильным электромагнитным полем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 193–202. https://doi.org/10.14498/vsgtu1831.

Сведения об авторах

Константин Владимирович Кукуджанов https://orcid.org/0000-0001-9060-2838
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник;
e-mail: kconstantin@mail.ru

Александр Леонидович Левитин https://orcid.org/0000-0003-2077-8808
ведущий программист; e-mail: alex_lev@ipmnet.ru

Умар Хажбикарович Угурчиев https://orcid.org/0000-0003-2072-6354
научный сотрудник; e-mail: umar77@bk.ru

Вдали от трещины, а также на берегах трещины вдали от вершины температура поднималась незначительно. Процесс моделирования воздействия электромагнитным полем, аналогично эксперименту, сопровождается плавлением в вершине трещины, а также испарением металла. Таким образом, при рассматриваемом воздействии током в вершине трещины формируется кратер, который препятствует дальнейшему распространению трещины, приводя к ее залечиванию. Получить аналогичные результаты с помощью ранее предложенных моделей не удавалось.

Ключевые слова: импульсное электромагнитное воздействие, залечивание дефектов, торможение трещины, высокоэнергетическое поле.

Получение: 11 октября 2020 г. / Исправление: 15 февраля 2021 г. / Принятие: 10 марта 2021 г. / Публикация онлайн: 23 марта 2021 г.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. К.В. Кукуджанов — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, теоретический анализ, анализ результатов расчетов, руководство и консультирование, черновик и чистовик рукописи. А.Л. Левитин — выполнение расчетов, анализ, визуализация и верификация результатов расчетов, черновик и чистовик рукописи. У.Х. Угурчиев — анализ литературы, анализ экспериментов, анализ результатов расчетов, черновик части рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование К.В. Кукуджанова выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 19–19–00616).