

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 24, № 3 – 2020

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

**Вестник
Самарского
государственного
технического
университета**

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Сентябрь — 2020

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 24, № 3 – 2020)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- П. Б. Бабаджанов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н. проф. (Душанбе, Таджикистан)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеевко — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)
- З. Д. Усманов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н., проф. (Душанбе, Таджикистан)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Провириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. ((Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Белгород, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 24, № 3 – 2020)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244
Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 30 сентября 2020 г.
Дата выхода в свет 5 октября 2020 г.
Формат 70 × 108 1/16.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 217/20.
Заказ № 0–8778–1v.

Оригинал-макет изготовлен
ООО «Эко-Вектор Ай-Пи»
191186, г. Санкт-Петербург,
Аптекарский пер., 3, лит. А, пом. 1Н

Отпечатано в типографии
Михаила Фурсова
196105, г. Санкт-Петербург,
ул. Благодатная, 69
Тел.: +7 (812) 646 33 77

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 05.13.18 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Самарский государственный технический университет, 2020 (составление)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
September — 2020

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2020, vol. 24, no. 3

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- P. B. Babadzhanov (Dushanbe, Tajikistan)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Z. D. Usmanov (Dushanbe, Tajikistan)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Belgorod, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
49, Blagodatnaya st., Saint Petersburg, 196105, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Samara State Technical University, 2020 (Compilation)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. “Задача с динамическим краевым условием для одномерного гиперболического уравнения” 407

Механика деформируемого твердого тела

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. “О микрополярной 3D-теории растущих тел” 424

Локощенко А. М., Терауд В. В., Шеварова Е. А. “Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при переменном поперечном давлении” 445

Хохлов А. В. “Общие свойства показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, порождаемых линейной теорией вязкоупругости, и существование максимума у его зависимости от скорости” 469

Янковский А. П. “Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования” 506

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. “Конвективные слоистые течения вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости. Исследование температурного поля” 528

Ворожцов Е. В., Шапеев В. П. “Бездивергентный метод коллокаций и наименьших квадратов для расчета течений несжимаемой жидкости и его эффективная реализация” 542

Краткие сообщения

Алдашев С. А. “Корректность смешанной задачи для многомерного гипербола-параболического уравнения” 574

Белосточный Г. Н., Мылъцина О. А. “Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки под действием периодической по временной координате нагрузки” 583

Стружанов В. В., Коркин А. В. “О решении одной не удовлетворяющей условиям Адамара задачи деформирования стержневых систем методом простой итерации” 595

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

- Beylin A. B., Pulkina L. S.* “A problem with dynamical boundary condition for a one-dimensional hyperbolic equation” 407

Mechanics of Solids

- Murashkin E. V., Radayev Yu. N.* “On a micropolar theory of growing solids” 424
- Lokoshchenko A. V., Teraud W. V., Shevarova E. A.* “The steady-state creep of long membrane in a rigid matrix at a variable transverse pressure” 445
- Khokhlov A. V.* “Properties of the strain rate sensitivity function produced by the linear viscoelasticity theory and existence of its maximum with respect to strain and strain rate” 469
- Yankovskii A. P.* “Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures” 506

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu.* “Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation” . . . 528
- Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P.* “A divergence-free method of collocations and least squares for the computation of incompressible fluid flows and its efficient implementation” 542

Short Communications

- Aldashev S. A.* “Well-posedness of a mixed type problem for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation” 574
- Belostochny G. N., Myltcina O. A.* “Dynamic thermal stability of heated geometrically irregular cylindrical shell under the influence of a periodic temporal coordinate load” 583
- Struzhanov V. V., Korokin A. V.* “On the solution of one problem of deformation of rod systems that does not satisfy the Hadamard conditions by the simple iteration method” 595

Дифференциальные уравнения и математическая физика



УДК 517.956.3

Задача с динамическим краевым условием для одномерного гиперболического уравнения

© А. Б. Бейлин¹, Л. С. Пулькина²¹ Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.² Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена задача с динамическим краевым условием, учитывающим наличие демпфера при закреплении, для гиперболического уравнения на плоскости и доказана ее однозначная разрешимость. Динамическое условие, содержащее производные первого порядка как по пространственной, так и по переменной времени, приводит к несамосопряженной задаче, что затрудняет применение методов спектрального анализа. Однако эти трудности преодолены и существование единственного решения поставленной задачи доказано. Основным инструментом доказательства являются априорные оценки в пространствах Соболева, выведенные в процессе работы над статьей. Предложены способы получения приближенного решения, в качестве частного случая рассмотрен пример одномерного волнового уравнения и получено точное решение задачи с динамическим условием.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, краевая задача, динамическое краевое условие, обобщенное решение, пространства Соболева.

Получение: 24 февраля 2020 г. / Исправление: 12 июля 2020 г. /

Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача с динамическим краевым условием для одномерного гиперболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 407–423. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1775>.

Сведения об авторах

Александр Борисович Бейлин   <https://orcid.org/0000-0002-4042-2860>

кандидат технических наук; доцент; каф. технология машиностроения, станки и инструменты; e-mail: abeilin@mail.ru

Людмила Степановна Пулькина  <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. дифференциальных уравнений и теории управления; e-mail: louise@samdiff.ru

Введение. В статье рассматривается задача отыскания в ограниченной области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ решения гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x, t)u_x)_x + c(x, t)u = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Второе из условий (3) содержит производные первого порядка как по x , так и по t , что можно интерпретировать как упругое закрепление правого конца стержня при наличии некоего демпфера [1, с. 44]. Хорошо известно, что эта задача является несамосопряженной и, стало быть, исследование разрешимости сталкивается с дополнительными трудностями, не свойственными самосопряженным задачам [2–4]. Это утверждение легко иллюстрируется попыткой применить метод разделения переменных даже для частного случая уравнения (1), а именно, для уравнения колебаний струны. Некоторые результаты в исследовании задач с краевыми условиями, содержащими производную по времени первого порядка, для одномерных гиперболических уравнений получены в статьях [5, 6].

Заметим, что краевые задачи с динамическими условиями, к которым относится и второе из (3), вызывают интерес [7–13], и не только как математический объект. При проектировании и эксплуатации различных инженерных конструкций надежность является важнейшим параметром. Обеспечение надежности базируется на выявлении внешних и внутренних факторов, воздействующих на изделие, обоснованном выборе материалов и конструктивных схем. При этом должны быть учтены не только максимальные и минимальные значения параметров, но и динамика их изменения, в том числе вибрационное воздействие, ветровые и ударные нагрузки и их сочетания. Отметим статью [12], в которой авторы рассматривают много примеров тех физических процессов, которые приводят к описанной выше задаче для уравнения колебаний струны, а также обсуждают сферы применения эффектов этих процессов, в том числе в биологии и медицине. Аналогичные процессы наблюдаются и при закреплении некоторых деталей механизмов или строительных конструкций [14–16], однако в этих случаях может возникнуть необходимость использовать более общее, чем уравнение колебаний струны, гиперболическое уравнение. На этапе проектирования исследование динамических свойств конструкций выполняют на математических моделях. Математические модели реальных физических процессов сложны, для их изучения обычно используются различные численные методы. Однако для эффективного применения полученных при этом результатов необходимо аналитическое исследование математической модели, имеющее своей целью найти и обосновать условия разрешимости задачи.

Именно поэтому в предлагаемой статье рассматривается линейное гиперболическое уравнение с переменными коэффициентами и доказывается существование единственного и достаточно гладкого решения задачи (1)–(3),

а именно, доказана принадлежность решения поставленной задачи пространству $W_2^2(Q_T)$, что дает возможность получения как приближенных, так и, в частных случаях, точных решений задачи.

Не менее важным результатом мы считаем возможность получения точного решения задачи в явном виде для частных случаев уравнения (1). Заметим, что приближенные решения, в том числе и не только для уравнения колебаний, можно получить, используя один из этапов реализации схемы доказательства существования решения задачи (1)–(3).

1. Постановка задачи. Приступим к изучению вопроса о разрешимости задачи (1)–(3). Обозначим

$$W(Q_T) = \{u(x, t) : u \in W_2^1(Q_T), u_t(l, t) \in L_2(0, T)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v(x, t) : v \in W(Q_T), v(0, t) = 0, v(x, T) = 0\}.$$

Следуя известной процедуре [17, с. 210, 113], в предположении, что u — гладкое решение задачи (1)–(3), $v(x, t)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $v(x, T) = 0, v(0, t) = 0$, выведем равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v) dx dt + \int_0^T \alpha(t) u_t(l, t) v(l, t) dt = \\ = \int_0^T \int_0^l f(x, t) v(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha(t) = \gamma a(l, t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x, t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству (4) для любой $v \in \hat{W}(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи в $W(Q_T)$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются следующие условия:

$$a, a_t, a_{tt}, c \in C(\bar{Q}_T), \quad a(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_T, \quad f \in L_2(Q_T), \quad \gamma > 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Единственность решения. Предположим, что существует два различных решения этой задачи, $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет условию $u(x, 0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x + c u v) dx dt + \int_0^T \alpha(t) u_t(l, t) v(l, t) dt = 0. \quad (5)$$

Выберем в тождестве (5) функцию $v(x, t)$, положив

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x, \eta) d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $\tau \in [0, T]$ произвольно.

Элементарные преобразования тождества (5), состоящие, как обычно, в интегрировании по частям с выбранной указанным образом функцией $v(x, t)$, приводят к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0)v_x^2(x, 0)] dx + 2 \int_0^\tau \alpha(t)u^2(l, t) dt = \\ & = 2 \int_0^\tau \int_0^l cvv_t dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dx dt + \int_0^\tau \alpha''(t)v^2(l, t) dt + \alpha'(t)v^2(l, 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как в силу условия теоремы $\alpha(t) > 0$ из (6) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u^2(x, \tau) + a(x, 0)v_x^2(x, 0)] dx + 2 \int_0^\tau \alpha(t)u^2(l, t) dt \leq \\ & \leq 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l cvv_t dx dt \right| + \left| \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dx dt \right| + \\ & \quad + \left| \int_0^\tau \alpha''(t)v^2(l, t) dt \right| + |\alpha'(t)v^2(l, 0)|. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим правую часть неравенства (7).

Заметим, что из условий теоремы следует существование положительных чисел a_0, a_1, c_0 таких, что

$$\min_{\bar{Q}_T} a(x, t) \geq a_0, \quad \max_{\bar{Q}_T} |a, a_t, a_{tt}| \leq a_1, \quad \max_{\bar{Q}_T} |c(x, t)| \leq c_0.$$

Тогда, применив неравенство Коши к первому слагаемому правой части неравенства, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u^2(x, \tau) + a_0 v_x^2(x, 0)] dx + 2 \int_0^\tau \alpha(t)u^2(l, t) dt \leq \\ & \leq c_0 \int_0^\tau \int_0^l (v^2 + v_t^2) dx dt + \\ & \quad + \gamma a_1 \left(\int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt + \int_0^\tau v^2(l, t) dt + v^2(l, 0) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь для оценки двух последних слагаемых правой части (8) применим неравенства

$$\begin{aligned} v^2(l, t) & \leq 2l \int_0^l v_x^2(x, t) dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x, t) dx, \\ v^2(l, t) & \leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, t) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x, t) dx, \end{aligned} \quad (9)$$

первое из которых легко следует из представления [13]

$$v(l, t) = \int_x^l v_\xi(\xi, t) d\xi + v(x, t),$$

а второе является частным случаем неравенства (6.24) монографии О. А. Ладженской [17, с. 77]. Тогда

$$\int_0^\tau v^2(l, t) dt \leq 2l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2(x, t) dx dt,$$

$$v^2(l, 0) \leq \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx + c(\varepsilon) \int_0^l v^2(x, 0) dx.$$

Выберем ε так, чтобы $a_0 - \gamma a_1 \varepsilon > 0$, положив, например, $\varepsilon = a_0 / (2a_1 \gamma)$, и перенесем слагаемое $\gamma a_1 \varepsilon \int_0^l v_x^2(x, 0) dx$ в левую часть неравенства (8).

Для завершения оценки нам потребуется еще неравенство

$$v^2(x, t) \leq \tau \int_0^\tau u^2(x, t) dt,$$

которое является следствием представления функции $v(x, t)$. В результате получим

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + \frac{a_0}{2} v_x^2(x, 0)] dx + 2 \int_0^\tau \alpha(t) u^2(l, t) dt \leq$$

$$\leq M_1 \int_0^\tau \int_0^l [u^2(x, t) + v_x^2(x, t)] dx dt, \quad (10)$$

где M_1 зависит лишь от a_0, a_1, c_0, l, T .

Введем функцию $w(x, t) = \int_0^t u_x(x, \eta) d\eta$. Тогда, как нетрудно заметить,

$$v_x(x, t) = w(x, t) - w(x, \tau), \quad v_x(x, 0) = -w(x, \tau),$$

$$v_x^2(x, t) \leq 2w^2(x, t) + 2w^2(x, \tau).$$

Учитывая эти соотношения, из (10) получим

$$\int_0^l \left[u^2(x, \tau) + \frac{a_0}{2} w^2(x, \tau) \right] dx + 2 \int_0^\tau \alpha(t) u^2(l, t) dt \leq$$

$$\leq 2M_1 \tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx + 2M_1 \int_0^\tau \int_0^l [u^2(x, t) + w^2(x, t)] dx dt. \quad (11)$$

Пользуясь произволом τ , выберем его так, чтобы $a_0 - 4M_1 \tau > 0$. Для определенности будем считать, что $a_0 - 4M_1 \tau \geq a_0 / 2$. Тогда первое слагаемое правой части (11) можно перенести в левую часть, и для всех $\tau \in [0, a_0 / (8M_1)]$ будет справедливо неравенство

$$m_0 \int_0^l [u^2(x, \tau) + w^2(x, \tau)] dx \leq 2M_1 \int_0^\tau \int_0^l [u^2(x, t) + w^2(x, t)] dx dt,$$

где $m_0 = \min\{1, a_0 / 4\}$, применение к которому неравенства Гронуолла моментально влечет выполнение равенства $u(x, t) = 0, t \in [0, a_0 / (8M_1)]$. Повторяя рассуждения для $\tau \in [a_0 / (8M_1), a_0 / (4M_1)]$ и продолжая этот процесс,

мы за конечное число шагов убедимся в том, что $u(x, t) = 0 \forall t \in [0, T]$, что и приводит к противоречию с предположением о существовании более одного решения.

Существование решения. Доказательство существования обобщенного решения проведем по следующей схеме:

- построим последовательность приближенных решений;
- выведем априорную оценку;
- покажем, что полученная оценка позволяет выделить слабо сходящуюся подпоследовательность;
- убедимся в том, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое решение.

Перейдем к реализации этой схемы. Пусть функции $w_k \in C^2[0, l]$, $w_k(0) = 0$, образуют линейно независимую и полную в $W_2^1(0, l)$ систему. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j) dx + w_j(l) \alpha(t) u_t^m(l, t) = \int_0^l f(x, t) w_j(x) dx. \quad (12)$$

Дополнив соотношения (12), которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(t)$, начальными условиями $c_k(0) = 0$, $c_k'(0) = 0$, приходим к задаче Коши, разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Действительно, подставив в (12) функции $u^m(x, t)$, получим

$$\sum_{k=1}^m A_{kj} c_k''(t) + \sum_{k=1}^m B_{kj}(t) c_k'(t) + \sum_{k=1}^m D_{kj}(t) c_k(t) = f_j(t), \quad (13)$$

$$A_{kj} = \int_0^l w_k(x) w_j(x) dx, \quad B_{kj}(t) = \alpha(t) w_k(l) w_j(l),$$

$$D_{kj}(t) = \int_0^l [a(x, t) w_k'(x) w_j'(x) + c(x, t) w_k(x) w_j(x)] dx,$$

$$f_j(t) = \int_0^l f(x, t) w_j(x) dx.$$

Система (13) разрешима относительно старших производных в силу линейной независимости функций $w_k(x)$, условия теоремы гарантируют ограниченность ее коэффициентов, а свободные члены $f_j \in L_1(0, T)$. Но тогда задача Коши для системы (13) однозначно разрешима, причем $c_k'' \in L_1(0, T)$.

Это, в свою очередь, означает, что последовательность приближенных решений построена.

Для дальнейших шагов в доказательстве существования обобщенного решения поставленной задачи нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем.

Умножим каждое из равенств (12) на $c'_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m , а затем проинтегрируем от 0 до τ , в результате чего придем к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dx dt + \int_0^\tau \alpha(t) (u_t^m(l, t))^2 dt = \\ = \int_0^\tau f(x, t) u_t^m(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрируя по частям, преобразуем (14). Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau) (u_x^m(x, \tau))^2] dx + \int_0^\tau \alpha(t) (u_t^m(l, t))^2 dt = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt - \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt, \end{aligned}$$

из которого следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u_t^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau) (u_x^m(x, \tau))^2] dx + 2 \int_0^\tau \alpha(t) (u_t^m(l, t))^2 dt \leq \\ \leq \int_0^\tau \int_0^l |a_t| (u_x^m)^2 dx dt + 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя условия теоремы и неравенство Коши, а также очевидное неравенство

$$(u^m(x, \tau))^2 \leq \tau \int_0^\tau (u_t^m(x, t))^2 dt,$$

с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности решения, из (15) получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2]_{t=\tau} dx + \gamma \int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt \leq \\ \leq M_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dx dt + M_3 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt, \end{aligned} \quad (16)$$

где γ , M_i зависят лишь от постоянных c_0 , a_0 , a_1 и не зависят от m . В частности,

$$\begin{aligned} \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2]_{t=\tau} dx \leq \\ \leq M_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dx dt + M_3 \int_0^\tau \int_0^l f^2 dx dt. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, справедливого для любого m , в силу леммы Гронуолла вытекает *априорная оценка*

$$\|u^m\|_{W_2^1(Q_T)} \leq R. \quad (17)$$

Из неравенства (16) с помощью (17) теперь легко получить еще одну оценку:

$$\|u_t^m(l, \cdot)\|_{L_2(0,T)} \leq r. \quad (18)$$

Следовательно, $\|u^m\|_{W(Q_T)}$ ограничена и из построенной последовательности $\{u^m(x, t)\}$ приближенных решений можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой во избежание громоздкой записи сохраним прежнее обозначение.

Покажем, что предел выделенной подпоследовательности, $u \in W(Q_T)$, и есть искомое приближенное решение.

Умножим каждое из равенств (12) на $d_j \in C^1(0, T)$, $d_j(T) = 0$, просуммируем по l от 1 до m , а затем проинтегрируем от 0 до T . После интегрирования первого слагаемого полученного равенства по частям, обозначив

$$\eta(x, t) = \sum_{j=1}^m d_j(t)w_j(x), \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l (-u_t^m \eta_t + au_x^m \eta_x + cu^m \eta) dx dt + \int_0^T \alpha(t) u_t^m(l, t) \eta(l, t) dt = \\ = \int_0^T \int_0^l f \eta dx dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Совокупность функций вида $\sum_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$ обозначим \mathcal{N}_m . Зафиксируем произвольно функцию $\eta(x, t)$ из какого-либо множества \mathcal{N}_{m_i} . В (19) можно перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$ в силу обоснованной выше слабой сходимости выделенной подпоследовательности. В результате мы приходим к тождеству (4) для предельной функции $u \in W(Q_T)$, справедливому для произвольной функции $\eta \in \mathcal{N}_{m_i}$. Так как $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m$ плотно в \hat{W} , полученное в результате

предельного перехода тождество выполняется для любой функции из $\hat{W}(Q_T)$, что и завершает доказательство существования обобщенного решения и, следовательно, теоремы. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Однородность начальных условий (2) не ограничивает общность. Действительно, если $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, то, введя новую неизвестную функцию $v(x, t) = u(x, t) - \varphi(x) - t\psi(x)$, получим для нее уравнение, отличающееся от (1) лишь правой частью, тогда как начальные условия для $v(x, t)$ однородны.

3. Исследование гладкости решения. Покажем, что при выполнении некоторых дополнительных условий на входные данные решение задачи обладает и производными второго порядка.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $f_t \in L_2(Q_T)$, $c_t \in C(Q_T)$. Тогда $u \in W_2^2(Q_T)$.

Доказательство. Для доказательства существования обобщенного решения, обладающего свойствами, указанными в теореме 2, снова воспользуемся методом Галеркина, взяв в качестве базиса $w_k(x)$ фундаментальную систему в $W_2^2(0, l)$. Не повторяя процедуру, описанную при доказательстве

теоремы 1, заметим, что теперь $c_k(t)$, решения задачи Коши, имеют производные по t до третьего порядка в силу условий теоремы 2. Сначала покажем, что для построенных с помощью найденных $c_k(t)$ приближений $u^m(x, t)$ нормы $\|u_{tt}^m(x, 0)\|_{L_2(0, l)}$ равномерно ограничены по m . Умножим каждое из (12) на $c_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m и положим $t = 0$. Так как $c_k(0) = c_k'(0) = 0$, в результате получим

$$\int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx = \int_0^l f(x, 0) u_{tt}^m(x, 0) dx,$$

откуда немедленно следует

$$\int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^l f^2(x, 0) dx,$$

что и доказывает наше утверждение.

Продолжим вывод оценки. Продифференцируем (12) по t , затем умножим на $c_j''(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ . Получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l (u_{ttt}^m u_{tt}^m + a u_{xt}^m u_{xtt}^m + c u_t^m u_{tt}^m + a_t u_x^m u_{xtt}^m + c_t u^m u_{tt}^m) dx dt + \\ & + \int_0^\tau \alpha(t) (u_{tt}^m(l, t))^2 dt + \int_0^\tau \alpha'(t) u_t^m(l, t) u_{tt}^m(l, t) dt = \int_0^\tau \int_0^l f_t u_{tt}^m dx dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав некоторые из слагаемых по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau) (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + \int_0^\tau \alpha(t) (u_{tt}^m(l, t))^2 dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^l (u_{tt}^m(x, 0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha''(t) (u_t^m(l, t))^2 dt - \frac{1}{2} \alpha'(\tau) (u_t^m(l, \tau))^2 + \\ & + \frac{3}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t (u_{xt}^m)^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l a_{tt} u_{xt}^m u_x^m dx dt - \int_0^l a_t(\tau) u_x^m(x, \tau) u_{xt}^m dx - \\ & - \int_0^\tau \int_0^l c u_t^m u_{tt}^m dx dt - \int_0^\tau \int_0^l c_t u^m u_{tt}^m dx dt + \int_0^\tau \int_0^l f u_{tt}^m dx dt. \end{aligned}$$

Заметим, что из условий теоремы вытекает существование положительного числа c_1 такого, что $\max_{Q_\tau} |c_t| \leq c_1$.

Рассмотрим некоторые слагаемые правой части последнего равенства с целью вывода в дальнейшем нужного нам неравенства. Применим неравенство (9) к $(u_t^m(l, t))^2$:

$$(u_t^m(l, t))^2 \leq \varepsilon \int_0^l (u_{xt}^m(x, t))^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^l (u_t^m(x, t))^2 dx,$$

а затем последнее слагаемое этого неравенства оценим следующим образом:

$$\int_0^l (u_t^m(x, t))^2 dx \leq \tau \int_0^\tau \int_0^l u_{tt}^m dx dt.$$

Теперь с помощью второго из неравенств (9) получим

$$\left| \int_0^l (u_t^m(l, t))^2 dx \right| \leq \varepsilon \int_0^l (u_{xt}^m)^2 dx + c(\varepsilon) \int_0^l (u_t^m(x, t))^2 dx.$$

Применив к слагаемым, содержащим произведения функций под знаком интегралов, неравенство Коши и учтя полученные выше соотношения, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + a(x, \tau)(u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + \int_0^\tau \alpha(t)(u_{tt}^m(l, t))^2 dt \leq \\ & \leq N_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u_{tt}^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dx dt + N_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dx dt + \\ & \quad + a_1 \int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt + \int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt + 2\varepsilon a_1 \int_0^l (u_{xt}^m(x, \tau))^2 dx. \end{aligned}$$

Выбрав ε надлежащим образом, так, чтобы $a_0 - 2a_1\varepsilon > 0$, перенесем последнее слагаемое правой части полученного неравенства в левую, и тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^l [(u_{tt}^m(x, \tau))^2 + (u_{xt}^m(x, \tau))^2] dx + \gamma \int_0^\tau \alpha(t)(u_{tt}^m(l, t))^2 dt \leq \\ & \leq N_3 \int_0^\tau \int_0^l [(u_{tt}^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dx dt + N_4 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dx dt + \\ & \quad + N_5 \int_0^\tau (u_t^m(l, t))^2 dt + N_6 \int_0^\tau \int_0^l f_t^2 dx dt. \end{aligned}$$

Заметим, что из полученных при доказательстве теоремы 1 оценок (17) и (18) следует, что второе и третье слагаемые правой части последнего неравенства ограничены. Применяв лемму Гронуолла, приходим к выводу о справедливости неравенства

$$\|u_{tt}^m\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|u_{xt}^m\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq K. \quad (20)$$

Оценка (20) вместе с (17) и (18) позволяет выделить подпоследовательность из последовательности $\{u^m(x, t)\}$, сходящуюся в $L_2(Q_T)$ вместе с производными первого порядка и производными $u_{tt}^m(x, t)$, $u_{xt}^m(x, t)$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (12), приходим к тождеству (4). Решение, обладающее указанными свойствами, удовлетворяет тождеству (4) в форме

$$\int_0^T \int_0^l (u_{tt}v + au_x v_x + cuv) dx dt + \int_0^T \alpha(t) u_t(l, t) v(l, t) dt = \int_0^T \int_0^l f v dx dt \quad (21)$$

и единственно в силу теоремы 1.

Покажем, что при выполнении условий теоремы 2 решение имеет производные второго порядка и по пространственной переменной.

Возьмем в (21) $v(x, t) = \Psi(t)\Phi(x)$, где $\Psi(t)$ — произвольный элемент из $L_2(0, T)$, $\Psi(T) = 0$, а $\Phi(x)$ — произвольный элемент из $W_2^1(0, l)$, $\Phi(0) = 0$. Тогда (21) можно записать так:

$$\int_0^T \Psi(t) \int_0^l [u_{tt}\Phi(x) + au_x\Phi'(x) + cu\Phi(x)] dx dt + \int_0^T \alpha(t)u_t(l, t)\Psi(t)\Phi(l) dt = \int_0^T \Psi(t) \int_0^l f\Phi(x) dx dt.$$

В силу произвола в выборе $\Psi(t)$ из последнего равенства следует, что для почти всех $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$\int_0^l au_x\Phi'(x) dx = - \int_0^l [u_{tt} + cu - f]\Phi(x) dx - \alpha(t)u_t(l, t)\Phi(l). \quad (22)$$

Для обоснования утверждения о существовании вторых производных по x рассматривается вспомогательная задача: *найти решение уравнения*

$$(au_x)_x = F(x, t),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \nu(t).$$

Рассматривая ее как краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, нетрудно получить решение

$$u(x, t) = a(l, t)\nu(t) \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi, t)} - \int_0^x \frac{1}{a(\xi, t)} \int_\xi^l F(\xi', t) d\xi' d\xi.$$

Очевидно, это решение имеет непрерывную производную второго порядка, если $F \in L_2(0, l)$ для всех $t \in [0, T]$. Нетрудно увидеть, что это решение удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l au_x\Phi'(x) dx = - \int_0^l F(x, t)\Phi(x) dx + a(l, t)\nu(t)\Phi(l)$$

и, стало быть, является обобщенным решением вспомогательной задачи из $W_2^2(0, l)$ для $F \in L_2(0, l)$, $\nu \in L_2(0, T)$ и почти всех $t \in [0, T]$. Возвращаясь к (22) видим, что для почти всех $t \in [0, T]$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую этому тождеству, можно интерпретировать как решение вспомогательной задачи при $F(x, t) = u_{tt} + cu - f$, $\nu(t) = u_t(l, t)$. Следовательно, $u_{xx} \in L_2(Q_T)$.

Итак, доказано, что решение задачи (1)–(3) при выполнении условий теоремы 2 принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$ и является решением почти всюду в Q_T . \square

4. Частный случай. Для практических целей часто возникает необходимость получения решения в явном виде или приближенного решения. Доказанные теоремы 1 и 2 оказываются весьма полезными и для этих целей. Действительно, выбрав подходящий базис $w_k(x)$, мы можем воспользоваться процедурой, описанной при доказательстве существования обобщенного решения, и получить приближенное решение в виде конечной суммы $u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$, а для нахождения $c_k(t)$ можно применить известные численные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример, демонстрирующий возможность получения решения задачи в явном виде.

ПРИМЕР. Найти решение уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$$

в $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) = 0.$$

Как отмечено выше, метод разделения переменных бесполезно пытаться применить непосредственно к этой задаче. Однако мы его все же используем после некоторых рассуждений и действий.

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= f(x, t); \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = \mu(t). \end{aligned}$$

Будем искать решение вспомогательной задачи в виде суммы $u(x, t) = u^1(x, t) + u^2(x, t)$, где $u^1(x, t)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным и краевым условиям, а $u^2(x, t)$ — решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее однородным начальным и краевым условиям. Если $\mu(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и обращается в нуль при $t \leq 0$, то мы можем воспользоваться представлением решения этой задачи при $T \leq l$, предъявленным в статье В. А. Ильина и В. В. Тихомирова [18]:

$$u^1(x, t) = \mu(t + x - l).$$

Функцию $u^2(x, t)$ найдем методом разделения переменных. Тогда решение нашей вспомогательной задачи имеет вид

$$u(x, t) = \mu(t + x - l) + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi n}{l} (t - \tau) d\tau,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Теперь попробуем выяснить, найдется ли такая функция $\mu(t)$, чтобы решение вспомогательной задачи было решением поставленной задачи. Для этого к полученному решению вспомогательной задачи применим краевое условие $u_x(l, t) + \gamma u_t(l, t) = 0$. После несложных преобразований приходим к дифференциальному уравнению

$$\mu'(t) = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi n}{l} (t - \tau) d\tau,$$

решение которого легко получить:

$$\mu(t) = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^t \int_0^{\tau} f_n(\eta) \cos \frac{\pi n}{l} (\tau - \eta) d\eta d\tau.$$

Замечание 2. Условие $T \leq l$ существенно, но только для простоты представления решения. Для других значений t представления решений задачи с неоднородными краевыми условиями получены в серии работ В. А. Ильина [19, раздел VI].

Заключение. На наш взгляд, наиболее важным результатом этой работы является доказательство принадлежности решения поставленной задачи пространству $W_2^2(Q_T)$, что дает возможность получения как приближенных, так и, в частных случаях, точных решений задачи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 2004.
2. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0, 1)$ // *Докл. АН СССР*, 1991. Т. 321, № 6. С. 1158–1163.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Дифференц. уравнения*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
4. Лажетич Н. Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1072–1077.
5. Рогожников А. М. О различных типах граничных условий для одномерного уравнения колебаний / *Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ*. Т. 10, 2013. С. 188–214.
6. Киричек В. А., Пулькина Л. С. Задача с динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения // *Вестн. Самарск. ун-та. Естественно-научн. сер.*, 2017. Т. 23, № 1. С. 21–27.

7. Корпусов М. О. *Разрушение в неклассических волновых уравнениях*. М.: URSS, 2010.
8. Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // *Вестн. Самарск. гос. ун-та. Естественно-научн. сер.*, 2014. №3(114). С. 9–19.
9. Doronin G. G., Lar'kin N. A., Souza A. J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // *Electron. J. Differ. Equ.*, 1998. vol.1998, no. 28. 10 pp. <https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/7927>.
10. Andrews K. T., Kuttler K. L., Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions // *J. Math. Anal. Appl.*, 1996. vol.197, no.3. pp. 781–795. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0053>.
11. Бейлин А. Б., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными динамическими условиями для уравнения колебаний толстого стержня // *Вестн. Самарск. ун-та. Естественно-научн. сер.*, 2017. Т.23, №4. С. 7–18. <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18>.
12. Louw T., Whitney S., Subramanian A., Viljoen H. Forced wave motion with internal and boundary damping // *J. Appl. Phys.*, 2012. vol.111, 014702. <https://doi.org/10.1063/1.3674316>.
13. Пулькина Л. С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // *Изв. вузов. Матем.*, 2016. №9. С. 42–50.
14. Федотов И. А., Полянин А. Д., Шаталов М. Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // *ДАН*, 2007. Т.417, №1. С. 56–61.
15. Pulkina L. S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019. vol.2019, no. 29. 9 pp. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/abstr.html>.
16. Хазанов Х. С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами*. Самара: Самар. госуд. аэрокосмич. ун-т, 2002.
17. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973.
18. Ильин В. А., Тихомиров В. В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса // *Дифференц. уравнения*, 1999. Т.35, №5. С. 692–704.
19. Ильин В. А. *Избранные труды В. А. Ильина*. Т.2. М.: Макс-Пресс, 2008.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 35L20, 35B45, 35D30

A problem with dynamical boundary condition for a one-dimensional hyperbolic equation

© A. B. Beylin¹, L. S. Pulkina²¹ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.² Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we consider a problem with dynamical boundary conditions for a hyperbolic equation. The dynamical boundary condition is a convenient method to take into account the presence of certain damper when fixing the end of a string or a beam. Problems with dynamical boundary conditions containing first-order derivatives with respect to both space and time variables are not self-adjoint, that complicates solution by spectral analysis. However, these difficulties can be overcome by a method proposed in the paper. The main tool to prove the existence of the unique weak solution to the problem is the priori estimates in Sobolev spaces. As a particular example of the wave equation is considered. The exact solution of a problem with dynamical condition is obtained.

Keywords: hyperbolic equation, boundary-value problem, dynamical boundary condition, weak solution, Sobolev spaces.

Received: 24th February, 2020 / Revised: 12th July, 2020 /Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beylin A. B., Pulkina L. S. A problem with dynamical boundary condition for a one-dimensional hyperbolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 407–423. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1775> (In Russian).

Authors' Details:

Alexander B. Beylin  <https://orcid.org/0000-0002-4042-2860>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanical Engineering, Machine Tools and Tools; e-mail: abeilin@mail.ru

Ludmila S. Pulkina  <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Differential Equations and Control Theory; e-mail: louise@samdiff.ru

responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004 (In Russian).
2. Skubachevskii A. L., Steblov G. M. On the spectrum of differential operators with a domain that is not dense in $L_2(0, 1)$, *Soviet Math. Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 3, pp. 870–875.
3. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 (In Russian).
4. Lažetić N. L. On the classical solvability of the mixed problem for a second-order one-dimensional hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1134–1139. <https://doi.org/10.1134/S0012266106080088>.
5. Rogozhnikov A. M. On various kinds of boundary conditions for one-dimensional wave equation, In: *The Collection of Articles by Young Scientists at the MSU Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics*, vol. 10, 2013, pp. 188–214 (In Russian).
6. Kirichek V. A., Pulkina L. S. Problem with dynamic boundary conditions for a hyperbolic equation, *Vestn. Samarsk. Univ. Estestvenno-Nauchn. Ser.*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 21–27 (In Russian).
7. Korpusov M. O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniakh* [Blow-Up in Non-classical Wave Equations]. Moscow, URSS, 2010 (In Russian).
8. Beylin A. B., Pulkina L. S. A problem on longitudinal vibrations of a beam with dynamic boundary conditions, *Vestn. Samarsk. Gosud. Univ. Estestvenno-Nauchn. Ser.*, 2014, no. 3(114), pp. 9–19 (In Russian).
9. Doronin G. G., Lar'kin N. A., Souza A. J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping, *Electron. J. Differ. Equ.*, 1998, vol. 1998, no. 28, 10 pp. <https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/7927>.
10. Andrews K. T., Kuttler K. L., Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, vol. 197, no. 3, pp. 781–795. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0053>.
11. Beylin A. B., Pulkina L. S. A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions, *Vestn. Samarsk. Univ. Estestvenno-Nauchn. Ser.*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 7–18 (In Russian). <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18>.
12. Louw T., Whitney S., Subramanian A., Viljoen H. Forced wave motion with internal and boundary damping, *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 111, 014702. <https://doi.org/10.1063/1.3674316>.
13. Pulkina L. S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 38–45. <https://doi.org/10.3103/S1066369X16090048>.
14. Fedotov I. A., Polyanin A. D., Shatalov M. Y. Theory of free and forced vibrations of a rigid rod based on the Rayleigh model, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 11, pp. 607–612. <https://doi.org/10.1134/S1028335807110080>.
15. Pulkina L. S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019, vol. 2019, no. 29, 9 pp. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/abstr.html>.
16. Khazanov Kh. S. *Mekhanicheskie kolebaniia sistem s raspredelennymi parametrami* [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]. Samara, Samara State Aerospace Univ., 2002 (In Russian).
17. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).

18. Il'in V. A., Tikhomirov V. V. The wave equation with boundary control at two ends and the problem of the complete damping of a vibration process, *Differ. Equ.*, 1999, vol. 35, no. 5, pp. 697–708.
19. Il'in V. A. *Izbrannye trudy V.A. Il'ina* [Selected Works of V.A. Il'in], vol. 2. Moscow, Maks-Press, 2008 (In Russian).

Mechanics of Solids



MSC: 74A20, 74A60

On a micropolar theory of growing solids

© E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The present paper is devoted to the problem of boundary conditions formulation in the growing micropolar solid mechanics. The static equations of the micropolar continuum in terms of relative tensors (pseudotensors) are derived due to virtual work principle for a solid of constant staff. The constitutive quadratic form of the elastic potential (treated as an absolute scalar) for a linear hemitropic micropolar solid is presented and discussed. The constitutive equations for symmetric and antisymmetric parts of force and couple stress tensors are given. The final forms of the static equations for the hemitropic micropolar continuum in terms of displacements and micro-rotations rates are obtained including the case of growing processes. A transformation of the equilibrium equations is proposed to obtain boundary conditions on the propagating growing surface in terms of relative tensors in the form of differential constraints. Those are valid for a wide range of materials and metamaterials. The algebra of rational relative invariants is intensively used for deriving the constitutive relations on the growing surface. Systems of joint algebraic rational relative invariants for force, couple stress tensors and also unit normal and tangent vectors to propagating growing surface are obtained, including systems of invariants sensitive to mirror reflections and 3D-space inversions.

Keywords: micropolar hemitropic continuum, microrotation, pseudoscalar, relative tensor, 3D printing, propagating growing surface, stress, constitutive equation, rational relative invariant, differential constraint, complete system.

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@google.com

Yuri N. Radayev <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Received: 15th June, 2020 / Revised: 17th August, 2020 /

Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Introduction

Modern methods of design and manufacture of products and complex shape structures are based on various technological processes of material processing (lamination, photopolymerization, stereolithography, winding, surfacing, freezing, ablation, segmentation, frontal and layer-by-layer curing) [1,2]. These manufacturing processes of additive technologies are associated with the products synthesis by sequentially adding material to the surface of an arbitrary (often abnormal) shape. It should be then noted that considered growth processes do not include the processes of the so-called volumetric growth [3–11]: the formation of a solid component in the process of a chemical reaction, the growth of biological tissues [6], bones [8,9], the natural formations of fruits [12]. At the same time, the procedure for choosing adequate boundary conditions on a propagating growing surface is an actual fundamental problem of modern continuum mechanics and applied mathematics. The boundary conditions play the an important role for the mathematical models of the growing solids. In addition, 3D materials used in additive manufacturing, as well as final products, have microstructural features and mechanical properties that are best described by asymmetric theories of continuum mechanics. Consequently, for the development of mathematical models of such technological processes for processing 3D materials and manufacturing 3D products, it is necessary to use the mechanics of growing solids (MGS) and the formalism of nonequilibrium thermodynamics in combination with the approaches of asymmetric theories.

The relative tensors is naturally arising in the mathematical models of micropolar material. In particular, these are: microrotation vector, wryness tensor, couple stress vector and tensor, microinertia, body couples. A literary search shows that the application of relative tensors in the theories of continuum mechanics is not wide spread, despite of the in-depth mathematical studies (algebra, theory of invariants and differentiation of relative tensors) [13–22]. The equations of the micropolar theory in terms of relative tensors or pseudotensors allows a deep insight of the physical and geometric nature of studied physical fields.

A solution of applied problem of growing solids mechanics is sometimes a sophisticated and time-consuming procedure [2, 23–29]. A substantial feature of the boundary value problems statements in the MGS frameworks is the boundary conditions formulation on the interface between the source material and the added part [30–32].

The paper is arranged as follows. The first section of the paper is devoted to a formulation of the virtual work principle for a micropolar solid of constant staff. Differential constraints are taking into consideration by means of Lagrange multipliers rule. These multipliers are the reactions of the imposed kinematic constraints. The weights of the fundamental relative tensors are estimated and collected in table 1.

In Sec. 2, the static equations of the micropolar continuum in terms of relative tensors are derived. The final form of static equations in an arbitrary curvilinear coordinate system is obtained. The weights of relative tensors of micropolar elasticity are verified and given in table 2.

Sec. 3 of the paper is devoted to the constitutive form of the elastic potential (treated as an absolute scalar) for the hemitropic micropolar continuum. The weights of the micropolar hemitropic constitutive scalars are determined and then shown by table 3. The static equations are obtained for displacements and micro-rotations for a semi-istropic (hemitropic) continuum of constant staff and generalized for a growing solid.

Then, in Sec. 4, the boundary conditions on the propagating growing surface are obtained by transforming the equilibrium equations of the micropolar continuum from the Sec. 2 of the paper. Boundary conditions are derived in the form of differential constraints for force and couple stress tensors.

In Sec. 5, systems of joint algebraic rational relative invariants of force stress tensor, couple stress tensor and the unit normal and tangent vectors to the propagating growing surface are presented in tables 4–6. The system of joint algebraic relative invariants insensitive to a coordinate frame rotation around the unit normal vector to the propagating growing surface is proposed and discussed.

The Sec. 6 deals with a system of invariants sensitive to mirror reflections and 3D-space inversions of local coordinate frame related to a propagating growing surface.

The final section contains concluding remarks and discussion of the paper.

1. Variational principle for a micropolar continuum of constant staff

Relative tensors naturally arise in the mechanics of elastic micropolar media. Throughout the paper in square brackets above the root symbol we will indicate the relative tensor weight. Hereafter, we will not denote zero weight of the relative tensor. Note that, the discussions and considerations in Secs. 1–3 are provided in the frameworks of virtual displacements principle formulated for a constant staff solid in Eulerian coordinate net. The form of static equations is held in case of micropolar growing solids. Following this way a derivation of static equations can be realized for non-growing solids and then generalized on a case of growing solids.

Virtual work due to force factors on virtual displacements δu_k and micro-rotations $\delta \phi^i$, can be furnished as an absolute scalar in following form [33]:

$$\delta A = \int \left[X^j \delta u_j + Y_j \delta \phi^j \right] dV + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + m_j \delta \phi^j \right] dS.$$

Hereafter, we will use invariant volume element dV and invariant surface element dS of the zero weight.

Small “rigid” displacement and “rigid” rotation close to the equilibrium state are equivalent the following differential constraints

$$\nabla_{(i} \delta u_k) = 0, \tag{1}$$

$$\delta \varphi^{[+1]i} = \delta \phi^{[+1]i} - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k \delta u_l = 0, \quad (2)$$

$$\delta \kappa_{i \cdot s}^{[+1]} = \nabla_i \delta \phi^s = 0. \quad (3)$$

Here ϵ^{ikl} are the fundamental permutation symbols. Note that the permutation symbols is a pseudotensor of weight +1 in contravariant case and have weight -1 in covariant case. Hereafter, we will not denote the weight of these pseudotensors.

In case of constraints (3), according to the principle of virtual displacements, such “rigid” motions can be performed without “cost” of work, i.e. virtual work is vanished:

$$\delta A = 0, \quad (4)$$

The most important distinguishing feature in the variational equation (4) is the absence contributions of the work of “internal” force factors. In this case the principle of virtual displacements is derived in a very simple analytical form.

Thus, the principle of virtual displacements is a variational equation (4), with differential constraints imposed on variations (1)–(3). Therefore, further discussions will be based on the Lagrange multiplier rule [33]. Variational equation (4) we

Table 1

Fundamental relative tensors of continuum mechanics

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
determinant defined by Jacobian	$\Delta = \det(\overline{\partial_j x^i})$	—	$g \Delta^2 = \bar{g}$
contravariant permutation symbol	ϵ^{ijk}	+1	$e^{ijk} = e \epsilon^{[+1]ijk}$
covariant permutation symbol	ϵ_{ijk}	-1	$e_{ijk} = \frac{1}{e} \epsilon^{[-1]ijk}$
metric tensor	g_{ij}	0	
fundamental tensor	g^{ij}	0	
metric tensor determinant	g	+2	$g^{[+2]} = e^2$
metric tensor determinant sign	$\text{sgn } g$	0	
fundamental tensor determinant	g^{-1}	-2	$g^{[-2]-1} = e^{-2}$
fundamental orienting scalar in 3D	e	+1	$e^{[+1]} = e$
inverse fundamental orienting scalar in 3D	$\frac{1}{e}$	-1	$e^{[-1]-1} = \frac{1}{e}$
invariant volume element	dV	0	
natural volume element	$d\tau$	-1	$dV = e d\tau^{[-1]}$
Hamilton nabla	∇_i	0	

will replace with a new one, with Lagrange multipliers by eliminating constraints (1)–(3). For this purpose, the multipliers of different types are introduced:

- (i) $\sigma^{(ik)}$ is first (symmetric) absolute tensor multiplier;
- (ii) τ_j is second pseudovector multiplier;
- (iii) $\mu_{.k}^i$ is third pseudotensor multiplier.

As a result, instead of the variational equation (4) one can obtain a new variational equation with independent variations δu_k and $\delta \phi^i$:

$$\int \left[X^j \delta u_j + Y_j \delta \phi^j - \sigma^{(ik)} \nabla_{(i} \delta u_{k)} - 2 \tau_i \left(\delta \phi^{[+1]i} - \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \nabla_k \delta u_l \right) - \mu_{.k}^i \nabla_i \delta \phi^{[+1]k} \right] dV + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + m_j \delta \phi^j \right] dS = 0. \quad (5)$$

Introducing following notation

$$t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} \tau_j,$$

the equation (5) can be transformed into

$$\int \left[X^k + \nabla_i \sigma^{(ik)} + \nabla_i \sigma^{[ik]} \right] \delta u_k dV + \int \left[Y_k - 2 \tau_k + \nabla_i \mu_{.k}^i \right] \delta \phi^k dV + \oint_{\partial} \left[t^k - n_i (\sigma^{(ik)} + \sigma^{[ik]}) \right] \delta u_k dS + \oint_{\partial} \left[m_k - n_i \mu_{.k}^i \right] \delta \phi^k dS = 0, \quad (6)$$

where n_i are the unit vector components of the external normal to the outer surface ∂ of the solid.

2. Static equations of growing micropolar continuum

The differential equations of equilibrium are derived from the equation (6) by considering those in Eulerian (spatial) coordinate net due to the arbitrariness of the variations δu_k and $\delta \phi^i$. These equations read

$$\begin{aligned} \nabla_i \sigma^{ik} &= -X^k, \\ \nabla_i \mu_{.k}^i - 2 \tau_k &= -Y_k, \end{aligned} \quad (7)$$

where the asymmetric Lagrange multiplier is introduced according to the equation

$$\sigma^{ik} = \sigma^{(ik)} + \sigma^{[ik]}.$$

Note that variations δu_k and $\delta \phi^i$ remain their sense for growing solids while considering in Eulerian coordinates. The formulation of variational principle for varied domain is discussed in [29].

Table 2

Relative tensors of the micropolar elasticity

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
displacements vector	u^k	0	
asymmetric strain tensor	ϵ_{ij}	0	
small strain tensor	$\epsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$	0	
force traction vector	$t^k = n_i \sigma^{ik}$	0	
force stress tensor	σ^{ik}	0	
body forces	X^k	0	
elastic potential	\mathcal{U}	0	
mass density	ρ	0	
couple traction vector	$m_k = n_i \mu_{\cdot k}^i$	-1	$m_k = e \overset{[-1]}{m}_k$
couple stress tensor	$\mu_{\cdot k}^i$	-1	$\mu_{\cdot k}^i = e \overset{[-1]}{\mu}_{\cdot k}^i$
associated couple stress vector	μ^i	0	
associated couple stress vector	τ_k	-1	$\tau_k = e \overset{[-1]}{\tau}_k$
body couples	Y_k	-1	$Y_k = e \overset{[-1]}{Y}_k$
microinertia	\mathfrak{S}	-2	$\mathfrak{S} = e^2 \overset{[-2]}{\mathfrak{S}}$
microrotation tensor	Ω_{ik}	0	
microrotation vector	ϕ^i	+1	$\phi^i = \frac{1}{e} \overset{[+1]}{\phi}^i$
wryness tensor	$\kappa_{i \cdot}^s$	+1	$\kappa_{i \cdot}^s = \frac{1}{e} \overset{[+1]}{\kappa}_{i \cdot}^s$
associated wryness vector	κ_i	0	

The following equations are additionally derived from variational equation (6) on the boundary surface

$$n_i \sigma^{ik} = t^k, \quad n_i \overset{[-1]}{\mu}_{\cdot k}^i = \overset{[-1]}{m}_k. \tag{8}$$

The above results allow us to conclude that the Lagrange multipliers $\sigma^{(jk)}$, $\overset{[-1]}{\tau}_j$, $\overset{[-1]}{\mu}_{\cdot k}^i$ represent the reactions of the imposed constraints, respectively, by the constraints characterising the “rigid” displacements and “rigid” rotations

$$\epsilon_{(jk)} = 0, \quad \overset{[+1]}{\varphi}^j = 0, \quad \overset{[+1]}{\kappa}_{i \cdot}^k = 0.$$

It is also clear that in the physical sense the second-rank tensors σ^{jk} and $\mu_{\cdot k}^{\cdot i}$ are force stress tensor and couple stress tensor respectively. It is obvious that the force stress tensor σ^{ik} is an absolute second-rank tensor, and the couple stress tensor $\mu_{\cdot k}^{\cdot i}$ is a relative tensor of weight -1 .

In the further considerations, the following antisymmetric tensors and their associated vectors will be used

$$-\tau_j = \frac{1}{2}\epsilon_{jik}t^{[ik]}, \quad +\mu^i = \frac{1}{2}\epsilon^{iks} \mu_{[ks]}^{[-1]}.$$

Let us derived the covariant derivatives in accordance with the rules of covariant differentiation of relative tensors [13, 14, 18, 22]. Thus, the static equations (7) are furnished by

$$\partial_i \sigma^{ik} + \sigma^{sk} \Gamma_{si}^i + \sigma^{is} \Gamma_{si}^k = -X^k, \tag{9}$$

$$\partial_i \mu_{\cdot k}^{\cdot i} + \mu_{\cdot k}^{\cdot s} \Gamma_{si}^i - \mu_{\cdot s}^{\cdot i} \Gamma_{ki}^s + \mu_{\cdot k}^{\cdot i} \Gamma_{si}^s - 2 \tau_k = -Y_k^{[-1]}, \tag{10}$$

where ∂_i denotes a partial derivative on the spatial coordinate x^i .

To formulate boundary value problems in the frameworks of the theory of asymmetric elasticity, it is necessary to specify the forces t^k and the couples m_k acting on the outer surface of the solids.

The final form of the equations (9), (10) in combination with the boundary conditions (8) give a general statement of the boundary value problem in the micropolar elasticity frameworks in an arbitrary curvilinear coordinate net.

3. Hemitropic micropolar media

Let's apply the formalism of relative tensors [17–19, 22] to the model of the linear hemitropic micropolar continuum of constant staff. The static equations derived for a constant staff solid by the virtual work principle with special constitutive form of elastic potential in terms of rates will be held true for the growing solids. For a micropolar continuum with one director, the elastic potential¹ \mathcal{U} with appropriate arguments can be taken in the form [33, 37, 38]

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{(ij)}, \kappa^{(ij)}, \varphi^i, \kappa_i),$$

where $\epsilon_{(ij)}$ is small strain tensor (absolute tensor), $\kappa^{(ij)}$ is the symmetric part of the wryness tensor (the relative tensor of weight $+1$), φ^i is vector of relative microrotation (relative vector of weight $+1$), κ_i is the associated wryness vector (absolute vector).

First variation of \mathcal{U} is obtained according to equation

$$\delta \mathcal{U} = \sigma^{(ij)} \delta \epsilon_{(ij)} + \mu_{(ij)}^{[-1]} \delta \kappa^{(ij)} + 2 \tau_i \delta \varphi^i + 2 \mu^i \delta \kappa_i.$$

¹The elastic potential \mathcal{U} is an absolute scalar of the zero weight.

In the case of a continuum exhibiting semi-isotropic (hemitropic) properties, i.e. one are insensible for a rotation and sensible with respect to mirror reflections and 3D-space inversion, potential \mathcal{U} can be presented in the quadratic form by

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & G\nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + G \overset{[-1][-1]}{L} \overset{[+1]}{L} c_3g_{is}g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\ & + Gg^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + G \overset{[-1][-1]}{L} \overset{[+1]}{L} g_{is}g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + 2G \overset{[-2]}{c_1}g_{is}\delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^i\delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \\ & + G \overset{[-1][-1][+2]}{L} \overset{[+1]}{L} c_2g^{is}\kappa_i\kappa_s + G \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} c_4g^{is}g_{lm}\epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \\ & + G \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} c_5\epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + G \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} c_6\kappa_i\delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \end{aligned}$$

where G is the shear modulus of elasticity; ν is the Poisson ratio; $\overset{[-1]}{L}$ is the characteristic length of micropolar theory; $\overset{[-2]}{c_1}$, $\overset{[-1][-1]}{c_2}$, $\overset{[+1]}{c_3}$, $\overset{[+1]}{c_4}$, $\overset{[-1]}{c_5}$, $\overset{[+1]}{c_6}$ are the dimensionless constitutive pseudoscalars. The weights of the micropolar hemitropic constitutive scalars are shown in table 3.

Then the constitutive equations of a hemitropic micropolar growing medium can be furnished by in the form

$$\begin{aligned} \sigma^{(is)} = & 2G(\nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{is}g^{lm} + g^{il}g^{sm})\epsilon_{(lm)} + G \overset{[-1]}{L} (c_4g^{is}g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5 \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}), \\ \mu_{(is)} = & 2G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1][-1]}{L} (c_3g_{is}g_{lm} + g_{il}g_{sm}) \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + G \overset{[-1]}{L} (c_4g_{is}g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}), \\ \tau_i = & 2G \overset{[-1]}{c_1}g_{is} \overset{[-2]}{\varphi}{}^s + \frac{1}{2}G \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} c_6\kappa_i, \\ \mu^i = & G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1][-1][+2]}{L} c_2g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}G \overset{[-1]}{L} \overset{[+1]}{L} c_6 \overset{[+1]}{\varphi}{}^i. \end{aligned}$$

Consider the fundamental orienting scalar powers² e^m and take account of equation

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{11}$$

The equation (11) can be easily proved. Note, that a tensor equation involving relative tensors when true in one coordinate system is valid in all coordinate systems [18]. Let's consider the equation (11) in a right-handed Cartesian coordinate net. Actually, in this case a covariant derivative in (11) is a partial one. Then, in a right-handed Cartesian coordinate net $e = 1$. Thus, the equation (11) is trivially fulfilled which proves it actuality in any curvilinear coordinate net.

²Orienting pseudoscalar of weight +1 in a three-dimensional space is determined by the equation

$$e = \overset{[+1]}{e} = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{z}_2 \times \mathbf{z}_3),$$

\mathbf{z}_k ($k = 1, 2, 3$) are the local coordinate frame base vectors. This definition holds true only in three-dimensional space. For the case of multidimensions see [39, 40].

Table 3

The weights of the micropolar hemitropic constitutive scalars

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
shear modulus of elasticity	G	0	
the Poisson ratio	ν	0	
characteristic length of the micropolar theory	L	-1	$L = e^{[-1]} L$
dimensionless micropolar modulus i	c_1	-2	$c_1 = e^{2[-2]} c_1$
dimensionless micropolar modulus ii	c_2	+2	$c_2 = \frac{1}{e^2} c_2^{[+2]}$
dimensionless micropolar modulus iii	c_3	0	
dimensionless micropolar modulus iv	c_4	0	
dimensionless micropolar modulus v	c_5	0	
dimensionless micropolar modulus vi	c_6	0	
constitutive pseudoscalar i	A_1	0	
constitutive pseudoscalar ii	A_2	-2	$A_2 = e^{2[-2]} A_2$
constitutive pseudoscalar iii	A_3	0	
constitutive pseudoscalar iv	A_4	-2	$A_4 = e^{2[-2]} A_4$
constitutive pseudoscalar v	A_5	-2	$A_5 = e^{2[-2]} A_5$
constitutive pseudoscalar vi	A_6	0	
constitutive pseudoscalar vii	A_7	-1	$A_7 = e^{[-1]} A_7$
constitutive pseudoscalar viii	A_8	-1	$A_8 = e^{[-1]} A_8$
constitutive pseudoscalar ix	A_9	-1	$A_9 = e^{[-1]} A_9$

Introducing the following notations

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6,$$

and in view of equation (11) we derive the prefinal static equations for the hemitropic micropolar continuum in terms of displacements and microrotations

$$\begin{aligned} G \left[(1 + e^2 c_1^{[-2]}) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^2 c_1^{[-2]} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k \pm \right. \\ \left. \pm 2e c_1^{[-2]} \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l^{[+1]} + L c'_4 \nabla^i \nabla_k \phi^k^{[+1]} + L c'_5 \nabla^k \nabla_k \phi^{[+1]i} \right] = -X^i, \\ G L L \left[(1 + e^{-2} c_2^{[+2]}) \nabla^s \nabla_s \phi_i^{[+1]} + (1 - e^{-2} c_2^{[+2]} + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \phi^k^{[+1]} + \right. \\ \left. + L^{-1} c'_4 \nabla_i \nabla^k u_k + L^{-1} c'_5 \nabla^k \nabla_k u_i + L^{-1} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \phi^l^{[+1]} \right] - \\ - 2e G c_1^{[-2]} (2 \phi_i^{[+1]} - \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) = -Y_i^{[-1]}, \end{aligned} \quad (12)$$

where “+” corresponds to the right-handed coordinate net, and the sign “−” corresponds to the left-handed one.

The static equations in mechanics of growing solids are often conveniently furnished by the rate equations. Thus, taking account of the independence of body forces and couples on time after simple transformations equations (12) read by

$$\begin{aligned} G \left[(1 + e^2 c_1^{[-2]}) \nabla^s \nabla_s v^i + (1 - e^2 c_1^{[-2]} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k v^k \pm \right. \\ \left. \pm 2e c_1^{[-2]} \epsilon^{ikl} \nabla_k \Omega_l^{[+1]} + L c'_4 \nabla^i \nabla_k \Omega^k^{[+1]} + L c'_5 \nabla^k \nabla_k \Omega^{[+1]i} \right] = 0, \\ G L L \left[(1 + e^{-2} c_2^{[+2]}) \nabla^s \nabla_s \Omega_i^{[+1]} + (1 - e^{-2} c_2^{[+2]} + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \Omega^k^{[+1]} + \right. \\ \left. + L^{-1} c'_4 \nabla_i \nabla^k v_k + L^{-1} c'_5 \nabla^k \nabla_k v_i + L^{-1} c'_6 \epsilon_{isl} \nabla^s \Omega^l^{[+1]} \right] - \\ - 2e G c_1^{[-2]} (2 \Omega_i^{[+1]} - \epsilon^{pqm} g_{ip} g_{kq} g_{ln} g^{ks} \nabla_s v^l) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where v^k are the velocities components, $\Omega_k^{[+1]}$ are the angular velocities of microrotations.

Note, that the rate form of static equations (13) furnishing in a Eulerian coordinate net hold true in a case of micropolar growing solid.

4. Differential constraints on a micropolar growing surface

The considerations in the section are provided by the transformation of the static equations obtaining in Sec. 2. The equation in Eulerian coordinates can be applied for describing behavior of growing solids. The similar method is in-depth discussed for a Cartesian coordinate net in the book [32, pp. 288–292]

by G.I. Bykovtsev. Here we use notation and terminology introducing in the studies [41–43], where the differential constraints for the force stress tensor are derived and discussed. Let's analytically define a propagating growing surface Σ in three-dimensional space by the equation

$$t = \tau(x^i). \quad (14)$$

Then the unit normal vector n_i on the propagating growing surface Σ directed towards its propagation is related to the spatial gradient (14) by the equation

$$n_i = c \partial_{i*} \tau, \quad c = |\nabla_* \tau|^{-1} \quad (t = \tau), \quad (15)$$

where c is the linear velocity of propagating growing surface in the normal direction n_k .

As previously shown (see for example, [41–43]), the transformation of equations of equilibrium (7) using a formula for the actual components of the force stress tensor σ^{ij}

$$\sigma^{ij} = \int_{\tau+0}^t [\partial_* \sigma^{ij}(x^s, t')] dt' + \mathcal{S}^{ji} + \sigma_*^{ij}(x^s), \quad (16)$$

$$\mathcal{S}^{ij} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial_* \sigma^{ij}(x^s, t')] dt', \quad (17)$$

allows us to derive the equation on the propagating growing surface in the form of the following differential constraints

$$c [\nabla_j \sigma_*^{ji}(x^s) + \nabla_j \mathcal{S}^{ji} + X_*^i(x^s)] - n_j \partial_* \sigma^{ji}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0). \quad (18)$$

In equations (16)–(18) we use the notation adopted in [41–43]: \mathcal{S}^{ji} is the stress jump related integral, $\sigma_*^{ij}(x^s) = \sigma^{ij}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ are the stress tensor components, respectively, at the moment $t = \tau(x^s) - 0$ right before when the element is included in the main solid, $X_*^i(x^s) = X^i(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$. Moment $t = \tau(x^s) + 0$ corresponds to the moment right after attaching the element to the growing surface.

Formulas for the components of the couple stress tensor, by analogy with the equations (16) can be assume in the following form

$$\mu_{*k}^{i[-1]} = \int_{\tau+0}^t [\partial_* \mu_{*k}^{i[-1]}(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{*k}^{i[-1]} + \mu_{*k}^{i[-1]}(x^s), \quad (19)$$

$$\mathcal{M}_{*k}^{i[-1]} = \int_{\tau-0}^{\tau+0} [\partial_* \mu_{*k}^{i[-1]}(x^s, t')] dt',$$

where $\mathcal{M}_{*k}^{i[-1]}$ is the couples jump related integral, $\mu_{*k}^{i[-1]}(x^s) = \mu_{*k}^{i[-1]}(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)-0}$ are the components of the couple stress tensor at time $t = \tau(x^s) - 0$.

After substitution of the actual couple stresses components (19) into equations of equilibrium (7) one can obtain

$$\nabla_i \left\{ \int_{\tau+0}^t [\partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t')] dt' + \mathcal{M}_{.k}^{[-1]i} + \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s) \right\} = 2 \tau_k - Y_k \quad (t \geq \tau + 0). \quad (20)$$

The next transformations of equation (20) is performed by derivative calculation according to the parametric integral differentiation rule. Note that the lower limit of integration depends on spatial coordinates x^s which play a role of the parameters. Following with way one can derive

$$\begin{aligned} \int_{\tau+0}^t \nabla_i [\partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t')] dt' + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^{[-1]i} - (\nabla_i \tau) [\partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t)]_{t=\tau(x^s)+0} + \\ + \nabla_i \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s) = 2 \tau_k - Y_k \quad (t \geq \tau + 0). \end{aligned} \quad (21)$$

Upon substituting the equation (15) in (21) we can write

$$\begin{aligned} \int_{\tau+0}^t \nabla_i [\partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t')] dt' + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^{[-1]i} - [c^{-1} n_i \partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t)]_{t=\tau(x^s)+0} + \\ + \nabla_i \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s) = 2 \tau_k - Y_k \quad (t = \tau + 0). \end{aligned} \quad (22)$$

The following equation can be obtained by integrating (22) and taking account of (7), then reordering the covariant derivatives

$$\begin{aligned} \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^{[-1]i} - [c^{-1} n_i \partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t)]_{t=\tau(x^s)+0} + \nabla_i \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s) + \\ + 2 \tau_k - Y_k - 2 \tau_k + Y_k = 2 \tau_k - Y_k \quad (t = \tau + 0), \end{aligned} \quad (23)$$

where $Y_k(x^s) = Y_k(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$, $\tau_k(x^s) = \tau_k(x^s, t)|_{t=\tau(x^s)+0}$.

Rearrangement of the terms in equation (23) leads to the final form of differential constraint on the propagating growing surface for the couple stress tensor

$$c [\nabla_i \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s) + \nabla_i \mathcal{M}_{.k}^{[-1]i} - 2 \tau_k + Y_k] - n_i \partial. \mu_{.k}^{[-1]i}(x^s, t) = 0 \quad (t = \tau + 0).$$

In the general case, the forces stresses σ_{*}^{ij} and couples ones $\mu_{*}^{[-1]i}$ are to be expressed in terms of the actual stresses and couples on propagating growing surface by a tensor constitutive equations as follows

$$\sigma_{*}^{ij} = \mathfrak{F}^{ij}(\sigma^{ij}, \mu_{.j}^{[-1]i}, n_i, \dots), \quad \mu_{.k}^{[-1]i} = \mathfrak{Z}_{.k}^{i}(\sigma^{ik}, \mu_{.k}^{[-1]i}, n_k, \dots).$$

The functions \mathfrak{F}_{ij} and $\mathfrak{Z}_{.k}^{i.}$ can be defined by black box approach characterizing evaluation parameters in time interval $\tau - 0 \leq t \leq \tau + 0$ right before attaching elements on a growing solid. In particular, the functions \mathfrak{F}_{ij} and $\mathfrak{Z}_{.k}^{i.}$ may depend on the microstructural directors and the thermophysical hidden variables associated with propagating growing surface. The functions \mathfrak{F}_{ij} and $\mathfrak{Z}_{.k}^{i.}$, in fact, should depend on combinations of arguments which are invariant under coordinate frame rotations around the unit normal vector n_k .

5. System of joint algebraic relative invariants

As we can see from the discussion in Sec. 4, the relative tensors associated with a growing solid and the propagating growing surface are the unit normal and tangent vectors, force and couples stress tensors. It is the tensor objects that define stress–strain state in micropolar material built up on the propagating growing surface. It is reasonable in further considerations to take account of n_i unit normal vector that determines local geometry of the propagating growing surface and to introduce a local orthonormal coordinate frame base vectors involving the unit normal vector n_i and two independent tangent vectors τ_1 and τ_2 in a tangent plane to the propagating growing surface.

Throughout the paper we deal with the second-rank tensors and vectors. The completeness problem of invariants system is in-depth studied in [19]. A complete system of those invariants of the second-rank tensor \mathbf{T} , mutually orthogonal vectors \mathbf{p} and \mathbf{q} which have the same power in the components of both vectors in n -dimensional space consist of $2n$ invariants:

$$I_1, \quad I_2, \quad \dots, \quad I_n, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{p}, \quad \dots, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T}^{n-1} \cdot \mathbf{p}. \quad (24)$$

Here I_k is the absolute invariant of \mathbf{T} defined by

$$I_k = T_{[a_1}^{a_1} T_{a_2}^{a_2} \dots T_{a_k}^{a_k]}, \quad (25)$$

where the alternation denotes by the square brackets around those indices to which it apply. The alteration in (25) is the operation prior to the contractions.

In case of 3D-space the complete system of invariant (24) is reduced to

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{p}. \quad (26)$$

The complete system of joint algebraic relative invariants (24) can be obtained by the well-known Cayley–Hamilton theorem [44, 45]. The theorem can be easily proved for relative tensors. Actually, the Cayley–Hamilton theorem for an absolute second-rank (in general, asymmetric) tensor \mathbf{T} in n -dimensional space [19] can be formulated by equation

$$\mathbf{T}^n - I_1 \mathbf{T}^{n-1} + I_2 \mathbf{T}^{n-2} - \dots + (-1)^n I_n \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

where \mathbf{I} is the unit tensor.

The relative tensor $\mathbf{T}^{[w]}$ can be transformed to an absolute one according to

$$\mathbf{T} = e^{-w} \mathbf{T}^{[w]} \tag{28}$$

For the invariants (25) of tensor \mathbf{T} and relative invariants $I_k^{[kw]}$ of tensor $\mathbf{T}^{[w]}$ defined similarly to (25) and in view of (28) one can obtain

$$I_k = e^{-kw} I_k^{[kw]} \tag{29}$$

After substituting representation of tensor \mathbf{T} (28) and its invariants I_k (29) in equation (27) we obtain

$$e^{-nw} \left(\mathbf{T}^n - I_1^{[w]} \mathbf{T}^{n-1} + I_2^{[2w]} \mathbf{T}^{n-2} - \dots + (-1)^n I_n^{[nw]} \mathbf{I} \right) = \mathbf{0} \tag{30}$$

A product of multipliers (30) is zero if and only if one or more of the multipliers is zero, which proves the Cayley–Hamilton theorem for the relative tensors.

Thus, the invariants system (26) in case of a growing micropolar solid can apply by replacing tensor \mathbf{T} by σ and then $\mu^{[-1]}$ and vectors \mathbf{p} and \mathbf{q} by τ_k ($k = 1$ or 2) and \mathbf{n} respectively. The invariants of tensors σ^{ij} and $\mu_{.k}^{i.[-1]}$ will not involved in considerations due to their independence on a geometry of propagating growing surface.

A complete system of joint algebraic rational relative invariants can be developed according to list of invariants (26) due to joint inner products of considered vectors. Thus, a rationally system of algebraic rational relative invariants of tensor σ^{ij} and vectors n_k and τ_k is shown in table 4. A system for tensor $\mu_{.k}^{i.[-1]}$ and vectors n_k and τ_k is given in table 5. Note that, a literary search is shown an lack of results devoted to a system of joint ivariants of two second-rank tensors and two vectors. In table 6 we propose the joint algebraic rational relative invariants containing simultaneously tensors σ^{ij} and $\mu_{.k}^{i.[-1]}$.

As we can see, the system of joint algebraic rational relative invariants presented in the tables 4–6 is complete but is not irreducible one. The invariants in 4th, 6th, and 8th rows in the table 4, 4th, 6th, and 8th rows in the table 5 and 2nd, 4th, 6th, and 8th rows in the table 6 are not independent and can be excluded from consideration in virtue of obvious rational syzygies. Moreover, the joint algebraic rational relative invariants of higher order involving cubics and biquadratics in stresses and couples corresponding to 5th–8th rows in the table 4, 5th–8th rows in the table 5, 3rd–8th rows in the table 6 should be excluded from considerations according to the Cayley–Hamilton theorem [19].

Thus, the irreducible complete system of joint algebraic rational relative invariants of the force stress tensor σ^{ij} , couple stress tensor $\mu_{.k}^{i.[-1]}$ and vectors n_k

Table 4

Joint absolute rational invariants simultaneously involving the force stress tensor

Vector form	Weight	Coordinate form
$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$	0	$t^k n_k = n_i \sigma^{ik} n_k$
$\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}$	0	$t_2^s n^s = n_j \sigma^{j i} \sigma_{i s} n^s$
$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}$	0	$g_{ij} t^j t^i$
$\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_\perp$	0	$g_{ij} t^j t^i - (t^i n_i)(t^k n_k)$
$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_2$	0	$t^i t_{2i}$
$\mathbf{t}_\perp \cdot \mathbf{t}_{\perp 2}$	0	$t^i t_{2i} - (t^i n_i)(t_{2k} n^k)$
$\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_2$	0	$g^{ij} t_{2i} t_{2j}$
$\mathbf{t}_{\perp 2} \cdot \mathbf{t}_{\perp 2}$	0	$g^{ij} t_{2i} t_{2j} - (t_{2i} n^i)(t_{2k} n^k)$

Table 5

Joint relative rational invariants involving the couple stress tensor

Vector form	Weight	Coordinate form
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{n}$	-1	$\overset{[-1]}{m_k} n^k = n_s \overset{[-1]}{\mu_{\cdot k}^s} n^k$
$\overset{[-2]}{\mathbf{m}}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \overset{[-1]}{\boldsymbol{\mu}}_2 \cdot \mathbf{n}$	-2	$\overset{[-2]}{m_j} n^j = n_i \overset{[-1]}{\mu_{\cdot s}^i} \overset{[-1]}{\mu_{\cdot k}^s} n^k$
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \overset{[-1]}{\mathbf{m}}$	-2	$g^{ij} \overset{[-1]}{m_j} \overset{[-1]}{m_i}$
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp \cdot \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp$	-2	$g^{ij} \overset{[-1]}{m_j} \overset{[-1]}{m_i} - (\overset{[-1]}{m_i} n^i)(\overset{[-1]}{m_k} n^k)$
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_2$	-3	$g^{ij} \overset{[-1]}{m_j} \overset{[-2]}{m_i}$
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_{\perp 2}$	-3	$g^{ij} \overset{[-1]}{m_j} \overset{[-2]}{m_i} - (\overset{[-1]}{m_i} n^i)(\overset{[-2]}{m_k} n^k)$
$\overset{[-2]}{\mathbf{m}}_2 \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_2$	-4	$g^{ij} \overset{[-2]}{m_j} \overset{[-2]}{m_i}$
$\overset{[-2]}{\mathbf{m}}_{\perp 2} \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_{\perp 2}$	-4	$g^{ij} \overset{[-2]}{m_j} \overset{[-2]}{m_i} - (\overset{[-2]}{m_i} n^i)(\overset{[-2]}{m_k} n^k)$

and τ_k can be and given by 1st-3rd rows in the table 4, 1st-3rd rows in the table 5, 1st and 2nd rows in the table 6. Such system will be insensitive to a rotation of the local coordinate frame (n_i, τ_i, τ_i) around the unit normal vector n_i to the propagating growing surface Σ .

6. Algebraic invariants sensitive to mirror reflections

As shown in Sec.3, the hemitropic constitutive pseudoscalars are sensitive to the mirror reflections and 3D-space inversions. Thus, we should pay attention to invariants sensitive to mentioned transformations. Consider a propagating growing

Table 6

Joint relative rational invariants involving the force and couple stress tensor

Vector form	Weight	Coordinate form
$\mathbf{t} \cdot \overset{[-1]}{\mathbf{m}}$	-1	$t^i \overset{[-1]}{m}_i = n_i \sigma^{ik} \overset{[-1]}{\mu}_{.k}^s n_s$
$\mathbf{t}_\perp \cdot \overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp$	-1	$t^i \overset{[-1]}{m}_i - (g^{ij} \overset{[-1]}{m}_j n_i)(t^k n_k)$
$\mathbf{t} \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_2$	-2	$t^i \overset{[-2]}{m}_i$
$\mathbf{t}_\perp \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_{2\perp}$	-2	$t^i \overset{[-2]}{m}_i - (t^i n_i)(g^{ij} \overset{[-2]}{m}_j n_i)$
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{t}_2$	-1	$g^{ij} \overset{[-1]}{m}_j t_i$
$\overset{[-1]}{\mathbf{m}}_\perp \cdot \mathbf{t}_{2\perp}$	-1	$g^{ij} \overset{[-1]}{m}_j t_i - (\overset{[-1]}{m}_i n^i)(t_k n^k)$
$\mathbf{t}_2 \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_2$	-2	$g^{ij} t_i \overset{[-2]}{m}_j$
$\mathbf{t}_{2\perp} \cdot \overset{[-2]}{\mathbf{m}}_{2\perp}$	-2	$g^{ij} t_i \overset{[-2]}{m}_j - (t_k n^k)(\overset{[-2]}{m}_j n^j)$

surface located in 3D-space and introduce local coordinate frame consisted of mutually orthogonal vectors: a unit normal vector n_i , and the two unit vectors in a tangent plane τ_1, τ_2 . In case of 3D-space transformation sensitive to an inversion, we need to discriminate those invariants shown in the tables 4–6 that have an odd weight. Thus, the system of joint algebraic rational relative invariants is defined by 1st, 5th, and 6th rows in the table 5 and 1st, 2th, 5th, and 6th rows in the table 6. The irreducible system of joint algebraic rational relative invariants sensitive to the mirror reflections and 3D-space inversions consists of 1st row in the table 5 and 1st row in the table 6.

7. Conclusions

- (i) The formulation of the virtual work principle for the micropolar solids of a constant staff has been discussed. The weights of the fundamental relative tensors have been estimated and collected in table 1.
- (ii) The static equations in an arbitrary curvilinear coordinate system has been furnished. The weights of relative tensors of micropolar elasticity are verified and given in table 2.
- (iii) The elastic potential (treated as an absolute scalar) of the hemitropic micropolar continuum have been given and discussed. The weights of the micropolar hemitropic constitutive scalars have been discussed and then shown by table 3. The rate form of static equations have been obtained.
- (iv) The boundary conditions on the propagating growing surface have been furnished by transformation of the micropolar equilibrium equations.
- (v) The joint algebraic rational relative invariants of force stress tensor, couple stress tensor and the unit normal vector to the propagating growing surface have been presented in tables 4–6.

- (vi) The system of joint algebraic rational relative invariants insensitive to a coordinate frame rotation around the unit normal vector to the propagating growing surface has been proposed and discussed.
- (vii) Invariants sensitive to the mirror reflections and 3D-space inversions have been discriminated and discussed.

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA–A20–120011690132–4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 18–01–00844, 19–51–60001, 20–01–00666.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable improvements, suggestions and comments.

References

1. Berman B. 3-D printing: The new industrial revolution, *Business Horizons*, 2012, vol. 55, no. 2, pp. 155–162. <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2011.11.003>.
2. Southwell R. V. *An introduction to the theory of elasticity. For engineers and physicists*, Oxford Engineering Science Series. London, Oxford Univ. Press, 1936.
3. Epstein M., Maugin G. A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies, *Int. J. Plast.*, 2000, vol. 16, no. 7–8, pp. 951–978. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(99\)00081-9](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00081-9).
4. Maugin G. A. On inhomogeneity, growth, ageing and the dynamics of materials, *J. Mech. Mater. Struct.*, 2009, vol. 4, no. 4, pp. 731–741. <https://doi.org/10.2140/jomms.2009.4.731>.
5. Ciarletta P., Preziosi L., Maugin G. A. Mechanobiology of interfacial growth, *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 3, pp. 852–872. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2012.10.011>.
6. Ciarletta P., Ambrosi D., Maugin G. A., Preziosi L. Mechano-transduction in tumour growth modelling Physical constraints of morphogenesis and evolution, *Eur. Phys. J. E*, 2013, vol. 36, 23. <https://doi.org/10.1140/epje/i2013-13023-2>.
7. Ciarletta P., Ambrosi D., Maugin G. A. Configurational forces for growth and shape regulations in morphogenesis, *Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.*, 2012, vol. 60, no. 2, pp. 253–257. <https://doi.org/10.2478/v10175-012-0034-5>.
8. Porubov A. V., Maugin G. A. Application of non-linear strain waves to the study of the growth of long bones, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 387–394. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2010.10.004>.
9. Maugin G. A. From the propagation of phase-transition fronts to the evolution of the growth plate in long bones, *Proc. Est. Acad. Sci.*, 2010, vol. 59, no. 2, pp. 72–78. <https://doi.org/10.3176/proc.2010.2.03>.
10. Ciarletta P., Preziosi L., Maugin G. A. Thermo-mechanics of growth and mass transfer: morphogenesis of seashells, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2012, vol. 15, no. Suppl. 1, pp. 110–112. <https://doi.org/10.1080/10255842.2012.713679>.
11. Ciarletta P., Maugin G. A. Elements of a finite strain-gradient thermomechanical theory for material growth and remodeling, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 10, pp. 1341–1346. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.07.004>.
12. Goriely A. *The Mathematics and Mechanics of Biological Growth*, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 45. New York, Springer, 2017, xxii+646 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-87710-5>.

13. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6>.
14. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 24. Cambridge, Cambridge University Press, 1927, viii+102 pp.
15. Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. London, Glasgow, Blackie & Son, 1927, xvi+450 pp.
16. Hawking S. W., Israel W. *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*. Cambridge, Cambridge University Press, 1979, xviii+919 pp.
17. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. New York, Oxford University Press, 1951, 276 pp.
18. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Applied Mathematics Series. New York, John Wiley & Sons, 1964, xii+361 pp.
19. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Gröningen, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
20. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, 334 pp.
21. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics*, Encyclopedia of Physics, vol. 2/3/1; eds. S. Flügge. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
22. Das A. J. *Tensors: The mathematics of relativity theory and continuum mechanics*. New York, Springer, 2007, xii+290 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
23. Rashba E. I. Stresses computation in massive construction under their own weight taking into account the construction sequence, *Proc. Inst. Struct. Mech. Acad. Sci. Ukrainian SSR*, 1953, no. 18, pp. 23–27 (In Russian).
24. Kharlab V. D. Linear creep theory of the build-up body. Mechanics of rod systems and solid mediums, In: *The Proceedings of the Leningrad Civil Engineering Institute*, vol. 49. Leningrad, Leningrad Civil Engineering Institute, 1966, pp. 93–119 (In Russian).
25. Arutyunyan N. Kh., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Dynamic expansion of an elastic layer. Part 1. Motion of a flow of precipitated papers at a variable rate, *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1992, no. 5, pp. 6–24 (In Russian).
26. Arutyunyan N. Kh., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Dynamical expansion of an elastic layer. Part 2. The case of drop of accreted papers at a constant rate, *Izv. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1992, no. 6, pp. 99–112 (In Russian).
27. Naumov V. E., Radayev Yu. N. *Thermomechanical model of an growing solids: Variational formulation*, Preprint no. 527. Moscow, IPMech RAS, 1993, 39 pp. (In Russian)
28. Dmitrieva A. M., Naumov V. E., Radayev Yu. N. *Growth of thermoelastic spherical layer: Application of the variational approach*, Preprint no. 528. Moscow, IPMech RAS, 1993, 64 pp. (In Russian)
29. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 199–209 (In Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>.
30. Arutyunyan N. Kh., Naumov V. E. The boundary value problem of the theory of viscoelastic plasticity of a growing body subject to aging, *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 1, pp. 1–10. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(84\)90099-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90099-6).
31. Trinchler V. K. On the formulation of the problem of stresses calculation in the gravitational state of a growing solid, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1984, no. 2, pp. 119–124 (In Russian).
32. Bykovtsev G. I. *Izbrannyye problemnyye voprosy mekhaniki deformiruemyykh sred* [Selected Problems from Solid Mechanics. Collection of papers]. Vladivostok, Dal'nauka, 2002, 566 pp. (In Russian)
33. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*

- [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
34. Courant R., Gilbert D. *Metody matematicheskoi fiziki* [Methods of Mathematical Physics]. Moscow, Leningrad, Gostekhteorizdat, 1933, 528 pp. (In Russian)
 35. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Variatsionnoe ischislenie* [Calculus of Variations]. Moscow, Fizmatlit, 1961, 228 pp. (In Russian)
 36. Gunter N. M. *Kurs variatsionnogo ischisleniia* [A Course of the Calculus of Variations]. Moscow, Leningrad, Gostekhteorizdat, 1941, 308 pp. (In Russian)
 37. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On wave solutions of dynamic equations of hemitropic micropolar thermoelasticity, *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol.19, no.4, pp. 454–463 (In Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463>.
 38. Radayev Yu. N., Kovalev V. A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol.23, no.3, pp. 464–474. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1689>.
 39. Rosenfeld B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
 40. Rosenfeld B. A. *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol.12. New York, Springer, 1988, ix+471 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8680-1>.
 41. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. <https://doi.org/10.3103/S0025654419080053>.
 42. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol.23, no.4, pp. 646–656. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.
 43. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a Class of Constitutive Equations on Propagating Growing Surface, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*, 2019, no.3(41), pp. 11–29 (In Russian). <https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.40.2.012>.
 44. Hamilton W. R. *Lectures on Quaternions*. Cambridge, Cambridge University Press, 1866, ix+762 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511707162>.
 45. Cayley A. A memoir on the theory of matrices, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1858, no.148, pp. 17–37. <https://doi.org/10.1098/rstl.1858.0002>.

УДК 539.319

О микрополярной 3D-теории растущих тел

© *Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Обсуждается принцип вывода граничных условий в краевых задачах механики растущих микрополярных тел. Приводится вывод уравнений динамики микрополярного континуума в терминах относительных тензоров для тел постоянного состава. Указана определяющая квадратичная форма упругого потенциала (абсолютного скаляра) для линейного гемитропного микрополярного тела. Выведены определяющие соотношения для симметричных и антисимметричных частей тензоров силовых и моментных напряжений. Получены конечные формы уравнений динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах скоростей перемещений и микровращений. Полученные динамические уравнения для тел постоянного состава остаются справедливыми и в теориях растущих тел. Предложена процедура преобразования уравнений равновесия для получения граничных условий на поверхности наращивания в терминах относительных тензоров в форме дифференциальных ограничений. Полученные условия справедливы для весьма широкого круга материалов и метаматериалов. При выводе определяющих соотношений на поверхности наращивания активно используется аппарат алгебры рациональных относительных инвариантов. Получены полные системы совместных относительных инвариантов для тензоров силовых, моментных напряжений и единичного вектора нормали, в том числе системы инвариантов, не выдерживающие зеркальных отражений.

Ключевые слова: микрополярный гемитропный континуум, микроповорот, псевдоскаляр, относительный тензор, 3D-печать, поверхностный рост, напряжение, определяющее уравнение, рациональный относительный инвариант, дифференциальное ограничение, полная система.

Получение: 15 июня 2020 г. / Исправление: 17 августа 2020 г. /
Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Научная статья

©  Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

к.ф.-м.н.; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@google.com

Юрий Николаевич Радаев  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА–А20–120011690132–4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты (№№ 18–51–00844, 19–51–60001, 20–01–00666).

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net .Ru.



УДК 539.376

Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при переменном поперечном давлении

© А. М. Локощенко¹, В. В. Терауд^{1,2}, Е. А. Шеварова^{1,3}

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

² Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

³ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследуется задача об установившейся ползучести длинной прямоугольной мембраны в стесненных условиях внутри жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости величины поперечного давления q от времени t . В задаче рассматривается длинная матрица прямоугольного сечения, в которой отношение ее высоты к ширине не меньше 0.5. В качестве примера исследуется ползучесть мембраны при однократном изменении величины поперечного давления во времени. Рассматриваются три варианта условий контакта мембраны и матрицы: идеальное скольжение, прилипание и скольжение с учетом трения. В данной работе исследованы четыре стадии деформирования мембраны. На первой стадии (упругое деформирование) мембрана, плоская в начальном состоянии, под действием давления q мгновенно упруго деформируется, приобретая форму незамкнутой круговой цилиндрической оболочки с центральным углом $2\alpha_1$. На второй стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до момента касания боковых стенок матрицы. Третья стадия заканчивается в момент касания мембраной поперечной стенки матрицы. На четвертой стадии мембрана контактирует с матрицей по поперечной и боковым сторонам. Анализ проводится до времени практически полного прилегания мембраны к матрице, при котором отношение радиуса мембраны вблизи углов

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Локощенко А. М., Терауд В. В., Шеварова Е. А. Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при переменном поперечном давлении // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 24, № 3. С. 445–468. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1772>.

Сведения об авторах

Александр Михайлович Локощенко  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией; лаб. ползучести и длительной прочности¹; e-mail: loko@imec.msu.ru

Валентин Викторович Терауд  <https://orcid.org/0000-0001-8336-5598>
канд. техн. наук; старший научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности¹; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики²;
e-mail: ldrnww@gmail.com

Екатерина Алексеевна Шеварова; ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности¹; студент³; e-mail: kat121193@ya.ru

матрицы к начальной ширине мембраны составляет 0.005. Для третьей и четвертой стадий дополнительно учитывается сила трения мембраны о стенки матрицы. Получены зависимости толщины различных частей мембраны от времени, а также интенсивности напряжений в мембране от времени. Применительно к данной постановке задачи рассмотрены отклонения от правила суммирования парциальных времен заполнения матрицы.

Ключевые слова: мембрана, установившаяся ползучесть, матрица, поперечное давление, идеальное скольжение, прилипание, нестационарное нагружение, трение.

Получение: 11 февраля 2020 г. / Исправление: 10 июля 2020 г. /

Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Введение

Рассмотрим деформирование длинной узкой прямоугольной мембраны шириной $2a$ и начальной толщиной H_0 , закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q (рис. 1), которое может изменяться во времени t по заданному закону. Решение этой задачи при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Одквиста (F. K. G. Odqvist) [1], Л. М. Качанова [2], Н. Н. Малинина [3] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В монографиях [3, 4] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [4] приведены решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной [5], криволинейной [6] и прямоугольной при различных условиях на контакте мембраны и матрицы. Во всех приведенных решениях величина равномерного поперечного давления q не зависит от времени t . В различных решениях использовались разные модели ползучести: установившаяся, неуставившаяся, дробно-степенная. В случае применения дробно-степенной модели ползучести [7] в зависимости от контактных условий с течением времени мембрана либо заполняет пространство внутри матрицы за конечное или бесконечное время, либо разрушается внутри матрицы [5]. В [8] приведено решение аналогичной задачи об установившейся ползучести мембраны при кусочно-постоянной зависимости скорости изменения величины поперечного давления от времени.

В данной работе исследуется ползучесть мембраны внутри матрицы прямоугольной формы. Здесь рассматривается не постоянная величина $q(t) = \text{const}$, а кусочно-постоянная зависимость величины $q(t)$ с однократным ее изменением. Представляет интерес рассмотрение особенностей практически полного прилегания мембраны к пространству внутри матрицы при скачкообразном увеличении или уменьшении величины q .

Для исключения появления в начальный момент времени бесконечных напряжений в данном решении учитывается мгновенное упругое деформирование.

Для описания деформирования мембраны при $t > 0$ (t — время) используется степенная модель установившейся ползучести материала

$$\frac{dp_u}{dt} = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0} \right)^n, \quad (1)$$

в которой σ_u и \dot{p}_u — интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести соответственно, σ_0 , t_0 и n — постоянные величины соответствующей размерности.

Исследование свободного деформирования проводится в двух последовательных стадиях. На первой стадии (упругое деформирование) мембрана, плоская в начальном состоянии, под действием давления q мгновенно упруго деформируется, приобретая форму незамкнутой круговой цилиндрической оболочки с центральным углом $2\alpha_1$. На второй стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания стенок жесткой матрицы, при этом угол раствора мембраны совпадает с углом раствора матрицы и равен $2\alpha_2 = \pi$. При моделировании напряженно-деформированного состояния мембраны рассматриваются радиальное σ_{rr} , окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz} главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ и ε_{zz} , при $t > 0$ учитываются только компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr} , $p_{\theta\theta}$ и p_{zz} .

Рассматривая элемент мембраны, принимая напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H}, \quad d(\sigma_{\theta\theta}H) = 0, \quad (2)$$

где $\sigma_{\theta\theta}$ — окружное напряжение, ρ — радиус кривизны срединной поверхности, H — толщина мембраны.

Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \text{const}. \quad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), заключаем, что в случае равномерного давления ($q = \text{const}$) радиус кривизны срединной поверхности во всех ее точках один

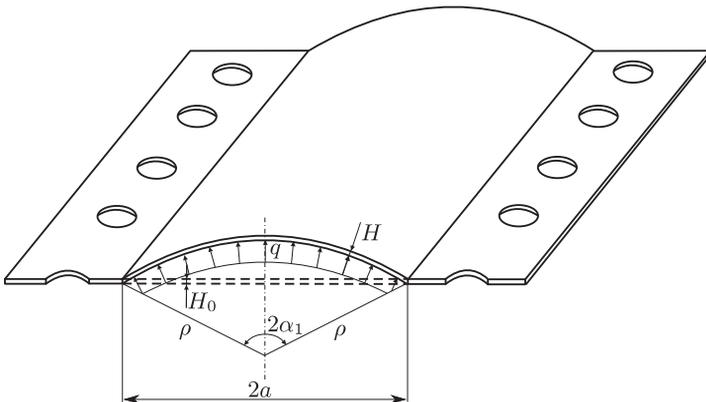


Рис. 1. Геометрическая схема прямоугольной мембраны
[Figure 1. Geometry of a rectangular membrane]

и тот же ($\rho = \text{const}$), т.е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с некоторым углом раствора 2α [3]. В этом случае очевидно, что если толщина мембраны до деформации постоянна, то она постоянна и после деформации. Следовательно, согласно (2) окружное напряжение по длине окружности радиуса ρ не изменяется.

1. Мгновенное упругое деформирование мембраны (первая стадия)

Упругое деформирование мембраны описывается с помощью закона Гука при сложном напряженном состоянии с учетом несжимаемости материала. При этом будут использоваться следующие обозначения: E — модуль Юнга, H и ρ — толщина и радиус кривизны поперечного сечения мембраны, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений. Значения всех рассматриваемых в этом параграфе параметров, полученные в результате приложения поперечного давления q , принимают дополнительный индекс 1.

Из условия несжимаемости материала получим значение толщины $H_1(\alpha_1)$:

$$H_0\rho_1 \sin \alpha_1 = H_1\rho_1\alpha_1, \quad \frac{H_1}{H_0} = \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1}. \quad (4)$$

Из уравнений равновесия свободной мембраны получим значение напряжения $\sigma_{\theta\theta 1}$:

$$qa = H_1\sigma_{\theta\theta 1} \sin \alpha_1, \quad \sigma_{\theta\theta 1} = \frac{qa}{H_1 \sin \alpha_1}.$$

Из определения малой деформации получим выражение для окружной деформации $\varepsilon_{\theta\theta 1}$:

$$\varepsilon_{\theta\theta 1} = \frac{\rho_1\alpha_1 - a}{a} = \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} - 1, \quad (5)$$

где $\rho_1 = a/\sin \alpha_1$.

В соответствии с условием несжимаемости используем значение коэффициента Пуассона, равное 0.5. Считаем, что мембрана под поперечным давлением находится в условиях плоского деформированного состояния:

$$\varepsilon_{zz 1} = 0. \quad (6)$$

Для тонкостенных цилиндрических оболочек обычно принимается условие безмоментного напряженного состояния, при этом выполняется равенство $\sigma_{rr 1} = 0$.

Из закона Гука при сложном напряженном состоянии следует связь компонент тензоров напряжений σ_{ij} и упругих деформаций ε_{ij} :

$$\varepsilon_{zz 1} = E^{-1}(\sigma_{zz 1} - 0.5\sigma_{\theta\theta 1}), \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta 1} = E^{-1}(\sigma_{\theta\theta 1} - 0.5\sigma_{zz 1}). \quad (8)$$

Из равенства (7) при учете (6) получаем

$$\sigma_{zz 1} = 0.5\sigma_{\theta\theta 1}. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая (2) и (4), получаем:

$$\varepsilon_{\theta\theta 1} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_{\theta\theta 1}}{E} = \frac{3}{4} \frac{q}{E} \frac{\rho_1}{H_1} = \frac{3}{4} \frac{q}{E} \frac{a}{\sin \alpha_1} \frac{\alpha_1}{H_0 \sin \alpha_1} = \frac{3qa\alpha_1}{4EH_0 \sin^2 \alpha_1}.$$

Приравнивая это выражение выражению (5), получаем связь давления q и угла α_1 :

$$\frac{3qa\alpha_1}{4EH_0 \sin^2 \alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} \left(1 - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1}\right), \quad \frac{q}{\sigma_0} = \frac{4H_0 k}{3a} \left(1 - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1}\right) \sin \alpha_1,$$

где $k = E/\sigma_0$.

Так как упругое деформирование по определению происходит практически мгновенно, длительность первой стадии принимаем равной нулю: $t_1 = 0$.

2. Свободное деформирование мембраны в условиях ползучести (вторая стадия)

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{q} = \frac{q}{\sigma_0}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_0}, \quad \bar{H}_0 = \frac{H_0}{a},$$

$$\bar{t} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Далее черточки над всеми безразмерными переменными опустим. При этом под скоростями всюду понимаются производные по безразмерному времени.

В качестве связи компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести примем гипотезу пропорциональности соответствующих девиаторов s_{ij} (см., например, [4]):

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{3f(\sigma_u)}{2\sigma_u} s_{ij}, \quad (10)$$

$$\sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{z\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{zr}^2)}.$$

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{\rho}_{zz}$ принимается равной нулю:

$$\dot{\rho}_{zz} = 0. \quad (11)$$

Далее всюду через H_i будем обозначать толщину мембраны на i -той стадии, $i = 1, 2, 3, 4$.

Примем, как обычно, для тонкостенных цилиндрических оболочек равенство

$$\sigma_{rr} = 0.$$

В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (10) при учете (11) следует

$$\sigma_{zz} = 0.5\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_2}.$$

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны и учитывая, что деформированное состояние однородное, определим приращение окружной деформации ползучести:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, скорость окружной деформации ползучести выражается формулой

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \quad (12)$$

Поскольку

$$\rho \sin \alpha = 1, \quad (13)$$

имеем

$$\dot{\rho} \sin \alpha + \rho \dot{\alpha} \cos \alpha = 0.$$

Поэтому выражение (12) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \dot{\alpha}. \quad (14)$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния получаем:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}, \\ \dot{p}_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\theta\theta})^2 + (\dot{p}_{\theta\theta} - \dot{p}_{zz})^2 + (\dot{p}_{zz} - \dot{p}_{rr})^2 + \dot{p}_{r\theta}^2 + \dot{p}_{\theta z}^2 + \dot{p}_{zr}^2}, \quad (15) \\ \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{p}_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Так как скорость радиальной деформации ползучести выражается формулой

$$\dot{p}_{rr} = -\frac{\dot{H}_2}{H_2},$$

согласно равенству (14) получаем

$$-\frac{\dot{H}_2}{H_2} = \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \dot{\alpha}. \quad (16)$$

Проинтегрируем уравнение (16) при начальных условиях $t = 0$, $\alpha = \alpha_1$, $H_2 = H_1$:

$$H_2 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} F, \quad F = \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1}. \quad (17)$$

Полученные выражения (2), (13) и (17) позволяют представить окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и интенсивность напряжений σ_u в зависимости от угла раствора α :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H_2 H_0} = \frac{q\alpha}{F H_0 \sin^2 \alpha}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_{\theta\theta}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\alpha}{F H_0 \sin^2 \alpha}. \quad (18)$$

Из (15) при учете (1), (14) и (18) получаем зависимость угла раствора α от времени t :

$$t(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(\frac{2FH_0 \sin^2 \alpha}{\sqrt{3}q\alpha} \right)^n d\alpha, \quad t_2 = t(\alpha_2).$$

При исследовании второй стадии деформирования мембраны угол α изменяется в диапазоне от $\alpha = \alpha_1$ до $\alpha_2 = 0.5\pi$. Так как угол α_1 удовлетворяет условию $\alpha_1 \ll 0.5\pi$ (т.е. постоянная F незначительно отличается от единицы), упростим соотношение (17) и введем дополнительно зависимость $H_2(\alpha)$ во время второй стадии деформирования мембраны в виде

$$H_2 = \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (19)$$

В конце второй стадии ($t = t_2$) в случае прямоугольной матрицы раствор мембраны $2\alpha(t_2) = 2\alpha_2$ удовлетворяет равенству $2\alpha_2 = \pi$. Так как значения H_2 при F из (17) и $F = 1$ практически совпадают (и последующие вычисления подтвердят это), далее под значением $t_2(\alpha)$ будем понимать соответствующее значение при $F = 1$. В связи с этим момент времени t_2 , при котором происходит окончание второй стадии, и толщина мембраны $H_2^0 = H(t_2)$, вычисляемая согласно зависимости (19), определяются из

$$t_2 = t(\alpha_2), \quad H_2^0 = H_2(t_2) = \frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} = \frac{2}{\pi}.$$

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях.

3. Идеальное скольжение мембраны вдоль сторон матрицы

3.1. Третья стадия. Рассмотрим ползучесть мембраны внутри длинной жесткой матрицы, сечение которой имеет форму прямоугольника шириной $2a$ и высотой b . Введем дополнительные безразмерные параметры:

$$\bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a}.$$

Далее черточки над этими безразмерными переменными также будем опускать.

Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ($b \geq 1$) и относительно низкой матрицы ($b < 1$). Для определенности здесь будет рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно высокой матрицы.

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы далее рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq b$ (рис. 2).

Свободное деформирование мембраны было рассмотрено в предыдущих пп. 1 и 2. В некоторый момент времени ($t = t_2$) мембрана соприкасается с боковой стенкой матрицы. На этом свободное деформирование заканчивается,

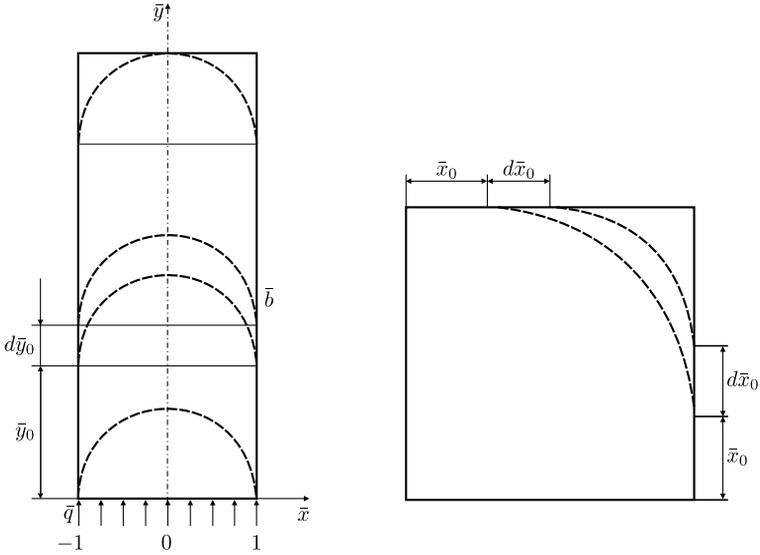


Рис. 2. Третья и четвертая стадии (идеальное скольжение и прилипание)
 [Figure 2. The scheme for calculating the third and fourth stages of membrane deformation (ideal sliding and adhesion)]

и в дальнейшем при $t > t_2$ часть поверхности мембраны прилегает к внутренней поверхности матрицы.

При исследовании третьей стадии ползучести мембраны выделим два близких деформированных состояния с радиусом свободной дуги мембраны $\rho = 1$: одно характеризуется длиной участка контакта y_0 , а другое — длиной участка контакта $(y_0 + dy_0)$. Согласно определению $\dot{p}_{\theta\theta}$ имеем следующее:

$$\begin{aligned} dp_{\theta\theta} &= \frac{(y_0 + dy_0 + 0.5\pi) - (y_0 + 0.5\pi)}{y_0 + 0.5\pi} = \frac{dy_0}{y_0 + 0.5\pi}, \\ \dot{p}_{\theta\theta} &= -\frac{1}{H_3} \frac{dH_3}{dt}, \quad dp_{\theta\theta} = -\frac{dH_3}{H_3}, \\ p_{\theta\theta} &= -\int_{H_2^0}^{H_3(y_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \int_0^{y_0} \frac{dy_0}{y_0 + 0.5\pi} = \ln \frac{H_2^0}{H_3(y_0)} = \ln \frac{y_0 + 0.5\pi}{0.5\pi}, \\ H_3(y_0) &= 0.5\pi \frac{H_2^0}{y_0 + 0.5\pi} = \frac{1}{y_0 + 0.5\pi}. \end{aligned}$$

Окончание третьей стадии происходит при касании мембраной верхней стенки матрицы, т.е. при $y_0 = b - 1$.

Толщина мембраны в конце третьей стадии определяется выражением

$$H_3^0 = H_3(t_3) = \frac{1}{b - 1 + 0.5\pi}.$$

Таким образом,

$$p_{\theta\theta} = \ln \frac{y_0 + 0.5\pi}{0.5\pi}, \quad \dot{p}_{\theta\theta} = \frac{1}{y_0 + 0.5\pi} \frac{dy_0}{dt}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{y_0 + 0.5\pi} \frac{dy_0}{dt}.$$

Интенсивность напряжений определяется соотношением (2):

$$\sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_3(y_0)}, \quad \rho = 1.$$

Подставляя выражения для \dot{p}_u и σ_u в (1), получаем время окончания третьей стадии (при $y_0 = b - 1$):

$$t_3(y_0) = t_2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{y_0} \left[\frac{2H_0 H_3(y_0)}{\sqrt{3}q} \right]^n \frac{dy_0}{y_0 + 0.5\pi},$$

$$t_3 = t_2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)} \left(\frac{H_0}{q} \right)^n \frac{1}{n} \left[\frac{1}{(0.5\pi)^n} - \frac{1}{(b-1+0.5\pi)^n} \right].$$

3.2. Четвертая стадия. На четвертой стадии ползучесть мембраны при касании ею обеих сторон матрицы описывается аналогично (рис. 2):

$$dp_{\theta\theta} = F(x_0)dx_0, \quad F(x_0) = \frac{2 - 0.5\pi}{b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0},$$

$$p_{\theta\theta} = - \int_{H_3^0}^{H_4 x_0} \frac{dH_4}{H_4} = \int_0^{x_0} F(x_0)dx_0 = \ln \frac{H_3^0}{H_4(x_0)} =$$

$$= \ln \frac{b - 1 + 0.5\pi + x_0(2 - 0.5\pi)}{b - 1 + 0.5\pi},$$

$$H_4(x_0) = H_3^0 \frac{b - 1 + 0.5\pi}{b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0} = \frac{1}{b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0}.$$

Конец четвертой стадии происходит при значении $x_0 = x_0^0$, удовлетворяющем неравенству $1 - x_0^0 \ll 1$.

Толщина мембраны в конце четвертой стадии определяется выражением

$$H_4^0(x_0^0) = \frac{1}{b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0^0}.$$

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H(x_0)}, \quad \rho = 1 - x_0; \tag{20}$$

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} [b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0] (1 - x_0).$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести согласно (20) определяется формулой

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} F(x_0) \frac{dx_0}{dt} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2 - 0.5\pi}{b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0} \frac{dx_0}{dt}. \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в (1), получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2 - 0.5\pi}{b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0} \frac{dx_0}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} [b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0] (1 - x_0)^n.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} t_4(x_0) &= t_3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{x_0} \left[\frac{2H_0 H_4(x_0)}{\sqrt{3}q(1-x_0)} \right]^n F(x_0) dx_0 = \\ &= t_3 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)} \left(\frac{H_0}{q} \right)^n \int_0^{x_0} \frac{(2 - 0.5\pi) dx_0}{[b - 1 + 0.5\pi + (2 - 0.5\pi)x_0]^{(n+1)} (1 - x_0)^n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Время практически полного заполнения матрицы мембраной определяется выражением (22) при замене x_0 на x_0^0 :

$$t_4^0 = t_4(x_0^0).$$

4. Прилипание мембраны вдоль сторон матрицы

4.1. Третья стадия. При исследовании третьей стадии ползучести мембраны выделим два близких состояния с радиусом свободной дуги мембраны $\rho = 1$. Согласно определению $\dot{p}_{\theta\theta}$ имеем:

$$\begin{aligned} p_{\theta\theta} &= - \int_{H_2^0}^{H_3(y_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \int_0^{y_0} \frac{2dy_0}{\pi} = \frac{2}{\pi} y_0 = \ln \frac{H_2^0}{H_3}, \quad H_3 = H_2^0 \exp\left(-\frac{2}{\pi} y_0\right), \\ \dot{p}_u &= \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_3}{H_3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2}{\pi} \frac{dy_0}{dt}. \end{aligned} \quad (23)$$

Окончание третьей стадии происходит при касании верхней стенки матрицы, т.е. при $y_0 = b - 1$.

Толщина мембраны в конце третьей стадии определяется выражением

$$H_3^0 = H_3(t_3) = H_2^0 \exp\left(-\frac{2}{\pi}(b-1)\right) = \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{2}{\pi}(b-1)\right).$$

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_3 H_0}, \quad \rho = 1, \quad \sigma_u(y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} \frac{\pi}{2} \exp\left(\frac{2}{\pi} y_0\right). \quad (24)$$

Подставляя (23) и (24) в (1), получаем

$$t_3(y_0) = t_2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}\pi} \right)^{(n+1)} \left(\frac{H_0}{q} \right)^n \int_0^{y_0} \exp^n\left(-\frac{2}{\pi} y_0\right) dy_0. \quad (25)$$

Время, при котором мембрана начинает касаться поперечной стороны матрицы, определяется с помощью (25) при $y_0 = b - 1$:

$$t_3^0 = t_3(b - 1).$$

4.2. Четвертая стадия. На четвертой стадии ползучесть мембраны при касании ею продольной и поперечной сторон матрицы описывается аналогично:

$$\begin{aligned} dp_{\theta\theta} &= \frac{2dx_0 + 0.5\pi(1 - x_0 - dx_0) - 0.5\pi(1 - x_0)}{0.5\pi(1 - x_0)} = \frac{(2 - 0.5\pi)dx_0}{0.5\pi(1 - x_0)}, \\ p_{\theta\theta} &= - \int_{H_3^0}^{H_4(x_0)} \frac{dH_4}{H_4} = \int_0^{x_0} \frac{(2 - 0.5\pi)dx_0}{0.5\pi(1 - x_0)} = \ln \frac{H_3^0}{H_4(x_0)} = \frac{2 - 0.5\pi}{0.5\pi} \ln \frac{1}{1 - x_0}, \\ \frac{H_3^0}{H_4(x_0)} &= (1 - x_0)^{-\frac{2-0.5\pi}{0.5\pi}}, \quad H_4(x_0) = H_3^0(1 - x_0)^{\frac{2-0.5\pi}{0.5\pi}}. \end{aligned}$$

Окончание четвертой стадии происходит при $x = x_0^0$, удовлетворяющем неравенству $1 - x_0^0 \ll 1$.

Толщина мембраны в конце четвертой стадии определяется выражением

$$H_4^0 = H_4(x_0^0).$$

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_4(x_0)H_0}, \quad \rho = 1 - x_0, \quad \sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} \frac{1 - x_0}{H_4(x_0)}. \quad (26)$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести определяется формулой

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2 - 0.5\pi}{0.5\pi} \frac{1}{1 - x_0} \frac{dx_0}{dt}. \quad (27)$$

Подставляя (26) и (27) в (1), получаем

$$\begin{aligned} t_4(x_0) &= t_3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{x_0} \left[\frac{2H_4H_0}{\sqrt{3}q(1 - x_0)} \right]^n \frac{(2 - 0.5\pi)dx_0}{0.5\pi(1 - x_0)} = \\ &= t_3 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{(n+1)} \left(\frac{H_0}{q} \right)^n \frac{2 - 0.5\pi}{0.5\pi} \frac{H_4^n(x_0)}{(1 - x_0)^{(n+1)}}. \end{aligned}$$

Время практически полного заполнения матрицы в этом случае определяется выражением

$$t_4^0 = t_4(x_0^0).$$

5. Скольжение мембраны вдоль сторон матрицы с учетом трения

В отличие от пп. 3 и 4, где были рассмотрены два крайних граничных условия — полное идеальное скольжение и прилипание мембраны вдоль стенок матрицы, здесь рассматривается решение, когда на границе контакта трение удовлетворяет закону Кулона.

Задача решается итерационным методом. Применяется аппроксимация производных по первому порядку точности. Произвольная $(k + 1)$ -я итерация (шаг) характеризуется приращением времени dt^{k+1} и соответствующим этому приращению дополнительным участком свободной части мембраны $d(s_{k+1}^{k+1})$, который начинает контактировать со стенками матрицы (рис. 3). Нижние цифровые индексы при параметрах, характеризующих отдельный участок, обозначают шаг, на котором произошло прилегание этого участка к матрице, а верхние индексы — шаг, на котором берутся значения этих параметров во времени. На границе мембраны и матрицы принимается закон трения Кулона с коэффициентом трения μ . При этом известны следующие значения параметров, полученные на предыдущих шагах: $q^1, \dots, q^k; dt^1, \dots, dt^k; \rho_0^k, \dots, \rho_k^k; ds_1^k, \dots, ds_k^k; H_0^k, \dots, H_k^k; (\sigma_{\theta\theta})_0^k, \dots, (\sigma_{\theta\theta})_k^k; (\dot{p}_{\theta\theta})_0^k, \dots, (\dot{p}_{\theta\theta})_k^k$.

Здесь и в дальнейшем величины $\sigma_{\theta}, \dot{p}_{\theta}$ с соответствующими верхними и нижними индексами означают растягивающие напряжения на границе мембраны и матрицы на соответствующем шаге итерации.

Зададим dt^{k+1} и q^{k+1} . На $(k + 1)$ -м шаге необходимо вычислить $ds_{k+1}^{k+1}, (\sigma_{\theta\theta})_{k+1}^{k+1}, H_{k+1}^{k+1}$ и найти новые значения системы рассматриваемых величин.

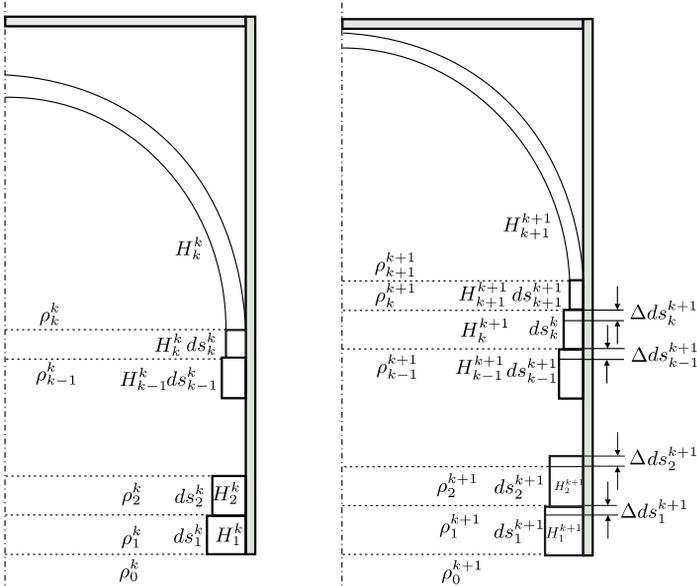


Рис. 3. Третья и четвертая стадии при учете трения

[Figure 3. The scheme for calculating the third and fourth stages of membrane deformation with considering friction]

5.1. Третья стадия. Свободная часть дуги $\frac{\pi}{2}\rho = \frac{\pi}{2}$ за время dt^{k+1} удлиняется под действием давления q^{k+1} за счет ползучести:

$$ds_{k+1}^{k+1} = \frac{\pi}{2} dt^{k+1} \dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\pi}{2} dt^{k+1} \left(\frac{\sqrt{3}q^{k+1}}{2H_0H_k^k} \right)^n.$$

Соответственно, уменьшается толщина свободной части мембраны. Используя $\dot{p}_{\theta\theta} = -\dot{H}/H$, уравнение равновесия и выражение (1), получаем

$$H_{k+1}^{k+1} = H_k^k \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta\theta})_k^k \right)^n dt^{k+1} \right).$$

Новое значение действующего поперечного напряжения найдем из уравнения равновесия:

$$(\sigma_{\theta\theta})_{k+1}^{k+1} = \frac{q^{k+1}}{H_0 H_{k+1}^{k+1}}.$$

Будем считать, что напряжения на вновь прилипшем отрезке мембраны равны на верхней и нижней части:

$$(\sigma_{\theta\theta})_k^{k+1} = (\sigma_{\theta\theta})_{k+1}^{k+1}.$$

Далее производится вычисление новых значений $(\sigma_{\theta\theta})_i^{k+1}$, H_i^{k+1} через перерасчет напряжений на уже прилипших отрезках. При этом будем учитывать, что если сумма силы трения и силы, действующей на нижней части этого элемента мембраны, превышает силу, действующую на верхней части элемента, то данный элемент мембраны считается прилипшим и поэтому он не деформируется на стадии $(k+1)$, иначе он деформируется с учетом трения о стенки матрицы.

Сила трения на i -том кусочке определяется выражением

$$(F_{\text{fr}})_i = \mu q^{k+1} ds_i^k.$$

Если неравенство

$$(F_{\text{fr}})_i + (\sigma_{\theta\theta})_{i-1}^k H_0 H_i^k \geq (\sigma_{\theta\theta})_i^{k+1} H_0 H_i^k \quad (28)$$

выполнено, то размеры этого элемента мембраны и значения соответствующих напряжений сохраняются:

$$ds_i^{k+1} = ds_i^k, \quad H_i^{k+1} = H_i^k, \quad (\sigma_{\theta\theta})_{i-1}^{k+1} = (\sigma_{\theta\theta})_{i-1}^k, \quad \Delta ds_i^{k+1} = 0, \quad (29)$$

в противном случае отрезок растягивается, и его новые значения вычисляются по соотношениям

$$\begin{aligned} ds_i^{k+1} &= \Delta ds_i^{k+1} + ds_i^k, & \Delta ds_i^{k+1} &= ds_i^k \left(\frac{\sqrt{3}}{4} ((\sigma_{\theta\theta})_{i-1}^k + (\sigma_{\theta\theta})_i^k) \right)^n dt^{k+1}, \\ (\sigma_{\theta\theta})_{i-1}^{k+1} &= (\sigma_{\theta\theta})_i^{k+1} - \frac{(F_{\text{fr}})_i}{H_0 H_i^k}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$H_i^{k+1} = H_i^k \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta\theta})_i^k \right)^n dt^{k+1} \right).$$

Окончание расчета в рамках третьей стадии наступает, если выполнено одно из двух условий:

- условие касания верхней части матрицы $\sum_i ds_i^{k+1} \geq b - 1$;
- условие разрушения мембраны $H_{k+1}^{k+1} \leq 0$.

Значения t_3 , H_3 , σ_3 будут характеризовать значения времени, толщины и напряжения в конце третьей стадии деформирования мембраны.

5.2. Четвертая стадия. Расчет для четвертой стадии деформирования мембраны проводится аналогично расчету третьей стадии по шагам. Из-за высокой нелинейности задачи в начальный момент времени на четвертой стадии и практически неизменно в последующем, для получения хорошего результата расчета используется неравномерный шаг по времени. В начальный момент времени шаг очень мал, далее расчет проводится с повышением значения шага до больших значений на финальном этапе деформирования. Для этого используется расчет шага по квадратичной функции: $dt \sim t^2$. Для того чтобы получить решение за n шагов от времени t_3 до t_4 , необходимо, чтобы было выполнено следующее условие:

$$\sum_i^n dt^{(i)} = t_4 - t_3.$$

Используя квадратичную зависимость шага по времени от времени, получаем

$$dt^{(i)} = B((i+1)^3 - i^3), \quad B = \frac{t_4 - t_3}{n(n-1)^2}.$$

На k -том шаге вычисляются значения параметров шага $(k+1)$. Из уравнения равновесия вычисляются новые значения продольных напряжений:

$$(\sigma_{\theta\theta})_{k+1}^{k+1} = \frac{\rho^k q^k}{H_0 H_k^k}, \quad (\sigma_{\theta\theta})_k^{k+1} = (\sigma_{\theta\theta})_{k+1}^{k+1}.$$

Толщина нового элемента на четвертой стадии вычисляется аналогично третьей стадии по соотношению

$$H_{k+1}^{k+1} = H_k^k \left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta\theta})_k^k \right)^n dt^{k+1} \right).$$

На четвертой стадии имеются два набора прилипших элементов: элементы, прилипшие на третьей стадии $(ds_i^k, \hat{H}_i^k, (\hat{\sigma}_{\theta\theta})_i^k)$ и элементы, прилипающие на четвертой стадии $(ds_i^k, H_i^k, (\sigma_{\theta\theta})_i^k)$ (без дополнительных обозначений). Они рассматриваются отдельно в соответствии с выражениями (28)–(30) с помощью предварительных вычислений ds_i^{k+1} , \hat{H}_i^{k+1} , $(\hat{\sigma}_{\theta\theta})_i^{k+1}$, Δds_i^{k+1} и последующих вычислений ds_i^{k+1} , H_i^{k+1} , $(\sigma_{\theta\theta})_i^{k+1}$, Δds_i^{k+1} .

Для вычисления удлинения свободной части мембраны рассмотрим два близких состояния и согласно определению $\dot{p}_{\theta\theta}$ учтем, что прилипание мембраны к стенкам матрицы происходит симметрично сбоку и сверху матрицы, поэтому будем рассматривать только четверть мембраны с углом раствора $\pi/4$, в результате имеем

$$d\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\alpha d\rho^{k+1} + ds_{k+1}^{k+1}}{\alpha \rho^k}.$$

Согласно геометрическим условиям, изменение радиуса составляет

$$d\rho^{k+1} = -(ds_{k+1}^{k+1} + Ds^{k+1} + 0.5D\hat{s}^{k+1}),$$

где

$$Ds^{k+1} = \sum_i ds_i^{k+1}, \quad D\hat{s}^{k+1} = \sum_i d\hat{s}_i^{k+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\dot{p}_{\theta\theta} &= \frac{-\alpha(ds_{k+1}^{k+1} + Ds^{k+1} + 0.5D\hat{s}^{k+1}) + ds_{k+1}^{k+1}}{\alpha\rho^k} = \\ &= ds_{k+1}^{k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha\rho^k} - \frac{Ds^{k+1} + 0.5D\hat{s}^{k+1}}{\rho^k}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя выражение (1), получаем значение вновь прилипшего отрезка мембраны при подстановке $\alpha = \pi/4$:

$$ds_{k+1}^{k+1} = \frac{\pi\rho_k^k}{4-\pi} \left[\left(\frac{\sqrt{3}q^{k+1}\rho^k}{2H_0H_{k+1}^{k+1}} \right)^n dt^{k+1} + \frac{Ds^{k+1} + 0.5D\hat{s}^{k+1}}{\rho^k} \right].$$

Новое значение радиуса мембраны

$$\rho^{k+1} = \rho^k - ds_{k+1}^{k+1} - Ds^{k+1} - D\hat{s}^{k+1}.$$

Длина контактирующей части мембраны вычисляется из выражения

$$s^{k+1} = Ds^{k+1} + D\hat{s}^{k+1} = \sum_i ds_i^{k+1} + \sum_i d\hat{s}_i^{k+1}.$$

Окончание расчета в рамках четвертой стадии наступает, если будет выполнено одно из двух условий:

- условие заполнения матрицы $\rho \leq x_0^0$,
- условие разрушения мембраны $H_{k+1}^{k+1} \leq 0$.

Полученные в этот момент времени значения $\sum_i^n dt^i$, H_{k+1}^{k+1} , $(\sigma_{\theta\theta})_{k+1}^{k+1}$ характеризуются значениями t_4 , H_4 , σ_4 в конце четвертой стадии.

6. Ползучесть мембраны при постоянном давлении q

В качестве примера рассмотрим деформирование мембраны высотой $b = 2$ со следующими выбранными параметрами:

$$H_0 = 0.01, \quad n = 3, \quad x_0^0 = 0.99, \quad k = 100.$$

В качестве величин поперечного давления примем два значения q , различающихся в 5 раз: $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$ и $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$, в этом случае значения угла α_1 , полученные при мгновенном приложении внешнего давления q , равны соответственно $\alpha_1 = 0.061$ и $\alpha_1 = 0.104$. Так как значения отношения F в (17) очень незначительно отличаются от 1 (соответственно $F = 1.001$ и $F = 1.002$), замена соотношения (17) на (19) является вполне обоснованной.

На рис. 4 и 5 соответственно приведены зависимости толщины мембраны $H(t)$ и интенсивности напряжений $\sigma_u(t)$ на свободной части мембраны от времени t для всех четырех стадий деформирования при постоянном давлении $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$. Для стадий стесненного деформирования (третья и четвертая стадии) зависимости $H(t)$ и $\sigma_u(t)$ приведены для идеального скольжения (сплошная линия), прилипания (штрих-пунктирная линия), расчет с учетом трения при коэффициенте трения $\mu = 0.1$ (пунктирная линия) и коэффициенте трения $\mu = 0.3$ (штриховая линия). На рис. 6 и 7 соответственно приведены аналогичные зависимости $H(t)$ и $\sigma_u(t)$ при постоянном давлении $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$. Значения основных параметров t , H , σ_u в конце каждой стадии приведены в табл. 1 и 2 для идеального скольжения и прилипания и в табл. 3 и 4 для $\mu = 0.1$ и $\mu = 0.3$ (колонки А при $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$ и В при $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$).

Из табл. 1, 2 следует, что значения толщин свободной части мембраны в конце каждой стадии при $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$ и $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$ совпадают, а времена деформирования различаются в 125 раз. При этом при учете трения значения толщин свободной части мембраны незначительно отличаются, при этом для меньшего значения q толщина в конце стадии меньше, что может объясняться тем, что мембрана при меньшем давлении больше прилипает к стенкам матрицы, соответственно, растяжение происходит за счет более интенсивного утонения свободной части.

Во всех рассмотренных случаях зависимости $H(t)$ являются монотонно убывающими функциями времени t . Расчеты показывают, что интенсивности напряжений $\sigma_u(t)$ на второй и третьей стадиях возрастают, а на четвертой стадии убывают. Толщины свободной части мембраны в конце деформирования при прилипании меньше, чем при идеальном скольжении, а интенсивности напряжений, наоборот, больше, а при учете трения данные значения лежат между этими величинами.

Вычисления показывают, что при заданных значениях используемых параметров основная длительность деформирования мембраны вплоть до практически полного заполнения соответствует четвертой стадии ($t_4^0 - t_3^0$), длительность третьей стадии минимальна: $(t_3^0 - t_2^0) < (t_4^0 - t_3^0)$.

7. Ползучесть мембраны при кусочно-постоянном давлении q

Рассмотрим две программы нагружения. В первой программе (см. колонки С в табл. 1, 2) сначала деформирование происходит при $q^{(1)} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ в течение времени τ_1 , равного половине соответствующей длительности τ_1^0 заполнения мембраны (т.е. $\tau_1 = 0.5\tau_1^0$), затем величина q скачкообразно изменяется и становится равной $q^{(2)} = 2.5 \cdot 10^{-4}$, при $\tau > \tau_1$ рассматривается ползучесть вплоть до заполнения матрицы при $t = t^{*1}$. Во второй программе нагружения (колонка D в табл. 1, 2) сначала мембрана деформируется при $q^{(2)} = 2.5 \cdot 10^{-4}$ в течение $0 \leq t \leq 0.5\tau_2^0$ (где τ_2^0 — длительность заполнения матрицы при $q^{(2)} = \text{const}$), а затем мембрана деформируется при $q^{(1)} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ вплоть до заполнения матрицы при $t = t^{*2}$.

Согласно табл. 1 и 2, при данных значениях $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ скачкообразное изменение q происходит в процессе 4-й стадии первоначального значения q .

Применим к этой задаче правило суммирования парциальных времен S , определяемое как сумма отношений длительностей ползучести при постоян-

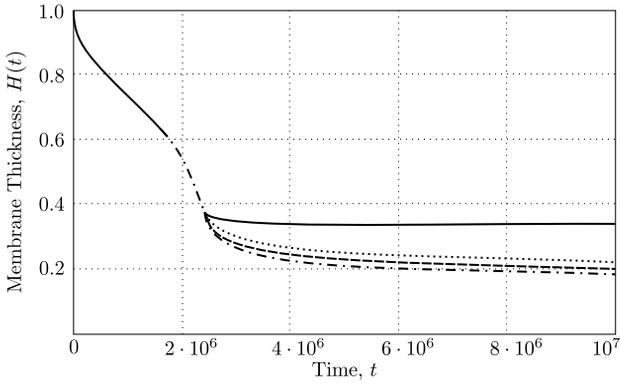


Рис. 4. Зависимости $H(t)$ при $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$

[Figure 4. The membrane thickness at $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$: ideal sliding (solid line), adhesion (dash-dotted line), calculation taking into account friction with the friction coefficient $\mu = 0.1$ (dotted line) and $\mu = 0.3$ (dashed line)]

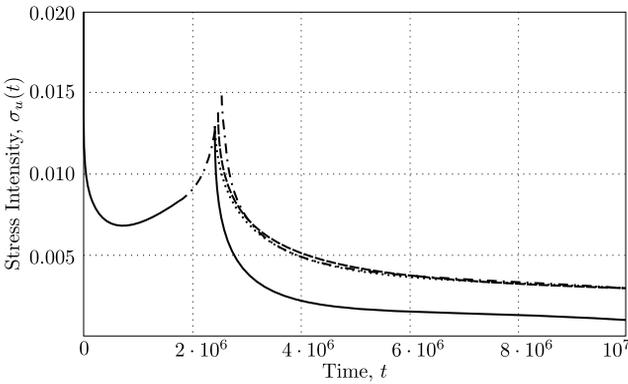


Рис. 5. Зависимости $\sigma_u(t)$ при $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$

[Figure 5. The stress intensity at $q = 0.5 \cdot 10^{-4}$: ideal sliding (solid line), adhesion (dash-dotted line), calculation taking into account friction with the friction coefficient $\mu = 0.1$ (dotted line) and $\mu = 0.3$ (dashed line)]

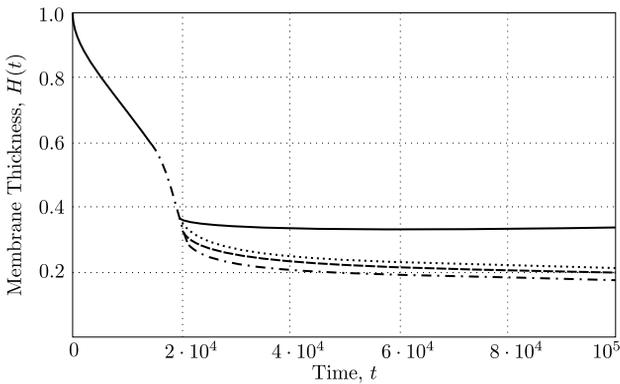


Рис. 6. Зависимости $H(t)$ при $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$

[Figure 6. The membrane thickness at $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$: ideal sliding (solid line), adhesion (dash-dotted line), calculation taking into account friction with the friction coefficient $\mu = 0.1$ (dotted line) and $\mu = 0.3$ (dashed line)]

Таблица 1

Характеристики ползучести мембраны в случае идеального скольжения [Membrane creep characteristics for the case of ideal sliding]

Stages of membrane deformation	A			B			C			D		
	$q = 0.5 \cdot 10^{-4}$			$q = 2.5 \cdot 10^{-4}$			the first loading program			the second loading program		
	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u
2	159.716	0.637	0.00680	1.2777	0.637	0.0340	159.716	0.637	0.00678	1.27773	0.637	0.0338
3	241.482	0.389	0.01113	1.9318	0.389	0.0557	241.482	0.389	0.01113	1.93185	0.389	0.0557
4	33246.8	0.334	0.00013	265.974	0.334	0.00065	16755.9	0.334	0.00065	16756.9	0.334	0.00013

Таблица 2

Характеристики ползучести мембраны в случае прилипания [Membrane creep characteristics under adhesion conditions]

Stages of membrane deformation	A			B			C			D		
	$q = 0.5 \cdot 10^{-4}$			$q = 2.5 \cdot 10^{-4}$			the first loading program			the second loading program		
	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u
2	159.716	0.637	0.00680	1.27773	0.637	0.0340	159.716	0.637	0.00678	1.27773	0.637	0.0338
3	249.958	0.337	0.01286	1.9996	0.337	0.06428	249.958	0.337	0.01286	1.99966	0.337	0.06428
4	135541	0.096	0.00045	1084.34	0.096	0.0023	68249.4	0.096	0.0023	68376.8	0.096	0.00045

Таблица 3

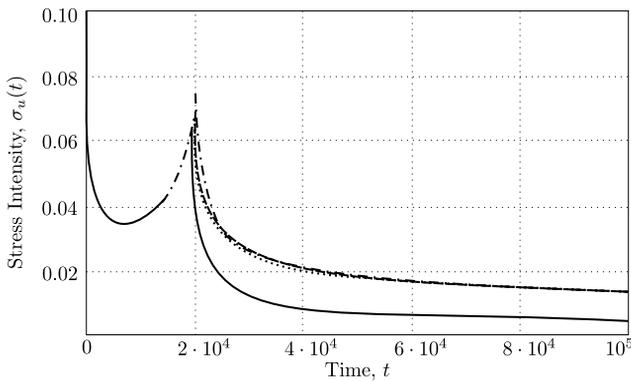
Характеристики ползучести мембраны в случае учета трения о стенки матрицы, коэффициент трения $\mu = 0.1$ [Creep characteristics of the membrane under the friction against the matrix walls; the coefficient of friction is $\mu = 0.1$]

Stages of membrane deformation	A			B		
	$q = 0.5 \cdot 10^{-4}$			$q = 2.5 \cdot 10^{-4}$		
	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u
2	159.716	0.637	0.00680	1.2777	0.637	0.0340
3	242.171	0.386	0.01124	1.9391	0.385	0.0560
4	102343	0.110	0.00039	834.47	0.110	0.0020

Таблица 4

Характеристики ползучести мембраны в случае учета трения о стенки матрицы, коэффициент трения $\mu = 0.3$ [Creep characteristics of the membrane under the friction against the matrix walls; the coefficient of friction is $\mu = 0.3$]

Stages of membrane deformation	A			B		
	$q = 0.5 \cdot 10^{-4}$			$q = 2.5 \cdot 10^{-4}$		
	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u	$t \cdot 10^{-4}$	H	σ_u
2	159.716	0.637	0.00680	1.2777	0.637	0.0340
3	243.373	0.378	0.01143	1.9524	0.377	0.0574
4	114129	0.108	0.00040	957.31	0.107	0.0020


 Рис. 7. Зависимости $\sigma_u(t)$ при $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$

[Figure 7. The stress intensity at $q = 2.5 \cdot 10^{-4}$: ideal sliding (solid line), adhesion (dash-dotted line), calculation taking into account friction with the friction coefficient $\mu = 0.1$ (dotted line) and $\mu = 0.3$ (dashed line)]

ных значениях q к длительностям практически полного заполнения матрицы при этих значениях q :

$$S = \frac{\tau_1}{\tau_1^0} + \frac{t^* - \tau_2}{\tau_2^0}, \quad S = 1.$$

В случае идеального скольжения имеем

$$q^{(1)} = 0.5 \cdot 10^{-4}, \quad q^{(2)} = 2.5 \cdot 10^{-4}, \quad S = \frac{1}{2} + \frac{t^{*1} - 0.5\tau_1^0(q^1)}{\tau_2^0(q^2)} = 0.998 < 1;$$

$$q^{(1)} = 2.5 \cdot 10^{-4}, \quad q^{(2)} = 0.5 \cdot 10^{-4}, \quad S = \frac{1}{2} + \frac{t^{*2} - 0.5\tau_1^0(q^2)}{\tau_2^0(q^1)} = 1.00002 > 1.$$

В случае прилипания имеем

$$q^{(1)} = 0.5 \cdot 10^{-4}, \quad q^{(2)} = 2.5 \cdot 10^{-4}, \quad S = \frac{1}{2} + \frac{\bar{t}^{*1} - 0.5\tau_1^0(q^1)}{\tau_2^0(q^2)} = 0.94 < 1;$$

$$q^{(1)} = 2.5 \cdot 10^{-4}, \quad q^{(2)} = 0.5 \cdot 10^{-4}, \quad S = \frac{1}{2} + \frac{t^{*2} - 0.5\tau_1^0(q^2)}{\tau_2^0(q^1)} = 1.00005 > 1.$$

Вычисления показывают, что как в случае идеального скольжения, так и в случае прилипания сумма парциальных времен $S < 1$ при мгновенном увеличении величины q и $S > 1$ при мгновенном уменьшении величины q .

8. Длительная прочность при ступенчатом одноосном нагружении

В качестве косвенного подтверждения достоверности полученных теоретических результатов рассмотрим результаты известных испытаний металлов на длительную прочность при однократном ступенчатом изменении величины растягивающего напряжения.

Для анализа результатов испытаний при переменной температуре Робинсон [9] предложил правило линейного суммирования парциальных времен. В данном параграфе рассматривается случай, когда растягивающее напряжение в образце равно σ_1 в течение времени τ_1 , а затем оно скачком меняется до σ_2 и остается таким (без изменения) вплоть до разрушения в момент времени $\tau^* = \tau_1 + \tau_2$. Правило суммирования парциальных времен для переменных напряжений часто называется правилом Бейли; для этого случая имеет место следующее равенство: сумма парциальных времен

$$S = \frac{\tau_1}{\tau_1^*} + \frac{\tau_2}{\tau_2^*}$$

равна единице ($S = 1$). Здесь под τ_i^* понимается время до разрушения при постоянном растягивающем напряжении σ_i , $i = 1, 2$.

Многие исследования в той или иной мере подтверждают это правило, однако в значительном количестве работ наблюдаются систематические отклонения от него, выходящие за границы естественного разброса экспериментальных данных. В табл. 5 приведены значения сумм S при возрастании

Таблица 5

Значения суммы парциальных времен, характеризующие длительную прочность металлов при ступенчатом изменении напряжения [The sum of partial times characterizing the long-term strength of metals with stepwise stress changes]

Data description	Material	Temperature, °C	S	
			$\sigma_1 < \sigma_2$	$\sigma_1 > \sigma_2$
by V. N. Gulyaev [10]	EI-695R steel	—	0.77 < 1	3.15 > 1
by D. L. Marriott [11]	Aluminium alloy	180	0.71 < 1	1.26 > 1
by V. V. Osasyuk [12]	EI-826 alloy	800	0.84 < 1	1.04 > 1

и уменьшении растягивающего напряжения [10–12]. Во всех приведенных испытаниях металлов на длительную прочность при кусочно-постоянном растягивающем напряжении сумма S больше 1 при $\sigma_1 > \sigma_2$ и принимает значения между 0 и 1 при $\sigma_1 < \sigma_2$. Этот экспериментальный результат аналогичен полученным в п. 6 теоретическим результатам для рассмотренной конструкции.

Выводы

Приведено исследование ползучести длинной прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри жесткой матрицы) под действием переменного поперечного давления. В качестве примера исследуется ползучесть мембраны при однократном мгновенном изменении величины поперечного давления. Рассматриваются три варианта условий на контакте мембраны и матрицы: идеальное скольжение, полное прилипание и трение по закону Кулона. В работе рассматриваются четыре последовательные стадии деформирования мембраны: мгновенное упругое деформирование, ползучесть в свободных условиях, ползучесть мембраны при контакте с боковыми сторонами матрицы и ползучесть мембраны при контакте со всеми сторонами матрицы. Анализ проводится до времени практически полного прилегания мембраны к пространству внутри матрицы. Получены зависимости толщины различных частей мембраны и интенсивности напряжений в мембране от времени. При анализе ползучести в случае кусочно-постоянной зависимости величины давления от времени рассмотрены отличия от правила суммирования парциальных времен заполнения матрицы.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Самарский государственный технический университет).

Библиографический список

1. Odqvist F. K. G. *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. Oxford: Clarendon Press, 1966. ix+168 pp.
2. Качанов Л. М. *Основы механики разрушения*. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов*. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
4. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. Физматлит: М., 2016. 504 с.
5. Локощенко А. М., Терауд В. В. Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // *ПМТФ*, 2013. Т. 54, №3. С. 126–133.
6. Демин В. А., Локощенко А. М., Жеребцов А. А. Ползучесть длинной прямоугольной мембраны внутри криволинейной матрицы // *Изв. вузов. Машиностроение*, 1998. №4–6. С. 41–46.
7. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1984. №1. С. 86–91.

8. Локощенко А. М., Абросимова Е. А. Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости скорости изменения поперечного давления от времени // *ПМТФ*, 2019. Т. 60, №1. С. 103–113. <https://doi.org/10.15372/PMTF20190112>.
9. Robinson E. L. Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels // *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 1952. vol. 74, no. 5. pp. 777–780.
10. Гуляев В. Н., Колесниченко М. Г. К оценке долговечности в процессе ползучести при ступенчатом изменении нагрузки // *Завод. лаб.*, 1963. №6. С. 748–752.
11. Marriott D. L., Penny R. K. Strain accumulation and rupture during creep under variable uniaxial tensile loading // *J. Strain Analysis*, 1973. vol. 8, no. 3. pp. 151–159. <https://doi.org/10.1243/03093247V083151>.
12. Осасюк В. В., Олисов А. Н. К вопросу о гипотезах суммирования относительных долговечностей // *Пробл. прочн.*, 1979. №11. С. 31–33.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 74A05, 74D10

The steady-state creep of long membrane in a rigid matrix at a variable transverse pressure

© A. M. Lokoshchenko¹, W. V. Teraud^{1,2}, E. A. Shevarova^{1,3}¹ Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,

1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

² Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

³ Moscow Aviation Institute (National Research University),

4, Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

The problem of the steady-state creep of a long rectangular membrane in constrained conditions inside a rigid matrix is investigated with a piecewise constant dependence of the transverse pressure q on time t . The problem considers a long matrix of rectangular cross section, in which the ratio of its height to width is not less than 0.5. As an example, the creep of the membrane is investigated with a single change in the magnitude of the transverse pressure over time. Three variants of the contact conditions of the membrane and the matrix are considered: perfect sliding, adhesion and sliding taking friction into account. In this paper, four stages of membrane deformation were investigated. At the first stage (elastic deformation), the membrane, flat in the initial state, under the action of pressure, instantaneously is deformed elastically, acquiring the form of an open circular cylindrical shell with a central angle $2\alpha_1$. At the second stage, the membrane is deformed under steady-state creep conditions up to the moment when the side walls of the matrix touch. The third stage ends when the membrane touches the transverse wall of the matrix. In the fourth stage, the membrane is in contact with the matrix on the transverse and lateral sides. The analysis is carried out until the time of almost complete adherence of the membrane to the matrix, at which the ratio of the radius of the membrane near the corners

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Lokoshchenko A. V., Teraud W. V., Shevarova E. A. The steady-state creep of long membrane in a rigid matrix at a variable transverse pressure, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 445–468. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1772> (In Russian).

Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Laboratory; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; e-mail: loko@imec.msu.ru

Valentin V. Teraud  <https://orcid.org/0000-0001-8336-5598>

Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science²;

e-mail: ldrnw@gmail.com

Ekaterina A. Shevarova; Lead Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Student³; e-mail: kat121193@ya.ru

of the matrix to the initial width of the membrane is 0.005. For the third and fourth stages, the friction force of the membrane on the matrix walls is additionally taken into account. The dependences of the thickness of various parts of the membrane on time and on the intensity of stresses in the membrane on time are obtained. In relation to this formulation of the problem, deviations from the rule of summing the partial times of filling the matrix are considered.

Keywords: membrane, steady-state creep, the matrix, transverse pressure, ideal sliding, adhesion, non-stationary loading, friction.

Received: 11th February, 2020 / Revised: 10th July, 2020 /

Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Samara State Technical University).

References

1. Odqvist F. K. G. *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. Oxford, Clarendon Press, 1966, ix+168 pp.
2. Kachanov L. M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974, 312 pp. (In Russian)
3. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov* [Creep in Metal Forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 216 pp. (In Russian)
4. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, 2018, xviii+545 pp. <https://doi.org/10.1201/b22242>.
5. Lokoshchenko A. M., Teraud V. V. Creep of a long narrow membrane up to fracture under constrained conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 451–457. <https://doi.org/10.1134/S0021894413030140>.
6. Demin V. A., Lokoshchenko A. M., Zherebtsov A. A. Creep of a long rectangular membrane in a curvilinear matrix, *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 1998, no. 4–6, pp. 41–46 (In Russian).
7. Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. Concretization of the equation of state in the creep theory, *Izv. AN SSSR. MTT* [Mech. Solids], 1984, no. 1, pp. 86–91 (In Russian).
8. Lokoshchenko A. M., Abrosimova E. A. Steady-state creep of a long membrane in a rigid matrix with a piecewise constant dependence of the rate of change in transverse pressure on time, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 87–96. <https://doi.org/10.1134/S0021894419010127>.
9. Robinson E. L. Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 1952, vol. 74, no. 5, pp. 777–780.
10. Gulyaev V. N., Kolesnichenko M. G. On the evaluation of service life during the creep process with the load applied in stages, *Industrial Laboratory*, 1963, vol. 29, no. 6, pp. 799–802.
11. Marriott D. L., Penny R. K. Strain accumulation and rupture during creep under variable uniaxial tensile loading, *J. Strain Analysis*, 1973, vol. 8, no. 3, pp. 151–159. <https://doi.org/10.1243/03093247V083151>.
12. Osasyuk V. V., Olisov A. N. Hypotheses for summing relative durances, *Strength Mater.*, 1979, vol. 11, no. 11, pp. 1229–1232. <https://doi.org/10.1007/BF00767046>.



УДК 539.37

Общие свойства показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, порождаемых линейной теорией вязкоупругости, и существование максимума у его зависимости от скорости

© А. В. Хохлов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Анализируется скоростная чувствительность семейства диаграмм деформирования, порождаемых физически линейным определяющим соотношением вязкоупругости Больцмана–Вольтерры с произвольной функцией релаксации в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации. Выведено общее выражение для показателя скоростной чувствительности (скоростного упрочнения) и аналитически исследованы его общие качественные свойства: зависимость от деформации, скорости деформации и характеристик функции релаксации, диапазон значений, интервалы монотонности и существование точек экстремума, предельные значения при стремлении скорости деформации к нулю или бесконечности, способы определения по диаграммам деформирования или по кривым релаксации. Установлено, что (в рамках линейной теории вязкоупругости) этот показатель зависит не от двух независимых аргументов (деформации и скорости деформации), а только от их отношения, что он выражается через отношение касательного модуля к секущему и может быть вычислен по одной диаграмме деформирования с произвольной скоростью деформации, и что по заданной (или измеренной в испытаниях) функции скоростной чувствительности можно однозначно восстановить функцию релаксации. Доказано, что значения показателя скоростной чувствительности всегда лежат в интервале от нуля до единицы (т.е. линейное определяющее соотношение описывает только псевдопластические среды и не может описывать дилатантные) и могут быть сколь угодно близки к единице (верхней границе для псевдопластических сред), что как функция скорости он не только может монотонно возрастать или убывать, но может иметь точки экстремума, в частности точку максимума (при малообременительных ограничении-

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хохлов А. В. Общие свойства показателя скоростной чувствительности диаграмм деформирования, порождаемых линейной теорией вязкоупругости, и существование максимума у его зависимости от скорости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 469–505. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1726>.

Сведения об авторе

Андрей Владимирович Хохлов  <https://orcid.org/0000-0002-9212-2579>

кандидат технических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. упругости и пластичности; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru

ях на функцию релаксации). Тем самым обнаружена неожиданная способность линейной теории вязкоупругости не только порождать семейство диаграмм деформирования с выраженными участками течения при практически постоянном напряжении, но и качественно описывать «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации (в логарифмических осях) и очень высокую скоростную чувствительность, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов.

Установленные свойства показателя скоростной чувствительности и его характерные особенности проиллюстрированы на примерах классических регулярных, сингулярных и фрактальных моделей вязкоупругости (Максвелла, Фойгта, Кельвина, Зенера, Бюргерса, Скотт—Блэра) и их параллельных соединений.

Ключевые слова: вязкоупругость, диаграммы деформирования, скоростное упрочнение, показатель скоростной чувствительности, функция скоростной чувствительности, псевдопластические среды, фрактальные модели, уравнения с дробной производной, сверхпластичность, сигмоидальная кривая, титановые и алюминиевые сплавы, керамики.

Получение: 25 июля 2019 г. / Исправление: 23 июня 2020 г. /

Принятие: 24 августа 2020 г. / Публикация онлайн: 31 августа 2020 г.

Введение. Данная статья продолжает цикл работ [1–5] (и др.) по аналитическому исследованию физически линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad t > 0, \quad (1)$$

с произвольными функциями релаксации (ФР) и ползучести $R(t)$ и $\Pi(t)$, $t > 0$, с целью определения комплекса моделируемых им реологических эффектов, границ и индикаторов его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации. ОС (1) описывает одномерные изотермические процессы в структурно-стабильных материалах. Функции ползучести (ФП) и релаксации (ФР) в (1) предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, $\Pi(t)$ — возрастающей и выпуклой вверх на $(0; \infty)$ [1–5], а $R(t)$ — убывающей и выпуклой вниз; ФР может быть непрерывной справа в точке $t = 0$ (тогда модель называется регулярной), а может иметь интегрируемую особенность (например степенную, как у многих фрактальных моделей [6–12]) или включать сингулярное слагаемое $\eta\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция, $\eta > 0$. Парой операторов вида (1) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости нестареющих изотропных сред: тогда под $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ понимаются компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций или среднее напряжение и объемная деформация, связанные сдвиговой или объемной ФР [4, 5].

Данная работа посвящена анализу общих свойств показателя скоростной чувствительности (ПСЧ) диаграмм деформирования, порождаемых ОС (1) в одноосных квазистатических испытаниях $\varepsilon = at$ с постоянными скоростями деформации (СД).

Диаграммы деформирования (ДД) многих материалов (в частности, наследственных) в испытаниях с постоянными скоростями деформации зависят от скорости a : $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$. Одна из наиболее распространенных мер скоростной чувствительности материала (выраженности зависимости ДД от a и скоростного упрочнения) — показатель скоростной чувствительности (ПСЧ):

$$m(a, \varepsilon) := \frac{\partial \lg \sigma(\varepsilon, a)}{\partial \lg a} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a} \quad (2)$$

(в неодноосном случае под σ и a следует понимать интенсивности тензоров напряжений и скоростей деформаций). Для степенной модели вязкой (жидкообразной) среды $\sigma = K \dot{\varepsilon}^M$ ПСЧ постоянен и совпадает с показателем M ($M \in (0; 1)$ для псевдопластических сред, $M > 1$ — для дилатантных) [13]. Как будет показано ниже, ПСЧ может быть постоянным и для моделей линейной вязкоупругости с определенными функциями релаксации.

Особенно важна высокая скоростная чувствительность материала и ее характеристика при сверхпластическом деформировании [14–36] (см. п. 1), которое лежит в основе важных технологических процессов штамповки изделий сложной формы, получения материалов с нужной структурой и механическими свойствами посредством обработки давлением и большими пластическими деформациями [19, 23, 27–29, 36–45] и т.п.

В работах [1, 4] исследованы общие свойства диаграмм деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$, порождаемых линейной теорией вязкоупругости в одноосном и общем случаях, в частности доказано, что ЛОС описывает только положительную скоростную чувствительность и не способна описывать отрицательную [46–52], но ПСЧ и другие количественные характеристики скоростной чувствительности не анализировались.

Главные задачи данной статьи — вывести формулу для показателя скоростной чувствительности кривых деформирования с постоянными скоростями, порождаемых линейным ОС (1) с произвольной функцией релаксации, аналитически исследовать общие качественные свойства зависимости ПСЧ от деформации, скорости деформации и характеристик ФР и доказать, что физически линейное ОС вязкоупругости (1) способно описывать максимум ПСЧ диаграмм деформирования, т.е. «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации в осях « $\lg \sigma - \lg a$ », и очень высокую скоростную чувствительность с показателем $m \in (0.5; 1)$, характерные для режима сверхпластического деформирования материалов [14–36], причем без каких-либо экзотических ограничений на функцию релаксации: окажется, что эти условия выполняются даже для классической модели Кельвина (“standard linear solid”) из двух упругих элементов и одного вязкого. Обнаруженный факт, в частности, выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ. Из него следует принципиальная возможность использования линейных интегральных операторов вида (1) (инвариантных относительно сдвигов по времени) как полезного инструмента (элемента) при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала. Например, соединив (параллельно или последовательно) один нелинейно вязкий элемент и модель Кельвина (линейный

вязкоупругий «суперэлемент»), можно получить нелинейную модель с ПСЧ, имеющим максимум.

Напряжение и время (и скорость деформации) в ОС (1) и формуле (2) предполагаются безразмерными. В силу линейности операторов (1) изучаемые качественные свойства ДД и ПСЧ не зависят от способа масштабирования напряжений и времени.

1. Особенности кривых испытаний материалов в состоянии сверхпластичности и способов их описания. Сверхпластичность — способность многих материалов в определенных структурно-термомеханических условиях (в определенном диапазоне температур, скоростей и при достаточной степени измельчения зерен) к очень большой пластической деформации (100–200 % и более) при относительно низком напряжении течения и его сильной зависимости от скорости деформации; способность к деформации не только без разрушения, но и без потери (или даже с улучшением) своих основных механических характеристик. Напряжение течения в состоянии сверхпластичности может быть в несколько раз меньше предела текучести материала в обычном состоянии (при той же температуре), а деформация при разрушении — в несколько раз больше. Сверхпластичность обычно наблюдается у металлов и сплавов (титан, медь, цирконий, цинк, титановые, алюминиевые, магниевые и свинцово-оловянные сплавы, стали и др.), интерметаллидов и керамик с ультрамелкозернистой структурой (средний размер равноосных зерен менее 10 мкм) при достаточно высоких температурах ($T > 0.4 T_m$, T_m — температура плавления) и достаточно малых скоростях деформирования ($\dot{\epsilon} = 10^{-5} \div 10^{-1} \text{ с}^{-1}$) [18–36]. Обычно выделяют два основных вида сверхпластического деформирования:

- 1) сверхпластичность полиморфных материалов (стали, чугуны, титан и его сплавы, цирконий, цинк и др.) в процессе фазовых превращений, вызванных деформированием, термоциклированием, радиацией и т.п.;
- 2) структурную сверхпластичность материалов (металлов и сплавов, интерметаллидов, керамик) с ультрамелкозернистой (глобулярной) структурой, не связанную с фазовыми превращениями.

Основными механизмами, определяющими развитие структурной сверхпластичности, считаются зернограничное проскальзывание, внутризеренное дислокационное скольжение, диффузионная ползучесть и рекристаллизация [18–30, 33–36]. Как правило, чем меньше средний размер зерен поликристаллического материала в состоянии сверхпластичности, тем больше его скоростная чувствительность, меньше напряжение течения, больше деформационный ресурс и вязкость (тогда как для металла в обычном состоянии пределы текучести и прочности возрастают с уменьшением размера зерен). У металлических стекол в переохлажденном жидком состоянии (в некотором диапазоне температур, немного выше температуры стеклования) наблюдается сверхпластическое течение с ПСЧ, близким к единице, и при высоких скоростях деформации [27].

Механическое поведение материалов в условиях сверхпластичности, как правило, изучается в испытаниях на одноосное растяжение и сжатие цилиндрических или плоских образцов (со специально подготовленной структурой), на кручение под давлением и на продавливание материала в специальных матрицах (равноканальное угловое прессование и т.п.). До и после ис-

пытания производится подробное изучение структуры материала средствами металловедения. Все более популярными становятся методы индентирования, но методология, математическая обработка, расшифровка и интерпретация результатов таких опытов вызывают пока много вопросов. В одноосных опытах на растяжение-сжатие при постоянной температуре обычно снимаются ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ при постоянных СД и три паспортные кривые сверхпластичности (все эти кривые сильно зависят от температуры [18–30, 35–39, 64]): зависимости (истинного) напряжения течения $\sigma_y(a)$, ПСЧ $m(a)$ и максимального относительного удлинения при разрыве $\delta(a) = l/l_0 - 1$ от СД $a := \dot{\varepsilon} = \dot{l}/l = V/l$, где $\varepsilon = \ln l/l_0$, V — скорость траверсы испытательной машины. Эти кривые принято строить в (полу)логарифмических координатах: $\lg \sigma - \lg a$, $m - \lg a$, $\delta - \lg a$. По их качественному виду принято судить о том, находится ли материал в состоянии сверхпластичности или в «обычном состоянии» (только в температурно-скоростном режиме, необходимом для проявления сверхпластичности в случае материала с «правильной» структурой).

На ЭДД $\sigma(\varepsilon, a)$ сверхпластичных материалов при постоянных СД имеется начальный участок быстрого нарастания напряжения (иногда до $\varepsilon = 5\%$). За ним следует участок постоянства напряжения (без деформационного упрочнения), где напряжение течения сильно зависит от СД (а затем, возможно, участок убывания напряжения). На рис. 1 приведены ДД для титанового сплава ВТ6С при температуре 900°C (в вакууме) при постоянной СД в диапазоне от 0.00008 до 0.02 с^{-1} из статьи [53]: истинные напряжения (в МПа) в зависимости от относительной деформации $l/l_0 - 1$ в процентах при постоянстве скорости траверсы (истинная СД $a := \dot{l}/l = V/l$ в процессе растяжения падает, ибо l растет). Это типичные кривые сверхпластического деформирования. Они отличаются от ДД для титанового сплава в обычном состоянии (примерно в том же диапазоне СД, но при меньшей температуре и без подготовки структуры) не только гораздо большими деформациями при таких

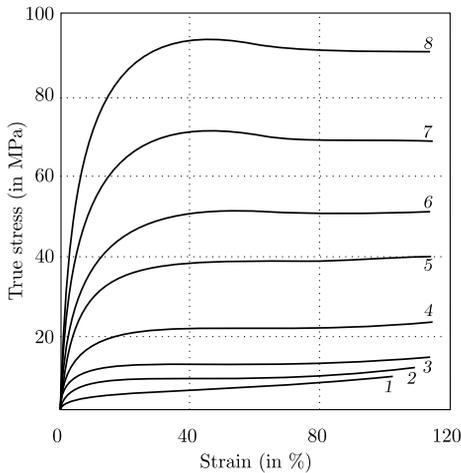


Рис. 1. Диаграммы деформирования титанового сплава ВТ6С при 900°C (в вакууме) для скоростей деформации $a = 8; 55; 84; 160; 350; 600; 800; 2000 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ (кривые 1–8) [53]

[Figure 1. Stress-strain curves of titanium alloy VT6S under tension at 900°C and strain rates $a = 8; 55; 84; 160; 350; 600; 800; 2000 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (curves 1–8) [53]]

же или меньших напряжениях, но и очень сильной чувствительностью напряжения течения к СД: на рис. 1 напряжение течения увеличилось в 10 раз при изменении (начальной) СД от 0.00008 до 0.02 с⁻¹, а ПСЧ, определенный по кривым рис. 1, находится в диапазоне от 0.5 до 0.7. Отметим, что аналогичные по форме диаграммы деформирования с длинным горизонтальным участком, сильно зависящим от скорости, порождают линейная модель Максвелла [1] и нелинейная модель упруговязкопластичности типа Максвелла [54, 55].

Многочисленные эксперименты показали, что сверхбольшие пластические деформации надежно коррелируют с высоким значением ПСЧ (2). Сильная чувствительность напряжения течения к СД — один из главных факторов, обеспечивающих устойчивость сверхпластического течения: в месте зарождения шейки повышается СД, что вызывает повышение напряжения (упрочнение) и стабилизацию (залечивание локального сужения). Увеличение ПСЧ с ростом деформации (его предсказывают, в частности, нелинейная модель типа Максвелла [54, 55] и линейное ОС (1) с регулярными функциями релаксации, см. п. 3) также способствует стабилизации участков локализации деформации. Сильная зависимость напряжения течения от СД (режим сверхпластичности) характеризуется величиной $m > 0.3$ (максимальное значение $m = 1$ соответствует линейно-вязкой жидкости), тогда как для материалов в обычном состоянии $m \leq 0.1$. Принято считать [18–30, 35, 36], что для режима сверхпластического деформирования материала характерна «сигмоидальная» форма графика зависимости $\lg \sigma$ от $\lg a$ (кривая 1 на рис. 2), т.е. наличие точки перегиба с почти прямолинейным участком в ее окрестности и, соответственно, наличие точки максимума на графике зависимости ПСЧ (2) от СД при фиксированной деформации (кривая 2), а также — максимум

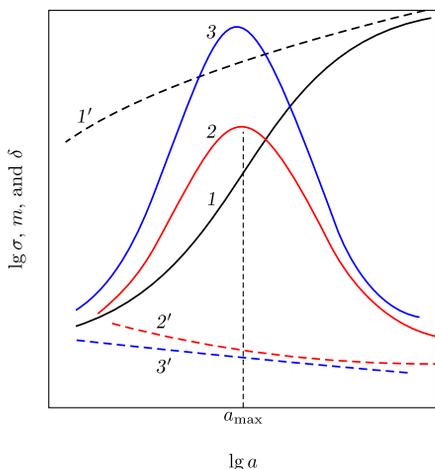


Рис. 2. Типичные качественные зависимости (безразмерного) напряжения (1, 1'), показателя скоростной чувствительности (2, 2') и деформации при разрушении (3, 3') от скорости деформирования: 1, 2, 3 — в режиме сверхпластического деформирования; 1', 2', 3' — в обычном состоянии

[Figure 2. Typical qualitative dependences of (non-dimensional) stress (1, 1'), strain rate sensitivity index (2, 2') and rupture strain on strain rate for tensile tests (3, 3') at constant strain rate; curves 1, 2, 3 correspond to the superplastic deformation regime; curves 1', 2', 3' correspond to the usual condition]

и очень высокие значения деформации при разрушении δ (кривая 3). Для материала в обычном состоянии характерны кривые вида $1'$ и $2'$ без точек перегиба и максимума и монотонное убывание $\delta(\lg a)$ (кривая $3'$). Точка максимума a_{\max} указывает оптимальную скорость деформирования для достижения максимальных деформаций и нужной формы изделия с наименьшими энергозатратами. У керамик с ультрамелкозернистой структурой график ПСЧ, как правило, имеет широкий участок постоянства (плато) [24, 27].

Наличие выраженного максимума на графиках m и δ (кривые 2 и 3) на рис. 2 позволяет выделить на ней три области [24–27]. При очень малых СД δ и m малы (стадия I). Стадия II характеризуется высокими (максимальными) значениями δ и m , т.е. максимальным наклоном и наименьшей кривизной «сигмоидальной кривой» 1. При этом характер взаимодействия фаз, средний размер зерен и их форма (в идеале — близкая к глобулярной) практически не меняются. Как только происходят существенные изменения (увеличение зерен, потеря равноосности, нарушение фазового равновесия и т.п.), происходит понижение ПСЧ и переход к стадии III. Оптимальный диапазон СД, соответствующий стадии II, зависит от материала (его химического и фазового состава, структуры и текстуры) и температуры. Он, как правило, лежит в интервале скоростей $\dot{\epsilon}$, равных $10^{-4} \div 10^{-2} \text{ с}^{-1}$. Его прогнозирование, определение, расширение и сдвиг в сторону больших СД («высокоскоростная сверхпластичность») — одна из важнейших технологических и научных задач.

Уменьшение среднего размера зерен (при сохранении их равномасштабности и равноосности) посредством специальной предварительной термомеханической обработки вызывает понижение напряжения течения и сдвиг оптимального диапазона СД (максимума кривой $m(\lg a)$ и точки перегиба сигмоидальной кривой — рис. 2) в сторону увеличения (порой в десятки раз). «Правильный» фазовый состав материала поддерживает стабильность необходимой для сверхпластичности микроструктуры и повышает эффективность механизмов сверхпластического деформирования. Повышение температуры, как правило, приводит к росту зерен, но если оно не выводит материал из состояния сверхпластичности (если не нарушает мелкозернистую структуру и равноосность зерен, не сдвигает фазовое равновесие и не вызывает переход материала в однофазное состояние), то влечет значительное понижение напряжения течения и сдвиг оптимального для интервала СД в сторону увеличения СД [18–30, 35–39, 63, 64].

Из сказанного следует, что ПСЧ (его зависимость от СД, деформации, температуры, параметров структуры, их истории и т.п.) — важнейшая характеристика материала, находящегося в состоянии сверхпластичности, и конкретного процесса сверхпластического деформирования. Методам определения ПСЧ посвящено огромное количество работ (в большинстве изучается лишь зависимость ПСЧ от СД) [15–27, 53, 56, 59]. ПСЧ определяют по наклонам кривых $\lg \sigma - \lg a$, или по ДД со скачком СД, или по кривым релаксации напряжений, или по результатам технологических экспериментов. Все существующие методы позволяют определить ПСЧ с малой точностью, значения, определенные разными методами, имеют большой разброс (30–50 % и более), зависят не только от методики его измерения, но и от степени и скорости деформации образца. Уже общепризнанно, что не существует универсального

оптимального способа определения величины ПСЧ, и измеренную величину не следует рассматривать как материальную константу [22, 25, 26]. Естественным продолжением этой мысли было бы рассматривать ПСЧ как материальную функцию в моделях сверхпластического деформирования: функцию от ε , a , T , среднего размера зерна и других параметров структуры материала (и от историй инвариантов тензора напряжений при трехосном нагружении и характеристик процесса нагружения). Аргументы для обоснования такого подхода будут обнаружены ниже.

Для моделирования сверхпластичности используют и разрабатывают множество моделей, как правило, описывающих одноосный случай [16–28, 35, 45, 52, 57–63]. Исторически самая популярная (в силу простоты) модель сверхпластического течения представляет собой гибрид уравнения состояния вязкой жидкости и нелинейно упругой среды: напряжение течения моделируется соотношением (иногда называемым *Fields–Backofen equation*) [18–28, 63, 64]

$$\sigma(t) = K |\dot{\varepsilon}(t)|^M |\varepsilon(t)|^N \operatorname{sgn} \varepsilon(t), \quad K > 0, \quad M \in (0; 1], \quad N \geq 0 \quad (3)$$

(отметим, что эта зависимость — частный случай модели ползучести с упрочнением [65–68]). Для этой модели семейство ДД имеет вид $\sigma(\varepsilon, a) = K \varepsilon^N a^M$, а ПСЧ (2) совпадает с постоянной M (модель (3)) пренебрегает зависимостью M от a и ε). Чаще всего полагают [18–29, 35], что показатель деформационного упрочнения N равен нулю, и пренебрегают зависимостью M от ε , т.е. считают материал степенной вязкой жидкостью. Нередко используют структурные (одномерные) модели, полученные последовательным или параллельным соединением вязких элементов со степенными зависимостями напряжения от СД с произвольными положительными показателями и коэффициентами [16, 19, 25, 26, 59]. Чтобы учесть параметры структуры, в модель вводят зависимость напряжения от среднего размера зерна (например, степенную) и, возможно, иных параметров структуры (задаваемую кинетическим уравнениями) [24–28, 33, 35, 60–63]. Авторы работ [45, 58] рассматривают сверхпластичность как особый вид ползучести. Несмотря на все усилия, удовлетворительное комплексное теоретическое описание сверхпластического деформирования, учитывающее влияние термомеханической истории и контуры эволюции структуры материала и позволяющее (хоть как-то) предсказывать вход в состояние сверхпластичности и выход из него, пока отсутствует.

Одно из основных феноменологических требований к определяющим соотношениям сверхпластичности — способность моделировать наличие локального максимума у функции $m(a)$. Далеко не все модели на это способны. Например, для последовательного соединения элементов со степенной вязкостью ПСЧ (2) — убывающая функция от скорости деформации, а для параллельного соединения — возрастающая, т.е. в обоих случаях максимума у функции $m(a)$ нет [69], а смешанное соединение трех элементов (модель Бэкофена) способно воспроизводить максимум при некоторых наборах материальных параметров [16, 25, 59, 69]. «Формула Смирнова» [19, 27]

$$\sigma = \sigma_s (\sigma_0 + K a^M) / (\sigma_s + K a^M), \quad K, \quad M > 0, \quad \sigma_s > \sigma_0 > 0,$$

позволяет аппроксимировать зависимость напряжения течения от СД функцией с точкой перегиба (т.е. обеспечить «сигмоидальность» этой кривой в логарифмических координатах). Но трактовать ее как ОС материала нельзя:

она не описывает даже ДД, т.к. всегда $\sigma \geq \sigma_0$ и $\sigma = \text{const}$ при $a = \text{const}$; полностью пренебрегает зависимостью σ и m от ε ; совсем не моделирует релаксацию напряжений: при $a = 0$ имеем $\sigma = \sigma_0$ — независимо от уровня деформации, мгновенно, в частности, тождественно равной нулю, ставится в соответствие ненулевое напряжение $\sigma = \sigma_0$. Если $a = 0$ начиная с некоторого момента времени, то с этого же момента сразу $\sigma = \sigma_0$ независимо от установившегося уровня деформации и от всей предыстории, в частности, независимо от первоначальной скорости нарастания деформации и от соответствующего ей по формуле напряжения течения. С таким же успехом для описания сигмоидальной кривой $\lg \sigma - \lg a$ можно использовать, например, функции $y = y_0 + K \arctg A(x - x_0)$ или $y = y_0 + K[(x - x_0)^2 + C]^{1/3}$, имеющие точки перегиба (положив $y = \lg \sigma$, $x = \lg a$ и даже считая все константы функциями от ε).

Покажем, что линейное ОС (1) не только описывает релаксацию, ползучесть, обратную ползучесть, скоростную чувствительность ДД и другие эффекты, свойственные реономным материалам, но вполне способно порождать диаграммы деформирования с выраженными участками течения при практически постоянном напряжении и моделировать существование максимума у ПСЧ.

2. О материальных функциях линейного ОС вязкоупругости и классах моделей. Входные процессы $\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$ в ОС (1) предполагаются кусочно непрерывными и кусочно гладкими при $t \geq 0$. Из положительности и монотонности функций ползучести и релаксации на $(0; \infty)$ следует, что в точке $t = 0$ существуют пределы справа $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$ и $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0) = +\infty$, если $R(t)$ не ограничена сверху) и предел $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$. Если $\Pi(0+) \neq 0$ (модель регулярна), то $R(0+) = 1/\Pi(0) < \infty$ и на линеале *непрерывных* кусочно гладких при $t \geq 0$ функций операторы (1) представимы в виде

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \\ \varepsilon(t) &= \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $y(0) := y(0+)$ — краткое обозначение предела функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$.

Операторы (1) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны зависимостями

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau = t \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (5)$$

Зная ФР, можно найти ФП из (5), и наоборот. Поэтому одномерное ОС (1) содержит лишь одну материальную функцию.

Свойства семейств основных теоретических кривых (диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, кривых ползучести при ступенчатом нагружении, кривых ползучести и релаксации с произвольной начальной стадией нагружения и др.), порождаемых ОС (1)

с произвольной ФР, его способности описывать те или иные эффекты, наблюдаемые в квазистатических испытаниях, сферы влияния материальных функций, границы и индикаторы его области применимости и методики идентификации проанализированы в цикле работ [1–5] и др. Анализ, в частности, показал, что среди моделей, задаваемых ОС (1) с различными ФР и ФП, необходимо выделять как минимум три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих классов в окрестности точки $t = 0$ (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются.

1. Регулярные модели (РеМ) — те, у которых ФР непрерывна справа в точке $t = 0$ (на всем луче $[0; \infty)$), или $\Pi(0) \neq 0$. Тогда мгновенный модуль $E = R(0) = 1/\Pi(0)$ диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечен, $\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0)$ [2], а ОС (1) и первое уравнение (5) сводятся к уравнениям Вольтерры второго рода (4) и (5).
2. Сингулярные модели (СиМ) — модели с ФР, которая содержит слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$; тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$. ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ и входит слагаемым в ФР ползучести реологических моделей из линейных пружин и демпферов.
3. Модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$, в частности модель Скотт—Блэра с ФР

$$R(t) = At^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0; 1) \quad (6)$$

(ее можно задать оператором дробного дифференцирования $\sigma = \eta D^\alpha \varepsilon$ [6–12], и потому ее называют «фрактальным элементом»: the Scott–Blair model, fractional element, fractional dashpot, spring-pot) и многие другие фрактальные модели [6–12]. Они тоже не регулярны и $\Pi(0) = 0$. В случае $\Pi(0) = 0$ (4) и (5) — уравнения Вольтерры первого рода, что приводит к некорректным задачам, особенностям в нуле у КР, бесконечности мгновенного модуля, отсутствию мгновенной диаграммы деформирования и т.п. [1–5].

Ниже (ш. 4–7) будет показано, что и свойства ПСЧ этих трех классов моделей различны.

Все структурные реологические модели из линейных пружин и демпферов описываются ОС (1). Можно доказать, что для любого n множество неприводимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности (модели класса задаются одним и тем же семейством ФП с одинаковыми диапазонами параметров): регулярные и сингулярные (РеМ- n и СиМ- n). В частности, эквивалентны модель Пойнтинга—Томсона и модель Кельвина (две модели из двух пружин и одного вязкого элемента).

3. Общие свойства диаграмм деформирования, порождаемых ОС (1). Для процесса деформирования $\varepsilon = at$ (с постоянной скоростью) определяющее соотношение (1) принимает вид

$$\sigma(t) = atP(t), \quad \text{где} \quad P(t) := t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (7)$$

$P(t)$ — осреднение ФР (оно удобнее первообразной для исследования ДД, т.к. через него выражается секущий модуль, а его свойства гораздо ближе к свойствам функции $R(t)$). В [1] доказаны следующие свойства $P(t)$ (они будут полезны при анализе свойств ДД и ПСЧ).

ЛЕММА 1. Пусть $R(t)$ — положительная непрерывная убывающая функция. Тогда $P(t)$, $t > 0$ — гладкая убывающая функция, обладающая следующими свойствами:

- 1) $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$ при $t > 0$;
- 2) $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t))$;
- 3) $P(+\infty) = R(+\infty)$;
- 4) для регулярной ФР $P(0+) = R(0+)$;
- 5) если $R(t)$ дифференцируема, то $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$ при $t \rightarrow \infty$, а функция $tP(t)$ возрастает и выпукла вверх;
- 6) если $\dot{R}(0+) < \infty$, то $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$.

Исключив из (7) параметр $t = \varepsilon/a$, получим семейство ДД в явной форме [1]:

$$\sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (8)$$

Секущий и касательный модули ДД (8) выражаются формулами

$$\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a), \quad \sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a). \quad (9)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$ оба модуля (9) стремятся к пределу $E := \sigma'(0) = R(0) = P(0)$ (если модель регулярна, т.е. $R \in C[0; \infty)$, а если нет, то $E = \infty$), а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ — к пределу $r := R(\infty) = P(\infty) \geq 0$; E и r — мгновенный и длительный модули (модули сдвига, объемные модули или модули Юнга — в зависимости от физического смысла σ и ε).

В [1] доказаны следующие общие свойства ДД (8) (для любой допустимой ФР).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $R(t)$ — положительная непрерывная убывающая и выпуклая вниз функция при $t > 0$. Тогда ДД (8) обладает следующими свойствами:

- 1) при любом $a > 0$ ДД $\sigma(\varepsilon)$ монотонна и выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$;
- 2) семейство ДД (8) возрастает по a , т.е. ОС (1) описывает только положительную скоростную чувствительность;
- 3) секущий и касательный модули (9) являются функциями только одной переменной ε/a , а не двух независимых аргументов;
- 4) мгновенный и длительный модули E и r не зависят от скорости деформации a ;
- 5) при любом $a > 0$ справедлива оценка $r\varepsilon < \sigma(\varepsilon, a) < E\varepsilon$ (правое неравенство содержательно при $E < \infty$, т.е. в случае $R \in C[0; \infty)$);
- 6) при $a \rightarrow 0$ семейство ДД (8) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (равновесной ДД) равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$;
- 7) при $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (8) любой регулярной модели сходится (снизу) к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (мгновенной ДД) равномерно на любом отрезке оси ε ;
- 8) если модель не регулярна (т.е. $R \notin C[0; \infty)$), то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\varepsilon(\sigma, a)$ сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$;

9) при $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД (8) обладает асимптотой лишь тогда, когда сходится интеграл $I := \int_0^\infty (R(\tau) - r) d\tau$; тогда каждая ДД (8) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I > 0$, и $\sigma < r\varepsilon + Ia$.

Отсутствие любого из обнаруженных свойств у ДД материала — достаточный признак неприменимости ОС (1) к его моделированию. В частности, линейное ОС (1) не способно моделировать материалы с отрицательной скоростной чувствительностью, с падающей ДД, с выпуклыми вниз или имеющими точки перегиба ДД и те, у которых достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля ДД от СД. А свойство 3 теоремы 1 удобно для оценки (не)применимости ОС (1) посредством проверки по двум ДД материала с разными СД совпадения величин модулей (7) (с заданным допуском) в представительном наборе пар точек с одинаковыми значениями отношения ε/a .

ПРИМЕР. Рассмотрим трехпараметрическое семейство ФР

$$R(t) = (E - r)e^{-\mu t} + r, \quad E > r \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (10)$$

ФР (10) при $r > 0$ порождает трехзвенную регулярную модель Кельвина—Пойнтинга (РеМ-3) с двумя пружинами, при $r = 0$ (10) вырождается в модель Максвелла (РеМ-2), а при $E = r \neq 0$ — в упругий элемент. Осреднения ФР (10) и ДД (8) имеют вид

$$P(t) = (E - r)\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + r, \quad (11)$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = (E - r)\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon. \quad (12)$$

При любом a ДД (12) обладает асимптотой $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I = (E - r)/\mu$.

Для модели Фойгта (СиМ-2) $R = \eta\delta(t) + rh(t)$, $P(t) = r + \eta t^{-1}$, и ДД (8) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a. \quad (13)$$

Все ДД модели Фойгта прямолинейны и параллельны друг другу, $\sigma(0, a) = \eta a$ (вертикальный начальный участок характерен для ДД всех сингулярных моделей). ДД модели Фойгта напоминают формой ДД жесткопластического тела с линейным упрочнением, но пороговое напряжение $\sigma(0)$ зависит от СД. При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД (13) сходится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$, а при $a \rightarrow 0$ — к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (штрих-пунктирная линия 0 на рис. 3).

На рис. 3 приведены ДД (12) модели Кельвина (РеМ-3) с $r = 100$, $E = \eta = 1000$, $\mu = 1$ (кривые 1–5) и Максвелла (с $r = 0$ — синие штриховые ДД 1'–5') для пяти скоростей $a = 0.0001; 0.001; 0.002; 0.003; 0.010$. При $a \rightarrow \infty$ оба семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (штрих-пунктирная линия с символом ∞). При $a \rightarrow 0$ семейство ДД РеМ-3 сходится к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (штрих-пунктирная линия 0), а ДД модели Максвелла — к прямой $\sigma = 0$. Красные штриховые прямые 2''–4'' — ДД модели Фойгта (13) с $r = 100$, $\eta = 1000$ при $a = 0.001; 0.002; 0.003$, они совпадают с асимптотами ДД 2–4. Асимптоты ДД модели Максвелла горизонтальны и совпадают с ДД вязкого элемента (штриховые прямые — для $a = 0.001; 0.002; 0.003$): для линейно вязкой жидкости $R = \eta\delta(t)$, $P = \eta t^{-1}$ и $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$.

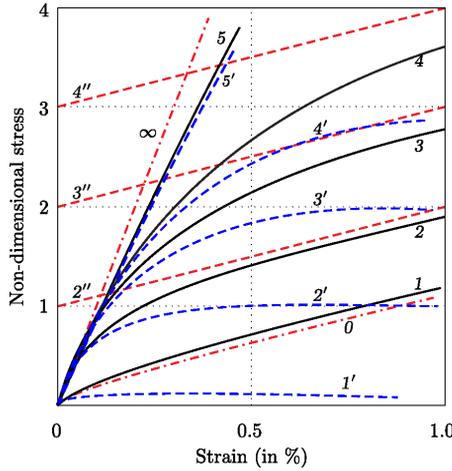


Рис. 3. Диаграммы деформирования (12) моделей Кельвина (10), Максвелла и Фойгта при разных скоростях деформации

[Figure 3 (color online). Stress-strain curves (12) generated by the standard linear solid model (10) (ReM-3) with $E = \eta = 1000$, $r = 100$, $\mu = 1$ and by the Maxwell model ($r = 0$) at strain rates $a = 0.0001$; 0.001 ; 0.002 ; 0.003 ; 0.010 (black curves 1–5 and blue dashed curves 1'–5' with horizontal asymptotes). Dot-dashed curves are the limit curves for $a \rightarrow \infty$ and $a \rightarrow 0$. Red dashed lines 2''–4'' are stress-strain curves (13) generated by the Voigt model (SiM-2) with $r = 100$, $\eta = 1000$ at strain rates $a = 0.001$; 0.002 ; 0.003 (they coincide with asymptotes of curves 2''–4'')]

4. Функция скорости чувствительности линейного ОС и ее свойства. Вычислим ПСЧ (2) по ДД (8), используя формулу п. 2 леммы 1 $P'(x) = x^{-1}(R(x) - P(x))$:

$$m(a, \varepsilon) = -\sigma^{-1} a(\varepsilon/a)^2 P'(\varepsilon/a) = \varepsilon \sigma^{-1} (P(\varepsilon/a) - R(\varepsilon/a)),$$

т.к. $\sigma/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, отсюда имеем

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x), \quad x := \varepsilon/a > 0. \tag{14}$$

Итак, ПСЧ — непрерывная функция, зависящая от одного аргумента $x := \varepsilon/a$ (линии уровня $m(a, \varepsilon)$ — лучи $\varepsilon = xa$, $a > 0$). Будем называть функцию $m(x)$ (14) функцией скорости чувствительности (ФСЧ), а ее график — кривой скорости чувствительности (КСЧ). Так как оператор осреднения (7), отображающий $R(x)$ в $P(x)$, линеен, то при умножении $R(x)$ на любое число $\lambda > 0$ ФСЧ (14) не меняется. Для параллельного соединения любого количества произвольных моделей $R = \sum R_i$, $P = \sum P_i$, и КСЧ (14) выражается формулой

$$m(x) = 1 - R(x)/P(x) = 1 - \sum R_i / \sum P_i.$$

Так как по лемме 1 имеем неравенство $P(x) > R(x) > 0$ при $x > 0$, из (14) следует *общая оценка* $0 < m(x) < 1$, справедливая для любой ФР. Для вырожденных моделей реализуются предельные случаи:

- для упругого элемента $R(t) = E = \text{const}$, $P(x) = E$ и $m(x) \equiv 0$;
- для ньютоновской жидкости — $R = \eta \delta(t)$, $P(t) = \eta t^{-1}$, $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$ и $m(x) \equiv 1$ при $x > 0$.

Таким образом, линейное ОС (1) описывает только псевдопластические среды и не может моделировать дилатантные среды (у которых кажущаяся вязкость $v := \sigma/\dot{\varepsilon}$ — возрастающая функция СД). Из (8) следует, что для ОС (1) $v = \sigma/a = P(\varepsilon/a)\varepsilon/a = xP(x)$ — убывающая функция a при любом фиксированном ε (так как согласно лемме 1 функция $xP(x)$ возрастает, $v'(a) = -\varepsilon a^{-2}R(\varepsilon/a) < 0$), т.е. среда относится к классу псевдопластических, и $v(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, если ФР несингулярна (если же ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$, то $v(a) \rightarrow \eta$).

Предел ФСЧ (14) при $x \rightarrow 0$ (т.е. при $\varepsilon \rightarrow 0$ или $a \rightarrow \infty$) зависит от класса, к которому принадлежит модель (см. п. 2). Если ФР непрерывна справа в точке $t = 0$ (модель регулярна), то при $x \rightarrow 0$ имеем $m \rightarrow 0$, поскольку $P(0+) = R(0+)$ по лемме 1. Для всех сингулярных моделей $R(0+) < \infty$ и $P(t) = \eta t^{-1}$, и потому $m(0+) = 1$. Если $R(t) \sim x^{-\alpha}$ при $t \rightarrow 0$, $\alpha \in (0; 1)$ (в частности, для фрактальных моделей Фойгта (25) и их параллельных соединений — см. п. 6), то $P(t) \sim (1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}$ и по (14) $m(0+) = \alpha$.

Предел ФСЧ (14) при $x \rightarrow \infty$ также может принимать любые значения из отрезка $[0; 1]$. Если $r = R(\infty) > 0$, то $m \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (т.е. при $\varepsilon \rightarrow \infty$ или $a \rightarrow 0$), поскольку по лемме 1 $P(\infty) = R(\infty) := r$ и $R(x)/P(x) \rightarrow 1$. В случае $r = 0$ за неопределенностью $0/0$ может скрываться любой предел (из отрезка $[0; 1]$). Если $R(t) \sim t^{-p}$ при $t \rightarrow \infty$, $p > 0$, то по (14) $m(\infty) = \min\{p, 1\}$ (в частности, для всех параллельных соединений фрактальных элементов (6) и их сдвигов вдоль оси времени).

Если $R(t) = O(t^{-(1+h)})$ при $t \rightarrow \infty$, $h > 0$, то $m(\infty) = 1$, так как по (7) $P(t) \sim It^{-1}$, где $I := \int_0^\infty R(\tau)d\tau$ (интеграл сходится по признаку сравнения) и $R/P = O(t^{-h})$. В частности, для модели Максвелла ($R = Ee^{-\mu t}$) имеем $P = E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t})$, $R(x)/P(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, и потому $m \rightarrow 1$. Для всех параллельных соединений моделей Максвелла с разными временами релаксации (РеМ-2n) тоже $m(\infty) = 1$.

Если $R(0+) < \infty$ (т.е. модель регулярна) и $R(\infty) \neq 0$, то положительная непрерывная функция $m(x)$ стремится к нулю на концах интервала $(0; +\infty)$, следовательно, она имеет хотя бы один локальный максимум (в той точке $x = \hat{x}$, в которой достигает своей точной верхней грани $\hat{m} := m(\hat{x})$). При фиксированной СД a функция $m(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, имеет максимум в точке $\hat{\varepsilon} = a\hat{x}$, а при фиксированном ε функция $m(a)$, $a > 0$, имеет максимум в точке $\hat{a} = \varepsilon/\hat{x}$. Чем больше ε , тем больше \hat{a} и тем шире диапазон СД, в котором значения $m(a)$ близки к максимальной величине ПСЧ $\hat{m} = m(\hat{x})$. Таким образом, физически линейное ОС (1) способно моделировать наличие максимума ПСЧ и сигмоидальность зависимости $\lg \sigma - \lg a$, столь важные для сверхпластичности. Этой способностью ОС (1) выгодно отличается от модели (3) (традиционно используемой для описания сверхпластичности в течение полувека) и всех параллельных соединений моделей вида (3), которые не могут описывать ни наличие максимума ПСЧ [22], ни релаксацию напряжений. Условия наличия максимума у зависимостей $m(x)$ и $m(a)$ выполняются даже для классической модели Пойнтинга—Томсона, получаемой параллельным присоединением упругого элемента к модели Максвелла, и для эквивалентной ей модели Кельвина, т.е. для всех РеМ-3 (см. п. 2). Обнаруженный факт выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ.

Для определения \hat{x} и \hat{m} надо найти критические точки $m(x)$:

$$m'(x) = -[P(x)]^{-2}(R'(x)P(x) - R(x)P'(x)),$$

$m'(x) = 0$ равносильно

$$R'(x)/R(x) = P'(x)/P(x), \quad \text{или} \quad xR'(x)/R(x) = R(x)/P(x) - 1,$$

поскольку $P'(x) = (R(x) - P(x))/x$ (лемма 1). Для конкретной ФР решения этого уравнения — критические точки $m(x)$, разбивающие ось на интервалы монотонности $m(x)$. Из общих качественных свойств ФР не следуют ограничения на количество точек экстремума у КСЧ. Анализ показывает (см. ниже), что КСЧ могут иметь несколько точек экстремума (например, модель стандартного тела, т.е. параллельное соединение двух моделей Максвелла с разными временами релаксации).

Каждой конкретной модели (1) (каждой ФР $R(x)$) соответствует по (14) своя ФСЧ $m(x)$, характеризующая ее скоростную чувствительность, и, соответственно, значения \hat{x} и \hat{m} (если есть максимум и другие характерные точки). ФСЧ можно рассматривать как материальную функцию, поскольку по заданной ФСЧ можно однозначно восстановить ФР и таким образом построить модель с заданной формой КСЧ, зарегистрированной в испытаниях материала. В самом деле, по заданной непрерывной и кусочно-гладкой функции $m(x)$, такой, что $0 < m < 1$ при $x > 0$, можно восстановить ФР $R(x)$ с точностью до положительного множителя (т.к. по (14)) всем ФР $\lambda R(t)$, $\lambda > 0$, соответствует одна и та же ФСЧ $m(x)$); для его определения надо задать еще начальное условие $R(t_0) = R_0 > 0$. Из (14) следуют интегральное и дифференциальное уравнения для $R(x)$: $\int_0^x R(t)dt = x(1 - m(x))^{-1}R(x)$, или

$$R' = f(x)R, \quad f(x) := -x^{-1}m(x) - m'(x)(1 - m(x))^{-1}. \quad (15)$$

Очевидно, $f(x)$ кусочно непрерывна, и множество ее точек разрыва совпадает с множеством точек разрыва $m'(x)$ на $(0, \infty)$ (как правило, пустым), а наличие разрывов у $m'(x)$ равносильно наличию разрывов у $\dot{R}(t)$ в силу (15) (такие ФР иногда используют, склеивая задаваемые представления для ФР, в частности, полагая $R(t) = \text{const}$ при больших t).

Решение дифференциального уравнения (15) с начальным условием $R(t_0) = R_0 > 0$ имеет следующий вид: $R(t) = R_0 \exp\left(\int_{t_0}^t f(x)dx\right)$. Обозначив $y(x) := x^{-1}m(x)$, после преобразований получим

$$R(t) = R_0 \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)} \exp(-Y(t)), \quad Y(t) := \int_{t_0}^t y(x)dx, \quad (16)$$

$$y := x^{-1}m(x), \quad t \geq t_0 > 0.$$

Очевидно, функция $R(t)$ непрерывна, и $R(t) > 0$, поскольку $m(t) < 1$. Точки разрыва $\dot{R}(t)$ совпадают с точками разрыва $m'(x)$. Так как $0 < m < 1$, вы-

полняется неравенство $0 < y < x^{-1}$ и $Y(t)$ возрастает; $0 < Y(t) < \ln(t/t_0)$ при $t > t_0$, $t_0/t < \exp(-Y(t)) < 1$, и потому верна оценка для ФР (16):

$$t_0 t^{-1} \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)} < \frac{R(t)}{R(t_0)} < \frac{1 - m(t)}{1 - m(t_0)}, \quad t > t_0 > 0. \quad (17)$$

Предел ФР (16) при $t \rightarrow \infty$ зависит от поведения интеграла $Y(t)$. Если $Y(\infty) < \infty$ (интеграл сходится), то $m(\infty) = 0$ (в предположении, что предел $m(\infty)$ существует) и $R(\infty) = R_0(1 - m(t_0))^{-1} \exp(-Y(\infty)) > 0$. Если же интеграл $Y(t)$ расходится, то $\exp(-Y(t)) \rightarrow 0$ и $R(\infty) = 0$. Для этого достаточно, чтобы $m(\infty) > 0$.

Для того чтобы ФР (16), восстановленная по ФСЧ, удовлетворяла необходимым ограничениям на ФР в ОС (1) (была убывающей и выпуклой вниз), надо наложить дополнительные ограничения на $m(x)$. Из дифференциального уравнения (15) следует, что *критерий (нестрогого) убывания $R(x)$* при $x > 0$ — выполнение неравенства $f(x) \leq 0$, т.е. $-x^{-1}m(x) \leq m'(x)(1 - m(x))^{-1}$, или

$$m'(x) \geq -x^{-1}m(x)(1 - m(x)), \quad x > 0. \quad (18)$$

Критерий выпуклости вниз ФР (16) найдем из (15):

$$R'' = f'R + fR' = (f' + f^2)R,$$

где $R > 0$, поэтому $R'' > 0$ равносильно условию $f' + f^2 > 0$ для всех $x > 0$, т.е. (см. подробнее [71])

$$x^2 m'' < m(1 - m^2) + xm'(3m - 1). \quad (19)$$

Отметим в заключение, что ФСЧ легко определяется не только по заданной ФР, но и по одной ДД $\sigma(\varepsilon, a)$: ведь в силу (14) и (8)

$$m(x) = 1 - E_T(x)/E_S(x), \quad (20)$$

где $E_T := \partial\sigma/\partial\varepsilon = R(\varepsilon/a)$ и $E_S := \sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$ — касательный и секущий модули, вычисляемые по одной ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ с произвольной скоростью (или одной экспериментальной ДД материала в случае адекватности линейного ОС). Это свойство можно использовать и как индикатор (не)применимости линейного ОС (1) по данным испытаний материала, так и для прямого определения ФСЧ по ним.

5. Кривые скоростной чувствительности моделей Кельвина, Максвелла и Фойгта. Для модели Кельвина (РеМ-3) с трехпараметрической ФР (10) ФСЧ задается (в силу (14) и (11)) уравнением

$$m(x) = 1 - \frac{(E - r)e^{-\mu x} + r}{(E - r)\mu^{-1}x^{-1}(1 - e^{-\mu x}) + r} = 1 - \frac{(1 - \bar{r})e^{-s} + \bar{r}}{(1 - \bar{r})(1 - e^{-s})s^{-1} + \bar{r}} \quad (21)$$

($s := \mu x$ и $\bar{r} := r/E$ — безразмерные аргумент и параметр). При $\bar{r} = 0$ получается модель Максвелла, ее ФСЧ возрастает, $m(0+) = 0$, $m(\infty) = 1$. Для РеМ-3 $\bar{r} > 0$ и, поскольку $R(0+) = E < \infty$ и $R(\infty) = r \neq 0$, то $m(0+) = 0$, $m(\infty) = 0$

и ФСЧ (19)) имеет хотя бы один максимум. Можно доказать, что ФСЧ (21) имеет единственный экстремум. В самом деле (выкладки опущены),

$$m'(s) = (1 - \bar{r})e^{-s} \frac{\bar{r}s^2 + s + 2\bar{r} - 1 - \bar{r}e^s + (1 - \bar{r})e^{-s}}{[(1 - \bar{r})(1 - e^{-s}) + \bar{r}s]^2};$$

при $\bar{r} > 0$ выражение $m'(s) = 0$ равносильно $\bar{r}(s^2 + 2 - e^s - e^{-s}) = 1 - s - e^{-s}$, или $y(s) = \bar{r}$, где

$$y(s) := (1 - s - e^{-s})/(s^2 + 2 - e^s - e^{-s}), \quad s > 0, \quad \bar{r} \in (0; 1).$$

Для любого $\bar{r} \in (0; 1)$ решение уравнения $y(s) = \bar{r}$ единственно, так как $y(0+) = +\infty$, $y(+\infty) := +0$ и функция $y(s)$ монотонно убывает (доказывается исследованием производных $y(s)$). Отметим также, что ПСЧ (21) убывает с ростом \bar{r} при любом s , поскольку $\partial m / \partial \bar{r} = -e^{-s} [(1 - \bar{r})(1 - e^{-s})s^{-1} + \bar{r}]^{-2} < 0$.

На рис. 4 приведены КСЧ $m(x)$ шести моделей вида (10) с $\mu = 1$ и $\bar{r} = 0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ (линии 0–5; кривая 0 с $r = 0$ соответствует модели Максвелла, остальные – РеМ-3). Красные штриховые линии 6–8 – ФСЧ $m = 1/(1 + \lambda x)$ трех моделей Фойгта с $\lambda := r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$. У модели Максвелла $m(x)$ возрастает при всех $x > 0$, а для моделей с $r \neq 0$ $m(x)$ имеет точку максимума. Чем больше \bar{r} , тем меньше $m(x)$ на всей полуоси. Очевидно, модель Максвелла демонстрирует наивысший ПСЧ при всех x , стабильно близкий к единице вне некоторой окрестности точки $x = 0$. Единственный ее «конкурент» – модель Фойгта с большим временем ретардации (кривая 6). Штрих-пунктирные кривые 10, 11 – КСЧ при увеличении времени релаксации (вязкости) в 10 раз, т.е. при $1/\mu = 10$ для $\bar{r} = 0$ и $\bar{r} = 1$; увеличение времени релаксации $1/\mu$ вызывает растяжение КСЧ (21) вдоль оси x и делает КСЧ более пологой.

На рис. 5 приведены зависимости ПСЧ от деформации $m(\varepsilon)$ при фиксированных $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$ и от скорости $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ для двух моделей: РеМ-3 с $\bar{r} = 0.1$ (кривые 1–4 и 5–9) и Максвелла с $\bar{r} = 0$ (синие кривые 11–14 и 15–19). Стрелками указаны направления смещения кривых с ростом параметров a и ε . Для модели Максвелла $m(\varepsilon)$ возрастает при всех $\varepsilon > 0$, а $m(a)$ убывает при всех $a > 0$. У модели РеМ-3 $m(\varepsilon)$ и $m(a)$ имеют точку максимума, максимальная величина ПСЧ \hat{m} для конкретной модели не зависит ни от a , ни от ε . У модели Фойгта $m(\varepsilon)$ убывает (красные штриховые кривые 21 и 24 – для модели с $r/\eta = 0.1$ при $a = 0.01$ и $a = 0.1$), а $m(a)$ возрастает при всех $a > 0$ (красные штриховые кривые 25 и 29 – при $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.3$). Голубая штрих-пунктирная кривая – $m(\varepsilon)$ РеМ-3 с $\bar{r} = 0.3$ при $a = 0.10$.

6. Функции скоростной чувствительности сингулярных и фрактальных моделей. Для сингулярных или неограниченных ФР многие свойства ФСЧ, доказанные для регулярных ФР (пп. 4, 5), могут нарушаться. Свойства ФСЧ сингулярных моделей «ортогональны» (двойственны) свойствам ФСЧ регулярных. В частности, у всех СиМ $m(0+) = 1$ (а не $m(0+) = 0$, как у РеМ), поскольку наличие слагаемого $\eta\delta(t)$ в ФР влечет наличие слагаемого ηt^{-1} в представлении P и свойство $R(x)/P(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому в окрестности точки $x = 0$ ФСЧ СиМ убывает, а не возрастает, как у РеМ.

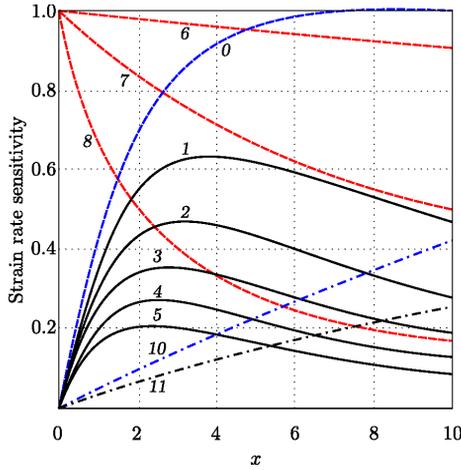


Рис. 4. Кривые скоростной чувствительности $m(x)$ для пяти моделей Кельвина (10) (ReM-3) с $r/E = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$, модели Максвелла (с $r = 0$) и трех моделей Фойгта с $r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$

[Figure 4. Strain rate sensitivity curves $m(x)$ generated by five standard linear solid models (10) (ReM-3) with $\mu = 1$ and $r/E = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5$ (curves 1–5), by the Maxwell model ($r = 0$, the blue curve 0) and by three Voigt models with $r/\eta = 0.01; 0.1; 0.5$ (red curves 6–8). Curves 10, 11 are strain rate sensitivity curves $m(x)$ generated by the models (10) with $1/\mu = 10$ (relaxation time ten times greater) and $\bar{r} = 0$ or $\bar{r} = 1$. Equalities $m(0) = 1$ and $m(\infty) = 0$ hold for all curves $m(x)$ since the model (10) is regular and $R(\infty) \neq 0$]

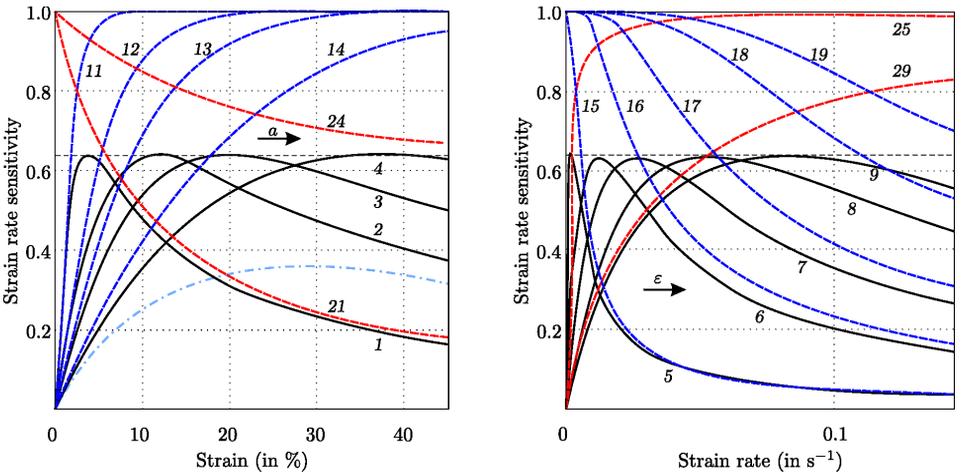


Рис. 5. Зависимости ПСЧ от деформации и скорости деформации для моделей Кельвина (10) с $\bar{r} = 0.1$ и Максвелла ($r = 0$): слева — $m(\varepsilon)$ при $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$; справа — $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$

[Figure 5. Strain rate sensitivity index $m(a, \varepsilon)$ as a function of strain or strain rate for the standard linear solid model (10) with $\mu = 1$ and $r/E = 0.1$ (curves 1–4 and 5–9) and for the Maxwell model with $\mu = 1$ and $r = 0$ (blue curves 11–14 and 15–19): left — graphs $m(\varepsilon)$ for fixed $a = 0.01; 0.03; 0.05; 0.10$; right — graphs $m(a)$ for fixed $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$. Red dashed lines 21, 24, 25, and 29 are graphs $m(\varepsilon)$ and $m(a)$ for the Voigt model with $r/\eta = 0.1$ for fixed rate $a = 0.01$ or $a = 0.1$ and for fixed strain $\varepsilon = 0.01$ or $\varepsilon = 0.3$. The blue curve is the graph $m(\varepsilon)$ for the model (10) with $r/E = 0.3$ and given $a = 0.1$]

Для модели Фойгта (Сим-2) $R = \eta\delta(t) + rh(t)$, $P = r + \eta t^{-1}$, и ДД (8) и ФСЧ (12) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a, \quad m(x) = (1 + \lambda x)^{-1}, \quad x := \varepsilon/a > 0, \quad \lambda := r/\eta > 0 \quad (22)$$

ФСЧ (22) зависит не от двух параметров, а только от времени ретардации $\tau = 1/\lambda$. Очевидно, $m(x)$ убывает при всех $x \geq 0$, причем $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$ (КСЧ 6–8 на рис. 4). Зависимость $m(a)$ от СД возрастает при всех $a > 0$, $m \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$ и $m \rightarrow 1$ при $a \rightarrow \infty$ (кривые 25 и 29 на рис. 5 справа). При $\lambda \rightarrow 0$ семейство ФСЧ (22) равномерно сходится к $m(x) \equiv 1$ (т.е. к ФСЧ вязкого элемента) на любом отрезке.

Для модели Сим-3 (параллельного соединения модели Максвелла с вязким элементом или его последовательного соединения с моделью Фойгта)

$$\begin{aligned} R &= \eta\delta(t) + Ee^{-\mu t}, \quad E, \mu, \eta > 0; \quad P(t) = \eta t^{-1} + E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}); \\ \sigma(\varepsilon, a) &= \eta a + E\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}); \\ m(x) &= 1 - \frac{\mu x e^{-\mu x}}{\mu\eta E^{-1} + 1 - e^{-\mu x}} = 1 - \frac{\mu x}{(\mu\eta E^{-1} + 1)e^{\mu x} - 1}. \end{aligned} \quad (23)$$

ФСЧ (23) всегда имеет хотя бы одну точку минимума, поскольку $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 1$. Свойства ФСЧ Сим-3 (как и Сим-2) кардинально отличаются от свойств ФСЧ регулярных моделей (рис. 4, 5).

На рис. 6 слева приведены КСЧ (23) пяти моделей Сим-3 с $\mu = 1$ и $\eta/E = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 10$ (кривые 1–5), КСЧ модели Максвелла с $\eta = 0$ (штриховая голубая кривая 0) и (для сравнения) КСЧ модели РеМ-3 (10) с $r/E = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5$ (кривые 11–14). Стрелками указаны направления смещения кривых с ростом η/E и r/E . С ростом η/E КСЧ Сим-3 смещаются вверх, минимум становится менее выраженным, выход на асимптоту $m = 1$ — более быстрым, а при $\eta/E \rightarrow \infty$ семейство КСЧ Сим-3 равномерно сходится к прямой $m = 1$ на луче $x \geq 0$. С ростом r/E КСЧ РеМ-3 смещаются вниз, максимум становится менее выраженным, выход на асимптоту $m = 0$ более быстрым, а при $r/E \rightarrow 1$ семейство КСЧ РеМ-3 равномерно сходится к прямой $m = 0$ на луче $x \geq 0$.

На рис. 6 справа приведены зависимости ПСЧ от скорости $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ для трех моделей: Сим-3 с $\eta/E = 1$ (кривые 1–5), Максвелла (штриховые кривые 1'–5') и РеМ-3 с $r/E = 0.1$ (кривые 11–15). Стрелкой указаны направления смещения кривых с ростом ε . Для модели Максвелла $m(a)$ убывает при всех $a > 0$. У РеМ-3 функции $m(a)$ имеют точку максимума и асимптоту $m = 0$ при $a \rightarrow \infty$. У Сим-3 $m(a)$ имеют точку минимума и асимптоту $m = 1$. Точка экстремума смещается вправо с ростом ε , но максимальная (РеМ-3) или минимальная (Сим-3) величина ПСЧ для конкретной модели не зависит от ε .

У модели Скотт–Блэра (6) $P(t) = Kt^{-\alpha}$, $K := A/(1 - \alpha)$, и ДД (8) и КСЧ (14) имеют вид

$$\sigma(\varepsilon, a) = K\varepsilon(\varepsilon/a)^{-\alpha} = K\varepsilon^{1-\alpha}a^\alpha, \quad m(x) \equiv \alpha, \quad x > 0. \quad (24)$$

ПСЧ фрактального элемента (а также отношение $E_T(\varepsilon, a)/E_S(\varepsilon, a) \equiv 1 - \alpha$) не зависит от a и ε (как и ПСЧ нелинейной модели (3)); можно доказать,

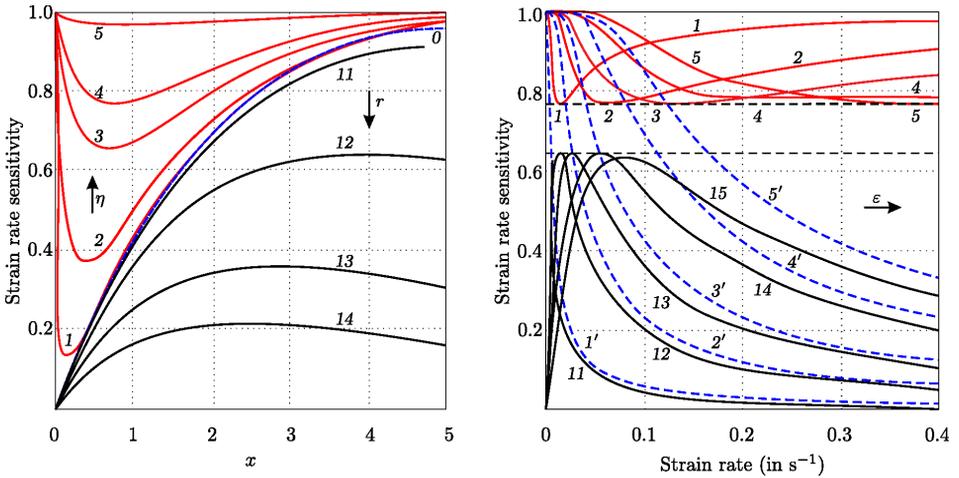


Рис. 6. Слева — КСЧ (23) пяти моделей СиМ-3 с $\mu = 1$ и $\eta/E = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 10$ (кривые 1–5), модели Максвелла с $\eta = 0$ (кривая 0) и модели РеМ-3 с $r/E = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5$ (кривые 11–14); справа — зависимость $m(a)$ при $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ для моделей СиМ-3 с $\eta/E = 1$ (кривые 1–5), Максвелла (штриховые кривые 1'–5') и РеМ-3 с $r/E = 0.1$ (кривые 11–15)

[Figure 6. Left — strain rate sensitivity curves $m(x)$ (23) generated by five singular three-parametric models SiM-3 with $\mu = 1$ and $\eta/E = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 10$ (red curves 1–5, $m(\infty) = 1$), by the Maxwell model ($\eta = 0$, the blue dashed curve 0) and by the regular three-parametric model (10) with $r/E = 0.01; 0.1; 0.3; 0.5$ (curves 11–14, $m(\infty) = 0$); right — graphs $m(a)$ for fixed $\varepsilon = 0.01; 0.05; 0.1; 0.2; 0.3$ generated by the model SiM-3 with $\eta/E = 1$ (red curves 1–5), by the Maxwell model (blue dashed curves 1'–5') and by the regular model (10) with $r/E = 0.1$ (curves 11–15)]

что среди линейных моделей (1) это свойство присуще только фрактальному элементу. Для ФР (6) линейное ОС (1) совпадает на одномерном пространстве процессов деформирования $\varepsilon = at$ с нелинейной моделью (3) при $N = \alpha$ и $M = 1 - N$ ($N + M$ — степень однородности модели (3)).

Фрактальная модель Фойгта (fractional Kelvin–Voigt model) [6–12] — параллельное соединение упругого элемента с фрактальным элементом Скотт–Блэра (6); эта модель описывается интегральным оператором (1) с неограниченной трехпараметрической ФР вида

$$R(t) = r + At^{-\alpha}, \quad A > 0, \quad r \geq 0, \quad \alpha \in (0; 1), \quad (25)$$

или дифференциальным уравнением с дробной производной $\sigma = r\varepsilon + \eta D^\alpha \varepsilon$, $\eta = A/(1 - \alpha)$. При $\alpha \in (0; 1)$ интеграл (7) для осреднения ФР (25) сходится, $P = r + A(1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}$ и семейства ДД и ФСЧ модели (25) задаются формулами

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon, a) &= r\varepsilon + A(1 - \alpha)^{-1}a^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}; \\ m(x) &= \frac{A\alpha(1 - \alpha)^{-1}x^{-\alpha}}{r + A(1 - \alpha)^{-1}x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \bar{r}(1 - \alpha)x^\alpha}, \quad x > 0, \quad \bar{r} := r/A \end{aligned} \quad (26)$$

(при $\varepsilon \rightarrow \infty$ асимптоты у ДД (26) нет, длительный модуль $\sigma'_\varepsilon(\infty, a) = r$). Очевидно, что $m(0) = \alpha$. Если $r > 0$, то $m(x)$ монотонно убывает при всех $x > 0$, $m(x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \rightarrow \infty$ и $m(\infty) = 0$. Если $r = 0$, то $m(x) \equiv \alpha$ — константа. При $\alpha \rightarrow 0+$ семейства ДД и ФСЧ (24) фрактального элемента сходятся

к ДД и ФСЧ упругого элемента с модулем $E = r + A$, а если наложить на параметры ФР связь $A/(1 - \alpha) = \eta$, где $\eta > 0$ — фиксированная постоянная (равная интегралу $R(t)$ по $[0; 1]$), то при $\alpha \rightarrow 1 - 0$ семейства ДД и ФСЧ (24) сходятся к ДД и ФСЧ ньютоновского вязкого элемента с $R = \eta\delta(t)$, $P(t) = \eta/t$ и $m(x) \equiv 1$. Соответственно, семейства ДД и ФСЧ фрактальной модели Фойгта (26) и (27) сходятся к ДД и ФСЧ (22) классической модели Фойгта (с сингулярной ФР).

Для параллельных соединений любого количества фрактальных моделей Фойгта (25) с произвольными тройками параметров $\alpha_i \in (0; 1)$, $A_i > 0$, $r_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, $N > 1$ (в частности, фрактальных элементов (6) с $r_i = 0$) $R = \Sigma R_i$, $P = \Sigma P_i$, а ФСЧ имеет вид

$$m(x) = \frac{\Sigma(P_i - R_i)}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma A_i \alpha_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i}}{\Sigma (r_i + A_i (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i})} \quad (28)$$

и всегда убывает по x (т.е. возрастает с ростом скорости a при любом фиксированном ε) [70], причем $m(0+) = \alpha$, $\alpha := \max \alpha_i$, и $m(+\infty) = 0$, если $r > 0$, где $r := \Sigma r_i$ и $m(+\infty) = \alpha_0$, $\alpha_0 := \min \alpha_i$, если $r = 0$ (все $r_i = 0$). Убывание ФСЧ (28) следует из формулы для $m'(x)$, приведенной к виду

$$m'(x)S(x)^2 = -r \sum_{i=1}^n A_i \alpha_i^2 (1 - \alpha_i)^{-1} x^{-\alpha_i - 1} - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n A_i A_j (\alpha_i - \alpha_j)^2 (1 - \alpha_i)^{-1} (1 - \alpha_j)^{-1} x^{-\alpha_i - \alpha_j - 1},$$

где $S(x)$ — знаменатель дроби (28) (преобразования опущены). Это влечет, в частности, отсутствие максимума у ПСЧ $m(a)$ и точки перегиба у кривых $\lg \sigma - \lg a$ и невозможность моделирования кривых $\lg \sigma - \lg a$ сигмоидальной формы (см. п. 1) с помощью таких линейных моделей с произвольным количеством параметров. Этот результат аналогичен доказанному в статье [69] возрастанию ПСЧ любых параллельных соединений *нелинейных* степенных вязких элементов вида (3) с $N = 0$: ПСЧ параллельного соединения любого числа моделей (3) всегда строго возрастает на полуоси $a > 0$ и потому не имеет точки максимума. Последний результат можно обобщить на параллельные соединения любого числа вязкопластических моделей Гершеля—Балкли $\sigma = \bar{\sigma} + K\dot{\varepsilon}^M$ (и моделей Шведова—Бингама $\sigma = \sigma_0 + K\dot{\varepsilon}$): оказывается, что учет в таких моделях пороговых напряжений $\bar{\sigma}_i > 0$ (роль которых в моделировании сверхпластичности может быть существенной [72]) не нарушает возрастания ПСЧ, а кривая скоростной чувствительности $\lg \sigma - \lg a$ не имеет точек перегиба (точнее, выпукла вниз) при произвольных $M \in (0; 1]$, $K > 0$ и $\bar{\sigma}_i \geq 0$. Отметим также, что ПСЧ (14) параллельного соединения (даже лишь двух) моделей Максвелла с разными временами релаксации (РеМ-2n) не обязан быть монотонной функцией и может иметь точку максимума и другие точки экстремума.

7. Кривые скоростной чувствительности четырехзвенных моделей РеМ-4 и СиМ-4. Сопоставление ФСЧ моделей Максвелла и Фойгта (рис. 4) приводит к гипотезе, что их гибриды (параллельное или последовательное соединения) могут обладать высоким ПСЧ (близким к единице) как при малых, так и при больших x и a . Вычислим их ФСЧ (14) и покажем, что они могут иметь более одного экстремума.

Рассмотрим сначала параллельное соединение моделей Максвелла и Фойгта (СиМ-4). При параллельном соединении моделей их ФР складываются:

$$R(t) = \eta\delta(t) + r + Ee^{-\mu t}, \quad \eta, \mu, E, r > 0, \quad (29)$$

их осреднения и ДД (8) — тоже:

$$P = r + \eta t^{-1} + E\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}),$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + a\eta + aE\mu^{-1}(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}).$$

ФР (29) отличается от ФР РеМ-3 (10) лишь слагаемым $\eta\delta(t)$ (осреднение P — слагаемым η/t): СиМ-4 можно получить параллельным соединением РеМ-3 с вязким элементом, и потому ДД СиМ-4 получаются сдвигом на $a\eta$ вдоль оси σ из ДД РеМ-3 (рис. 3) и $\sigma(0, a) = a\eta \neq 0$, как и у ДД модели Фойгта (рис. 3). В силу (14) ФСЧ СиМ-4 имеет вид

$$m(x) = 1 - \frac{rx + E\eta e^{-\mu x}}{rx + \eta + E\mu^{-1}(1 - e^{-\mu x})}, \quad x > 0. \quad (30)$$

Очевидно, $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$ (как и у модели Фойгта). Однако ФСЧ (30) может не быть монотонной и выпуклой на всем интервале $x > 0$: она может иметь две точки экстремума и две точки перегиба. При $r = 0$ модель (29) вырождается СиМ-3 и $m(\infty) = 1$ в силу (23).

На рис. 7 приведены КСЧ моделей Фойгта (22) ($\lambda = r/\eta$, $1/\lambda$ — время ретардации) с разными значениями $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1; 10$ (штриховые кривые $\theta'-\theta'$, кривая θ' для $\lambda = 0.001$ почти совпадает с прямой $m = 1$) и КСЧ (30) параллельных соединений этих моделей Фойгта и модели Максвелла (29) с $E = 1000$, $\mu = 1$ (кривые $\theta-\theta$). С ростом параметра λ КСЧ опускаются вниз. Любопытно, что каждая кривая $\theta-\theta$ проходит через точку пересечения КСЧ моделей Фойгта и КСЧ модели Максвелла (штрих-пунктирная кривая $11'$) $m = 1 - \mu x(e^{\mu x} - 1)^{-1}$, которые соединяются параллельно. Абсцисса x_* точки пересечения убывает с ростом λ . Как видим, присоединение модели Максвелла уменьшает ПСЧ каждой модели Фойгта при $x \in (0, x_*)$ и увеличивает его на интервале $x > x_*$ (при сохранении свойств $m(0) = 1$ и $m(\infty) = 0$). При $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1$ КСЧ имеют *два экстремума*; при увеличении λ они исчезают и КСЧ становится монотонно убывающей (см. кривые 3–6 с $\lambda = 0.3; 0.5; 1; 10$). У КСЧ с $\lambda = 0.3; 0.5$ (кривые 3, 4) еще сохраняются две точки перегиба, у КСЧ с $\lambda = 1; 10$ (кривые 5, 6) их уже нет. Кривая 35 — КСЧ модели РеМ-3 с $\mu = 1$, $r/E = 0.5$ (КСЧ 5 с рис. 4), получающейся соединением модели Максвелла с упругим элементом.

Для последовательного соединения моделей Максвелла и Фойгта («модель стандартного тела») их функции ползучести складываются и модель регулярна (РеМ-4). Она эквивалентна параллельному соединению двух моделей

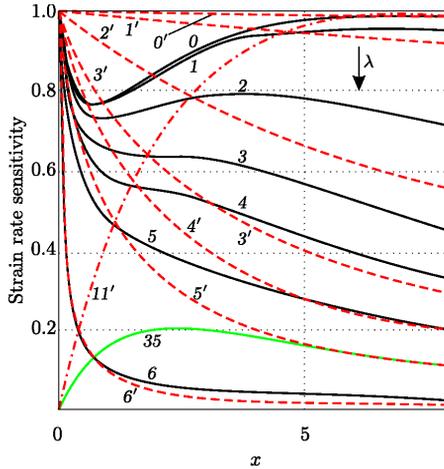


Рис. 7. КСЧ (30) семи моделей СиМ-4 и моделей Фойгта (22) с разными временами релардации $\tau = 1/\lambda = \eta/r$, $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1; 10$

[Figure 7. Strain rate sensitivity curves $m(x)$ (22) generated by seven Voigt models (SiM-2) with $\lambda = 0.001; 0.01; 0.1; 0.3; 0.5; 1; 10$ (red dashed curves $0'-6'$, $\lambda = r/\eta$, $1/\lambda$ is the retardation time) and curves $m(x)$ (30) generated by seven four-parametric singular models SiM-4 (29) with $\mu = 1$, $E = 1000$ and the same values of λ (black curves $0-6$). Every model SiM-4 is equivalent to parallel connection of the Voigt model with the same λ to the Maxwell model $R = E \exp(-\mu t)$ (with $\mu = 1$, $E = 1000$, see the curve $11'$) or to serial connection of two Voigt model and so SiM-4 is characterized by two retardation times. Equalities $m(0) = 1$ and $m(\infty) = 0$ are valid for all curves $m(x)$ generated by models SiM-4 and SiM-2 with $r > 0$. Curves $0-2$ have got two extremum points, curves $3-6$ are decreasing]

Максвелла с разными временами релаксации $\tau_i = 1/\mu_i$, и потому $R = R_1 + R_2$, где $R_i = E_i \exp(-\mu_i t)$, $\mu_i := E_i/\eta_i > 0$, $E_i > 0$, $P = P_1 + P_2$, $P_i(x) = = x^{-1} E_i \mu_i^{-1} [1 - \exp(-\mu_i x)]$ и

$$m(x) = 1 - x \left[\sum_{i=1}^n E_i \exp(-\mu_i x) \right] \left[\sum_{i=1}^n E_i \mu_i^{-1} [1 - \exp(-\mu_i x)] \right]^{-1} \quad (31)$$

с $n = 2$. Формула (31) верна для КСЧ любого числа моделей Максвелла, соединенных параллельно (РеМ-2n). Для любого n $m(\infty) = 1$ (так как $R(\infty) = 0$), а $m(0+) = 0$ (так как модель регулярна). Таким образом, КСЧ модели РеМ-2n при малых и больших x ведет себя так же, как КСЧ модели Максвелла с $E = \Sigma E_i$. Однако КСЧ (31) уже может не быть монотонной и выпуклой на всем интервале $x > 0$: она может иметь две точки экстремума и две точки перегиба при малых и при больших значениях отношения времен релаксации $q = \tau_2/\tau_1 = \mu_1/\mu_2$ (рис. 8).

На рис. 8 слева приведены КСЧ (31) нескольких моделей РеМ-4, т.е. параллельного соединения той же модели Максвелла с $E_1 = 1000$, $\mu_1 = 1$, что и на рис. 7 (ее КСЧ — штрих-пунктирная линия $11'$), с другой моделью Максвелла (кривые $1-5$). Параметры μ_2 и E_2 второй модели меняются с сохранением вязкости $E_2/\mu_2 = E_1/\mu_1 = \text{const}$, причем $E_2 < E_1$ и $\mu_2 < \mu_1 = 1$: $E_2 = 500; 100; 50; 10; 5$ и $q := \mu_1/\mu_2 = 2; 10; 20; 50; 100$ (стрелка на рисунке указывает направление смещения КСЧ с ростом μ_2 , т.е. с убыванием отношения времен релаксации $q = \tau_2/\tau_1$). При условии $E_2 < E_1$ все КСЧ (31) модели стандартного тела лежат ниже и правее КСЧ первой модели Макс-

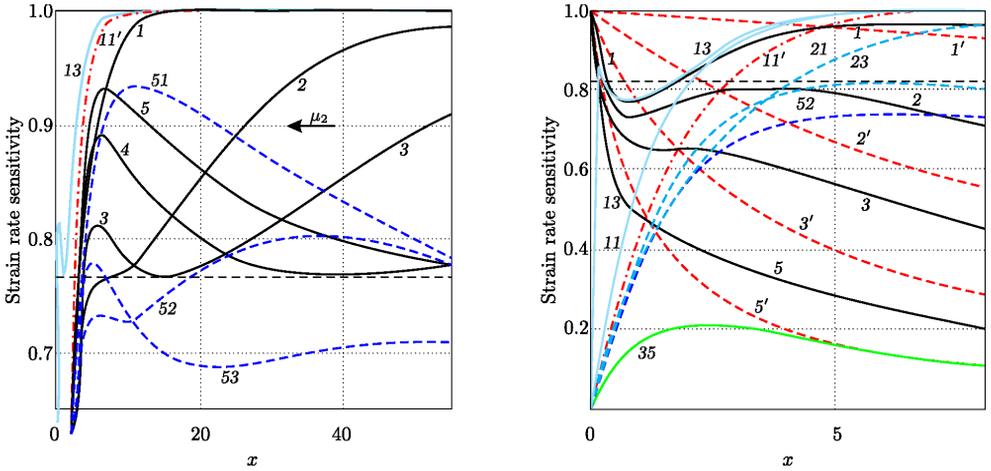


Рис. 8. Слева — КСЧ (31) моделей РеМ-4 (1–5): параллельных соединений модели Максвелла с $\mu_1 = 1$ (кривая 11') с другой моделью Максвелла с разными μ_2 ; кривые 51–53 — КСЧ (33) модели РеМ-5 (32) при $r/E_1 = 0.01$; справа — сопоставление КСЧ РеМ-4 с разными $q = \mu_1/\mu_2$ и СиМ-4 с разными λ

[Figure 8. *Left* — strain rate sensitivity curves (SSC) $m(x)$ (31) generated by five four-parametric regular models ReM-4 (it is governed by two relaxation times $\tau_i = 1/\mu_i$ and is equivalent to connection of the Voigt model to the Maxwell model $R = E \exp(-\mu t)$ in series or to parallel connection of two Maxwell models) with different ratio $q = \tau_2/\tau_1 = \mu_1/\mu_2$ of relaxation times. Namely, marks 1–5 refer to the graphs of $m(x)$ generated by parallel connection of the Maxwell model with $\mu_1 = 1$, $E_1 = 1000$ (see the dot-dashed red curve 11' in Fig. 7 and Fig. 8) and the Maxwell models with different parameters $E_2 < E_1$ and $\mu_2 < \mu_1 = 1$ varied so to preserve viscosity constant: $E_2/\mu_2 = E_1/\mu_1 = \text{const}$, $E_2 = 500; 100; 50; 10; 5$ and $q = 2; 10; 20; 50; 100$. Equalities $m(0) = 0$ and $m(\infty) = 1$ are valid for all curves $m(x)$ generated by models ReM-4 (since $R(\infty) = 0$). Curves 1 and 2 increase and curves 3–5 have got two extremum points (it is valid for all $q > q_*$). Condition $q > 1$ implies that curves $m(x)$ lies below the curve 11' of the Maxwell model. Curve 13 is produced by the model ReM-4 with $q = 1/20 < 1$ and lies higher than the curve 11'; it has got two extremum points (it is valid for all $q < q_0 < 0.1$). Marks 51–53 denote SSC (33) generated by five-parametric regular models ReM-5 (32) (i.e. parallel connection of spring and ReM-4) with $r/E_1 = 0.01$ and $q := \mu_1/\mu_2 = 2; 10; 20$. Curves 52, 53 have got three extremum points. *Right* — comparison of SSC (30) generated by singular models SiM-4 (29) with different λ (black curves 1–5 are the same as at Fig. 7) and SSC (31) generated by regular models ReM-4 with different q : blue curves 11, 13 — for $q = 1/2$ or $q = 1/20$ and dashed curves 21, 23 — for $q = 2$ or $q = 20$ (curves 21, 23 are the same curves 1, 3 shown at Fig. 8 (left)). Curves 11' and 52 are copied from Fig. 8 (left) and red curves 1', 2', 3', 5' are SSC produced by the Voigt model with $\lambda = 0.01; 0.1; 0.3; 1.0$ copied from Fig. 7 (curve numbers are preserved)]

велла. КСЧ при $q = 2; 10$ (линии 1 и 2) монотонны (при $q = 2$ еще нет и точек перегиба). При $q = 20$ монотонность КСЧ нарушается и появляются два экстремума. При дальнейшем увеличении $q > 20$ точка максимума движется вверх и вправо («рог» растет), а точка минимума — вправо, расстояние между точками экстремума увеличивается. Значения всех КСЧ в точках минимума одинаковы (и весьма велики). Все КСЧ имеют одинаковые начальные значения $m(+0) = 0$ и общую горизонтальную асимптоту $m(\infty) = 1$ — в том числе и КСЧ моделей с $q < 1$, лежащие выше и левее КСЧ модели Максвелла (см. КСЧ 13 для $q = 1/20$) и имеющие два экстремума при достаточно малом q (на рис. 8 справа лучше видны особенности поведения КСЧ при $\mu_2 > \mu_1$ и малых x).

Нетрудно привести пример КСЧ с двумя точками максимума. Достаточно присоединить параллельно к РеМ-4 упругий элемент, т.е. рассмотреть модель РеМ-5 с ФР

$$R(t) = r + E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}. \quad (32)$$

Она эквивалентна параллельному соединению двух моделей РеМ-3 с ФР (10). У нее $R(\infty) = \Sigma r_i \neq 0$ и потому $m(\infty) = 0$. ФСЧ моделей РеМ-(2n + 1) имеет вид

$$m(x) = 1 - x \left[\sum_{i=1}^n [r_i + E_i \exp(-\mu_i x)] \right] \times \left[\sum_{i=1}^n [r_i x + E_i \mu_i^{-1} (1 - \exp(-\mu_i x))] \right]^{-1}. \quad (33)$$

Кривые 51–53 на рис. 8 слева — КСЧ РеМ-5 при $r/E_1 = 0.01$ ($r = \Sigma r_i$, $n = 2$) и разных $q := \mu_1/\mu_2 = 2; 10; 20$ (т.е. $E_2 = 500; 100; 50 < E_1 = 1000$). Полезно сравнить их с КСЧ 1–3 исходных моделей РеМ-4, к которым добавляется упругий элемент с малым модулем r : ПСЧ понизился, форма КСЧ сильно изменилась. КСЧ моделей РеМ-5 с $q = 10$ и $q = 20$ имеют две точки максимума.

На рис. 8 справа сведены воедино для наглядности сопоставления КСЧ моделей РеМ-4 с разными μ_2 и СиМ-4 с разными λ , изображенные на рис. 7 и 8 слева. Штрих-пунктирная линия 11' — КСЧ все той же модели Максвелла с $\mu = \mu_1 = 1$, $E_1 = 1000$. Штриховые красные кривые 1', 2', 3', 5' — КСЧ моделей Фойгта с $\lambda = 0.01; 0.1; 0.3; 1.0$ (сохранена нумерация кривых рис. 7), кривые 1, 2, 3, 5 — КСЧ (30) параллельного соединения этих моделей Фойгта и модели Максвелла (СиМ-4) — см. кривые 1, 2, 3, 5 на рис. 7. КСЧ 1, 2 (при $\lambda = 0.01$ и $\lambda = 0.1$) имеют два экстремума; при увеличении λ они исчезают, и КСЧ становится монотонно убывающей (см. КСЧ 3, 5). У кривой 3 ($\lambda = 0.3$) еще сохраняются две точки перегиба, у кривой 5 ($\lambda = 1.0$) их уже нет. Голубые кривые — КСЧ четырех моделей РеМ-4: параллельных соединений указанной модели Максвелла с другой моделью Максвелла, параметры μ_2 и E_2 которой меняются так, что сохраняется та же вязкость $E_2 \mu_2^{-1} = E_1 \mu_1^{-1} = \text{const}$, что и у первой модели (как на рис. 8 слева): $\mu_2 = 2; 20 > \mu_1$ ($q = 1/2$ и $q = 1/20$ — кривые 11, 13) и $\mu_2 = 1/2; 1/20 < \mu_1$ (т.е. $q = 2$ и $q = 20$ (кривые 21 и 23)). Последние две кривые совпадают с КСЧ 1 и 3 с рис. 8 слева, эти две КСЧ намечены штриховыми линиями, они лежат по другую сторону от КСЧ 11' первой модели Максвелла. При $\mu_2 = 20$ и $\mu_2 = 1/20$ монотонность КСЧ нарушается и появляются два экстремума (при $\mu_2 = 10$ и $\mu_2 = 0.1$ КСЧ еще монотонны). При дальнейшем уменьшении $q < 1/20$ КСЧ меняется лишь в малой окрестности точки $x = 0$: точка максимума движется вверх и влево к точке (0; 1), левый склон КСЧ приближается к вертикали, а правый склон визуально не меняется вне малой окрестности точки $x = 0$).

8. Заключение. В работе аналитически исследована скоростная чувствительность семейства диаграмм деформирования (8), порождаемых физически линейным определяющим соотношением вязкоупругости (1) с произвольной функцией релаксации в одноосных испытаниях с постоянными скоростями деформации (их свойства собраны в теореме 1). Выведено общее

выражение (14) для показателя скоростной чувствительности (ПСЧ) $m(a, \varepsilon)$, определяемого формулой (2), исследованы его общие качественные свойства и их зависимость от деформации, скорости деформации a и характеристик функций релаксации. Установлено, что в рамках линейной теории вязкоупругости ПСЧ зависит не от двух, а от одного аргумента $x := \varepsilon/a$ (формула (14)), выражается через отношение касательного модуля к секущему (см. (20)) и может быть вычислен по одной диаграмме деформирования с произвольной скоростью a . Доказано, что значения функции скоростной чувствительности (ФСЧ) $m(x)$ всегда лежат в интервале от нуля до единицы и что по заданной ФСЧ можно однозначно восстановить функцию релаксации ОС (1) и таким образом построить модель с заданной формой КСЧ (зарегистрированной в испытаниях материала). Основные обнаруженные свойства ПСЧ собраны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция релаксации $R(t)$ в ОС (1) — положительна, дифференцируема, убывает и выпукла вниз на интервале $(0; \infty)$. Тогда ПСЧ выражается формулой (14), зависит не от двух аргументов, а лишь от их отношения $x := \varepsilon/a$, и функция скоростной чувствительности $m(x)$ обладает следующими свойствами.

- 1) Функция $m(x)$ непрерывна при $x > 0$ и $0 < m(x) < 1$ при $x > 0$ (т.е. ОС (1) описывает только псевдопластические среды).
- 2) Если $R(t)$ непрерывна справа в точке $t = 0$ (т.е. модель регулярна), то $m(0+) = 0$; если модель сингулярна, то $m(0+) = 1$, а если $R(t) \sim x^{-\alpha}$ при $t \rightarrow 0+$, $\alpha \in (0; 1)$, то $m(0+) = \alpha$ (в частности, для всех параллельных соединений фрактальных моделей Фойгта (25)).
- 3) Если $R(\infty) \neq 0$, то $m(\infty) = 0$; если $R(t) \sim t^{-p}$ при $t \rightarrow \infty$, $p > 0$, то $m(\infty) = \min\{p, 1\}$ (в частности, для всех параллельных соединений фрактальных элементов (6) и их сдвигов вдоль оси времени); если $R(t) = O(t^{-(1+h)})$ при $t \rightarrow \infty$, $h > 0$, то $m(\infty) = 1$ (в частности, для всех параллельных соединений моделей Максвелла).
- 4) ФСЧ $m(x)$ может возрастать на всей полуоси $x > 0$, может убывать, может иметь точку максимума или минимума или несколько точек экстремума; $m(x)$ постоянна только для фрактальных элементов (для ФР $R = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$).
- 5) Если $R(t)$ непрерывна справа в точке $t = 0$ и $R(\infty) \neq 0$, то $m(0) = 0$, $m(\infty) = 0$ и ФСЧ $m(x)$ имеет хотя бы один локальный максимум.
- 6) ФСЧ выражается формулой (20) через отношение касательного модуля к секущему, определяемых по одной диаграмме деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon, a)$ с произвольной скоростью.
- 7) $R(t)$ однозначно определяется по заданной ФСЧ и начальному значению $R(t_0) = R_0 > 0$ по формуле (16); критерии убывания функции релаксации (16) и ее выпуклости вниз — неравенства (18) и (19) для ФСЧ.
- 8) Для функции релаксации верна двусторонняя оценка (17) через ФСЧ.

Из п. 5 теоремы 2 следует, что зависимость ПСЧ от скорости деформации $m(a)$ имеет локальный максимум (для любой фиксированной деформации ε), т.е. линейное ОС (1) способно, как ни странно, моделировать «сигмоидальную» форму зависимости напряжения от скорости деформации (в осях

$\lg \sigma - \lg a$) и очень высокую скоростную чувствительность с показателем $m \in (0.5; 1)$ (см. ш. 4–6), характерные для режима сверхпластичности материалов, причем без каких-либо обременительных ограничений на функцию релаксации (эти требования выполняются даже для классической модели Кельвина–Пойтинга (10)), получаемой присоединением упругого элемента к модели Максвелла). Этот результат выявляет важность учета упругих деформаций (которыми традиционно пренебрегают в моделировании сверхпластичности) для описания максимума ПСЧ и указывает на возможность использования линейных интегральных операторов вида (1) как полезного инструмента («элемента») при построении ОС сверхпластичности, связывающих истории тензоров напряжений и деформаций (конечных, больших), температуры и эволюции параметров структуры материала.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–08–01146_a).

Библиографический список

1. Хохлов А. В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2015. Т. 77, № 1. С. 60–74. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74>.
2. Хохлов А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 2. С. 326–361. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1533>.
3. Хохлов А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 3. С. 81–104. <https://doi.org/10.7868/S0572329918030108>.
4. Хохлов А. В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента поперечной деформации в рамках линейной теории вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 4. С. 671–704. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1710>.
5. Хохлов А. В. Индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости по данным испытаний материала на ползучесть при растяжении с наложением гидростатического давления // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2019. Т. 25, № 2. С. 259–280. https://doi.org/10.33113/mkmc.ras.2019.25.02.259_280.09.
6. Scott-Blair G. W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology // *Nature*, 1945. vol. 155. pp. 171–172. <https://doi.org/10.1038/155171c0>.
7. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 1. С. 53–62.
8. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12, № 3. С. 251–260.
9. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.

10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp.
11. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2011. vol. 193, no. 1. pp. 133–160. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1>.
12. Огородников Е. Н., Радченко В.П., Унгарова Л. Г. Математическое моделирование наследственно упругого деформируемого тела на основе структурных моделей и аппарата дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 167–194. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1456>.
13. Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics*. London, New York: McGraw-Hill, 1974. 289 pp.
14. Pearson C. E. The viscous properties of extruded eutectic alloys of Pb-Sn and Bi-Sn // *J. Inst. Metals*, 1934. vol. 54. pp. 111–123.
15. Бочвар А. А., Свицерская З. А. Явление сверхпластичности в сплавах цинка с алюминием // *Изв. АН СССР. ОТН*, 1945. № 9. С. 821–824.
16. Zehr S. W., Backofen W. A. Superplasticity in Lead-Tin alloys // *Trans. ASM*, 1968. vol. 61. pp. 300–313.
17. Hedworth J., Stowell M. J. The measurement of strain rate sensitivity in superplastic alloys // *J. Mater. Sci.*, 1971. vol. 6. pp. 1061–1069. <https://doi.org/10.1007/BF00980604>.
18. Грабский М. В. *Структурная сверхпластичность металлов*. М.: Металлургия, 1975. 272 с.
19. Смирнов О. М. *Обработка металлов давлением в состоянии сверхпластичности*. М.: Машиностроение, 1979. 184 с.
20. Padmanabhan K. A., Davies J. J. *Superplasticity*. Berlin: Springer-Verlag, 1980. xiv+314 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81456-3>.
21. Новиков И. И., Портной В. К. *Сверхпластичность сплавов с ультрамелким зерном*. М.: Металлургия, 1981. 168 с.
22. Кайбышев О. А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 264 с.
23. Сегал В. М., Резников В. И., Копылов В. И., Павлик Д.А. *Процессы пластического структурообразования металлов*. Минск: Наука и техника, 1994. 232 с.
24. Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D. *Superplasticity in Metals and Ceramics* / Cambridge Solid State Science Series. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. xiv+287 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511525230>.
25. Васин Р. А., Еникеев Ф. У. *Введение в механику сверхпластичности*. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
26. Padmanabhan K. A., Vasin R. A., Enikeev F. U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. xix+363 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04367-7>.
27. Чумаченко Е. Н., Смирнов О. М., Цепин М. А. *Сверхпластичность: Материалы, теория, технологии*. М.: КомКнига, 2005. 320 с.
28. Segal V. M., Beyerlein I. J., Tome C. N., et al. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York: Nova Science Publ., 2010. 542 pp.
29. Langdon T. G. Forty-five years of superplastic research: Recent developments and future prospects // *Mater. Sci. Forum*, 2016. vol. 838–839. pp. 3–12. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3>.
30. Шарифуллина Э. Р., Швейкин А. И., Трусов П. В. Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 3. С. 103–127. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.11>.

31. Wang G. C., Fu M. W., Dong H. B., et al. Superplasticity deformation of Ti-6Al-2Zr-1Mo-1V induced by the cyclic change of strain-rate and MaxmSPD // *J. Alloys Compd.*, 2010. vol. 491, no. 1–2. pp. 213–217. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2009.11.046>.
32. Sotoudeh K., Bate P. S. Diffusion creep and superplasticity in aluminium alloys // *Acta Mater.*, 2010. vol. 58, no. 6. pp. 1909–1920. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.11.034>.
33. Sun Q. J., Wang G. C. Microstructure and superplasticity of TA15 alloy // *Mater. Sci. Eng. A.*, 2014. vol. 606. pp. 401–408. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.03.117>.
34. Blandin J. J. Superplasticity of metallic alloys: Some current findings and open questions // *Mater. Sci. Forum*, 2016. vol. 838–839. pp. 13–22. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.13>.
35. Mikhaylovskaya A. V., Mosleh A. O., Kotov A. D., et al. Superplastic deformation behaviour and microstructure evolution of near- α Ti-Al-Mn alloy // *Mater. Sci. Eng. A*, 2017. vol. 708. pp. 469–477. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.10.017>.
36. Mosleh A. O., Mikhaylovskaya A. V., Kotov A. D., et al. Experimental investigation of the effect of temperature and strain rate on the superplastic deformation behavior of Ti-based alloys in the ($\alpha + \beta$) temperature field // *Metals*, 2018. vol. 8, no. 10, 819. <https://doi.org/10.3390/met8100819>.
37. Сегал В. М., Резников В. И., Дробышевский А. Е., Копылов В. И. Пластическая обработка металлов простым сдвигом // *Изв. АН СССР. Металлы*, 1981. №1. С. 115–123.
38. Громов Н. П. *Теория обработки металлов давлением*. М.: Металлургия, 1967. 340 с.
39. Кайбышев О. А., Утяшев Ф. З. *Сверхпластичность, измельчение структуры и обработка труднодеформируемых сплавов*. М.: Наука, 2002. 438 с.
40. Валиев Р. З., Александров И. В. *Объемные наноструктурные металлические материалы: получение, структура и свойства*. М.: Академкнига, 2007. 398 с.
41. Ефимов О. Ю., Громов В. Е., Иванов Ю. Ф. *Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением*. Новокузнецк: Интер-Кузбасс, 2012. 345 с.
42. Faraji G., Kim H. S., Kashi H. T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Amsterdam: Elsevier, 2018. 324 pp. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813518-1.00010-2>.
43. Валиев Р. З., Исламгалиев Р. К. Структура и механическое поведение ультрамелкозернистых металлов и сплавов, подвергнутых интенсивной пластической деформации // *Физ. метал. металловед.*, 1998. Т. 85, №3. С. 161–177.
44. Глезер А. М., Метлов Л. С. Мегапластическая деформация твердых тел // *Физика и техника высоких давлений*, 2008. Т. 18, №4. С. 21–35.
45. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов давлением*. М.: Машиностроение, 1986. 221 с.
46. Криштал М. М. Прерывистая текучесть как причина аномалий скоростной и температурной зависимостей сопротивления деформированию // *Физ. метал. металловед.*, 1998. Т. 85, №1. С. 127–139.
47. Баженов С. Л., Ковальчук Е. П. Автоколебательное пластическое деформирование полимеров // *ДАН*, 2007. Т. 417, №3. С. 353–356.
48. Рудской А. М., Рудаев Я. И. *Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов*. СПб.: Наука, 2009. 218 с.
49. Yu D., Chen X., Yu W., Chen G. Thermo-viscoplastic modeling incorporating dynamic strain aging effect on the uniaxial behavior of Z2CND18.12N stainless steel // *Int. J. Plast.*, 2012. vol. 37. pp. 119–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.05.001>.
50. Трусов П. В., Чечулина Е. А. Прерывистая текучесть: физические механизмы, экспериментальные данные, макрофеноменологические модели // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2014. №3. С. 186–232. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
51. Yang H. K., Zhang Z. J., Tian Y. Z., Zhang Z. F. Negative to positive transition of strain rate sensitivity in Fe-22Mn-0.6C-x(Al) twinning-induced plasticity steels // *Mater. Sci. Eng. A*, 2017. vol. 690, no. 6. pp. 146–157. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.02.014>.

52. Peng J., Peng J., Li K.-S., et al. Temperature-dependent SRS behavior of 316L and its constitutive model // *Acta Metall. Sin. (Engl. Lett.)*, 2018. vol. 31. 234–244. <https://doi.org/10.1007/s40195-017-0697-x>.
53. Васин Р. А., Еникеев Ф. У., Круглов А. А., Сафиуллин Р. В. Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов // *Изв. РАН. МТТ*, 2003. № 2. С. 111–124.
54. Khokhlov A. V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions // *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016. vol. 71, no. 6. pp. 132–136. <https://doi.org/10.3103/S0027133016060029>.
55. Khokhlov A. V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves // *Mech. Compos. Mater.*, 2019. vol. 55, no. 2. pp. 195–210. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09809-w>.
56. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I. Determination of the strain rate sensitivity of a superplastic material at constant load test // *Mater. Sci. Eng. A*, 1997. vol. 224, no. 1–2. pp. 131–135. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(96\)10555-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(96)10555-4).
57. Бхатгачария С. С., Быля О. И., Васин Р. А., Подманабхан К. А. Механическое поведение титанового сплава с неподготовленной структурой при скачкообразном изменении скорости деформации в режиме сверхпластичности // *Изв. РАН. МТТ*, 2009. № 6. С. 169–177.
58. Соснин О. В., Горев Б. В., Любашевская И. В. Высокотемпературная ползучесть и сверхпластичность материалов // *ПМТФ*, 1997. Т. 38, № 2. С. 140–145.
59. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I., Munirova O. S. Mechanical modelling of the universal superplastic curve // *J. Mater. Sci.*, 2000. vol. 35, no. 10. pp. 2455–2466. <https://doi.org/10.1023/A:1004761501240>.
60. Bylya O. I., Sarangi M. K., Ovchinnikova N. V., et al. FEM simulation of microstructure refinement during severe deformation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2014. vol. 63, 012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/63/1/012033>.
61. Alabort E., Putman D., Reed R. C. Superplasticity in Ti-6Al-4V: Characterisation, modelling and applications // *Acta Mater.*, 2015. vol. 95. pp. 428–442. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.04.056>.
62. Bylya O. I., Vasin R. A., Blackwell P. L. The mechanics of superplastic forming — How to incorporate and model superplastic and superplastic-like conditions // *Mater. Sci. Forum*, 2016. vol. 838. pp. 468–476. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.468>.
63. Lin Y. C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working // *Mater. Design*, 2011. vol. 32, no. 4. pp. 1733–1759. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.11.048>.
64. Cheng Y. Q., Zhang H., Chen Z. H., Xian K. F. Flow stress equation of AZ31 magnesium alloy sheet during warm tensile deformation // *J. Mater. Process. Technol.*, 2008. vol. 208, no. 1–3. pp. 29–34. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.12.095>.
65. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
66. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
67. Никитенко А. Ф., Соснин О. В., Торшенов Н. Г., Шокало И. К. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // *ПМТФ*, 1971. Т. 12, № 2. С. 118–122.
68. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling // *Mater. Trans.*, 2014. vol. 55, no. 2. pp. 275–284. <https://doi.org/10.2320/matertrans.M2013370>.
69. Белякова Т. А., Гончаров И. А., Хохлов А. В. О невозможности моделирования сигмоидальных кривых сверхпластичности параллельным или последовательным соединениями степенных вязких элементов // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2019. Т. 25, № 3. С. 299–315. https://doi.org/10.33113/mknc.ras.2019.25.03.299_315.01.

70. Хохлов А. В. Монотонное возрастание показателя скоростной чувствительности любых параллельных соединений линейных моделей вязкоупругости со степенными функциями релаксации // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ.*, 2019. Т. 11, № 3. С. 56–67. <https://doi.org/10.14529/mmph190307>.
71. Хохлов А. В. Характеристика скоростной чувствительности диаграмм деформирования в линейной теории вязкоупругости и построение по ней функции релаксации // *Проблемы прочности и пластичности*, 2019. Т. 81, № 4. С. 521–536. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-521-536>.
72. Murty G. S., Banerjee S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials // *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994. vol. 31, no. 6. pp. 707–712. [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(94\)90214-3](https://doi.org/10.1016/0956-716X(94)90214-3).

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 74D05, 74A20

Properties of the strain rate sensitivity function produced by the linear viscoelasticity theory and existence of its maximum with respect to strain and strain rate

© A. V. Khokhlov

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

Strain rate sensitivity of stress-strain curves family generated by the Boltzmann–Volterra linear viscoelasticity constitutive equation (with an arbitrary relaxation modulus) under uni-axial loadings at constant strain rates is studied analytically as the function of strain and strain rate. The general expression for strain rate sensitivity index is derived and analyzed assuming relaxation modulus being arbitrary. Dependence of the strain rate sensitivity index on strain and strain rate and on relaxation modulus qualitative characteristics is examined, conditions for its monotonicity and for existence of extrema, the lower and the upper bounds and the limit values of the strain rate sensitivity as strain rate tends to zero or to infinity are studied. It is found out that (within the framework of the linear viscoelasticity) the strain rate sensitivity index which is, generally speaking, the function of two independent variables (namely strain and strain rate), depends on the single argument only that is the ratio of strain to strain rate. So defined function of one real variable is termed the strain rate sensitivity function and it may be regarded as a material function. The explicit integral expression (and the two-sided bound) for relaxation modulus in terms of strain rate sensitivity function is derived which enables one to restore relaxation modulus assuming a strain rate sensitivity function is given. The strain rate sensitivity function is represented as a linear function of ratio of tangent modulus to secant modulus of a stress-strain curve at any fixed constant strain rate and can be evaluated in such a way using experimental data. It is proved that the strain rate sensitivity value is confined in the interval from zero to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) whatever strain and strain rate magnitudes. It is found out that the linear theory can reproduce increasing or decreasing or non-monotone dependences of strain rate sensitivity on strain rate (for any fixed strain) and it can provide existence of local maximum or minimum or several extrema as well without any complex restrictions on the relaxation modulus. General properties and peculiarities of the theoretic strain rate sensitivity function are illustrated by the examination of the classical regular and singular

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Khokhlov A. V. Properties of the strain rate sensitivity function produced by the linear viscoelasticity theory and existence of its maximum with respect to strain and strain rate, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 469–505. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1726> (In Russian).

Author's Details:

rheological models (consisting of two, three or four spring and dashpot elements) and fractional models. Namely, the Maxwell, Kelvin–Voigt, standard linear solid, Zener, anti-Zener, Burgers, anti-Burgers, Scott–Blair, fractional Kelvin–Voigt models and their parallel connections are considered.

The carried out analysis let us to conclude that the linear viscoelasticity theory (supplied with common relaxation function which are non-exotic from any point of view) is able to produce high values of strain rate sensitivity index close to unity (the upper bound of strain rate sensitivity index for pseudoplastic media) and to provide existence of the strain rate sensitivity index maximum with respect to strain rate. Thus, it is able to simulate qualitatively existence of a flexure point on log-log graph of stress dependence on strain rate and its sigmoid shape which is one of the most distinctive features of superplastic deformation regime observed in numerous materials tests.

Keywords: viscoelasticity, stress-strain curves at constant strain rates, strain hardening, strain rate sensitivity index (function), pseudoplastic media, fractional models, fractional differential equations, superplasticity, sigmoid curve, titanium and aluminum alloys, ceramics.

Received: 25th July, 2019 / Revised: 23rd June, 2020 /

Accepted: 24th August, 2020 / First online: 31st August, 2020

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author’s Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17–08–01146_a).

References

1. Khokhlov A. V. General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from linear theory of viscoelasticity, *Probl. Prochn. Plast.* [Problems of Strength and Plasticity], 2015, vol. 77, no. 1, pp. 60–74 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-1-60-74>.
2. Khokhlov A. V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326–361 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1533>.
3. Khokhlov A. V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 3, pp. 307–328. <https://doi.org/10.3103/S0025654418070105>.
4. Khokhlov A. V. Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson’s ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 671–704 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1710>.

5. Khokhlov A. V. Applicability indicators of the linear viscoelasticity theory using creep curves under tensile load combined with constant hydrostatic pressure, *Mekh. Komp. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 259–280 (In Russian). https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.02.259_280.09.
6. Scott-Blair G. W., Caffyn J. Significance of power-law relations in rheology, *Nature*, 1945, vol. 155, pp. 171–172. <https://doi.org/10.1038/155171c0>.
7. Rabotnov Yu. N. Equilibrium of an elastic medium with after-effect, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 684–696. <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0193-1>.
8. Gerasimov A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to internal friction problem, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 251–260 (In Russian).
9. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp.
11. Mainardi F., Spada G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology, *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2011, vol. 193, no. 1, pp. 133–160. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2011-01387-1>.
12. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 167–194 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1456>.
13. Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics*. London, New York, McGraw-Hill, 1974, 289 pp.
14. Pearson C. E. The viscous properties of extruded eutectic alloys of Pb-Sn and Bi-Sn, *J. Inst. Metals*, 1934, vol. 54, pp. 111–123.
15. Bochvar A. A., Sviderskaya Z. A. The phenomenon of superplasticity in alloys of zinc with aluminum, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdel. Tekh. Nauk*, 1945, no. 9, pp. 821–824 (In Russian).
16. Zehr S. W., Backofen W. A. Superplasticity in Lead-Tin alloys, *Trans. ASM*, 1968, vol. 61, pp. 300–313.
17. Hedworth J., Stowell M. J. The measurement of strain rate sensitivity in superplastic alloys, *J. Mater. Sci.*, 1971, vol. 6, pp. 1061–1069. <https://doi.org/10.1007/BF00980604>.
18. Grabski M. V. *Strukturnaia sverkhplastichnost' metallov* [Structural Superplasticity of Metals]. Moscow, Metallurgiiia, 1975, 272 pp. (In Russian)
19. Smirnov O. M. *Obrabotka metallov davleniem v sostoianii sverkhplastichnosti* [Pressure Treatment of Metals in the State of Superplasticity]. Moscow, Mashinostroenie, 1979, 184 pp. (In Russian)
20. Padmanabhan K. A., Davies J. J. *Superplasticity*. Berlin, Springer-Verlag, 1980, xiv+314 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81456-3>.
21. Novikov I. I., Portnoi V. K. *Sverkhplastichnost' splavov s ul'tramelkim zernom* [Superplasticity of Alloys with Ultrafine Grain]. Moscow, Metallurgiiia, 1981, 168 pp. (In Russian)
22. Kaibyshev O. A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* [Superplasticity of Industrial Alloys]. Moscow, Metallurgiiia, 1984, 264 pp. (In Russian)
23. Segal V. M., Reznikov V. I., Kopylov V. I., Pavlik D.A. *Protsessy plasticheskogo strukturoobrazovaniia metallov* [Plastic Structure Formation in Metals]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1994, 232 pp. (In Russian)
24. Nieh T. G., Wadsworth J., Sherby O. D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*, Cambridge Solid State Science Series. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, xiv+287 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511525230>.

25. Vasin R. A., Enikeev F. U. *Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti* [Introduction to the Superplasticity Mechanics]. Ufa, Gilem, 1998, 280 pp. (In Russian)
26. Padmanabhan K. A., Vasin R. A., Enikeev F. U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, xix+363 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04367-7>.
27. Chumachenko E. N., Smirnov O. M., Tsepina M. A. *Sverkhplastichnost': Materialy, teoriia, tekhnologii* [Superplasticity: Materials, Theory, Technology]. Moscow, KomKniga, 2005, 320 pp. (In Russian)
28. Segal V. M., Beyerlein I. J., Tome C. N., et al. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York, Nova Science Publ., 2010, 542 pp.
29. Langdon T. G. Forty-five years of superplastic research: Recent developments and future prospects, *Mater. Sci. Forum*, 2016, vol. 838–839, pp. 3–12. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.3>.
30. Sharifullina E. R., Shveikin A. I., Trusov P. V. Review of experimental studies on structural superplasticity: Internal structure evolution of material and deformation mechanisms, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 103–127 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.11>.
31. Wang G. C., Fu M. W., Dong H. B., et al. Superplasticity deformation of Ti-6Al-2Zr-1Mo-1V induced by the cyclic change of strain-rate and MaxmSPD, *J. Alloys Compd.*, 2010, vol. 491, no. 1–2, pp. 213–217. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2009.11.046>.
32. Sotoudeh K., Bate P. S. Diffusion creep and superplasticity in aluminium alloys, *Acta Mater.*, 2010, vol. 58, no. 6, pp. 1909–1920. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.11.034>.
33. Sun Q. J., Wang G. C. Microstructure and superplasticity of TA15 alloy, *Mater. Sci. Eng. A.*, 2014, vol. 606, pp. 401–408. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.03.117>.
34. Blandin J. J. Superplasticity of metallic alloys: Some current findings and open questions, *Mater. Sci. Forum*, 2016, vol. 838–839, pp. 13–22. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.13>.
35. Mikhaylovskaya A. V., Mosleh A. O., Kotov A. D., et al. Superplastic deformation behaviour and microstructure evolution of near- α -Ti-Al-Mn alloy, *Mater. Sci. Eng. A*, 2017, vol. 708, pp. 469–477. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.10.017>.
36. Mosleh A. O., Mikhaylovskaya A. V., Kotov A. D., et al. Experimental investigation of the effect of temperature and strain rate on the superplastic deformation behavior of Ti-based alloys in the ($\alpha + \beta$) temperature field, *Metals*, 2018, vol. 8, no. 10, 819. <https://doi.org/10.3390/met8100819>.
37. Segal V. M., Reznikov V. I., Dobryshevskiy A. E., Kopylov V. I. Plastic working of metals by simple shear, *Russian Metallurgy (Metally)*, 1981, vol. 1, no. 1, pp. 99–105.
38. Gromov N. P. *Teoriia obrabotki metallov davleniem* [Theory of Metal Forming]. Moscow, Metallurgiya, 1967, 340 pp. (In Russian)
39. Kaibyshev O. A., Utyashev F. Z. *Sverkhplastichnost', izmel'chenie struktury i obrabotka trudnodeformiruemyykh splavov* [Superplasticity, Structure Refinement and Processing of Hardly-Deformed Alloys]. Moscow, Nauka, 2002, 438 pp. (In Russian)
40. Valiev R. Z., Aleksandrov I. V. *Ob"emnye nanostrukturnye metallicheskie materialy: poluchenie, struktura i svoystva* [Bulk Nanostructured Metallic Materials: Fabrication, Structure and Properties]. Moscow, Akademkniga, 2007, 398 pp. (In Russian)
41. Efimov O. Yu., Gromov V. E., Ivanov Yu. F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoystv staley i splavov v uprochniaiyushchikh tekhnologiakh obrabotki davleniem* [Formation of the Structure, Phase Composition and Properties of Steels and Alloys in Hardening Technologies of Pressure Treatment]. Novokuznetsk, Inter-Kuzbass, 2012, 345 pp. (In Russian)
42. Faraji G., Kim H. S., Kashi H. T. *Severe Plastic Deformation: Methods, Processing and Properties*. Amsterdam, Elsevier, 2018, 324 pp. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-813518-1.00010-2>.
43. Valiev R. Z., Islamgaliev R. K. Structure and mechanical behavior of ultrafine-grained metals and alloys subjected to severe plastic deformation, *Fiz. Metal. Metaloved.*, 1998, vol. 85, no. 3, pp. 161–177 (In Russian).

44. Glezer A. M., Metlov L. S. Megaplastic deformation of solids, *Fiz. Tekh. Vys. Davl.*, 2008, vol. 18, no. 4, pp. 21–35 (In Russian).
45. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov davleniem* [Creep theories in metal forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 221 pp. (In Russian)
46. Krishtal M. M. Discontinuous fluidity as the reason for anomalies of high-speed and temperature dependences of deformation resistance, *Fiz. Metal. Metaloved.*, 1998, vol. 85, no. 1, pp. 127–139 (In Russian).
47. Bazhenov S. L., Koval'chuk E. P. Self-oscillating plastic deformation of polymers, *Dokl. Phys. Chem.*, 2007, vol. 417, no. 1, pp. 308–310. <https://doi.org/10.1134/S001250160711005X>.
48. Rudskoy A. M., Rudaev Ya. I. *Mekhanika dinamicheskoi sverkhplastichnosti aluminievyykh splavov* [Mechanics of Dynamic Superplasticity of Aluminum Alloys]. St. Petersburg, Nauka, 2009, 218 pp. (In Russian)
49. Yu D., Chen X., Yu W., Chen G. Thermo-viscoplastic modeling incorporating dynamic strain aging effect on the uniaxial behavior of Z2CND18.12N stainless steel, *Int. J. Plast.*, 2012, vol. 37, pp. 119–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.05.001>.
50. Trusov P. V., Chechulina E. A. Serrated yielding: physical mechanisms, experimental dates, macro-phenomenological models, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 3, pp. 185–231 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2014.3.10>.
51. Yang H. K., Zhang Z. J., Tian Y. Z., Zhang Z. F. Negative to positive transition of strain rate sensitivity in Fe-22Mn-0.6C-x(Al) twinning-induced plasticity steels, *Mater. Sci. Eng. A*, 2017, vol. 690, no. 6, pp. 146–157. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2017.02.014>.
52. Peng J., Peng J., Li K.-S., et al. Temperature-dependent SRS behavior of 316L and its constitutive model, *Acta Metall. Sin. (Engl. Lett.)*, 2018, vol. 31, 234–244. <https://doi.org/10.1007/s40195-017-0697-x>.
53. Vasin R. A., Enikeev F. U., Kruglov A. A., Safullin R. V. On the identification of constitutive relations by the results of technological experiments, *Mech. Solids*, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 90–100.
54. Khokhlov A. V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 6, pp. 132–136. <https://doi.org/10.3103/S0027133016060029>.
55. Khokhlov A. V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves, *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 195–210. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09809-w>.
56. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I. Determination of the strain rate sensitivity of a superplastic material at constant load test, *Mater. Sci. Eng. A*, 1997, vol. 224, no. 1–2, pp. 131–135. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(96\)10555-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(96)10555-4).
57. Bkhattacharya S. S., Bylya O. I., Vasin R. A., Padmanabhan K. A. Mechanical behavior of titanium alloy Ti-6Al-4V with unprepared microstructure under jumpwise variations of the strain rate in the superplastic state, *Mech. Solids*, 2009, vol. 44, no. 6, pp. 951–958. <https://doi.org/10.3103/S0025654409060120>.
58. Sosnin O. V., Gorev B. V., Lyubashevskaya I. V. High-temperature creep and superplasticity of materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1997, vol. 38, no. 2, pp. 293–297. <https://doi.org/10.1007/BF02467915>.
59. Vasin R. A., Enikeev F. U., Mazurski M. I., Munirova O. S. Mechanical modelling of the universal superplastic curve, *J. Mater. Sci.*, 2000, vol. 35, no. 10, pp. 2455–2466. <https://doi.org/10.1023/A:1004761501240>.
60. Bylya O. I., Sarangi M. K., Ovchinnikova N. V., et al. FEM simulation of microstructure refinement during severe deformation, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2014, vol. 63, 012033. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/63/1/012033>.
61. Alabort E., Putman D., Reed R. C. Superplasticity in Ti-6A-4V: Characterisation, modelling and applications, *Acta Mater.*, 2015, vol. 95, pp. 428–442. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2015.04.056>.

62. Bylya O. I., Vasin R. A., Blackwell P. L. The mechanics of superplastic forming — How to incorporate and model superplastic and superplastic-like conditions, *Mater. Sci. Forum*, 2016, vol. 838, pp. 468–476. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.838-839.468>.
63. Lin Y. C., Chen X.-M. A critical review of experimental results and constitutive descriptions for metals and alloys in hot working, *Mater. Design*, 2011, vol. 32, no. 4, pp. 1733–1759. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.11.048>.
64. Cheng Y. Q., Zhang H., Chen Z. H., Xian K. F. Flow stress equation of AZ31 magnesium alloy sheet during warm tensile deformation, *J. Mater. Process. Technol.*, 2008, vol. 208, no. 1–3, pp. 29–34. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2007.12.095>.
65. Rabotnov Yu. N. *Creep of Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1969, ix+822 pp.
66. Lokoshchenko A. M. *Creep and long-term strength of metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. <https://doi.org/10.1201/b22242>.
67. Nikitenko A. F., Sosnin O. V., Torshenov N. G., Shokalo I. K. Creep of hardening materials with different properties in tension and compression, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1971, vol. 12, no. 2, pp. 277–281. <https://doi.org/10.1007/BF00850702>.
68. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling, *Mater. Trans.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 275–284. <https://doi.org/10.2320/matertrans.M2013370>.
69. Beliakova T. A., Goncharov I. A., Khokhlov A. V. The impossibility of modelling of sigmoid superplasticity curves using only parallel or series connections of power-law viscous elements, *Mekh. Komp. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 299–315 (In Russian). https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.03.299_315.01.
70. Khokhlov A. V. Monotone increase of the strain rate sensitivity value of any parallel connection of the fractional Kelvin–Voigt models, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 56–67 (In Russian). <https://doi.org/10.14529/mmph190307>.
71. Khokhlov A. V. The characteristic of the strain rate sensitivity of stress-strain curves in the linear viscoelasticity theory and its interrelation with relaxation modulus, *Probl. Prochn. Plast.* [Problems of Strength and Plasticity], 2019, vol. 81, no. 4, pp. 521–536 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-521-536>.
72. Murty G. S., Banerjee S. Evaluation of threshold stress from the stress-strain rate data of superplastic materials, *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1994, vol. 31, no. 6, pp. 707–712. [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(94\)90214-3](https://doi.org/10.1016/0956-716X(94)90214-3).



УДК 539.4

Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования

© А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

На базе процедуры шагов по времени построена математическая модель вязкоупругопластического поведения пологих оболочек с пространственными структурами армирования. Пластическое деформирование компонентов композиции описывается теорией течения с изотропным упрочнением; вязкоупругое деформирование — уравнениями модели Максвелла—Больцмана. Возможное ослабленное сопротивление композитных искривленных панелей поперечному сдвигу учитывается в рамках гипотез теории Редди, а геометрическая нелинейность задачи — в приближении Кармана. Решение сформулированной начально-краевой задачи строится с использованием явной численной схемы типа «крест». Исследовано упругопластическое и вязкоупругопластическое изгибное динамическое поведение «плоско»- и пространственно-армированных стеклопластиковых цилиндрических панелей под действием нагрузок взрывного типа. На примере относительно тонких композитных конструкций показано, что в зависимости от того, к какой лицевой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается нагрузка, замена традиционной «плоской» структуры армирования на пространственную может приводить как к увеличению, так и к уменьшению величины остаточного прогиба. Однако в обоих случаях такая замена позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций связующего материала и волокон некоторых семейств. Продемонстрировано, что амплитуды колебаний искривленных композитных панелей в окрестности начального момента времени значительно превосходят максимальные по модулю значения остаточных прогибов. При этом эпюры остаточных прогибов имеют достаточно сложный вид. Показано, что расчеты, проведенные в рамках теории упругопластического деформирования компонентов композиции, не позволяют даже приближенно определить величины остаточных деформаций материалов, составляющих композицию.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 506–527. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1709>.

Сведения об авторе

Андрей Петрович Янковский  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Ключевые слова: пологие оболочки, «плоское» армирование, пространственное армирование, динамическое деформирование, вязкоупругопластическое деформирование, теория Редди, модель Максвелла—Больцмана, схема типа «крест».

Получение: 5 июня 2019 г. / Исправление: 3 июня 2020 г. /

Принятие: 24 августа 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Введение. Изделия из композиционных материалов (КМ) все более широко используются в инженерных приложениях [1–6]. Основные преимущества КМ (сочетание легкости и прочности) особенно ярко проявляются в тонкостенных конструкциях типа пластин и оболочек [1, 2, 4–13]. В последнее время в конструкторской практике активно применяются КМ с пространственными структурами армирования [14–17], так как позволяют устранить серьезный недостаток слоистых и армированных в плоскости композитов — слабое сопротивление сдвигу и отрыву в поперечном направлении. Следовательно, актуальной является проблема математического моделирования механического поведения КМ-конструкций с пространственными структурами армирования.

Линейно-упругое деформирование пространственно-армированных КМ моделировалось в [18–20]. Однако современные КМ-конструкции могут подвергаться высокоинтенсивному нагружению [5], при котором КМ ведет себя неупруго. В связи с этим в [21] была построена модель упругопластического поведения пластин с пространственными структурами армирования, которая адаптирована под применение численной схемы типа «крест». Для описания неупругого деформирования компонентов композиции в [21] использовались определяющие соотношения теории Прандтля—Рейсса—Хилла (ТПРХ), не учитывающие демпфирование реальных материалов при вибрациях [22]. Поэтому такая модель не позволяет определять остаточные перемещения, деформации и напряжения в КМ-конструкции. Демпфирующие свойства материалов компонентов композиции могут быть учтены за счет использования вязкоупругих соотношений [23], т. е. построения модели вязкоупругопластического деформирования КМ. На сегодняшний день такая структурная модель КМ отсутствует.

Тонкостенные элементы КМ-конструкций даже с пространственными структурами армирования (например ортогональным 3D-армированием [14, 15, 17]) могут слабо сопротивляться поперечным сдвигам. Традиционно это обстоятельство учитывают в рамках теории Рейсснера [4, 5, 9, 10, 12, 24] или теории Редди [7, 8, 11, 13, 21]. Теория Редди в первом приближении учитывает искривление поперечной нормали тонкостенной конструкции и позволяет учесть граничные условия на лицевых поверхностях по касательным силам. В рамках теории Рейсснера никакие граничные условия на лицевых поверхностях удовлетворить нельзя, однако сложность реализации этих теорий практически одинакова [7].

Для численного интегрирования задач динамики тонкостенных конструкций используют как явные, так и неявные схемы. Среди явных методов наибольшее распространение получила схема типа «крест» [10, 13, 21], а из неявных — методы Ньюмарка [2, 25, 26].

В связи со всем вышеизложенным настоящее исследование посвящено математическому моделированию вязкоупругопластического поведения гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования при учете их слабого сопротивления поперечным сдвигам в рамках гипотез теории Редди. Сформулированные при этом начально-краевые задачи предполагается численно интегрировать с помощью явной схемы типа «крест».

1. Моделирование вязкоупругопластического поведения гибкой полой оболочки с пространственной структурой армирования. Рассматривается деформирование полой КМ-оболочки толщиной $2h$, с которой связана ортогональная криволинейная система координат x_i так, что отсчетная поверхность x_1x_2 ($x_3 = 0$) совпадает со срединной поверхностью ($|x_3| \leq h$) и направление x_3 перпендикулярно этой поверхности; x_1, x_2 — координаты вдоль линий главной кривизны. Конструкция «плоско» или пространственно армирована, и структура армирования в направлении x_3 однородна (рис. 1, на котором изображены малые элементы такой оболочки, причем их искривленность в силу малости не изображена).

Искривленная панель усилена K семействами волокон с плотностями армирования ω_k , $1 \leq k \leq K$. (На рис. 1, а изображено ортогональное «плоское» 2D-армирование при $K = 2$, на рис. 1, б — ортогональное пространственное 3D-армирование при $K = 3$ [14, 15, 17], на рис. 1, с — неортогональное пространственное 4D-армирование при $K = 4$ [15].) Относительное объемное со-

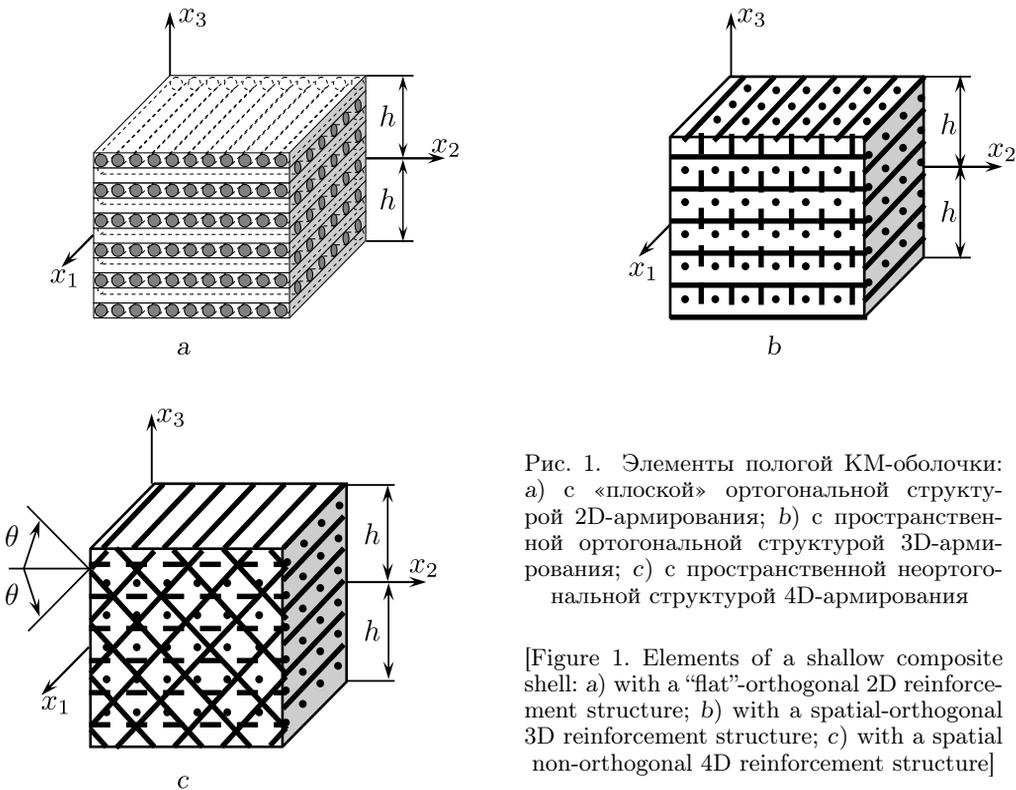


Рис. 1. Элементы полой КМ-оболочки: а) с «плоской» ортогональной структурой 2D-армирования; б) с пространственной ортогональной структурой 3D-армирования; с) с пространственной неортогональной структурой 4D-армирования

[Figure 1. Elements of a shallow composite shell: a) with a “flat”-orthogonal 2D reinforcement structure; b) with a spatial-orthogonal 3D reinforcement structure; c) with a spatial non-orthogonal 4D reinforcement structure]

держание связующего материала в ячейке периодичности композиции определяется так [14, 15]:

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k. \quad (1)$$

Рассматривается частный, но практически важный случай, когда на лицевых поверхностях $x_3 = \pm h$ заданы только нормальные распределенные нагрузки. Для описания возможного слабого (например в случаях структур армирования, изображенных на рис. 1, а и б) сопротивления полой КМ-оболочки поперечным сдвигам используем кинематические соотношения теории Редди [11], учитывая при этом геометрическую нелинейность задачи в приближении Кармана. В этом случае деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек U_i искривленной КМ-панели аппроксимируются так [13]:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \delta_{ij} \frac{w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0, \quad U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где ε_{i3}^0 — деформации поперечных сдвигов точек срединной поверхности; w — прогиб; u_i — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности; R_i — главные радиусы кривизны срединной поверхности; t_0 — начальный момент времени t ; ∂_i — оператор дифференцирования по x_i ($i = 1, 2$); δ_{ij} — символ Кронекера; G — область, занимаемая полой оболочкой в плане. В равенствах (2) и (3) неизвестны функции w , u_i , ε_{i3}^0 , зависящие от двух пространственных переменных x_i ($i = 1, 2$) и времени t .

Уравнения динамического равновесия элемента искривленной панели в приближении Кармана с учетом (3) имеют вид [13]:

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{l=1}^2 \left[\partial_l \left(F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right) + \frac{F_l}{R_l} \right] + X_3(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad 2h\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) + \frac{F_{i3}}{R_i} + X_i(t, \mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_{i3} = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} + m_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где

$$F_{il}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{il}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad M_{ij}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \gamma_{i3}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w, \quad \rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad i, j = 1, 2, \quad l = \overline{1, 3}; \quad (5)$$

σ_{il} — осредненные напряжения в композиции оболочки; $\sigma_{33}^{(\pm)} = \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — известные нормальные распределенные нагрузки на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях; X_i — приведенные внешние нагрузки, порожденные объемными силами (определяются по правилу смеси по аналогии с ρ); m_i — внешние моменты от объемных сил; ρ_0, ρ_k — объемная плотность материала связующего и волокон k -того семейства; F_{ij}, F_{i3} — мембранные и поперечные силы; M_{ij} — изгибающие и крутящие моменты; γ_{i3} — введенные для удобства функции; точка — дифференцирование по времени t .

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи на кромках искривленной панели необходимо задать силовые [13]

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) &= F_i, & \sum_{l=1}^2 n_l \left(F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right) &= F_{n3}, \\ M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 &= M_{nn}, \\ (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) &= M_{n\tau}, \\ n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (6)$$

и кинематические (см. соотношения (3) и (5))

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) = u_{*i}(t, \mathbf{x}), \\ \frac{2}{3}h^3 \gamma_{i3}(t, \mathbf{x}) &= \bar{u}_{*i}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (7)$$

граничные условия, а также начальные условия в момент времени $t = t_0$ [13]

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}(\mathbf{x}), \\ \frac{2}{3}h^3 \gamma_{i3}(t_0, \mathbf{x}) &= \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \quad 2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3}h^3 \dot{\gamma}_{i3}(t_0, \mathbf{x}) = \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} u_{*i}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{u}_{*i}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \\ u_{0i}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \\ v_{0i}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (9)$$

Γ — контур, ограничивающий область G ; F_i — мембранные силы, заданные на Γ и действующие в направлениях x_i ($i = 1, 2$); F_{n3} — поперечная сила, заданная на Γ ; $M_{nn}, M_{n\tau}$ — изгибающий и крутящий моменты, заданные на Γ ; α — угол, задающий направление внешней нормали к Γ и отсчитываемый от оси x_1 ; U_{*j} — заданные на кромке полой оболочки перемещения; U_{0j}, V_{0j} ($j = \bar{1}, \bar{3}$) — перемещения и скорости точек панели, заданные в начальный момент времени. Возможно задание и пяти смешанных из (6) и (7) граничных условий, например при моделировании свободного опирания кромки [8].

Для замыкания системы уравнений (2), (4) при учете (5) необходимо построить определяющие соотношения для композитной среды, связывающие

между собой осредненные напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} композиции пологой оболочки и/или их скоростей. Определить фактическое распределение напряжений и деформаций в КМ, в котором связующее усилено достаточно произвольно ориентированными волокнами (рис. 1), затруднительно даже в линейно-упругом случае [7], тем более это касается случая вязкоупругопластического деформирования компонентов композиции. Поэтому для получения практически пригодных в инженерных приложениях определяющих соотношений неупругого поведения рассматриваемой КМ-среды используем исходные предпосылки, аналогичные принятым в [7, 21].

1. В пределах репрезентативной ячейки на макроуровне КМ является квазиоднородным анизотропным телом. (При достаточно густом и равномерном усилении связующей матрицы тонкими волокнами данная гипотеза вполне приемлема [7].)
2. Волокна и связующее контактируют без отрыва и проскальзывания.
3. В пределах представительного элемента, выделенного из КМ на микроуровне, деформации, напряжения и их скорости во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффекты высших порядков, обусловленные изменением полей деформаций и напряжений на микроуровне в малых окрестностях границ контакта арматуры со связующим, не учитываются.
4. Поля деформаций, напряжений и их скоростей в композиции усредняются по объему репрезентативной ячейки. Согласно допущению 3, — пропорционально относительному объемному содержанию каждого составляющего композиции ω_k , $0 \leq k \leq K$ (см. (1)).
5. Материалы компонентов композиции однородны и изотропны; их вязкоупругопластическое поведение определяется соотношениями [21, 23]:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\lambda^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)} - B^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}D^{(k)}\sigma_{ll}^{(k)} - A^{(k)}s_{ij}^{(k)}s_{ml}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ml}^{(k)}, \quad (10)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq K,$$

где

$$A^{(k)} = \frac{G^{(k)}\kappa^{(k)}}{T_k^2}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}}(1 - \kappa^{(k)}), \quad D^{(k)} = \frac{1}{3}\left(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}}\right),$$

$$\kappa^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}, \quad g^{(k)} = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})},$$

$$G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1 - 2\nu^{(k)})}, \quad (11)$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \\ & s_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2(\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), s_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2(\eta^{(k)})^{-1}, \end{cases}$$

$$T_k = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi^{(k)} = \int_{t_0}^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)}\dot{p}_{ij}^{(k)}} dt,$$

$$s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(k)};$$

$\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций; $p_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора пластических деформаций, причем $p_{ll}^{(k)} = 0$; $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\eta^{(k)}, \mu^{(k)}$ — коэффициенты линейной вязкости при сдвиге и объемном расширении-сжатии; $\tau_s^{(k)}$ — функция упрочнения при чистом сдвиге, зависящая от параметра упрочнения $\chi^{(k)}$ (параметра Одквиста [23]); $\bar{G}^{(k)}$ — касательный модуль на диаграмме чистого сдвига $\tau^{(k)} \sim \gamma_p^{(k)}$; $\gamma_p^{(k)}$ — пластическая составляющая полной угловой деформации при чистом сдвиге; $\tau^{(k)}$ — касательное напряжение при чистом сдвиге; индекс k — номер компонента композиции ($k = 0$ — связующее, $k \geq 1$ — арматура k -того семейства).

Равенства (10) при учете (11) получены в предположении, что малые деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ могут быть представлены в виде суммы вязкоупругих $e_{ij}^{(k)}$ и пластических $p_{ij}^{(k)}$ составляющих, причем $p_{ij}^{(k)}$ определяются соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением, а $e_{ij}^{(k)}$ описываются уравнениями модели тела Максвелла—Больцмана [23]:

$$\dot{e}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G^{(k)}} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta^{(k)}}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)} = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K^{(k)}} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu^{(k)}}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (12)$$

где

$$\varepsilon_0^{(k)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}^{(k)}, \quad e_0^{(k)} = \frac{1}{3}e_{ll}^{(k)}, \quad \bar{e}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}e_0^{(k)}. \quad (13)$$

Если вязкими свойствами k -го компонента композиции пренебрегаем ($\eta^{(k)} \rightarrow \infty, \mu^{(k)} \rightarrow \infty$), то соотношения (12) при учете (13) редуцируются в закон Гука, а уравнения (10) — в определяющие соотношения ТПРХ, так как на основании (11) имеем $B^{(k)} = D^{(k)} = 0$ ($0 \leq k \leq K$).

Для удобства дальнейшего изложения равенства (10) перепишем в матричной форме [21]:

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{V}_k \sigma_k \quad (\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k), \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (14)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^\top \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^\top, \\ \varepsilon_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^\top \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^\top, \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^\top \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^\top; \end{aligned} \quad (15)$$

$\mathbf{Z}_k = (z_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$ — симметричные матрицы 6×6 , ненулевые компоненты которых выражаются так (см. (10) и (11)):

$$\begin{aligned} v_{ij}^{(k)} &= D^{(k)} - \delta_{ij}B^{(k)}, \quad v_{ll}^{(k)} = -B^{(k)}, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \\ \bar{\bar{z}}_{ll}^{(k)} &= G^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A^{(k)} s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}); \end{aligned} \quad (16)$$

$A^{(k)}$ определяется выражением (11), где с учетом (15) имеем

$$T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \quad (17)$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \\ & \mathbf{s}_k^\top \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \mathbf{s}_k^\top \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}; \end{cases}$$

\top — символ операции транспонирования. Равенства (15) определяют соответствия между шестью компонентами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1,6}$) некоторого вектора \mathbf{f}_k и компонентами соответствующего симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1,3}, 0 \leq k \leq K$). В соотношениях (16) по повторяющемуся индексу l суммирования нет.

Как и в [13, 21], для интегрирования рассматриваемой задачи используем алгоритм шагов по времени [2, 10, 25, 26], вычисляя значения неизвестных функций в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где Δ — шаг по времени. Предполагаем, что в предыдущий момент времени t_{n-1} уже известны значения функций:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq K. \quad (18)$$

Далее разрабатывается явная численная схема типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, имеющая второй порядок точности по Δ [10, 13, 21], поэтому преобразуем второе слагаемое в правой части соотношения (14), используя для этого формулу трапеций, которая также имеет второй порядок точности по Δ [27]. Согласно этой формуле, для текущего момента времени t_n имеем

$$\boldsymbol{\sigma}_k^n - \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} = \frac{\Delta}{2} (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}), \quad 0 \leq k \leq K. \quad (19)$$

При $t = t_n$ исключим из (14) за счет (19) вектор-столбец $\boldsymbol{\sigma}_k^n$, тогда получим преобразованное матричное соотношение

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n = \mathbf{B}_k^n \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^n + \mathbf{p}_k^n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где

$$\mathbf{B}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{Z}_k^n, \quad \mathbf{p}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{V}_k^n \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2}, \quad \bar{\mathbf{V}}_k^n \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^n; \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2} = \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}, \quad 0 \leq k \leq K; \quad (22)$$

\mathbf{I} — единичная матрица 6×6 ; $\bar{\mathbf{V}}_k^{n-1}$ — матрица 6×6 , обратная матрице $\bar{\mathbf{V}}_k^n$.

Согласно выражению (22) с учетом (18), вектор-столбец $\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2}$ в (21) известен.

Элементы матриц \mathbf{Z}_k и \mathbf{V}_k зависят от решения задачи (см. (11), (14), (16) и (17)), поэтому в текущий момент времени t_n эти матрицы, а следовательно, в силу (21) 6×6 -матрица \mathbf{B}_k^n и шестикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p}_k^n предполагаются линеаризованными по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости [28]. А значит, при $t = t_n$ на каждой итерации этого метода вектор \mathbf{p}_k^n в равенстве (20) с учетом (21) и (22) известен. При $\mathbf{p}_k^n = \mathbf{0}$ уравнение (20) редуцируется в матричное определяющее соотношение ТПРХ (см. (3) в [21]).

Линеаризованное уравнение (20) формально совпадает с соотношениями Дюамеля—Неймана для анизотропной среды [7, 20], причем компоненты вектора-столбца \mathbf{p}_k^n можно трактовать как известные на текущей итерации скорости температурных напряжений. Так как исходные допущения 1–5 аналогичны предпосылкам, принятым в [20, 21], повторяя рассуждения из [20, 21] с учетом (1) и (20), в данный момент времени t_n на текущей итерации получим линеаризованное матричное уравнение, описывающее вязкоупругопластическое поведение КМ:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \\ \mathbf{f} &\equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^K \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^K \omega_k \mathbf{r}_k, \\ \mathbf{r}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\varsigma}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (24)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ композиции, по структуре аналогичные (15); $\mathbf{B}, \mathbf{E}_k, \mathbf{C}_k$ — матрицы 6×6 ; $\mathbf{D}_k^{-1}, \mathbf{H}^{-1}$ — матрицы 6×6 , обратные матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\varsigma}_k$ — шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы $c_{ij}^{(k)}, d_{ij}^{(k)}$ и $\varsigma_i^{(k)}$ матриц $\mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k$ и векторов-столбцов $\boldsymbol{\varsigma}_k$ вычисляются так:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \varsigma_1^{(k)} = 0, \quad (25)$$

$$\varsigma_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq K;$$

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\
 l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, & l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \\
 l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & & & 1 \leq k \leq K;
 \end{aligned} \tag{27}$$

$p_l^{(k)}$ — элементы вектора-столбца \mathbf{p}_k (см. (20)). Невыписанные в (26) элементы $g_{ij}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}$ 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k, \mathbf{Q}_k$ приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [7]. Матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k определяют преобразование (см. (7) в [21]) векторов-столбцов $\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ (см. (15)) при переходе от глобальной системы координат x_j к локальной системе $x_i^{(k)}$, связанной с волокнами k -того семейства. При этом ось $x_1^{(k)}$ направлена вдоль траектории армирования и задается углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). В этом случае направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) вычисляются по формулам (27). (В равенствах (24) и (25) для упрощения записи опущен верхний индекс n).

Как и в работах [20, 21], при выводе соотношений (23) и (24) попутно получают линейризованные матричные равенства

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^n = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}^n, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^n + \mathbf{r}_k^n, \quad 1 \leq k \leq K. \tag{28}$$

В текущий момент времени t_n на данной итерации первое соотношение (28) определяет скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ через скорости осредненных деформаций КМ $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Второе равенство (28) выражает скорости деформаций арматуры k -того семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости деформаций связующего материала $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$.

Согласно формулам (16), (17) и (24)–(27), при $t = t_n$ на текущей итерации матрицы $\mathbf{B}, \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{E}_k$ и векторы-столбцы $\mathbf{p}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k$ в равенствах (23) и (28) известны. Если вязкоупругие свойства материалов, составляющих композицию, не учитываются ($\eta^{(k)} \rightarrow \infty, \mu^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq K$), то на основании (11), (12), (16), (17), (24) и (25) в равенстве (23) получаем $\mathbf{P}^n \equiv \mathbf{0}$ и оно редуцируется в матричное определяющее уравнение для пространственно армированного КМ, полученное ранее в рамках ТПРХ (см. соотношение (10) в [21]). Таким

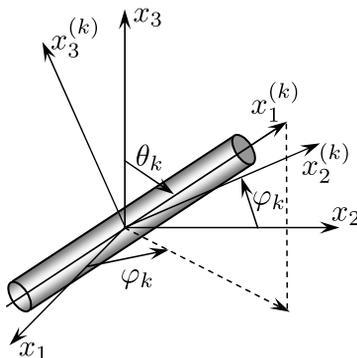


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокнами k -того семейства
 [Figure 2. Local coordinate system associated with k -th family of fibers]

образом, уравнение (23) является обобщением структурных соотношений, выведенных в [21].

Так как исследуется механическое поведение полой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать так [9]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad |x_3| \leq h. \quad (29)$$

Матричное уравнение (23) — система шести алгебраических равенств. На основании соотношений соответствия, аналогичных (15), при $t = t_n$ из третьего уравнения этой системы получаем

$$\dot{\varepsilon}_{33}^n \equiv \varepsilon_3^n = \frac{1}{b_{33}} \left(\dot{\sigma}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \varepsilon_i^n - p_3^n \right), \quad (30)$$

где b_{3i}, p_3 ($i = \overline{1,6}$) — элементы матрицы \mathbf{B} и вектора-столбца \mathbf{p} в (23); производная $\dot{\sigma}_3$ известна после дифференцирования (29) по времени t . Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части равенства (30) получаются путем дифференцирования по t равенств (2), т. е. выражаются через $w, \dot{w}, \dot{u}_l, \dot{\varepsilon}_{l3}^0$ ($l = 1, 2$).

2. Метод численного интегрирования. Как отмечалось в предыдущем разделе, для решения рассматриваемой задачи используется метод шагов по времени [2, 10, 13, 21, 25, 26, 28]. В связи с этим предполагаем, что в моменты времени t_m помимо (18) уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} \overset{m}{u}_l(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & \overset{m}{w}(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & \overset{m}{\gamma}_{l3}(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_{l3}(t_m, \mathbf{x}), \\ \overset{m}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \overset{m}{\sigma}_k(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), & l = 1, 2, & i, j = \overline{1,3}, \\ m = n - 1, n, & 0 \leq k \leq K, & \mathbf{x} \in G, & |x_3| \leq h, \end{aligned} \quad (31)$$

тогда, используя формулы (5), при $t = t_n$ можем определить все силовые факторы и внешние силы в правых частях уравнений (4).

Как и в работах [13, 21, 29], для аппроксимации производных по t используем соответствующие центральные разности на трехточечном шаблоне. Такой подход позволяет разработать явную численную схему интегрирования исследуемой задачи. После замены вторых производных по времени t в левых частях уравнений (4) их конечно-разностными аналогами, учитывая обозначения, аналогичные (18) и (31), получим

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \sum_{l=1}^2 \left[\partial_l \left(F_{l3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{lj}^n \partial_j w^n \right) + R_l^{-1} F_{ll}^n \right] + \\ &+ X_3^n + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \end{aligned}$$

$$\frac{2h\rho}{\Delta^2}(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_i w) + R_i^{-1} F_{i3}^n + X_i^n, \quad (32)$$

$$\frac{2h^3\rho}{3\Delta^2}(\gamma_{i3}^{n+1} - 2\gamma_{i3}^n + \gamma_{i3}^{n-1}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n + m_i, \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Правые части в равенствах (32) известны, поэтому из них вычисляем функции w^{n+1} , u_i^{n+1} и γ_{i3}^{n+1} , зная которые, по формулам (2) и (5) определяем осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . В силу того что при $t = t_{n-1}$ деформации ε_{ij}^{n-1} также уже известны (см. (2) и (5) с учетом (31)), применяя формулы численного дифференцирования и используя (30), вычисляем скорости осредненных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$. Далее по формулам (28) при учете соответствий (15) определяем скорости деформаций составляющих элементов композиции $\dot{\varepsilon}_k^n$, а по формулам (20) — скорости напряжений в компонентах композиции $\dot{\sigma}_k^n$ ($0 \leq k \leq K$).

Структура левых частей уравнений (32) свидетельствует о том, что для начала расчетов по предложенной численной схеме необходимо знать значения функций w^m , u_i^m , γ_{i3}^m ($m = 0, 1$). Функции w^0 , u_i^0 и γ_{i3}^0 определяются начальными условиями (8) с учетом (9), а функции w^1 , u_i^1 и γ_{i3}^1 можно рассчитать по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{w}^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{w}^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \\ u_i^1(\mathbf{x}) &= u_i^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{u}_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{u}_i^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \\ \gamma_{i3}^1(\mathbf{x}) &= \gamma_{i3}^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{\gamma}_{i3}^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{\gamma}_{i3}^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (33)$$

где производные \dot{w}^0 , \dot{u}_i^0 и $\dot{\gamma}_{i3}^0$ также известны из начальных условий (8), а ускорения \ddot{w}^0 , \ddot{u}_i^0 и $\ddot{\gamma}_{i3}^0$ вычисляются на основе уравнений (4) при $t = t_0$. Приближенные равенства в (33) выполняются, если до начального момента времени t_0 конструкция покоится и внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(\pm)} = 0$, $X_i = 0$, $m_j = 0$, $i = \overline{1, 3}$, $j = 1, 2$).

Если область G является прямоугольной, то после замены в соотношениях (6) и (32) производных $\partial_i(\cdot)$ их конечно-разностными аналогами получим явную численную схему «крест» [10, 13, 21, 29]. В случае неканонической области G для дискретизации равенств (6) и (32) по переменным x_i ($i = 1, 2$) целесообразно использовать вариационно-разностный подход [10]. Необходимые условия устойчивости построенной численной схемы типа «крест» следуют из критерия устойчивости Куранта [10] и для исследуемой полой КМ-оболочки определяются неравенствами, аналогичными (60) из [29]. В остальном разработанная схема реализуется так же, как и в [13, 21, 29].

3. Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров исследуем динамическое поведение цилиндрических удлиненных КМ-панелей толщиной $2h = 2$ см, имеющих в плане прямоугольную форму ($G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b$). Панели изогнуты в направлении Ox_2 ($1/R_1 = 0, R_2 \equiv R = \text{const}$). При этом радиус кривизны R выражается через стрелу подъема f над кромками $|x_2| = b$ так: $R = (b^2 + f^2)/(2f)$, причем $0 \leq f \leq 2b/5$ [8]. В расчетах принято $b = 25$ см и $f = 12$ см.

Пологие оболочки жестко закреплены по всей кромке (см. (7), (9) при учете $U_{*i} \equiv 0$) и до начального момента времени $t_0 = 0$ покоятся (см. (8), (9) при учете $U_{0i} \equiv 0$ и $V_{0i} \equiv 0$). Массовые нагрузки не учитываются (см. (4), (32) при учете $X_i \equiv 0$ и $m_j \equiv 0, i = 1, 3, j = 1, 2$). Панели нагружаются внешним давлением, вызванным приходом воздушной взрывной волны [25]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (34)$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}. \quad (35)$$

Нагрузка прикладывается к верхней (выпуклой) или нижней (вогнутой) лицевой поверхности (см. (4), (29) и (32)), причем

$$\sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь t_{\max} — время, при котором $p(t)$ достигает наибольшего по модулю значения $|p_{\max}|$; t_{\min} — время, при превышении которого нагрузкой $|p(t)|$ можно пренебречь по сравнению с $|p_{\max}|$ (равенство (35) получено при условии $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$). Согласно экспериментальным данным [25], в расчетах примем $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Из соотношений (36) следует, что при $p_{\max} < 0$ давление (34) действует на верхнюю ($x_3 = h$), а при $p_{\max} > 0$ — на нижнюю ($x_3 = -h$) лицевую поверхность.

Панели изготовлены из эпоксидной смолы и армированы стекловолокнами марки S-994 [30, 31]. Мгновенное упругопластическое поведение материалов, составляющих композицию, при активном нагружении определяется билинейной диаграммой:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} \equiv \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (37)$$

где σ, ε — напряжение и деформация при растяжении-сжатии; $E_s^{(k)}$ — модуль линейного упрочнения k -того компонента композиции; $\sigma_s^{(k)}, \varepsilon_s^{(k)}$ — условный предел текучести и соответствующая мгновенная деформация. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции приведены в таблице. (Формулы пересчета мгновенной диаграммы деформирования при чистом сдвиге $\tau \sim \gamma$ через характеристики диаграммы (37) приведены в [29].) Согласно приведенным в таблице данным, $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$, т. е. объемная вязкость материалов, составляющих композицию, не учитывается (см. (12)).

Структуры армирования квазиоднородны: $\theta_k = \text{const}, \varphi_k = \text{const}, \omega_k = \text{const}, 1 \leq k \leq K$ (см. (1), (27)). Рассматриваются две структуры:

Physico-mechanical characteristics of the components of composite cylindrical panel [30,31]

Components	ρ , kg/m ³	ν	σ_s , МПа	E , МПа	E_s , МПа	η , МПа·с	μ , МПа·с
Epoxy	1210	0.33	20	2.8	1.114	50	∞
Fiberglass S-994	2520	0.25	4500	86.8	6.230	200	∞

- 1) «плоское» ортогональное 2D-армирование (рис. 1, а), когда два ($K = 2$) семейства волокон укладываются по направлениям Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = \omega_2 = 0.2$;
- 2) пространственное 4D-армирование (рис. 1, с), когда два первых семейства волокон укладываются вдоль направлений Ox_1 и Ox_2 , а третье и четвертое семейства — вдоль направлений, задаваемых углами (см. (27) и рис. 2): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (т. е. на рис. 1, с угол $\theta = \pi/4$).

В последнем случае плотности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0.1$, $\omega_2 = 0.2$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0.05$. В обеих структурах армирования общий расход волокон одинаков.

На рис. 3 изображены поперечные колебания центральных точек пологих КМ-оболочек ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$), рассчитанные при $p_{\max} = 15$ МПа (рис. 3, а и при $p_{\max} = -15$ МПа (рис. 3, б) в окрестности начального момента времени и в окрестности $t = 150$ мс (рис. 3, с) при $|p_{\max}| = 15$ МПа. На рис. 4 изображены определенные для тех же случаев осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$ ($\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$, $|x_3| \leq h$) компонентов композиции. Номера кривых на рис. 3 и 4 (кроме кривой 3) соответствуют номерам структур армирования. Кривые, номера которых не помечены штрихом, соответствуют случаю $p_{\max} = 15$ МПа (нагружение со стороны нижней вогнутой лицевой поверхности), а кривые, номера которых помечены одним штрихом, — случаю $p_{\max} = -15$ МПа (нагружение со стороны верхней выпуклой лицевой поверхности). Кривые 1, 1', 2 и 2' на рис. 4, с рассчитаны для связующего ($k = 0$), а кривые 1'', 1''', 2'' и 2''' — для волокон второго семейства ($k = 2$), испытывающих наибольшее деформирование, причем линии 1'' и 2'' соответствуют нагрузке $p_{\max} = 15$ МПа, а 1''' и 2''' — нагрузке $p_{\max} = -15$ МПа. Кривые 1'', 1''' на рис. 3, с и кривая 3 на рис. 4, с приведены для сравнения и получены при тех же условиях, что и кривые 1, 1' на рис. 3, с и кривая 1''' на рис. 4, с соответственно, но в рамках ТПРХ [13, 21]: $\eta^{(k)} \rightarrow \infty$, $0 \leq k \leq K$, $K = 2, 4$. (Аналогичные кривые на рис. 3, а, 3, б, 4, а и 4, б не изображены, чтобы их не загромождать.)

Поведение кривых 1'', 1''' на рис. 3, с и кривой 3 на рис. 4, с демонстрирует, что в рамках расчетов по ТПРХ пологие КМ-оболочки неограниченно долго колеблются в окрестности нового положения, которое определяется величиной остаточного прогиба. Однако достоверно рассчитать величину остаточного прогиба и остаточных деформаций компонентов композиции в рамках этой теории нельзя. Поведение же остальных кривых на рис. 3 и 4 свидетельствует о том, что, согласно расчетам по разработанной математической модели вязкоупругопластического деформирования пологих КМ-оболочек, их колебания со временем затухают и к моменту времени $t = 150$ мс фактически прекращаются. Это обстоятельство позволяет определить расчетные остаточные прогибы и остаточные деформации компонентов композиций исследуемых КМ-конструкций.

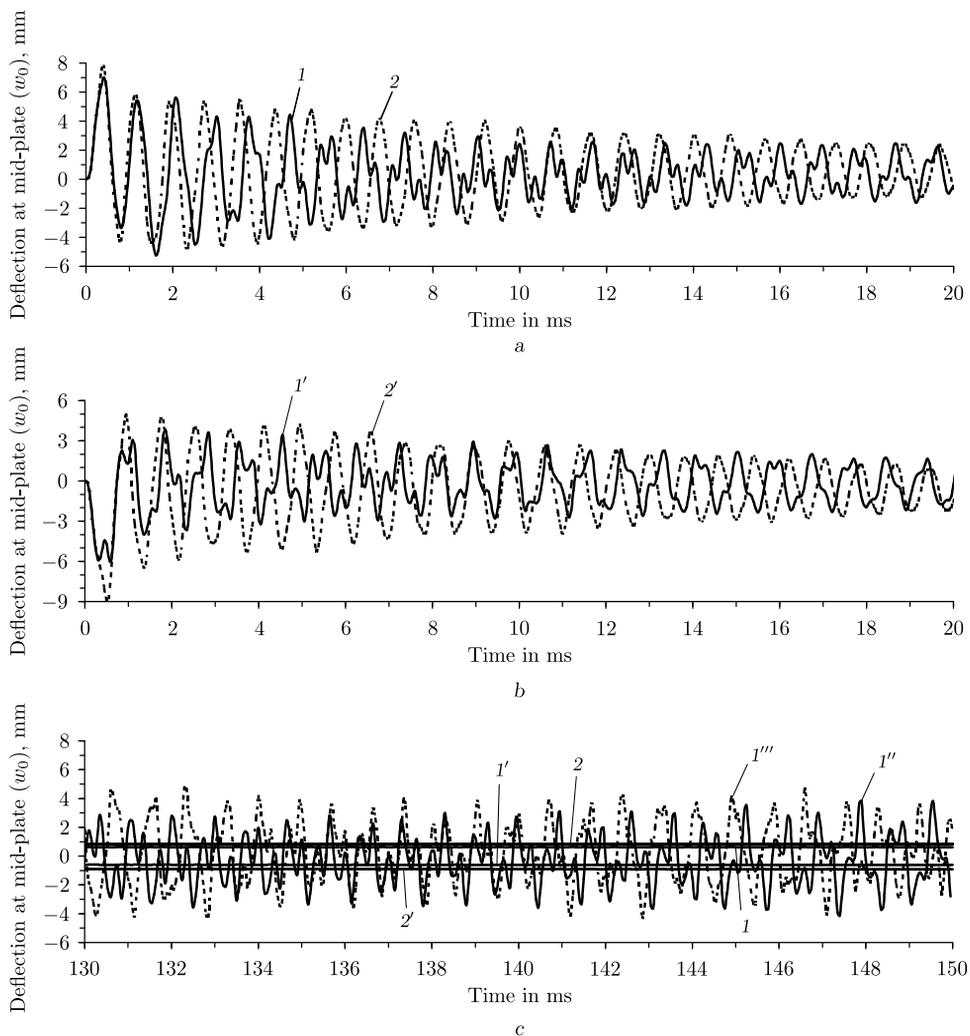


Рис. 3. Поперечные колебания центральных точек пологих КМ-оболочек в окрестности начального момента времени при нагружении снизу (а) и сверху (b) и в окрестности момента времени $t = 150$ мс (с) — оба варианта нагружения

[Figure 3. The transverse oscillations of the central points of shallow composite shells in the vicinity of the initial moment of time when loading from the bottom (a) and from above (b) and in the vicinity of the time $t = 150$ ms (c) — both loading options]

Сравнение кривых $1'''$ и 3 на рис. 4, с, рассчитанных при одних и тех же условиях, но по разным теориям, показывает, что на базе расчетов по ТПРХ даже приближенно невозможно оценить величину остаточных деформаций волокон второго семейства панели с 2D-структурой армирования. Действительно, если осреднить значения локальных максимумов и минимумов кривой 3, то рассчитанная таким образом кривая будет лежать значительно выше линии $1'''$. Аналогичный результат справедлив и для кривых на рис. 3, с: осреднение кривых $1''$ и $1'''$ приводит к линиям, отличным от кривых 1 и $1'$ соответственно.

Поведение кривых 1, 2 и $1'$, $2'$ на рис. 3 показывает, что замена «плоской» 2D-структуры армирования (кривые 1 и $1'$) на пространственную 4D-структуру (кривые 2 и $2'$) для рассматриваемых относительно тонких КМ-панелей

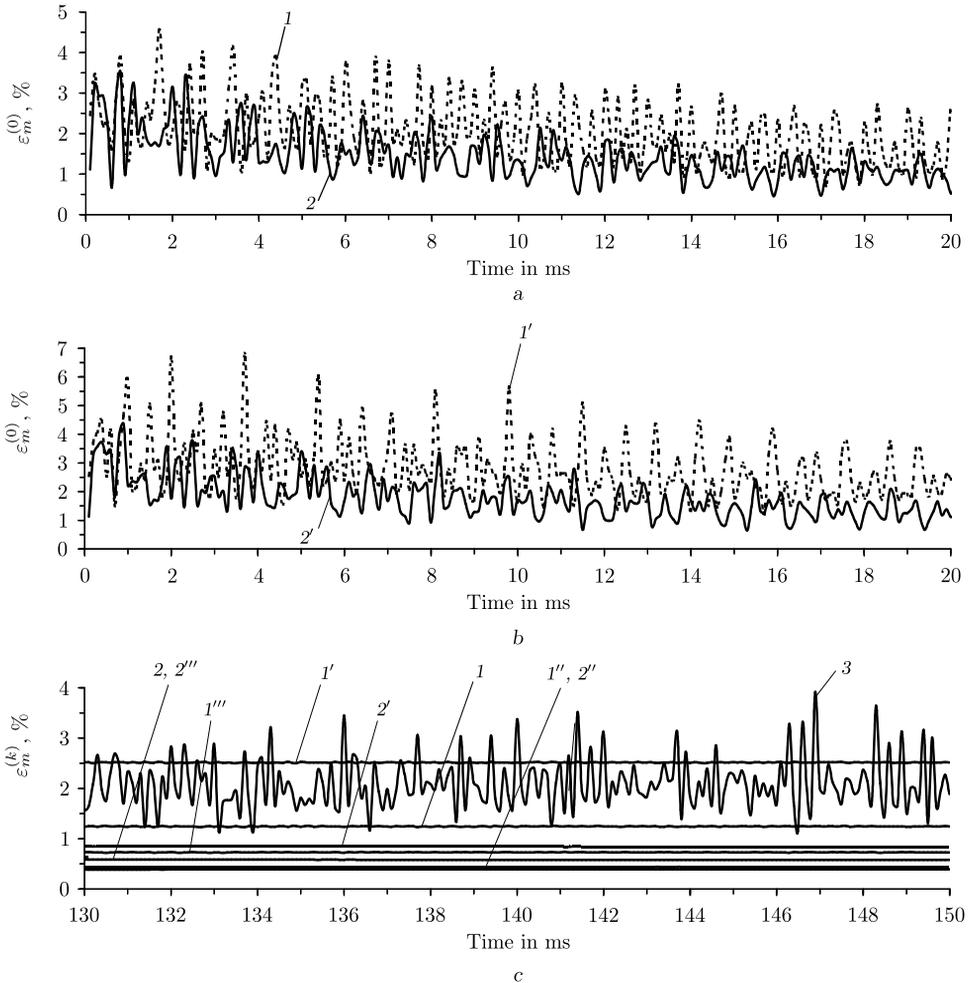


Рис. 4. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций компонентов композиций цилиндрической панели в окрестности начального момента времени при нагружении снизу (a) и сверху (b) и в окрестности момента времени $t = 150$ мс (c) — оба варианта нагружения

[Figure 4. The time dependence of the maximum intensity value of the deformations of the components of the compositions of a cylindrical panel in the vicinity of the initial moment of time when loading from the bottom (a) and from above (b) and in the vicinity of the time $t = 150$ ms (c) — both loading options]

не приводит к уменьшению по модулю значений максимального и остаточного прогибов центральных точек соответствующих конструкций.

На рис. 5 изображены эпюры остаточных прогибов $w(x_2)$, рассчитанные при $t = 150$ мс в сечении $x_1 = 0$. Номера кривых на рис. 5 соответствуют номерам кривых на рис. 3. Так как решения рассматриваемых задач обладают симметрией ($w(t, x_1, x_2) = w(t, x_1, -x_2)$), на рис. 5 изображены только правые части зависимостей $w(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq b$. Из рис. 5 видно, что кривые 1, 1' и 2' ведут себя немонотонно. Сравнение кривых на этом рисунке показывает, что при нагружении КМ-конструкции со стороны вогнутой лицевой поверхности (см. кривые 1 и 2) максимальный остаточный прогиб в цилиндрической КМ-панели с 4D-структурой армирования больше, чем в конструкции

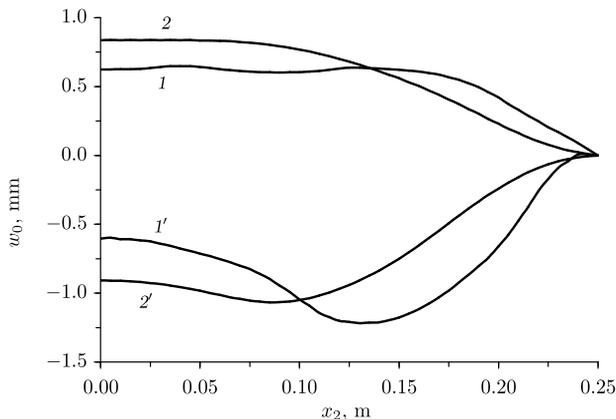


Рис. 5. Зависимость остаточного прогиба от координаты x_2 в поперечном сечении КМ-панели $x_1 = 0$

[Figure 5. Dependence of residual deflection on the coordinate x_2 in the cross section of the composite panel $x_1 = 0$]

с 2D-структурой, а при нагружении полой оболочкой со стороны выпуклой лицевой поверхности (см. кривые $1'$ и $2'$), наоборот, максимальный по модулю остаточный прогиб в КМ-панели с 4D-структурой меньше аналогичной величины в оболочке с 2D-структурой армирования.

Сравнение же кривых 1 , 2 и $1'$, $2'$ на рис. 4 показывает, что замена «плоской» структуры 2D-армирования на пространственную 4D-структуру позволяет существенно уменьшить максимальные и остаточные значения интенсивности деформаций связующего материала даже в относительно тонких пологих КМ-оболочках при нагружении их со стороны любой лицевой поверхности.

При неупругом деформировании КМ-конструкции величину остаточных деформаций можно рассматривать как меру поврежденности соответствующего компонента композиции. Согласно этому, поведение кривых 1 , 2 и $1'$, $2'$ на рис. 4 свидетельствует о том, что в пологих КМ-оболочках с 4D-структурами армирования связующее повреждено в гораздо меньшей степени, чем в КМ-панелях с «плоскими» 2D-структурами армирования.

Заключение. Разработана математическая модель вязкоупругопластического поведения пространственно армированных пологих оболочек, позволяющая рассчитывать их затухающие колебания, порожденные действием интенсивных кратковременных нагрузок, и определять остаточные прогибы таких конструкций, а также остаточные напряжения и деформации компонентов композиции.

Расчеты показали, что абсолютная величина остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций материалов компонентов композиции существенно зависят от структуры армирования и от того, к какой лицевой поверхности (выпуклой или вогнутой) прикладывается динамическая нагрузка. Продемонстрировано, что в случае стеклопластиковой композиции замена «плоской» структуры 2D-армирования (рис. 1, а) даже в относительно тонкой искривленной панели на пространственную 4D-структуру (рис. 1, с) может приводить как к увеличению, так и к уменьшению величины максимума остаточного прогиба (в зависимости от того, к какой лицевой поверхно-

сти приложена нагрузка). Однако при такой замене структуры армирования всегда наблюдается существенное уменьшение интенсивности остаточных деформаций в связующем материале композиции, что можно трактовать как значительное уменьшение поврежденности этого материала.

Так как высокопрочные стеклянные волокна имеют большие пределы текучести, то при деформировании они запасают упругую энергию в значительном количестве. Поэтому амплитуды осцилляций пологих КМ-оболочек в окрестности начального момента времени в разы превышают абсолютные значения остаточных прогибов. Аналогичное поведение во времени характерно и для максимальных значений интенсивности деформаций компонентов композиции.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 — Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

Библиографический список

1. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
2. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
3. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
4. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier: Amsterdam, 2013. xii+412 pp. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
5. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андришин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
7. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопrotивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
8. Амбарцумян С. А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
9. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
10. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
11. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp. <https://doi.org/10.1201/b12409>.
12. Каледин В. О., Аульченко С. М., Миткевич А. Б. и др. *Моделирование статике и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов*. М.: Физматлит, 2014. 196 с.

13. Янковский А. П. Моделирование динамического упругопластического поведения гибких армированных пологих оболочек // *Конструкции из композиционных материалов*, 2018. № 2. С. 3–14.
14. Жигун И. Г., Душин М. И., Поляков В. А., Якушин В. А. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // *Механика полимеров*, 1973. № 6. С. 1011–1018.
15. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
16. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites // *Sampe J.*, 2001. vol. 37, no. 3. pp. 3–17.
17. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2009. vol. 45, no. 2. pp. 241–254. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>.
18. Тарнопольский Ю. М., Поляков В. А., Жигун И. Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // *Механика полимеров*, 1973. № 5. С. 853–860.
19. Крегерс А. Ф., Тетерс Г. А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // *Мех. композ. матер.*, 1982. № 1. С. 14–22.
20. Янковский А. П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Мех. композ. матер.*, 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678.
21. Янковский А. П. Упругопластическое деформирование гибких пластин с пространственными структурами армирования // *ПМТФ*, 2018. Т. 59, № 6. С. 112–122. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180611>.
22. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. *Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник*. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.
23. Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum / *Elasticity and Plasticity. Encyclopedia of Physics*; ed. S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer, 1958. pp. 229–433. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1_3.
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-x](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-x).
26. Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 pp.
27. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. Amsterdam, New York: North-Holland, 1984. x+308 pp.
28. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
29. Янковский А. П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2016. Т. 9, № 3. С. 279–297. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24>.
30. *Handbook of composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 pp.
31. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.

MSC: 74K20

Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures

© A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

Based on the procedure of time steps, a mathematical model of the viscoelastoplastic behavior of shallow shells with spatial reinforcement structures is constructed. Plastic deformation of the components of the composition is described by flow theory with isotropic hardening; viscoelastic deformation by the equations of the Maxwell–Boltzmann model. The possible weakened resistance of composite curved panels to transverse shear is taken into account in the framework of the hypotheses of Reddy’s theory, and the geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The solution of the formulated initial-boundary value problem is constructed using an explicit numerical scheme of the “cross” type. The elastoplastic and viscoelastoplastic flexural dynamic behavior of “flat” and spatially reinforced fiberglass cylindrical panels under the action of explosive loads has been investigated. Using the example of relatively thin composite structures, it is shown that, depending on which of the front surface (convex or concave), a load is applied, replacing the traditional “flat” reinforcement structure with a spatial one can lead to both an increase and a decrease in the residual deflection. However, in both cases, such a replacement can significantly reduce the intensity of residual deformations of the binder material and fibers of some families. It was demonstrated that the amplitudes of oscillations of curved composite panels in the neighborhood of the initial moment of time significantly exceed the maximum absolute values of the residual deflections. In this case, the residual deflections are rather complicated. It is shown that the calculations carried out within the framework of the elastoplastic deformation theory of the composition components do not even allow an approximate the magnitude determination of the residual deformations of the materials making up the composition.

Keywords: shallow shells, “flat” reinforcement, spatial reinforcement, dynamic deformation, viscoelastoplastic deformation, Reddy’s theory, Maxwell–Boltzmann model, “cross” type scheme.

Received: 5th June, 2019 / Revised: 3rd June, 2020 /

Accepted: 24th August, 2020 / First online: 30th September, 2020

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Yankovskii A. P. Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 506–527. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1709> (In Russian).

Author’s Details:

Competing interests. I hereby declare that I have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was (partly) carried out within the framework Program of the fundamental scientific research of the state academies of sciences for the years 2017–2020 (project no. 23.4.1 “Mechanics of deformation and destruction of materials, media, under mechanical loads, the influence of physical fields and chemically active media”).

References

1. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, 14–31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
2. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
3. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
4. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier, Amsterdam, 2013, xii+412 pp. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
5. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 c. (In Russian)
6. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
7. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [The Strength of Polymeric and Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
8. Ambartsumyan S. A. *Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, and Vibration*, vol. 2, Progress in Materials Science Series. Stamford, Technomic, 1970, 248 pp.
9. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Non-Linear Dynamic Problems for Composite Cylindrical Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
10. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukt-sii* [Nonlinear Problems of Dynamics of Composite Structures]. Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
11. Reddy J. N. *Mechanics of laminated composite plates. Theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp. <https://doi.org/10.1201/b12409>.
12. Kaledin V. O., Aul'chenko S. M., Mitkevich A. B., et. al. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolochechnykh konstrukt-sii iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling Statics and Dynamics of Shell Structures Made of Composite Materials]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 196 pp. (In Russian)
13. Yankovskii A. P. Modeling of dynamic elastic-plastic behavior of flexible reinforced shallow shells, *Composite Materials Constructions*, 2018, no. 2, pp. 3–14 (In Russian).
14. Zhigun I. G., Dushin M. I., Polyakov V. A., Yakushin V. A. Composites reinforced with a system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 6, pp. 895–900. <https://doi.org/10.1007/BF00856974>.

15. Tarnopol'skii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
16. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites, *Sampe J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3–17.
17. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>.
18. Tarnopol'skii Y. M., Polyakov V. A., Zhigun I. G. Composite materials reinforced with a system of three straight, mutually orthogonal fibers. 1. Calculation of the elastic characteristics, *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, no. 5, pp. 754–759. <https://doi.org/10.1007/BF00856271>.
19. Kregers A. F. Teters G. A. Structural model of deformation of anisotropic three-dimensionally reinforced composites, *Mech. Compos. Mater.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 10–17. <https://doi.org/10.1007/BF00605085>.
20. Yankovskii A. P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model, *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451–460. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x>.
21. Yankovskii A. P. Elastic-plastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 6, pp. 1058–1066. <https://doi.org/10.1134/S0021894418060111>.
22. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. *Vibropogloshchayushchie svoystva konstruktsionnykh materialov: Spravochnik* [Vibration-Absorbing Properties of Structural Materials: A Handbook]. Kiev, Naukova dumka, 1971, 375 pp. (In Russian)
23. Freudenthal A. M., Geiringer H. The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, In: *Elasticity and Plasticity. Encyclopedia of Physics*; ed. S. Flügge. Berlin, Heidelberg, Springer, 1958, pp. 229–433. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1_3.
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
26. Zeinkiewicz O. C., Taylor R. L. *The Finite Element Method*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000, 707 pp.
27. Dekker K., Verwer J. G. *Stability of Runge–Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. Amsterdam, New York, North-Holland, 1984, x+308 pp.
28. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [Deformation and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
29. Yankovskii A. P. Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates, *Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 279–297 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24>.
30. *Handbook of composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 786 pp.
31. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Naukova Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)



Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

MSC: 76F02, 76M45, 76F45, 76R05, 76U05

Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation

© N. V. Burmasheva^{1,2}, E. Yu. Prosviryakov¹

¹ Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

² Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin, 19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

Abstract

The paper discusses a class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations suitable for describing three-dimensional nonlinear layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid. An inhomogeneous distribution of the velocity field (there is a dependence of the field components on the horizontal coordinates) generates a vertical swirl in the fluid without external rotation (excluding Coriolis acceleration). Setting the linearly distributed heat field and the field of shear stresses at the boundaries of the flow region is one of the reasons inducing convection in a viscous incompressible fluid. The main attention is paid to the study of the temperature field properties. The effect of vertical twist on the distribution of isolines of this field is studied. It is shown that the homogeneous component of the temperature field can be stratified into several zones relative to the reference value, and the number of such zones does not exceed nine. The inclusion of inhomogeneous components of the temperature field can only decrease this number. It is also demonstrated that the class discussed in the paper allows one to generalize the previously obtained results on modeling convective flows of viscous incompressible fluids.

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 528–541. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1770>.

Authors' Details:

Natalya V. Burmasheva <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>

Cand. Tech. Sci.; Researcher; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics¹; Associate Professor; Dept. of Theoretical Mechanics²; e-mail: nat_burm@mail.ru

Evgeniy Yu. Prosviryakov <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics¹; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Keywords: exact solution, layered convection, shear stress, counterflow, stratification, system of Oberbeck–Boussinesq equations, vertical twist.

Received: 22nd January, 2020 / Revised: 23rd July, 2020 /

Accepted: 24th August, 2020 / First online: 30th September, 2020

Introduction

One of the main factors causing convection in a viscous fluid is the uneven heating of this fluid. The reasons for the heterogeneity of the temperature field distribution are different, e.g. the presence of a heat source inside the volume occupied by the fluid, heating/cooling of the boundaries of this volume, etc.[1,2].

The energy equation (or the heat equation as one of its simplest versions) is known to depend, besides the physical characteristics of the liquid, on the value of the flow velocity \mathbf{V} in view of mixing. Thus, it is necessary to take into account the mutual influence of hydrodynamic fields. Another important case illustrating this dependence is a model of viscous fluid flow based on the Boussinesq hypothesis [2]. This hypothesis suggests a linear relationship between fluid density ρ and temperature T . As a result, the specific gravity ρg appearing in the Navier–Stokes vector equation is substituted by the term $g\beta T$, where β is the volume expansion coefficient, and it is neglected in the inertia forces. In this case, the fluid is considered incompressible. Thus, the relationship between the flow velocity field determined by the velocity vector \mathbf{V} and the temperature field T becomes mutual in the sense that both the equation of motion and the heat equation include the components of both fields: the temperature field and the velocity field.

In addition to the Navier–Stokes equation and the heat equation, the constitutive equations for constructing models of viscous fluid mechanics include the law of mass conservation [1–11]. In the case of incompressible fluids, this law is written in the divergent form of the incompressibility equation $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ [1,2]. The resulting system consists of five scalar equations with respect to five unknowns, namely the components V_x, V_y, V_z of the velocity vector \mathbf{V} , pressure P , and temperature T . When considering a number of practically important flows belonging to the class of layered and shear (unidirectional and non-one-dimensional) flows, a problem arises related to the overdetermination of the Oberbeck–Boussinesq system since $V_z \equiv 0$ for these flows [12–25].

One can resolve such an overdetermined system if, for example, one selects the projections of the velocity vector from a certain generalized class of exact solutions which allows one to satisfy the “unnecessary” equations [12–14,16–19,26,27]. The families of such classes differ, among other things, in that some of them can describe only flows of vertically unvortexed fluids, while others are suitable for modeling flows of fluids with nonzero vertical swirl [12–19, 28–37]. Moreover, taking into account the vertical twist is certain to complicate the structure of the solution to the boundary value problem under study.

The velocity field of convective flows of a vertically swirling fluid was studied in [13,18,19]. It was shown that the vertical vorticity component can exist when the fluid does not rotate. Isothermal flows of this kind were studied in [38,39]. When considering thermal factors, it is important not only to study their influence on the velocity field, but also to evaluate the contribution of the velocity field to the stratification of the temperature field.

This paper considers the exact solution of a boundary value problem describing the convective flow of a viscous fluid under the action of a given field of shear stresses. The effect of a constant vertical swirl on the temperature field is studied, as well as the features of the temperature field distribution depending on the given shear and normal stresses at the boundaries of a horizontal infinite fluid layer.

1. Problem statement. The exact solution of the Oberbeck–Boussinesq system

A system of equations of thermal shear convection in the Boussinesq approximation is considered. For shear flows (the component V_z of the velocity vector \mathbf{V} is assumed to be identically equal to zero), this system takes the form [12–15, 18, 19]:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x; & V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V_y; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= g\beta T; & V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \chi \Delta T; & \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here, P is the deviation of the pressure from hydrostatic, divided by the constant mean density ρ of the fluid; T is the deviation from the average temperature; ν, χ are the coefficients of kinematic viscosity and thermal diffusivity of the fluid, respectively; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ is the Laplace operator.

The system of equations (1) is overdetermined. It was shown in [13, 18, 19] that, if we consider the flow velocity field of the form

$$V_x = U(z) + u(z)y, \quad V_y = V(z), \quad (2)$$

the incompressibility equation in system (1) is satisfied identically. In this case, the temperature field T and the pressure field P are described by linear functions of the longitudinal (horizontal) coordinates as

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y; \quad T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y. \quad (3)$$

It was also shown in [13, 18, 19] that, substituting the families of generalized solutions (2), (3) we can reduce system (1) to the ordinary differential equations system of the following form:

$$\begin{aligned} u'' &= 0, & T_1'' &= 0, & P_1' &= g\beta T_1, & \chi T_2'' &= uT_1, & P_2' &= g\beta T_2, \\ \nu V'' &= P_2, & \nu U'' &= Vu + P_1, & \chi T_0'' &= UT_1 + VT_2, & P_0' &= g\beta T_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Moreover, system (4) is integrated uniquely, and it can have a solution different from the trivial one. Here, the prime denotes derivation with respect to the vertical coordinate z . In what follows, we consider the case of constant vertical twist by setting $u = \Omega = \text{const}$.

2. Boundary value problem

We choose the conditions described in [12, 14, 18] as the boundary conditions for the horizontal temperature gradients T_1, T_2 , the horizontal pressure gradients P_1, P_2 , the background temperature T_0 , the background pressure P_0 , and the velocities U and V . We assume that the fluid flows in a horizontal infinite layer,

the lower surface of which $z = 0$ is absolutely solid and selected by the reference level of temperature measurement. Without loss of generality, we assume that the reference temperature is zero,

$$T(x, y, 0) = 0.$$

The velocity of the lower boundary $z = 0$ is given as

$$V_x(0) = \Omega y, \quad V_y(0) = 0.$$

At the undeformed (free) upper boundary $z = h$, constant atmospheric pressure is set and, by analogy with the temperature setting, it is counted from zero,

$$P(x, y, h) = 0.$$

We also assume that the field of shear stresses is set at the upper boundary as

$$\eta \frac{\partial V_x}{\partial z} = \eta \frac{\partial U}{\partial z} = \xi_1, \quad \eta \frac{\partial V_y}{\partial z} = \eta \frac{\partial V}{\partial z} = \xi_2.$$

Here, η is the dynamic viscosity coefficient. Note that, due to the structure of the velocity field \mathbf{V} , the resulting shear stress field is homogeneous, as in [12, 14, 18]. In addition, thermal sources are set at both boundaries of the fluid layer,

$$T(x, y, 0) = Ax + By, \quad T(x, y, h) = \vartheta + Cx + Dy.$$

In view of the class of generalized solutions (2), (3), the selected boundary conditions are written as follows:

$$\begin{aligned} U(0) = V(0) = 0, \quad \eta U'(h) = \xi_1, \quad \eta V'(h) = \xi_2, \\ T_0(0) = 0, \quad T_1(0) = A, \quad T_2(0) = B, \\ T_0(h) = \vartheta, \quad T_1(h) = C, \quad T_2(h) = D, \\ P_0(h) = P_1(h) = P_2(h) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

The exact polynomial solution of the boundary value problem (4), (5) for the velocity field components for the special case $B = D = 0$ was given and analyzed in [18]; therefore, we restrict ourselves to the exact solution for the temperature field and the pressure field, which has the form

$$\begin{aligned} T_1 &= A + (C - A)Z; \\ P_1 &= \frac{g\beta h}{2} ((C - A)Z^2 + 2AZ - (C + A)); \\ T_2 &= -\frac{\Omega h^2}{6\chi} (1 - Z)Z((C + 2A) + (C - A)Z); \\ P_2 &= \frac{g\beta\Omega h^3}{24\chi} (1 - Z)^2((C + A) + 2(C + A)Z + (C - A)Z^2); \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 T_0 = \vartheta Z + \frac{4Z(1-Z)}{12!\eta\nu^2\chi^3} \{ & -23760g\beta\eta\nu\chi^2h^5 \times \\
 & \times [5A^2(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2)+ \\
 & + 5AC(26+26Z-30Z^2+5Z^3+5Z^4-2Z^5)+ \\
 & + C^2(82+82Z+82Z^2-58Z^3+5Z^4+5Z^5)] - \\
 - 3g\beta\eta\nu\Omega^2h^9 [& 2A^2(2-Z)(912+1368Z+1596Z^2-3680Z^3+ \\
 & + 1998Z^4+294Z^5-833Z^6+336Z^7-42Z^8)+ \\
 & + AC(7851+7851Z+7851Z^2-27569Z^3+15397Z^4+ \\
 & + 921Z^5-3479Z^6-14Z^7+756Z^8-168Z^9)+ \\
 & + 2C^2(2088+2088Z+2088Z^2-4072Z^3-607Z^4+ \\
 & + 1857Z^5-343Z^6-343Z^7+42Z^8+42Z^9)] - \\
 - g\beta\eta\chi\Omega^2h^9 [& 2A^2(2-Z)(19456+29184Z-9512Z^2-7080Z^3+ \\
 & + 3838Z^4-636Z^5-398Z^6+216Z^7-27Z^8)+ \\
 & + AC(82985+82985Z-23935Z^2-14035Z^3+8141Z^4- \\
 & - 637Z^5-637Z^6-142Z^7+243Z^8-54Z^9)+ \\
 & + C^2(43268+43268Z+43268Z^2-10192Z^3-10192Z^4+ \\
 & + 4592Z^5-358Z^6-358Z^7+27Z^8+27Z^9)] - \\
 - 9979200h^3\nu^2\xi_1\chi^2 [& A(1+Z-Z^2)+C(1+Z+Z^2)] + \\
 + 332640h^5\nu^2\xi_2\chi\Omega [& A(3+3Z+3Z^2-7Z^3+2Z^4)+ \\
 & + C(3+3Z+3Z^2-2Z^3-2Z^4)] + \\
 + 332640h^5\nu\xi_2\chi^2\Omega [& A(14+14Z-16Z^2-Z^3+2Z^4)+ \\
 & + C(13+13Z+13Z^2-2Z^3-2Z^4)] \}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Here, $Z = z/h \in [0, 1]$ is the dimensionless vertical coordinate.

The expression for the background pressure P_0 is not given here since it is cumbersome; however, it can be easily obtained by integrating the corresponding equation of system (4) due to the exact solution (7).

Note that the condition $u = 0$, which determines the degeneracy of the class (2) to the class

$$V_x = U(z), \quad V_y = V(z),$$

considered in [12, 14, 16, 17], is equivalent to the condition $\Omega = 0$; therefore, the effect of the parameter Ω on the temperature field topology will be studied in more detail below.

3. Temperature field analysis

For further convenience, we introduce the functions $T_1^{\Omega=0}$, $T_2^{\Omega=0}$, $T_0^{\Omega=0}$, which are obtained from the exact solution (6), (7) when the vertical twist Ω proves to be zero. In this case we have

$$T_1^{\Omega=0} = A + (C - A)Z; \quad T_2^{\Omega=0} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 T_0^{\Omega=0} = \vartheta Z + \frac{4h^3 Z(1-Z)}{12!\eta\nu\chi} \left\{ -23760g\beta\eta h^2 \times \right. \\
 \times [5A^2(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2)+ \\
 + 5AC(26+26Z-30Z^2+5Z^3+5Z^4-2Z^5)+ \\
 + C^2(82+82Z+82Z^2-58Z^3+5Z^4+5Z^5)] - \\
 \left. - 9979200\nu\xi_1 [A(1+Z-Z^2) + C(1+Z+Z^2)] \right\}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

3.1. Analysis of the properties of the longitudinal gradients T_1, T_2 .

Note that, regardless of the magnitude of the twist Ω , the component $T_1 = T_1^{\Omega=0}$ is a monotonic function, and it can take a single zero value in the layer $[0, 1]$ only if the inequality

$$T_1(0) \cdot T_1(1) < 0$$

is valid. This inequality is equivalent to the condition

$$AC < 0.$$

Thus, when the longitudinal temperature gradients A and C take values of different signs, the thermal field $T_1 x$ (and the field $T_1^{\Omega=0} x$, respectively) admits stratification at the point $Z = A/(A - C)$.

We now consider the second longitudinal gradient (T_2). Obviously, $T_2^{\Omega=0} y \equiv 0$; therefore, this thermal field does not admit stratifications. Let us now study the behavior of the field $T_2 y$ determined from the expression (6) when $\Omega \neq 0$. It is easy to see that, in the degenerate case $A = C$, the component T_2 takes values of the same sign; therefore, everywhere in the layer, the field $T_2 y$ is determined by either heating or cooling of the fluid.

Let now the horizontal temperature gradients be different ($A \neq C$); therefore, $C - A \neq 0$ and consequently, by virtue of (6), the longitudinal gradient T_2 can be represented as

$$T_2 = -\frac{\Omega h^2 (C - A)}{6\chi} (1 - Z)Z(Z + a),$$

where $a = (C + 2A)/(C - A)$. It is easy to verify that the function $(1 - Z)Z(Z + a)$ can have a single zero inside the layer $[0, 1]$ only when $-1 < a < 0$. Therefore, the thermal field $T_2 y$ can change its sign no more than once inside the studied fluid layer.

3.2. Analysis of the properties of background temperature T_0 .

We now study the features of the behavior of the background temperature. We begin with the case that the vertical vorticity component is zero, $\Omega = 0$. In this case, the background temperature is determined by the expression (8). The field $T_0^{\Omega=0}$ results from the interaction of several individual thermal fields induced by heating the boundaries of the layer under study and setting the shear stress field at the upper boundary. If both gradients A and C are simultaneously zero, the background temperature, according to (8), is determined only by a homogeneous term (with respect to the horizontal coordinates),

$$T_0^{\Omega=0} = \vartheta Z,$$

the temperature T being unaffected by the value of the components ξ_1, ξ_2 of the shear stress field.

Let us now consider the case that only one of the longitudinal temperature gradients is zero. Assume that, for definiteness, $A \neq 0$. In this case, the expression (8) can be represented as

$$T_0^{\Omega=0} = Z \cdot f(Z) = Z \left[\vartheta - \frac{Ah^3(1-Z)}{1008\eta\nu\chi} \times \right. \\ \left. \times \left\{ g\beta\eta h^2(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2) + 84\nu\xi_1(1+Z-Z^2) \right\} \right]. \quad (9)$$

It is obvious from (9) that, if some point $Z_1 \in (0, 1)$ is the zero of the auxiliary function $f(Z)$, the stratification of the thermal field $T_0^{\Omega=0}$ can occur at this point. Note that the polynomials

$$f_1(Z) = (1-Z)(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2),$$

$$f_2(Z) = (1-Z)(1+Z-Z^2),$$

included in the solution (9) are strictly monotonic inside the layer under study. Therefore, the background temperature $T_0^{\Omega=0}$ can have no more than two zero points in the layer $(0, 1)$ (Fig. 1).

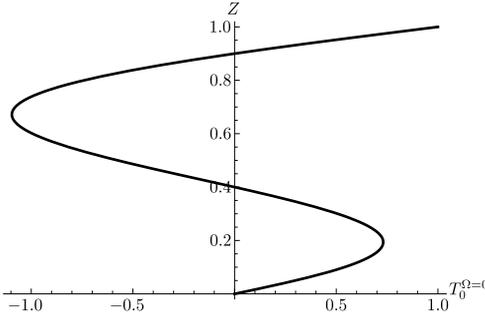


Figure 1. Profile of the temperature $T_0^{\Omega=0}$ defined by the expression (9) when $A \neq 0, C = 0$

Assume now that the horizontal gradient is nonzero, $C \neq 0$. We write the solution (8) as

$$T_0^{\Omega=0} = Z \cdot F(Z) = Z \left[\vartheta - \frac{g\beta C^2 h^5}{7!\nu\chi} (1-Z) \times \right. \\ \times \left\{ 5c^2(2-Z)(1+2Z-Z^2)(4-2Z+Z^2) + \right. \\ + 5c(26+26Z-30Z^2+5Z^3+5Z^4-2Z^5) + \\ + (82+82Z+82Z^2-58Z^3+5Z^4+5Z^5) + \\ \left. \left. + \frac{420\nu\xi_1}{g\beta\eta h^2 C} [c(1+Z-Z^2) + (1+Z+Z^2)] \right\} \right],$$

where $c = A/C$ is a dimensionless parameter. Obviously, all the zero points of the function $F(Z)$ will automatically be the zero points of the background temperature (8). The structure of the function $F(Z)$, in addition to the above polynomials f_1 and f_2 , includes the polynomials

$$f_3(Z) = (1 - Z) (26 + 26Z - 30Z^2 + 5Z^3 + 5Z^4 - 2Z^5),$$

$$f_4(Z) = (1 - Z) (82 + 82Z + 82Z^2 - 58Z^3 + 5Z^4 + 5Z^5),$$

$$f_5(Z) = (1 - Z) (1 + Z + Z^2).$$

The functions f_3, f_4, f_5 are also strictly monotonic on the interval $[0, 1]$. There are only four coefficients in front of the polynomials f_i ($i = \overline{1, 6}$) in the solution (8). All these coefficients can be considered independent of each other due to the arbitrary choice of the values of the shear stress ξ_1 , the temperature gradient A , the temperature ϑ , and the physical constants determining the viscous fluid under study. The analysis of the properties of the polynomial (8) has shown that, in view of these circumstances, the maximum number of zero points of the background temperature (8) does not exceed three (Fig. 2).

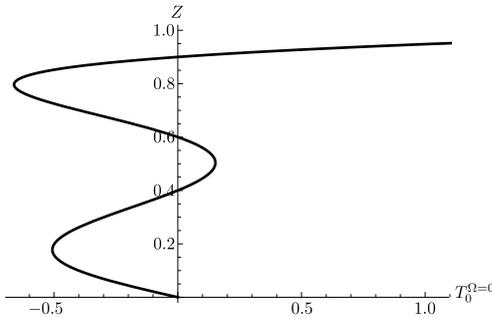


Figure 2. Profile of the temperature $T_0^{\Omega=0}$ defined by the expression (8)

Consequently, the thermal field $T_0^{\Omega=0}$ can both heat and cool the fluid layer; the type of the thermal effect can change no more than three times with the distancing from the lower boundary $Z = 0$ in the direction of the upper boundary $Z = 1$.

Now, let the vertical twist Ω be nonzero. In this case, according to (7), the terms reflecting the presence of nonzero vorticity in the fluid layer are added to the above-mentioned individual thermal fields of various nature.

It is easy to verify that the number of points at which the background temperature T_0 (7) takes a zero value inside the fluid layer $[0, 1]$ does not exceed eleven since the exact solution (7) is an 11th degree polynomial. Moreover, the number of polynomials in the exact solution (7) increases sharply compared with the same number for the thermal field $T_0^{\Omega=0}$. Their number increases to fifteen, all of them are strictly monotonic at $Z \in [0, 1]$. However, the number of independent coefficients in front of these polynomials increases to a lesser extent, i.e., only four coefficients are added, which are determined by two new independent parameters, namely the stress ξ_2 and the actual vertical vorticity component Ω . The study of the localization of the zeros of the polynomial (7) has shown that their number in the layer $[0, 1]$ does not exceed eight (Fig. 3).

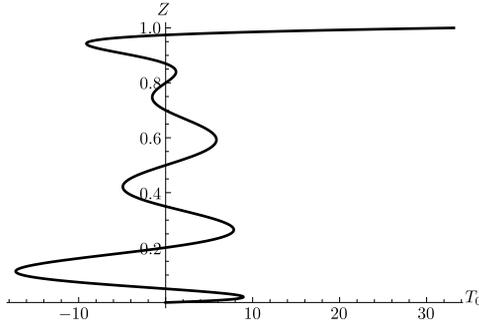


Figure 3. Profile of the temperature T_0 determined by the exact solution (7)

Thus, taking into account the constant spatial acceleration $u(z) = \Omega = \text{const}$ leads to a significant increase in the number of zero points of the thermal field T_0 .

4. Superposition of thermal fields

The resulting temperature field is determined by the interaction of three thermal fields: T_1x , T_2y , and T_0 . As a result of their superposition, the number of zero points of the temperature T can change as the values of the longitudinal coordinates x and y change. As an illustrative example, we consider the case that the background temperature has four zero points (Fig. 4). This case corresponds to the value $c = -2.04182$ of the dimensionless parameter characterizing the ratio of the longitudinal temperature gradients A and C .

Since the ratio A/C proves to be negative, according to the above analysis, the thermal field T_1x admits one stratification point (Fig. 5). Herewith, the parameter $a = (C + 2A)/(C - A) = -1.01375$ determining the presence of zero points of the longitudinal temperature gradient T_2 does not fall in the interval $(-1, 0)$, and this means the absence of zero points of the gradient T_2 (Fig. 5). For definiteness, when constructing the profiles of the temperature field components, the following values of the parameters were taken: $C = 1$, $\Omega h^2/(6\chi) = 1$.

The resulting temperature field isolines T are shown in Figs. 6 and 7.

The change in the location of the isolines is considered as an example of the displacement of the zero isotherm in the characteristic isolines of the sections $y = 0$ (Fig. 8) and $x = 0$ (Fig. 9).

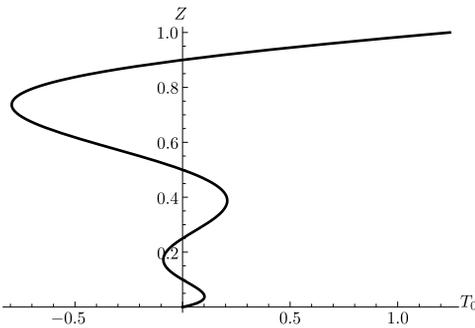


Figure 4. Profile of the temperature T_0 with four zero points

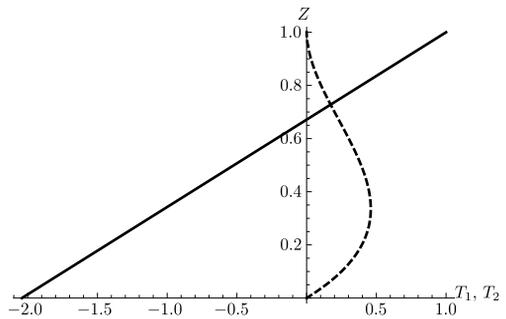


Figure 5. Profile of temperature gradients T_1 (solid line) and T_2 (dashed line)

Figures 8, and 9 clearly illustrate the change (decrease) in the number of stratification points of the final temperature field T , even for small values of the longitudinal coordinates x and y , compared to the number of zero points of the background temperature T_0 marked by a bold line in Figs. 8 and 9.

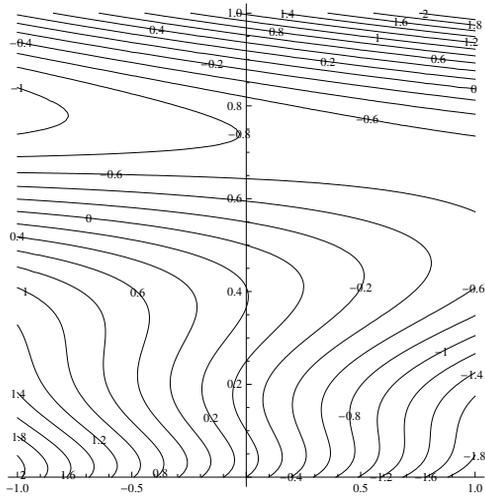


Figure 6. Isolines of the temperature T in the section $y = 0$

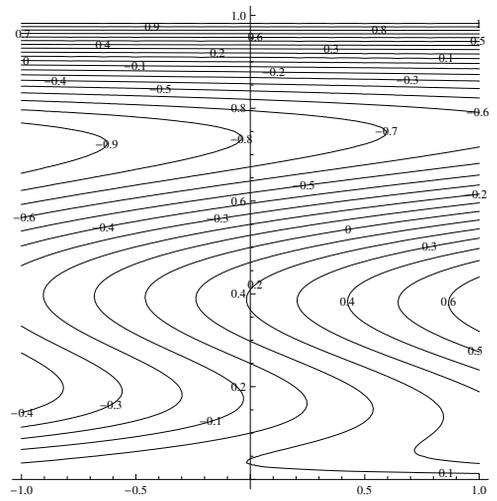


Figure 7. Isolines of the temperature T in the section $x = 0$

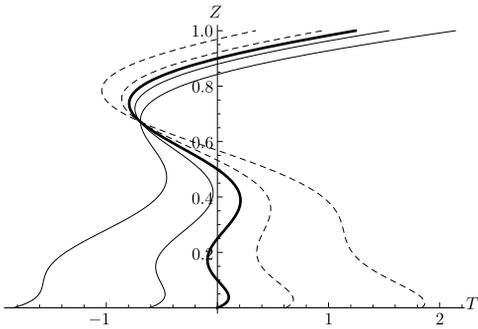


Figure 8. Zero isotherm in the section $y = 0$ for $x = 0.9$, $x = 0.3$, $x = 0$, $x = -0.3$ and $x = -0.9$ (from left to right)

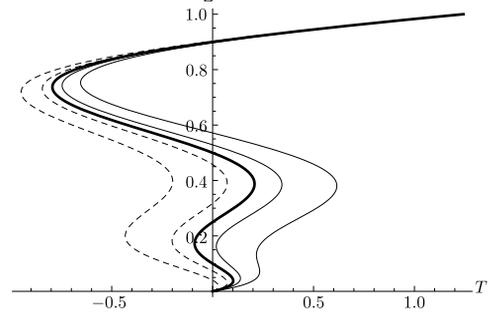


Figure 9. Zero isotherm in the section $x = 0$ for $y = -0.9$, $y = -0.3$, $y = 0$, $y = 0.3$ and $y = 0.9$ (from left to right)

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. We are fully responsible for submitting the final manuscript in print. Each of us has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

References

1. Landau L. D., Lifshits E. M. *Course of Theoretical Physics*, vol. 6, Fluid Mechanics. New York, Pergamon Press, 1959, 539 pp.

2. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 pp.
3. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical Hydromechanics*. New York, Wiley Interscience, 1964, 577 pp.
4. Falkovich G. *Fluid Mechanics: A Short Course for Physicists*. Cambridge, Cambridge University Press, 2011, xii+180 pp. <https://doi.org/10.1017/cb09780511794353>.
5. Navier M. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, *Mém. Acad. Sci. Inst. France*, 1827, vol. 6, pp. 389–440.
6. Stokes G. G. On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, In: *Mathematical and Physical Papers*, vol. 1. Cambridge, Cambridge University Press, 2009, pp. 75–129. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511702242.005>.
7. Drazin P. G. *Introduction to hydrodynamic stability*. Cambridge, Cambridge University Press, 2002, xviii+258 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511809064>.
8. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. New York, Dover Publications, 1981, 708 pp.
9. Poisson M. Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides, *Journ. de l'École Polytechn.*, 1831, vol. 13, pp. 1–174.
10. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
11. de Saint-Venant B. Note à joindre au Mémoire sur la dynamique des fluides, *Comptes rendus*, 1843, vol. 17, no. 22, pp. 1240–1244.
12. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, T. 21, №1, C. 180–196 (In Russian).
13. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Temperature field investigation in layered flows of a vertically swirling viscous incompressible fluid under two thermocapillar forces at a free boundary, *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2019, no. 1, pp. 6–42 (In Russian). <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2019.1.006-042>.
14. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1568>.
15. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Investigation of a velocity field for the Marangoni shear convection of a vertically swirling viscous incompressible fluid, *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 2053, 040011. <https://doi.org/10.1063/1.5084449>.
16. Burmasheva N.V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for the layered convection of a viscous incompressible fluid at specified temperature gradients and tangential forces on the free boundary, *AIP Conf. Proc.*, 2017, vol. 1915, 040005. <https://doi.org/10.1063/1.5017353>.
17. Burmasheva N.V., Prosviryakov E. Y. Exact solutions for layered large-scale convection induced by tangential stresses specified on the free boundary of a fluid layer, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, 012010. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012010>.
18. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1670>.
19. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2020, vol. 54, no. 1, 230–239. <https://doi.org/10.1134/S0040579519060034>.

20. Liapidevskii V. Y. A mixing layer in a homogeneous fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 4, pp. 647–657. <https://doi.org/10.1007/BF02466862>.
21. Georgievsky D. V. Tensor-nonlinear shear flows: Material functions and the diffusion-vortex solutions, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 2, 451–463. <https://doi.org/10.20537/nd1103004>.
22. Taylor G. I. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1932, vol. 135, no. 828, pp. 685–705. <https://doi.org/10.1098/rspa.1932.0061>.
23. Kuznetsova Yu. L., Skul'skiy O. I. Effect of different flows on the shear branding of a liquid with a non-monotonic flow curve., *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 22–30. <https://doi.org/10.1134/S0021894419010048>.
24. Rodi W. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Boca Raton, CRC Press, 1973, 124 pp.
25. Georgievsky D. V. Generalized Joseph Estimates of Stability of Plane Shear Flows with Scalar Nonlinearity, *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 2011, vol. 75, no. 1, 149–152. <https://doi.org/10.3103/S1062873810121044>.
26. Knutova N. S., Shvarts K. G. A study of behavior and stability of an advective thermocapillary flow in a weakly rotating liquid layer under microgravity, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 340–350. <https://doi.org/10.1134/S0015462815030047>.
27. Chikulaev D. G., Shvarts K. G. Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal liquid layer with solid boundaries at small Prandtl numbers, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 215–222. <https://doi.org/10.1134/S0015462815020052>.
28. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. <https://doi.org/10.1007/BF00852164>.
29. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 212–217. <https://doi.org/10.1134/S0021894411020088>.
30. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries, *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 438–442. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040036>.
31. Brutyan M. A., Kovalev V. E. Vortex flows of a micropolar fluid, *TsAGI Sci. Journal*, 2010, vol. 41, no. 4, pp. 52–61 (In Russian). <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.v41.i4.60>.
32. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Stokes waves in vortical fluid, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 309–318. <https://doi.org/10.20537/nd1403005>.
33. Nikulin V. V. Analytical model of motion of turbulent vortex rings in an incompressible fluid, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 4, pp. 558–564. <https://doi.org/10.1134/S0021894414040026>.
34. Kovalev V. P., Sizykh G. B. Axisymmetric helical flows of an ideal fluid, *Trudy MFTI*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 171–179 (In Russian).
35. Brutyan M. A., Krapivskiy P. L. The exact solution of the Navier-Stokes equations for the evolution of the vortex structure in a generalized shear-flow, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1992, vol. 32, no. 2, pp. 270–272.
36. Morozov K. I. Rotation of a droplet in a viscous fluid, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1997, vol. 85, no. 4, pp. 728–733. <https://doi.org/10.1134/1.558360>.
37. Greenspan H. P. *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge, Cambridge University Press, 1968, xii+328 pp.
38. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid, *Russ. Aeronaut.*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413–418. <https://doi.org/10.3103/S1068799815040091>.
39. Pivalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 271–283. <https://doi.org/10.20537/nd190306>.

УДК 532.51, 517.958:531.3-324

Конвективные слоистые течения вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости. Исследование температурного поля

© Н. В. Бурмашева^{1,2}, Е. Ю. Просвиряков¹¹ Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.² Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

Аннотация

Приведен класс точных решений уравнений Обербека—Буссинеска, подходящих для описания трехмерных нелинейных слоистых течений вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости. Неоднородное распределение поля скорости (имеет место зависимость компонент поля от горизонтальных координат) генерирует вертикальную закрутку в жидкости без внешнего вращения (без учета Кориолисова ускорения). Задание на границах области течения линейно распределенных теплового поля и поля касательных напряжений является одной из причин, индуцирующих конвекцию в вязкой несжимаемой жидкости. Основное внимание уделено исследованию свойств температурного поля. Изучено влияние вертикальной закрутки на распределение изолиний этого поля. Показано, что однородная составляющая температурного поля может стратифицироваться на несколько зон относительно отсчетного значения, причем число таких зон не превосходит девяти. Учет неоднородных составляющих поля температуры может приводить только к уменьшению этого числа. Также показано, что представленный в статье класс позволяет обобщить ранее полученные результаты по моделированию конвективных течений вязких несжимаемых жидкостей.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Burmashева N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 528–541. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1770>.

Сведения об авторах

Наталья Владимировна Бурмашева  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>
кандидат технических наук; научный сотрудник; сектор нелинейной вихревой гидродинамики¹; доцент; кафедра теоретической механики²; e-mail: nat_burm@mail.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>
доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики¹; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Ключевые слова: точное решение, слоистая конвекция, касательное напряжение, противотечение, стратификация, система уравнений Обербека—Буссинеска, вертикальная закрутка.

Получение: 22 января 2020 г. / Исправление: 23 июля 2020 г. /

Принятие: 24 августа 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.



УДК 519:63.4:532.51.5

Бездивергентный метод коллокаций и наименьших квадратов для расчета течений несжимаемой жидкости и его эффективная реализация

© *Е. В. Ворожцов*¹, *В. П. Шапеев*^{1,2}

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

² Новосибирский национальный исследовательский университет, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

Аннотация

Рассматривается проблема ускорения итерационного процесса численного решения методом коллокаций и наименьших квадратов (КНК) краевых задач для уравнений с частными производными. Для ее решения предложено применять одновременно три способа ускорения итерационного процесса: предобуславливатель, многосеточный алгоритм и метод Крылова. Предложен метод нахождения оптимальных значений параметров двухпараметрического предобуславливателя. Использование найденного предобуславливателя существенно ускоряет итерационный процесс. Исследовано влияние на итерационный процесс всех трех способов его ускорения: каждого по отдельности, а также при их комбинированном применении. Наибольший вклад дает применение алгоритма, использующего подпространства Крылова. Комбинированное применение одновременно всех трех способов ускорения итерационного процесса решения краевых задач для двумерных уравнений Навье–Стокса уменьшило время их решения на компьютере до 362 раз по сравнению со случаем, когда применялся только один из них — предобуславливатель.

Ключевые слова: предобуславливание, подпространства Крылова, многосеточные алгоритмы, уравнения Навье–Стокса, метод коллокаций и наименьших квадратов.

Получение: 25 ноября 2019 г. / Исправление: 29 июля 2020 г. /

Принятие: 24 августа 2020 г. / Публикация онлайн: 21 сентября 2020 г.

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ворожцов Е. В., Шапеев В. П. Бездивергентный метод коллокаций и наименьших квадратов для расчета течений несжимаемой жидкости и его эффективная реализация // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 542–573. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1758>.

Сведения об авторах

Евгений Васильевич Ворожцов <https://orcid.org/0000-0003-2753-8399>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстротекающих процессов; e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

Василий Павлович Шапеев <https://orcid.org/0000-0001-6761-7273>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. термомеханики и прочности новых материалов; e-mail: shapeev@itam.nsc.ru

Введение. Для численного решения уравнений Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости к настоящему времени получили широкое распространение конечно-разностные методы [1], методы конечных элементов [2] и методы конечного объёма [3].

В течение последних трёх десятилетий за рубежом получает всё большее распространение класс численных методов, в которых дискретизация краевой или начально-краевой задачи для уравнений Навье—Стокса приводит к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Одним из таких методов является коллокационный LSFEM — «коллокационный метод конечных элементов и наименьших квадратов» [2, 4], в котором метод конечных элементов (МКЭ) комбинируется с методом наименьших квадратов. Методу LSFEM присущи некоторые недостатки, в частности, нарушается закон сохранения массы, который для несжимаемой жидкости выражается уравнением $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, где \mathbf{V} — вектор скорости жидкости [5, 6]. Другой недостаток метода LSFEM — трудности, возникающие при вычислении давления с использованием вектора скорости.

В методе граничных элементов (ВЕМ) [7] также возникает переопределенная СЛАУ. Причиной этого является то, что в этом методе используются условия непрерывности решения и его производной в направлении нормали к каждому граничному элементу. Включение этих условий в СЛАУ как раз и приводит к её переопределенности.

В математической постановке краевые задачи для уравнений Навье—Стокса плохо обусловлены при больших числах Рейнольдса, что соответствует физике описываемого ими процесса. Поэтому очень важным является выбор и реализация метода решения СЛАУ, которые получаются после применения того или иного корректного способа аппроксимации этих уравнений и наследуют плохую обусловленность исходной краевой задачи.

Известно, что СЛАУ, полученное аппроксимацией дифференциальной задачи методом коллокации без комбинирования его с методом наименьших квадратов, даже при умеренных числах Рейнольдса имеет плохую обусловленность [8]. Поэтому актуальна задача расширения возможностей существующих методов за счет улучшения их свойств.

Метод коллокаций и наименьших квадратов (КНК) численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений возник недавно. В настоящее время предложены и опубликованы несколько различных вариантов этого метода, которые имеют заметные преимущества перед первоначальными вариантами [9–13]. В частности, в [9] было предложено в методе КНК дополнить систему уравнений коллокаций линейными условиями согласования локального решения в каждой ячейке с локальными решениями, взятыми во всех соседних с ней ячейках.

В работе [14] было предложено вводить пять управляющих (регулируемых) параметров в условия согласования с целью уменьшения числа обусловленности. Было показано с помощью численных экспериментов, что область значений параметров, при которых глобальная СЛАУ, определяющая глобальное решение задачи в методе КНК, хорошо обусловлена, в значительной мере пересекается с областью, где наблюдается наилучшая точность численного решения задачи. В работах [13, 15] показано, что включение условий согласования в локальные СЛАУ позволяет существенно уменьшить число

обусловленности этих СЛАУ от значений 10^5 до значений в пределах от 3 до 10 по сравнению со случаем, когда они не используются.

Вследствие комбинирования метода коллокации с методом наименьших квадратов улучшаются его свойства, в частности обусловленность СЛАУ приближенной задачи, гладкость и точность ее решений. На самом деле метод КНК в сравнении с методами коллокаций и LSFEM обладает и другими улучшенными свойствами:

- (i) в этом методе, в отличие от LSFEM, обеспечивается точное выполнение закона сохранения массы благодаря использованию соленоидального базиса;
- (ii) отсутствует проблема увязывания давления с вектором скорости, потому что давление вычисляется в методе КНК *одновременно* с составляющими вектора скорости.

Отметим также, что метод КНК позволяет эффективно решать задачи для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений в частных производных (УЧП) на различных адаптивных сетках с прямоугольными и треугольными ячейками.

Для достижения большего ускорения решения приближенной задачи в данной работе рассматривается комбинированное применение трех способов ускорения итерационного процесса: предобуславливателя, операции продолжения на многосеточном комплексе, являющейся составной частью метода Федоренко [16], и метода Крылова [17, 18].

В работе [13] для аппроксимации составляющих скорости использованы многочлены второй степени по пространственным переменным, а для аппроксимации давления — многочлены первой степени, так что общее количество базисных вектор-функций составляло 12 в представлении приближенного решения в пространстве полиномов. Здесь с целью повышения точности численного решения применялся многочлен второй степени и для аппроксимации давления. В этом случае в общей сложности имеются 15 независимых базисных функций — полиномов в выбранном пространстве. Их совокупность можно назвать соленоидальным базисом, так как каждый базисный вектор является бездивергентным. Поэтому уравнение неразрывности и, следовательно, закон сохранения массы удовлетворяется численным решением задачи во всей расчётной области. В дальнейшем метод КНК, в котором использовались 12 базисных векторов [13, 15], будем называть методом КНК₁₂, а метод КНК с 15 базисными векторами — методом КНК₁₅.

При использовании конечно-разностных методов и методов конечного объема для численного решения задач с открытой границей, через которую жидкость может свободно вытекать из канала, существует проблема устойчивых граничных условий на открытой границе. Некорректная формулировка и/или плохая аппроксимация (реализация) принятой формулы граничного условия задачи на такой границе приводит к неустранимой погрешности, которая распространяется на всю область решения задачи. В литературе описано несколько видов записи граничных условий на открытой границе. В частности, в [19, 20] применялось граничное условие Неймана $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0$, которое выполняется точно только в пределе для канала бесконечной длины. Здесь x_1 — координата, отсчитываемая вдоль стенки канала, ϕ — зависимая переменная. В работе [21] использовалось граничное условие вида $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} = 0$, где

ψ — функция тока, ω — завихренность поля скоростей частиц жидкости. С целью уменьшения ошибок численного решения, вызванных такими искусственными граничными условиями, обычно также используют прием значительного увеличения длины канала. Это приводит к существенному увеличению машинного времени решения задачи, так как оно пропорционально количеству ячеек пространственной расчетной сетки.

Целью исследований, описываемых в предлагаемой статье, является повышение точности и скорости сходимости нового варианта метода КНК для численных расчетов двумерных стационарных ламинарных течений вязких несжимаемых жидкостей. Осуществление поставленной цели достигается реализацией следующих новых элементов вычислительного алгоритма:

- 1) новый вариант метода КНК — метод КНК₁₅;
- 2) предлагается использовать двухпараметрический предобуславливатель в варианте метода КНК₁₅;
- 3) показано, как в отличие от конечно-разностных методов можно реализовать в различных вариантах метода КНК граничное условие в выходном сечении канала без использования рядов законтурных ячеек и без искусственного увеличения в расчетах длины канала.

Это существенное преимущество метода КНК перед конечно-разностными методами и методами конечного объема.

1. Описание метода КНК. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений Навье—Стокса

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla p = \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{V} - \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \quad (2)$$

в области Ω с границей $\partial\Omega$. В уравнениях (1) x_1, x_2 — декартовы пространственные координаты; $\mathbf{V} = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$ — вектор скорости; $p = p(x_1, x_2)$ — давление; $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ — заданная вектор-функция, Re — число Рейнольдса, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Система (1) решается при граничных условиях Дирихле (2), где $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2) = (g_1, g_2)$ — заданная вектор-функция. Давление определяется из (1), (2) с точностью до постоянной. В дальнейшем будем подбирать эту постоянную так, чтобы выполнялось условие

$$\iint_{\Omega} p dx_1 dx_2 = 0. \quad (3)$$

В качестве области решения в настоящей работе рассматривается прямоугольник

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq L, \quad 0 \leq x_2 \leq H\}, \quad (4)$$

где $L > 0$ и $H > 0$ — заданные длины сторон области (4) вдоль осей x_1 и x_2 , соответственно. Величина H использовалась в конкретных расчетах в качестве характерной длины при обезразмеривании переменных, и она же входит естественным образом в определение числа Рейнольдса Re в (1). Далее краевую задачу для УЧП будем называть дифференциальной задачей.

В данной задаче (1)–(4) область (4) покрывается сеткой из квадратных ячеек Ω_{ij} , $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$, $I \geq 1$, $J \geq 1$. Для поиска кусочно-аналитического решения задачи удобно ввести локальные координаты y_1, y_2

в каждой ячейке Ω_{ij} . Зависимость локальных координат от глобальных координат x_1, x_2 задается формулами $y_m = (x_m - x_{m,i,j})/h$, $m = 1, 2$, где $x_{m,i,j}$ — значение координаты x_m в центре ячейки Ω_{ij} , а h — половина длины стороны квадратной ячейки, $h = L/(2I) = H/(2J)$. Пусть $\mathbf{u}(y_1, y_2) = (u_1, u_2) = \mathbf{V}(hy_1 + x_{1,i,j}, hy_2 + x_{2,i,j})$, $q(y_1, y_2) = p(hy_1 + x_{1,i,j}, hy_2 + x_{2,i,j})$. В локальных переменных уравнения Навье—Стокса принимают следующий вид:

$$\Delta u_m - \operatorname{Re} h \left(u_1 \frac{\partial u_m}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial u_m}{\partial y_2} + \frac{\partial q}{\partial y_m} \right) = \operatorname{Re} h^2 f_m, \quad m = 1, 2; \quad (5)$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$. Линеаризация по Ньютону уравнений (5) приводит к формуле

$$\xi \left[\Delta u_m^{s+1} - (\operatorname{Re} h) (u_1^s u_{m,y_1}^{s+1} + u_1^{s+1} u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^{s+1} + u_2^{s+1} u_{m,y_2}^s + q_{y_m}^{s+1}) \right] = \xi F_m. \quad (6)$$

Здесь $s = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации по нелинейности, u_1^s, u_2^s, q^s — известное приближение решения на s -ой итерации, начиная с выбранного начального приближения с индексом $s = 0$, $F_m = \operatorname{Re} [h^2 f_m - h(u_1^s u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^s)]$, где $u_{m,y_l} = \partial u_m / \partial y_l$, $q_{y_m} = \partial q / \partial y_m$, $l = 1, 2$. Здесь, как и в [13, 15], введён задаваемый пользователем параметр ξ с целью управления величиной числа обусловленности переопределённой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая должна решаться в каждой ячейке Ω_{ij} .

Приближенное решение в каждой ячейке Ω_{ij} ищется в виде линейной комбинации базисных вектор-функций φ_l :

$$(u_1^s, u_2^s, q^s)^\top = \sum_{l=1}^{m_b} b_{i,j,l}^s \varphi_l, \quad (7)$$

где верхний индекс \top обозначает операцию транспонирования, а m_b — задаваемое пользователем количество базисных вектор-функций. В рассматриваемом варианте метода φ_l являются многочленами. Таким образом, искомое приближенное глобальное решение задачи является кусочно-полиномиальным. А часть решения (7) в каждой ячейке представляет собой локальное решение в окрестности начала локальной системы координат в ячейке.

Базисные вектор-функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1, 0, 0)^\top, & \varphi_2 &= (y_1, -y_2, 0)^\top, & \varphi_3 &= (y_2, 0, 0)^\top, \\ \varphi_4 &= (y_1^2, -2y_1 y_2, 0)^\top, & \varphi_5 &= (-2y_1 y_2, y_2^2, 0)^\top, & \varphi_6 &= (y_2^2, 0, 0)^\top, \\ \varphi_7 &= (0, 1, 0)^\top, & \varphi_8 &= (0, y_1, 0)^\top, & \varphi_9 &= (0, y_1^2, 0)^\top, \\ \varphi_{10} &= (0, 0, 1)^\top, & \varphi_{11} &= (0, 0, y_1)^\top, & \varphi_{12} &= (0, 0, y_2)^\top, \\ \varphi_{13} &= (0, 0, y_1^2)^\top, & \varphi_{14} &= (0, 0, y_1 y_2)^\top, & \varphi_{15} &= (0, 0, y_2^2)^\top. \end{aligned} \quad (8)$$

Их совокупность можно назвать соленоидальным базисом, так как $\operatorname{div} \varphi_l = 0 \forall l$. Таким образом, достоинством предложенного варианта метода является то, что уравнение неразрывности и, следовательно, закон сохранения массы удовлетворяется численным решением задачи во всей расчётной области.

Набор базисных функций, применявшийся в [13, 15], получается из набора (8), если положить $m_b = 12$ в (7), оставив в (8) только первые 12 базисных вектор-функций.

Локальной СЛАУ будем называть далее систему уравнений, определяющую приближённое решение в каждой ячейке, а объединение всех локальных СЛАУ — глобальной СЛАУ. Основными уравнениями, определяющими решение приближённой задачи, являются уравнения коллокаций. Они получаются в результате подстановки в уравнения (6) выражений (7) и координат точек коллокаций. Количество этих точек и их расположение внутри ячейки может варьироваться в различных вариантах метода. В данной работе были реализованы три варианта задания координат точек коллокаций. Обозначим через N_c число точек коллокации внутри каждой ячейки. При $N_c = 2$ локальные координаты точек коллокаций таковы: (ω, ω) , $(-\omega, \omega)$, где ω — задаваемое пользователем значение в интервале $0 < \omega < 1$. При $N_c = 4$ локальные координаты точек коллокаций имеют вид $(\pm\omega, \pm\omega)$. В случае $N_c = 8$ координаты точек коллокаций задавались следующим образом: расположение первых четырех точек было взято таким же, как при $N_c = 4$, а координаты следующих четырех точек задавались по формулам $(\pm\omega, 0)$, $(0, \pm\omega)$. Подставляя (7), а также численные значения координат каждой точки коллокации в (6), получим $2N_c$ линейных алгебраических уравнений относительно искомых b_m^{s+1} :

$$\sum_{m=1}^{m_b} a_{\nu, m}^{(1)} \cdot b_m^{s+1} = f_{\nu}^s, \quad \nu = 1, \dots, 2N_c.$$

Следуя [13], дополним систему уравнений приближённой задачи в ячейке Ω_{ij} линейными условиями согласования локального решения в каждой ячейке с локальными решениями, взятыми во всех соседних с ней ячейках. Эти условия записываются в отдельных точках (называемых точками согласования) на сторонах ячейки Ω_{ij} , которые являются общими с соседними ячейками. Условия согласования берутся в виде

$$h \frac{\partial(u^+)^n}{\partial n} + \eta(u^+)^n = h \frac{\partial(u^-)^n}{\partial n} + \eta(u^-)^n, \quad (9)$$

$$h \frac{\partial(u^+)^{\tau}}{\partial n} + (u^+)^{\tau} = h \frac{\partial(u^-)^{\tau}}{\partial n} + (u^-)^{\tau}, \quad (10)$$

$$q^+ = q^-. \quad (11)$$

Здесь $h \frac{\partial}{\partial n} = h(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}) = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$; $n = (n_1, n_2)$ — внешняя нормаль к стороне ячейки Ω_{ij} ; $(\cdot)^n$, $(\cdot)^{\tau}$ — нормальная и касательная составляющие вектора скорости по отношению к стороне ячейки; u^+ , u^- — пределы функции u и q при стремлении аргументов к их значениям в точке согласования изнутри и снаружи ячейки Ω_{ij} . Здесь, как и в [13, 15], введён параметр η с целью управления величиной числа обусловленности матрицы СЛАУ, которая должна решаться в каждой ячейке Ω_{ij} .

Для однозначного определения давления в решении задаём его значение в одной точке области либо аппроксимируем условие (3) по формуле

$$\frac{1}{h} \left(\iint_{\Omega_{ij}} q \, dy_1 \, dy_2 \right) = \frac{1}{h} \left(-I^* + \iint_{\Omega_{ij}} q^* \, dy_1 \, dy_2 \right). \quad (12)$$

Здесь I^* — интеграл по всей области Ω , рассчитанный как сумма интегралов по каждой ячейке на предыдущей итерации, q^* — давление в ячейке на предыдущей итерации.

Обозначим через N_m число точек согласования для составляющих вектора скорости на сторонах каждой ячейки. При $N_m = 4$ координаты этих точек согласования задаются формулами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. При $N_m = 8$ координаты точек согласования таковы: $(\pm 1, -\zeta)$, $(\pm 1, \zeta)$, $(-\zeta, \pm 1)$, $(\zeta, \pm 1)$, где $0 < \zeta < 1$. В расчетах, результаты которых представлены ниже, использовалось значение $\zeta = 1/2$. Условия согласования для давления (11) задаются в четырех точках с координатами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Используя (7), подставим координаты этих точек в каждое из трех условий согласования (9)–(11). Из первых двух условий получим $2N_m$ линейных алгебраических уравнений для составляющих скорости. Подстановка представления (7) в (11) дает ещё четыре линейных алгебраических уравнения согласования.

В настоящей работе давление задавалось в нижней левой вершине ячейки $\Omega_{1,1}$ или же использовалось условие (12). Если сторона ячейки лежит на границе области Ω , то в соответствующих точках на стороне ячейки вместо условий согласования в локальной СЛАУ выписываются граничные условия: $u_m = g_m$, $m = 1, 2$.

Объединяя уравнения коллокаций, согласования и уравнения, полученные из краевых условий, если ячейка $\Omega_{i,j}$ граничная, в каждой ячейке получим СЛАУ вида

$$A_{i,j}^s \cdot \mathbf{X}_{i,j}^{s+1} = \mathbf{f}_{i,j}^{s,s+1}, \quad (13)$$

где $\mathbf{X}_{i,j}^{s+1} = (b_{i,j,1}^{s+1}, \dots, b_{i,j,m_b}^{s+1})^\top$. В варианте метода КНК, описываемом в настоящей работе, система (13) переопределенная. $A_{i,j}^s$ — матрица полного ранга с системой независимых вектор-столбцов. Глобальную СЛАУ, полученную объединением всех локальных СЛАУ, решаем итерационно. При этом на каждой глобальной $(s + 1)$ -й итерации последовательно перебираем все ячейки в области Ω и решение локальных СЛАУ (13) отыскиваем, применяя QR -декомпозицию матриц с ортогональными матрицами Гивенса либо Хаусхолдера. В правой части уравнений (9)–(11) в качестве u^- , q^- берем либо значения решения на $(s + 1)$ -й итерации, если они уже сосчитаны на этой итерации, либо их значения на предыдущей итерации. Как известно, решение СЛАУ, отыскиваемое применением QR -декомпозиции матриц, можно получить применением метода нормальных уравнений. Оба способа при отсутствии ошибок округлений дают один и тот же вектор $\mathbf{X}_{i,j}$, называемый псевдорешением переопределенной СЛАУ, матрица которой имеет независимые вектор-столбцы [23, 24]. На этом решении достигается минимум евклидовой нормы невязки $A_{i,j}^s \cdot \mathbf{X}_{i,j}^{s+1} - \mathbf{f}_{i,j}^{s,s+1}$. Известно также, что первый из указанных способов решения СЛАУ предпочтительнее второго, так как в методе нормальных уравнений при построении решения необходимо обратить матрицу $A^\top A$, число обусловленности которой $\text{cond}(A^\top A) = (\text{cond}(A))^2$. Поэтому при решении СЛАУ методом нормальных уравнений происходит более быстрое накопление ошибок округлений в процессе арифметических вычислений, чем при применении метода QR -декомпозиции.

2. Предобуславливатели для метода КНК. Опустим далее в (13) для краткости верхние и нижние индексы:

$$A\mathbf{X} = \mathbf{f}. \quad (14)$$

При численном решении уравнений Навье—Стокса различными численными методами при больших числах Рейнольдса получаются плохо обусловленные СЛАУ. Поэтому из-за ошибок округлений в процессе решения получается неприемлемо большая погрешность или расходящееся решение [24]. Чтобы уменьшить негативное влияние плохой обусловленности СЛАУ на величину погрешности решения, на скорость сходимости итераций при применении итерационных методов традиционные методы решения модифицируют, комбинируя их с дополнительными численными алгоритмами. Один из способов модификации известных методов решения СЛАУ заключается в предобуславливании ее матрицы так, что решение исходной системы сводится к решению системы, матрица которой обусловлена лучше, чем матрица исходной системы. Здесь числа обусловленности матриц A и R вычислялись в спектральной норме [23, 24] с использованием программных пакетов *Mathematica* и *MATLAB*. В них необходимые для этого вычисления осуществляются путем применения операторов действий с матрицами. Для исключения каких-либо ошибок проводилось сравнение результатов, полученных с помощью этих программных пакетов.

При применении описанной выше процедуры аппроксимации краевой задачи для уравнений Навье—Стокса матрица A получается с независимыми столбцами и матрица $A_1 = A^T A$ — несингулярная. Спектральное число обусловленности матрицы A вычисляется по формуле

$$\kappa_2(A) = \sqrt{\|A_1\|_2 \cdot \|A_1^{-1}\|_2} = \sigma_{\max}/\sigma_{\min},$$

где $\|\cdot\|_2$ — спектральная матричная норма; σ_{\max} и σ_{\min} — соответственно максимальное и минимальное сингулярное число матрицы A , A_1^{-1} — матрица, обратная по отношению к A_1 .

Классический диагональный предобуславливатель строится следующим образом. Сделаем в (14) замену [7]: $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$, где \mathbf{C} — квадратная матрица порядка m_b . Тогда система (14) принимает вид $\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{Y} = \mathbf{f}$. Нужно подобрать матрицу \mathbf{C} так, чтобы матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ была близкой к единичной матрице или, говоря в более общем смысле, чтобы число обусловленности матрицы \mathbf{B} было меньше в сравнении с обусловленностью матрицы \mathbf{A} . В качестве \mathbf{C} , как правого предобуславливателя, в [7] использована матрица $\mathbf{C} = \mathbf{R}^{-1}$, где \mathbf{R} — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят квадратные корни из диагональных элементов матрицы $A_1 = A^T A$. После того как решение системы $\mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{f}$ найдено, вычисляем искомый вектор \mathbf{X} по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{Y}$.

Введение параметров в предобуславливатель увеличивает его возможности для дальнейшего понижения числа обусловленности, так как эти параметры можно затем подбирать из требования минимизации числа обусловленности. В нашем случае мы построили предобуславливатель, зависящий от параметров ξ и η , входящих в уравнения (6) и (9) соответственно.

Обозначим через A_{col} матрицу размера $2N_c \times m_b$, получаемую при подстановке в (6) решения (7) и координат точек коллокации; ее элементами являются коэффициенты при m_b искомым коэффициентах в представлении решения (7). Заметим, что матрицу A_{col} можно представить в виде $A_{\text{col}} = \bar{A}_{\text{col}} \cdot D$, где $D = \text{diag}(\xi, \dots, \xi)$ — диагональная матрица порядка m_b , а матрица \bar{A}_{col}

получается из СЛАУ (6) при $\xi = 1$. То есть матрицу D можно рассматривать как правый диагональный однопараметрический предобуславливатель матрицы A_{col} .

Давление входит в уравнение количества движения (6) только в виде производных $\partial q/\partial y_1$ и $\partial q/\partial y_2$, поэтому 10-й столбец матрицы A_{col} нулевой. Вследствие этого матрица A_{col} неполного ранга, в матрице $A_{\text{col}}^T A_{\text{col}}$ при любом $N_c > 1$ десятый столбец также состоит только из нулей и для этой матрицы не существует обратной.

Чтобы с помощью матрицы A_{col} потенциально можно было определить решение, необходимо включить в нее строку, соответствующую уравнению (12). Эта строка при $m_b = 15$ имеет следующий вид: $L_{2N_c+1} = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, h, 0, 0, h/3, 0, h/3\}$. Пусть

$$\tilde{A}_{\text{col}} = \begin{pmatrix} A_{\text{col}} \\ L_{2N_c+1} \end{pmatrix}.$$

В этой матрице десятый столбец ненулевой, и \tilde{A}_{col} становится при $N_c \geq 7$ матрицей полного ранга. При заданном численном значении полушага h элементы матрицы A зависят от ξ и η .

Характеристические уравнения, отвечающие методам КНК₁₂ и КНК₁₅, — алгебраические уравнения, соответственно, 12-й и 15-й степени. Поэтому невозможно получить в замкнутом аналитическом виде выражения для собственных чисел соответствующих матриц A_1 . Тем не менее мы показываем ниже, что можно получить информацию о некоторых свойствах матрицы A_1 и, следовательно, о свойствах рассматриваемого двухпараметрического предобуславливателя, исследуя аналитические выражения для ее элементов. Выпишем в аналитическом виде эти выражения для случая внутренней ячейки (i, j) . Так как матрица A_1 симметричная, достаточно привести выражения для элементов, входящих в верхнюю треугольную часть этой матрицы. Порядок матрицы A_1 равен m_b , где $m_b = 15$ для рассматриваемого здесь метода КНК₁₅. Размер верхней треугольной части матрицы A_1 равен $m_b \cdot (m_b + 1)/2$, так что при $m_b = 15$ в этой части матрицы A_1 содержатся 120 элементов. Обозначим через $\beta_{i,j}$ элементы этой матрицы, $i, j = 1, \dots, m_b$. Предполагается, что число точек коллокаций в ячейке $N_c = 8$, поэтому общее число уравнений коллокаций $2N_c = 16$. Кроме того, в матрицу A включены 4 строки, соответствующие четырем условиям согласования для давления (по одному в середине каждой стороны ячейки), и 16 строк, соответствующих условиям согласования для составляющих вектора скорости (в двух точках на каждой из четырех сторон). И, наконец, одна строка учитывает интегральное условие для давления (12).

Сначала приведем выражения для тех элементов $\beta_{i,j}$, в которые входит параметр η и/или полушаг сетки h :

$$\beta_{\mu,\nu} = \xi^2 \left(\sum_{k=0}^6 a_{10+k,\mu} a_{11+k,\nu} + \sum_{k=1}^9 a_{k,\mu} a_{k,\nu} \right) + P(\eta, h, \mu, \nu), \quad (15)$$

где

$$(\mu, \nu) = (1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 9), (3, 3),$$

$$(3, 5), (4, 4), (4, 6), (4, 8), (5, 5), (5, 7), (5, 9), (6, 6), (7, 7), (7, 9), (8, 8), (9, 9), \\ (11, 11), (12, 12), (13, 13), (15, 15);$$

$$P(\eta, h, \mu, \nu) = \delta_\mu^1 \delta_\nu^2 \cdot 4\eta + \delta_\mu^1 \delta_\nu^4 \cdot (1 + 4\eta^2) + \delta_\mu^1 \delta_\nu^6 \cdot (12 + \eta^2) + \delta_\mu^2 \delta_\nu^2 \times \\ \times (10 + 8\eta^2) + \delta_\mu^2 \delta_\nu^4 \cdot 12\eta - \delta_\mu^2 \delta_\nu^5 \cdot 12\eta + \delta_\mu^2 \delta_\nu^6 \cdot \eta - \delta_\mu^2 \delta_\nu^7 \cdot 4\eta - \delta_\mu^2 \delta_\nu^9 \cdot \eta + \\ + \delta_\mu^3 \delta_\nu^3 \cdot (16 + \eta^2) - \delta_\mu^3 \delta_\nu^5 \cdot 2\eta + \delta_\mu^4 \delta_\nu^4 \cdot \left(\frac{145}{4} + 8\eta^2\right) + \delta_\mu^4 \delta_\nu^6 \cdot (3 + \eta^2) - \\ - \delta_\mu^4 \delta_\nu^8 \cdot 2\eta + \delta_\mu^5 \delta_\nu^5 \cdot \left(\frac{145}{4} + 8\eta^2\right) + \delta_\mu^6 \delta_\nu^6 \cdot \left(\frac{\eta^2}{4} + 36\right) + \delta_\mu^7 \delta_\nu^7 \cdot (4 + 4\eta^2) \delta_\mu^7 \delta_\nu^9 \times \\ \times (12 + \eta^2) + \delta_\mu^8 \delta_\nu^8 \cdot (16 + \eta^2) + \delta_\mu^9 \delta_\nu^9 \cdot \left(36 + \frac{\eta^2}{4}\right) + \\ + 2\delta_\mu^{11} \delta_\nu^{11} + 4\delta_\mu^{12} \delta_\nu^{12} + \delta_\mu^{13} \delta_\nu^{13} \left(\frac{h^2}{9} + 2\right) + \delta_\mu^{15} \delta_\nu^{15} \left(\frac{h^2}{9} + 4\right).$$

Здесь δ_i^j — символ Кронекера. Остальные элементы матрицы A_1 можно записать в виде

$$\beta_{i,j} = \xi^2 \sum_{m=1}^{2N_c} \sum_{p=1}^{2N_c} a_{m,i} a_{p,j}, \quad i, j = 1, \dots, m_b. \quad (16)$$

Величины $a_{m,l}$, $m = 1, \dots, 2N_c$, $l = 1, \dots, m_b$, входящие в (15), (16), являются коэффициентами уравнений коллокаций, получаемых из уравнения (6) при подстановке в него разложений (7), значения $\xi = 1$ и локальных координат y_1, y_2 точек коллокаций. Согласно (6), эти коэффициенты зависят от решения на предыдущей итерации и от числа Рейнольдса. Анализ выражений (15), (16) приводит к следующим выводам.

1. Параметр ξ входит в величины $\beta_{i,j}$ только как множитель вида ξ^2 . Отсюда следует, что поверхность $\kappa_2 = \kappa_2(\xi, \eta)$ симметрична относительно оси η . Это позволяет ограничиться поиском оптимального значения параметра ξ только в полуплоскости $\xi > 0$.
2. Выражения, содержащие параметр η , входят в элементы $\beta_{i,j}$ как аддитивные слагаемые, при этом имеются как первая, так и вторая степени этого параметра. Поэтому ясно, что поверхность $\kappa_2 = \kappa_2(\xi, \eta)$ не является ни четной, ни нечетной функцией параметра η .
3. Полушаг h входит в формулы для $\beta_{i,j}$ только аддитивно и только во второй степени. Во многих задачах динамики жидкостей размеры расчетной области в плоскости обезразмеренных пространственных координат обычно являются величинами порядка $O(1)$. Кроме того, для обеспечения приемлемой точности в рассматриваемом методе КНК нужно применять, как правило, сетку, в которой не менее 10 ячеек в каждом пространственном направлении. Поэтому полушаг $h < 1$, и тогда $h^2 \ll 1$. В то же время остальные выражения, входящие в $\beta_{i,j}$, являются величинами порядка $O(1)$. Отсюда следует, что число обусловленности слабо зависит от величины полушага h при $h < 1$. Подчеркнем, что этот вывод является общим и не зависит от специфики конкретной прикладной задачи. Это обстоятельство можно эффективно использовать при поиске оптимальных значений параметров ξ, η , обеспечивающих минимум

числа обусловленности матрицы A_1 : достаточно найти эти оптимальные значения с использованием численного решения, найденного методом КНК на сравнительно грубой сетке. Затем оптимальные ξ, η можно будет использовать в расчетах на сетках, имеющих намного меньшие шаги.

Так как элементы матрицы \tilde{A}_{col} зависят от решения на предыдущей итерации, дальнейшее исследование свойств обусловленности необходимо осуществлять на заданной сетке при решении конкретной задачи. Соответствующие вычислительные эксперименты описываются ниже в п. 5.

В [13] для нахождения оптимальных значений $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$ в любой ячейке пространственной сетки из требования минимизации числа обусловленности $\kappa_2(\xi, \eta)$ применялся метод равномерного поиска с переменным шагом. Поиск минимума функции $\kappa_2(\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}})$ был осуществлен в [13] для случая метода КНК₁₂. Оказалось, что в точке минимума число $\kappa_2(\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}})$ удовлетворяет неравенствам $3 < \kappa_2(\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}) < 10$. Кроме того, было установлено, что оптимальные значения $\xi_{\text{opt}}, \eta_{\text{opt}}$ слабо зависят от положения конкретной ячейки в расчетной сетке, по меньшей мере, в случаях тех тестовых и эталонных задач, которые рассматривались в [13].

3. Вариант алгоритма Крылова с редукцией базиса подпространства. Для ускорения сходимости итераций во всех новых вариантах метода КНК, описываемых в настоящей работе, здесь применялся новый вариант известного метода [17], основанный на подпространствах Крылова и подробно изложенный ранее в [15, 22]. Важным отличием от [18] варианта метода Крылова, предложенного в [22], является автоматизация редукции базиса подпространства Крылова в области малых невязок, что позволяет избежать возможные АВОСТы программы в области малых невязок исходного СЛАУ при стремлении получить ее решение с достаточной точностью.

4. Ускорение сходимости итераций с помощью многосеточного алгоритма. Основная идея многосеточных алгоритмов состоит в селективном демпфировании гармоник погрешности решения задачи [16, 25]. В методе КНК, как и в других методах, количество итераций, необходимых для достижения заданной точности приближения к предельному решению, зависит от начального приближения. В работе применялась операция продолжения вдоль восходящей ветви V-цикла — расчеты на последовательности измельчающихся сеток — в качестве способа получения хорошего начального приближения для итераций на самой мелкой сетке среди сеток, используемых в многосеточном комплексе. Переход от грубой сетки к более мелкой делается с помощью операторов продолжения. Проиллюстрируем алгоритм операции продолжения на примере составляющей скорости $u_1(y_1, y_2, b_1, \dots, b_{15})$. Пусть $h_1 = h$, где h — полушаг грубой сетки, и пусть $h_2 = h_1/2$ — полушаг мелкой сетки, на которой нужно найти разложение функции u_1 по базису.

Шаг 1. Пусть X_1, X_2 — глобальные координаты центра ячейки грубой сетки. Сделаем в полиномиальное выражение для u_1 следующие подстановки: $y_l = (x_l - X_l)/h_l, l = 1, 2$. В результате получаем многочлен

$$U_1(x_1, x_2, b_1, \dots, b_{15}) = u_1\left(\frac{x_1 - X_1}{h_1}, \frac{x_2 - X_2}{h_1}, b_1, \dots, b_{15}\right). \quad (17)$$

Шаг 2. Пусть $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ — глобальные координаты центра любой из четырех ячеек мелкой сетки, содержащихся в ячейке грубой сетки. Сделаем в (17) замену $x_l = \tilde{X}_l + \tilde{y}_l \cdot h_2$, $l = 1, 2$. В результате получим многочлен второй степени $\tilde{U}_1 = P(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{15})$ от переменных \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 с коэффициентами $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{15}$.

Приведем выражения для коэффициентов \tilde{b}_j ($j = 1, \dots, 15$) представления решения в ячейке мелкой сетки с полушагом h_2 в терминах коэффициентов b_1, \dots, b_{15} представления решения в ячейке с полушагом $h_1 = 2h_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= b_1 - \delta x_1(b_2 - b_4\delta x_1) - \delta x_2(b_3 + 2b_5\delta x_1 - b_6\delta x_2), & \tilde{b}_2 &= \sigma_1(T_1 + b_5\delta x_2), \\ \tilde{b}_3 &= \sigma_1[b_3 + 2(b_5\delta x_1 - b_6\delta x_2)], & \tilde{b}_4 &= \sigma_2 b_4, & \tilde{b}_5 &= \sigma_2 b_5, & \tilde{b}_6 &= \sigma_2 b_6, \\ \tilde{b}_7 &= b_7 - \delta x_1(b_8 - b_9\delta x_1) + \delta x_2 T_1, & \tilde{b}_8 &= \sigma_1(b_8 - 2b_9\delta x_1 + 2b_4\delta x_2), \\ \tilde{b}_9 &= \sigma_2 b_9, & \tilde{b}_{10} &= b_{10} - \delta x_1 T_2 - \delta x_2(b_{12} - b_{15}\delta x_2), & \tilde{b}_{11} &= \sigma_1(T_2 - b_{13}\delta x_1), \\ \tilde{b}_{12} &= \sigma_1(b_{12} - b_{14}\delta x_1 - 2b_{15}\delta x_2), & \tilde{b}_{13} &= \sigma_2 b_{13}, & \tilde{b}_{14} &= \sigma_2 b_{14}, & \tilde{b}_{15} &= \sigma_2 b_{15}, \end{aligned}$$

где $\delta x_l = -(\tilde{X}_l - X_l)/h_1$, $\sigma_1 = h_2/h_1$, $\sigma_2 = \sigma_1^2$, $T_1 = b_2 - 2b_4\delta x_1 + b_5\delta x_2$, $T_2 = b_{11} - b_{13}\delta x_1 - b_{14}\delta x_2$. Заметим, что приведенные выше выражения для $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_9$ совпадают с выражениями, представленными в [13, 15] для случая, когда $m_b = 12$ в (7).

5. Результаты численных экспериментов. Тестирование. Рассмотрим следующее точное решение уравнений Навье—Стокса (1) [26]:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-2(1+x_2)}{(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2}, & u_2 &= \frac{2(1+x_1)}{(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2}, \\ p &= -\frac{2}{(1+x_1)^2 + (1+x_2)^2}, & 0 &\leq x_1, x_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что функции $u_1(x_1, x_2)$ и $u_2(x_1, x_2)$ описывают поле скорости с нулевой дивергенцией. Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 p dx_1 dx_2 &= 4G - \pi \ln 2 - 2i \left[\text{Li}_2\left(-\frac{i}{2}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{i}{2}\right) \right] \approx \\ &\approx -0.462\,613\,146\,772\,815\,498\,72, \end{aligned}$$

где $i = \sqrt{-1}$, G — постоянная Каталана, $G \approx 0.915\,965\,594\,177\,219\,015\,05$, $\text{Li}_2(z)$ — полилогарифмическая функция. Чтобы обеспечить выполнение равенства (3) с погрешностью, не превышающей погрешность машинных вычислений, давление p в (3) заменялось на величину $\bar{p} = p + 0.462\,613\,146\,772\,815\,5$.

Для вычисления среднеквадратичных величин погрешности решения использовались следующие формулы:

$$\begin{aligned} \text{Err}(\mathbf{u}(h)) &= \left[\frac{1}{2IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{\nu=1}^2 (u_{\nu,i,j} - u_{\nu,i,j}^{\text{ex}})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \text{Err}(p(h)) &= \left[\frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (p_{i,j} - p_{i,j}^{\text{ex}})^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mathbf{u}_{i,j}^{\text{ex}}$ и $p_{i,j}^{\text{ex}}$ — вектор скорости и давление, вычисленные из точного решения (18). Величины $\mathbf{u}_{i,j}$ и $p_{i,j}$ обозначают численное решение, вычисленное в центре ячейки Ω_{ij} по описанному выше методу КНК. Величины ν_u и ν_p — порядки сходимости погрешностей $\mathbf{u}_{i,j}$ и $p_{i,j}$ соответственно, которые вычислялись по известным формулам [12, 27]. Пусть $b_{i,j,l}^s$, $s = 0, 1, \dots$ — значения коэффициентов $b_{i,j,l}$ в (7) на s -ой итерации. Использовалось следующее условие окончания итераций:

$$\delta b^{n+1} < \varepsilon, \tag{20}$$

где $\delta b^{n+1} = \max_{i,j} \left(\max_{1 \leq l \leq m_b} |b_{i,j,l}^{n+1} - b_{i,j,l}^n| \right)$, а $\varepsilon < h^2$ — малая положительная величина. В дальнейшем будем называть величину δb^{n+1} псевдопогрешностью приближенного решения. Наряду с условием (20) для окончания итераций по нелинейности также применялся следующий критерий:

$$\delta \mathbf{u}^{n+1} = \| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \| < \varepsilon_2, \tag{21}$$

где $\| \cdot \|$ — евклидова норма вектора, ε_2 — заданная малая положительная величина.

Была проведена серия расчетов с целью изучения влияния конкретного вида предобуславливателя на сходимость итераций по методу КНК₁₅. В этой серии расчетов критерием останова расчета было выполнение неравенства $\delta b^s < 10^{-9}$. Использовалась восходящая ветвь многосеточного алгоритма с переходами от грубой сетки из 5×5 ячеек к сеткам из 10×10 , 20×20 , 40×40 и 80×80 ячеек. Результаты представлены на рис. 1. Крестиком на оси n показан тот номер итерации, начиная с которого расчет в рамках многосеточного алгоритма осуществляется на сетке из 80×80 ячеек. Видно, что отсутствует рост погрешности $\text{Err}(\mathbf{u}^n)$ на всех рассмотренных сетках с увеличением числа итераций также при отсутствии предобуславливателя, то есть когда $\xi = \eta = 1$. Наоборот, в случае метода КНК₁₂ указанная погрешность начинает расти после перехода к расчету на сетке из 80×80 ячеек, см. [15, Fig. 2]. Диагональный предобуславливатель имеет удобство в использовании, так как он не содержит регулируемых параметров и обеспечивает устойчивость счета по методу КНК₁₅.

Изучалось также влияние включения условия (12) в локальную СЛАУ на скорость сходимости метода КНК₁₅ на сетке из 40×40 ячеек при числе Рейнольдса $\text{Re} = 1000$, $L = H = 1$ в (4), $N_c = 8$. Критерием останова счета было выполнение неравенства $\delta b^n < 10^{-12}$. Для сравнения был проведен расчет, когда условие (12) не использовалось, а вместо него задавалось значение

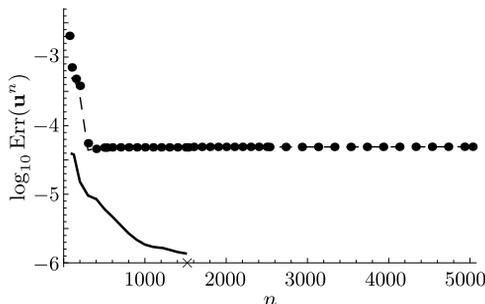


Рис. 1. Погрешность $\text{Err}(\mathbf{u}^n)$, полученная при расчете по методу КНК₁₅ при использовании различных предобуславливателей: (—) $\xi = \xi_{\text{opt}} = 0.05$, $\eta = \eta_{\text{opt}} = 1.75$; (---) $\xi = \eta = 1$; (.....) — диагональный предобуславливатель

[Figure 1. Error $\text{Err}(\mathbf{u}^n)$ obtained at the computation by the method CLS₁₅ at the use of different preconditioners: (—) $\xi = \xi_{\text{opt}}$, $\eta = \eta_{\text{opt}}$; (---) $\xi = \eta = 1$; (.....) — the diagonal preconditioner]

давления в точке с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. В процессе итераций по методу КНК₁₅ абсолютная величина интеграла (3) падала со значения порядка 10^{-3} до величины порядка 10^{-13} – 10^{-14} , то есть до величины порядка машинных ошибок округления, накопленных в процессе решения задачи при расчетах по Фортран-программе с двойной точностью. Это может служить одним из критериев правильности программной реализации представленного выше метода КНК₁₅. Число невязок в алгоритме подпространств Крылова равно 10. Оказалось, что использование условия (12) вместо задания давления в одной точке позволяет уменьшить количество итераций по методу КНК₁₅ в 12 раз.

На рис. 2, 3 приводятся результаты численных экспериментов, в которых при решении уравнений Навье—Стокса по методу КНК тестовой задачи с точным решением (18) использовались только два из описанных в предыдущих разделах трех способов ускорения сходимости: двухпараметрический преобуславливатель и метод подпространств Крылова. Число Рейнольдса $Re = 1000, L = H = 1$ в (4), $N_c = 8$. Расчеты, результаты которых представлены на рис. 2 и 3, были выполнены на сетке из 40×40 ячеек. Критерием останова счета было выполнение неравенства $\delta b^n < 10^{-12}$.

Расчету без применения алгоритма Крылова соответствует на рис. 2 случай $k = 0$. В этой серии расчетов в переопределенной СЛАУ (13) использовалось условие (12). На рис. 2 видно, что с увеличением числа невязок k , используемых в методе Крылова, скорость сходимости численного решения по методу КНК₁₅ растет. Количество итераций N_{it} , необходимых для обеспечения выполнения неравенства $\delta b^n < 10^{-12}$, составляло 56392, 7753, 5784 и 4936 соответственно при $k = 0, 2, 10$ и 15. Таким образом, применение алгоритма Крылова при $Re = 1000$ с $k = 15$ позволило уменьшить количество итераций, требуемых для сходимости приближенного решения, в 11.4 раза по сравнению со случаем $k = 0$. При дальнейшем увеличении числа невязок

Рис. 2. Расчеты по методу КНК₁₅. Влияние числа невязок k , используемых в алгоритме Крылова, на скорость сходимости величины $\log_{10} \text{Err}(\mathbf{u}^n)$, где n — число итераций

[Figure 2. Computations by the CLS₁₅ method. The influence of the number of residuals k employed in the Krylov's algorithm on the convergence rate of the quantity $\log_{10} \text{Err}(\mathbf{u}^n)$, where n is the number of iterations]

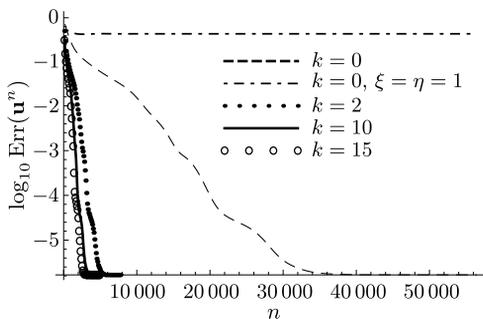
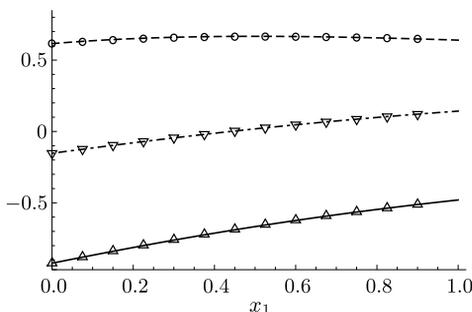


Рис. 3. Сравнение профилей приближенного и точного решений при $x_2 = 1/2$. Сетка 40×40 ячеек

[Figure 3. Comparison of the profiles of the approximate and exact solutions at $x_2 = 1/2$. The 40×40 grid]



k , используемых в алгоритме Крылова, увеличивается пропорционально k^3 машинное время, требуемое для решения ортогональным методом переопределенной системы для поправочных коэффициентов при невязках. Это приводит к увеличению суммарного машинного времени, требуемого для численного решения задачи. Поэтому для каждого конкретного случая применения алгоритма Крылова для ускорения итерационного процесса решения задачи методом КНК существует свое оптимальное значение количества невязок k в алгоритме Крылова.

Также был проведен расчет без использования предобуславливателя, то есть когда $\xi = \eta = 1$; кроме того, алгоритм на основе подпространств Крылова не применялся, см. штрихпунктирную линию на рис. 2. Псевдопогрешность δb^n в процессе итераций уменьшалась до заданной величины $\varepsilon = 10^{-12}$, но, несмотря на это, не было сходимости численного решения для скорости. Этот же эффект наблюдался и в случае метода КНК₁₂ [15].

На рис. 3 дано сравнение профилей компонент точного решения и решения, полученного методом КНК₁₅. Компоненты v_1 , v_2 и p приближенного решения изображены символами \triangle , \circ и ∇ , те же компоненты точного решения — сплошными, штриховыми и штрих-пунктирными линиями соответственно. Здесь видно хорошее согласие между численными результатами и аналитическим решением.

В [15] были представлены результаты серии тестовых расчетов по методу КНК₁₂ с целью определения порядков сходимости ν_u , ν_p при $Re = 1000$. Аналогичные расчеты были проведены также в случае метода КНК₁₅. Оказалось, что порядок сходимости ν_u численного решения по этому методу намного выше, чем в случае метода КНК₁₂, и превышает значение 2.15. Кроме того, увеличение количества базисных вектор-функций с 12 до 15 уменьшает погрешность скорости на три десятичных порядка и давления — на два десятичных порядка по сравнению с методом КНК₁₂.

Были проведены расчеты с применением восходящей ветви V-цикла с целью выяснения, как влияет применение только многосеточного алгоритма на ускорение сходимости метода КНК₁₅. Были также проведены расчеты, в которых движение по восходящей ветви многосеточного V-цикла применялось совместно с алгоритмом ускорения, основанным на подпространствах Крылова. В этой серии расчетов, выполненных при $Re = 1000$, применялись либо все сетки из последовательности $5 \cdot 2^m \times 5 \cdot 2^m$ ($m = 0, \dots, 4$), либо только сетка из 80×80 ячеек. Пусть K_{mgr} — количество последовательно используемых сеток в многосеточном комплексе. Если $K_{mgr} = 1$, то это означает, что в расчете используется только одна сетка, и это самая мелкая сетка с числом ячеек 80×80 . Расчету без применения ускорения сходимости с помощью подпространств Крылова соответствует случай $k = 0$, где k — число невязок, используемых в поправке по Крылову. Фактор ускорения итерационного процесса АФ в результате применения того или иного способа его ускорения вычисляется как отношение времени счета при $K_{mgr} = 1$, $k = 0$, ко времени счета при применении последовательности из нескольких сеток ($K_{mgr} > 1$, $k = 0$) или же последовательности сеток в сочетании с применением алгоритма Крылова на каждой сетке ($K_{mgr} > 1$, $k > 1$). Во всех расчетах этой серии использовались оптимальные значения $\xi_{opt} = 0.02$, $\eta_{opt} = 1.08$ в двухпараметрическом предобуславливателе; кроме того, в локальные матрицы A_{ij}

в (13) включалась аппроксимация (12) интегрального условия для давления. Критерием сходимости было выполнение неравенства $\delta b^n < 0.5 \cdot 10^{-9}$. Были рассмотрены следующие комбинации величин (K_{mgr}, k) : (1,0), (5,0), (1,5), (1,15), (5,5), (5,10), (5,15), (5,20). Оказалось, что величина АФ достигает наибольшего значения АФ = 362.38 при $K_{\text{mgr}} = 5, k = 10$.

Общий вывод из данной серии расчетов следующий: наиболее существенный вклад в ускорение итерационного процесса решения уравнений Навье—Стокса по методу КНК₁₂ дает совместное применение всех трех способов ускорения сходимости итераций.

Течение Пуазейля. Эта задача является примером течения в канале с открытой границей свободного истечения жидкости. Как отмечалось во введении, неправильная формулировка граничных условий на такой границе может привести к развитию неустойчивости расчета или к большим ошибкам решения внутри расчетной области. Те формы граничных условий, которые использовались различными авторами, носят искусственный характер, и для уменьшения ошибок, вызываемых применением таких условий, приходится брать очень большую длину канала, в котором рассматривается течение [21].

Ниже описывается алгоритм расчета методом КНК течения в канале с открытой выходной границей, который моделирует свободное истечение жидкости через нее и не требует задания на ней никаких искусственных граничных условий. Это позволяет существенно уменьшить размер пространственной расчетной области вдоль стенок канала и использовать такой размер, который достаточен для моделирования всех интересующих особенностей течения. Вместо искусственных условий в этой задаче естественно потребовать выполнения в каждом поперечном сечении канала закона сохранения массы:

$$\int_0^H v_1(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^H v_1(0, x_2) dx_2 = \text{const}, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \quad (22)$$

Расчет течения Пуазейля будем осуществлять в прямоугольной области (4). Следуя [28], введем безразмерные переменные $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{p}$ в (1), (2) по следующим формулам:

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{H}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{H}, \quad \bar{v}_1 = \frac{v_1}{U_{\text{cp}}}, \quad \bar{v}_2 = \frac{v_2}{U_{\text{cp}}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho U_{\text{cp}}^2}. \quad (23)$$

Здесь ρ — заданная плотность жидкости, $\rho = \text{const} > 0$, U_{cp} — средняя величина составляющей скорости $v_1(0, x_2)$ на входе в канал. Зададим функцию $v_1(0, x_2)$ в виде параболы: $v_1(0, x_2) = 4UH^{-2}x(H - x)$, где U — максимальное значение составляющей скорости $v_1(0, x_2)$. Тогда размерный объемный расход жидкости Q в сечении $x_1 = 0$ выражается формулой $Q = \int_0^H v_1(0, x_2) dx_2 = 2UH/3$. Отсюда следует, что $U_{\text{cp}} = 2U/3$. Поэтому максимальная безразмерная скорость \bar{U} во входном сечении $\bar{x}_1 = 0$ равна $\bar{U} = U/(2/3U) = 1.5$. Пусть \bar{Q} — безразмерный объемный расход в сечении $\bar{x}_1 = 0$. Тогда $\bar{Q} = Q/(U_{\text{cp}}H) = 1$. Число Рейнольдса вводится по формуле [28] $\text{Re} = U_{\text{cp}}H/\nu$, где ν — кинематическая вязкость жидкости, $\nu = \mu/\rho$. С учетом (23) легко найти, что $\bar{v}_1(0, \bar{x}_2) = 6\bar{x}_2(1 - \bar{x}_2)$. Ниже черточки в обозначениях безраз-

мерных величин опущены для краткости. Осуществляя обезразмеривание в формуле (22), легко получить равенство

$$\int_0^1 v_1(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^1 v_1(0, x_2) dx_2 = Q = 1, \quad 0 \leq x_1 \leq L/H. \quad (24)$$

Начальное приближение для составляющей скорости $v_1(x_1, x_2)$ задавалось при $x_1 > 0$ из требования выполнения равенства (24): $v_1 = 4(\frac{1}{2} - |x_2 - \frac{1}{2}|)$. Из этой формулы следует, что $\max_{0 \leq x_2 \leq 1} v_1 = 2$. Заметим, что начальное приближение $v_1(x_1, x_2) = 6x_2(1 - x_2)$ при $x_1 = 0$ и $v_1(x_1, x_2) = 2 - |4x_2 - 2|$ при $0 < x_1 \leq L/H$ является разрывным в сечении $x_1 = 0$. Это, однако, не вызывало каких-либо проблем при расчетах течения Пуазейля по методу КНК.

При численных расчетах рассматриваемой задачи уравнение (24) включалось в переопределенную систему (13) наряду с условием для давления (12). При этом оно включалось на грани $y_1 = 1$ в каждой ячейке и имело следующий вид:

$$2h[b_{i,j,1} + b_{i,j,2} + b_{i,j,4} + (1/3)b_{i,j,6}] = f_{i,j},$$

где $b_{i,j,m}$, $m = 1, 2, 4, 6$ — искомые коэффициенты разложения решения по базису (см. (7)), $f_{i,j} = 1.0 - Q_i^* + Q_{ij}^*$, $Q_i^* = \int_0^1 v_1(x_{1,i,j} + h, x_2) dx_2$ — интеграл по всему сечению $0 \leq x_2 \leq 1$, вычисленный как сумма интегралов по каждой ячейке с использованием решения, полученного на предыдущей итерации. Здесь

$$Q_{i,j}^* = \int_{x_{2,i,j}-h}^{x_{2,i,j}+h} v_1(x_{1,i,j} + h, x_2) dx_2 = 2h \left(a_{i,j,1} + a_{i,j,2} + a_{i,j,4} + \frac{a_{i,j,6}}{3} \right),$$

$a_{i,j,m}$, $m = 1, 2, 4, 6$ — известные коэффициенты разложения решения по базису, полученные на предыдущей итерации.

Точное решение рассматриваемой тестовой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2) &= 6x_2(1 - x_2), \quad v_2(x_1, x_2) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -\frac{12}{\text{Re}}, \quad 0 \leq x_1 \leq L/H, \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Величина $\partial p / \partial x_1$ постоянна внутри канала в соответствии с точным решением. Для давления задавалось нулевое начальное приближение во всей расчетной области, за исключением точки с координатами $x_1 = x_2 = 0$: в этой точке задавалось значение $p = 1$. Ненулевой постоянный градиент давления формировался в расчетной области в процессе итераций по методу КНК.

В вертикальном слое ячеек, примыкающем к выходному сечению, задавались условия согласования (9)–(11) в точках стыка правых сторон соседних ячеек, расположенных вдоль линии $x_1 = L/H$. Эти условия отражают лишь факт непрерывности решения уравнений Навье–Стокса и могут применяться, наряду с условием постоянства расхода, при численном решении любых стационарных и нестационарных задач, в которых есть открытая граница истечения жидкости.

В табл. 1 приводятся результаты расчетов течения Пуазейля по методу КНК, в которых применялись два из описанных выше трех способов ускорения сходимости: двухпараметрический преобуславливатель и метод подпространств Крылова. Число Рейнольдса $Re = 500$, $L/H = 3$, число точек коллокации $N_c = 8$. Во всех расчетах, результаты которых приведены в табл. 1, в преобуславливателе использовались значения параметров $\xi = 0.04$, $\eta = 1.0$. Критерием останова счета было выполнение неравенства (20) с $\varepsilon = 10^{-15}$. Число невязок в алгоритме подпространств Крылова равно 12.

Вместо погрешности для давления (19) в этой серии расчетов использовалась погрешность вычисления производной $\partial p^n / \partial x_1$:

$$\text{Err}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_1}\right) = \left[\frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{b_{i,j,11}}{h} + \frac{12}{\text{Re}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Аппроксимация интеграла от давления, входящего в (3), подсчитывалась по формуле

$$\text{Int}(q^n) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \iint_{\Omega_{ij}} q^n(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Если итерационный процесс по предлагаемому методу КНК сходится, то должно иметь место следующее свойство: $\text{Int}(q^n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Подсчитывалась также абсолютная погрешность вычисления объемного расхода δQ^n в выходном сечении: $\delta Q^n = |Q^n - 1|$. Наконец, N_{it} — количество итераций по методу КНК, требуемое для выполнения неравенства (20). В третьем столбце в скобках приводятся значения N_{it} , полученные без использования в расчете условий согласования (9)–(11) в выходном сечении.

Оказалось, что применение этих условий в выходном сечении канала позволяет существенно снизить требуемое количество итераций в тех случаях, когда для достижения сходимости требуется задавать в (20) весьма малое значение величины ε . Например, при $\varepsilon = 10^{-15}$ для сходимости на пространственной сетке из 30×10 ячеек понадобилось 7774 итераций при включении условий (9)–(11) в переопределенную систему, а без их применения потребовалось 13359 итераций. Таким образом, счет ускорился в 1.65 раза. При этом погрешность $\text{Err}(\mathbf{u}(h)) = 4.466 \cdot 10^{-13}$, абсолютная погрешность в безразмерном расходе жидкости, который равен 1 согласно (24), была меньше, чем 10^{-13} . Как видно из табл. 1, эффект от применения условий согласования в выходном сечении канала усиливается при увеличении числа ячеек пространствен-

Таблица 1

Погрешности $\text{Err}(\mathbf{u}^n)$, $\text{Err}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_1}\right)$, δQ^n , $\text{Int}(q^n)$ на последовательности сеток

[The errors $\text{Err}(\mathbf{u}^n)$, $\text{Err}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_1}\right)$, δQ^n , $\text{Int}(q^n)$ on a sequence of grids]

I	J	N_{it}	$\text{Err}(\mathbf{u}^n)$	$\text{Err}\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_1}\right)$	δQ^n	$\text{Int}(q^n)$
15	5	1231(1866)	$1.234 \cdot 10^{-13}$	$4.884 \cdot 10^{-14}$	$1.177 \cdot 10^{-14}$	$1.911 \cdot 10^{-16}$
30	10	7774(13359)	$4.466 \cdot 10^{-13}$	$1.561 \cdot 10^{-13}$	$7.105 \cdot 10^{-15}$	$1.002 \cdot 10^{-17}$
60	20	36038(141607)	$1.013 \cdot 10^{-12}$	$1.016 \cdot 10^{-12}$	$1.665 \cdot 10^{-14}$	$2.196 \cdot 10^{-17}$

ной сетки. Например, за счет этого при счете на сетке из 60×20 ячеек удается уменьшить требуемое количество итераций в $141607/36038 \approx 3.9$ раза.

Проводились также расчеты течения Пуазейля по методу КНК без применения алгоритма подпространств Крылова; на сетке из 30×10 ячеек это приводило к увеличению требуемого количества итераций в $34680/7774 \approx 4.5$ раза.

Необходимо отметить, что сетка из 30×10 квадратных ячеек достаточно грубая, шаг сетки равен 0.1. Поэтому при использовании численного метода второго порядка точности разумно ожидать на такой сетке абсолютную погрешность порядка $O(10^{-2})$. Но реальный расчет по методу КНК (см. табл. 1) обеспечивал в норме пространства L_2 погрешность $O(10^{-13})$, которая на 11 десятичных порядков меньше ожидаемой погрешности. Этот эффект можно объяснить тем, что полиномиальная функция

$$u_1 = b_1 + b_2 y_1 + b_3 y_2 + b_4 y_1^2 - 2b_5 y_1 y_2 + b_6 y_2^2, \quad (26)$$

представляющая приближенное решение для u_1 в методе КНК, является собственной функцией решаемой задачи, и она способна обеспечить с компьютерной точностью совпадение численного решения по методу КНК с точным аналитическим решением (25).

Точное решение для v_1 зависит только от координаты x_2 . Поэтому в локальных координатах y_1, y_2 точное решение должно зависеть только от координаты y_2 . Это можно использовать для проверки правильности работы компьютерной программы, реализующей метод КНК. Действительно, если в программе нет ошибок, то значения коэффициентов b_2, b_4, b_5 в (26) должны быть либо равны нулю, либо иметь очень малые абсолютные значения. Для проверки рассмотрим ячейку Ω_{ij} с индексами $i = 30$ и $j = 5$ (расчет течения Пуазейля проводился на сетке из 30×10 ячеек). В локальных координатах мы получили, что $u_1 = 1.485 + 0.03y_2 - 0.015y_2^2$. Подставляя в это выражение формулу для y_2 : $y_2 = (x_2 - x_{2c})/h = (x_2 - 0.45)/0.05$, получим $v_1 = 6.0000000000000000x_2 - 6.0000000000000000x_2^2$, то есть совпадение с точным решением (25).

На рис. 4 представлены результаты расчета течения Пуазейля по методу КНК₁₅ на сетке из 30×10 ячеек. Видно, что при всех $x_1 \in [0, L/H]$ сохраня-

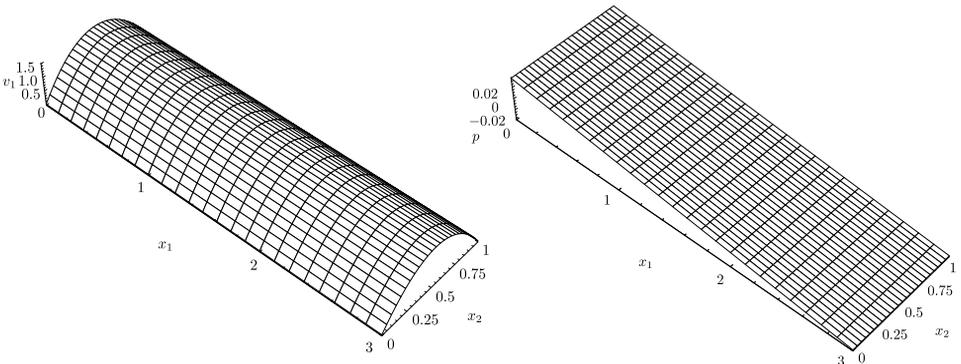


Рис. 4. Поверхности решения, полученные по методу КНК₁₅: слева — поверхность $v_1 = v_1(x_1, x_2)$; справа — поверхность $p = p(x_1, x_2)$

[Figure 4. Solution surfaces obtained by the CLS₁₅ method: on the left is the surface $v_1 = v_1(x_1, x_2)$; on the right is the surface $p = p(x_1, x_2)$]

ется одинаковая параболическая форма профиля составляющей скорости v_1 . Далее из рис. 4 (справа) видно, что профили давления имеют одинаковый наклон во всех сечениях $x_2 = \text{const} \in [0, 1]$, что согласуется с точным решением.

Обтекание ступеньки. Эта задача при $\text{Re} = 800$ часто применяется для тестирования численных алгоритмов решения уравнений Навье—Стокса. Рассматривается стационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в канале длиной L и высотой H . На входе в канал расположена прямоугольная ступенька с высотой $H/2$ и длиной L_{st} (см. рис. 5). Поэтому область, в которой рассчитывается течение жидкости, в отличие от течения Пуазейля является не прямоугольником (4), а объединением двух прямоугольников: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq L_{\text{st}}, H/2 \leq x_2 \leq H\}, \\ \Omega_2 &= \{(x_1, x_2) \mid L_{\text{st}} \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq H\}. \end{aligned} \tag{27}$$

Краевые условия для составляющих вектора скорости на входе в канал имеют следующий размерный вид:

$$v_1(0, x_2) = \frac{16}{H^2} U \left(x_2 - \frac{H}{2} \right) (H - x_2), \quad v_2(0, x_2) = 0,$$

где $U > 0$ — заданное максимальное значение составляющей скорости v_1 в сечении $x_1 = 0$. Размерный объемный расход жидкости в поперечном сечении $x_1 = 0$ дается формулой

$$Q_0 = \int_{H/2}^H v_1(0, x_2) dx_2 = \frac{2}{3} U \cdot \frac{H}{2}. \tag{28}$$

Отсюда следует, что средняя величина составляющей скорости $v_1(0, x_2)$ в интервале $[H/2, H]$ есть $U_{\text{cp}} = 2U/3$. В результате обезразмеривания по формулам (23) краевое условие для безразмерной составляющей скорости $v_1(0, x_2)$ и безразмерный расход Q_0 принимают следующий вид:

$$v_1(0, x_2) = 24(x_2 - 0.5)(1 - x_2), \quad Q_0 = 0.5.$$

Аналогично случаю течения Пуазейля легко показать, что в каждом сечении $x_1 = \text{const}$, $0 \leq x_1 \leq L/H$, должно иметь место равенство

$$\int_{x_{2b}}^1 v_1(x_1, x_2) dx_2 = Q_0 = 0.5, \tag{29}$$

где $x_{2b} = 1/2$ при $0 \leq x_1 \leq L_{\text{st}}/H$ и $x_{2b} = 0$ при $L_{\text{st}}/H < x_1 \leq L/H$.

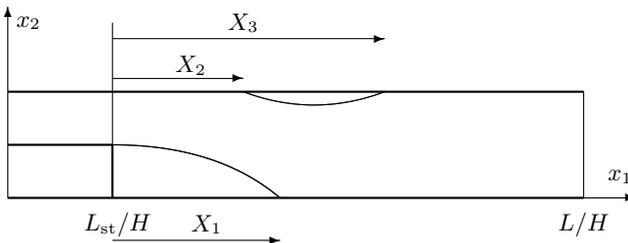


Рис. 5. Вид расчетной области в задаче об обтекании ступеньки
 [Figure 5. Form of the computational region in the backward-facing step problem]

Начальное приближение для составляющей скорости $v_1(x_1, x_2)$ задавалось аналогично случаю течения Пуазейля с применением треугольных профилей:

$$v_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 24(x_2 - 0.5)(1 - x_2), & x_1 = 0, 1/2 \leq x_2 \leq 1, \\ 2(1 - 4|x_2 - 0.75|), & 0 < x_1 \leq L_{st}/H, 1/2 \leq x_2 \leq 1, \\ 2(0.5 - |x_2 - 0.5|), & x_1 > L_{st}/H, 0 \leq x_2 \leq 1. \end{cases} \quad (30)$$

Легко проверить, что функция (30) удовлетворяет соотношению (29).

Невязки, входящие в поправку по Крылову, сохранялись в числовых массивах отдельно для каждой из двух подобластей (27). При этом в алгоритме Крылова использовалось 8 невязок. Численное решение переопределенной системы (14) находилось в каждой ячейке с помощью метода отражений Хаусхолдера [29]. Этот метод обеспечивал ускорение счета по сравнению с методом вращений Гивенса [29] примерно в 1.5 раза. В двухпараметрической матрице A использовались следующие значения параметров ξ, η : $\xi = 0.04, \eta = 1$. В качестве примера были выполнены расчеты обтекания ступеньки при $Re = 800, L = 14, L_{st} = 2.5$. Расчеты проводились на равномерной сетке из 560×40 квадратных ячеек. В качестве критерия окончания итераций по нелинейности использовалось выполнение неравенства (21) с $\varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-8}$.

В случае применения алгоритма Крылова для сходимости потребовалось 109500 итераций, а без его применения — 857000 итераций. Таким образом, применение алгоритма Крылова позволило уменьшить потребное для сходимости число итераций (следовательно, и машинное время) в 7.83 раза.

При отсутствии алгоритма Крылова в методе КНК были получены следующие значения величин X_1, X_2, X_3 : $X_1 = 6.10, X_2 = 4.91, X_3 = 10.32$.

При вышеуказанном значении числа Рейнольдса образуются два вихря — непосредственно за ступенькой и на верхней стенке канала (см. рис. 6). Координата $x_1 = X_1$ точки повторного присоединения потока на нижней стенке, координата $x_1 = X_2$ точки отрыва потока от верхней стенки и координата $x_1 = X_3$ точки повторного присоединения потока к верхней стенке вычислялись по алгоритму, описанному в [33]: эти точки находились как точки, в которых вязкое касательное напряжение обращается в ноль на стенке. То есть в этих точках выполняется равенство $\partial v_1 / \partial x_2 = 0$. Из этого равенства и из определения локальной координаты y_2 следует равенство $\partial u_1 / \partial y_2 = 0$. Так как в каждой ячейке Ω_{ij} функция $u_1(y_1, y_2)$ имеет аналитическое представление (см. табл. 1), производная $\partial u_1 / \partial y_2$ вычислялась в ячейке Ω_{ij} по формуле $\partial u_1 / \partial y_2 = b_{i,j,3} - 2(b_{i,j,5}y_1 - b_{i,j,6}y_2)$. Уравнение $\partial u_1 / \partial y_2 = 0$ решалось методом половинного деления с заданной погрешностью $\delta = 10^{-15}$. Для этого сначала задавался интервал для поиска корня уравнения.

В табл. 2 результаты вычисления величин X_1, X_2, X_3 по методу КНК сравниваются с ранее опубликованными данными других авторов. При этом

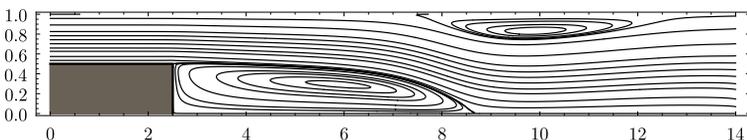


Рис. 6. Изолинии функции тока при обтекании ступеньки ($Re = 800$)
 [Figure 6. Streamlines in the backward-facing step problem ($Re = 800$)]

мы ограничились в основном работами, опубликованными в 2008 году и в последующие годы. Данные из работы Гартлинга [28] приведены потому, что именно с результатами этой работы авторы более поздних работ часто сравнивали свои результаты. Видно, что имеет место совпадение значения X_1 с данными Гартлинга [28], которые на сегодняшний день считаются эталонными. Что касается данных для величин X_2 и X_3 , то имеются некоторые расхождения с данными других авторов. Однако данные по X_2 и X_3 , полученные методом КНК, находятся внутри интервалов разброса этих данных в работах других авторов. При этом величина X_2 отличается от значения, приведенного в [28], на 4%.

На рис. 7 графики кривых $v_1(x_1, x_2)$ и $v_2(x_1, x_2)$ в сечении $x_1 = L_{st}/H + 7$ сравниваются с результатами [33]. Данное сечение пересекает верхнюю вихревую зону почти в ее середине, см. рис. 6. Сплошные линии — результат работы [33], темные кружки — расчет по методу КНК₁₅ настоящей работы. Видно хорошее соответствие с результатами [33].

Необходимо отметить, что в приведенных расчетах по методу КНК₁₅ использовалась довольно грубая сетка из 560×40 ячеек. Для сравнения: в рабо-

Таблица 2

Сравнение результатов моделирования при обтекании ступеньки; $Re = 800$ [Comparison of modelling results obtained in the problem of the backward-facing step flow]

Scientific researches	X_1	$X_3 - X_2$	X_2	X_3
by Gartling [28]	6.10	5.63	4.85	10.48
by Erturk [21]	5.92	5.54	4.74	10.28
by Martynenko [30]	6.10	5.63	4.84	10.47
by Rouizi et al. [31]	5.88	5.57	4.71	10.28
by Parsani et al. [32]	5.84	5.73	4.61	10.34
by Roberts et al. [33]	6.10	5.63	4.85	10.48
by Bustamante et al. [34]	5.99	5.17	4.82	10.00
Current research	6.10	5.40	4.91	10.31

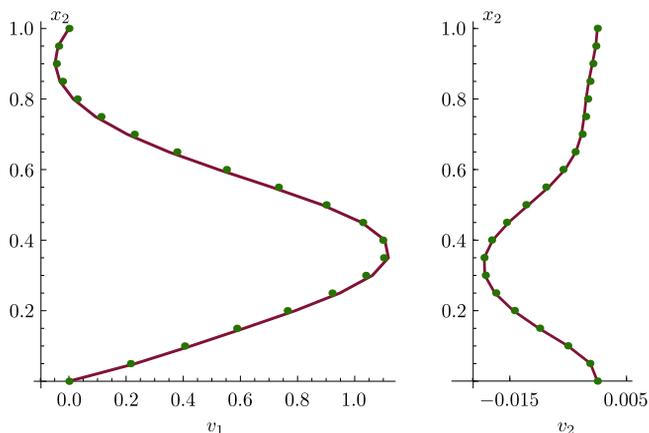


Рис. 7. Профили составляющих скорости v_1, v_2 в сечении $x_1 = L_{st}/H + 7$ при $Re = 800$

[Figure 7. The profiles of velocity components v_1 and v_2 in the cross section $x_1 = L_{st}/H + 7$ at $Re = 800$]

те [30] использовалась сетка из 1400×100 ячеек. Важно также отметить, что в полученном численном решении закон сохранения массы (28) выполнялся с абсолютной погрешностью, меньшей, чем $5 \cdot 10^{-6}$.

Течение вязкой жидкости в каверне с движущейся крышкой.

На высокоточных решениях этой эталонной задачи проверяются возможности известных или вновь создаваемых численных методов.

В рассматриваемой задаче расчетная область — каверна — квадрат (4) со стороной $L = 1$, начало координат находится в ее левом нижнем углу. Верхняя крышка каверны движется в безразмерных величинах с единичной скоростью в положительном направлении оси Ox_1 . Остальные стороны каверны (4) покоятся. На всех сторонах заданы условия прилипания: $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ при $x_2 = 1$ и $v_m = 0$, $m = 1, 2$ на остальных сторонах.

Течение в каверне с движущейся крышкой имеет сингулярности в верхних углах области. Их влияние на точность численного решения усиливается с увеличением числа Рейнольдса. Поэтому при больших числах Рейнольдса для получения более точного решения необходимо применять адаптивные сетки с более мелкими ячейками в окрестности сингулярностей [10, 35]. Здесь использованы только равномерные сетки, размер которых не превосходил 256×256 ячеек.

Были проведены расчеты рассматриваемой задачи по методу КНК₁₅ при числах Рейнольдса $Re = 100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500$. Перед каждым из этих расчетов находились оптимальные значения ξ_{opt}, η_{opt} параметров ξ, η предобуславливателя, описанного в п. 2, методом равномерного поиска с переменным шагом. Оказалось, что при всех рассмотренных числах Рейнольдса поверхность $\kappa_2 = \kappa_2(\xi, \eta)$ симметрична относительно η , что подтверждает результаты аналитического исследования, приведенного в п. 2.

С целью уменьшения расхода машинного времени при переходе к расчету течения при более высоких значениях числа Рейнольдса численное решение по методу КНК₁₅, полученное при меньшем числе Рейнольдса, использовалось в качестве начального приближения для решения с более высоким числом Рейнольдса. Это позволяло уменьшить потребное машинное время не менее чем в два раза. Указанный прием применялся ранее в [38].

По аналогии с тестовыми расчетами по методу КНК₁₅, где численное решение сравнивалось с точным решением (18), были проведены расчеты рассматриваемой задачи при $Re = 100$ с целью получения данных об эффективности совместного применения двухпараметрического предобуславливателя и алгоритмов Крылова и Федоренко. В этой серии расчетов применялись либо все сетки из последовательности $5 \cdot 2^m \times 5 \cdot 2^m$ ($m = 0, \dots, 3$), либо только сетка из 40×40 ячеек. В критерии сходимости по псевдопогрешности (20) использовалось значение $\varepsilon = 10^{-9}$. Во всех этих расчетах полагали $\xi_{opt} = 0.17$, $\eta_{opt} = 1.75$ в двухпараметрическом предобуславливателе. Кроме того, в локальные матрицы A_{ij} в (13) включалась аппроксимация (12) интегрального условия для давления (3). Были рассмотрены следующие комбинации величин (K_{mgr}, k) : (1,0), (4,0), (1,9), (4,8), (4,9), (4,10). Оказалось, что величина AF достигает наибольшего значения $AF = 26.86$ при $K_{mgr} = 4$, $k = 9$.

В работе [15] описана аналогичная серия расчетов по методу КНК₁₂ с теми же шестью комбинациями величин (K_{mgr}, k) . При этом не применялась аппроксимация (12) интегрального условия для давления, а задавалось дав-

ление $p = 1$ в точке с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. Были также проведены расчеты при том же числе Рейнольдса с включением уравнения (12) в локальные СЛАУ, в результате машинное время счета каждого варианта уменьшилось примерно в 3.6 раза. Наибольшее ускорение сходимости $AF = 162.28$ было получено при $K_{\text{mgr}} = 4, k = 9$. Из описанных двух серий расчетов рассматриваемой задачи гидродинамики по методам КНК₁₅ и КНК₁₂ следует, что наилучшим для ускорения сходимости итерационного процесса при умеренных числах Рейнольдса является число невязок $k = 9$ в описанном выше варианте алгоритма Крылова.

Для случая $Re = 100$ было проведено сравнение точности методов КНК₁₂ и КНК₁₅ путем вычисления величины

$$\delta v_{1,m_b} = \max_m |v_{1,\text{КНК}_{m_b}}(0.5, x_{2m}) - v_{1,\text{Ghia}}(0.5, x_{2m})|,$$

где $v_{1,\text{Ghia}}(0.5, x_{2m})$ — значения v_1 , полученные в [36], а $v_{1,\text{КНК}_{m_b}}(0.5, x_{2m})$ — значения v_1 , полученные методом КНК _{m_b} при $m_b = 12$ или 15. Было получено, что $\delta v_{1,12} = 0.01722, \delta v_{1,15} = 0.01402$. То есть применение метода КНК₁₅ позволило уменьшить ошибку $\delta v_{1,m_b}$ на 18.58 % по сравнению с методом КНК₁₂.

Как отмечалось в [40], в литературе имеется много очень близких друг к другу численных результатов в случае $Re \leq 1000$, но численные решения начинают заметно отличаться друг от друга при $Re > 1000$. Ниже мы приводим пример расчета эталонной задачи по методу КНК при числе Рейнольдса $Re = 2500$. Перед выполнением этого расчета были найдены оптимальные значения $\xi_{\text{opt}} = 0.08$ и $\eta_{\text{opt}} = 1.75$ для двухпараметрического преобуславливателя. На рис. 8 представлены некоторые результаты численных расчетов течения вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне для рассматриваемого числа Рейнольдса. Расчеты выполнены на равномерной сетке 256×256 ячеек. Сплошная линия на рис. 8 (справа) — результат расче-

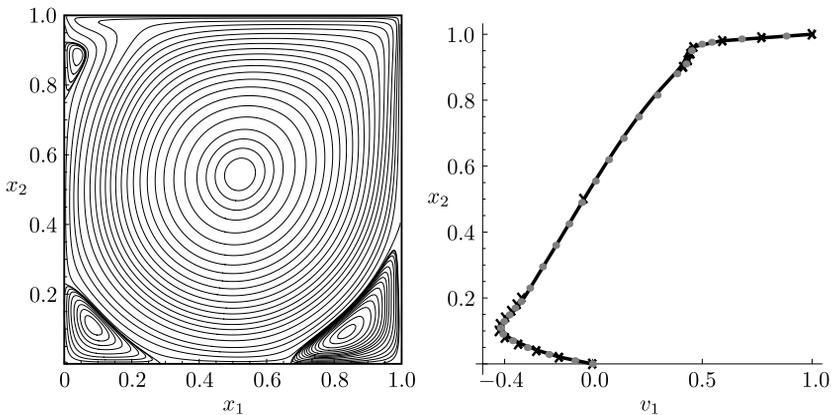


Рис. 8. Решение эталонной задачи по методу КНК₁₅ при $Re = 2500$: слева — картина линий тока, справа — профиль составляющей скорости v_1 вдоль линии $x_1 = 0.5$ (значки “ \times ” и малые серые точки — результаты работ, соответственно, [38] и [39])

[Figure 8. The benchmark problem solution by the CLS₁₅ method at $Re = 2500$: on the left is the streamline pattern; on the right is the profile of the velocity component v_1 along the line $x_1 = 0.5$ (the symbols “ \times ” and small grey circles are the results of the works [38] and [39], respectively)]

та по вышеописанному методу КНК₁₅. Полученные результаты сравнивались с результатами работы [38] и более поздней работы [39]. Отметим, что в [38] отсутствуют табличные данные о $v_1(0.5, x_2)$ в интервалах $0.2 < x_2 < 0.5$ и $0.5 < x_2 < 0.9$. Из рис. 8 (справа) видно, что результат расчета по методу КНК₁₅ хорошо согласуется с результатами работ [38, 39]. При $Re = 1000$ вблизи левого верхнего угла каверны вихрь весьма слабый и плохо выявляется в расчетах [15, 33, 37, 38, 40], а при $Re = 2500$ он существенно интенсивнее, чем при $Re = 1000$, и хорошо передан в расчетах, приведенных на рис. 8 (слева) и в работах [35, 40].

Заключение. В данной работе были скомбинированы в методе КНК три способа ускорения сходимости итераций при решении СЛАУ. Каждый способ, входящий в комбинацию, дает свой вклад в суммарную характеристику ускорения сходимости итераций. Одним из позитивных факторов, вносящих вклад в быструю сходимость итераций при использовании многосеточного комплекса в методе КНК, является возможность перехода с одной сетки на другую без применения таких процедур, как, например, интерполяция или осреднение, которые вносят собственную ошибку в промежуточное численное решение. Исследовано влияние на итерационный процесс всех трех способов его ускорения: каждого по отдельности, а также при их комбинированном применении. При этом наибольший вклад в ускорение дает применение алгоритма, использующего подпространства Крылова.

Показано, что использование предобуславливателя при решении переопределенной СЛАУ для нахождения приближенного решения уравнений с частными производными по методу КНК позволяет значительно улучшить обусловленность приближенной задачи, к которой сводится решение исходной дифференциальной задачи, по сравнению с обусловленностью приближенной задачи в методе коллокаций. Это обстоятельство также оказывает положительное влияние на скорость сходимости итераций в методе КНК.

Сравнение результатов по ускорению итераций при использовании одновременно всех трех способов со случаем, когда применялся только один из них — предобуславливатель, привело к ускорению до 362 раз. Кроме того, минимизация функционала невязки в методе КНК на каждой итерации подавляет различные ошибки гармоник возмущения решения, которые возникают в промежуточных итерациях. По-видимому, этот благоприятный фактор дополнительно усиливает эффективность применения на его фоне других способов ускорения итерационных процессов и позволяет добиться их ускорения в десятки и сотни раз. Оказалось, что для значительного ускорения сходимости итераций при использовании метода Федоренко в методе КНК достаточно ограничиваться только операцией продолжения решения на многосеточном комплексе.

Эффективность совместного применения методов Крылова и Федоренко в сочетании с предложенным предобуславливателем позволила выполнить на персональных компьютерах за ограниченное время достаточно много вычислительных экспериментов, включая решение уравнений Навье—Стокса. Часть результатов представлена в этой статье.

Такая комбинация способов ускорения итерационных процессов может быть реализована и при применении других численных итерационных методов решения УЧП.

Предложенный выше способ расчета параметров течения в выходном сечении канала показал свою высокую эффективность при его применении в рамках метода КНК. Поэтому представляет значительный интерес разработка аналогичных алгоритмов для их применения в конечно-разностных методах и методах конечного объема.

В работе показана эффективность применения метода КНК, скомбинированного с современными численными алгоритмами решения уравнений Навье—Стокса при больших числах Рейнольдса.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Оба автора принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена обоими авторами.

Финансирование. Результаты исследования получены в рамках выполнения государственных заданий Минобрнауки России № АААА-А17-117030610134-9 и № АААА-А17-117030610136-3.

Библиографический список

1. Ferziger J. H., Perić M., Street R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Cham: Springer, 2020. xviii+596 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99693-6>.
2. Reddy J. N., Gartling D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. Boca Raton: CRC Press, 2010. xxiii+501 pp. <https://doi.org/10.1201/9781439882573>.
3. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Heidelberg: Springer, 2016. xxiii+791 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6>.
4. Jiang B. N. *The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*. Berlin: Springer, 1998. xvi+418 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03740-9>.
5. Kim N., Reddy J. N. A spectral/hp least-squares finite element analysis of the Carreau–Yasuda fluids // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2016. vol. 82, no. 9. pp. 541–566. <https://doi.org/10.1002/flid.4230>.
6. Ranjan R., Chronopoulos A. T., Feng Y. Computational algorithms for solving spectral/hp stabilized incompressible flow problems // *J. Math. Res.*, 2016. vol. 8, no. 4. pp. 21–39. <https://doi.org/10.5539/jmr.v8n4p21>.
7. Ramšak M., Škerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2004. vol. 46, no. 8. pp. 815–847. <https://doi.org/10.1002/flid.776>.
8. Zhang X., An X., Chen C. S. Local RBFs based collocation methods for unsteady Navier–Stokes equations // *Adv. Appl. Math. Mech.*, 2015. vol. 7, no. 4. pp. 430–440. <https://doi.org/10.4208/aamm.2013.m337>.
9. Плясунова А. В., Слепцов А. Г. Коллокационно-сеточный метод решения нелинейных параболических уравнений на подвижных сетках // *Моделирование в механике*, 1987. Т. 18, № 4. С. 116–137.
10. Исаев В. И., Шапеев В. П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье—Стокса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010. Т. 50, № 10. С. 1758–1770.

11. Исаев В. И., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье–Стокса // *Докл. РАН*, 2012. Т. 442, № 4. С. 442–445.
12. Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V. Symbolic-numeric implementation of the method of collocations and least squares for 3D Navier–Stokes equations / *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2012* / Lecture Notes in Computer Science, 7442. Heidelberg: Springer, 2012. pp. 321–333. https://doi.org/10.1007/978-3-642-32973-9_27.
13. Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V. Symbolic-numerical optimization and realization of the method of collocations and least residuals for solving the Navier–Stokes equations / *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2016* / Lecture Notes in Computer Science, 9890. Cham: Springer, 2016. pp. 473–488. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45641-6_30.
14. Исаев В. И., Шапеев В. П., Еремин С. А. Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье–Стокса // *Вычислит. технологии*, 2007. Т. 12, № 3. С. 1–19.
15. Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals // *Appl. Math. Comput.*, 2019. vol. 363. pp. 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124644>.
16. Федоренко Р. П. О скорости сходимости одного итерационного процесса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 3. С. 559–564.
17. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // *Изв. АН СССР, VII сер., Отд. матем. и естеств. наук*, 1931. № 4. С. 491–539.
18. Saad Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. xvi+276 pp. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970739>.
19. Kirkpatrick M. P., Armfield S. W., Kent J. H. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on staggered three-dimensional Cartesian grid // *J. Comput. Phys.*, 2003. vol. 184, no. 1. pp. 1–36. [https://doi.org/10.1016/s0021-9991\(02\)00013-x](https://doi.org/10.1016/s0021-9991(02)00013-x).
20. Abbassi H., Turki S., Nasrallah Ben S. Channel flow past bluff body: outlet boundary condition, vortex shedding and effects of buoyancy // *Comput. Mech.*, 2002. vol. 28, no. 1. pp. 10–16. <https://doi.org/10.1007/s004660100261>.
21. Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solution // *Comput. Fluids*, 2008. vol. 37, no. 6. pp. 633–655. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.09.003>.
22. Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., Исаев В. И., Идимешев С. В. Метод коллокаций и наименьших невязок для трехмерных уравнений Навье–Стокса // *Выч. мет. программирование*, 2013. Т. 14, № 3. С. 306–322.
23. Demmel J. W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. viii+418 pp. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971446>.
24. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. xvi+447 pp. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>.
25. Wesseling P. *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992. vi+284 pp.
26. Chiu P. H., Sheu T. W. H., Lin R. K. An effective explicit pressure gradient scheme implemented in the two-level non-staggered grids for incompressible Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.*, 2008. vol. 227, no. 8. pp. 4018–4037. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.12.007>.
27. Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V. CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of 3D Navier–Stokes equations / *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2014* / Lecture Notes in Computer Science, 8136. Heidelberg: Springer, 2013. pp. 381–392. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10515-4_31.

28. Gartling D. K. A test problem for outflow boundary conditions — flow over a backward-facing step // *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1990. vol. 11, no. 7. pp. 953–967. <https://doi.org/10.1002/flid.1650110704>.
29. Воеводин В. В. *Вычислительные основы линейной алгебры*. М.: Наука, 1977. 303 с.
30. Мартыненко С. И. Совершенствование вычислительных алгоритмов для решения уравнений Навье–Стокса на структурированных сетках // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2008. № 2. С. 78–94.
31. Rouizi Y., Favennec Y., Ventura J., Petit D. Numerical model reduction of 2D steady incompressible laminar flows: Application on the flow over a backward-facing step // *J. Comput. Phys.*, 2009. vol. 228, no. 6. pp. 2239–2255. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.12.001>.
32. Parsani M., Ghorbaniasl G., Lacor C. Analysis of the implicit LU-SGS algorithm for 3rd- and 4th-order spectral volume scheme for solving the steady Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.*, 2011. vol. 230, no. 19. pp. 7073–7085. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.05.026>.
33. Roberts N. V., Demkowicz L., Moser R. A discontinuous Petrov–Galerkin methodology for adaptive solutions to the incompressible Navier–Stokes equations // *J. Comput. Phys.*, 2015. vol. 301. pp. 456–483. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.014>.
34. Bustamante C. A., Power H., Florez W. F. A global meshless collocation particular solution method for solving the two-dimensional Navier–Stokes system of equations // *Comput. Math. Appl.*, 2013. vol. 65, no. 12. pp. 1939–1955. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.014>.
35. Shapeev A. V., Lin P. An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows // *SIAM J. Sci. Comput.*, 2009. vol. 31, no. 3. pp. 1874–1900. <https://doi.org/10.1137/080719145>.
36. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys.*, 1982. vol. 48, no. 3. pp. 387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4).
37. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // *Comput. Fluids*, 1998. vol. 27, no. 4. pp. 421–433. [https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(98\)00002-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(98)00002-4).
38. Erturk E., Corke T. C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2005. vol. 48, no. 7. pp. 747–774. <https://doi.org/10.1002/flid.953>.
39. Vuorinen V., Larmi M., Schlatter P., Fuchs L., Boersma B. J. A low-dissipative, scale-selective discretization scheme for the Navier–Stokes equations // *Comput. Fluids*, 2012. vol. 70. pp. 195–205. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.09.022>.
40. Lim R., Sheen D. Nonconforming finite element method applied to the driven cavity flow // *Comm. Comput. Phys.*, 2017. vol. 21, no. 4. pp. 1012–1038, arXiv:1502.04217 [math.NA]. <https://doi.org/10.4208/cicp.0A-2016-0039>.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 76D05, 76D17, 76G25, 76M25, 76M30

A divergence-free method of collocations and least squares for the computation of incompressible fluid flows and its efficient implementation

© E. V. Vorozhtsov¹, V. P. Shapeev^{1,2}

¹ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

² Novosibirsk National Research University, 2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

The problem of the acceleration of the iterative process of numerical solution by the collocation and least squares (CLS) method of boundary value problems for partial differential equations is considered. For its solution, it is proposed to apply simultaneously three ways to accelerate the iterative process: preconditioner, multigrid algorithm, and Krylov method. A method for finding the optimal values of the parameters of the two-parameter preconditioner is proposed. The use of the found preconditioner significantly accelerates the iterative process. The influence on the iterative process of all three ways of its acceleration is investigated: each separately, and also at their combined application. The application of the algorithm using Krylov subspaces gives the greatest contribution. The combined use of all three ways to speed up the iteration process of solving boundary value problems for two-dimensional Navier-Stokes equations has reduced the CPU time up to 362 times as compared with the case when only one of them, the preconditioner, was applied.

Keywords: preconditioning, Krylov subspaces, multigrid algorithms, Navier–Stokes equations, the method of collocations and least squares.

Received: 25th November, 2019 / Revised: 29th July, 2020 /

Accepted: 24th August, 2020 / First online: 21st September, 2020

Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. A divergence-free method of collocations and least squares for the computation of incompressible fluid flows and its efficient implementation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 542–573. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1758> (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Vorozhtsov ✉  <https://orcid.org/0000-0003-2753-8399>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Research Scientist; Lab. of the Physics of Rapid Processes; e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

Vasily P. Shapeev  <https://orcid.org/0000-0001-6761-7273>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Research Scientist; Lab. of Thermomechanics and Strength of New Materials; e-mail: shapeev@itam.nsc.ru

Competing interests. We declare that we have no conflict of interest regarding the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Both authors participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. Authors are solely responsible for submitting the final manuscript to the press. The final version of the manuscript was approved by both authors.

Funding. The results have been obtained in the framework of the state tasks of the Ministry of education of Russia no. AAAA-A17-117030610134-9 and no. AAAA-A17-117030610136-3.

References

1. Ferziger J. H., Perić M., Street R. L. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Cham, Springer, 2020, xviii+596 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99693-6>.
2. Reddy J. N., Gartling D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. Boca Raton, CRC Press, 2010, xxiii+501 pp. <https://doi.org/10.1201/9781439882573>.
3. Moukalled F., Mangani L., Darwish M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Heidelberg, Springer, 2016, xxiii+791 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-16874-6>.
4. Jiang B. N. *The Least-Squares Finite Element Method: Theory and Applications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics*. Berlin, Springer, 1998, xvi+418 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03740-9>.
5. Kim N., Reddy J. N. A spectral/hp least-squares finite element analysis of the Carreau-Yasuda fluids, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2016, vol. 82, no. 9, pp. 541–566. <https://doi.org/10.1002/flid.4230>.
6. Ranjan R., Chronopoulos A. T., Feng Y. Computational algorithms for solving spectral/hp stabilized incompressible flow problems, *J. Math. Res.*, 2016, vol. 8, no. 4, 21–39. <https://doi.org/10.5539/jmr.v8n4p21>.
7. Ramšak M., Škerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function–vorticity formulation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2004, vol. 46, no. 8, pp. 815–847. <https://doi.org/10.1002/flid.776>.
8. Zhang X., An X., Chen C. S. Local RBFs based collocation methods for unsteady Navier–Stokes equations, *Adv. Appl. Math. Mech.*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 430–440. <https://doi.org/10.4208/aamm.2013.m337>.
9. Plyasunova A. V., Sleptsov A. G. Collocation-grid method for solving nonlinear parabolic equations on moving grids, *Model. Mekh.*, 1987, vol. 18, no. 4, pp. 116–137 (In Russian).
10. Isaev V. I., Shapeev V. P. High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 10, pp. 1670–1681. <https://doi.org/10.1134/S0965542510100040>.
11. Isaev V. I., Shapeev V. P. High-order accurate collocations and least squares method for solving the Navier–Stokes equations, *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 4, 71–74. <https://doi.org/10.1134/S1064562412010255>.
12. Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V. Symbolic-numeric implementation of the method of collocations and least squares for 3D Navier–Stokes equations, In: *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2012*, Lecture Notes in Computer Science, 7442. Heidelberg, Springer, 2012, pp. 321–333. https://doi.org/10.1007/978-3-642-32973-9_27.
13. Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V. Symbolic-numerical optimization and realization of the method of collocations and least residuals for solving the Navier–Stokes equations, In: *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2016*, Lecture Notes in Computer Science, 9890. Cham, Springer, 2016, pp. 473–488. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45641-6_30.

14. Isaev V. I., Shapeev V. P., Eremin S. A. Investigation of the properties of the method of collocations and least squares for solving the boundary-value problems for the Poisson equation and the Navier–Stokes equations, *Vychisl. Tekhnol.*, 2007, vol. 12, no. 3, pp. 1–19 (In Russian).
15. Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals, *Appl. Math. Comput.*, 2019, vol. 363, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124644>.
16. Fedorenko R. P. The speed of convergence of one iterative process, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 3, pp. 227–235. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90253-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90253-8).
17. Krylov A. N. On the numerical solution of the equation, which determines in technological questions the frequencies of small oscillations of material systems, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Mat. Estest. Nauk, VII Ser.*, 1931, no. 4, pp. 491–539 (In Russian).
18. Saad Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, xvi+276 pp. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970739>.
19. Kirkpatrick M. P., Armfield S. W., Kent J. H. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier–Stokes equations on staggered three-dimensional Cartesian grid, *J. Comput. Phys.*, 2003, vol. 184, no. 1, pp. 1–36. [https://doi.org/10.1016/s0021-9991\(02\)00013-x](https://doi.org/10.1016/s0021-9991(02)00013-x).
20. Abbassi H., Turki S., Nasrallah Ben S. Channel flow past bluff body: outlet boundary condition, vortex shedding and effects of buoyancy, *Comput. Mech.*, 2002, vol. 28, no. 1, pp. 10–16. <https://doi.org/10.1007/s004660100261>.
21. Erturk E. Numerical solutions of 2-D steady incompressible flow over a backward-facing step, Part I: High Reynolds number solution, *Comput. Fluids*, 2008, vol. 37, no. 6, pp. 633–655. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.09.003>.
22. Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V., Isaev V. I., Idimeshev S. V. The method of collocations and least residuals for three-dimensional Navier-Stokes equations, *Num. Meth. Prog.*, 2013, vol. 14, no. 3, pp. 306–322 (In Russian).
23. Demmel J. W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997, viii+418 pp. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971446>.
24. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003, xvi+447 pp. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>.
25. Wesseling P. *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester, John Wiley & Sons, 1992, vi+284 pp.
26. Chiu P. H., Sheu T. W. H., Lin R. K. An effective explicit pressure gradient scheme implemented in the two-level non-staggered grids for incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, 2008, vol. 227, no. 8, pp. 4018–4037. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.12.007>.
27. Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V. CAS application to the construction of the collocations and least residuals method for the solution of 3D Navier–Stokes equations, In: *Computer Algebra in Scientific Computing. CASC 2014*, Lecture Notes in Computer Science, 8136. Heidelberg, Springer, 2013, pp. 381–392. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10515-4_31.
28. Gartling D. K. A test problem for outflow boundary conditions — flow over a backward-facing step, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1990, vol. 11, no. 7, pp. 953–967. <https://doi.org/10.1002/flid.1650110704>.
29. Voevodin V. V. *Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebrы* [Computational Fundamentals of Linear Algebra]. Moscow, Nauka, 1977, 303 pp. (In Russian)
30. Martynenko S. I. Improvement of numerical algorithms for solving the Navier–Stokes equations on structured grids, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2008, no. 2, pp. 78–94 (In Russian).

31. Rouizi Y., Favennec Y., Ventura J., Petit D. Numerical model reduction of 2D steady incompressible laminar flows: Application on the flow over a backward-facing step, *J. Comput. Phys.*, 2009, vol. 228, no. 6, pp. 2239–2255. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.12.001>.
32. Parsani M., Ghorbaniasl G., Lacor C. Analysis of the implicit LU-SGS algorithm for 3rd- and 4th-order spectral volume scheme for solving the steady Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, 2011, vol. 230, no. 19, pp. 7073–7085. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.05.026>.
33. Roberts N. V., Demkowicz L., Moser R. A discontinuous Petrov–Galerkin methodology for adaptive solutions to the incompressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.*, 2015, vol. 301, pp. 456–483. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.014>.
34. Bustamante C. A., Power H., Florez W. F. A global meshless collocation particular solution method for solving the two-dimensional Navier–Stokes system of equations, *Comput. Math. Appl.*, 2013, vol. 65, no. 12, pp. 1939–1955. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.014>.
35. Shapeev A. V., Lin P. An asymptotic fitting finite element method with exponential mesh refinement for accurate computation of corner eddies in viscous flows, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2009, vol. 31, no. 3, pp. 1874–1900. <https://doi.org/10.1137/080719145>.
36. Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, 1982, vol. 48, no. 3, pp. 387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4).
37. Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow, *Comput. Fluids*, 1998, vol. 27, no. 4, pp. 421–433. [https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(98\)00002-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(98)00002-4).
38. Erturk E., Corke T. C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2005, vol. 48, no. 7, pp. 747–774. <https://doi.org/10.1002/flid.953>.
39. Vuorinen V., Larmi M., Schlatter P., Fuchs L., Boersma B. J. A low-dissipative, scale-selective discretization scheme for the Navier–Stokes equations, *Comput. Fluids*, 2012, vol. 70, pp. 195–205. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.09.022>.
40. Lim R., Sheen D. Nonconforming finite element method applied to the driven cavity flow, *Comm. Comput. Phys.*, 2017, vol. 21, no. 4, pp. 1012–1038, arXiv:1502.04217 [math.NA]. <https://doi.org/10.4208/cicp.0A-2016-0039>.



Краткие сообщения

УДК 517.955.2:517.956

Корректность смешанной задачи для многомерного гиперβολо-параболического уравнения

© С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Казахстан, 480100, Алматы, ул. Толе Би, 86.

Аннотация

В цилиндрической области евклидова пространства рассматривается модельное многомерное гиперβολо-параболическое уравнение, для которого ставится смешанная задача с неоднородными краевыми условиями. В классе непрерывно-дифференцируемых функций показывается однозначная разрешимость поставленной задачи и указывается способ получения явного вида классического решения.

Ключевые слова: корректность смешанной задачи, гиперβολо-параболическое уравнение, цилиндрическая область, функции Бесселя.

Получение: 22 июля 2020 г. / Исправление: 25 августа 2020 г. /
Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Введение. К многомерным гиперβολо-параболическим уравнениям приводят различные задачи, например, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) [1], моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах [2]. При этом возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Теория краевых задач для гиперβολо-параболических уравнений на плоскости изучена в [3]. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [4, 5].

Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах исследована в работах [6, 7]. В [8] доказана

Краткое сообщение

© © ⓘ Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Алдашев С. А. Корректность смешанной задачи для многомерного гиперβολо-параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 574–582. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1809>.

Сведения об авторе

Серик Аймурзаевич Алдашев  <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. фундаментальной и прикладной математики; e-mail: aldash51@mail.ru

корректность этой задачи и получен явный вид классического решения. В работах [9, 10] доказано, что для многомерных гиперβολо-параболических уравнений в классе непрерывных функций смешанная задача в цилиндрической области имеет бесчисленное множество решений. В данной работе показывается, что в классе непрерывно-дифференцируемых функций эта задача однозначно разрешима, приводится явное представление классического решения для одного модельного многомерного гиперβολо-параболического уравнения.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Через Ω_α и Ω_β обозначим части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ — части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$; S — общая часть границ областей Ω_α и Ω_β , представляющая собой множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим гиперβολо-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} \Delta_x u - u_{tt}, & t > 0, \\ \Delta_x u - u_t, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

Перейдем от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

ЗАДАЧА 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma_\alpha} = \varphi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\beta} = \varphi(r, \theta), \quad (3)$$

при этом $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta), \psi_2(\beta, \theta) = \varphi(1, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$; $W_2^l(S)$ — пространства Соболева, $l = 0, 1, \dots$

ЛЕММА 1 [11]. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

ЛЕММА 2. Для того чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Через $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_{2n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) для функций $\varphi(r, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta)$, $\varphi(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > 3m/2$, то задача 1 однозначно разрешима.

2. Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид [11, 12]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \cdots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно [11, 12], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, его можно искать в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [12], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

при этом краевое условие (3) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

Произведя в (7), (8) замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{v}_{nr}^k - \bar{v}_{nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{v}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (9)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \beta) = \varphi_n^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\psi_{2n}^k(t), \quad \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta).$$

Задача (9), (10) заменой $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}v_n^k(r, t)$ приводится к следующей:

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}v_n^k = f_n^k(r, t), \quad (11)$$

$$v_n^k(r, \beta) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad (12)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{1}{4}(m-1)(3-m) - \lambda_n, \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищется в виде $v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)$, где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = f_n^k(r, t); \quad v_{1n}^k(r, \beta) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (13)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0; \quad v_{2n}^k(r, \beta) = \tilde{\varphi}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (14)$$

Решение вышеуказанных задач представим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (15)$$

при этом

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \quad (16)$$

Подставляя (15) в (13), с учетом (16) получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1; \quad R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty; \quad (17)$$

$$T_{st} + \mu T_s = -a_{s,n}(t), \quad \beta < t < 0; \quad T_s(\beta) = 0. \quad (18)$$

Ограниченное решение задачи (17) имеет вид [13]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad \nu = n + \frac{1}{2}(m-2), \quad \mu = \mu_{s,n}^2. \quad (19)$$

Решение задачи (18) имеет вид

$$T_{s,n}(t) = \exp(-\mu_{s,n}^2 t) \int_t^{\beta} a_{s,n}(\xi) \exp(\mu_{s,n}^2 \xi) d\xi. \quad (20)$$

Подставляя (19) в (16), получим

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) &= \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Ряды (21) являются рядами Фурье—Бесселя [14] для соответствующих функций, если

$$a_{s,n}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (22)$$

$$b_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_{\nu}(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (15), (19), (20) получим решение задачи (13) в виде

$$v_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (24)$$

где $a_{s,n}(t)$ определяются из (22).

Подставляя (15) в (14), с учетом (16) приходим к задаче

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad \beta < t < 0; \quad T_s(\beta) = b_{s,n}$$

с решением

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t). \quad (25)$$

Из (19), (25) получим

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} (\exp \mu_{s,n}^2 (\beta - t)) J_{\nu}(\mu_{s,n}r), \quad (26)$$

где $b_{s,n}$ находятся из (23).

Следовательно, единственное решение задачи (1), (3) в области Ω_{β} имеет вид

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (27)$$

где $v_{1n}^k(r, t)$, $v_{2n}^k(r, t)$ находятся из (24), (26).

Имеют место следующие формулы [1, 14]:

$$\begin{aligned} 2J'_{\nu}(z) &= J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \\ J_{\nu}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \end{aligned} \quad (28)$$

По признаку Даламбера с учетом свойств (28) показывается, что ряды (24), (26) и их продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Применяя (28), оценки [11]

$$k_n \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

а также леммы 1, 2 и ограничения на заданные функции $\psi_2(t, \theta)$, $\varphi(r, \theta)$, можно показать, что полученное решение в виде (27) принадлежит классу $C(\overline{\Omega}_{\beta}) \cap C^1(\Omega_{\beta} \cup S) \cap C^2(\Omega_{\beta})$.

Из (24), (26), (27) при $t \rightarrow -0$ имеем

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (29)$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} \left[\int_0^{\beta} a_{s,n}(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi + \right. \\ \left. + b_{s,n} (\exp \mu_{s,n}^2 \beta) \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \nu(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \nu_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (30)$$

$$\nu_n^k(r) = \psi_{2nt}^k(0) - \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[a_{s,n}(0) + \mu_{s,n}^2 b_{s,n} (\exp \mu_{s,n}^2 \beta) + \right. \\ \left. + \mu_{s,n}^2 \int_0^{\beta} a_{s,n}(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \xi) d\xi \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r).$$

Из (21)–(23), (28), а также из лемм 1, 2 вытекает, что $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in W_2^l(S), l > 3m/2$.

Таким образом, в области Ω_{α} получена смешанная задача для многомерного волнового уравнения:

$$\Delta_x u - u_{tt} = 0, \quad (31)$$

$$u|_S = \tau(r, \theta), \quad u_t|_S = \nu(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_{\alpha}} = \psi_1(t, \theta), \quad (32)$$

где соответствующие функции определяются условиями (2), (29), (30).

В [8] доказана

ТЕОРЕМА 2. Если $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in W_2^l(S), \psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_{\alpha}), l > 3m/2$, то задача (31), (32) имеет единственное решение.

Используя теорему 2, приходим к справедливости теоремы 1, и на основании работы [8] можно записать явное представление решения задачи 1.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966. 287 с.
2. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с.

4. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: Акад. АН СССР, Сиб. отдел., Ин-т. мат., 1983. 84 с.
5. Karatoprakliev G. D. Boundary value problems for equations of mixed type in multi-dimensional domains // *Banach Center Publications*, 1983. vol. 10. pp. 231–269 (In Russian). <https://doi.org/10.4064/-10-1-231-269>.
6. Ладыженская О. А. *Смешанная задача для гиперболического уравнения*. М.: Гостехиздат, 1953. 279 с.
7. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973. 407 с.
8. Алдашев С. А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // *Укр. мат. журн.*, 2017. Т. 69, № 7. С. 992–999. <http://umj-old.imath.kiev.ua/article/?lang=en&article=10799>.
9. Алдашев С. А. Некорректность смешанной задачи для многомерного гиперболо-параболического уравнения / *Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления*: Материалы межд. научно-практической конф. Алматы, 2009. С. 469–474.
10. Алдашев С. А. Некорректность смешанной задачи для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений // *Мат. журнал. Алматы*, 2010. Т. 10, № 4. С. 4–12.
11. Михлин С. Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
12. Михлин С. Г. *Линейные уравнения в частных производных*. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
13. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1965. 703 с.
14. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 35M12, 35A02

Well-posedness of a mixed type problem for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation

© S. A. Aldashev

Kazakh National Pedagogical University named after Abay,
86, Tole-bi st., Almaty, 480100, Kazakhstan.

Abstract

We consider the modeling multidimensional hyperbolic-parabolic equation in the cylindrical area of Euclidean space and formulate the mixed problem with non-homogeneous boundary conditions for it. We show the unique solvability of the problem for the class of continuously differentiable functions and give a way to construct its explicit classical solution.

Keywords: well-posedness of mixed type problem, hyperbolic-parabolic equation, cylindrical area, Bessel functions.

Received: 22nd July, 2020 / Revised: 25th August, 2020 /

Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [The Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 287 pp. (In Russian)
2. Bitsize A. V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981, 448 pp. (In Russian)
3. Nakhshuev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Aldashev S. A. Well-posedness of a mixed type problem for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 574–582. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1809> (In Russian).

Author's Details:

4. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems for Nonclassical Equations in Mathematical Physics]. Novosibirsk, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., 1983, 84 pp. (In Russian)
5. Karatoprakliev G. D. Boundary value problems for equations of mixed type in multi-dimensional domains, *Banach Center Publications*, 1983, vol. 10, pp. 231–269 (In Russian). <https://doi.org/10.4064/-10-1-231-269>.
6. Ladyzhenskaia O. A. *Smeshannaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia* [The Mixed Problem for a Hyperbolic Equation]. Moscow, Gostekhizdat, 1953, 279 pp. (In Russian)
7. Ladyzhenskaia O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)
8. Aldashev S. A. Well-posedness of mixed problems for multidimensional hyperbolic equations with wave operator, *Ukr. Mat. Zh.*, 2017, vol. 69, no. 7, pp. 992–999 (In Russian). <http://umj-old.imath.kiev.ua/article/?lang=en&article=10799>.
9. Aldashev S. A. Ill-posedness of a mixed problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation, In: *Actual Problems of Mathematics, Computer Science, Mechanics and Control Theory*. Almaty, 2009, pp. 469–474 (In Russian).
10. Aldashev S. A. Ill-posedness of a mixed problem for one class of multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations, *Kazakh Math. J.*, 2010, vol. 10, no. 4, pp. 4–12 (In Russian).
11. Mikhlin S. G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Higher-Dimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1962, 254 pp. (In Russian)
12. Mikhlin S. G. *Lineinye uravneniia v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1977, 431 pp. (In Russian)
13. Kamke È. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Manual of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 pp. (In Russian)
14. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.



УДК 517.958:539.3(1)

Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки под действием периодической по временной координате нагрузки

© Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (национальный исследовательский университет), Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

Аннотация

В рамках модели типа Лява рассматривается геометрически нерегулярная изотропная полая цилиндрическая оболочка (ГНО). За основу берется строгая континуальная модель «оболочка–ребра». Предполагается, что ГНО нагрета до постоянной температуры θ_0 , два противоположных края подвергаются воздействию периодической по временной координате тангенциальной нагрузке, амплитуда и частота которой известны ($p(t) = p_0 \cos \nu t$). Задача определения динамической неустойчивости (ДН) термоупругой системы сводится к рассмотрению сингулярной системы трех дифференциальных уравнений динамической термоустойчивости ГНО в перемещениях, содержащих слагаемые с тангенциальными усилиями в форме Брайена. Эти усилия, возникающие в оболочке при ее нагреве, предварительно определяются на основе замкнутых решений сингулярной системы дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости ГНО. Конкретизированная исходная система уравнений преобразуется к уравнениям Матье, которые записаны в терминах классической атермической теории гладких пластин, содержащих поправки на геометрические параметры — кривизну, относительную высоту подкрепляющих элементов, их число и температуру. Определяются первые три области ДН ГНО. Проводится количественный анализ влияния геометрических параметров упругой системы и температуры на конфигурацию областей ДН и предельного значения коэффициента возбуждения.

Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. Динамическая термоустойчивость геометрически нерегулярной пологой цилиндрической оболочки под действием периодической по временной координате нагрузки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 583–594. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1755>.

Сведения об авторах

Григорий Николаевич Белосточный <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>

доктор технических наук, профессор; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: belostochny@mail.ru

Ольга Анатольевна Мыльцина <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории функций и стохастического анализа; e-mail: omyltsina@yandex.ru

$T_0^{11}, T_0^{12}, T_0^{22}$ — тангенциальные усилия, возникающие в ГНО при нагреве и силовом воздействии на торцы в ее безмоментном состоянии, содержатся в форме Брайена [8]. Отметим, что в первых двух уравнениях системы (1) отсутствуют инерционные члены в тангенциальной плоскости оболочки [9, 10].

В случае краевых условий

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad u^0 = 0, T_0^{12} = 0, \\ \text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad T_0^{22} = -p(t), T_0^{12} = 0, \end{aligned}$$

которые в перемещениях переписываются в виде

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad u^0 = 0, u_{,2}^0 + v_{,1}^0 = 0, \\ \text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad v_{,2}^0 + \nu(u_{,1}^0 - k_{11}w^0) = -\frac{p(t)}{B} + \alpha(1 + \nu)\theta_0, \\ u_{,2}^0 + v_{,1}^0 = 0, \end{aligned}$$

решение безмоментной термоупругости ГНО запишется так [11–14]:

$$u^0 = w^0 = 0, v^0 = \alpha(1 + \nu)\theta_0 x_2 - 2\frac{p(t)}{B}x_2,$$

и, следовательно, тангенциальные усилия в третьем уравнении системы (1) примут вид

$$T_0^{11} = -(1 - \nu)B\alpha\theta_0 - \nu p(t), \quad T_0^{22} = -p(t), \quad T_0^{12} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\bar{U}^0(u^0, v^0, w^0)$ — компоненты поля перемещений в безмоментном состоянии ГНО, α — коэффициент линейного расширения материала.

Решения системы (1) с учетом вида тангенциальных усилий (2), тождественно удовлетворяющих всем краевым условиям (для случая, когда ГНО находится в моментном состоянии)

$$\begin{aligned} \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad u = 0, T^{12} = 0, w = 0, M^{11} = 0 \\ (u = 0, u_{,2} + v_{,1} = 0, w = 0, w_{,11} = 0); \\ \text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad T^{22} = 0, T^{12} = 0, w = 0, M^{22} = 0 \\ (v_{,2} + \nu(u_{,1} - k_{11}w) = 0, u_{,2} + v_{,1} = 0, w = 0, w_{,22} = 0) \end{aligned} \quad (3)$$

зададим в виде

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= \tilde{u}(t) \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 \left(\frac{x_1}{a} - 1\right) \left(\frac{x_2}{b}\right)^3 \left(\frac{x_2}{b} - 1\right)^2, \\ v(x_1, x_2, t) &= \tilde{v}(t) \left(\frac{x_1}{a}\right)^3 \left(\frac{x_1}{a} - 1\right)^2 \left(\frac{x_2}{b}\right)^3 \left(\frac{x_2}{b} - 1\right)^2, \\ w(x_1, x_2, t) &= w_{km}(t) \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (4)$$

В условиях (3) в скобках приводится их запись в компонентах поля перемещений.

Подстановка (4) в уравнения системы (1) с последующим применением процедуры Галеркина приводит к трем уравнениям относительно переменных коэффициентов аппроксимирующих функций (4):

$$\begin{aligned}
 e_{11}\tilde{u} + e_{12}\tilde{v} &= -4\frac{\tilde{\delta}}{h}\frac{h}{a}\frac{a}{b}I^4w_{km}, & e_{21}\tilde{u} + e_{22}\tilde{v} &= -4\nu\frac{\tilde{\delta}}{h}\frac{h}{a}\frac{a}{b}I^8w_{km}, \\
 \frac{\gamma ha^4}{gD}\left(1 + 2\sum_{i=1}^n\tilde{\beta}_i^s\right)\frac{d^2w_{km}}{dt^2} + \left((k\pi)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\right)^2 + 192\left(\frac{\tilde{\delta}}{h}\right)^2 + \\
 + 48\left(\frac{a}{h}\right)^2\frac{\tilde{\delta}}{h}\frac{h}{a}\frac{a}{b}\left(\tilde{u}\frac{b}{a}I^9 + \nu I^{10}\tilde{v}\right) - 12(1 - \nu^2)(k\pi)^2\left(\frac{a}{h}\right)^2 - \\
 - 12\frac{p(t)}{Eh}(1 - \nu^2)\left(\frac{a}{h}\right)^2\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \nu(k\pi)^2 + 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2\sum_{i=1}^n\tilde{\beta}_i^s + \right. \\
 \left. + 2\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^4\sum_{i=1}^n\beta_i^s + 4(1 - \nu)\left(\frac{m\pi a}{b}\right)^2(k\pi)^2\sum_{i=1}^n\beta_i^c\right)w_{km}(t) = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\tilde{\delta}/h$ — относительная стрела подъема оболочки над ее планом при задании относительного параметра кривизны в виде $k_{11}a = -4\frac{\tilde{\delta}}{h}\frac{h}{a}$ [5, 7];

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{b}{a}I^1 + \frac{1 - \nu}{2}\frac{a}{b}I^2 + \frac{1 - \nu}{2}\varepsilon_1\frac{a}{b}\sum_{i=1}^n\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}G^{1i}, \\
 e_{12} &= \frac{1 + \nu}{2}I^3 + \frac{1 - \nu}{2}\varepsilon_1\sum_{i=1}^n\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}G^{2i}, & e_{21} &= \frac{1 + \nu}{2}I^5 + \nu\varepsilon_2\sum_{i=1}^n\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}G^{3i}, \\
 e_{22} &= \frac{a}{b}I^6 + \frac{1 - \nu}{2}\frac{b}{a}I^7 + \varepsilon_2\frac{a}{b}\sum_{i=1}^n\frac{h_i}{h}\frac{a_i}{a}G^{4i}; \\
 I^1 &= \int_0^1\int_0^1(6X - 2)(X^3 - X^2)(Y^5 - 2Y^4 + Y^3)^2dXdY, \\
 I^3 &= \int_0^1\int_0^1(X^4 - 8X^3 + 3X^2)(X^3 - X^2)(5Y^4 - 8Y^3 + 3Y^2)\times \\
 &\quad \times(Y^5 - 2Y^4 + 3Y^3)dXdY, \\
 I^4 &= \frac{1}{m\pi}\int_0^{k\pi}\int_0^{m\pi}\cos x\left(\left(\frac{x}{k\pi}\right)^3 - \left(\frac{x}{k\pi}\right)^2\right)\times \\
 &\quad \times\sin y\left(\left(\frac{y}{m\pi}\right)^5 - 2\left(\frac{y}{m\pi}\right)^4 + \left(\frac{y}{m\pi}\right)^3\right)dxdy, \\
 I^6 &= \int_0^1\int_0^1(X^5 - 2X^4 + X^3)^2(20Y^3 - 24Y^2 + 6Y)(Y^5 - 2Y^4 + Y^3)dXdY, \\
 I^7 &= \int_0^1\int_0^1(20X^3 - 24X^2 + 6X)(X^5 - 2X^4 + X^3)(Y^5 - 2Y^4 + Y^3)^2dXdY, \dots,
 \end{aligned}$$

$$I^{10} = \frac{1}{k\pi} \frac{1}{m\pi} \int_0^{k\pi} \int_0^{m\pi} \sin x \left(\left(\frac{x}{k\pi} \right)^5 - 2 \left(\frac{x}{k\pi} \right)^4 + \left(\frac{x}{k\pi} \right)^3 \right) \times \\ \times \sin y \left(5 \left(\frac{y}{m\pi} \right)^4 - 8 \left(\frac{y}{m\pi} \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{m\pi} \right)^2 \right) dx dy;$$

$$G^{1i} = \left(\left(\frac{x_i}{a} \right)^3 - \left(\frac{x_i}{a} \right)^2 \right)^2 \int_0^1 (20Y^3 - 24Y^2 + 6Y)(Y^5 - 2Y^4 + Y^3) dY, \quad \dots,$$

$$G^{4i} = \left(\left(\frac{x_i}{a} \right)^5 - 2 \left(\frac{x_i}{a} \right)^4 + \left(\frac{x_i}{a} \right)^3 \right)^2 \int_0^1 (20Y^3 - 24Y^2 + 6Y)(Y^5 - 2Y^4 + Y^3) dY;$$

$$\beta_i^s = \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \Phi_{3i} \sin^2 \frac{k\pi x_i}{a}, \quad \beta_i^c = \left(\frac{h_i}{h} \right)^3 \frac{a_i}{a} \Phi_{3i} \cos^2 \frac{k\pi x_i}{a}, \quad \tilde{\beta}_i^s = \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{k\pi x_i}{a}.$$

Выражая из первых двух уравнений системы (5) \tilde{u} и \tilde{v} через w_{km} , перепишем третье уравнение после ряда преобразований в виде

$$\frac{d^2 w_{km}}{dt^2} + \frac{((k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2}{\frac{\gamma h a^4}{gD}} \frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \times \\ \times \left(1 - \frac{12(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2 (\nu(k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2}{((k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2} \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \frac{p_0}{Eh} \cos \vartheta t \right) w_{km} = 0. \quad (6)$$

Это есть уравнение Матье [15, 16], записанное в терминах классической атермической теории пластин с поправками на параметры $\frac{\tilde{\delta}}{h}$, $\frac{h_i}{h}$, n и θ_0 . Здесь

$$f_1^{km} = 1 + \frac{2 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s}{\left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 + \nu(k\pi)^2}, \quad f_3^{km} = 1 + 2 \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^s, \\ f_2^{km} = 1 + \frac{192\Gamma_{km} \left(\frac{\tilde{\delta}}{h} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i - 12(1 - \nu^2)(k\pi)^2 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \alpha \theta_0}{((k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2}, \quad (7) \\ \beta_i = 2 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^4 \beta_i^s + 4 \left(\frac{m\pi a}{b} \right)^2 (k\pi)^2 (1 - \nu) \beta_i^c,$$

$$\Gamma_{km} = 1 - \frac{a}{b} \left(\frac{b}{a} I^9 \frac{\frac{a}{b} I^4 e_{22} - \nu I^8 e_{12}}{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}} + \nu I^{10} \frac{\nu I^8 e_{11} - \frac{a}{b} I^4 e_{21}}{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}} \right).$$

Следует отметить, что $((k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2 / (\frac{\gamma h a^4}{gD})$ — квадрат частоты собственных колебаний гладкой пластинки [17, 18],

$$\frac{12(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{b} \right)^2 (\nu(k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2}{((k\pi)^2 + (\frac{m\pi a}{b})^2)^2} = \frac{Eh}{p_0^{\text{кр}}}$$

— величина, обратная относительной критической нагрузке при статической потере устойчивости [19], $\mu_{km} = 0.5 p_0 / p_{\text{кр}}$ — коэффициент возбуждения гладкой пластинки на базе атермической теории, предельное значение которого $\tilde{\mu}_{km} = 0.5$ [20]. Границы первых трех областей неустойчивости [16] в системе $\{\mu_{km}, \frac{\vartheta}{\omega_{km}}\}$ примут вид

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = 2\sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \pm \frac{f_1^{km}}{f_3^{km}} \mu_{km}}}; \quad (8)$$

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} - 2\frac{(f_1^{km})^2}{f_2^{km} f_3^{km}} \mu_{km}}}; \quad (9)$$

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{5 f_2^{km}}{8 f_3^{km}} + \frac{1 f_2^{km}}{2 f_3^{km}} \sqrt{\frac{9}{16} + \left(\frac{f_1^{km}}{f_2^{km}}\right)^2} \mu_{km}}};$$

$$\frac{\vartheta}{\omega_{km}} = \sqrt{\frac{f_2^{km}}{f_3^{km}} \left(\frac{10}{9} \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} - \sqrt{\left(\frac{10}{9} \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} \right)^2 - \frac{4}{9} \left(1 \pm \frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} - \left(\frac{f_1^{km}}{f_2^{km}} \mu_{km} \right)^2 \right)} \right)}. \quad (10)$$

Приведенного уравнения (6) и формул (7) достаточно для определения влияния геометрических параметров на предельное значение коэффициента возбуждения и границы областей динамической неустойчивости при любых значениях k и m . Ниже приведены предельные значения $\tilde{\mu}_{km}$ в зависимости от величины параметра $\tilde{\delta}/h$ при прочих равных условиях.

$\tilde{\delta}/h$	$n = 0$	$n = 3, h_i/h = 5$
1	0.33629	0.16245
2	0.16965	0.11275
3	0.09291	0.07468
4	0.05688	0.05070
5	0.03794	0.03589

Здесь и далее $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, k = 1, m = 1, a/b = 1$ (если не указано иного), $a_i/a = 0.005$ (если есть ребра).

Количественные результаты, полученные на основании формул (7), (8)–(10), приводятся на рисунках ниже.

Из представленных рисунков следует, что конфигурации областей динамической неустойчивости малочувствительны к величине температуры (в предельных значениях не превышают потерю статической термоустойчивости). Следует отметить важный факт, что при соответствующем выборе условий закрепления можно полностью избежать влияния температуры на области динамической неустойчивости. Действительно, принимая условия закрепления в виде

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad T_0^{12} = 0, T_0^{11} = 0$$

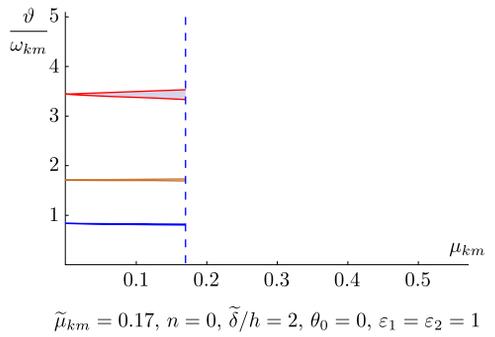
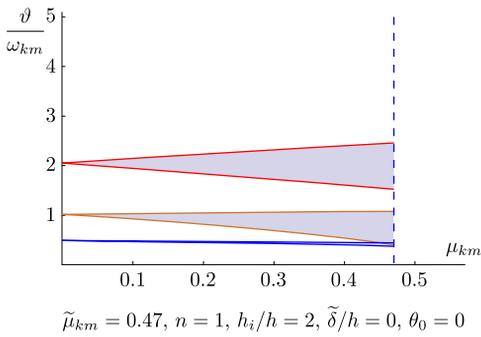
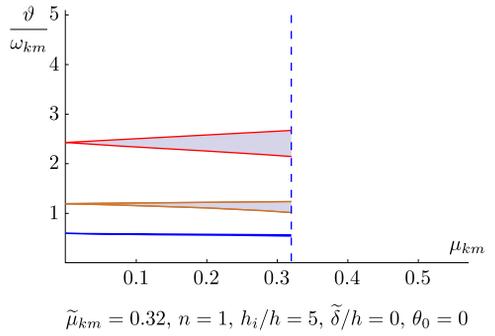
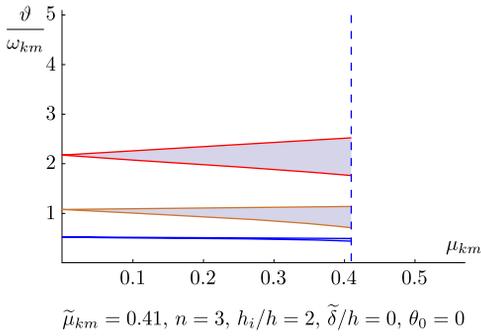
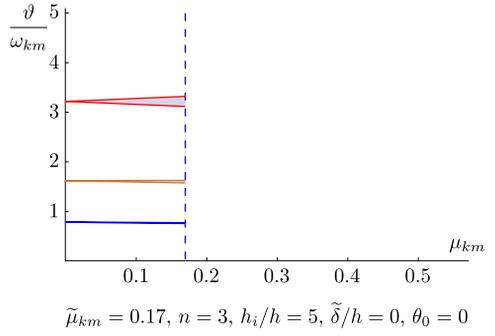
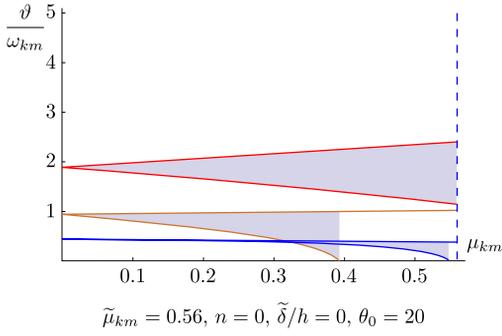
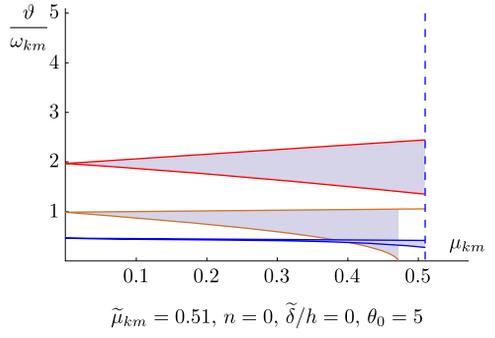
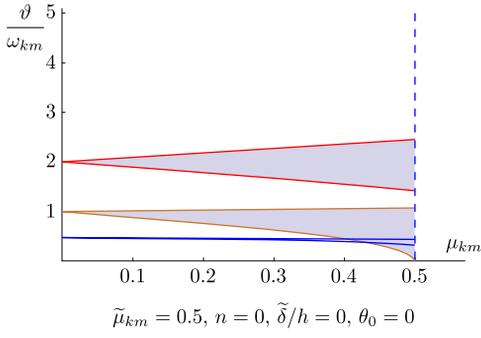
$$(u_{,2}^0 + v_{,1}^0 = 0, u_{,1}^0 + v_{,2}^0 - k_{11}w^0 = \alpha(1 + \nu)\theta_0);$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = b \quad T^{22} = -p(t), T^{12} = 0,$$

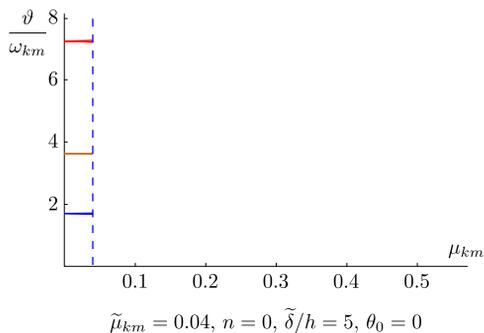
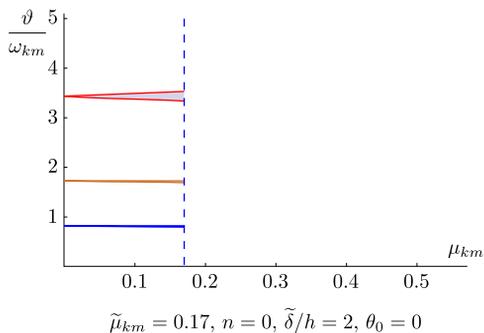
$$(v_{,2} + \nu(u_{,1} - k_{11}w) = \alpha(1 + \nu)\theta_0 - p(t)/B, u_{,2} + v_{,1} = 0)$$

(здесь, как и выше, приводятся условия закрепления в перемещениях), решение безмоментной термоупругости ГНО можно записать в виде [11]

$$u^0 = \frac{\nu p(t)}{B(1 - \nu^2)} x_1 + \alpha \theta_0 x_1, \quad v^0 = -\frac{p(t)}{B(1 - \nu^2)} x_2 + \alpha \theta_0 x_2, \quad w^0 = 0.$$



Конфигурация областей динамической устойчивости при заданных параметрах
 [Configuration of the dynamic stability domains depending on the given parameters]



Конфигурация областей динамической устойчивости при заданных параметрах
[Configuration of the dynamic stability domains depending on the given parameters]

Нетрудно убедиться, что тангенциальные усилия $T_0^{11}, T_0^{12}, T_0^{22}$ в этом случае не зависят от температуры θ_0 .

Анализ показывает, что конфигурации областей неустойчивости нечувствительны к подчеркнутым слагаемым в первых двух уравнениях системы (1). По этой причине удерживать их в уравнениях нет необходимости. Площади областей динамической неустойчивости существенно уменьшаются (как и предельные значения коэффициентов возбуждения) с увеличением параметров $h_i/h, n$ и $\tilde{\delta}/h$ (при прочих равных условиях) при определенных значениях которых наблюдается вырождение областей неустойчивости в скелетные линии [16]. Следует также отметить возможность «замены» полой гладкой цилиндрической оболочки на геометрически нерегулярную пластину (и обратно), подбирая соответствующим образом значения параметров $h_i/h, n$ и $\tilde{\delta}/h$, что немаловажно для инженерной практики.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.8570.2017/8.9.

Библиографический список

1. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1970. № 4. С. 150–162.
2. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 2. С. 32–40.
3. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной // *Докл. Росс. акад. естеств. наук*, 1999. № 1. С. 28–37.
4. Абовский Н.П. О вариационных уравнения для гибких ребристых и других конструктивно-анизотропных пологих оболочек / *Теория пластин и оболочек*. М.: Наука, 1971. С. 4–7.
5. Назаров А. А. *Основы теории и методы расчета пологих оболочек*. Л., М.: Стройиздат, 1966.

6. Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R. *Theory of Distributions: The Sequential Approach*. Amsterdam: Elsevier Scientific, 1973.
7. Рассудов В. М. Деформации пологих оболочек, подкрепленных ребрами жесткости // *Учен. зап. Сарат. ун-та*, 1956. Т. 52. С. 51–91.
8. Геккелер И.В. *Статика упругого тела*. Л., М.: Гостехиздат, 1934.
9. Огибалов П. М. *Вопросы динамики и устойчивости оболочек*. М.: МГУ, 1963.
10. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. *Термоустойчивость пластин и оболочек*. М.: МГУ, 1958.
11. Белосточный Г.Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // *Доклады Академии военных наук*, 1999. № 1. С. 14–25.
12. Белосточный Г. Н., Русина Е. А. Динамическая термоустойчивость трансверсально-изотропных пластин под действием периодических нагрузок / *Современные проблемы нелинейной механики конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами*: Сб. науч. тр. межвуз. науч. конф.. Саратов, 2000. С. 175–180.
13. Белосточный Г. Н., Цветкова О. А. Геометрически нерегулярные пластинки под действием периодического по времени температурного поля / *Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред*. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2002. 64–72 с.
14. Мыльцина О. А., Полиенко А. В., Белосточный Г. Н. Динамическая устойчивость нагретых геометрически нерегулярных пластин на основе модели Рейснера // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 760–772. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1579>.
15. Stoker J. J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems* / Wiley Classics Library. New York: Wiley, 1992.
16. Болотин В. В. *Динамическая устойчивость упругих систем*. М.: ГИТТЛ, 1956.
17. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. London: Constable, 1937.
18. Филиппов А. П. *Методы расчета сооружений на колебания*. М., Л.: Госстройиздат, 1941.
19. Тимошенко С. П. *Устойчивость упругих систем*. М., Л.: ОГИЗ–Гостехизд, 1946.
20. Амбарцумян С. А. *Теория анизотропных пластин*. М.: Наука, 1967.

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук приступает к работе в рамках Государственного контракта № 13.597.11.0043 по теме «Создание электронного архива выпусков научных журналов по тематическому направлению «Математика, физика, информационные технологии». Архив будет размещен на Общероссийском портале Math-Net.Ru.

Предполагается пополнить коллекцию Math-Net.Ru архивами ряда ведущих журналов по математике, физике и информационным технологиям, а также материалами научных мероприятий.

Проект представлен в социальных сетях:  @MathNetRu,  @MathNetRu,  Math-Net.Ru.

MSC: 74F05, 74K20

Dynamic thermal stability of heated geometrically irregular cylindrical shell under the influence of a periodic temporal coordinate load

© G. N. Belostochny, O. A. Myltcina

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

Abstract

In the framework of a Love type model, a geometrically irregular isotropic shallow cylindrical shell is considered, based on a strict continuum-shell-rib model. It is assumed that the geometrically irregular shell is heated to a constant temperature θ_0 , two opposite edges are exposed to a tangential load periodic in time coordinate, the amplitude and frequency of which are known ($p(t) = p_0 \cos \vartheta t$). The problem of determining the regions of dynamic instability of a thermoelastic system is reduced to considering a singular system of three differential equations of dynamic thermal stability of a geometrically irregular shell in displacements containing a term with tangential forces in the Brian form. These forces arising in the shell during its heating are preliminarily determined on the basis of closed solutions of the singular system of differential equations of the momentless thermoelasticity of the geometrically irregular shell. The specific initialized system of equations is transformed to the Mathieu equations, which are written in terms of the classical athermal theory of smooth plates containing corrections for geometric parameters — curvature, relative height of the reinforcing elements, their number, and temperature. The first three regions of dynamic instability of a geometrically irregular shell are determined. A quantitative analysis of the influence of the geometric parameters of the elastic system and temperature on the configuration of the regions of dynamic instability and the magnitude of the excitation coefficient is carried out.

Keywords: singularity, thermal stability, dynamics, geometric irregularity, continuum model, Mathieu equations, closed integrals, instability domains.

Received: 14th November, 2019 / Revised: 25th June, 2020 /Accepted: 14th September, 2020 / First online: 28th September, 2020

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Belostochny G. N., Myltcina O. A. Dynamic thermal stability of heated geometrically irregular cylindrical shell under the influence of a periodic temporal coordinate load, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 583–594. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1755> (In Russian).

Authors' Details:

Grigory N. Belostochny  <https://orcid.org/0000-0003-4471-6599>

Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics;
e-mail: belostochny@mail.ru

Olga A. Myltcina   <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Functions & Approximation Theory;
e-mail: omyltcina@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The results have been obtained within the State Assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation no. 9.8570.2017/8.9.

References

- Zhilin P. A. The linear theory of ribbed shells, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1970, no. 4, pp. 150–162 (In Russian).
- Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>.
- Belostochnyi G. N., Rusina E. A. Shells and geometrically irregular plates with heat-sensitive thickness, *Dokl. Ross. Akad. Estestv. Nauk*, 1999, no. 1, pp. 28–37 (In Russian).
- Abovskii N.P. On variational equations for flexible ribbed and other structurally anisotropic flat shells, *Teoriia plastin i obolochek* [Theory of Plates and Shells], 1971, pp. 4–7 (In Russian).
- Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta plogikh obolochek* [Fundamentals of the Theory and Methods of Calculating Shallow Shells]. Leningrad, Moscow, Stroizdat, 1966 (In Russian).
- Antosik P., Mikusiński J., Sikorski R. *Theory of Distributions: The Sequential Approach*. Amsterdam, Elsevier Scientific, 1973.
- Rassudov V. M. Deformations of gently sloping shells supported by stiffeners, *Uchen. Zap. Sarat. Un-ta*, 1956, vol. 52, pp. 51–91 (In Russian).
- Gekker I.V. *Statika uprugogo tela* [Statics of an Elastic Body]. Leningrad, Moscow, Gostekhizdat, 1934 (In Russian).
- Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoychivosti obolochek* [Problems in Dynamics and Stability of Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1963 (In Russian).
- Ogibalov P. M., Gribov V. F. *Termoustoychivost' plastin i obolochek* [Thermal Stability of Plates and Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1958 (In Russian).
- Belostochny G. N. Analytical methods for determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells, *Dokl. Akad. Voen. Nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–25 (In Russian).
- Belostochny G. N., Rusina E. A. Dynamic thermal stability of transversal-isotropic plates under the action of periodic loads, In: *Sovremennye problemy nelineinoi mekhaniki konstruktivnykh i vzaimodeistviyushchikh s agressivnymi sredami* [Modern problems of nonlinear mechanics of structures interacting with aggressive media]. Saratov, 2000, pp. 175–180 (In Russian).
- Belostochny G. N., Tsvetkova O. A. Geometrically irregular plates under the action of a time-periodic temperature field, In: *Problemy prochnosti elementov konstruktivnykh pod deistviem nagruzok i rabochikh sred* [Problems of strength of structural elements under the influence of loads and working media]. Saratov, Saratov State Techn. Univ., 2002, pp. 64–72 (In Russian).
- Myltcina O. A., Polienko A. V., Belostochny G. N. Dynamic stability of heated geometrically irregular plates on the basis of the Reisner model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 760–772 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1579>.
- Stoker J. J. *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Wiley Classics Library. New York, Wiley, 1992.

16. Bolotin V. V. *The dynamic stability of elastic systems*, Holden-Day Series in Mathematical Physics. San Francisco, London, Amsterdam, Holden-Day, 1964.
17. Timoshenko S. P. *Vibration Problems in Engineering*. London, Constable, 1937.
18. Filippov A. P. *Metody rascheta sooruzhenii na kolebaniia* [Methods for Calculating Structures for Vibrations]. Moscow, Leningrad, Gosstroizdat, 1941 (In Russian).
19. Timoshenko S. P. *Ustoichivost' uprugikh sistem* [Stability of Elastic Systems]. Moscow, Leningrad, OGIZ-Gostekhizd, 1946 (In Russian).
20. Ambartssumian S. A. *Teoriia anizotropnykh platin* [Theory of Anisotropic Plates]. Moscow, Nauka, 1967 (In Russian).



УДК 539.3

О решении одной не удовлетворяющей условиям Адамара задачи деформирования стержневых систем методом простой итерации

© В. В. Стружанов, А. В. Коркин

Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

Аннотация

Рассматривается стержневая система под действием квазистатически возрастающего растягивающего нагружения. Нагрузка осуществляется по мягкой и жесткой схемам. Один из стержней системы обладает свойством деформационного разупрочнения, то есть его диаграмма растяжения обладает падающей до нуля ветвью. В результате уравнения равновесия не удовлетворяют условиям Адамара. Система имеет несколько положений равновесия, в том числе и неустойчивых. Показано применение метода простых итераций для определения параметров всех возможных положений равновесия и их устойчивости при решении данных уравнений, не удовлетворяющих условиям Адамара.

Ключевые слова: уравнения равновесия, стержневая система, условия Адамара, простые итерации, устойчивость равновесий, параметры положений равновесия.

Получение: 25 мая 2020 г. / Исправление: 10 сентября 2020 г. /

Принятие: 14 сентября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2020 г.

Введение. Задача считается корректно поставленной, если она удовлетворяет условиям Адамара [1], то есть решение существует, оно единственное и устойчивое. Как правило, в механике деформируемого твердого тела такими свойствами обладают задачи, учитывающие только стадию упрочнения деформируемых материалов. Однако в процессе нагружения материал может переходить на стадию разупрочнения (закритическую стадию деформирования) [2–5]. Свойства таких материалов описываются полной диаграммой деформирования, состоящей из восходящей (упрочнение) и падающей до нуля (разупрочнение) ветвей [2, 4]. На падающей ветви материал физически

Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Стружанов В. В., Коркин А. В. О решении одной не удовлетворяющей условиям Адамара задачи деформирования стержневых систем методом простой итерации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 595–603. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1787>.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Стружанов <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. микромеханики материалов; e-mail: stru@imach.uran.ru

Александр Владимирович Коркин <https://orcid.org/0000-0003-3533-4257>
инженер; лаб. микромеханики материалов; e-mail: alexkorkin@list.ru

неустойчив и может существовать только в составе устойчивой в целом системы. Очевидно, что появление зон разупрочнения приводит к появлению у системы нескольких возможных положений равновесия, как устойчивых, так и неустойчивых. Таким образом, нарушаются условия Адамара. При решении задач механики деформирования с учетом разупрочнения, естественно, возникают математические трудности, связанные с определением параметров всех положений равновесия тела и их устойчивости.

Для решения нелинейных задач, удовлетворяющих условиям Адамара, применяются различные численные методы, в том числе и метод простых итераций [6–9]. Однако их прямое применение для решения задач, не удовлетворяющих условиям Адамара, невозможно, то есть нельзя найти параметры всех положений равновесия. Требуется определенная их модификация.

В данной работе рассмотрена простая стержневая система с разупрочняющим элементом под действием квазистатически возрастающего растягивающего нагружения, уравнения равновесия которой не удовлетворяют условиям Адамара. Приведена методика определения параметров всех возможных положений равновесия и их устойчивости методом простых итераций.

1. Механическая система. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух последовательно соединенных стержней AB и BD (рис. 1) [10]. Стержень AB присоединен шарнирами к абсолютно жесткой стенке (в точке A) и к абсолютно упругому стержню BD (в точке B), жесткость которого при растяжении равна C . Стержень AB выполнен из материала, обладающего свойством деформационного разупрочнения, то есть диаграмма растяжения $q(x)$ стержня AB , полученная в абсолютно жесткой машине [4], обладает восходящей и падающей до нуля ветвями (x — удлинение стержня). Таким образом, при некотором $x = x^B$ функция q имеет максимум, а при $x = x^Z > x^B$ функция $q = 0$. При этом $q_{,x} = \lambda^P(x) > 0$ на восходящей ветви ($0 \leq x < x^B$), $q_{,x} = \lambda^P(x) < 0$ на падающей ветви ($x^B < x \leq x^Z$) и $q_{,x} = 0$ для $x > x^Z$. Здесь λ^P — касательный модуль (касательная к кривой $q(x)$), а запятой (здесь и далее) обозначена производная по соответствующему аргументу. Вся система растягивается посредством задания монотонно возрастающего перемещения u правому концу стержня BD (жесткое нагружение) либо приложением к точке D монотонно возрастающего усилия p (мягкое нагружение). Растяжение осуществляется квазистатически при постоянной температуре.

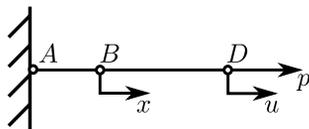


Рис. 1. Механическая система [Figure 1. Mechanical system]

2. Уравнение равновесия. При жестком нагружении системы параметром состояния является удлинение x (одна обобщенная координата), а параметром управления — перемещение u . В этом случае поведение системы при отсутствии кинетической энергии описывает потенциальная функция (лагранжиан)

$$W_1 = \int_0^x q(x) dx + \frac{C}{2}(u - x)^2.$$

Используя теперь уравнение Лагранжа второго рода [11], получаем уравнение равновесия

$$W_{1,x} = q(x) - C(u - x) = 0. \quad (1)$$

Для мягкого нагружения имеем два параметра состояния x , u (две обобщенные координаты) и один параметр управления p . Лагранжиан системы равен

$$W_2 = W_1 - \int_0^u p du.$$

Здесь второй член есть работа внешней силы, взятая со знаком минус. Тогда получаем систему уравнений равновесия

$$W_{2,x} = q(x) - C(u - x) = 0, \quad W_{2,u} = C(u - x) - p = 0. \quad (2)$$

3. Метод простых итераций (жесткое нагружение). Применим метод простых итераций для решения уравнения (1). Представим это уравнение в виде

$$x = \varphi(x, u), \quad (3)$$

где $\varphi(x, u) = \psi(x) + u$, $\psi(x) = -C^{-1}q(x)$. Тогда для каждого фиксированного значения параметра u решениями уравнения (3) являются координаты точек пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x, u)$ [9].

Очевидно, что кривая $y = \varphi(x, u)$ при возрастании параметра u перемещается параллельно графику функции $\psi(x)$ в направлении увеличения значения u . Так как $\psi_{,x} = \varphi_{,x}$, качественное поведение функции $\varphi(x)$ тождественно поведению $\psi(x)$. В интервале $(0, x^B)$ имеем $\psi_{,x} = -C^{-1}q_{,x} = -C^{-1}\lambda^p < 0$. Кроме того, $\lambda^p < C$, так как в противном случае растяжение стержня AB в данной системе невозможно. Следовательно, функция $\psi(x)$ и, соответственно, функция $\varphi(x, u)$ монотонно убывают и $|\psi_{,x}| = |\varphi_{,x}| < 1$. В интервале (x^B, x^Z) , где $\lambda^p < 0$, функция $\psi(x)$ и функция $\varphi(x, u)$ монотонно возрастают ($\psi_{,x} > 0$). В точке $x = x^B$ эти функции имеют минимум. При $x = 0$ и $x = x^Z$ функция $\psi = 0$. Отсюда $\varphi(0, u) = \varphi(x^Z, u) = u$. А также $\varphi(x, u) = u$, если $x > x^Z$.

Будем теперь для каждого значения u искать решение уравнения (3), применяя метод простых итераций в форме $x_{k+1} = \varphi(x_k, u)$, $k = \overline{1, \infty}$, [9]. Рассмотрим несколько возможных случаев, которые могут быть реализованы в зависимости от поведения функции $y = \varphi(x, u)$ на интервале (x^B, x^Z) . Допустим, что падающая ветвь диаграммы $q(x)$ достаточно пологая ($\lambda^p > -C$). Тогда $|\varphi_{,x}| < 1$ на всем интервале $(0, x^Z)$. При малых значениях u график функции $y = \varphi(x, u)$ на интервале (x^B, x^Z) всегда расположен ниже прямой $y = x$ и не пересекает ее (кривая 1, рис. 2). Пересечение происходит только в интервале $(0, x^B)$ в одной точке. При увеличении параметра u кривая 1 перемещается вверх. Пересечение с прямой $y = x$ всегда происходит только в одной точке. Следовательно, в данном случае решение уравнения (1) является единственным и система имеет одно положение равновесия. Так как везде $|\varphi_{,x}| < 1$, функция φ удовлетворяет условиям сжатия [12]. Определяемая методом простых итераций последовательность x_k сходится к единственному решению уравнения (3) при любом начальном приближении.

Если падающая ветвь диаграммы $q(x)$ такова, что существуют два значения x' и x'' (решения уравнения $\lambda^p(x) = -C$), где $\varphi_{,x} = 1$, тогда в интервале

$(x', x'') \subset (x^B, x^Z)$ производная $\varphi_{,x} > 1$. В двух остальных интервалах $(0, x')$ и (x'', x^Z) по-прежнему $|\varphi_{,x}| < 1$. Пусть $u < x'' - \psi(x'')$, т. е. кривая $y = \varphi(x, u)$ на интервале (x^B, x^Z) расположена ниже прямой $y = x$ (кривая 2, рис. 2). В этом случае пересечение кривой $y = \varphi(x, u)$ и прямой $y = x$ происходит только в одной точке. Уравнение (3) имеет единственное решение. Сходимость итераций на интервалах $(0, x')$ и (x'', x^Z) происходит согласно принципу сжимающихся отображений, а на интервале (x', x'') — согласно признаку Даламбера [13]. Таким образом, при любом начальном приближении члены итерационной последовательности необходимо попадают в интервал $(0, x')$ и в дальнейшем сходятся к искомому решению.

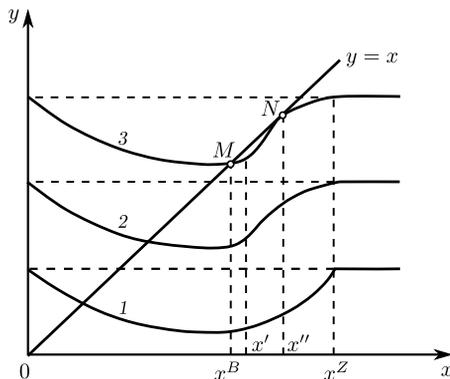


Рис. 2. Качественный вид графиков функций $y = \varphi(x, u)$ при $\lambda^p > -C$ (кривая 1), $u < x'' - \psi(x'')$ (кривая 2), $u = x'' - \psi(x'')$, $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$ (кривая 3)

[Figure 2. Qualitative graphs of functions $y = \varphi(x, u)$ when $\lambda^p > -C$ (line 1), $u < x'' - \psi(x'')$ (line 2), $u = x'' - \psi(x'')$, $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$ (line 3)]

Заметим, что все рассмотренные решения являются устойчивыми, поскольку при их возмущении при возобновлении итерационного процесса снова получаем эти же решения.

4. Метод простых итераций и неединственные решения (жесткое нагружение). Пусть $u = x'' - \psi(x'')$ и $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$. Тогда кривая $y = \varphi(x, u)$ пересекает прямую $y = x$ в точке M и касается ее в точке N (кривая 3, рис. 2). Уравнение (3) имеет два решения (механическая система — два положения равновесия). Если начальное приближение $x_0 \in (0, x')$, где $|\varphi_{,x}| < 1$, то последовательность x_k сходится к решению, отвечающему точке M . Когда $x_0 \in (x', x'')$, где $|\varphi_{,x}| > 1$, и функция $y = \varphi(x, u)$ расположена строго ниже прямой $y = x$, последовательность x_k сначала сходится согласно критерию Даламбера, а после попадания в интервал (x^B, x') сходится к точке M согласно принципу сжимающихся отображений. Если начальное приближение $x_0 \in (x'', x^Z)$, где $|\varphi_{,x}| < 1$, то реализуется сходимость к решению, отвечающему точке N .

Отметим, что равновесие системы в точке M является устойчивым, так как итерационный процесс после его возмущения снова попадает в точку M . Равновесие же в точке N неустойчивое. После его возмущения посредством уменьшения величины x итерационный процесс приводит к устойчивому равновесию в точке M .

Рассмотрим теперь случай, когда $u > x'' - \psi(x'')$, $x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$ и кривая $y = \varphi(x, u)$ пересекает прямую $y = x$ в трех точках S , E , F (кри-

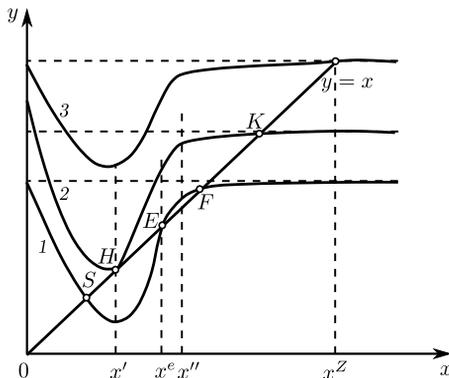


Рис. 3. Качественный вид графиков функции $y = \varphi(x, u)$ при $u > x'' - \psi(x'')$ (кривая 1), $u = x' - \psi(x')$ (кривая 2), $u > x' - \psi(x')$ (кривая 3) ($x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$)

[Figure 3. Qualitative graphs of functions $y = \varphi(x, u)$ when $u > x'' - \psi(x'')$ (line 1), $u = x' - \psi(x')$ (line 2), $u > x' - \psi(x')$ (line 3) ($x' - \psi(x') > x'' - \psi(x'')$)]

вая 1, рис. 3). То есть механическая система имеет три положения равновесия, а уравнение (3) — три решения. Отрезок $[0, x^Z]$ делится на интервалы $(0, x')$, (x'', x^Z) , где $|\varphi_{,x}| < 1$, интервал (x', x^e) (рис. 3), на котором функция $y = \varphi(x, u)$ расположена ниже прямой $y = x$, и интервал (x^e, x'') , на котором функция $y = \varphi(x, u)$ расположена выше прямой $y = x$. Используя рассуждения, приведенные выше, находим, что, выбрав начальное приближение $x_0 \in (0, x^e)$, итерационный процесс сходится к устойчивому равновесию, отвечающему точке S (рис. 3). Когда $x_0 \in (x^e, x^Z)$, итерации сходятся к устойчивому положению равновесия, отвечающему точке F . Решение уравнения (3), соответствующее точке E (рис. 3), нельзя получить методом простых итераций, так как равновесие неустойчивое и любое его возмущение приводит к переходу системы в устойчивое равновесие (либо к точке S , либо к точке F). Поэтому для определения равновесия в точке E следует воспользоваться методом половинного деления [9], согласно которому приближенное решение уравнения (3), отвечающее точке E неустойчивого равновесия (рис. 3), будет равно середине отрезка $2^{-n}(x'' - x')$ при достаточно больших n .

Пусть теперь параметр u достигает значения $u = x' - \psi(x')$. В этом случае кривая $y = \varphi(x, u)$ касается прямой $y = x$ в точке H и пересекает ее в точке K (кривая 2, рис. 3). Если $x_0 \in (0, x')$, то итерации сходятся к точке H . Когда $x_0 \in (x', x^Z)$, согласно рассуждениям, приведенным выше, итерации сходятся к точке K . Положение равновесия системы, отвечающее точке K , является устойчивым, а в точке H — неустойчивым. Любое его возмущение посредством увеличения параметра x приводит к тому, что в результате итераций получаем равновесие, соответствующее точке K . Наконец, если $u > x' - \psi(x')$, то кривая $y = \varphi(x, u)$ пересекает прямую $y = x$ в одной точке (кривая 3, рис. 3). Итерации сходятся к устойчивому положению равновесия при любом начальном приближении.

5. Метод простых итераций (мягкое нагружение). Исключим параметр u из уравнений системы (2). В результате получим уравнение

$$x = \beta(x, p), \tag{4}$$

где $\beta(x, p) = \gamma(x) + C^{-1}p$, $\gamma(x) = x - C^{-1}q(x)$. Тогда для каждого фиксированного значения параметра p решениями уравнения (4) являются координаты

точек пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \beta(x, p)$ [9]. Кривая $y = \beta(x, p)$ при возрастании параметра p перемещается параллельно графику функции $\gamma(x)$ (кривая 1, рис. 4) в направлении увеличения значения p (например кривые 2, 3, рис. 4).

При $\beta(x, p) = \gamma(x)$ ($p = 0$) кривая $\gamma(x)$ пересекает прямую $y = x$ в двух точках, где $x = 0$ и $x = x^Z$ (кривая 1, рис. 4).

Когда $0 < p < x^B - \gamma(x^B)$ (кривая 2, рис. 4), кривая $y = \beta(x, p)$ пересекает прямую $y = x$ в двух точках L и R (рис. 4), т. е. система под действием данной нагрузки имеет два положения равновесия. Отметим, что на отрезке $(0, x^B)$ имеем $\gamma_{,x} = 1 - C^{-1}\lambda^p < 1$. Если в методе простой итерации при решении уравнения (4) начальное приближение $x_0 \in (0, x^B)$, то итерационная последовательность сходится согласно принципу сжимающихся отображений к равновесию, отвечающему точке L . Когда $x_0 \in (x^B, x^r)$, итерации сначала сходятся согласно принципу Даламбера. Затем итерации попадают на отрезок $(0, x^B)$, начинается процедура сжатия, в результате которой получаем опять решение, соответствующее точке L . Отметим, что равновесие в точке L устойчиво, т. к. при любом отклонении от него, осуществляя итерационный процесс, снова приходим к точке L . В случае, когда $x_0 \in (x^r, x^Z)$, итерационный процесс расходится. Равновесие невозможно. Таким образом, равновесие, отвечающее точке R , неустойчиво. Его возмущение на $x < x^r$ приводит к равновесию в точке L , а на $x > x^r$ получаем отсутствие равновесия. Для определения параметров равновесия в точке R следует воспользоваться методом половинного деления [9], согласно которому приближенное решение уравнения (4), отвечающее точке R неустойчивого равновесия, будет равно середине отрезка $2^{-n}(x^r - \delta, x^r + \delta)$ при достаточно больших n (δ — некоторое малое число).

Пусть $p = x^B$ (кривая 3, рис. 4). Тогда график функции $y = \beta(x, p)$ касается прямой $y = x$ в одной точке Q . Система имеет единственное положение равновесия (уравнение (4) — единственное решение). Если $x_0 \in (0, x^B)$, то итерации сходятся к точке Q (реализуются сжимающие отображения). При $x_0 \in (x^B, x^Z)$ итерации расходятся (по Даламберу). Таким образом, система находится на границе между устойчивостью и неустойчивостью. Уменьшая значение x ($x < x^B$) и проводя итерационный процесс снова, приходим в точ-

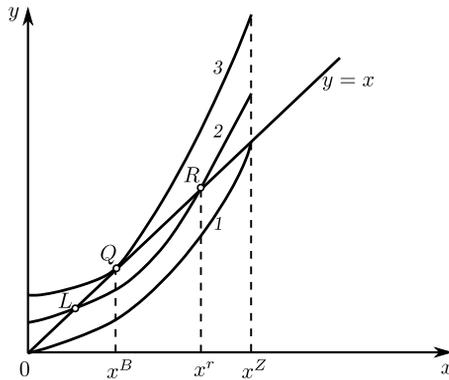


Рис. 4. Качественный вид графиков функции $y = \beta(x, p)$ при некоторых характерных значениях p : $p = 0$ (кривая 1), $0 < p < x^B - \gamma(x^B)$ (кривая 2), $p = x^B$ (кривая 3)

[Figure 4. Qualitative graphs of functions $y = \beta(x, p)$ for some characteristic values of p : $p = 0$ (line 1), $0 < p < x^B - \gamma(x^B)$ (line 2), $p = x^B$ (line 3)]

ку Q . При увеличении значения x ($x > x^B$) итерации расходятся и у системы отсутствует положение равновесия.

Наконец, если $p > x^B$, то у системы вообще нет положений равновесия. Уравнение (4) не имеет решения.

Заключение. На примере растягиваемой стержневой системы с разупрочняющимся элементом, нелинейные уравнения равновесия которой не удовлетворяют условиям Адамара, показано применение метода простых итераций для определения параметров всех положений равновесия — как устойчивых, так и неустойчивых.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование не имело финансирования.

Библиографический список

1. Арсенин В. Я. *Методы математической физики и специальные функции*. М.: Наука, 1974. 431 с.
2. Стружанов В. В., Миронов В. И. *Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций*. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 192 с.
3. Вильдеман В. Э., Чаусов Н. Г. Условия деформационного разупрочнения материала при растяжении образца специальной конфигурации // *Зав. лаб. Diagn. матер.*, 2007. Т. 73, № 10. С. 55–59.
4. Вильдеман В. Э., Третьяков М. П. Испытания материалов с построением полных диаграмм деформирования // *Пробл. машиностр. и надежн. машин*, 2013. № 2. С. 93–98.
5. Андреева Е. А. Решение одномерных задач пластичности для разупрочняющегося материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 152–160. <https://doi.org/10.14498/vsgtu642>.
6. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. М.: Наука, 1989. 432 с.
7. Калиткин Н. Н., Гольцов Н. А. *Введение в численный анализ*. М.: МГУЛ, 2003. 143 с.
8. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978. 512 с.
9. Вержбицкий В. М. *Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения*. М.: Высш. шк., 2000. 266 с.
10. Стружанов В. В., Коркин А. В. Об устойчивости процесса растяжения одной стержневой системы с разупрочняющимися элементами // *Вестник Уральского государственного университета путей сообщения*, 2016. № 3(31). С. 4–17. <https://doi.org/10.20291/2079-0392-2016-3-4-17>.
11. Pars L. A. *A treatise on analytical dynamics* / Heinemann Educational Books: London, 1965. xxi+641 pp.
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989. 624 с.
13. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2. М.: Физматлит, 1959. 808 с.

MSC: 74C10

On the solution of one problem of deformation of rod systems that does not satisfy the Hadamard conditions by the simple iteration method

© V. V. Struzhanov, A. V. Korkin

Institute of Engineering Science, Ural Branch of RAS,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

Abstract

A rod system under the action of a quasi-statically increasing tensile tension is considered. The load is carried out according to soft and hard schemes. One of the rods of the system has the property of deformation softening, that is, its tension diagram has a branch falling to zero. As a result, the equilibrium equations do not satisfy the Hadamard conditions. The system has several equilibrium positions, including unstable ones. The application of the simple iterations method is shown to determine the parameters of all possible equilibrium positions and their stability when solving these equations that do not satisfy the Hadamard conditions.

Keywords: equilibrium equations, rod system, Hadamard conditions, simple iterations, stability of equilibria, parameters of equilibrium positions.

Received: 25th May, 2020 / Revised: 10th September, 2020 /

Accepted: 14th September, 2020 / First online: 30th September, 2020

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has no funding from any party.

Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Struzhanov V. V., Korkin A. V. On the solution of one problem of deformation of rod systems that does not satisfy the Hadamard conditions by the simple iteration method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 595–603. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1787> (In Russian).

Authors' Details:

Valery V. Struzhanov   <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Material Micromechanics;
e-mail: stru@imach.uran.ru

Aleksandr V. Korkin  <https://orcid.org/0000-0003-3533-4257>

Engineer; Lab. of Material Micromechanics; e-mail: alexkorkin@list.ru

References

1. Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii [Methods of Mathematical Physics and Special Functions], 1974, 431 pp. (In Russian)
2. Struzhanov V. V., Mironov V. I. *Deformatsionnoe razuprochnenie materiala v elementakh konstruktsii* [Deformational Softening of Material in Structural Elements]. Ekaterinburg, UrO RAN, 1995, 192 pp. (In Russian)
3. Vil'deman V. E., Chausov N. G. Conditions of deformation failure for special configuration stretched sample, *Zavod. Lab., Diagn. Mater.*, 2007, vol. 73, no. 10, pp. 55–59 (In Russian).
4. Vil'deman V. E., Tretyakov M. P. Material testing by plotting total deformation curves, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, no. 2, pp. 166–170. <https://doi.org/10.3103/S1052618813010159>.
5. Andreeva E. A. Solution of one-dimensional softening materials plasticity problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 152–160 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu642>.
6. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1973, 432 pp. (In Russian)
7. Kalitkin N. N., Gol'tsov N. A. *Vvedenie v chislennyy analiz* [Introduction to Numerical Analysis]. Moscow, Moscow State Forest Univ., 2003, 143 pp.
8. Kalitkin N. N. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1978, 512 pp. (In Russian)
9. Verzhbitsky V. M. *Chislennye metody. Lineinaya algebra i nelineinye uravneniia* [Numerical Methods. Linear Algebra and Nonlinear Equations]. Moscow, Vyssh. shk., 2000, 266 pp. (In Russian)
10. Struzhanov V. V., Korokin A. V. Regarding stretching process stability of one bar system with softening elements, *Herald of the Ural State University of Railway Transport*, no. 3(31), pp. 4–17 (In Russian). <https://doi.org/10.20291/2079-0392-2016-3-4-17>.
11. Pars L. A. *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann Educational Books, London, 1965, xxi+641 pp.
12. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1989, 624 pp. (In Russian)
13. Fikhtengol'ts G. M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniia* [Course of Differential and Integral Calculus], vol. 2. Moscow, Fizmatlit, 1959, 808 pp. (In Russian)

ПОДПИСКА – 2021

на январь–июнь по Объединенному
каталогу «Пресса России»

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2020 г. проводится подписная кампания на журналы Самарского государственного технического университета (первое полугодие 2021 г.)

- 18106 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки»
- 18107 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки»
- 18108 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»
- 41340 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Философия»

*Условия оформления подписки Вы найдете
в I томе каталога «Пресса России»*