

ISSN 1991-8615 (print)  
ISSN 2310-7081 (online)



# ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

**Серия**  
**«Физико-математические науки»**

Т. 24, № 4 – 2020

Journal of Samara State Technical University  
Ser. Physical and Mathematical Sciences

**Вестник  
Самарского  
государственного  
технического  
университета**

ISSN 1991–8615 (print)  
ISSN 2310–7081 (online)  
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ  
Издаётся с 1996 г.  
Выходит 4 раза в год

Декабрь — 2020

**Серия**

**«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 24, № 4 – 2020)**

---

**Главный редактор** В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)  
**Заместитель главного редактора** А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)  
**Отв. секретарь** М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)  
**Отв. секретарь** Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)  
**Секретарь** Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

**Редакционный совет:**

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- П. Б. Бабаджанов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н. проф. (Душанбе, Таджикистан)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеевко — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)
- З. Д. Усманов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н., проф. (Душанбе, Таджикистан)

**Редакционная коллегия:**

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Провириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. ((Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Белгород, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

## НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.  
Серия «Физико-математические науки» (Т. 24, № 4 – 2020)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,  
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:  
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,  
443100, г. Самара,  
ул. Молодогвардейская, 244  
Тел.: +7 (846) 337 04 43  
Факс: +7 (846) 278 44 00  
E-mail: vsgtu@samgtu.ru  
URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Свидетельство о регистрации  
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 28 декабря 2020 г.  
Дата выхода в свет 25 января 2021 г.  
Формат 70 × 108 1/16.  
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.  
Тираж 500 экз. Рег. № 259/20.  
Заказ № 1-115-1v.

Оригинал-макет изготовлен  
на кафедре прикладной математики  
и информатики СамГТУ

Отпечатано в типографии  
Михаила Фурсова  
196105, г. Санкт-Петербург,  
ул. Благодатная, 69  
Тел.: +7 (812) 646 33 77

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 05.13.18 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Самарский государственный технический университет, 2020 (составление)

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

# Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)  
ISSN 2310–7081 (online)  
SCIENTIFIC JOURNAL  
Published since 1996  
4 issues per year  
December — 2020

**Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2020, vol. 24, no. 4**

---

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

**Editor-in-Chief** V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)  
**Deputy Editor-in-Chief** A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)  
**Executive Secretary** M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)  
**Executive Secretary** E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)  
**Secretary** E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

## **Editorial Council:**

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- P. B. Babadzhanov (Dushanbe, Tajikistan)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Z. D. Usmanov (Dushanbe, Tajikistan)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

## **Editorial Board:**

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Belgorod, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova  
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,  
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,  
Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: [vsgtu@samgtu.ru](mailto:vsgtu@samgtu.ru)

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>


Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,  
49, Blagodatnaya st., Saint Petersburg, 196105, Russian Federation  
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Samara State Technical University, 2020 (Compilation)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

## Содержание

### Дифференциальные уравнения и математическая физика

*Кожанов А. И., Дюжева А. В.* “Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка” . . . . . 607

*Кожевникова Л. М., Кашникова А. П.* “Существование решений квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака–Орлича–Соболева для неограниченных областей” . . . . . 621

*Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* “О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса интегральных уравнений на всей оси с монотонной нелинейностью” . . . . . 644

### Механика деформируемого твёрдого тела

*Радченко В. П., Шишкин Д. М.* “Влияние размеров области поверхностного упрочнения на напряженно-деформированное состояние балки с надрезом полукруглого профиля” . . . . . 663

*Шляхин Д. А., Кальмова М. А.* “Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра” . . . . . 677

### Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

*Заусаев А. Ф., Романюк М. А., Заусаев А. А.* “Математическое моделирование движения астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона” . 692

*Маклаков В. Н.* “Метод повышения порядка аппроксимации до произвольного натурального числа при численном интегрировании матричным методом краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений различных степеней с переменными коэффициентами” . . . . . 718

### Краткие сообщения

*Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* “К теории микрополяриной упругости Нейбера. Псевдотензорная формулировка” . . . . . 752

*Ковалев В. П., Просвиряков Е. Ю.* “Новый класс невинтовых точных решений уравнений Навье–Стокса” . . . . . 762

*Вильде М. В., Мылъцина О. А., Григорьев С. А., Белосточный Г. Н.* “Статическая термоустойчивость пологой геометрически нерегулярной оболочки из ортотропного термочувствительного материала” . . . . . 769

*Миронюк И. Ю., Усов Л. А.* “Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости” . 780

*Сизых Г. Б.* “Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами” . . . . . 790

## Contents

### Differential Equations and Mathematical Physics

- Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V.* “Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations” . . . . . 607
- Kozhevnikova L. M., Kashnikova A. P.* “Existence of solutions to quasi-linear elliptic equations in the Musielak–Orlicz–Sobolev spaces for unbounded domains” . . . . . 621
- Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.* “On alternating and bounded solutions of one class of integral equations on the entire axis with monotonic nonlinearity” . . 644

### Mechanics of Solids

- Radchenko V. P., Shishkin D. M.* “The influence of the dimensions of the surface hardening region on the stress-strain state of a beam with a notch of a semi-circular profile” . . . . . 663
- Shlyakhin D. A., Kalmova M. A.* “The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder” . . . . . 677

### Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

- Zausaev A. F., Romanyuk M. A., Zausaev A. A.* “Mathematical modeling of the asteroids’ motion belonging to the Apollo and Aten groups” . . . . . 692
- Maklakov V. N.* “A method for increasing the order of approximation to an arbitrary natural number by the numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of various degrees with variable coefficients by the matrix method” . . . . . 718

### Short Communications

- Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N.* “On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation” . . . . . 752
- Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu.* “A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations” . . . . . 762
- Wilde M. V., Myltcina O. A., Grigoriev S. A., Belostochny G. N.* “Static thermal stability of a shallow geometrically irregular shell made of orthotropic temperature-sensitive material” . . . . . 769
- Mironyuk I. Yu., Usov L. A.* “The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body” . . . . . 780
- Sizykh G. B.* “A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows” . . . . . 790

# Дифференциальные уравнения и математическая физика



УДК 517.953

## Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка

© А. И. Кожанов<sup>1</sup>, А. В. Дюжева<sup>2</sup><sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.<sup>2</sup> Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным по переменной  $t$  условием для уравнений

$$u_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = f(x, t)$$

( $\alpha, \beta$  — действительные постоянные,  $\Delta$  — оператор Лапласа по пространственным переменным). Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение).

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения третьего порядка, нелокальные задачи, интегральные условия, регулярные решения, единственность, существование.

Получение: 21 августа 2020 г. / Исправление: 17 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 30 ноября 2020 г.

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Кожанов А. И., Дюжева А. В. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 607–620. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1821>.

### Сведения об авторах

Александр Иванович Кожанов <https://orcid.org/0000-0003-4376-4003>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. дифференциальных и разностных уравнений; e-mail: [kozhanov@math.nsc.ru](mailto:kozhanov@math.nsc.ru)

Александра Владимировна Дюжева <https://orcid.org/0000-0002-3284-5302>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики; e-mail: [aduzheva@rambler.ru](mailto:aduzheva@rambler.ru)



**Введение.** Пусть  $\Omega$  есть ограниченная область из пространства  $\mathbb{R}^n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей  $\Gamma$ ;  $Q$  — цилиндр  $\Omega \times (0, T)$  конечной высоты  $T$ ;  $S = \Gamma \times (0, T)$  — его боковая граница.

Хорошо известно [1–8], что для дифференциальных уравнений

$$u_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = f(x, t) \quad (*)$$

( $\alpha, \beta$  — действительные постоянные,  $\Delta$  — оператор Лапласа по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $f(x, t)$  — заданная функция) в цилиндре  $Q$  корректными могут быть как гиперболическая смешанная задача с данными Коши на одном из оснований (при  $t = 0$ , если  $\alpha < 0$ , и при  $t = T$ , если  $\alpha > 0$ ), так и эллиптические задачи с данными на всей границе  $Q$ .

В настоящей работе будет исследована разрешимость нелокальных задач для уравнения (\*) с заданием одного локального условия по переменной  $t$  и одного нелокального условия интегрального вида. Подобные задачи для уравнения (\*) ранее не изучались.

Целью настоящей работы является доказательство существования и единственности регулярных<sup>1</sup> решений изучаемых задач.

При исследовании разрешимости тех или иных нелокальных задач часто используется прием, основанный на применении к уравнению оператора, задающего нелокальное условие. Этот прием в случае нелокальных условий интегрального вида позволяет после использования интегрирования по частям свести исходную задачу к задаче с «полуинтегральными» условиями («полуинтегральными» условиями мы называем условия, связывающие граничные значения с некоторыми интегралами от решения, в отличие от чисто интегральных условий, в которых изначально граничные значения не участвуют; как правило, задачи с «полуинтегральными» условиями легче поддаются исследованию, чем задачи с чисто интегральными условиями). В настоящей работе этот прием применяться не будет, техника исследований будет соответствовать технике работы [9].

Все построения и рассуждения в настоящей работе ведутся с использованием пространств Лебега  $L_p$ , Соболева  $W_p^l$ , а также пространств  $L_p(0, T; X)$ . Необходимые сведения об этих пространствах можно найти в [10–12].

**1. Разрешимость нелокальных задач I и II.** В настоящем пункте выполняется исследование разрешимости нелокальных задач для уравнений (\*) при задании одного нелокального условия интегрального вида.

Итак, пусть  $\alpha$  и  $\beta$  есть заданные действительные числа, причем  $\alpha \neq 0$ ,  $f(x, t)$  и  $N(t)$  есть заданные действительнзначные функции, определенные при  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in [0, T]$ .

Нелокальная задача I. *Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения*

$$u_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = f(x, t) \quad (1)$$

<sup>1</sup>Регулярными решениями называем решения, имеющие все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\int_0^T N(t)u(x, t) dt = 0, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА II. *Найти функцию  $u(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (4), а также условие*

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

В нелокальных задачах I и II условия (3) и (5) представляют собой обычные локальные (точечные) условия по переменной  $t$ , условие же (4) представляет собой интегральное условие. Как уже отмечалось выше, подобные задачи для уравнений (1) ранее не изучались.

Пусть  $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  есть соответственно ортонормированная в  $L_2(\Omega)$  система собственных функций и система собственных чисел задачи

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в } \Omega, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

причем собственные числа  $\lambda_k$  представлены в виде монотонно убывающей последовательности. Существование указанных систем собственных функций и собственных чисел известно — см. [12, с. 492], [13, с. 287]; более того, известно, что функции  $w_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , образуют базис в пространстве  $L_2(\Omega)$ , а все собственные числа  $\lambda_k$  отрицательны, последовательность  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  не имеет конечных предельных точек.

Определим необходимое ниже пространство  $H$ :

$$H = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)),$$

$$\Delta v_t(x, t) \in L_2(Q), \quad v_{tt}(x, t) \in L_2(Q)\}.$$

Будем считать, что  $H$  есть нормированное пространство с нормой

$$\|v\|_H = (\|v\|_{W_2^2(Q)}^2 + \|\Delta v_t\|_{L_2(Q)}^2)^{1/2}.$$

Уточним, что регулярным решением нелокальных задач I и II будем называть решение, принадлежащее этому пространству.

Обсудим вопрос о единственности решений нелокальных задач I и II.

Положим для  $j = 1, 2, \dots$

$$z_{j,1} = \frac{-\alpha\lambda_j + \sqrt{\alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j}}{2}, \quad z_{j,2} = \frac{-\alpha\lambda_j - \sqrt{\alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j}}{2},$$

$$A_j^{(1)} = \int_0^T N(t) (e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}) dt,$$

$$A_j^{(2)} = \int_0^T N(t) (z_{j,2}e^{z_{j,1}t} - z_{j,1}e^{z_{j,2}t}) dt,$$

$$B_j^{(1)} = \int_0^T tN(t)e^{-\frac{\alpha\lambda_j t}{2}} dt, \quad B_j^{(2)} = \int_0^T N(t)\left(1 + \frac{\alpha\lambda_j t}{2}\right)e^{-\frac{\alpha\lambda_j t}{2}} dt.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется условие

$$N(t) \in C([0, T]) \tag{6}$$

и одно из условий

$$\beta \neq \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4}, \quad A_j^{(1)} \neq 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{N}; \tag{7}$$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} : \beta = \frac{\alpha^2 \lambda_{j_0}}{4}; \quad A_j^{(1)} \neq 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{N} \setminus \{j_0\}, \quad B_{j_0}^{(1)} \neq 0. \tag{8}$$

Тогда нелокальная задача I не может иметь в пространстве  $H$  более одного решения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условие (6) и одно из условий

$$\beta \neq \frac{\alpha^2 \lambda_j}{4}, \quad A_j^{(2)} \neq 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{N}; \tag{9}$$

$$\beta = \frac{\alpha^2 \lambda_{j_0}}{4}, \quad A_j^{(2)} \neq 0 \quad \text{при } j \in \mathbb{N} \setminus \{j_0\}, \quad B_{j_0}^{(2)} \neq 0. \tag{10}$$

Тогда нелокальная задача II не может иметь в пространстве  $H$  более одного решения.

Доказательство этих теорем основано на представлении решения  $u(x, t)$  нелокальных задач I и II в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t)w_j(x)$$

и на том факте, что функции  $c_j(t)$  в случае  $f(x, t) \equiv 0$  являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$c_j''(t) + \alpha\lambda_j c_j'(t) + \beta c_j(t) = 0.$$

Учитывая вид решений этого уравнения (определяющегося корнями  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  характеристического многочлена), используя далее порожденные соответствующей задачей I или II нелокальные условия, получим, что при выполнении соотношений (7) или (8), (9) или (10) функции  $c_j(t)$  будут тождественно нулевыми на отрезке  $[0, T]$  функциями. А это и означает, что каждая из задач I и II не может иметь в пространстве  $H$  более одного решения.

Сделаем два замечания к установленным теоремам единственности.

Прежде всего заметим, что если в условиях (7) или (8), (9) или (10)  $m$  чисел  $A_j^{(1)}$ ,  $B_{j_0}^{(1)}$ , или  $A_j^{(2)}$ ,  $B_{j_0}^{(2)}$  равны нулю, то нетрудно показать, что соответствующие однородные нелокальные задачи I или II будут иметь семейство решений, определяющееся  $m$  произвольными постоянными.

И второе замечание. Нетрудно привести простые достаточные критерии для выполнения условий теорем 1 и 2. Например, условия теоремы 1 выполняются, если непрерывная на отрезке  $[0, T]$  функция  $N(t)$  отлична от тождественно нулевой функции и неотрицательна.

Перейдем к обсуждению разрешимости нелокальных задач I и II.

Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения о корректности локальных краевых задач для уравнения (1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполняется условие

$$\alpha > 0, \quad \alpha + \frac{\beta T}{2} > 0. \quad (11)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$  краевая задача

$$v_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta v = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (12)$$

$$v(x, t)|_S = 0, \quad (13)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (14)$$

имеет решение  $v(x, t)$ , принадлежащее пространству  $H$ .

*Доказательство.* Рассмотрим семейство задач с параметром  $\mu$  из отрезка  $[0, 1]$ : найти функцию  $\bar{v}(x, t)$ , являющуюся в цилиндре  $Q$  решением уравнения

$$\bar{v}_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \mu\beta \right) \Delta \bar{v} = f(x, t) \quad (12_\mu)$$

и такую, что для нее выполняются условия (13) и (14). Имеет место следующее:

- 1) краевая задача  $(12_0)$ , (13), (14) разрешима в пространстве  $H$ ;
- 2) для всевозможных решений  $\bar{v}(x, t)$  краевых задач  $(12_\mu)$ , (13), (14) выполняется равномерная по  $\mu$  оценка

$$\|\bar{v}\|_H \leq R_0.$$

Выполнение пункта 1) очевидно, выполнение же пункта 2) показывается стандартным образом с применением неравенства

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x, T) dx \leq T \sum_{i=1}^n \int_Q w_{x_i t}^2(x, t) dx dt,$$

справедливого для любой функции  $w(x, t)$  из пространства  $H$ , удовлетворяющей условию  $w(x, 0) = 0$  при  $x \in \Omega$ .

Из этих фактов и из теоремы о методе продолжения по параметру [14, гл. III, § 14, с. 146] следует, что краевая задача  $(12_\mu)$ , (13), (14) разрешима в пространстве  $H$  для любого числа  $\mu$  из отрезка  $[0, 1]$ . А это и дает (при  $\mu = 1$ ) требуемое.  $\square$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть выполняется условие

$$\alpha < 0. \quad (15)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$  краевая задача

$$v_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta v = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (16)$$

$$v(x, t)|_S = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

имеет решение  $v(x, t)$ , принадлежащее пространству  $H$ .

Доказательство этого утверждения имеется в работе [5, с. 29].

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть выполняется условие

$$\alpha < 0, \quad \alpha + \frac{\beta T}{2} < 0. \quad (18)$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(Q)$  краевая задача

$$v_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta v = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (19)$$

$$v(x, t)|_S = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad v(x, T) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

имеет решение  $v(x, t)$ , принадлежащее пространству  $H$ .

Доказательство утверждения 3 проводится полностью аналогично доказательству утверждения 1.

Заметим, что решения задач (12)–(14); (16), (17); (19), (20) нетрудно построить с помощью классического метода Фурье [16, с. 59].

Перейдем непосредственно к исследованию разрешимости нелокальных задач I и II.

Будем считать, что выполняется одно из условий (11), (15) или (18). Обозначим через  $v_k(x, t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , решение соответствующих краевых задач (12)–(14); (16), (17) или (19), (20). Как уже отмечалось выше, функции  $v_k(x, t)$  можно представить в виде ряда Фурье:

$$v_k(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{k,j}(t) w_j(x), \quad v_{k,j}(t) = \int_{\Omega} v_k(x, t) w_j(x) dx.$$

Далее определим числа  $a_{k,j}$  соотношениями

$$a_{k,j} = \int_0^T N(t) v_{k,j}(t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия

$$N(t) \in C([0, T]), \quad N(t) \geq N_0 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (6')$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (11')$$

Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(0, T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^{2p-1}(\Omega))$  при  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > (n + 6)/4$  (где  $n$  – размерность области  $\Omega$ ) нелокальная задача I имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $H$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что вследствие условий (6') и (11') функция  $v_1(x, t)$  и числа  $a_{1,j}$  будут корректно определены, числа  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  будут действительными и для них будут выполняться неравенства  $z_{j,2} < 0 < z_{j,1}$ , все числа  $A_j^{(1)}$  будут отличны от нуля. Положим

$$\varphi_j(t) = \frac{e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}}{A_j^{(1)}}, \quad D_j = \alpha^2 \lambda_j^2 - 4\beta \lambda_j, \quad u_1(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j} \varphi_j(t) w_j(x).$$

Имеет место очевидное неравенство

$$\int_0^T \varphi_j^2(t) dt \leq \frac{e^{2z_{j,1}T}}{z_{j,1} [A_j^{(1)}]^2}. \quad (21)$$

Далее

$$\begin{aligned} A_j^{(1)} &= \int_0^T N(t) (e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}) dt \geq N_0 \int_0^T (e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}) dt = \\ &= N_0 \left( \frac{e^{z_{j,1}T} - 1}{z_{j,1}} - \frac{e^{z_{j,2}T} - 1}{z_{j,2}} + \frac{\sqrt{D_j}}{z_{j,1} z_{j,2}} \right) \geq \frac{N_0}{z_{j,1}} \left( e^{z_{j,1}T} + \frac{\sqrt{D_j}}{z_{j,2}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку числа  $\lambda_j$  отрицательны и в совокупности образуют монотонно убывающую последовательность, существует положительное число  $\gamma$ , для которого выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{D_j}}{|z_{j,2}|} \leq \gamma z_{j,1}.$$

Для таких чисел<sup>2</sup>  $\gamma$  выполняется неравенство

$$A_j^{(1)} \geq \frac{N_0}{z_{j,1}} (e^{z_{j,1}T} - \gamma z_{j,1}),$$

и поскольку экспоненциальная функция растет быстрее любой степенной функции, найдется натуральное число  $j_0$  такое, что при  $j > j_0$  будет выполняться

$$A_j^{(1)} \geq \frac{N_0 e^{z_{j,1}T}}{2z_{j,1}}. \quad (22)$$

Очевидно, что из оценок (21) и (22) вытекает неравенство

$$\int_0^T \varphi_j^2(t) dt \leq N_1 |\lambda_j|,$$

в котором  $j > j_0$ , число  $N_1$  не зависит от  $j$ .

Действуя в целом аналогично, нетрудно показать, что существует натуральное число  $j_1$  такое, что при  $j > j_1$  имеет место оценка

$$\int_0^T \varphi_j'^2(t) dt \leq N_2 |\lambda_j|^3$$

с постоянной  $N_2$ , не зависящей от  $j$ .

<sup>2</sup>В качестве искомого числа  $\gamma$  можно взять любое число такое, что  $\gamma\beta > \left( \frac{4\beta}{|\lambda_1|} + \alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Вследствие неравенства Бесселя [14, с. 57], [15, с. 68] для функции  $u_1(x, t)$  выполняются оценки

$$\int_Q (\Delta u_1)^2 dx dt \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 a_{1,j}^2 \int_0^T \varphi_j^2(t) dt, \quad (23)$$

$$\int_Q (\Delta u_{1t})^2 dx dt \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 a_{1,j}^2 \int_0^T \varphi_j'^2(t) dt. \quad (24)$$

Если  $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^{2p-1}(\Omega))$ , то для функции  $v_1(x, t)$  будет выполняться включение  $\Delta^{p+1}v_1(x, t) \in L_2(Q)$ . Этот факт нетрудно доказать с помощью последовательного применения к уравнению (12) операторов  $\Delta, \Delta^2, \dots, \Delta^p$ , умножения полученных равенств на функции  $\Delta^2v_1, \dots, \Delta^{p+1}v_1$  соответственно и интегрирования по частям. Следовательно, справедливо равенство

$$v_{1,j}(t) = \frac{1}{\lambda_j^{p+1}} \int_{\Omega} \Delta^{p+1}v_1(x, t)w_j(x) dx,$$

из которого вытекают следующие оценки:

$$\int_0^T v_{1,j}^2(t) dt \leq \frac{C_1}{|\lambda_j|^{2(p+1)}}, \quad a_{1,j}^2 \leq \frac{C_2}{|\lambda_j|^{2(p+1)}}.$$

В свою очередь, из этих оценок и неравенств (23) и (24) вытекают неравенства

$$\int_Q (\Delta u_1)^2 dx dt \leq C_3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j|^{2p-1}}, \quad (25)$$

$$\int_Q (\Delta u_{1t})^2 dx dt \leq C_4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_j|^{2p-3}}. \quad (26)$$

Для чисел  $\lambda_j$  имеет место свойство  $|\lambda_j| \sim j^{\frac{2}{n}}$  (см., например, [12, с. 493]). Из этого свойства и из условия  $(4p - 6)/n > 1$  (вытекающего из условия теоремы на число  $p$ ) следует, что ряды в правых частях неравенств (25) и (26) сходятся.

Из доказанного следует, что функции  $\Delta u_1(x, t)$  и  $\Delta u_{1t}(x, t)$  принадлежат пространству  $L_2(Q)$ . Далее, имеет место равенство

$$u_{1tt}(x, t) = -\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) \Delta u_1(x, t).$$

Поскольку правая часть в этом равенстве принадлежит пространству  $L_2(Q)$ , то и левая часть будет элементом этого же пространства. Но тогда в целом функция  $u_1(x, t)$  будет принадлежать пространству  $H$ .

Определим функцию  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = v_1(x, t) - u_1(x, t).$$

Эта функция будет принадлежать пространству  $H$ , для нее будут выполняться уравнение (1), краевые условия (2) и (3), а также интегральное условие (4). Следовательно, эта функция будет представлять собой искомое решение нелокальной задачи I.  $\square$

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть выполняются условия (6') и (15). Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(0, T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^{2p-1}(\Omega))$  при  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > (n + 2)/4$ , нелокальная задача I имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $H$ .

*Доказательство.* При выполнении условия (15) числа  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  могут совпадать, могут быть комплексными и могут быть действительными. Определим функции  $\varphi_j(t)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &= \frac{1}{A_j^{(1)}} e^{-\alpha\lambda_j t} \sin\left(\sqrt{4\beta\lambda_j - \alpha^2\lambda_j^2}t\right), & \text{если } \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j < 0, \\ \varphi_j(t) &= \frac{1}{B_j^{(1)}} t e^{-\alpha\lambda_j t}, & \text{если } \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j = 0, \\ \varphi_j(t) &= \frac{1}{A_j^{(1)}} (e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}), & \text{если } \alpha^2\lambda_j^2 - 4\beta\lambda_j > 0. \end{aligned}$$

Далее введем функцию

$$u_2(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2,j} \varphi_j(t) w_j(x).$$

Рассмотрим сначала случай, когда число  $\beta$  неположительно. Тогда существуют натуральное число  $j_1^*$  и положительные числа  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  такие, что при  $j \geq j_1^*$  числа  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  будут действительными и различными и для них будут выполняться неравенства:

$$z_{j,2} + \gamma_1 \leq z_{j,1} \leq 0, \quad z_{j,1} \geq -\gamma_1. \quad (27)$$

Из данных свойств чисел  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  следует, что при  $j \geq j_1^*$  будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} &\int_0^T (e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t})^2 dt \leq 4T, \\ A_j^{(1)} &\geq N_0 \int_0^T (e^{z_{j,1}t} - e^{z_{j,2}t}) dt \geq \\ &\geq N_0 \int_0^T e^{z_{j,1}t} (1 - e^{-\gamma_1 t}) dt \geq N_0 \int_0^T e^{-\gamma_2 t} (1 - e^{-\gamma_1 t}) dt = N_0^*. \end{aligned}$$

В свою очередь, эти неравенства означают, что при  $j \geq j_1^*$  выполняется оценка

$$\int_0^T \varphi_j^2(t) dt \leq N_3 \quad (28)$$



с постоянной  $N_3$ , не зависящей от  $j$ . Далее, вновь используя неравенство (27) и учитывая, что отношение  $\frac{|z_{j,2}|}{|\lambda_j|}$  ограничено, нетрудно показать, что выполняется вторая оценка

$$\int_0^T \varphi_j'^2(t) dt \leq N_4 |\lambda_j|, \quad (29)$$

в которой  $j \geq j_1^*$ ,  $N_4$  не зависит от  $j$ .

Пусть теперь  $\beta > 0$ . В этом случае будут выполняться неравенства  $z_{j,2} < 0 < z_{j,1}$ , последовательность  $\{z_{j,1}\}_{j=1}^\infty$  будет ограниченной отделимой от нуля последовательностью. Из этих свойств чисел  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  следует, что для функций  $\varphi_j(t)$  будут выполняться как неравенства (28), так и неравенства (29).

Оценки (28) и (29), равенство

$$u_{2tt}(x, t) = -\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) \Delta u_2,$$

а также условие  $p > (n+2)/4$  означают, что функция  $u_2(x, t)$  принадлежит пространству  $H$  (см. окончание доказательства теоремы 3). Положим

$$u(x, t) = v_2(x, t) - u_2(x, t).$$

Эта функция и есть искомое решение нелокальной задачи I. □

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть выполняются условие (6') и (15). Тогда для любой функции  $f(x, t)$  из пространства  $L_2(0, T; W_2^{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^{2p-1}(\Omega))$  при  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > n/4$ , нелокальная задача II имеет решение  $u(x, t)$ , принадлежащее пространству  $H$ .

*Доказательство.* Пусть  $\beta > 0$ . Положим

$$\varphi_j(t) = \frac{z_{j,1} e^{z_{j,2} t} - z_{j,2} e^{z_{j,1} t}}{A_j^{(2)}}, \quad \bar{u}_2(x, t) = \sum_{j=1}^\infty a_{2,j} \varphi_j(t) w_j(x).$$

Используя свойства чисел  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$  (см. доказательство теоремы 4), нетрудно показать, что при достаточно больших  $j$  выполняется неравенство

$$\int_0^T \varphi_j^2(t) dt + \int_0^T \varphi_j'^2(t) dt \leq N_5 \quad (30)$$

с постоянной  $N_5$ , не зависящей от  $j$ .

Неравенства (30) и условие  $p > n/4$  означают, что функция  $\bar{u}_2(x, t)$  будет принадлежать пространству  $H$ . Определим функцию

$$u(x, t) = v_2(x, t) - \bar{u}_2(x, t). \quad (31)$$

Эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи II из пространства  $H$ .

Если  $\beta \leq 0$ , то функции  $\varphi_j(t)$  в случае  $\alpha^2 \lambda_j^2 - 4\beta \lambda_j > 0$  определим так же, как при  $\beta > 0$ , если же  $\alpha^2 \lambda_j^2 - 4\beta \lambda_j \leq 0$ , то функции  $\varphi_j(t)$  необходимо определить с учетом кратных или комплексных корней соответствующего

характеристического уравнения. Используя свойства чисел  $z_{j,1}$  и  $z_{j,2}$ , вновь нетрудно будет установить что при больших  $j$  для функций  $\varphi_j(t)$  выполняются неравенства (30). Определим функцию  $u(x, t)$  равенством (31). Эта функция вновь даст искомое решение нелокальной задачи II.  $\square$

### Комментарии и дополнения.

1. Утверждение 3 при доказательстве существования решений нелокальных задач I и II не использовалось. Из теорем 4 и 5 следует, что при использовании утверждения 1 о разрешимости эллиптической задачи для дифференциального уравнения (1) третьего порядка требуются более сильные условия на функцию  $f(x, t)$ , нежели при использовании утверждения 2 о разрешимости гиперболической задачи. Именно поэтому авторы не обсуждали использование утверждения 3 для изучения разрешимости нелокальной задачи II.
2. Теоремы 1 и 2 фактически дают условия, при выполнении которых число 0 будет собственным числом для задач

$$u_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = \lambda u,$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \int_0^T N(t)u(x, t) dt = 0,$$

и

$$u_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = \lambda u,$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \int_0^T N(t)u(x, t) dt = 0.$$

Нетрудно привести условия, при выполнении которых действительное ненулевое число  $\lambda$  будет собственным числом нелокальных задач I или II (уточним лишь, что случай  $\lambda \neq 0$  приводит к более громоздким условиям и выкладкам).

3. Граничное условие (2) можно заменить граничным условием второй или третьей краевых задач. Оператор Лапласа в уравнении (1) можно заменить общим эллиптическим оператором порядка  $2m$  в самосопряженной форме (с естественным добавлением краевых условий, порождающих полную систему собственных функций).

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778–2020–0005.

### Библиографический список

1. Дубля З. Д. О задаче Дирихле для некоторого класса уравнений третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 1. С. 50–55.

2. Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. *Нелинейные уравнения переменного типа*. Новосибирск: Наука, 1983. 270 с.
3. Кожанов А. И. Краевые задачи и свойства решений для уравнений третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1989. Т. 25, № 12. С. 2143–2153.
4. Ларькин Н. А. Теоремы существования для квазилинейных псевдогиперболических уравнений // *Докл. АН СССР*, 1982. Т. 265, № 6. С. 1316–1319.
5. Kozhanov A. I. *Composite Type Equations and Inverse Problems* / Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht: VSP, 1999. x+171 pp.
6. Худавердиев К. И., Велиев А. А. *Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью*. Баку: Чашыюглу, 2010. 168 с.
7. Кожанов А. И., Потапова С. В. Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // *Дальневост. матем. журн.*, 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.
8. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной*. Казань: Казан. ун-т, 2014. 385 с.
9. Kozhanov A. I. Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations // *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019. vol. 64, no. 5. pp. 741–752. <https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1501038>.
10. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. М.: Наука, 1988. 337 с.
11. Ладъженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. М.: Наука, 1973. 576 с.
12. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* / North-Holland Mathematical Library. vol. 18. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publ., 1978. 528 pp.
13. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными*. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 562 с.; оригинал: Evans L. C. *Partial Differential Equations* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 19: American Mathematical Society, 2010. xxi+749 pp.
14. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980. 495 с.
15. Лебедев В. И. *Функциональный анализ и вычислительная математика*. М.: Физматлит, 2005. 296 с.
16. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. *Лекции по математической физике*. М.: Московск. ун-т, 2004. 416 с.

MSC: 35M10

## Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations

© A. I. Kozhanov<sup>1</sup>, A. V. Dyuzheva<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sobolev Institute of Mathematics,  
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
4, Acad. Koptuyug pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

<sup>2</sup> Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

The paper is devoted to the study of the solvability of nonlocal problems with an integral variable  $t$  condition for the equations

$$u_{tt} + \left( \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \right) \Delta u = f(x, t)$$

( $\alpha, \beta$  are valid constants,  $\Delta$  is Laplace operator by spatial variables). Theorems are proved for the studied problems existence and non-existence, uniqueness and non-uniqueness solutions (having all derivatives generalized by S. L. Sobolev included in the equation).

**Keywords:** third-order differential equations, non-local problems, integral conditions, regular solutions, uniqueness, existence.

Received: 21<sup>st</sup> August, 2020 / Revised: 17<sup>th</sup> October, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 30<sup>th</sup> November, 2020

**Competing interests.** We have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

### Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


**Please cite this article in press as:**

Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. Non-local problems with an integral condition for third-order differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 607–620. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1821> (In Russian).

**Authors' Details:**

Alexander I. Kozhanov  <https://orcid.org/0000-0003-4376-4003>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Differential and Difference Equations; e-mail: [kozhanov@math.nsc.ru](mailto:kozhanov@math.nsc.ru)

Alexandra V. Dyuzheva  <https://orcid.org/0000-0002-3284-5302>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: [aduzheva@rambler.ru](mailto:aduzheva@rambler.ru)

**Funding.** The work was carried out with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of state task, no. 0778-2020-0005.

## References

1. Dublya Z. D. The Dirichlet problem for a certain class of third order equations, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 1, pp. 50–55 (In Russian).
2. Larkin N. A., Novikov V. A., Yanenko N. N. *Nelineinye uravneniia peremennogo tipa* [Non-linear Equations of Variable Type]. Novosibirsk, Nauka, 1983, 270 pp. (In Russian)
3. Kozhanov A. I. Boundary value problems and properties of solutions for third-order equations, *Differ. Equ.*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 1528–1537.
4. Larkin N. A. Existence theorems for quasilinear pseudohyperbolic equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 260–263.
5. Kozhanov A. I. *Composite Type Equations and Inverse Problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series. Utrecht, VSP, 1999, x+171 pp.
6. Khudaverdiyev K. I., Veliyev A. A. *Issledovanie odnomernoi smeshannoi zadachi dlia odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravnenii tret'ego poriadka s nelineinoi operatornoi pravoi chast'iu* [Investigation of a One-Dimensional Mixed Problem for a Class of Pseudohyperbolic Equations of Third Order with Non-Linear Operator Right Hand Side]. Baku, Chashyogly, 2010, 168 pp. (In Russian)
7. Kozhanov A. I., Potapova S. V. The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 48–65 (In Russian).
8. Zhegalov V. I., Mironov A. N., Utkina E. A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Dominating Partial Derivative]. Kazan, Kazan Univ., 2014, 385 pp. (In Russian)
9. Kozhanov A. I. Nonlocal problems with integral conditions for elliptic equations, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, vol. 64, no. 5, pp. 741–752. <https://doi.org/10.1080/17476933.2018.1501038>.
10. Sobolev S. L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 90. Providence, American Mathematical Society, 1991, vii+286 pp.
11. Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 46. New York, Academic Press, 1968, xviii+495 pp.
12. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 18. Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ., 1978, 528 pp.
13. Evans L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 2010, xxi+749 pp.
14. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 495 pp. (In Russian)
15. Lebedev V. I. *Funktsional'nyi analiz i vychislitel'naiia matematika* [Functional Analysis and Computational Mathematics]. Moscow, Fizmatlit, 2005, 296 pp. (In Russian)
16. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. *Lektsii po matematicheskoi fizike* [Lectures on Mathematical Physics]. Moscow, Moscow Univ., 2004, 416 pp. (In Russian)



УДК 517.956.25

# Существование решений квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака–Орлича–Соболева для неограниченных областей

© Л. М. Кожевникова<sup>1,2</sup>, А. П. Кашникова<sup>1</sup><sup>1</sup> Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал, Россия, 453103, Стерлитамак, проспект Ленина, 49.<sup>2</sup> Елабужский институт (филиал) Казанского (Приволжского) федерального университета, Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.

## Аннотация

Рассматривается вопрос существования решений задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях. Ограничения на структуру квазилинейных уравнений формулируются в терминах специального класса выпуклых функций — обобщенных  $N$ -функций. А именно, нелинейности определяются функциями Музилака–Орлича такими, что дополнительные к ним функции подчиняются  $\Delta_2$ -условию. Соответствующее пространство Музилака–Орлича–Соболева не обязано быть рефлексивным. Именно этот факт является существенной проблемой, поскольку теорема для псевдомонотонных операторов здесь не применима.

Для рассматриваемого класса уравнений доказательство теоремы существования проводится на основе абстрактной теоремы для дополнительных систем. Важным инструментом, который позволил обобщить имеющиеся результаты существования решений рассматриваемых уравнений для ограниченных областей на неограниченные области, является теорема вложения пространств Музилака–Орлича–Соболева. Таким образом, в работе найдены условия на структуру квазилинейных уравнений в терминах функций Музилака–Орлича, достаточные для разрешимости задачи Дирихле в неограниченных областях. Кроме того, приведены примеры уравнений, показывающие, что класс нелинейностей, рассматриваемый в работе, шире, чем нестепенные и степенные нелинейности.

## Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Кожевникова Л. М., Кашникова А. П. Существование решений квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака–Орлича–Соболева для неограниченных областей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 621–643. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1803>.

### Сведения об авторах

Лариса Михайловна Кожевникова ✉ <https://orcid.org/0000-0002-6458-5998>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа; e-mail: [kosul@mail.ru](mailto:kosul@mail.ru)

Анастасия Павловна Кашникова; студент; e-mail: [a.kashnikova98@yandex.ru](mailto:a.kashnikova98@yandex.ru)

**Ключевые слова:** Музилака–Орлича–Соболева пространство, задача Дирихле, существование решения, нерефлексивное пространство, неограниченная область.

Получение: 20 июля 2020 г. / Исправление: 20 сентября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2020 г.

**Введение.** Пусть  $\Omega$  — произвольная неограниченная область пространства  $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ . В работе рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка вида

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = F(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

с однородным краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Ограничения на функции  $a(x, s_0, s)$ ,  $a_0(x, s_0, s)$ , входящие в уравнение (1), формулируются в терминах специального класса выпуклых функций, называемых обобщенными  $N$ -функциями, они будут приведены ниже.

Общая краевая задача вариационного типа для квазилинейного эллиптического уравнения высокого порядка в дивергентной форме с нелинейностями полиномиального вида была рассмотрена Ф. Браудером [1] в произвольной области без условий ограниченности или гладкости границы области. Соответствующий оператор из рефлексивного банахова пространства в его двойственное является псевдомонотонным, и из этого факта следует результат существования решения рассматриваемой задачи.

Следуя работе [1] Л. М. Кожевниковой, А. Ш. Камалетдиновым [2] установлено существование слабого решения задачи Дирихле в произвольной области  $\Omega$  для анизотропного уравнения (1) с переменными показателями нелинейностей. Ранее Л. М. Кожевниковой, А. А. Хаджи в работе [3] доказано существование слабого решения задачи Дирихле в произвольной неограниченной области  $\Omega$  для анизотропного эллиптического уравнения (1) с нелинейностями, определяемыми  $N$ -функциями.

Для квазилинейных эллиптических уравнений в пространствах Музилака–Орлича–Соболева известны следующие результаты существования слабых решений. В работах [4, 5] доказано существование решений при некоторых предположениях, таких как  $\Delta_2$ -условие, а также равномерная выпуклость обобщенной  $N$ -функции  $M$ , которые гарантируют, что пространство Музилака–Орлича–Соболева является рефлексивным. Исследованию вопросов существования решений вариационных краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений в нерефлексивных пространствах (при условии, что дополнительная функция  $\bar{M}$  подчиняется  $\Delta_2$ -условию) посвящены работы [6, 7]. Существование слабых решений для дифференциальных уравнений второго порядка с граничным условием Дирихле или Неймана методом построения супер- и субрешений в рефлексивном и нерефлексивном сепарабельных пространствах установлено в работах [8] и [9] соответственно.

Содержательный обзор проблем, возникающих в вопросах существования решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений в пространствах Музилака—Орлича—Соболева, приведен в работе [10].

Следует отметить, что авторам неизвестны результаты исследований существования решений нелинейных уравнений в пространствах Музилака—Орлича—Соболева для неограниченных областей. В настоящей работе доказана теорема существования решения задачи (1), (2) для произвольной неограниченной области  $\Omega$  в пространстве Музилака—Орлича—Соболева, которое может быть нерефлексивным.

**1. Пространства Музилака—Орлича—Соболева.** В этом параграфе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных  $N$ -функций и пространств Музилака—Орлича [11–13].

Пусть функция  $M(x, z) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $M(x, \cdot)$  —  $N$ -функция по  $z \in \mathbb{R}$ , то есть она является выпуклой вниз, неубывающей, четной, непрерывной,  $M(x, 0) = 0$  для п.в.  $x \in \Omega$  и

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \Omega} M(x, z) &> 0 \quad \text{для всех } z \neq 0, \\ \limsup_{z \rightarrow 0} \inf_{x \in \Omega} \frac{M(x, z)}{z} &= 0, \\ \liminf_{z \rightarrow \infty} \inf_{x \in \Omega} \frac{M(x, z)}{z} &= \infty; \end{aligned}$$

- 2)  $M(\cdot, z)$  — измеримая функция по  $x \in \Omega$  для любых  $z \in \mathbb{R}$ .

Такая функция  $M(x, z)$  называется функцией Музилака—Орлича или обобщенной  $N$ -функцией.

Дополнительная функция  $\overline{M}(x, \cdot)$  к функции Музилака—Орлича  $M(x, \cdot)$  в смысле Юнга для п.в.  $x \in \Omega$  и любых  $z \geq 0$  определяется равенством

$$\overline{M}(x, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(x, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy| \leq M(x, z) + \overline{M}(x, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Пусть  $P(x, z)$  и  $M(x, z)$  — функции Музилака—Орлича. Если для каждой положительной константы  $l$  имеем

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \inf_{x \in \Omega} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0, \quad (4)$$

то это обозначается  $P \ll M$  и говорят, что  $P$  растет медленнее, чем  $M$  на  $\infty$ .

Функция Музилака—Орлича  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, если существуют константы  $c > 0$ ,  $z_0 \geq 0$  и функция  $H \in L_1(\Omega)$  такие, что для п.в.  $x \in \Omega$  и любых  $|z| \geq z_0$  справедливо неравенство

$$M(x, 2z) \leq cM(x, z) + H(x).$$



$\Delta_2$ -условие эквивалентно выполнению для п.в.  $x \in \Omega$  и любых  $|z| \geq z_0$  неравенства

$$M(x, lz) \leq c(l)M(x, z) + H_l(x), \quad H_l \in L_1(\Omega),$$

где  $l$  — любое число, большее единицы,  $c(l) > 0$ .

В настоящей работе предполагается, что дополнительная  $N$ -функция  $\overline{M}(x, z)$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию при всех значениях  $z \in \mathbb{R}$  (т.е.  $z_0 = 0$ ). Таким образом, для любого  $l > 0$  имеет место неравенство

$$\overline{M}(x, lz) \leq c(l)\overline{M}(x, z) + H_l(x), \quad H_l \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Существуют три класса Музилака—Орлича:

- $\mathcal{L}_M(\Omega)$  — обобщенный Музилака—Орлича класс измеримых функций  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что

$$\varrho_{M,\Omega}(v) = \int_{\Omega} M(x, v(x))dx < \infty;$$

- $L_M(\Omega)$  — обобщенное Музилака—Орлича пространство, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс  $\mathcal{L}_M(\Omega)$ , с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{M,\Omega} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{M,\Omega} \left( \frac{v}{\lambda} \right) \leq 1 \right\};$$

- $E_M(\Omega)$  — замыкание по норме  $\|\cdot\|_{M,\Omega}$  ограниченных измеримых функций с компактным носителем в  $\overline{\Omega}$ .

Справедливы вложения  $E_M(\Omega) \subset \mathcal{L}_M(\Omega) \subset L_M(\Omega)$ . Ниже в обозначениях  $\|\cdot\|_{M,Q}$ ,  $\varrho_{M,Q}(\cdot)$  будем опускать индекс  $Q = \Omega$ .

Функция Музилака—Орлича  $M(x, z)$  называется локально интегрируемой, если

$$\varrho_{M,Q}(z) = \int_Q M(x, z)dx < \infty$$

для любого  $z \in \mathbb{R}$  и любого измеримого множества  $Q \subset \Omega$  такого, что  $\text{meas } Q < \infty$ . Если  $Q$  может совпадать с  $\Omega$ , то  $M(x, z)$  называется интегрируемой в  $\Omega$ .

Пусть  $M$  и  $\overline{M}$  — локально интегрируемые дополнительные обобщенные  $N$ -функции. Пространство  $E_M(\Omega)$  сепарабельное и  $(E_M(\Omega))^* = L_{\overline{M}}(\Omega)$ . Если  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то  $E_M(\Omega) = \mathcal{L}_M(\Omega) = L_M(\Omega)$  и  $L_M(\Omega)$  сепарабельное. Пространство  $L_M(\Omega)$  рефлексивное тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича  $M$  и  $\overline{M}$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию.

Для  $v \in L_M(\Omega)$  справедливы неравенства:

$$\|v\|_M \leq \varrho_M(v) + 1, \quad (6)$$

если  $\|v\|_M \leq 1$ , то

$$\varrho_M(v) \leq \|v\|_M, \quad (7)$$

если  $\|v\|_M > 1$ , то

$$\|v\|_M \leq \varrho_M(v).$$

Последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}} \in L_M(\Omega)$  модулярно сходится к функции  $v \in L_M(\Omega)$ , если существует положительная константа  $k > 0$  такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M\left(\frac{v^j - v}{k}\right) = 0.$$

Если  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряженных функций Музилака—Орлича  $M$  и  $\bar{M}$ , если  $u \in L_M(\Omega)$  и  $v \in L_{\bar{M}}(\Omega)$ , выполняется неравенство Гельдера:

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq 2\|u\|_M\|v\|_{\bar{M}}. \quad (8)$$

Определим пространства Музилака—Орлича—Соболева:

$$\begin{aligned} W^1 L_M(\Omega) &= \{v \in L_M(\Omega) \mid |\nabla v| \in L_M(\Omega)\}, \\ W^1 E_M(\Omega) &= \{v \in E_M(\Omega) \mid |\nabla v| \in E_M(\Omega)\} \end{aligned}$$

с нормой

$$\|v\|_M^1 = \|v\|_M + \|\nabla v\|_M.$$

Пространство  $W^1 L_M(\Omega)$  отождествляется с подпространством произведения  $(L_M(\Omega))^{n+1}$  и является замкнутым по топологии  $\sigma((L_M)^{n+1}, (E_{\bar{M}})^{n+1})$ .

Пространство  $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$  определим как замыкание  $C_0^\infty(\Omega)$  по топологии  $\sigma((L_M)^{n+1}, (E_{\bar{M}})^{n+1})$  в  $W^1 L_M(\Omega)$ . Наконец, пространство  $\dot{W}^1 E_M(\Omega)$  определим как замыкание  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|\cdot\|_M^1$  в  $W^1 L_M(\Omega)$ .

Пространства  $\dot{W}^1 L_M(\Omega)$ ,  $\dot{W}^1 E_M(\Omega)$  банаховы (см. [12, Theorem 10.2]).

Определим также следующие банаховы пространства:

$$W^{-1} L_{\bar{M}}(\Omega) = \{F = f_0 - \operatorname{div} f \mid f_0 \in L_{\bar{M}}(\Omega), f = (f_1, \dots, f_n) \in (L_{\bar{M}}(\Omega))^n\},$$

$$W^{-1} E_{\bar{M}}(\Omega) = \{F = f_0 - \operatorname{div} f \mid f_0 \in E_{\bar{M}}(\Omega), f = (f_1, \dots, f_n) \in (E_{\bar{M}}(\Omega))^n\}.$$

Справедлива следующая теорема вложения (см. [6, Theorem 4]).

**ЛЕММА 1.** Пусть функция Музилака—Орлича  $M(x, z)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_1^\infty \frac{M^{-1}(x, z)}{z^{\frac{n+1}{n}}} dz = \infty, \quad \int_0^1 \frac{M^{-1}(x, z)}{z^{\frac{n+1}{n}}} dz < \infty \quad (9)$$

и

$$M_*^{-1}(x, z) = \int_0^z \frac{M^{-1}(x, \tau)}{\tau^{\frac{n+1}{n}}} d\tau, \quad x \in \Omega, \quad z \geq 0.$$

Тогда функция  $M_*(x, z)$  является обобщенной  $N$ -функцией и  $\dot{W}^1 L_M(\Omega) \hookrightarrow L_{M_*}(\Omega)$ . Более того, для любой ограниченной подобласти  $Q \subset \Omega$  вложение  $\dot{W}^1 L_M(Q) \hookrightarrow L_P(Q)$  существует и компактно для любой функции Музилака—Орлича  $P \prec\prec M_*$  такой, что  $P(\cdot, z)$  интегрируема на  $Q$ .

**2. Формулировка результата.** Предположим, что функции  $a(x, s_0, s) = (a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$ ,  $a_0(x, s_0, s)$  измеримы по  $x \in \Omega$  для  $s = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , непрерывны по  $s \in \mathbb{R}^{n+1}$  для почти всех  $x \in \Omega$ .

Условия М. Пусть для любого  $w = (w_0, w) \in \mathbb{R}^{n+1}$  существуют неотрицательные функции  $\Psi, \Psi_0, \phi \in L_1(\Omega)$  и положительные константы  $\hat{A}, \hat{A}_0, \bar{a}, \bar{d}, \hat{d}$  такие, что для п.в.  $x \in \Omega$  и для любых  $s_0 \in \mathbb{R}, s, t \in \mathbb{R}^n, s \neq t$  справедливы следующие неравенства:

$$a(x, s_0, s) \cdot (s - w) + a_0(x, s_0, s)(s_0 - w_0) \geq \bar{a}M(x, \bar{d}s_0) + \bar{a}M(x, \bar{d}|s|) - \phi(x); \quad (10)$$

$$\bar{M}(x, |a(x, s_0, s)|) \leq \Psi(x) + \hat{A}M(x, \hat{d}|s|) + \hat{A}P(x, \hat{d}s_0); \quad (11)$$

$$\bar{M}(x, |a_0(x, s_0, s)|) \leq \Psi_0(x) + \hat{A}_0P(x, \hat{d}|s|) + \hat{A}_0M(x, \hat{d}s_0); \quad (12)$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0. \quad (13)$$

Здесь  $M(x, z)$  — функция Музилака—Орлича, интегрируемая в  $\Omega$ , дополненная к ней функция  $\bar{M}$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию;  $P(x, z)$  — функция Музилака—Орлича, интегрируемая в  $\Omega$  такая, что  $P \prec\prec M, s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i, |s| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$ .

Условиям М удовлетворяют, например, функции

$$a_0(x, s_0, s) = M'(x, s_0) + P'(x, |s|) + f_0(x), \quad f_0 \in L_{\bar{M}}(\Omega),$$

$$a_i(x, s) = M'(x, |s|) \frac{s_i}{|s|} + f_i(x), \quad f_i \in L_{\bar{M}}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n,$$

с непрерывно дифференцируемыми по  $z$  функциями Музилака—Орлича  $P(x, z), M(x, z)$  (см. Приложение А).

Определим дифференциальный оператор  $\mathbf{A} : \dot{W}^1 L_M(\Omega) \rightarrow W^{-1} L_{\bar{M}}(\Omega)$  с областью определения

$$D(\mathbf{A}) = \{u \in \dot{W}^1 L_M(\Omega) \mid a_i(x, u, \nabla u) \in L_{\bar{M}}(\Omega), i = \overline{0, n}\}$$

равенством

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \int_{\Omega} (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v) dx, \quad v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega). \quad (14)$$

Используя неравенство Гельдера (8), для функций  $u, v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$  выводим неравенства

$$|\langle \mathbf{A}(u), v \rangle| \leq 2\|a_0\|_{\bar{M}}\|v\|_M + 2\|a\|_{\bar{M}}\|\nabla v\|_M \leq 2(\|a_0\|_{\bar{M}} + \|a\|_{\bar{M}})\|v\|_M^1,$$

следовательно, интегралы в равенстве (14) конечны.

Будем считать, что  $F = f_0 - \operatorname{div} f \in W^{-1} L_{\bar{M}}(\Omega)$ , тогда можно определить функционал  $\mathbf{F}$ :

$$\langle \mathbf{F}, v \rangle = \int_{\Omega} (f \cdot \nabla v + f_0 v) dx, \quad v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1), (2) с  $F = f_0 - \operatorname{div} f \in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$  назовем функцию  $u \in \dot{W}^1L_M(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle \mathbf{A}(u), v \rangle = \langle \mathbf{F}, v \rangle$$

для любой функции  $v \in \dot{W}^1L_M(\Omega)$ .

В работе доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия  $M$  и условия (9). Тогда для любого  $F \in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$  существует хотя бы одно решение задачи (1), (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (9) накладывает ограничение на рост функции  $M(x, z)$  при  $z \rightarrow \infty$ . В качестве примера можно взять функцию  $M(x, z) = a(x)|z| \ln(1 + |z|) + b(x)|z|^p$ ,  $p \in [2, n]$ , с интегрируемыми ограниченными функциями  $a, b : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что при условии

$$\widehat{d} \leq \bar{d} \tag{*}$$

или

$$\text{функция } M \text{ удовлетворяет } \Delta_2\text{-условию} \tag{**}$$

выполнение неравенства (10) для фиксированного  $\mathbf{w}$  и неравенств (11), (12) влечет справедливость (10) для любого  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$  (см. [16, Remark 8]).

### 3. Основные леммы и утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $v$  — такие функции из  $L_M(\Omega)$ , что

$$\begin{aligned} \|v^j\|_M &\leq C, \quad j \in \mathbb{N}, \\ v^j &\rightarrow v \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда  $v^j \rightarrow v$  в топологии  $\sigma(L_M, E_{\overline{M}})$  пространства  $L_M(\Omega)$ .

ЛЕММА 3. Пусть  $0 < \varepsilon < 1$  и  $M_0$  — функция Музилака—Орлича такая, что

$$\int_0^1 \frac{M_0^{-1}(x, z)}{z^{1+\varepsilon}} dz < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{M_0^{-1}(x, z)}{z^{1+\varepsilon}} dz = \infty.$$

Тогда обобщенная  $N$ -функция  $M_\varepsilon$ , определяющаяся как

$$M_\varepsilon^{-1}(x, z) = \int_0^z \frac{M_0^{-1}(x, \tau)}{\tau^{1+\varepsilon}} d\tau < \infty, \quad x \in \Omega,$$

такова, что  $M_0 \prec\prec M_\varepsilon$ .

Доказательство леммы 3 для  $N$ -функции приведено в [14, Лемма 4.14]. Для функции Музилака—Орлича оно проводится аналогично.

Ниже будет использоваться теорема Витали в следующей форме (см. [15, гл. III, §6, теорема 15]).

ЛЕММА 4. Пусть  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $v$  — измеримые функции в ограниченной области  $Q$  такие, что

$$v^j \rightarrow v \quad \text{п.в. в } Q, \quad j \rightarrow \infty,$$

и интегралы

$$\int_Q |v^j(x)| dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

равномерно абсолютно непрерывны. Тогда

$$v^j \rightarrow v \text{ сильно в } L_1(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Если  $P \ll M$  и  $P$  интегрируема в  $\Omega$ , то по определению (4) найдется  $h_P \in L_1(\Omega)$  такая, что для любых  $l_M > 0$ ,  $\epsilon > 0$  имеем

$$P(x, z) \leq h_P(x) + \epsilon M(x, l_M z), \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Применяя (15), перепишем (11), (12) в виде

$$\overline{M}(x, |a(x, s_0, s)|) \leq \Phi(x) + \widehat{A}M(x, \widehat{d}|s|) + \epsilon \widehat{A}M(x, \widehat{d}l_M s_0), \quad (\widehat{11})$$

$$\overline{M}(x, |a_0(x, s_0, s)|) \leq \Phi_0(x) + \epsilon \widehat{A}_0 M(x, \widehat{d}l_M |s|) + \widehat{A}_0 M(x, \widehat{d}s_0), \quad (\widehat{12})$$

где  $\Phi, \Phi_0 \in L_1(\Omega)$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть выполнены условия  $M, \{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}, u \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$  и

$$u^j \rightarrow u \text{ п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Предположим, что

$$q^j(x) = (a(x, u^j, \nabla u^j) - a(x, u^j, \nabla u)) \cdot \nabla(u^j - u) \rightarrow 0 \text{ п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Тогда по некоторой подпоследовательности

$$\nabla u^j \rightarrow \nabla u \text{ п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Доказательство. Пользуясь неравенствами (3), (5) и (10), для  $\epsilon \in (0, 1)$  получаем

$$\begin{aligned} q^j(x) &= (a(x, s_0^j, s^j) - a(x, s_0^j, s)) \cdot (s^j - s) \geq \\ &\geq a(x, s_0^j, s^j) \cdot (s^j - s) + a_0(x, s_0^j, s^j)(s_0^j - s_0) - \epsilon M(x, \bar{d}|s^j|) - M(x, |s|) - \\ &\quad - \overline{M}(x, (\epsilon \bar{d})^{-1} |a(x, s_0^j, s)|) - \overline{M}(x, |a(x, s_0^j, s)|) - \\ &\quad - 2\epsilon \overline{M}(x, |a_0(x, s_0^j, s^j)|) - M(x, \epsilon^{-1} s_0^j) - M(x, \epsilon^{-1} s_0) \geq \\ &\geq \bar{a} M(x, \bar{d} s_0^j) + (\bar{a} - \epsilon) M(x, \bar{d} |s^j|) - M(x, \epsilon^{-1} s_0^j) - \\ &\quad - C_1(\epsilon) \overline{M}(x, |a(x, s_0^j, s)|) - 2\epsilon \overline{M}(x, |a_0(x, s_0^j, s^j)|) - C_2(\epsilon, x). \end{aligned}$$

Применяя ( $\widehat{11}$ ), ( $\widehat{12}$ ) с  $\epsilon = 1, l_M < \bar{d}/\widehat{d}$ , выводим

$$q^j(x) \geq (\bar{a} - \epsilon C_3) M(x, \bar{d} |s^j|) - C_4(\epsilon) M(x, C_5(\epsilon) s_0^j) - C_6(\epsilon, x).$$

Выбирая  $\varepsilon < \bar{a}/C_3$ , устанавливаем оценку

$$q^j(x) \geq C_7 M(x, \bar{d}|s^j|) - C_4 M(x, C_5|s_0^j|) - C_6(x).$$

Обозначим через  $\Omega' \subset \Omega$  подмножество точек полной меры, для которых имеют место сходимости (16), (17) и выполнено последнее неравенство. Установим сходимость

$$\nabla u^j \rightarrow \nabla u \quad \text{всюду в } \Omega', \quad j \rightarrow \infty.$$

От противного, пусть в некоторой точке  $x^* \in \Omega'$  нет сходимости. Положим  $s_0^j = u^j(x^*)$ ,  $s_0 = u(x^*)$ ,  $s^j = \nabla u^j(x^*)$ ,  $s = \nabla u(x^*)$ . Тогда имеем

$$q^j(x^*) \geq C_7 M(x^*, \bar{d}|s^j|) - C_4 M(x^*, C_5|s_0^j|) - C_6.$$

Предположим, что последовательность  $\{M(x^*, \bar{d}|s^j|)\}_{j \in \mathbb{N}}$  не ограничена. Ввиду предположения из последнего неравенства получаем, что  $\{q^j(x^*)\}_{j \in \mathbb{N}}$  не ограничена, что противоречит (17). Следовательно, последовательность  $\{s^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ограничена.

Пусть  $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  — один из частичных пределов  $s^j = (s_1^j, \dots, s_n^j)$  при  $j \rightarrow \infty$ , тогда, с учетом (16), имеем

$$s_0^j \rightarrow s_0, \quad s^j \rightarrow s^*, \quad j \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Поэтому из (17), (19) и непрерывности  $a(x^*, s_0, s)$  по  $s = (s_0, s)$  вытекает, что

$$(a(x^*, s_0, s^*) - a(x^*, s_0, s)) \cdot (s^* - s) = 0,$$

следовательно, согласно (13),  $s = s^*$ . Это противоречит тому, что в точке  $x^*$  нет сходимости. Таким образом, сходимость (18) установлена.  $\square$

**Замечание 3.** Заметим, что только в утверждении неравенство (10) применяется для любого  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ . В доказательстве теоремы неравенство (10) используется для фиксированного  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Для простоты полагаем  $w = 0$ :

$$a(x, s_0, s) \cdot s + a_0(x, s_0, s)s_0 \geq \bar{a}M(x, \bar{d}s_0) + \bar{a}M(x, \bar{d}|s|) - \phi(x). \quad (10_0)$$

**4. Абстрактный результат.** Доказательство теоремы основано на утверждениях для дополнительных систем.

Система  $(Y, Y_0, Z, Z_0)$  называется дополнительной, если выполняется следующее:

- $Y, Z$  банаховы и находятся в двойственности относительно непрерывного спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ;
- $Y_0 \subseteq Y$  — подпространство в  $Y$  и  $Z$  можно отождествить с помощью спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  с сопряженным пространством  $Y_0^*$ ;
- $Z_0 \subseteq Z$  — подпространство в  $Z$  и  $Y$  можно отождествить с помощью спаривания  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  с сопряженным пространством  $Z_0^*$ .

Пусть  $(Y, Y_0, Z, Z_0)$  — дополнительная система и  $A : Y \rightarrow Z$  — отображение с областью определения  $D(A) \subset Y$ , которые удовлетворяют следующим условиям относительно некоторых элементов  $y_0 \in Y_0$  и  $z_0 \in Z_0$ :

- (i) (конечная непрерывность)  $Y_0 \subset D(A)$  и  $A$  непрерывно для всех конечных подпространств в  $Y_0$  по топологии  $\sigma(Z, Y_0)$  в  $Z$ ;

- (ii) (последовательная псевдомонотонность) для любой последовательности  $\{y_i\} \subset Y$ ,  $y_i \rightarrow y \in Y$  в топологии  $\sigma(Y, Z_0)$ ,  $A(y_i) \rightarrow z \in Z$  в топологии  $\sigma(Z, Y_0)$  и  $\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle A(y_i), y_i \rangle \leq \langle z, y \rangle$  следует, что  $A(y) = z$  и  $\langle A(y_i), y_i \rangle \rightarrow \langle z, y \rangle$ ;
- (iii)  $A(y)$  остается ограниченным в  $Z$  всегда, когда  $y \in D(A)$  остается ограниченным в  $Y$  и  $\langle y - y_0, A(y) \rangle$  остается ограниченным сверху;
- (iv)  $\langle y - y_0, A(y) - z_0 \rangle > 0$ , когда  $y \in D(A)$  имеет достаточно большую норму в  $Y$ .

Важно отметить, что условие (iii) слабее, чем условие того, что  $A$  переводит каждое ограниченное множество в  $Y$  в ограниченное множество в  $Z$ , а также условие (iv) слабее, чем предположение о коэрцитивности, потому что отображение  $A$ , как правило, не преобразует ограниченное множество в ограниченное множество.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ.** Пусть  $(Y, Y_0, Z, Z_0)$  — дополнительная система,  $Y_0, Z_0$  сепарабельные и отображение  $A : D(A) \subset Y \rightarrow Z$  удовлетворяет условиям (i)–(iv). Тогда  $Z_0$  содержится в  $R(A)$  [16, Proposition 1].

### 5. Доказательство существования решения.

**ЛЕММА 5.** Пусть выполнены условия (11), (12), тогда отображение

$$\mathbf{A} : \mathbf{s} = (s_0, \mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = (a_0(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s}), \mathbf{a}(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s}))$$

переводит  $(E_M(\Omega))^{n+1}$  в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$  и является конечнонепрерывным на  $(E_M(\Omega))^{n+1}$  по топологии  $\sigma((L_{\overline{M}})^{n+1}, (E_M)^{n+1})$  в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{s} = (s_0, \mathbf{s}) \in (E_M(\Omega))^{n+1}$ , запишем (11) с  $\epsilon = l_M = 1$ , получим

$$\overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s})|) \leq \Phi(\mathbf{x}) + \widehat{A}M(\mathbf{x}, \widehat{d}|\mathbf{s}|) + \widehat{A}M(\mathbf{x}, \widehat{d}s_0). \quad (20)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s}) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n.$$

Аналогично устанавливается, что  $a_0(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s}) \in L_{\overline{M}}(\Omega)$ .

Пусть  $\Sigma = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \dots, \mathbf{s}^r\}$  симплекс в  $(E_M(\Omega))^{n+1}$ , тогда

$$\mathbf{s} = \sum_{j=1}^r \lambda^j \mathbf{s}^j \in \Sigma,$$

где  $\lambda^j \geq 0$ ,  $\sum_{j=1}^r \lambda^j = 1$ . Покажем, что отображение  $\mathbf{A}$  непрерывно для каждого симплекса  $\Sigma$ . Применяя (20), для  $(s_0, \mathbf{s}) \in \Sigma$  выводим

$$\begin{aligned} \overline{M}(\mathbf{x}, |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s_0, \mathbf{s})|) &\leq \Phi(\mathbf{x}) + \widehat{A}M\left(\mathbf{x}, \widehat{d}\left|\sum_{j=1}^r \lambda^j \mathbf{s}^j\right|\right) + \widehat{A}M\left(\mathbf{x}, \widehat{d}\sum_{j=1}^r \lambda^j s_0^j\right) \leq \\ &\leq \Phi(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^r \lambda^j M(\mathbf{x}, \widehat{d}|\mathbf{s}^j|) + \sum_{j=1}^r \lambda^j M(\mathbf{x}, \widehat{d}|s_0^j|). \end{aligned}$$

Поскольку  $M(x, \widehat{d}|s^j|)$ ,  $M(x, \widehat{d}|s_0^j|)$ ,  $j = 1, \dots, r$ , принадлежат пространству  $L_1(\Omega)$ , функция  $\overline{M}(x, |a(x, \mathbf{s})|)$  ограничена в  $L_1(\Omega)$  для  $\mathbf{s} \in \Sigma$ . Отсюда благодаря неравенству (6)  $a(x, \mathbf{s})$  ограничена в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$  для  $\mathbf{s} \in \Sigma$ . Аналогично устанавливается, что  $a_0(x, \mathbf{s})$  ограничена в  $L_{\overline{M}}(\Omega)$  для  $\mathbf{s} \in \Sigma$ . Применяя лемму 2, устанавливаем непрерывность отображения  $\mathbf{A}$  на симплексе  $\Sigma$  по топологии  $\sigma((L_{\overline{M}})^{n+1}, (E_M)^{n+1})$ .  $\square$

*Доказательство теоремы.* Благодаря  $\Delta_2$ -свойству на функцию  $\overline{M}$  система

$$(\mathring{W}^1 L_M(\Omega), \mathring{W}^1 E_M(\Omega), W^{-1} L_{\overline{M}}(\Omega), W^{-1} E_{\overline{M}}(\Omega)) \quad (21)$$

является дополнительной [14, Lemma 1.2]. Спаривание между  $v \in \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$  и  $F \in W^{-1} L_{\overline{M}}(\Omega)$  задается формулой

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} (f \cdot \nabla v + f_0 v) dx.$$

Для системы (21) проверим условия (i)–(iv) предложения ( $y_0 = 0$ ). Из леммы 5 следует условие (i).

Далее проверим условия (ii). Пусть  $\{u^j\} \subset \mathring{W}^1 L_M(\Omega)$  и выполнено следующее:

- 1)  $u^j \rightharpoonup u$  в топологии  $\sigma((L_M)^{n+1}, (E_{\overline{M}})^{n+1})$ ;
- 2)  $\mathbf{A}(u^j) \rightharpoonup \mathbf{G} \in W^{-1} L_{\overline{M}}(\Omega)$  в топологии  $\sigma((L_{\overline{M}})^{n+1}, (E_M)^{n+1})$ ;
- 3)  $\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \leq \langle \mathbf{G}, u \rangle$ .

Докажем, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle = \langle \mathbf{G}, u \rangle$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{A}(u)$ ,  $u \in D(\mathbf{A})$ .

Разобьем доказательство условия (ii) на несколько этапов.

**1.** Докажем ограниченность  $\{a(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$ . Из 1) по теореме Банаха–Штейнгауза следует, что  $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  ограничена:

$$\|u^j\|_M^1 = \|u^j\|_M + \|\nabla u^j\|_M \leq C_1, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Отсюда следует  $\|\frac{1}{C_1} u^j\|_M + \|\frac{1}{C_1} |\nabla u^j|\|_M \leq 1$ , а значит, согласно (7), имеем

$$\varrho_M\left(\frac{1}{C_1} u^j\right) + \varrho_M\left(\frac{1}{C_1} |\nabla u^j|\right) \leq 1, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Кроме этого, применяя лемму 1, устанавливаем  $\|u^j\|_{M_*} \leq C_2 \|u^j\|_M^1 \leq C_2 C_1 = C_3$ . Отсюда благодаря (7) получим

$$\varrho_{M_*}\left(\frac{1}{C_3} u^j\right) \leq 1, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Поскольку  $M \prec\prec M_*$ , для любого  $l_M^* > 0$  имеем неравенство (см. (15))

$$M(x, z) \leq h_M^*(x) + M_*(x, l_M^* z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad h_M^* \in L_1(\Omega). \quad (25)$$

Применяя  $(\widehat{1\hat{2}})$  с  $\epsilon = 1$  и (25), выводим неравенство

$$\varrho_{\overline{M}}(|a_0(x, u^j, \nabla u^j)|) \leq \|\Phi_0 + \widehat{A}_0 h_M^*\|_1 + \widehat{A}_0 \varrho_M(\widehat{d}l_M |\nabla u^j|) + \widehat{A}_0 \varrho_{M_*}(\widehat{d}l_M^* |u^j|).$$



Отсюда ввиду (6) получаем

$$\|a_0(x, u^j, \nabla u^j)\|_{\overline{M}} \leq C_4 + \widehat{A}_0 \varrho_M (\widehat{d}l_M |\nabla u^j|) + \widehat{A}_0 \varrho_{M_*} (\widehat{d}l_M^* |u^j|).$$

Выбирая  $l_M$  и  $l_M^*$  так, чтобы выполнялись неравенства  $\widehat{d}l_M < C_1^{-1}$  и  $\widehat{d}l_M^* < C_3^{-1}$ , и применяя (23), (24), выводим

$$\|a_0(x, u^j, \nabla u^j)\|_{\overline{M}} \leq C_4 + \widehat{A}_0 \varrho_M \left( \frac{|\nabla u^j|}{C_1} \right) + \widehat{A}_0 \varrho_{M_*} \left( \frac{u^j}{C_3} \right) \leq C_5. \quad (26)$$

Ограниченность  $\{a_0(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  в  $L_{\overline{M}}(\Omega)$  установлена. Докажем ограниченность  $\{a(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ .

По свойству (13) для  $w \in \mathring{W}^1 E_M(\Omega)$  имеем

$$(a(x, u^j, \nabla u^j) - a(x, u^j, \nabla w)) \cdot \nabla(u^j - w) \geq 0.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla w dx &\leq \int_{\Omega} a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j dx + \int_{\Omega} a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j dx - \\ &- \int_{\Omega} a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j dx - \int_{\Omega} a(x, u^j, \nabla w) \cdot \nabla(u^j - w) dx = \\ &= \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle - \int_{\Omega} a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j dx - \int_{\Omega} a(x, u^j, \nabla w) \cdot \nabla(u^j - w) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Оценим второе и третье слагаемые правой части (27). Применяя неравенство Гельдера и учитывая (22), (26), выводим

$$\left| \int_{\Omega} a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j dx \right| \leq 2 \|a_0(x, u^j, \nabla u^j)\|_{\overline{M}} \|u^j\|_M \leq C_6, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a(x, u^j, \nabla w) \cdot \nabla(u^j - w) dx \right| &\leq 2 \|a(x, u^j, \nabla w)\|_{\overline{M}} \|\nabla u^j - \nabla w\|_M \leq \\ &\leq 2 \|a(x, u^j, \nabla w)\|_{\overline{M}} C_7. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя (11) ( $\epsilon = 1$ ,  $l_M < (\widehat{d}C_1)^{-1}$ ), (6) и (23), имеем

$$\|a(x, u^j, \nabla w)\|_{\overline{M}} \leq \|\Phi\|_1 + 1 + \widehat{A} \varrho_M (\widehat{d}|\nabla w|) + \widehat{A} \varrho_M (C_1^{-1} u^j) \leq C_8. \quad (30)$$

Соединяя (27), (28), (29), (30) и учитывая 3), устанавливаем, что последовательность  $\{a(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  ограничена по топологии  $\sigma((L_{\overline{M}})^n, (E_M)^n)$  в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ . Отсюда из принципа равномерной ограниченности следует, что  $\{a(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  ограничена по норме пространства  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ .

**2.** Поскольку  $\{a_i(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $i = \overline{0, n}$ , ограничены в  $L_{\overline{M}}(\Omega)$ , то

$$a_i(x, u^j, \nabla u^j) \rightarrow g_i \text{ в топологии } \sigma(L_{\overline{M}}, E_M), \quad g_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = \overline{0, n}. \quad (31)$$

Следовательно, линейный функционал  $\mathbf{G} \in W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$  можно отождествить с  $\mathbf{g} = (g_0, \mathbf{g}) \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1} = (E_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$ , то есть

$$\langle \mathbf{G}, v \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{g} \cdot \nabla v + g_0 v) dx, \quad v \in \dot{W}^1 L_M(\Omega). \quad (32)$$

**3.** Покажем, что  $u^j \rightarrow u$ ,  $\nabla u^j \rightarrow \nabla u$  п.в. в  $\Omega$ . Зафиксируем произвольное  $k > 0$ , обозначим  $\Omega(k) = \{x \in \Omega \mid |x| < k\}$ . Согласно лемме 1, пространство  $\dot{W}^1 L_M(\Omega(k+1))$  компактно вложено в  $L_P(\Omega(k+1))$  для любой функции Музилака—Орлича  $P(x, z)$  такой, что  $P \prec\prec M_*$ . Согласно лемме 3,  $M \prec\prec M_*$  и пространство  $\dot{W}^1 L_M(\Omega(k+1))$  компактно вложено в пространство  $L_M(\Omega(k+1))$ .

Пусть  $\eta_k(r) = \min(1, \max(0, k+1-r))$ . Пользуясь (22), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \|u^j \eta_k\|_M^1 &\leq \|u^j \nabla \eta_k\|_M + \|\nabla u^j \eta_k\|_M + \|u^j \eta_k\|_M \leq \\ &\leq 2\|u^j\|_M + \|\nabla u^j\|_M \leq C_9, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность функций  $\{u^j \eta_k\}_{j=1}^{\infty}$  ограничена в пространстве  $\dot{W}^1 L_M(\Omega(k+1))$ . Ввиду компактности вложения

$$\dot{W}^1 L_M(\Omega(k+1)) \subset L_M(\Omega(k+1))$$

имеют место выборочные сильные сходимости

$$u^j \eta_k \rightarrow u \eta_k \quad \text{в } L_M(\Omega(k+1)), \quad j \rightarrow \infty,$$

из которых следуют сильные сходимости

$$u^j \rightarrow u \quad \text{в } L_M(\Omega(k)), \quad j \rightarrow \infty, \quad (33)$$

а также выборочная сходимость  $u^j \rightarrow u$  почти всюду в  $\Omega(k)$ . Диагональным процессом устанавливается сходимость (16):

$$u^j \rightarrow u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty.$$

Далее докажем справедливость (18):

$$\nabla u^j \rightarrow \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty.$$

Для этого установим (17). Тогда, применяя утверждение, выводим (18). Ввиду условия (13)  $q^j(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , поэтому достаточно показать

$$\begin{aligned} \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} q^j(x) dx &\leq \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ \Omega_k &= \{x \in \Omega(k) \mid |u| \leq k, |\nabla u| \leq k\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Представим  $q^j(x) = p^j(x) + r^j(x) + s^j(x)$ , где

$$p^j(x) = a_0(x, u^j, \nabla u^j)(u^j - u) + a(x, u^j, \nabla u^j) \nabla(u^j - u);$$

$$r^j(x) = a(x, u^j, \nabla u) \cdot \nabla(u - u^j); \quad s^j(x) = a_0(x, u^j, \nabla u^j)(u - u^j).$$

Утверждение (34) будет доказано, если установим следующее:

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} p^j(x) dx \leq \varepsilon_k; \quad (35)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} r^j(x) dx = 0; \quad (36)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_k} s^j(x) dx = 0. \quad (37)$$

4. Докажем (35), для этого запишем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} p^j(x) dx &= \int_{\Omega} (a_0(x, u^j, \nabla u^j)u^j + a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j) dx - \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_k} (a_0(x, u^j, \nabla u^j)u^j + a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j) dx - \\ &- \int_{\Omega_k} (a_0(x, u^j, \nabla u^j)u + a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u) dx = \\ &= H_1(j) + H_2(j, k) + H_3(j, k). \end{aligned} \quad (38)$$

По предположению 3) и (32) имеем

$$\limsup_j H_1(j) \leq \langle \mathbf{G}, u \rangle = \int_{\Omega} (g_0 u + g \cdot \nabla u) dx. \quad (39)$$

По условию (10<sub>0</sub>) имеем

$$\begin{aligned} H_2(j, k) &\leq -\bar{a} \int_{\Omega \setminus \Omega_k} (M(x, \bar{d}u^j) + M(x, \bar{d}|\nabla u^j|)) dx + \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Omega_k} \phi(x) dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_k} \phi(x) dx. \end{aligned} \quad (40)$$

Кроме этого, можно записать

$$H_3(j, k) = - \int_{\Omega} \chi_k (a_0(x, u^j, \nabla u^j)u + a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u) dx,$$

где  $\chi_k$  — характеристическая функция множества  $\Omega_k$ .

Поскольку функция  $M(x, z)$  интегрируема по  $x \in \Omega$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ , то  $\forall \lambda > 0$

$$\int_{\Omega} M(x, \lambda \chi_k u) dx \leq \int_{\Omega} M(x, \lambda k) dx < \infty,$$

следовательно,  $\chi_k u \in E_M(\Omega)$ .

Аналогично устанавливается, что  $\chi_k \nabla u \in (E_M(\Omega))^n$ . Тогда ввиду слабой сходимости (31) имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} H_3(j, k) = - \int_{\Omega_k} (g_0 u + g \cdot \nabla u) dx. \quad (41)$$

Соединяя (38), (39), (40), (41), выводим

$$\limsup_j \int_{\Omega_k} p^j(x) dx \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_k} (g_0 u + g \cdot \nabla u) dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_k} \phi(x) dx,$$

где  $g_0 u + g \cdot \nabla u \in L_1(\Omega)$ . Ввиду абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства имеем (35).

5. Докажем (36), для этого достаточно показать, что

$$\chi_k a(x, u^j, \nabla u) \rightarrow \chi_k a(x, u, \nabla u) \quad \text{в } E_{\overline{M}}(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Вспользуемся (20):

$$\begin{aligned} \overline{M}(x, |a(x, u, \nabla u)| \chi_k) &\leq \Phi(x) + \widehat{A}M(x, \widehat{d}|\nabla u| \chi_k) + \widehat{A}M(x, \widehat{d}u \chi_k) \leq \\ &\leq \Phi(x) + 2\widehat{A}M(x, \widehat{d}k). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $a(x, u, \nabla u) \chi_k \in (L_{\overline{M}}(\Omega))^n$ , но  $\overline{M}$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, значит

$$a(x, u, \nabla u) \chi_k \in (E_{\overline{M}}(\Omega))^n. \quad (43)$$

Далее, применяя (11), получим

$$\overline{M}(x, a(x, u^j, \nabla u) \chi_k) \leq \Phi(x) + \widehat{A}M(x, \widehat{d}|\nabla u| \chi_k) + \epsilon \widehat{A}M(x, l_M \widehat{d}|u^j|).$$

Учитывая (23) и выбирая  $l_M \widehat{d} < C_1^{-1}$ , для любого измеримого подмножества  $E \subset \Omega$  получим

$$\begin{aligned} \int_E \overline{M}(x, a(x, u^j, \nabla u) \chi_k) dx &\leq \int_{E \cap \{\Omega: |x| < k\}} (\Phi(x) + \widehat{A}M(x, \widehat{d}k)) dx + \\ &+ \epsilon \widehat{A} \int_E M\left(x, \frac{u^j}{C_1}\right) dx \leq \int_{E \cap \{\Omega: |x| < k\}} h_1(x) dx + \epsilon C_{10}, \end{aligned}$$

где  $h_1 \in L_1(\Omega)$ . Отсюда следует, что  $a(x, u^j, \nabla u) \chi_k \in (E_{\overline{M}}(\Omega))^n$  и равномерная абсолютная непрерывность интегралов  $\int_{\Omega} \overline{M}(x, a(x, u^j, \nabla u) \chi_k) dx$ . Кроме того, ввиду непрерывности  $a(x, s_0, s)$  по  $s_0$  и сходимости (16) имеем  $a(x, u^j, \nabla u) \rightarrow a(x, u, \nabla u)$ ,  $j \rightarrow \infty$ , п.в. в  $\Omega$ .

Применяя теорему Витали (лемма 4) для ограниченной области  $\Omega_k$ , устанавливаем модулярную сходимость, из которой следует сходимость (42).

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_k} r^j(x) dx &= \int_{\Omega_k} a(x, u^j, \nabla u) \cdot \nabla(u - u^j) dx = \\
 &= \int_{\Omega} \chi_k (a(x, u^j, \nabla u) - a(x, u, \nabla u)) \cdot \nabla(u - u^j) dx + \\
 &\quad + \int_{\Omega} \chi_k a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla(u - u^j) dx \leq \\
 &\leq 2 \|a(x, u^j, \nabla u) - a(x, u, \nabla u)\|_{\overline{M}} \|\nabla(u - u^j)\|_M + \\
 &\quad + \left| \int_{\Omega} \chi_k a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla(u - u^j) dx \right|.
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к 0 при  $j \rightarrow \infty$  благодаря (42) и (22). Второе слагаемое стремится к 0 при  $j \rightarrow \infty$  ввиду (43) и слабой сходимости 1). Таким образом, (36) доказано.

**6.** Докажем (37). Ввиду сходимости (33) имеем

$$u^j \chi_k \rightarrow u \chi_k \text{ в } L_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty. \quad (44)$$

Применяя неравенство Гельдера, (26), выводим

$$\int_{\Omega_k} s^j(x) dx \leq 2 \|\chi_k u - u^j \chi_k\|_M \|a_0(x, u^j, \nabla u^j)\|_{\overline{M}} \leq C_{11} \|\chi_k u - u^j \chi_k\|_M.$$

Отсюда, применяя (44), устанавливаем (37).

**7.** Благодаря сходимостям (16), (18) ввиду непрерывности  $a_i(x, s_0, s)$ ,  $i = \overline{0, n}$ , по  $(s_0, s)$ , имеем

$$a_i(x, u^j, \nabla u^j) \rightarrow a_i(x, u, \nabla u) \text{ п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty, \quad i = \overline{0, \dots, n}.$$

Поскольку  $\{a_i(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $i = \overline{0, n}$ , ограничены в  $L_{\overline{M}}(\Omega)$ , по лемме 2 имеем

$$a_i(x, u^j, \nabla u^j) \rightharpoonup a_i(x, u, \nabla u) \text{ в топологии } \sigma(L_{\overline{M}}, E_M), \quad j \rightarrow \infty, \quad i = \overline{0, \dots, n}. \quad (45)$$

Сравнивая (45) с (31), устанавливаем

$$a_i(x, u, \nabla u) = g_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = \overline{0, \dots, n}.$$

Отсюда заключаем, что  $u \in D(\mathbf{A})$  и  $\mathbf{A}(u) = \mathbf{G}$  (см. (32)).

**8.** Докажем, что  $\langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \rightarrow \langle \mathbf{G}, u \rangle = \langle \mathbf{A}(u), u \rangle$ . Ввиду условия 3) имеем

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \leq \langle \mathbf{A}(u), u \rangle,$$

потому достаточно показать, что

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \geq \langle \mathbf{A}(u), u \rangle. \quad (46)$$

Тогда

$$\langle \mathbf{A}(u), u \rangle \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \leq \langle \mathbf{A}(u), u \rangle.$$

Из условия (13) имеем

$$a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j \geq a(x, u^j, \nabla u) \cdot \nabla (u^j - u) + a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u. \quad (47)$$

Далее выводим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle &= \int_{\Omega} (a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j + a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j) dx = \\ &= \int_{\Omega_k} a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j dx + \int_{\Omega_k} a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j dx + \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus \Omega_k} (a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u^j + a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j) dx. \end{aligned}$$

Применяя (47), (10<sub>0</sub>), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle &\geq \int_{\Omega_k} a(x, u^j, \nabla u) \cdot \nabla (u^j - u) dx + \\ &+ \int_{\Omega_k} a(x, u^j, \nabla u^j) \cdot \nabla u dx + \int_{\Omega_k} a_0(x, u^j, \nabla u^j) u^j dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_k} \phi(x) dx = \\ &= I_1(j) + I_2(j) + I_3(j) - \int_{\Omega \setminus \Omega_k} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Ввиду сильной сходимости (42) и слабой сходимости 1) имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_1(j) = 0.$$

Благодаря слабой сходимости (45) и принадлежности  $\chi_k \nabla u \in (E_M(\Omega))^n$  находим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_2(j) = \int_{\Omega_k} a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u dx.$$

Применяя слабую сходимости (45) и сильную сходимости (33), устанавливаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_3(j) = \int_{\Omega_k} a_0(x, u, \nabla u) u dx.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle &\geq \int_{\Omega_k} (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u + a_0(x, u, \nabla u) u) dx - \int_{\Omega \setminus \Omega_k} \phi(x) dx \geq \\ &\geq \langle \mathbf{A}(u), u \rangle - \int_{\Omega \setminus \Omega_k} (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u + a_0(x, u, \nabla u) u + \phi(x)) dx. \end{aligned}$$

Ввиду того, что  $a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u + a_0(x, u, \nabla u)u + \phi(x) \in L_1(\Omega)$  и интеграл абсолютно непрерывен, устремляя  $k \rightarrow \infty$ , устанавливаем (46).

(iii) Покажем, что если  $u^j \in D(\mathbf{A})$ ,  $\|u^j\|_M^1 \leq C_1$ ,  $\langle \mathbf{A}(u^j), u^j \rangle \leq C_{12}$ , то  $\mathbf{A}(u^j)$  ограничено в  $W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ .

Методом, аналогичным шагу 1 в (ii), заключаем, что последовательность  $\{a_0(x, u^j, \nabla u^j), a(x, u^j, \nabla u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  ограничена в  $(L_{\overline{M}}(\Omega))^{n+1}$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{A}(u^j)$  ограничена в  $W^{-1}L_{\overline{M}}(\Omega)$ .

(iv) Осталось показать, что  $\langle \mathbf{A}(v) - \mathbf{F}, v \rangle > 0$  для любого  $v \in D(\mathbf{A})$  с достаточно большой нормой  $\|v\|_M^1$  и любого  $\mathbf{F} \in W^{-1}E_{\overline{M}}(\Omega)$ .

Рассмотрим множество

$$V = \{v \in D(\mathbf{A}) \mid \langle \mathbf{A}(v) - \mathbf{F}, v \rangle \leq 0\}.$$

Покажем, что  $V$  ограничено в  $\overset{\circ}{W}^1L_M(\Omega)$ , тогда, если  $\|v\|_M^1$  достаточно большая, то  $v \notin V$ , то есть  $\langle \mathbf{A}(v) - \mathbf{F}, v \rangle > 0$ .

Для  $v \in V$  имеем

$$\int_{\Omega} ((a(x, v, \nabla v) - f) \cdot \nabla v + (a_0(x, v, \nabla v) - f_0)v) dx \leq 0. \quad (48)$$

Применяя (10<sub>0</sub>), выводим

$$a(x, v, \nabla v) \cdot \nabla v + a_0(x, v, \nabla v)v \geq \bar{a}M(x, \bar{d}v) + \bar{a}M(x, \bar{d}|\nabla v|) - \phi(x).$$

Отсюда, учитывая (48) и применяя неравенство Юнга, находим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\bar{a}M(x, \bar{d}v) + \bar{a}M(x, \bar{d}|\nabla v|)) dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} (a(x, v, \nabla v) \cdot \nabla v + a_0(x, v, \nabla v)v + \phi(x)) dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} (f \cdot \nabla v + f_0v + \phi(x)) dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} \left( \overline{M}\left(x, \frac{|f|}{\varepsilon^2}\right) + \overline{M}\left(x, \frac{f_0}{\varepsilon^2}\right) \right) dx + \\ & \quad + \varepsilon \int_{\Omega} (M(x, \varepsilon|\nabla v|) + M(x, \varepsilon v)) dx + \int_{\Omega} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Выберем  $\varepsilon < \min(\bar{d}, \bar{a})$ , получим

$$\int_{\Omega} M((x, \bar{d}v) + M(x, \bar{d}|\nabla v|)) dx \leq C_{16}.$$

Отсюда следует, что  $\|v\|_M^1 \leq C_{17}$ . Ограниченность множества  $V$  установлена.

Таким образом, для дополнительной системы (21) выполнены все условия предложения, теорема доказана.  $\square$

**Приложение А.** Здесь покажем, что функции

$$\begin{aligned} a_0(x, s_0, s) &= M'(x, s_0) + P'(x, |s|) + f_0(x), \quad f_0 \in L_{\overline{M}}(\Omega), \\ a_i(x, s) &= M'(x, |s|) \frac{s_i}{|s|} + f_i(x), \quad f_i \in L_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

с непрерывно дифференцируемыми по  $z$  функциями Музилака—Орлича  $P(x, z)$ ,  $M(x, z)$ <sup>1</sup> подчиняются условиям М.

Для функции Музилака—Орлича  $M(x, z)$  имеет место интегральное представление

$$M(x, z) = \int_0^{|z|} M'(x, \theta) d\theta, \quad (49)$$

где  $M'(x, \theta) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , причем  $M'(x, \cdot)$  неубывающая, непрерывная,  $M'(x, 0) = 0$  для п.в.  $x \in \Omega$  и

$$\inf_{x \in \Omega} M'(x, \theta) > 0 \quad \text{для всех } \theta > 0,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \inf_{x \in \Omega} M'(x, \theta) = \infty.$$

Из (49) для  $x \in \Omega$ ,  $z \in \mathbb{R}$  следуют простейшие неравенства:

$$M(x, z) \leq M'(x, z)z, \quad (50)$$

$$M'(x, z)z \leq M(x, 2z), \quad (51)$$

$$\overline{M}(x, M'(x, z)) \leq M'(x, z)z. \quad (52)$$

Кроме этого, из условия  $P \prec\prec M$  следует  $\overline{M} \prec\prec \overline{P}$ , поэтому найдется функция  $h_{\overline{M}} \in L_1(\Omega)$  такая, что

$$\overline{M}(x, z) \leq h_{\overline{M}}(x) + \overline{P}(x, z), \quad x \in \Omega, z \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

Соединяя (53), (52), (51), выводим

$$\overline{M}(x, P'(x, z)) \leq P(x, 2z) + h_{\overline{M}}(x). \quad (54)$$

Применяя (15) и выбирая  $l_M < 1/2$ , для любых  $\epsilon > 0$ ,  $x \in \Omega$ ,  $z \in \mathbb{R}$  получаем неравенство

$$\overline{M}(x, P'(x, z)) \leq \epsilon M(x, 2l_M z) + h_{\overline{M}}(x) + h_P(x) \leq \epsilon M(x, z) + h(x) \quad (55)$$

с функцией  $h \in L_1(\Omega)$ .

Благодаря (5), (54), (52), (51) выводим неравенства

$$\begin{aligned} \overline{M}(x, |a_0(x, s_0, s)|) &\leq \\ &\leq C_1(\overline{M}(x, M'(x, s_0)) + \overline{M}(x, P'(x, |s|)) + \overline{M}(x, f_0)) + H_3(x) \leq \\ &\leq C_1 M(x, 2s_0) + C_1 P(x, 2|s|) + \Psi_0(x), \\ \overline{M}(x, |a(x, s_0, s)|) &\leq C_2 \overline{M}(x, M'(x, |s|)) + C_2 \overline{M}(x, |f|) + H_2(x) \leq \\ &\leq C_2 M(x, 2|s|) + \Psi(x), \end{aligned}$$

$\Psi_0, \Psi \in L_1(\Omega)$ . Таким образом, оценки (11), (12) установлены.

Далее проверим справедливость неравенства (10). Применяя неравенство Юнга и (5), выводим

<sup>1</sup>Функции  $M, \overline{M}, P$  интегрируемы в  $\Omega$ ;  $\overline{M}$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию;  $P \prec\prec M$ .



$$\begin{aligned}
 & a_0(x, s_0, s)(s_0 - w_0) + a(x, s_0, s) \cdot (s - w) \geq \\
 & \geq (M'(x, s_0) + P'(x, |s|) + f_0(x))(s_0 - w_0) + \left( M'(x, |s|) \frac{s}{|s|} + f(x) \right) \cdot (s - w) \geq \\
 & \geq M'(x, s_0)s_0 + (P'(x, |s|) + f_0)s_0 - (M'(x, s_0) + P'(x, |s|) + f_0)w_0 + \\
 & \quad + M'(x, |s|)|s| - |f||s| - M'(x, |s|)|w| - |f||w| \geq \\
 & \geq M'(x, s_0)s_0 - 2\varepsilon M(x, s_0) - C_1(\varepsilon)\overline{M}(x, P'(x, |s|)) - \varepsilon\overline{M}(x, M'(x, s_0)) + \\
 & \quad + M'(x, |s|)|s| - \varepsilon M(x, |s|) - \varepsilon\overline{M}(x, M'(x, |s|)) - \\
 & - C_2(\varepsilon)(\overline{M}(x, f_0) + \overline{M}(x, |f|)) - C_3(M(x, C_4(\varepsilon)w_0) + M(x, C_4(\varepsilon)|w|)) - \phi(x).
 \end{aligned}$$

Используя неравенства (52), (55), (50), получаем

$$\begin{aligned}
 & a_0(x, s_0, s)(s_0 - w_0) + a(x, s_0, s) \cdot (s - w) \geq \\
 & \geq (1 - 3\varepsilon)M(x, s_0) + (1 - 2\varepsilon - \varepsilon C_1(\varepsilon))M(x, |s|) - H_\varepsilon(x).
 \end{aligned}$$

Выбирая  $\varepsilon < 1/3$ ,  $\varepsilon < 1/(3C_1)$ , устанавливаем неравенство (10) для любого  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Кроме того, если  $M'(x, z)$  строго возрастающая, то условие (13) также выполнено. Действительно, применяя неравенство Коши—Буняковского, выводим

$$\begin{aligned}
 (a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) &= \left( M'(x, |s|) \frac{s}{|s|} - M'(x, |t|) \frac{t}{|t|} \right) \cdot (s - t) \geq \\
 &\geq (M'(x, |s|) - M'(x, |t|)) (|s| - |t|).
 \end{aligned}$$

Отметим, что последнее неравенство строгое для неколлинеарных векторов  $s, t$  и ввиду монотонности  $M'(x, z)$  условие (13) выполнено. Для коллинеарных векторов  $s \neq t$  условие (13) также справедливо.

**Конкурирующие интересы.** Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00428\_a).

### Библиографический список

1. Browder F. E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1977. vol. 74, no. 7. pp. 2659–2661. <https://doi.org/10.1073/pnas.74.7.2659>.
2. Кожевникова Л. М., Камалетдинов А. Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях // *Вестн. Волгогр. гос. ун-та, Сер. 1. Мат. Физ.*, 2016. № 5(36). С. 29–41. <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.4>.

3. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // *Матем. сб.*, 2015. Т. 206, № 8. С. 99–126. <https://doi.org/10.4213/sm8482>.
4. Mihailescu M., Rădulescu V. Neumann problems associated to nonhomogeneous differential operators in Orlicz–Sobolev spaces // *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 2008. vol. 58, no. 6. pp. 2087–2111, arXiv: 0712.2185 [math.AP]. <https://doi.org/10.5802/aif.2407>.
5. Fan X., Guan C.-X. Uniform convexity of Musielak–Orlicz–Sobolev spaces and applications // *Nonlinear Anal.*, 2010. vol. 73, no. 1. pp. 163–175. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.010>.
6. Benkirane A., Sidi El Vally M. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013. vol. 20, no. 1. pp. 57–75. <https://doi.org/10.36045/bbms/1366306714>.
7. Sidi El Vally M. Strongly nonlinear elliptic problems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 2013. vol. 8, no. 1. pp. 115–124.
8. Fan X. Differential equations of divergence form in Musielak–Sobolev spaces and a sub-supersolution method // *J. Math. Anal. Appl.*, 2012. vol. 386, no. 2. pp. 593–604. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.022>.
9. Dong G., Fang X. Differential equations of divergence form in separable Musielak–Orlicz–Sobolev spaces // *Bound. Value Probl.*, 2016. vol. 2016, 106. <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0612-9>.
10. Chlebicka I. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces // *Nonlinear Anal.*, 2018. vol. 175. pp. 1–27. <https://doi.org/10.1016/j.na.2018.05.003>.
11. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents* / Lecture Notes in Mathematics. vol. 2017. Berlin: Springer, 2011. ix+509 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8>.
12. Musielak J. *Orlicz Spaces and Modular Space* / Lecture Notes in Mathematics. vol. 1034. Berlin: Springer, 1983. vi+226 pp. <https://doi.org/10.1007/BFb0072210>.
13. Рутницкий Я. Б., Красносельский М. А. *Выпуклые функции и пространства Орлица*. М.: Физматлит, 1958. 271 с.
14. Gossez J.P. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974. vol. 190, no. 1. pp. 163–205. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1974-0342854-2>.
15. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы*. Т. I: Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
16. Gossez J.-P., Mustonen V. Variational inequalities in Orlicz–Sobolev spaces // *Nonlinear Anal.*, 1987. vol. 11, no. 3. pp. 379–392. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(87\)90053-8](https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90053-8).

MSC: 35J20, 35J25, 35J62

## Existence of solutions to quasilinear elliptic equations in the Musielak–Orlicz–Sobolev spaces for unbounded domains

© *L. M. Kozhevnikova*<sup>1,2</sup>, *A. P. Kashnikova*<sup>1</sup><sup>1</sup> Sterlitamak Branch of Bashkir State University,  
49, Lenin Avenue, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.<sup>2</sup> Elabuga Branch of Kazan (Volga Region) Federal University,  
89, Kazanskaya st., Elabuga, 423600, Russian Federation.

### Abstract

The paper considers the existence of solutions of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations of the second order in unbounded domains. Restrictions on the structure of quasilinear equations are formulated in terms of a special class of convex functions (generalized  $N$ -functions). Namely, nonlinearities are determined by the Musielak–Orlicz functions such that the complementaries functions obeys the condition  $\Delta_2$ . The corresponding Musielak–Orlicz–Sobolev space does not have to be reflexive. This fact is a significant problem, since the theorem for pseudomonotone operators is not applicable here.

For the class of equations under consideration, the proof of the existence theorem is based on an abstract theorem for additional systems. An important tool which allowed to generalize available results on the existence of solutions of the considered equations for bounded domains to the case of unbounded domains is an embedding theorem for Musielak–Orlicz–Sobolev spaces. Thus, in this paper, we find conditions on the structure of quasilinear equations in terms of the Musielak–Orlicz functions sufficient for the solvability of the Dirichlet problem in unbounded domains. In addition, we provide examples of equations which demonstrate that the class of nonlinearities considered in the paper is wider than non-power nonlinearities and variable exponent nonlinearities.

**Keywords:** Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, Dirichlet problem, existence solution, non-reflective space, unbounded domain.

Received: 20<sup>th</sup> July, 2020 / Revised: 20<sup>th</sup> September, 2020 /Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2020

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.


### Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Kozhevnikova L. M., Kashnikova A. P. Existence of solutions to quasilinear elliptic equations in the Musielak–Orlicz–Sobolev spaces for unbounded domains, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 621–643. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1803> (In Russian).

### Authors' Details:

*Larisa M. Kozhevnikova*  <https://orcid.org/0000-0002-6458-5998>

Doctor Phys. & Math. Sci., Professor; Professor; Dept. of Mathematical Analysis;

e-mail: [kosul@mail.ru](mailto:kosul@mail.ru)

*Anastasiya P. Kashnikova*; Student; e-mail: [a.kashnikova98@yandex.ru](mailto:a.kashnikova98@yandex.ru)

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00428\_a).

## References

1. Browder F. E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1977, vol. 74, no. 7, pp. 2659–2661. <https://doi.org/10.1073/pnas.74.7.2659>.
2. Kozhevnikova L. M., Kamaletdinov A. Sh. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponents of nonlinearity in unbounded domains, *Vestn. Volgogr. Gos. Univ., Ser. 1. Math. Phys.*, 2016, no. 5(36), pp. 29–41 (In Russian). <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.5.4>.
3. Kozhevnikova L. M., Khadzhi A. A. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with nonpolynomial nonlinearities in unbounded domains, *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1123–1149. <https://doi.org/10.1070/SM2015v206n08ABEH004491>.
4. Mihăilescu M., Rădulescu V. Neumann problems associated to nonhomogeneous differential operators in Orlicz–Sobolev spaces, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 2008, vol. 58, no. 6, pp. 2087–2111, arXiv:0712.2185 [math.AP]. <https://doi.org/10.5802/aif.2407>.
5. Fan X., Guan C.-X. Uniform convexity of Musielak–Orlicz–Sobolev spaces and applications, *Nonlinear Anal.*, 2010, vol. 73, no. 1, pp. 163–175. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.03.010>.
6. Benkirane A., Sidi El Vally M. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, vol. 20, no. 1, pp. 57–75. <https://doi.org/10.36045/bbms/1366306714>.
7. Sidi El Vally M. Strongly nonlinear elliptic problems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, 2013, vol. 8, no. 1, pp. 115–124.
8. Fan X. Differential equations of divergence form in Musielak–Sobolev spaces and a sub-supersolution method, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 386, no. 2, pp. 593–604. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.022>.
9. Dong G., Fang X. Differential equations of divergence form in separable Musielak–Orlicz–Sobolev spaces, *Bound. Value Probl.*, 2016, vol. 2016, 106. <https://doi.org/10.1186/s13661-016-0612-9>.
10. Chlebicka I. A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak–Orlicz spaces, *Nonlinear Anal.*, 2018, vol. 175, pp. 1–27. <https://doi.org/10.1016/j.na.2018.05.003>.
11. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017. Berlin, Springer, 2011, ix+509 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8>.
12. Musielak J. *Orlicz Spaces and Modular Space*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034. Berlin, Springer, 1983, vi+226 pp. <https://doi.org/10.1007/BFb0072210>.
13. Krasnosel'skii M. A., Rutickii Ja. B. *Convex functions and Orlicz spaces*. Groningen, Noordhoff, 1961, xi+249 pp.
14. Gossez J.P. Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 190, no. 1, pp. 163–205. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1974-0342854-2>.
15. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear Operators. I: General Theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 7. New York, Interscience Publ., 1958, xiv+858 pp.
16. Gossez J.-P., Mustonen V. Variational inequalities in Orlicz–Sobolev spaces, *Nonlinear Anal.*, 1987, vol. 11, no. 3, pp. 379–392. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(87\)90053-8](https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90053-8).



УДК 517.968.74

## О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса интегральных уравнений на всей оси с монотонной нелинейностью

© *Х. А. Хачатрян*<sup>1,2,3</sup>, *А. С. Петросян*<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
Россия, 119992, Москва, Ленинские горы, 1.

<sup>2</sup> Институт математики НАН Армении,  
Армения, 0019, Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24/5.

<sup>3</sup> Ереванский государственный университет,  
Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.

<sup>4</sup> Национальный аграрный университет Армении,  
Армения, 0009, Ереван, ул. Маршала Теряна, 74.

### Аннотация

Работа посвящена исследованию существования, а также анализу качественных свойств решений для одного класса интегральных уравнений с монотонной нелинейностью на всей прямой. Указанный класс уравнений возникает в кинетической теории газов. Доказаны конструктивные теоремы существования ограниченных решений и изучены определенные качественные свойства построенных решений. В конце работы приведены конкретные прикладные примеры указанных уравнений.

**Ключевые слова:** монотонность, нелинейность, ядро, выпуклость, ограниченное решение.

Получение: 10 июня 2020 г. / Исправление: 16 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 19 декабря 2020 г.

---

### Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

#### Образец для цитирования

Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса интегральных уравнений на всей оси с монотонной нелинейностью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 644–662. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1790>.

#### Сведения об авторах

*Хачатур Агавардович Хачатрян* <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>  
доктор физико-математических наук, профессор; e-mail: khach82@rambler.ru

*Айкануш Самвеловна Петросян* <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>  
кандидат физико-математических наук, доцент; e-mail: haykuhi25@mail.ru

## 1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим следующий класс интегральных уравнений на всей прямой

$$Q(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t)f(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1)$$

с монотонной нелинейностью относительно искомой функции  $f(x)$ . В уравнении (1) ядро  $K$  допускает следующее представление:

$$K(x,t) = \int_a^b \alpha(x,s)e^{-\alpha(x,s)|x-t|}d\sigma(s) \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (2)$$

где  $\sigma(s)$  — монотонно неубывающая функция на  $[a,b]$ ,  $0 < a < b \leq +\infty$  и удовлетворяет условию:

$$\int_a^b d\sigma(s) = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Функция  $\alpha(x,s)$  определена на множестве  $\mathbb{R} \times [a,b]$  и обладает следующими свойствами:

- $\alpha_1)$   $\alpha \in C(\mathbb{R} \times [a,b])$ ;
- $\alpha_2)$  существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\alpha(x,s) \geq \varepsilon > 0$ ,  $(x,s) \in \mathbb{R} \times [a,b]$ ;
- $\alpha_3)$   $\alpha(x,s)$  симметрична по первому аргументу:

$$\alpha(-x,s) = \alpha(x,s), \quad x \geq 0, \quad s \in [a,b];$$

- $\alpha_4)$  имеет место неравенство:

$$\delta := \sup_{(x,s) \in \mathbb{R}^+ \times [a,b]} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha(x,s)}\right) < 1.$$

Нелинейность  $Q$  определена на множестве  $\mathbb{R}$  и удовлетворяет следующим условиям (см. рис. 1):

- $q_1)$  существует число  $\eta > 0$  такое, что на отрезке  $[-\eta, \eta]$  функция  $Q$  является непрерывной и нечетной;
- $q_2)$   $Q(\eta) = \eta$  и функция  $Q$  выпукла вниз на отрезке  $[0, \eta]$ , причем число  $\eta > 0$  является первым положительным корнем уравнения  $Q(u) = u$ ;
- $q_3)$   $Q$  монотонно возрастает на отрезке  $[-\eta, \eta]$ ;
- $q_4)$  уравнение  $Q(u) = \frac{u}{2}$  имеет положительное решение  $\xi < \eta$ .

Уравнение (1) имеет непосредственное применение в физической кинетике, а именно в кинетической теории газов (см. [1, 2]). Следует отметить, что в линейном случае, когда  $Q(u) = u$  и  $K(x,t) = 0$  при  $t < 0$ , уравнение (1) достаточно подробно изучалось в работе [3]. В том частном случае, когда  $Q(u) = u^p$ ,  $p > 2$  — нечетное число, а функция  $\alpha$  кроме условий  $\alpha_1)$ – $\alpha_4)$  удовлетворяет также дополнительному условию  $\sup_{(x,s) \in \mathbb{R} \times [a,b]} \alpha(x,s) < 2\varepsilon$ , в ра-

боте [4] были обсуждены вопросы существования ограниченных знакопеременных и нетривиальных решений для уравнения (1).

Небезынтересно также отметить, что соответствующее нелинейное уравнение на полуоси, при существенно иных ограничениях на нелинейность, исследовалось в работе [5].

В настоящей работе при более слабых и общих ограничениях на функции  $Q$  и  $\alpha$  мы докажем конструктивные теоремы существования ограниченных нетривиальных непрерывных и знакопеременных решений, а также исследуем некоторые качественные свойства построенных решений. В конце работы приведем несколько частных и прикладных примеров функций  $Q$  и  $\alpha$  для иллюстрации полученных результатов.

Решение уравнения (1) будем искать в следующем классе непрерывных на  $\mathbb{R}$  функций:

$$\Pi := \{ \varphi : \varphi(-x) = -\varphi(x), x \geq 0, \varphi \in C(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}) \},$$

где  $M(\mathbb{R})$  — пространство ограниченных функций на множестве  $\mathbb{R}$ .

## 2. Обозначения и вспомогательные факты

### 2.1. Сведение уравнения (1) к нелинейному интегральному уравнению на полуоси

Проводя рассуждения, такие же, как в работе [4], решение уравнения (1) можем свести к решению следующего нелинейного интегрального уравнения на положительной полупрямой:

$$Q(F(x)) = \int_0^\infty (K(x, t) - K_0(x, t))F(t)dt, \quad x \geq 0, \quad (4)$$

относительно искомой неотрицательной функции  $F \in C(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+)$ , где ядро  $K(x, t)$  задается согласно формулы (2), а  $K_0(x, t)$  имеет следующий вид:

$$K_0(x, t) = \int_a^b \alpha(x, s)e^{-\alpha(x, s)(x+t)}d\sigma(s), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

При этом, если функция  $F$  является неотрицательным нетривиальным непрерывным и ограниченным на  $\mathbb{R}^+$  решением уравнения (4), то

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & x \geq 0, \\ -F(-x), & x < 0, \end{cases}$$

будет решением уравнения (1), причем  $f \in \Pi$ .

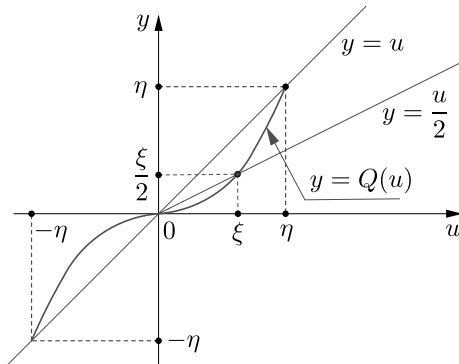


Рис. 1. [Figure 1]

Более того, если  $f \in \Pi$  является нетривиальным решением уравнения (1), то  $F(x) = f(x)$ ,  $x \geq 0$ , будет решением уравнения (4).

Ниже займемся решением уравнения (4). С этой целью мы сначала проведем исследование для специальных вспомогательных линейных уравнений типа Вольтерра.

## 2.2. Неоднородное уравнение типа Вольтерра с монотонно убывающим свободным членом

Рассмотрим следующее неоднородное интегральное уравнение с переменным нижним пределом

$$\psi(x) = g(x) + \int_x^\infty v(x, t)\psi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

относительно искомой неотрицательной функции  $\psi(x)$ , где

$$g(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) \not\equiv 0, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+), \quad (6)$$

$$g(x) \text{ монотонно убывает по } x \text{ на } \mathbb{R}^+. \quad (7)$$

Ядро  $v(x, t)$  допускает следующее представление через функцию  $\alpha(x, s)$ :

$$v(x, t) = 2K(x, t)\theta(t - x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (8)$$

где  $\theta$  — известная функция Хевисайда.

Уравнение (5) перепишем в операторной форме:

$$(I - V)\psi = g,$$

где  $I$  — единичный оператор, а  $V$  — интегральный оператор Вольтерра следующего вида:

$$(Vf)(x) = \int_x^\infty v(x, t)f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Легко заметить, что оператор  $V$  действует в пространстве  $M(\mathbb{R}^+)$ . Это сразу следует из свойств функций  $\alpha$  и  $\sigma$  (см. условия (3) и  $\alpha_1$ – $\alpha_4$ ). Рассмотрим следующую задачу факторизации: для интегрального оператора  $V$  найти такой оператор Вольтерра  $W$ , действующий из  $M(\mathbb{R}^+)$  в  $M(\mathbb{R}^+)$ :

$$(Wf)(x) = \int_x^\infty W(x, t)f(t)dt, \quad f \in M(\mathbb{R}^+),$$

чтобы имела место факторизация

$$I - V = (I - W)(I - U), \quad (9)$$

где

$$(Uf)(x) = \varepsilon \int_x^\infty e^{-\varepsilon(t-x)}f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad f \in M(\mathbb{R}^+).$$



Факторизация (9) понимается как равенство операторов, действующих в пространстве  $M(\mathbb{R}^+)$ . Из результатов работы [6] следует, что ядро оператора  $W$  имеет следующий вид:

$$W(x, t) = 2 \int_a^b (\alpha(x, s) - \varepsilon) e^{-\alpha(x, s)(t-x)} d\sigma(s) \theta(t-x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Из свойств  $\alpha_1) - \alpha_4)$  легко следует, что

$$W \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \quad W(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (10)$$

$$\rho := \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \int_0^\infty W(x, t) dt \leq 2\delta \int_a^b d\sigma(s) = \delta < 1. \quad (11)$$

Из (10) и (11) имеем, что оператор  $W$  является сжимающим в пространстве  $M(\mathbb{R}^+)$ . Используя факторизацию (9), уравнение (5) перепишем в следующем виде:

$$(I - W)(I - U)\psi = g.$$

Обозначим через

$$\Phi = (I - U)\psi.$$

Тогда функция  $\Phi$  будет удовлетворять следующему неоднородному уравнению типа Вольтерра:

$$(I - W)\Phi = g. \quad (12)$$

Запишем уравнение (12) в развернутом виде:

$$\Phi(x) = g(x) + \int_x^\infty W(x, t)\Phi(t)dt, \quad x \geq 0. \quad (13)$$

Так как свободный член  $g$  удовлетворяет условиям (6), (7), в силу того, что оператор  $W$  является сжимающим в пространстве  $M(\mathbb{R}^+)$ , можем утверждать, что уравнение (13) обладает неотрицательным единственным решением в  $M(\mathbb{R}^+)$ .

Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(x) &= g(x) + \int_x^\infty W(x, t)\Phi_n(t)dt, \quad x \geq 0, \\ \Phi_0(x) &= g(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Применяя метод математической индукции, можно убедиться, что

$$\Phi_n(x) \uparrow \text{ по } n, \quad \Phi_n \in M(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Ниже докажем, что имеет место следующая оценка:

$$\Phi_n(x) \leq \frac{g(x)}{1 - \rho}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

При  $n = 0$  данное неравенство сразу следует из определения нулевого приближения в итерациях (14). Предположим, что (16) имеет место для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда в силу (7), (10) и (11) из (14) будем иметь

$$\begin{aligned}\Phi_{n+1}(x) &\leq g(x) + \int_x^\infty W(x, t) \frac{g(t)}{1 - \rho} dt \leq \\ &\leq g(x) + \frac{g(x)}{1 - \rho} \int_x^\infty W(x, t) dt \leq g(x) + \frac{g(x)\rho}{1 - \rho} = \frac{g(x)}{1 - \rho}.\end{aligned}$$

Из (15) и (16) немедленно следует, что последовательность ограниченных функций  $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$  имеет поточечный предел, когда  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x).$$

Согласно теореме Б. Леви [7], предельная функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению (13). Из (15), (16) в силу (6) и (7) заключаем, что

$$\begin{aligned}g(x) &\leq \Phi(x) \leq \frac{g(x)}{1 - \rho}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \Phi &\in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+).\end{aligned}$$

Таким образом, в силу единственности решения уравнения (13) в  $M(\mathbb{R}^+)$  можем утверждать, что построенное при помощи итераций (14) решение является единственным. Решая уравнение  $(I - U)\psi = \Phi$ , находим

$$\psi(x) = \Phi(x) + \varepsilon \int_x^\infty \Phi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

### 2.3. Построение нетривиального решения для однородного уравнения типа Вольтерра

Рассмотрим следующее однородное линейное интегральное уравнение типа Вольтерра относительно искомой функции  $\mathcal{L}(x)$ :

$$\mathcal{L}(x) = \int_x^\infty (v(x, t) - \tilde{v}(x, t)) \mathcal{L}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (17)$$

где

$$\tilde{v}(x, t) = 2 \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)(x+t)} d\sigma(s), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (18)$$

а ядро  $v(x, t)$  задается согласно (8).

Из следующего простого неравенства

$$|x - t| \leq x + t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

с учетом условия  $\alpha_1$ ) получаем

$$K(x, t) \geq K_0(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad (19)$$

откуда, в частности, следует

$$v(x, t) \geq \tilde{v}(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \quad (20)$$

Имеет место следующая основная лемма.

ЛЕММА 1. При условиях (3),  $\alpha_1 - \alpha_4$  уравнение (17) обладает неотрицательным, нетривиальным, непрерывным и ограниченным на  $\mathbb{R}^+$  решением  $\mathcal{L}(x)$ , причем  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(x) = 1$  и  $1 - \mathcal{L} \in L_1(\mathbb{R}^+)$ ,  $\mathcal{L}(x) \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Доказательство. Наряду с уравнением (17) рассмотрим следующие неоднородные интегральные уравнения типа Вольтерра относительно искомых функций  $\psi$  и  $\tilde{Q}$ :

$$\psi_0(x) = g_0(x) + \int_x^\infty v(x, t)\psi_0(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (21)$$

$$\tilde{Q}(x) = g_1(x) + \int_x^\infty (v(x, t) - \tilde{v}(x, t))\tilde{Q}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (22)$$

где

$$g_0(x) := e^{-2\varepsilon x}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ g_1(x) := 2 \int_a^b e^{-2\alpha(x, s)x} d\sigma(s), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Очевидно, что функция  $g_0$  удовлетворяет условиям (6) и (7). Следовательно, в силу полученных в п. 2.1 результатов можно утверждать, что уравнение (21) обладает неотрицательным и ограниченным решением вида

$$\psi_0(x) = \Phi_0(x) + \varepsilon \int_x^\infty \Phi_0(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (23)$$

где  $\Phi_0(x)$  является решением уравнения (13) со свободным членом  $g(x) = g_0(x)$  и удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$e^{-2\varepsilon x} \leq \Phi_0(x) \leq \frac{e^{-2\varepsilon x}}{1 - \rho}, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (24)$$

Так как  $g_0 \in C(\mathbb{R}^+)$ ,  $v \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , то из (23), (24) и (21) следует

$$\psi_0(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+).$$

Таким образом, уравнение (21) обладает неотрицательным непрерывным суммируемым и ограниченным решением  $\psi_0(x)$ . Более того, из (23) и (24) следует также, что функция  $\psi_0(x)e^{2\varepsilon x}$  является ограниченной на  $\mathbb{R}^+$ .

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для уравнения (22):

$$\tilde{Q}_{n+1}(x) = g_1(x) + \int_x^\infty (v(x, t) - \tilde{v}(x, t))\tilde{Q}_n(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (25) \\ \tilde{Q}_0(x) = g_1(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Учитывая неравенство (20), индукцией по  $n$  нетрудно убедиться, что

$$\tilde{Q}_n(x) \uparrow \text{ по } n, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (26)$$

В силу того, что  $g_1 \in C(\mathbb{R}^+)$ ,  $v, \tilde{v} \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , индукцией также можно проверить, что

$$\tilde{Q}_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Ниже докажем справедливость неравенства

$$\tilde{Q}_n(x) \leq \psi_0(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (28)$$

где  $\psi_0 \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$  — решение уравнения (21), обладающее свойствами (23), (24). При  $n = 0$  неравенство (28) сразу вытекает из следующей цепочки простых неравенств:

$$\tilde{Q}_0(x) = g_1(x) \leq 2 \int_a^b e^{-2\varepsilon x} d\sigma(s) = e^{-2\varepsilon x} = g_0(x) \leq \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (29)$$

ибо  $\alpha(x, s) \geq \varepsilon > 0$ ,  $(x, s) \in \mathbb{R}^+ \times [a, b]$  и  $\int_a^b d\sigma(s) = \frac{1}{2}$ .

Предположим, что неравенство (28) выполняется при некоторых  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, учитывая (20), (29), из (25) будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{n+1}(x) &\leq g_0(x) + \int_x^\infty (v(x, t) - \tilde{v}(x, t))\psi_0(t) dt \leq \\ &\leq g_0(x) + \int_x^\infty v(x, t)\psi_0(t) dt = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (26), (27) и (28) можем утверждать, что последовательность непрерывных функций  $\{\tilde{Q}_n(x)\}_{n=0}^\infty$  имеет поточечный предел, когда  $n \rightarrow \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Q}_n(x) = \tilde{Q}(x)$ , причем согласно теореме Б. Леви предельная функция  $\tilde{Q}(x)$  удовлетворяет уравнению (22). Из (26) и (28) следует

$$2 \int_a^b e^{-2\alpha(x,s)x} d\sigma(s) \leq \tilde{Q}(x) \leq \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (30)$$

Так как  $g_1 \in C(\mathbb{R}^+)$ ,  $v, \tilde{v} \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , с учетом (30) можно утверждать, что  $\tilde{Q} \in C(\mathbb{R}^+)$ .

Итак, согласно теореме Дини получаем, что сходимость последовательности функций  $\{\tilde{Q}_n(x)\}_{n=0}^\infty$  к  $\tilde{Q}(x)$  в каждом компакте из  $\mathbb{R}^+$  равномерна. Из (30), (23) и (24) также следует

$$\tilde{Q} \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+) \quad (31)$$

и более того —

$$\tilde{Q}(x)e^{2\varepsilon x} \in M(\mathbb{R}^+). \quad (32)$$

Таким образом, уравнение (22) обладает неотрицательным, непрерывным, ограниченным и суммируемым на  $\mathbb{R}^+$  решением, более того, имеет место включение (32).

Теперь прямой проверкой убедимся, что  $\tilde{Q}_{\text{тр}}(x) \equiv 1$  является решением уравнения (22). Действительно, учитывая (3), (8), (18) и теорему Фубини [7], имеем

$$\begin{aligned} g_1(x) + \int_x^\infty (v(x, t) - \tilde{v}(x, t)) dt &= 2 \int_a^b e^{-2\alpha(x, s)x} d\sigma(s) + \\ + 2 \int_x^\infty \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)(t-x)} d\sigma(s) dt &- 2 \int_x^\infty \int_a^b \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)(x+t)} d\sigma(s) dt = \\ = 2 \int_a^b e^{-2\alpha(x, s)x} d\sigma(s) + 2 \int_a^b d\sigma(s) &- 2 \int_a^b \alpha(x, s) \int_x^\infty e^{-\alpha(x, s)(x+t)} dt d\sigma(s) = \\ = 2 \int_a^b e^{-2\alpha(x, s)x} d\sigma(s) + 1 &- 2 \int_a^b e^{-2\alpha(x, s)x} d\sigma(s) = 1. \end{aligned}$$

Индукцией по  $n$  легко можно проверить справедливость неравенства

$$\tilde{Q}_n(x) \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно,  $\tilde{Q}(x) \leq \tilde{Q}_{\text{тр}}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . Из свойств (31) и (32) следует

$$\tilde{Q}(x) \neq \tilde{Q}_{\text{тр}}(x).$$

В силу линейности уравнения (22) функция

$$\mathcal{L}(x) = \tilde{Q}_{\text{тр}}(x) - \tilde{Q}(x) = 1 - \tilde{Q}(x) \geq 0$$

будет удовлетворять однородному уравнению (17). Из свойств функции  $\tilde{Q}$  (см. (31), (32)) приходим к завершению доказательства.  $\square$

### 3. Разрешимость уравнения (4)

Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} Q(F_{n+1}(x)) &= \int_0^\infty (K(x, t) - K_0(x, t)) F_n(t) dt, \quad x \geq 0, \\ F_0(x) &= \eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{33}$$

Индукцией по  $n$  докажем, что

$$F_n(x) \downarrow \text{ по } n, \tag{34}$$

$$F_n(x) \geq \xi \mathcal{L}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{35}$$

$$F_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{36}$$

где  $\mathcal{L}(x)$  — решение уравнения (17) (см. лемму 1).

Сперва убедимся, что  $0 \leq F_1(x) \leq F_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . Учитывая (19), (3), из (33) будем иметь

$$\begin{aligned} Q(F_1(x)) &\leq \eta \int_0^\infty K(x, t) dt = \eta \int_a^b \int_0^\infty \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|x-t|} dt d\sigma(s) \leq \\ &\leq \eta \int_a^b \alpha(x, s) \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha(x, s)|y|} dy d\sigma(s) = 2\eta \int_a^b d\sigma(s) = \eta = Q(\eta), \end{aligned} \quad (37)$$

$$Q(F_1(x)) \geq 0 = Q(0), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (38)$$

Из (37) и (38) в силу монотонности функции  $Q$  следует справедливость неравенств

$$0 \leq F_1(x) \leq F_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Неравенство (35) для  $n = 0$  сразу следует из оценки

$$F_0(x) = \eta > \xi \geq \xi \mathcal{L}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Непрерывность нулевого приближения в итерациях (33) очевидна. Предположим, что для некоторого натурального  $n$  имеет место неравенство

$$0 \leq F_n(x) \leq F_{n-1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда, вновь используя (19), из (33) получим

$$Q(F_{n+1}(x)) \leq \int_0^\infty (K(x, t) - K_0(x, t)) F_{n-1}(t) dt = Q(F_n(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (39)$$

$$Q(F_{n+1}(x)) \geq 0 = Q(0), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (40)$$

Снова используя монотонность функции  $Q$ , из (39) и (40) будем иметь

$$0 \leq F_{n+1}(x) \leq F_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Предположим теперь, что  $F_n(x) \geq \xi \mathcal{L}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда, учитывая (19) и условия  $q_1$ – $q_4$ , из (33) получаем

$$\begin{aligned} Q(F_{n+1}(x)) &\geq \xi \int_0^\infty (K(x, t) - K_0(x, t)) \mathcal{L}(t) dt \geq \\ &\geq \xi \int_x^\infty (K(x, t) - K_0(x, t)) \mathcal{L}(t) dt = \\ &= \frac{\xi}{2} \int_x^\infty (v(x, t) - \tilde{v}(x, t)) \mathcal{L}(t) dt = \frac{\xi \mathcal{L}(x)}{2} \geq Q(\xi \mathcal{L}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

ибо  $Q(u) \leq \frac{u}{2}$ ,  $u \in [0, \xi]$  и  $0 \leq \mathcal{L}(x) \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ .

Наконец, предположим, что  $F_n \in C(\mathbb{R}^+)$  при некотором  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда в силу того, что  $K, K_0 \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ , получаем, что  $Q(F_{n+1}(x))$  является непрерывной функцией на  $\mathbb{R}^+$ . Так как  $0 \leq F_{n+1}(x) \leq \eta$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$  и  $Q \in C[-\eta, \eta]$ ,  $Q \uparrow$  на  $[-\eta, \eta]$ , из непрерывности функции  $Q(F_{n+1}(x))$  следует непрерывность функции  $F_{n+1}(x)$  на  $\mathbb{R}^+$ .

Таким образом, утверждения (34)–(36) полностью доказаны. Следовательно, последовательность непрерывных функций  $\{F_n(x)\}_{n=0}^\infty$  имеет поточечный предел, когда  $n \rightarrow \infty$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ , причем предельная функция  $F$  удовлетворяет уравнению (4) и имеет место следующая двойная оценка:

$$\xi \mathcal{L}(x) \leq F(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad (41)$$

и в силу непрерывности ядер  $K, K_0$  и нелинейности  $Q$  функция  $F \in C(\mathbb{R}^+)$ .

Итак, на основе вышеизложенного приходим к следующему результату.

**ЛЕММА 2.** *При условиях (3),  $\alpha_1$ – $\alpha_4$ ) и  $q_1$ – $q_4$ ) уравнение (4) обладает неотрицательным, нетривиальным, непрерывным и ограниченным на  $\mathbb{R}^+$  решением. Более того, имеет место двойная оценка (41).*

## 4. Асимптотическое поведение решения при дополнительных ограничениях на $\alpha(x, s)$ и $Q(u)$

### 4.1. Ключевая лемма

Ниже при дополнительных ограничениях на функции  $\alpha(x, s)$  и  $Q(u)$  мы докажем справедливость следующих соотношений:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \eta$ ,
- 2)  $\eta - F \in L_1(\mathbb{R}^+)$ .

Кроме условий  $\alpha_1$ – $\alpha_4$ ) и  $q_1$ – $q_4$ ), здесь мы предполагаем, что

$$\alpha_0 := \sup_{(x,s) \in \mathbb{R} \times [a,b]} \alpha(x, s) \leq 2\varepsilon, \quad (42)$$

$$\eta < \frac{3}{2}\xi. \quad (43)$$

Имеет место следующая лемма.

**ЛЕММА 3.** *При условиях (3),  $\alpha_1$ – $\alpha_4$ ),  $q_1$ – $q_4$ ) и (42), (43) любое решение уравнения (4), удовлетворяющее неравенством (41), обладает свойствами 1) и 2).*

*Доказательство.* Сперва заметим, что уравнение (4) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta - Q(F(x)) &= \eta \int_0^\infty K_0(x, t) dt + \\ &+ \int_0^\infty K_0(x, t) F(t) dt + \int_0^\infty K(x, t) (\eta - F(t)) dt, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (44)$$

поскольку, согласно теореме Фубини,

$$\begin{aligned} &\eta \int_0^\infty (K(x, t) dt + K_0(x, t)) dt = \\ &= \eta \int_a^b \int_0^\infty \alpha(x, s) e^{-\alpha(x,s)|x-t|} dt d\sigma(s) + \eta \int_a^b \int_0^\infty \alpha(x, s) e^{-\alpha(x,s)(x+t)} dt d\sigma(s) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \eta \int_a^b \int_{-\infty}^x \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|y|} dy d\sigma(s) + \eta \int_a^b \int_x^{\infty} \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|y|} dy d\sigma(s) = \\
 &= 2\eta \int_a^b d\sigma(s) = \eta.
 \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon \leq \alpha(x, s) \leq 2\varepsilon$  (см. условия  $\alpha_2$ ) и (42)), то с учетом  $q_1$ – $q_3$ ), (41), (3) и (44) имеем

$$\begin{aligned}
 0 \leq \eta - Q(F(x)) &\leq 2\eta \frac{\alpha_0}{\varepsilon} \int_a^b \int_x^{\infty} e^{-\varepsilon y} dy d\sigma(s) + \int_0^{\infty} K(x, t)(\eta - F(t)) dt = \\
 &= \eta \frac{\alpha_0}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} + \int_0^{\infty} K(x, t)(\eta - F(t)) dt, \quad x \geq 0. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\chi(u) := \frac{\eta - Q(u)}{\eta - u}, \quad u \in [0, \eta].$$

Из свойств  $q_1$ – $q_4$ ), (43) сразу следует

$$\begin{aligned}
 \chi &\in C[0, \eta), \\
 \chi(0) &= 1, \quad \chi(\xi) = \frac{\eta - \frac{\xi}{2}}{\eta - \xi} > 2.
 \end{aligned}$$

В силу выпуклости и монотонности функции  $Q$  на интервале  $[0, \eta)$  функция  $\chi(u)$  будет монотонно возрастающей на  $[0, \eta)$  (см. рис. 2).

Следовательно, существует  $\xi_0 \in (0, \xi)$  такое, что

$$\chi(\xi_0) > 2. \quad (46)$$

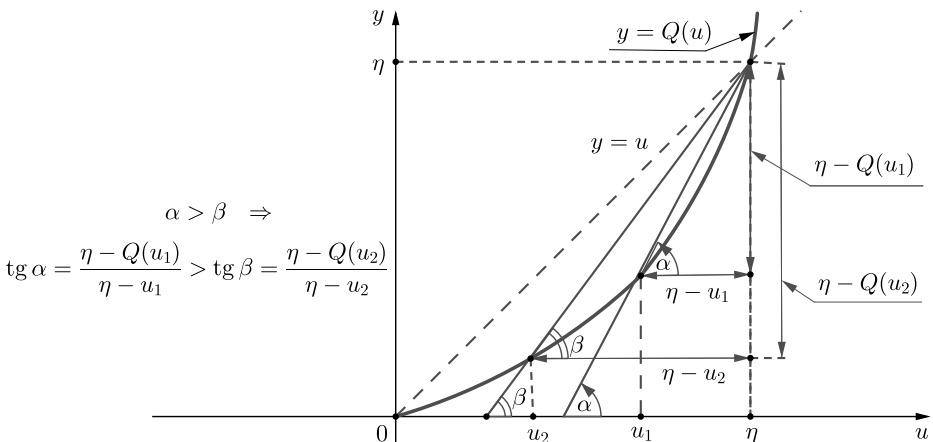


Рис. 2. [Figure 2]



Зафиксируем число  $\xi_0$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(x) = 1$  и  $\mathcal{L}(x) \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , существует число  $r > 0$  такое, что при  $x \geq r$  имеет место неравенство

$$1 - \mathcal{L}(x) = |1 - \mathcal{L}(x)| \leq \frac{\xi - \xi_0}{\xi},$$

из которого следует

$$\mathcal{L}(x) \geq \frac{\xi_0}{\xi} \text{ при } x \geq r. \tag{47}$$

Таким образом, учитывая (41) и (47), можем утверждать, что

$$F(x) \geq \xi_0 \text{ при } x \geq r.$$

Проведем теперь прямую, проходящую через точки  $(\xi_0, Q(\xi_0))$  и  $(\eta, \eta)$ . Уравнение этой прямой имеет вид (см. рис. 3)

$$y = \frac{\eta - Q(\xi_0)}{\eta - \xi_0} u + \eta \frac{Q(\xi_0) - \xi_0}{\eta - \xi_0}.$$

В силу выпуклости функции  $Q$  на отрезке  $[0, \eta]$  можем утверждать, что при  $x \geq r$

$$Q(F(x)) \leq \frac{\eta - Q(\xi_0)}{\eta - \xi_0} F(x) + \eta \frac{Q(\xi_0) - \xi_0}{\eta - \xi_0},$$

из чего следует справедливость неравенства

$$\eta - Q(F(x)) \geq \chi(\xi_0)(\eta - F(x)) \text{ при } x \geq r. \tag{48}$$

Так как  $K, K_0 \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ ,  $Q \in C[0, \eta]$ , из (4) в силу (41) и  $q_3F \in C(\mathbb{R}^+)$ . Поскольку  $F \in C(\mathbb{R}^+)$ , очевидно, что  $\eta - F \in L_1(0, r)$ .

Докажем теперь, что  $\eta - F \in L_1(r, +\infty)$ . Пусть  $R > r$  — произвольное конечное число. Проинтегрируем обе части (45) по  $x$  в пределах от  $r$  до  $R$ :

$$\int_r^R (\eta - Q(F(x))) dx \leq \frac{\eta \alpha_0}{\varepsilon} \int_r^R e^{-\varepsilon x} dx + \int_r^R \int_0^\infty K(x, t)(\eta - F(t)) dt dx \leq$$

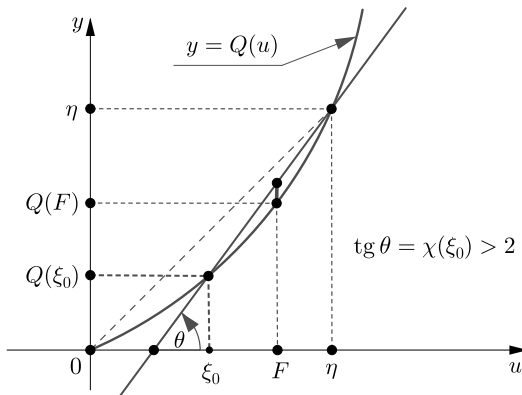


Рис. 3. [Figure 3]

$$\begin{aligned} \leq \frac{\eta\alpha_0}{\varepsilon^2} + \int_r^R \int_0^r K(x,t)(\eta - F(t))dt dx + \int_r^R \int_r^R K(x,t)(\eta - F(t))dt dx + \\ + \int_r^R \int_R^\infty K(x,t)(\eta - F(t))dt dx. \quad (49) \end{aligned}$$

Заметим, что в силу теоремы Фубини

$$\begin{aligned} \int_r^R \int_0^r K(x,t)dt dx \leq \alpha_0 \int_r^R \int_a^b \int_0^r e^{-\varepsilon|x-t|} dt d\sigma(s) dx = \\ = \frac{\alpha_0}{2} \int_r^R \int_{x-r}^x e^{-\varepsilon|y|} dy dx = \frac{\alpha_0}{2} \int_r^R \left( \int_{x-r}^\infty e^{-\varepsilon y} dy - \int_x^\infty e^{-\varepsilon y} dy \right) dx \leq \\ \leq \frac{\alpha_0}{2\varepsilon} \int_r^R e^{-\varepsilon(x-r)} dx \leq \frac{\alpha_0}{2\varepsilon} \int_r^\infty e^{-\varepsilon t} dt = \frac{\alpha_0}{2\varepsilon^2} e^{-\varepsilon r} \leq \frac{\alpha_0}{2\varepsilon^2} < +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_r^R \int_R^\infty K(x,t)dt dx \leq \frac{\alpha_0}{2} \int_r^R \int_R^\infty e^{-\varepsilon|x-t|} dt dx = \frac{\alpha_0}{2} \int_r^R \int_{-\infty}^{x-R} e^{-\varepsilon|y|} dy dx \leq \\ \leq \frac{\alpha_0}{2} \int_0^R \int_{-\infty}^{x-R} e^{\varepsilon y} dy dx = \frac{\alpha_0}{2\varepsilon} \int_0^R e^{\varepsilon(x-R)} dx \leq \frac{\alpha_0}{2\varepsilon^2} < +\infty. \end{aligned}$$

В конечном итоге имеем

$$\int_r^R \int_0^r K(x,t)dt dx \leq \frac{\alpha_0}{2\varepsilon^2}, \quad \int_r^R \int_R^\infty K(x,t)dt dx \leq \frac{\alpha_0}{2\varepsilon^2}. \quad (50)$$

Учитывая (50) и (41), из (49) получим

$$\begin{aligned} \int_r^R (\eta - Q(F(x))) dx \leq \\ \leq \frac{\eta\alpha_0}{\varepsilon^2} + \frac{\eta\alpha_0}{2\varepsilon^2} + \frac{\eta\alpha_0}{2\varepsilon^2} + \int_r^R \int_r^R K(x,t)(\eta - F(t))dt dx = \\ = \frac{2\eta\alpha_0}{\varepsilon^2} + \int_r^R \int_r^R K(x,t)(\eta - F(t))dt dx. \quad (51) \end{aligned}$$

Теперь, используя неравенство (48) с учетом (3), (42),  $\alpha_1$ ) и теорему Фубини, из (51) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq \chi(\xi_0) \int_r^R (\eta - F(x)) dx \leq \\ \leq \frac{2\eta\alpha_0}{\varepsilon^2} + \int_r^R (\eta - F(t)) \int_0^\infty K(x,t) dx dt \leq \\ \leq \frac{2\eta\alpha_0}{\varepsilon^2} + 2 \int_r^R (\eta - F(t)) dt \end{aligned}$$

или в силу (46) —

$$0 \leq \int_r^R (\eta - F(x)) dx \leq \frac{2\eta\alpha_0}{(\chi(\xi_0) - 2)\varepsilon^2}. \quad (52)$$

Устремляя число  $R$  к бесконечности в (52), получим  $\eta - F \in L_1(r, +\infty)$  и

$$0 \leq \int_r^\infty (\eta - F(x)) dx \leq \frac{2\eta\alpha_0}{(\chi(\xi_0) - 2)\varepsilon^2}. \quad (53)$$

Окончательно в силу (41) и (53) имеем

$$\eta - F \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+).$$

Из (45) с учетом (3),  $\alpha_1$ ) и (42) следует

$$0 \leq \eta - Q(F(x)) \leq \frac{\eta\alpha_0}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} + \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon|x-t|} (\eta - F(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (54)$$

Так как  $\eta - F \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap M(\mathbb{R}^+)$ ,  $e^{-\varepsilon|x|} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$ , в силу известного предельного соотношения в операции свертки [8] имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\infty e^{-\varepsilon|x-t|} (\eta - F(t)) dt = 0. \quad (55)$$

Из (54) и (55) сразу получаем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q(F(x)) = \eta. \quad (56)$$

Учитывая  $q_1) - q_3)$ , из (56) окончательно получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \eta. \quad \square$$

## 4.2. Формулировка основных результатов

Вернемся теперь к уравнению (1). Учитывая формулу

$$f(x) = \begin{cases} F(x), & x \geq 0, \\ -F(-x), & x < 0 \end{cases}$$

и утверждения леммы 2 и леммы 3, приходим к следующим теоремам.

**ТЕОРЕМА 1.** При условиях леммы 2 уравнение (1) обладает нетривиальным знакопеременным непрерывным нечетным и ограниченным решением  $f(x)$ . Более того, данное решение удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} \xi \mathcal{L}(x) &\leq f(x) \leq \eta, \quad \text{при } x \geq 0, \\ -\eta &\leq f(x) \leq -\xi \mathcal{L}(-x), \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (57)$$

**ТЕОРЕМА 2.** При условиях леммы 3 любое решение  $f(x) \in \Pi$  уравнения (1), удовлетворяющее неравенству (57), обладает следующими предельными и асимптотическими свойствами:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\eta, \quad \eta \pm f \in L_1(\mathbb{R}^\mp),$$

где  $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0]$ .

## 5. Вопрос единственности решения. Примеры

### 5.1. О единственности решения

Возникает естественный вопрос: будет ли построенное нами решение единственным? Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Ниже убедимся, что, например, когда функция  $\alpha(x, s)$  является периодической по переменной  $x$  с основным периодом  $T > 0$  (т. е.  $\alpha(x + T, s) = \alpha(x, s)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $s \in [a, b)$ ), то единственность нарушается. Заметим, что тогда уравнение (1), кроме решения  $f(x)$ , обладает также однопараметрическим семейством решений вида  $\{f(x + mT)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ . Действительно, учитывая (2) и периодичность функции  $\alpha$ , из (1) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) f(t + mT) dt &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|x-t|} f(t + mT) dt d\sigma(s) = \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x, s) e^{-\alpha(x, s)|x+mT-y|} f(y) dy d\sigma(s) = \\ &= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x + mT, s) e^{-\alpha(x+mT, s)|x+mT-y|} f(y) dy d\sigma(s) = \\ &= Q(f(x + mT)). \end{aligned}$$

### 5.2. Примеры функций $Q$ и $\alpha$

Приведем несколько примеров функций  $Q$  и  $\alpha$ , удовлетворяющих условиям доказанных теорем.

ПРИМЕРЫ ФУНКЦИИ  $Q$ :

$Q^a$ )  $Q(u) = u^p$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $p > 2$  — произвольное нечетное число.

$Q^b$ )  $Q(u) = au^p + (1 - a)u$ ,  $a \in (\frac{1}{2}, 1]$ ,  $p > 2$  — нечетное число.

Подробно остановимся на примере  $Q^b$ . Проверим условия  $q_1) - q_4)$ .

Действительно, легко заметить, что для этой функции положительной неподвижной точкой служит число  $\eta = 1$ , а  $\xi = \sqrt{\frac{a-1/2}{a}} < 1$ . Очевидно, что  $Q \uparrow$  на  $\mathbb{R}$ ,  $Q \in C(\mathbb{R})$  и  $Q(-u) = -Q(u)$ ,  $u \geq 0$ , причем  $Q$  выпукла вниз на отрезке  $[0, 1]$ .

Заметим, что при  $a \in (\frac{9}{10}, 1]$  имеет место также условие  $\eta < \frac{3}{2}\xi$ . В справедливости последнего неравенства можно убедиться прямой проверкой.

ПРИМЕРЫ ФУНКЦИИ  $\alpha$ :

$\alpha^a$ )  $\alpha(x, s) = \varepsilon + G_0(s)e^{-|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где  $G_0 \in C[a, b)$  и  $0 \leq G_0(s) \leq \varepsilon$ ,  $s \in [a, b)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

$\alpha^b$ )  $\alpha(x, s) = \varepsilon + G_0(s) \sin^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где  $G_0$  — удовлетворяет условиям примера  $\alpha^a$ .

Следует отметить, что в случае примера  $\alpha^b$  (период  $T = \pi$ ) уравнение (1) обладает однопараметрическим семейством решений вида  $\{f(x + \pi m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ .

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00223).

### **Библиографический список**

1. Коган М. Н. *Динамика разреженного газа*. М.: Наука, 1967. 440 с.
2. Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х. О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1998. Т. 38, № 3. С. 466–482.
3. Хачатрян Х. А. Разрешимость консервативного интегрального уравнения на полуоси // *Изв. НАН Армении. Математика*, 2002. Т. 37, № 4. С. 73–80.
4. Хачатрян Х. А., Сисакян А. А. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой // *Вестн. РАУ. Сер. физ.-мат. науки*, 2017. № 2. С. 25–40.
5. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А. Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором // *Матем. сб.*, 2010. Т. 201, № 4. С. 125–136. <https://doi.org/10.4213/sm7310>.
6. Хачатрян Х. А., Григорян С. А. О нетривиальной разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна–Вольтерра // *Владикавк. матем. журн.*, 2012. Т. 14, № 2. С. 57–66.
7. Колмогоров А. Н., Фомин В. С. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1976. 543 с.
8. Арабаджян Л. Г., Хачатрян А. С. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки // *Матем. сб.*, 2007. Т. 198, № 7. С. 45–62. <https://doi.org/10.4213/sm1483>.

MSC: 45G05

## On alternating and bounded solutions of one class of integral equations on the entire axis with monotonic nonlinearity

© *Kh. A. Khachatryan*<sup>1,2,3</sup>, *H. S. Petrosyan*<sup>1,4</sup><sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University,

1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

<sup>2</sup> Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,

24/5, Marshal Baghramyan pr., Yerevan, 0019, Armenia.

<sup>3</sup> Yerevan State University,

1, A. Manukyan str., Yerevan, 0025, Armenia.

<sup>4</sup> Armenian National Agrarian University,

74, Marshal Teryan str., Yerevan, 0009, Armenia.

### Abstract

The paper is devoted to the study of the existence and analysis of the qualitative properties of solutions for one class of integral equations with monotonic nonlinearity on the entire line. The indicated class of equations arises in the kinetic theory of gases. The constructive theorems of the existence of bounded solutions are proved, and certain qualitative properties of the constructed solutions are studied. At the end of the paper, specific applied examples of these equations are given.

**Keywords:** monotonicity, nonlinearity, kernel, convexity, limited solution.

Received: 10<sup>th</sup> June, 2020 / Revised: 16<sup>th</sup> October, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 19<sup>th</sup> December, 2020

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Author's Responsibilities.** We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–11–00223).


### Research Article


© © The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this article in press as:**

Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. On alternating and bounded solutions of one class of integral equations on the entire axis with monotonic nonlinearity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 644–662. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1790> (In Russian).

**Authors' Details:**

*Khachatryan A. Khachatryan* ✉  <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>  
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Professor; e-mail: [khach82@rambler.ru](mailto:khach82@rambler.ru)

*Haykanush S. Petrosyan*  <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>  
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; e-mail: [haykuhi25@mail.ru](mailto:haykuhi25@mail.ru)

## References

1. Kogan M. N. *Rarefied Gas Dynamics*. New York, Springer Science, 1969, xi+515 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-6381-9>.
2. Engibaryan N. B., Khachatryan A. Kh. Some convolution-type integral equations in kinetic theory, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1998, vol. 38, no. 3, pp. 452–467.
3. Khachatryan Kh. A. Solvability of a conservative integral equation on the half-line, *Izv. NAN Armenii. Matematika*, 2002, vol. 37, no. 4, pp. 73–80 (In Russian).
4. Khachatryan Kh. A., Sisakyan A. A. On solvability of one class of nonlinear integral equations on whole line, *Vestn. of Russian-Armenian (Slavonic) Univ.*, 2017, no. 2, pp. 25–40 (In Russian).
5. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. A nonlinear integral equation of Hammerstein type with a noncompact operator, *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 4, pp. 595–606. <https://doi.org/10.1070/SM2010v201n04ABEH004083>.
6. Khachatryan Kh. A., Grigoryan S. A. On nontrivial solvability of a nonlinear Hammerstein–Volterra type integral equation, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2012, vol. 14, no. 2, pp. 57–66 (In Russian).
7. Kolmogorov A. N., Fomin V. S. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1976, 543 pp. (In Russian)
8. Arabadzhyan L. G., Khachatryan A. S. A class of integral equations of convolution type, *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 7, pp. 949–966. <https://doi.org/10.1070/SM2007v198n07ABEH003868>.



# Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376:539.4.014.13

## Влияние размеров области поверхностного упрочнения на напряженно-деформированное состояние балки с надрезом полукруглого профиля

© В. П. Радченко, Д. М. Шишкин

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Исследуется влияние размеров области поверхностного пластического упрочнения на напряженно-деформированное состояние балки с надрезом полукруглого профиля. Задача сведена к краевой задаче фиктивной термоупругости, при этом начальные (пластические) деформации моделируются температурными анизотропными деформациями в неоднородном температурном поле. Решение реализовано на основе метода конечных элементов.

Для модельных расчетов в качестве исходной информации использовались экспериментальные данные о распределении остаточных напряжений в гладкой балке из сплава ЭП742 после ультразвукового механического упрочнения. Выполнен вариативный численный анализ влияния радиуса надреза и величины зоны упрочнения грани балки на распределение компонент тензора остаточных напряжений в наименьшем сечении от дна концентратора.

Показано, что при величине зоны упрочнения более 16–20 % от площади всей грани напряженно-деформированное состояние в наименьшем сечении практически стабилизируется. Установлено, что если радиус полукруглого надреза меньше толщины упрочненного слоя (области сжатия материала), то происходит увеличение (по модулю) нормальной продольной компоненты тензора остаточных напряжений, а если радиус

### Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


### Образец для цитирования

Радченко В. П., Шишкин Д. М. Влияние размеров области поверхностного упрочнения на напряженно-деформированное состояние балки с надрезом полукруглого профиля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 663–676. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1828>.

### Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [radchenko.vp@samgtu.ru](mailto:radchenko.vp@samgtu.ru)

Дмитрий Михайлович Шишкин  <https://orcid.org/0000-0003-3205-2262>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [shishkin.dim@yandex.ru](mailto:shishkin.dim@yandex.ru)



надреза больше толщины упрочненного слоя, то наблюдается уменьшение (по модулю) этой величины по сравнению с аналогичной компонентой для гладкой упрочненной балки для всех величин зоны упрочнения более 16–20 % от площади всей грани балки.

Выполнена экспериментальная проверка разработанного численного метода на основе метода конечных элементов для балки с полностью упрочненной гранью.

**Ключевые слова:** опережающее поверхностное пластическое упрочнение, область упрочнения, полукруглый надрез, балка, сплав ЭП742, остаточные напряжения.

Получение: 25 сентября 2020 г. / Исправление: 11 ноября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2020 г.

---

**Введение.** В процессе эксплуатации любое изделие в той или иной мере подвергается влиянию термических, химико-термических, механических воздействий, что приводит к его износу, накоплению поврежденности в материале и провоцирует другие деградационные процессы в деталях и узлах элементов конструкций. Одним из эффективных способов повышения ресурса металлоконструкций является поверхностное пластическое упрочнение (ППД), широко распространенное в штатных технологиях в авиадвигателестроении, энергетическом машиностроении и других отраслях промышленности. Положительное влияние ППД на характеристики надежности связывают с образованием полей остаточных напряжений (ОН) в приповерхностном слое изделий после применения технологии упрочнения [1–12]. Наибольшая эффективность применения ППД наблюдается для деталей с концентраторами напряжений в виде вырезов, вмятин, царапин и иных трещиноподобных несплошностей [7, 9, 12–18]. Такое явление однозначно обуславливается наличием сжимающих напряжений вблизи концентратора, которые локально снижают интенсивность эксплуатационных растягивающих напряжений, предотвращают растрескивание металла и раскрытие берегов трещин нормального отрыва. Уменьшение дислокаций в слоях материала посредством наружного уплотнения способствует также изменению траектории процесса разрушения. В подтверждение этого в работах [16, 17] на примере развития поверхностных трещин в образцах, изготовленных из никелевого суперсплава и ослабленных царапинами и вмятинами, представлены результаты положительного влияния ОН на усталостную долговечность. Результаты работы [15], полученные на основе линейной механики разрушения при исследовании цилиндрического стального образца с надрезом, также показали, что остановка роста трещины усталости наблюдается в поверхностном упрочненном слое по причине резкого падения значений расчетного коэффициента интенсивности напряжений.

В прикладных технологических задачах выбор методов и режимов поверхностного упрочнения проводится, как правило, без учета формы, размеров концентратора и вариантов упрочнения поверхностного слоя детали. При наличии в детали мелких надрезов, обусловленных конструктивными особенностями, например, для подачи смазывающих жидкостей, сопряжения деталей и т. д., подавляющее число технологий для упрочнения поверхности

концентратора напряжений неприменимо вследствие недоступности упрочняющего инструмента к поверхности концентратора из-за более крупных габаритов по сравнению с геометрией соответствующих впадин. Поэтому в этом случае используют технологии опережающего поверхностного пластического деформирования (ОППД), когда первоначально упрочняется гладкая деталь, а затем наносится соответствующий концентратор напряжений. В результате удаления части упрочненного материала приповерхностного слоя происходит перераспределение напряжений и в области концентратора формируется локальное поле остаточных напряжений, с которым связывают, например, существенное увеличение предела выносливости в условиях многоциклового нагружения упрочненных деталей по сравнению с неупрочненными [12, 19–21], обусловленное торможением нераспространяющейся трещины усталости в области сжатия упрочненного материала [12, 19, 22]. При ОППД при нанесении единичного концентратора возникает вопрос об оптимальной величине области упрочнения гладкой детали для создания максимальных значений сжимающих ОН, поскольку упрочнение всей поверхности гладкой детали нецелесообразно в силу трудоемкости некоторых технологий упрочнения (обработка роликом, алмазное выглаживание и другие). Разрешение этого вопроса на примере упрочненной балки с полукруглым сквозным надрезом различного радиуса и является целью данной работы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается балка  $100 \times 10 \times 10$  мм, часть одной из граней упрочнена одним из методов ППД, а затем в соответствии с технологией ОППД в середине упрочненной части поверхности наносится полукруглый надрез радиуса  $\rho$  (см. рис. 1), вследствие чего происходит перераспределение остаточных напряжений, образованных после упрочнения части гладкой поверхности (залита цветом на рис. 1). Задача состоит в исследовании напряженно-деформированного состояния по глубине слоя от дна концентратора в зависимости от радиуса  $\rho$  и величины зоны упрочнения  $2k$ , при этом основной проблемой является определение оптимального значения величины  $k$ , увеличение которой практически уже не влияет на напряженно-деформированное состояние в области концентратора. Отметим, что распределение ОН в этом сечении играет ключевую роль в критериальных зависимостях для оценки предела выносливости при многоцикловом нагружении [12, 18–20].

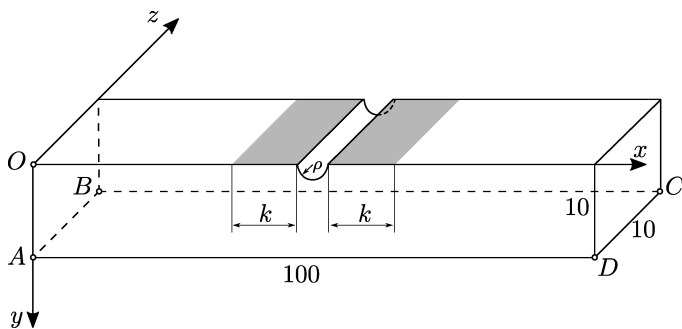


Рис. 1. Схематическое изображение упрочненной балки с концентратором напряжений  
[Figure 1. Schematic representation of a reinforced beam with a stress concentrator]

**2. Реконструкция напряженно-деформированного состояния в гладкой балке с полностью упрочненной гранью.** Рассмотрим сначала случай, когда упрочнена вся верхняя грань гладкой балки без надреза, изображенной на рис. 1. Введем декартову систему координат  $Oxyz$ , в которой плоскость  $xOz$  совмещена с упрочненной гранью, а ось  $Oy$  направлена по глубине слоя (рис. 1). В дальнейшем в модельных расчетах в качестве исходной информации используются экспериментальные данные для гладкой балки из сплава ЭП742 указанных на рис. 1 размеров после ультразвукового (механического) упрочнения одной из граней [23]. Для этой технологии упрочнения все компоненты тензоров ОН и пластических деформаций (ПД) зависят лишь от компоненты  $y$ , при этом недиагональные компоненты этих тензоров равны нулю [23, 24]. Обозначим через  $\sigma_i = \sigma_i(y)$ ,  $q_i = q_i(y)$  ( $i = x, y, z$ ) диагональные компоненты тензоров ОН и ПД соответственно, при этом для гладкой балки  $\sigma_x(y) = \sigma_z(y)$ , а  $\sigma_y(y) = 0$  [23, 24]. Задача реконструкции полей ОН и ПД в этом случае решена (см. [23, 24]) и основные расчетные зависимости имеют вид

$$\sigma_x = \sigma_z, \quad q_x = q_z = -\frac{1-\nu}{E}\sigma_x, \quad q_y = \frac{2(1-\nu)}{E}\sigma_x, \quad (1)$$

где  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Из соотношений (1) следует, что достаточно знать лишь экспериментальную зависимость для компоненты  $\sigma_x = \sigma_x(y)$ , а остальные компоненты тензоров ОН и ПД определяются из (1). Экспериментальные данные для  $\sigma_x = \sigma_x(y)$  в [23] приведены лишь для тонкого приповерхностного слоя глубиной около 200 мкм и представлены маркерами на рис. 2. Поэтому для использования (1) необходимо построить аналитическую аппроксимацию для этой компоненты и экстраполировать ее на все значения  $0 \leq y \leq H$  ( $H = 10$  мм — толщина балки) при выполнении условия самоуравновешенности

$$\int_0^H \sigma_x(y) dy = 0.$$

Для этого использовалась аппроксимация вида

$$\sigma_x(y) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left[-\left(\frac{y - y^*}{b}\right)^2\right], \quad (2)$$

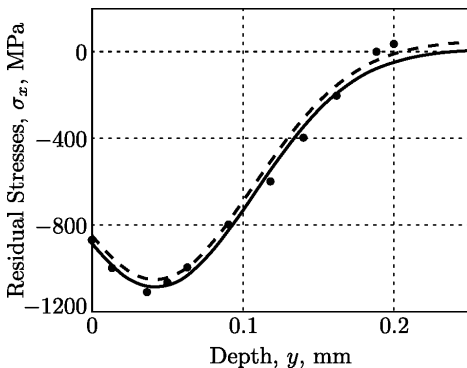


Рис. 2. Данные для компоненты  $\sigma_x = \sigma_x(y)$  после ультразвукового упрочнения поверхности балки из сплава ЭП742: экспериментальные (маркеры), расчетные (сплошная линия) по аппроксимации (2) и расчетные (штриховая линия) для термоупругой задачи

[Figure. 2. Data for the component  $\sigma_x = \sigma_x(y)$  after ultrasonic hardening of the surface of a beam made of EP742 alloy: experimental (markers), calculated (solid line) by approximation (2) and designed (dashed line) for the thermoelastic problem]

где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$ ,  $b$  — параметры, методика идентификации которых приведена в [23], а  $y^* = 0.034$  мм — координата локального минимума экспериментальной эпюры (см. рис. 2). Значения параметров аппроксимации (2) следующие:  $\sigma_0 = 13.38$  МПа,  $\sigma_1 = 1100.98$  МПа,  $b = 0.0928$  мм. Расчетные значения для зависимости (2) представлены на рис. 2 сплошной линией.

**3. Методика реконструкции остаточных напряжений в балке с полукруглым надрезом после ОППД.** Методика реконструкции ОН в области надреза после ОППД базируется на методе расчета по первоначальным деформациям, основы которого заложены в работе [1], где на качественном уровне при априорно заданных законах распределения пластических деформаций в приповерхностных слоях решены задачи распределения остаточных напряжений для простейших поверхностно упрочненных элементов конструкций.

Этот подход широко используется и в современных исследованиях в связи с возросшим спектром возможностей вычислительной техники и программного обеспечения [13, 14, 20, 24–27]. В основном используют изотропный характер задания первоначальных деформаций с фиксированным уровнем их величины по глубине упрочненного слоя. Так, в [20] с применением численного метода на основе МКЭ детально исследовано распределение напряжений в поверхностно упрочненном слое для цилиндрических и плоских деталей (гладких и с концентраторами напряжений) при моделировании равномерного упрочнения всей поверхности детали с учетом концентратора, равномерного упрочнения всей поверхности детали без упрочнения концентратора (впадины), равномерного упрочнения криволинейной части впадины концентратора без упрочнения поверхности детали. Получены на качественном уровне зависимости распределения остаточных напряжений по глубине слоя в зависимости от технологии упрочнения, геометрических параметров детали и концентратора, глубины залегания первоначальных пластических деформаций, что позволило провести сравнительный анализ эффективности схем упрочнения. В работах [13, 14, 24, 26, 27] использовались уже реальные экспериментальные эпюры распределения некоторых компонент тензора остаточных напряжений и на основе этой информации разработаны методы реконструкции напряженно-деформированного состояния после процедуры упрочнения, при этом краевая задача сводилась к решению фиктивной задачи термоупругости в неоднородном (по глубине слоя) температурном поле с учетом аналогии между температурными и остаточными пластическими деформациями.

Рассмотрим схему решения задачи для балки из сплава ЭП742.

1. На первом этапе определяются поля ОН и ПД в гладкой балке по методике, изложенной в п. 2, с использованием соотношений (1) и (2).
2. На втором этапе определенные по (1), (2) компоненты тензора остаточных ПД  $q_i = q_i(y)$  ( $i = x, y, z$ ) моделировались температурными деформациями с использованием соотношений

$$q_i(y) = \beta_i(T(y))[T(y) - T_0] \quad (i = x, y, z; 0 \leq y \leq H), \quad (3)$$

где  $T_0$  — некоторое фиксированное значение температуры на грани балки, противоположной упрочненной грани (см. рис. 1),  $\beta_i(T(y))$  — коэффициенты температурного расширения,  $T = T(y)$  — заданное температурное поле по координате  $y$ , при этом закон изменения температуры

может быть любым [24, 27]. Суть метода состоит в том, что известные остаточные пластические деформации (формулы (1)) приравняются к температурным деформациям (правая часть (3)). Для этого при заданных  $q_i(y)$  и  $T = T(y)$  по формуле (3) рассчитываются коэффициенты температурного расширения  $\beta_i = \beta_i(T(y))$ , которые и являются исходными данными для решения задачи термоупругости (например, в пакете ANSYS).

3. На третьем этапе на упрочненный гладкий образец наносится полукруглый надрез (см. рис. 1), т. е. удаляется часть материала с наведенными ОН и ПД. В результате в объеме балки с концентратором образуется неуравновешенное поле полных деформаций, которое трансформируется за счет перераспределения упругих деформаций, и балка с надрезом приходит в равновесное состояние. На этом этапе строится геометрическая конечно-элементная модель балки с надрезом с заданными по формуле (3) псевдотемпературными начальными деформациями (точнее, задаются  $T = T(y)$  и  $\beta_i = \beta_i(T(y))$  по оставшемуся после нанесения надреза объему из решения для гладкой балки).
4. На четвертом этапе стандартными методами на основе МКЭ решается фиктивная задача термоупругости относительно напряжений — начальные (псевдотемпературные) деформации фактически задаются через (3).

**4. Результаты расчетов и их анализ.** Численное исследование выполнено для значений радиуса надреза  $\rho = \{0.1; 0.3; 0.5\}$  мм и различных значений величины зоны упрочнения  $k = \{1; 2; 4; 6; 8; 10\}$  мм (см. рис. 1). Рассматривался также случай упрочнения всей грани при всех трех значениях  $\rho$ , что соответствует  $k = \{49.9; 49.7; 49.5\}$  мм. Распределение температуры  $T = T(y)$  в гладкой балке задавалось в соответствии с решением стационарной задачи теплопроводности, в которой на упрочненной поверхности задавалась температура  $T_1 = 400^\circ\text{C}$ , на противоположной ей грани —  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , а боковые грани теплоизолированы, т. е. рассматривалось решение задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода. В расчетах использовались справочные значения коэффициента температуропроводности для сплава ЭП742 в зависимости от температуры (приведены в [27]). В случае упрочнения части поверхности балки (заштрихована на рис. 1) температура  $T = T_1$  задавалась лишь на ней,  $T = T_0$  — на противоположной грани и распределение температуры  $T = T(y)$  в соответствии с (3) задавалось лишь в области под упрочненной частью балки, а в оставшейся части (вне области под упрочненной гранью) в начальный момент времени  $T = T_0$ .

Одной из особенностей решения этой задачи является учет условия пластической несжимаемости материала  $q_x + q_y + q_z = 0$ , используемого при реконструкции полей ОН. Для этого в краевой задаче термоупругости в качестве коэффициента Пуассона использована величина  $\nu = 0.499$ .

Геометрическое конечно-элементное моделирование с последующим численным решением реализовано в программном пакете ANSYS. Детали этой части работы аналогичны описанным в публикации [24].

Для сравнительного анализа результатов численного расчета на основе МКЭ с экспериментальными данными и данными по модели (1) рассмотрена бездефектная геометрическая модель (гладкая упрочненная балка). В каче-

стве иллюстрации на рис. 2 штриховой линией показаны результаты расчетов для остаточного напряжения  $\sigma_x = \sigma_x(y)$  в упрочненном слое на основе МКЭ, из анализа которых следует их хорошая коррелированность как с экспериментальными данными, так и с результатами расчетов по аппроксимации (2). Наблюдается также практически полное совпадение графиков для остаточных ПД по модели (1) с соответствующими графиками, полученными решением задачи термоупругости на основе МКЭ. При численном решении задач для гладкой балки и балки с концентратором использовались следующие граничные условия: ребро  $AB$  закреплялось жестко, а на ребре  $DC$  реализовано шарнирное опирание с возможностью перемещений лишь вдоль оси  $Ox$  (см. рис. 1). Центр полукруглого надреза находится на расстоянии  $x = 50$  мм.

Приведем и проанализируем результаты расчетов для ОН в балках с концентраторами при различных величинах зон упрочнения, полученных в результате численного решения задач на основе метода конечных элементов.

Наибольший интерес представляет распределение напряжений по глубине слоя в сечении от дна концентратора, т. е. в наименьшем сечении детали, поскольку интегральная величина  $\sigma_x = \sigma_x(h)$  ( $h$  — глубина слоя от дна концентратора) входит в критериальные зависимости для оценки повышения предела выносливости упрочненных деталей по отношению к неупрочненным в условиях многоциклового нагружения [12, 18–20]. В дальнейшем все графики распределения компонент тензора остаточных напряжений приведены именно для этого сечения.

Для бездефектной балки величина  $h$  соответствует глубине упрочненного слоя от верхней грани. На рис. 3, а приведены графики зависимости для напряжения  $\sigma_x = \sigma_x(h)$  для бездефектной балки в сечении при  $x = 50$  мм в зависимости от величины зоны упрочнения при  $k = 2$  мм,  $k = 6$  мм и  $k = 50$  мм (здесь упрочнена вся грань).

Из анализа результатов расчетов и представленных графиков следует, что в бездефектной балке распределение ОН в среднем сечении ( $x = 50$  мм) при  $k \geq 8$  мм практически не изменяется и близко к НДС гладкой балки с полностью упрочненной гранью. На рис. 3 (b, c, d) приведены графики распределения нормальных компонент тензора ОН при радиусе надреза  $\rho = 0.1$  мм. Здесь надрез находится в зоне упрочнения материала (в области его сжатия).

Отметим некоторые особенности полученных результатов.

Первая особенность состоит в появлении компоненты  $\sigma_y = \sigma_y(h)$ , которая в гладкой балке была нулевой.

Вторая особенность заключается в том, что при упрочнении всей грани компонента  $\sigma_x = \sigma_x(y)$  в концентраторе выше, чем у гладкой балки.

Третья особенность связана с тем, что компоненты  $\sigma_x = \sigma_x(y)$  и  $\sigma_z = \sigma_z(y)$  различаются, в гладкой балке они совпадают.

Из анализа данных расчетов и графиков вновь можно констатировать, что распределение ОН при  $k \geq 8$  мм практически стабилизируется и близко к случаю упрочнения всей грани. Этот же результат следует и для надрезов  $\rho = 0.3$  мм и  $\rho = 0.5$  мм (см. рис. 4), но в этом случае величина сжимающих напряжений  $\sigma_x = \sigma_x(h)$  (и остальных компонент тензора ОН) существенно меньше, чем при упрочнении всей грани балки. Это связано с тем, что глубина надреза велика по сравнению с упрочненным слоем (см. рис. 2).

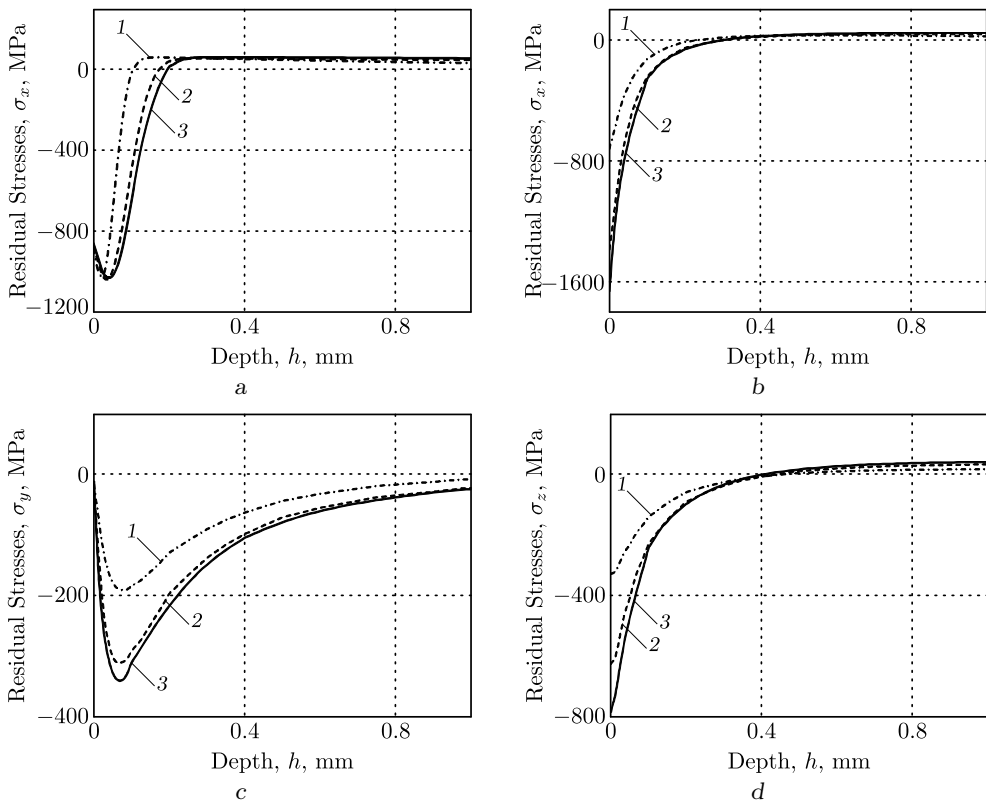


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений в гладкой бездефектной балке (а) и в наименьшем сечении балки с концентратором  $\rho = 0.1$  мм (b, c, d) при различных величинах области упрочнения. Цифры: 1 –  $k = 2$  мм; 2 –  $k = 6$  мм; 3 –  $k = 50$  мм (а),  $k = 49.9$  мм (b, c, d)

[Figure 3. Distribution of residual stresses in a smooth defect-free beam (a) and in the smallest section of a beam with a concentrator of  $\rho = 0.1$  mm (b, c, d) at various values of the hardening region. Labels: 1 –  $k = 2$  mm; 2 –  $k = 6$  mm; 3 –  $k = 50$  mm (a),  $k = 49.9$  mm (b, c, d)]

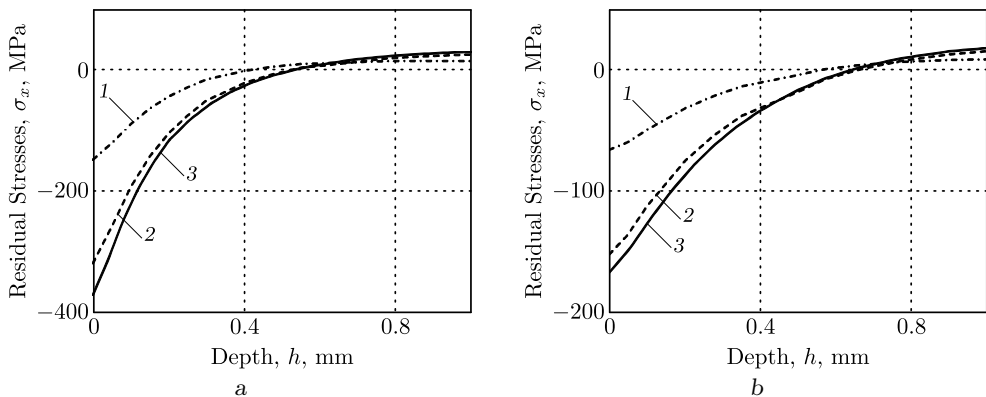


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений  $\sigma_x = \sigma_x(h)$  в наименьшем сечении балки с концентратором  $\rho = 0.3$  мм (а) и  $\rho = 0.5$  мм (b) при различных величинах области упрочнения. Цифры: 1 –  $k = 2$  мм; 2 –  $k = 6$  мм; 3 –  $k = 49.7$  мм (а),  $k = 49.5$  мм (b)

[Figure 4. Distribution of residual stresses  $\sigma_x = \sigma_x(h)$  in the smallest section of a beam with a concentrator of  $\rho = 0.3$  mm (a) and  $\rho = 0.5$  mm (b) at various values of the hardening region. Labels: 1 –  $k = 2$  mm; 2 –  $k = 6$  mm; 3 –  $k = 49.7$  mm (a),  $k = 49.5$  mm (b)]

Выполненные исследования показывают, что при применении технологии ОППД под изготовление концентратора напряжений существует оптимальная зона упрочнения, увеличение которой не приводит к изменения НДС в минимальном сечении балки с надрезом. Этот результат можно применять для назначения оптимальных режимов упрочнения поверхности призматических тел при использовании ОППД.

### Выводы.

1. Разработана методика численного исследования влияния величины области упрочнения грани балки с надрезом на напряженно-деформированное состояние в наименьшем сечении балки.
2. Выполнено детальное исследование полей остаточных напряжений в наименьшем сечении балки с надрезом в широком диапазоне величины зоны упрочнения и радиусов надреза  $\rho = \{0.1; 0.3; 0.5\}$  мм. Показано, что при величине зоны упрочнения  $k \geq 8$  мм (примерно 16–20 % от площади всей грани) напряженно-деформированное состояние в наименьшем сечении практически стабилизируется.
3. Показано, что если радиус полукруглого надреза меньше толщины упрочненного слоя (области сжатия материала), происходит увеличение (по модулю) компоненты  $\sigma_x = \sigma_x(h)$  в наименьшем сечении балки по сравнению с этой величиной в бездефектной балке при всех  $k \geq 8$  мм, а если радиус надреза больше толщины упрочненного слоя, то наблюдается уменьшение (по модулю) этой компоненты остаточных напряжений.

**Конкурирующие интересы.** Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторская ответственность.** Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00550\_a).

### Библиографический список

1. Биргер И. А. *Остаточные напряжения*. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
2. Гринченко И. Г. *Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов*. М.: Машиностроение, 1971. 120 с.
3. Сулима А. М., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. *Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин*. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
4. Кудрявцев И. В. *Поверхностный наклеп для повышения прочности и долговечности деталей машин поверхностным пластическим деформированием*. М.: Машиностроение, 1969. 100 с.
5. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнение деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев // *Вестник двигателестроения*, 2006. № 2. С. 8–16.
6. Brockman R. A., Braisted W. R., Olson S. E., et. al. Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening // *Intern. J. Fatigue*, 2012. vol. 36, no. 1. pp. 96–108. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.011>.
7. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // *Intern. J. Fatigue*, 2008. vol. 30, no. 8. pp. 1398–1408. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010>.



8. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et. al. Residual stresses and fatigue performance // *Eng. Fail. Analysis*, 2007. vol. 14, no. 2. pp. 384–395. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011>.
9. Majzooobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // *Mater. Sci. Eng. A*, 2009. vol. 516, no. 1–2. pp. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>.
10. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1 – Effect of shot peening on fatigue resistance // *Mater. Sci. Technol.*, 2013. vol. 29, no. 6. pp. 673–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>.
11. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // *Mater. Design*, 2012. vol. 35. pp. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>.
12. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочнённых деталей по остаточным напряжениям*. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2012. 125 с.
13. Саушкин М. Н., Куров А. Ю. Анализ напряженного состояния в надрезах полукруглого профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования сплошных цилиндрических образцов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №1(26). С. 133–140. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1039>.
14. Радченко В. П., Куров А. Ю. Влияние анизотропии поверхностного пластического упрочнения на формирование остаточных напряжений в цилиндрических деталях с надрезами полукруглого профиля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 675–690. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1513>.
15. Сазанов В. П. Исследование закономерностей остановки усталостной трещины в цилиндрическом образце с надрезом // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2018. Т. 17, № 1. С. 160–169. <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169>.
16. Doremus L., Cormier J., Villechaise P., et. al. Influence of residual stresses on the fatigue crack growth from surface anomalies in a nickel-based superalloy // *Mater. Sci. Eng. A*, 2015. vol. 644. pp. 234–246. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.07.077>.
17. Fleury R. M. N., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys // *Intern. J. Fatigue*, 2017. vol. 105. pp. 27–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015>.
18. Павлов В. Ф., Букатый А. С., Семенова О. Ю. Прогнозирование предела выносливости поверхностно-упрочненных деталей с концентраторами напряжений // *Вестник машиностроения*, 2019. № 1. С. 3–7.
19. Иванов С. И., Шатунов М. П., Павлов В. Ф. Влияние остаточных напряжений на выносливость образцов с надрезом / *Вопросы прочности элементов авиационных конструкций*. Т. 3. Куйбышев: КуАИ, 1974. С. 88–95.
20. Павлов В. Ф., Столяров А. К., Вакулюк В. С., Кирпичев В. А. *Расчет остаточных напряжений в деталях с концентраторами напряжений по первоначальным деформациям*. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2008. 124 с.
21. Вакулюк В. С., Павлов В. Ф., Сазанов В. П., Семенов О. Ю. Оценка влияния поверхностного упрочнения на предел выносливости деталей в условиях концентрации напряжений / *Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела* (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия). Т. 1. Самара: СамГТУ, 2017. С. 103–106.
22. Павлов В. Ф., Письмаров А. В., Сазанов В. П., Сургутанов Н. А. Исследование зависимости коэффициента интенсивности напряжений от глубины трещины в деталях с надрезом / *Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела* (18–22 сентября 2017 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: СамГТУ, 2017. С. 132–135.

23. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Бочкова Т. И. Математическое моделирование формирования и релаксации остаточных напряжений в плоских образцах из сплава ЭП742 после ультразвукового упрочнения в условиях высокотемпературной ползучести // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2016. № 1. С. 93–112. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>.
24. Радченко В. П., Шишкин Д. М. Метод реконструкции остаточных напряжений в призматическом образце с надрезом полукруглого профиля после опережающего поверхностного пластического деформирования // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2020. Т. 20, № 4. С. 478–492. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492>.
25. Вакулюк В. С. Исследование влияния толщины упрочненного слоя на остаточные напряжения во впадине концентратора методом первоначальных деформаций // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 222–225. <https://doi.org/10.14498/vsgtu782>.
26. Сазанов В. П., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С., Павлов В. Ф. Определение первоначальных деформаций в упрочненном слое цилиндрической детали методом конечно-элементного моделирования с использованием расчётного комплекса PATRAN/NASTRAN // *Вестн. Уфим. гос. авиац. техн. ун-та*, 2015. Т. 19, № 2. С. 35–40.
27. Радченко В. П., Афанасьева О. С., Глебов В. Е. Влияние технологии поверхностного пластического упрочнения, остаточных напряжений и граничных условий на выпучивание балки // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2020. № 1. С. 87–98. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07>.

MSC: 74A10, 74D10

## The influence of the dimensions of the surface hardening region on the stress-strain state of a beam with a notch of a semicircular profile

© V. P. Radchenko, D. M. Shishkin

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

The influence of a size of the surface-plastic hardening region on the stress-strain state of a beam with a notch of a semicircular profile is investigated. The problem is reduced to a boundary value problem of fictitious thermoelasticity with the initial (plastic) deformations modeled by temperature anisotropic deformations in an inhomogeneous temperature field. The solution is based on the finite element method.

For model calculations, experimental data on the distribution of residual stresses in a smooth beam made of EP742 alloy after ultrasonic mechanical hardening were used as initial information. A variative numerical analysis of the effect of the notch radius and the size of the hardening zone of the beam face on the distribution of the components of the residual stress tensor in the smallest section from the bottom of the concentrator is carried out.

It is shown that when the hardening zone is more than 16–20% of the entire face area, the stress-strain state in the smallest section is practically stabilized. It was established that if the radius of the semicircular notch is less than the thickness of the hardened layer (the material compression area), an increase (in modulus) of the normal longitudinal component of the residual stress tensor occurs, and if the radius of the notch is greater than the thickness of the hardened layer, then a decrease (in modulus) of this value is observed in comparison with a similar component for a smooth reinforced beam for all values of the hardening zone more than 16–20% of the entire face area of the beam.

An experimental verification of the developed numerical method based on the finite element method for a beam with a fully hardened face is performed.

**Keywords:** advanced surface plastic hardening, area of hardening, semicircular notch, beam, EP742 alloy, residual stresses.

Received: 25<sup>th</sup> September, 2020 / Revised: 11<sup>th</sup> November, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2020

---


## Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


**Please cite this article in press as:**

Radchenko V. P., Shishkin D. M. The influence of the dimensions of the surface hardening region on the stress-strain state of a beam with a notch of a semicircular profile, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 663–676. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1828> (In Russian).

**Authors' Details:**

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Dmitry M. Shishkin  <https://orcid.org/0000-0003-3205-2262>

Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: shishkin.dim@yandex.ru

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** We are fully responsible for submitting the final manuscript in print. Each of us has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00550\_a).

## References

1. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 232 pp. (In Russian)
2. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detalei iz zharoprochnykh i titanovykh splavov* [Hardening Parts Made of High-Resistant and Titanium Alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971, 120 pp. (In Russian)
3. Sulima A. M., Shuvalov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoistva detalei mashin* [Surface Layer and Performance of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 240 pp. (In Russian)
4. Kudryavtsev I. V. *Poverkhnostnyi naklep dlia povysheniia prochnosti i dolgovechnosti detalei mashin poverkhnostnym plasticheskim deformirovaniem* [Surface Strain Hardening to Increase the Strength and Durability of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1969, 100 pp. (In Russian)
5. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on the plastic deformation of the surface layers, *Vestn. Dvigatel.*, 2006, no. 2, pp. 8–16 (In Russian).
6. Brockman R. A., Braisted W. R., Olson S. E., et. al. Prediction and characterization of residual stresses from laser shock peening, *Intern. J. Fatigue*, 2012, vol. 36, no. 1, pp. 96–108. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.08.011>.
7. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation, *Intern. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 8, pp. 1398–1408. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010>.
8. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et. al. Residual stresses and fatigue performance, *Eng. Fail. Analysis*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 384–395. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011>.
9. Majzooobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effects of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6, *Mater. Sci. Eng. A*, 2009, vol. 516, no. 1–2, pp. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>.
10. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. Part 1 – Effect of shot peening on fatigue resistance, *Mater. Sci. Technol.*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 673–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>.
11. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach, *Mater. Design*, 2012, vol. 35, pp. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>.
12. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S. *Prognozirovaniie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniiam* [Prediction of Fatigue Resistance of Surface Reinforced Parts by Residual Stresses]. Samara, Samara Sci. Center of RAS, 2012, 125 pp. (In Russian)
13. Saushkin M. N., Kurov A. Yu. Analysis of stress state in semicircular profile notches after preliminary surface plastic deformation of solid cylindrical specimens, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 1(26), pp. 133–140 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1039>.
14. Radchenko V. P., Kurov A. Yu. Effect of anisotropy of surface plastic hardening on formation of residual stresses in cylindrical samples with semicircular notch, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn.*

- Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 675–690 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1513>.
15. Sazanov V. P. Analysis of the mechanism of fatigue crack arrest in a cylindrical notched specimen, *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2018, vol. 17, no. 1, pp. 160–169 (In Russian). <https://doi.org/10.18287/2541-7533-2018-17-1-160-169>.
  16. Doremus L., Cormier J., Villedaise P., et. al. Influence of residual stresses on the fatigue crack growth from surface anomalies in a nickel-based superalloy, *Mater. Sci. Eng. A*, 2015, vol. 644, pp. 234–246. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2015.07.077>.
  17. Fleury R. M. N., Nowell D. Evaluating the influence of residual stresses and surface damage on fatigue life of nickel superalloys, *Intern. J. Fatigue*, 2017, vol. 105, pp. 27–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2017.08.015>.
  18. Pavlov V. F., Bukatyi A. S., Semyonova O. Yu. Forecasting of the endurance limit of surface-hardened parts with stress concentrators, *Russian Engineering Research*, 2019, no. 1, pp. 3–7 (In Russian).
  19. Ivanov S. I., Shatunov M. P., Pavlov V. F. Influence of residual stresses on notched specimen endurance, In: *Problems of Strength of Aircraft Structure Elements*, vol. 3. Kuibyshev, Kuibyshev Aviation Inst., 1974, pp. 88–95 (In Russian).
  20. Pavlov V. F., Stolyarov A. K., Vakulyuk V. S., Kirpichev V. A. *Raschet ostatochnykh napriazhenii v detaliakh s kontsentratorami napriazhenii po pervonachal'nyim deformatsiiam* [Calculation of Residual Stresses in Parts with Stress Concentrators by Initial Deformations]. Samara, Samara Sci. Center of RAS, 2008, 124 pp. (In Russian)
  21. Vakulyuk V. S., Pavlov V. F., Sazanov V. P., Semyonova O. Yu. The evaluation of the surface hardening influence on the endurance limit of parts under stress concentration conditions, In: *Proceedings of the Tenth Russian Conference on Solid Mechanics* (September, 18–22, 2017, Samara, Russian Federation), vol. 1. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, pp. 103–106 (In Russian).
  22. Pavlov V. F., Pis'marov A. V., Sazanov V. P., Surgutanov N. A. Investigation of the dependence of the stress intensity factor on the crack depth in the notched details, In: *Proceedings of the Tenth Russian Conference on Solid Mechanics* (September, 18–22, 2017, Samara, Russian Federation), vol. 2. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, pp. 132–135 (In Russian).
  23. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of the residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after the ultrasonic hardening under the hightemperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 1, pp. 93–112 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.1.07>.
  24. Radchenko V. P., Shishkin D. M. The method of reconstruction of residual stresses in a prismatic specimen with a notch of a semicircular profile after advanced surface plastic deformation, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 478–492 (In Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-478-492>.
  25. Vakuljuk V. S. Investigation of influence of thickness hardened layer on the residual stresses in basin concentrator using initial strain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 1(20), pp. 222–225 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu782>.
  26. Sazanov V. P., Kirpichev V. A., Vakulyuk V. S., Pavlov V. F. The definition of initial deformations in the cylindrical parts surface layer by Finite Elements Modeling method using PATRAN/NASTRAN program complex, *Vestn. Ufimsk. Gos. Aviats. Techn. Univ.*, 2015, vol. 19, no. 2, pp. 35–40 (In Russian).
  27. Radchenko V. P., Afanaseva O. S., Glebov V. E. The effect of surface plastic hardening technology, residual stresses and boundary conditions on the buckling of a beam, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 87–98 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.07>.



УДК 539.3

## Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра

© Д. А. Шляхин, М. А. Кальмова

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра при удовлетворении на его лицевых поверхностях граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода. Рассматривается случай, когда скорость изменения температурного поля не оказывает влияние на инерционные характеристики упругой системы, что позволяет включить в исходные расчетные соотношения рассматриваемой задачи линейные уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности относительно радиальной компоненты вектора перемещений, электрического потенциала, а также функции изменения температурного поля. В расчетах применяется классический закон теплопроводности Фурье.

Для решения задачи используется математический аппарат неполного разделения переменных в виде обобщенного биортогонального конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор-функций двух однородных краевых задач. Важным моментом в процедуре структурного алгоритма данного метода является выделение сопряженного оператора, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние, температурное и электрическое поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном внешнем воздействии. Анализ численных результатов позволяет определить толщину стенки цилиндра, при которой электрическое поле приводит к перераспределению температурного поля. Установлено, что скорость изменения объема пьезокерамического тела при внешнем температурном воздействии не оказывает существенного влияния на температурное поле.

### Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 677–691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.

### Сведения об авторах

Дмитрий Аверкиевич Шляхин <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

доктор технических наук; заведующий кафедрой; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Мария Александровна Кальмова <https://orcid.org/0000-0001-9212-8631>

старший преподаватель; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: kalmova@inbox.ru

Разработанный алгоритм расчета находит свое применение при проектировании нерезонансных пьезоэлектрических датчиков температуры.

**Ключевые слова:** длинный пьезокерамический цилиндр, связанная задача термоэлектроупругости, нестационарное температурное воздействие, конечные интегральные преобразования.

Получение: 31 апреля 2020 г. / Исправление: 19 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 17 декабря 2020 г.

---

**Введение.** В настоящее время в измерительных приборах широко используются пьезоэлектрические датчики температуры резонансного и нерезонансного классов. Их работа основана на зависимости электрического поля, индуцируемого в пьезокерамическом элементе, от величины внешнего температурного воздействия [1–4]. Для расширения функциональных возможностей датчиков данного типа возникает необходимость углубленного анализа нестационарных процессов, позволяющего понять эффект взаимодействия механических, температурных и электрических полей.

Математическая формулировка начально-краевых задач, описывающих связанность термоэлектроупругих полей, включает систему несамоспряженных дифференциальных уравнений, исследование которых в последнее время, как правило, проводится при использовании численных методов [5, 6]. Однако достаточно слабые эффекты взаимодействия полей различной физической природы удастся проанализировать только с помощью замкнутых аналитических решений. При этом проблема интегрирования исходных расчетных соотношений и построения общего решения приводит к проведению расчетов в упрощенной постановке, а именно исследуются несвязанные задачи [4, 7] или анализируются бесконечно длинные тела [8, 9].

Замкнутые решения динамических задач термоэлектроупругости представлены в немногих работах [4, 7–9]. В работе [4] на основании известных характеристик вынужденных стационарных электроупругих колебаний исследовалась плотность распределения температуры по длине конструкции. Статья [7] посвящена анализу напряженно-деформированного состояния длинного полого цилиндра в случае теплового удара без учета влияния электрического потенциала на термоупругие поля.

В [8, 9] рассматриваются связанные задачи для однородного и неоднородного пьезокерамических неограниченных слоев. Статья [8] посвящена анализу дисперсионных свойств тепловых и электроупругих волн, а в [9] рассматривалась нестационарная задача при действии тепловой и электрической нагрузок. Использование преобразования Лапласа позволило сформулировать в пространстве изображений интегральное уравнение Фредгольма, которое реализовывалось численным методом.

Целью настоящей работы является решение связанной нестационарной задачи термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра при действии на его поверхностях температурной нагрузки (граничные условия 1 рода) и учете конвекционного теплообмена с окружающей средой (граничные условия 3 рода) [10]. Рассматривается случай, когда скорость изменения нагрузки существенно меньше скорости распространения упругих волн, что позволяет не принимать во внимание инерционные свойства конструкции и использовать в расчетах уравнения равновесия [11, 12].

**1. Постановка задачи.** Пусть полый длинный незакрепленный пьезокерамический цилиндр занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z)$  область  $\Omega: \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty\}$ . Рассмотрим случай действия на его цилиндрических поверхностях нестационарной нагрузки в виде функций изменения температуры от времени  $t_* - \omega_1^*(t_*)$  ( $r_* = a$ ),  $\omega_2^*(t_*)$  ( $r_* = b$ ) (граничные условия 1 рода). Лицевые электродированные поверхности элемента короткозамкнуты.

В общем случае дифференциальные уравнения равновесия, электростатики и теплового баланса на основании классического закона теплопроводности Фурье имеют вид [13–15]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} = 0, \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla} D_r = 0, \quad T_0 \frac{\partial s}{\partial t_*} = \Lambda \tilde{\nabla} \frac{\partial \Theta^*}{\partial r_*}. \quad (2)$$

Уравнения осесимметричного состояния электроупругой анизотропной среды при радиальной поляризации пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса 6 мм записываются следующим образом [8]:

$$\sigma_{rr} = C_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{13} \frac{U^*}{r_*} + e_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{33} \Theta^*, \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + e_{31} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} - \gamma_{11} \Theta^*, \quad (4)$$

$$D_r = -\varepsilon_{33} \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*} + e_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + e_{31} \frac{U^*}{r_*} + g_3 \Theta^*, \quad (5)$$

а объемная плотность энтропии  $s(r_*, t_*)$  при разложении в ряд Тейлора с учетом условия  $\Theta^*/T \ll 1$  ( $\Theta^* = T - T_0$ ;  $\Theta^*$ ,  $T$ ,  $T_0$  — соответственно приращение, текущая температура и температура первоначального состояния тела, при котором отсутствуют механические напряжения), определяется равенством [9]:

$$s = \gamma_{33} \tilde{\nabla} U^* + k \frac{\Theta^*}{T_0} - g_3 \frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}. \quad (6)$$

В равенствах (1)–(6)  $\sigma_{rr}(r_*, t_*)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r_*, t_*)$  — компоненты тензора механических напряжений;  $U^*(r_*, t_*)$ ,  $D_r(r_*, t_*)$  — радиальные составляющие векторов перемещений и индукции электрического поля;  $\phi^*(r_*, t_*)$  — потенциал электрического поля;  $C_{ms}$ ,  $E_{ms}$ ,  $\varepsilon_{33}$  — модули упругости, пьезомодули и коэффициент диэлектрической проницаемости электроупругого материала,  $m, s = 1, 2, 3$ ;  $\Lambda$ ,  $k$  — коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости материала;  $\gamma_{11}$ ,  $\gamma_{33}$  — компоненты тензора температурных напряжений;  $g_3$  — компонента тензора пироккоэффициентов;  $\tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r_*} + \frac{1}{r_*}$ .

В результате подстановки (3), (6) в (1) получаем систему дифференциальных уравнений термоэлектроупругости и краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме:

$$\nabla \frac{\partial U}{\partial r} - a_1 \frac{U}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \Theta + a_3 \frac{\Theta}{r} = 0, \quad (7)$$



$$-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial U}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + a_6 \nabla \Theta = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \left( a_7 \nabla U + \Theta - a_8 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0; \quad (9)$$

$$r = R, r = 1: \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \Theta|_{r=1} = \omega_2; \quad (10)$$

$$t = 0: \quad U = \phi = \Theta = 0; \quad (11)$$

где

$$\{\Theta, \omega_1, \omega_2\} = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \{\Theta^*, (\omega_1^* - T_0), (\omega_2^* - T_0)\}, \quad \{U, r, R\} = \frac{1}{b} \{U^*, r_*, a\},$$

$$\phi = \frac{e_{33}}{C_{33}b} \phi^*, \quad t = \frac{\Lambda}{kb^2} t^*, \quad a_1 = \frac{C_{11}}{C_{33}}, \quad a_2 = \frac{e_{31}}{e_{33}}, \quad a_3 = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}},$$

$$a_4 = \frac{e_{33}^2}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_5 = \frac{e_{31}e_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_6 = \frac{g_3e_{33}}{\gamma_{33}\varepsilon_{33}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}^2}{C_{33}k} T_0,$$

$$a_8 = \frac{\gamma_{33}g_3}{e_{33}k} T_0, \quad a_9 = \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

**2. Построение общего решения.** На первом этапе решения выполняется процедура приведения неоднородных граничных условий (10) к однородным, что позволяет в дальнейшем для решения рассматриваемой задачи использовать биортогональный метод конечных интегральных преобразований [16]. Для этого вводятся новые функции  $u(r, t)$ ,  $\chi(r, t)$ , связанные с  $U(r, t)$ ,  $\Theta(r, t)$  следующим образом:

$$U(r, t) = H_1(r, t) + u(r, t), \quad \Theta(r, t) = H_2(r, t) + \chi(r, t), \quad (12)$$

где  $H_1(r, t) = f_1(r)\omega_1 + f_2(r)\omega_2$ ,  $H_2(r, t) = f_3(r)\omega_1 + f_4(r)\omega_2$ .

Подстановка (12) в (7), (10), (11), при удовлетворении условий

$$\begin{aligned} \frac{df_1(r)}{dr} \Big|_{r=R} + a_9 \frac{f_1(R)}{R} &= 1, & \frac{df_1(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_9 f_1(1) &= 0, \\ \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_9 \frac{f_2(R)}{R} &= 0, & \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=1} + a_9 f_2(1) &= 1, \\ f_3(R) = f_4(1) &= 1, & f_3(1) = f_4(R) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

позволяет получить новую начально-краевую задачу относительно функций  $u(r, t)$ ,  $\phi(r, t)$ ,  $\chi(r, t)$  с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial u}{\partial r} - a_1 \frac{u}{r^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_2 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nabla \chi + a_3 \frac{\chi}{r} &= R_1, \\ -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_4 \nabla \frac{\partial u}{\partial r} + a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + a_6 \nabla \chi &= R_2, \\ \nabla \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \left( a_7 \nabla u + \chi - a_8 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= R_3; \end{aligned} \quad (14)$$

$$r = R, r = 1: \frac{\partial u}{\partial r} + a_9 \frac{u}{r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \phi = \chi = 0; \quad (15)$$

$$t = 0 : u = -H_1|_{t=0}, \quad \phi = 0, \quad \chi = -H_2|_{t=0}; \quad (16)$$

где

$$R_1 = -\nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} + a_1 \frac{H_1}{r^2} + \nabla H_2 - a_3 \frac{H_2}{r}, \quad R_2 = -a_4 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_5 \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} - a_6 \nabla H_2, \\ R_3 = a_7 \nabla \frac{\partial H_1}{\partial t} - \nabla \frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial H_2}{\partial t}.$$

Начально-краевую задачу (14)–(16) решаем, используя структурный алгоритм биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [16]. Для этого вводим на сегменте  $[R, 1]$  КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований  $K_1(\lambda_i, r)$ ,  $K_2(\lambda_i, r)$ ,  $K_3(\lambda_i, r)$ ,  $N_1(\mu_i, r)$ ,  $N_2(\mu_i, r)$ ,  $N_3(\mu_i, r)$ :

$$G(\lambda_i, t) = \int_R^1 \left( a_7 \nabla u(r, t) + \chi(r, t) - a_8 \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} \right) r K_3(\lambda_i, r) dr, \quad (17)$$

$$\{u(r, t), \phi(r, t), \chi(r, t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^2,$$

$$\|K_i\|^2 = \int_R^1 K_3(\lambda_i, r) N_3(\lambda_i, r) r dr,$$

где  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  — собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных  $K_k(\lambda_i, r)$  и инвариантных  $N_k(\mu_i, r)$  компонент вектор-функций ядер КИП ( $k = 1, 2, 3$ ).

В результате использования алгоритма КИП [16] получаем счетное множество задач Коши для трансформанты  $G(\lambda_i, t)$ :

$$\frac{\partial G_i}{\partial t} + \lambda_i G_i = -F_H, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

$$t = 0 : G_0 = - \int_R^1 [H_1(r, 0) K_1(\lambda_i, r) + H_2(r, 0) K_3(\lambda_i, r)] r dr, \quad (19)$$

решения которых имеют вид

$$G_i = G_0 \exp(-\lambda_i t) - \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_i (\tau - t) d\tau, \\ F_H = \int_R^1 (R_1 K_1 + R_2 K_2 + R_3 K_3) r dr, \quad (20)$$

а также две системы дифференциальных уравнений и граничные условия относительно неизвестных компонент преобразований  $K_j = K_j(\lambda_i, r)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots$ :

$$\nabla \frac{dK_1}{dr} - a_1 \frac{K_1}{r^2} - a_4 \nabla \frac{dK_2}{dr} + \frac{a_5}{r} \frac{dK_2}{dr} - \lambda_i a_7 \frac{dK_3}{dr} = 0, \\ \nabla \frac{dK_1}{dr} + a_2 \frac{1}{r} \frac{dK_1}{dr} + \nabla \frac{dK_2}{dr} + \lambda_i a_8 \nabla K_3 = 0, \\ \frac{dK_1}{dr} + a_3 \frac{K_1}{r} + a_6 \frac{dK_2}{dr} + \nabla \frac{dK_3}{dr} + \lambda_i K_3 = 0; \quad (21)$$

$$r = R, r = 1 : \frac{dK_1}{dr} + a_9 \frac{K_1}{r} - a_4 \frac{dK_2}{dr} = 0, \quad K_2 = K_3 = 0; \quad (22)$$

и  $N_j = N_j(\mu_i, r)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \nabla \frac{dN_1}{dr} - a_1 \frac{N_1}{r^2} + \nabla \frac{dN_2}{dr} - \frac{a_2}{r} \frac{dN_2}{dr} - \nabla N_3 + a_3 \frac{N_1}{r} &= 0, \\ \nabla \frac{dN_2}{dr} - a_4 \nabla \frac{dN_1}{dr} - \frac{a_5}{r} \frac{dN_1}{dr} - a_6 \nabla N_3 &= 0, \\ \nabla \frac{dN_3}{dr} + \mu_i \left[ a_7 \nabla N_1 + N_3 - a_8 \frac{dN_2}{dr} \right] &= 0; \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = R, r = 1 : \frac{dN_1}{dr} + a_9 \frac{N_1}{r} + \frac{dN_2}{dr} = 0, \quad N_2 = N_3 = 0. \quad (24)$$

Задачи для трансформанты (18), (19)  $G_i$  и сопряженная однородная задача (21), (22) относительно компонент ядра  $K_1(\lambda_i, r)$ ,  $K_2(\lambda_i, r)$ ,  $K_3(\lambda_i, r)$  получены в результате применения вырожденного преобразования (17), а соотношения (23), (24) построены путем использования к полученной (сопряженной) задаче (21), (22) аналогичного (17) КИП с компонентами ядра  $N_1(\mu_i, r)$ ,  $N_2(\mu_i, r)$ ,  $N_3(\mu_i, r)$ .

Системы (21), (23) при использовании условий

$$\frac{a_1 + a_2 a_5}{1 + a_4} \approx 1, \quad \{a_7, a_8\} \ll \{a_1, \dots, a_6\},$$

справедливых для пьезокерамических материалов, а также введении новых функций

$$\{K_4, N_4\} = r \frac{d\{K_2, N_2\}}{dr}, \quad \{K_5, N_5\} = r\{K_3, N_3\},$$

приводятся к следующим разрешающим уравнениям:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( \frac{1}{r^2} + \lambda_i \right) \right] K_5 = D_{1i} \frac{p_1}{r^2}, \quad (25)$$

$$\left( \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \mu_i \right) \left( \frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) N_5 = E_{1i} \frac{p_2}{r^2}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= a_6 + \frac{a_5(a_3 - a_2 a_6)}{1 + a_4}, \quad p_2 = \frac{\mu_i a_8 (b_1^2 - b_2^2) b_1 + b_2 (a_2 b_1^2 - a_8 b_2)}{b_1^3}, \\ b_1 &= (a_4 a_8 - a_7), \quad b_2 = (a_5 a_8 - a_7). \end{aligned}$$

Общие решения дифференциальных уравнений (25), (26) имеют вид

$$K_5 = \sum_{n=1}^5 D_{ni} F_n(\lambda_i, r), \quad N_5 = \sum_{n=1}^5 E_{ni} P_n(\mu_i, r), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

где

$$F_1(\lambda_i, r) = -p_1 \frac{\pi r}{2} \left[ Y_0(B_i r) \int J_0(B_i r) dr - J_0(B_i r) \int Y_0(B_i r) dr \right],$$

$$\begin{aligned} \{F_2(\lambda_i, r), F_3(\lambda_i, r)\} &= r\{J_0(B_i r), Y_0(B_i r)\}, \\ F_4(\lambda_i, r) &= \frac{\pi B}{2} \left[ r Y_0(B_i r) \int J_0(B_i r) r^{-1} dr - r J_0(B_i r) \int Y_0(B_i r) r^{-1} dr \right], \\ F_5(\lambda_i, r) &= \frac{r}{\lambda_i}, \quad B_i = \sqrt{\lambda_i}, \\ P_1(\mu_i, r) &= p_2 r \left[ \int V_1(\mu_i, r) I_1(A_i r) dr - \int V_2(\mu_i, r) \tilde{K}_1(A_i r) dr \right], \\ P_2(\mu_i, r) &= r \left[ \int V_3(\mu_i, r) I_1(A_i r) dr - \int V_4(\mu_i, r) \tilde{K}_1(A_i r) dr \right], \\ \{P_3(\mu_i, r), P_4(\mu_i, r)\} &= r\{I_0(A_i r), \tilde{K}_0(A_i r)\}, \quad P_5 = r, \\ V_1(\mu_i, r) &= \int r^{-1} \tilde{K}_1(A_i r) dr, \quad V_2(\mu_i, r) = \int r^{-1} I_1(A_i r) dr, \\ V_3(\mu_i, r) &= \int r^{-2} \tilde{K}_1(A_i r) dr, \quad V_4(\mu_i, r) = \int r^{-2} I_1(A_i r) dr, \quad A_i = \sqrt{\mu_i}. \end{aligned}$$

В равенствах (25)–(27)  $D_{1i}, \dots, D_{5i}, E_{1i}, \dots, E_{5i}$  — постоянные интегрирования;  $J_v(\cdot), Y_v(\cdot), I_v(\cdot), \tilde{K}_v(\cdot)$  — обыкновенные и модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода порядка  $v$ .

Использование дифференциальных зависимостей, полученных в процессе приведения (21), (23) к (25), (26), позволяет найти выражения для функций  $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r)$ .

Подстановка  $K_1(\lambda_i, r), K_2(\lambda_i, r), K_3(\lambda_i, r), N_1(\mu_i, r), N_2(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)$  в соответствующие граничные условия (22), (24) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых дает возможность определить постоянные интегрирования  $D_{1i}, \dots, D_{6i}, E_{1i}, \dots, E_{6i}$  и собственные значения  $\lambda_i, \mu_i$ .

Окончательные выражения функций  $U(r, t), \phi(r, t), \Theta(r, t)$  получим, применяя к трансформанте (20) формулы обращения (17). В результате с учетом (12) имеем

$$\begin{aligned} \{U(r, t), \Theta(r, t)\} &= \{H_1(r, t), H_2(r, t)\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) \{N_1(\mu_i, r), N_3(\mu_i, r)\} \|K_i\|^{-2}, \\ \phi(r, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) N_2(\mu_i, r) \|K_i\|^{-2}. \end{aligned}$$

Функции  $H_1(r, t), H_2(r, t)$  определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$\nabla \frac{\partial H_m}{\partial r} = 0, \quad m = 1, 2, \quad (28)$$

что позволяет существенно упростить правые части системы (14). В результате решения (28) при удовлетворении условий (13) получаем выражения для  $f_1(r) - f_4(r)$ :

$$f_1(r) = \frac{R}{a_9} \left[ f_3(r) - \frac{1}{a_9 \ln R} \right], \quad f_2(r) = \frac{1}{a_9} \left[ f_4(r) + \frac{1}{a_9 \ln R} \right],$$

$$f_3(r) = \frac{\ln r}{\ln R}, \quad f_4(r) = \frac{\ln R - \ln r}{\ln R}.$$

Построенный алгоритм расчета позволяет также исследовать начально-краевые задачи термоэлектроупругости при учете конвекционного теплообмена лицевых поверхностей с окружающей средой (граничные условия 3-го рода).

Рассмотрим случай действия на внутренней ( $r_* = a$ ) цилиндрической поверхности нестационарной нагрузки в виде функции изменения температуры  $\omega_1^*(t_*)$ , а на внешней ( $r_* = b$ ) лицевой поверхности пусть задан закон конвекционного теплообмена с окружающей средой

$$-\Lambda \frac{\partial \Theta^*(r_*, t_*)}{\partial r_*} \Big|_{r=b} = \alpha [\Theta^*(r_*, t_*) - \vartheta^*(t_*)],$$

и известна температура окружающей среды  $\vartheta^*(t_*)$ .

Для решения поставленной задачи необходимо в расчетных соотношениях (7)–(11) функцию  $\omega_2(t)$ , входящую в краевые условия (10), представить в виде

$$\omega_2(t) = \eta(t) - \frac{\Lambda}{\alpha b} \frac{\partial \Theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad (29)$$

где  $\eta = \frac{\gamma_{33}}{C_{33}} \eta^*$ ;  $\eta^* = \vartheta^* - T_0$ ,  $\eta^*$  — относительная температура внешней среды;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи.

На первом этапе исследования выполняется расчет при  $\omega_2(t) = \eta(t)$  с следующим определением функции  $\frac{\partial \Theta(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=1}$  и уточнением  $\omega_2(t)$ .

**3. Численный анализ результатов.** В качестве примера рассматривается радиально поляризованный пьезокерамический цилиндр ( $R = 0.8$ ) состава PZT-4, имеющего следующие физические характеристики:

$$\begin{aligned} \{C_{11}, C_{33}, C_{13}\} &= \{13.9, 11.5, 7.43\} \times 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \varepsilon_{33} = 5.62 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \{e_{31}, e_{33}\} &= \{-5.2, 15.1\} \text{ Кл/м}^2, \quad \rho = 7500 \text{ кг/м}^3, \\ \{\gamma_{11}, \gamma_{33}\} &= \{4.6, 3.9\} \times 10^5 \text{ Н/(м}^2\text{К)}, \quad g_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/(м}^2\text{К)}, \\ k &= 3 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3\text{К)}, \quad \Lambda = 1.6 \text{ Вт/(мК)}, \quad \alpha = 5.6 \text{ Вт/(м}^2\text{К)}. \end{aligned}$$

Исследуется задача, когда на внутренней поверхности ( $r_* = a$ ) цилиндра температурная нагрузка изменяется по следующей зависимости:

$$\omega_1^*(t_*) = T_{\max} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_* \right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right], \quad \omega_2^*(t_*) = 0, \quad (30)$$

где  $H(\cdot)$  — функция Хэвисайда;  $T_{\max} = T_{\max}^* - T_0$ ;  $T_{\max}^*$ ,  $t_{\max}^*$  — максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ( $T_{\max}^* = 373 \text{ К}$  ( $100^\circ\text{C}$ ),  $T_0 = 293 \text{ К}$  ( $20^\circ\text{C}$ ),  $t_{\max}^* = 2 \text{ с}$ ).

На рис. 1 представлены графики изменения функций  $\Theta^*(r, t)$ ,  $\phi(r, t)$ ,  $U(r, t)$  по радиальной координате  $r$  в различные моменты времени  $t$  ( $b = 0.02 \text{ м}$ ). Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты для  $t = t_{\max}$ ,  $3t_{\max}$ ,

$15t_{\max}$ , где  $t_{\max} = \frac{\Lambda}{kb^2} t_{\max}^*$ .

Анализ представленных графиков позволяет сделать следующие выводы.

1. При достижении температурной нагрузкой максимальных значений  $t = t_{\max}$  (рис. 1, а, кривая 1) температурное поле изменяется в области, близкой к лицевой нагреваемой поверхности ( $r = R$ ). В дальнейшем температурное поле цилиндра растет (рис. 1, а, кривая 2) и полный прогрев пьезокерамической конструкции наблюдается при  $t = 15t_{\max}$  (рис. 1, а, кривая 3).
2. При действии температурной нагрузки (30) наблюдается сжатие пьезокерамического цилиндра в радиальной плоскости (рис. 1, с), что приводит к образованию электрического поля. При этом электрический потенциал  $\phi(r, t)$  и перемещения  $U(r, t)$  имеют максимальное значение при  $t = t_{\max}$  (рис. 1, б, кривая 1; рис. 1, с, кривая 1). В дальнейшем численные значения  $\phi(r, t)$  и  $U(r, t)$  уменьшаются (рис. 1, б, кривая 2;

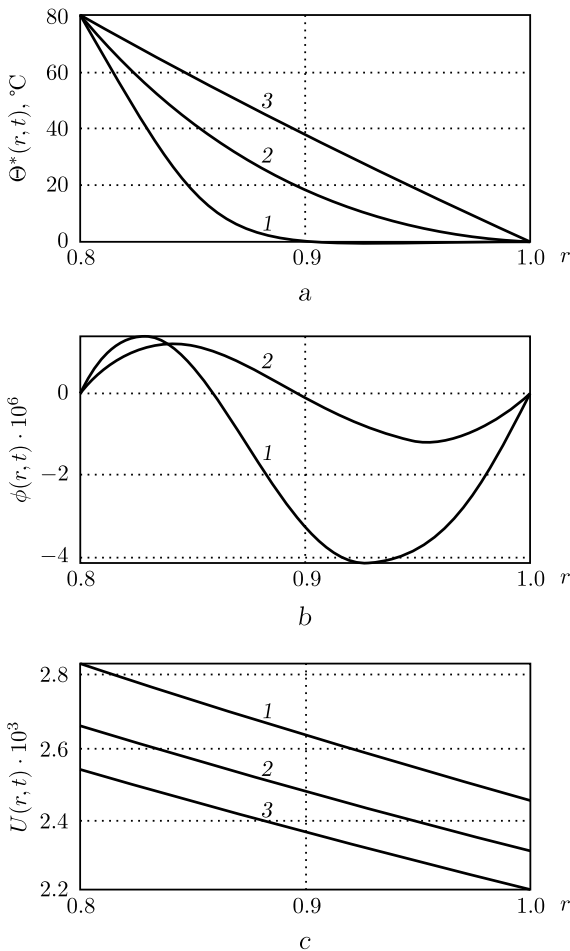


Рис. 1. Графики функций  $\Theta^*(r, t)$  (а),  $\phi(r, t)$  (б),  $U(r, t)$  (с) по радиальной координате  $r$  в различные моменты времени: 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 3t_{\max}$ , 3 –  $t = 15t_{\max}$

[Figure 1. Graphs of the functions  $\Theta^*(r, t)$  (a),  $\phi(r, t)$  (b), and  $U(r, t)$  (c) along the radial coordinate  $r$  at different times  $t$ : 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 3t_{\max}$ , 3 –  $t = 15t_{\max}$ ]

рис. 1, с, кривые 2, 3) и электрическое поле исчезает при установившемся температурном режиме  $t = 15t_{\max}$ .

На рис. 2 приведены графики изменения радиальной компоненты напряженности электрического поля  $E_r = \partial\phi/\partial r$  по координате  $r$ . Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты для цилиндра радиусом  $b = 0.01, 0.02, 0.03$  м. Результаты расчета позволяют сделать вывод, что увеличение толщины стенки цилиндра, то есть уменьшение жесткости конструкции, приводит к росту напряженности электрического поля  $E_r$ .

На рис. 3 представлены графики изменения температурного поля  $\Theta^*(r, t)$  по радиальной координате  $r$  в различные моменты времени  $t$  ( $b = 0.02$  м) в случае действия температурной нагрузки  $\omega_1^*(t_*)$  (30) и при учете теплообмена (29). Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты для  $t = t_{\max}, 8t_{\max}, 15t_{\max}$  ( $\vartheta^* = T_0 = 293$  К ( $20^\circ\text{C}$ )). Расчеты показывают, что при заданном внешнем воздействии температурный режим устанавливается при времени  $t = 15t_{\max}$  и относительная температура на внешней лицевой поверхности цилиндра равна  $\Theta^*(1, 15t_{\max}) = 78^\circ\text{C}$ .

На рис. 4 представлены графики изменения температуры  $\Theta(t)$  срединной поверхности цилиндра ( $R = 0.1, b = 0.04$  м) по времени  $t$ . Сплошной и пунктирной линиями соответственно обозначены результаты, полученные с учетом и без учета электрического поля. Численные результаты расчета показывает, что только в толстостенном цилиндре индуцируемое электрическое

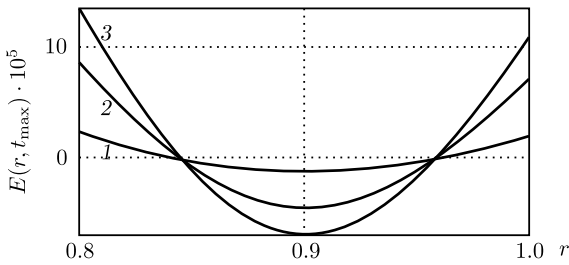


Рис. 2. Графики напряженности электрического поля  $E_r(r, t_{\max})$  по радиальной координате  $r$  для цилиндров с различными радиусами  $b$ : 1 –  $b = 0.01$  м, 2 –  $b = 0.02$  м, 3 –  $b = 0.03$  м

[Figure 2. Graphs of the electric field strength  $E_r(r, t_{\max})$  along the radial coordinate  $r$  for cylinders with different radii  $b$ : 1 –  $b = 0.01$  m, 2 –  $b = 0.02$  m, 3 –  $b = 0.03$  m]

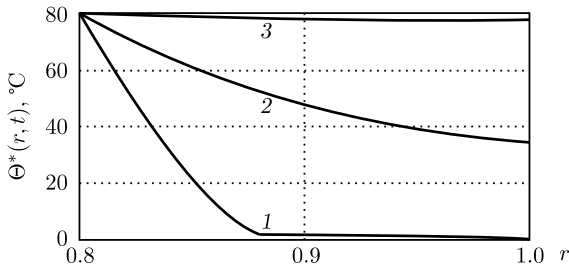


Рис. 3. Графики температурного поля  $\Theta^*(r, t)$  по радиальной координате  $r$  в различные моменты времени  $t$ : 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 3t_{\max}$ , 3 –  $t = 15t_{\max}$

[Figure 3. Graphs of the temperature field  $\Theta^*(r, t)$  along the radial coordinate  $r$  at different times  $t$ : 1 –  $t = t_{\max}$ , 2 –  $t = 3t_{\max}$ , 3 –  $t = 15t_{\max}$ ]

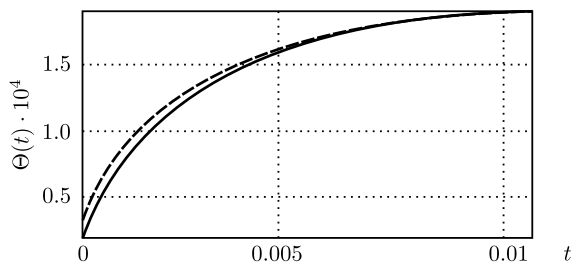


Рис. 4. Изменение температуры  $\Theta(t)$  срединной поверхности толстостенного цилиндра: сплошная линия — с учетом электрического поля, пунктирная линия — без учета электрического поля

[Figure 4. The change in temperature  $\Theta(t)$  of the middle surface of a thick-walled cylinder: the solid line corresponds to the calculation taking into account the electric field; the dotted line corresponds to the calculation without taking into account the electric field]

поле оказывает влияние на температурное поле.

**Заключение.** При исследовании начально-краевых задач термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра в случае действия нестационарной температурной нагрузки связанность электрических и температурных полей необходимо учитывать в толстостенных элементах ( $R \leq 0.1$ ).

В свою очередь, учет скорости изменения объема электроупругого тела  $\left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla U\right)$  не приводит к перераспределению в нем температуры. Данная зависимость наблюдается в конструкциях, изготовленных из материала, имеющего существенно больший коэффициент линейного теплового расширения, в частности в поливиниловых составах [17].

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Козлов В. Л. *Оптоэлектронные датчики*. Минск: Белорус. гос. ун-т, 2005. 116 с.
2. Кульчин Ю. Н. *Распределенные волоконно-оптические измерительные системы*. М.: Физматлит, 2001. 272 с.
3. Дмитриев С. А., Слепов Н. Н. *Волоконно-оптическая техника: современное состояние и новые перспективы*. М.: Техносфера, 2010. 608 с.
4. Паньков А. А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2018. № 2. С. 72–82. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
5. Abbas I. A., Youssef H. M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity // *Arch. Appl. Mech.*, 2009. vol. 79, no. 10. pp. 917–925. <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0259-9>.



6. He T., Tian X., Shen Y. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // *Eur. J. Mech. a/Solids*, 2005. vol. 24, no. 2. pp. 349–359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>.
7. Abbas I. A., Zenkour A. M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder // *Compos. Struct.*, 2013. vol. 96. pp. 89–96. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.046>.
8. Ватульян А. О., Кириютенко А. Ю., Наседкин А. В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости // *ПМТФ*, 1996. Т. 37, № 5. С. 135–142.
9. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017. Т. 10, № 2. С. 117–126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
10. Коваленко А. Д. *Введение в термоупругость*. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
11. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018. № 78. С. 1–18. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761>.
12. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019. № 4. С. 191–200. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18>.
13. Лычев С. А., Манжиров А. В., Юбер С. В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 4. С. 138–154.
14. Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 53–61. <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>.
15. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. *Механика связанных полей в элементах конструкций*. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
16. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 8. С. 71–81.
17. Кобзарь В. Н., Фильштинский Л. А. Плоская динамическая задача связанной термоупругости // *ПММ*, 2008. Т. 72, № 5. С. 842–851.

MSC: 74F15, 74S20

## The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder

© *D. A. Shlyakhin, M. A. Kalmova*Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

A new closed solution of the coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long piezoelectric ceramic radially polarized cylinder is constructed while satisfying the boundary conditions of thermal conductivity of the 1st and 3rd kind on its front surfaces. The case when the rate of change of the temperature field does not affect the inertia characteristics of the elastic system is considered. This makes it possible to include linear equations of equilibrium, electrostatics, and thermal conductivity with respect to the radial component of the displacement vector, electric potential, and also the function of changing the temperature field in the initial calculated relations of the problem under consideration. In the calculations, the classical Fourier law of thermal conductivity is used.

To solve the problem, the mathematical apparatus of incomplete separation of variables is used in the form of a generalized biorthogonal finite integral transformation based on the multicomponent relation of the eigenvalue functions of two homogeneous boundary value problems. An important point in the procedure of the structural algorithm of this method is the selection of the adjoint operator, without which it is impossible to solve non-self-adjoint linear problems of mathematical physics.

The constructed calculated relationships make it possible to determine the stress-strain state, temperature and electric fields induced in a piezoelectric ceramic element under an arbitrary temperature external influence. An analysis of the numerical results makes it possible to determine the cylinder wall thickness at which the electric field leads to a redistribution of the temperature field. It is established that the rate of change in the volume of a piezoceramic body under external temperature influence does not significantly affect the temperature field.

The developed calculation algorithm finds its application in the design of non-resonant piezoelectric temperature sensors.


### Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


#### Please cite this article in press as:

Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 677–691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781> (In Russian).

#### Authors' Details:

*Dmitriy A. Shlyakhin*  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

Dr. Techn. Sci.; Head of Dept.; Dept. of Structural Mechanics, Engineering Geology, Foundations and Foundations; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

*Mariya A. Kalmova*  <https://orcid.org/0000-0001-9212-8631>

Senior Lecturer; Dept. of Structural Mechanics, Engineering Geology, Foundations and Foundations; e-mail: kalmova@inbox.ru

**Keywords:** long piezoceramic cylinder, coupled thermo-electro-elasticity problem, unsteady temperature effect, finite integral transformations.

Received: 31<sup>st</sup> April, 2020 / Revised: 19<sup>th</sup> October, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 17<sup>th</sup> December, 2020

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

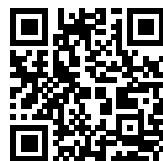
**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Kozlov V. L. *Optoelektronnyye datchiki* [Optoelectronic Sensors]. Minsk, Belarus. State Univ., 2005, 116 pp. (In Russian)
2. Kulchin Yu. N. *Raspredelelennye volokonno-opticheskie izmeritel'nye sistemy* [Distributed Fiber-optic Measuring Systems]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 272 pp. (In Russian)
3. Dmitriev S. A., Slepov N. N. *Volokonno-opticheskaya tekhnika: sovremennoe sostoyanie i novye perspektivy* [Fiber-Optic Technology: Current Status and New Perspectives]. Moscow, Tekhnosfera, 2010, 608 pp. (In Russian)
4. Pan'kov A. A. Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electro-luminescent fiber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 72–82 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
5. Abbas I. A., Youssef H. M. Finite element analysis of two-temperature generalized magneto-thermoelasticity, *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol. 79, no. 10, pp. 917–925. <https://doi.org/10.1007/s00419-008-0259-9>.
6. He T., Tian X., Shen Y. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder, *Eur. J. Mech. a/Solids*, 2005, vol. 24, no. 2, pp. 349–359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>.
7. Abbas I. A., Zenkour A. M. LS model on electro-magneto-thermoelastic response of an infinite functionally graded cylinder, *Compos. Struct.*, 2013, vol. 96, pp. 89–96. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.08.046>.
8. Vatulyan A. O., Kiryutenko A. Yu., Nasedkin A. V. Plane waves and fundamental solutions in linear thermoelectroelasticity, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 727–733. <https://doi.org/10.1007/BF02369312>.
9. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
10. Kovalenko A. D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to Thermoelasticity]. Kiev, Nauk. dumka, 1965, 204 pp. (In Russian)
11. Shlyakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed circular plate, *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 78, pp. 1–18 (In Russian). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761>.
12. Shlyakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 191–200 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18>.
13. Lychev S. A., Manzhairov A. V., Joubert S. V. Closed solutions of boundary value problems of coupled thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 610–623. <https://doi.org/10.3103/S0025654410040102>.

14. Radayev Yu. N., Taranova M. V. Wavenumbers of type III thermoelastic waves in a long waveguide under sidewall heat interchanging, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 2(23), pp. 53–61 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu965>.
15. Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Shul'ga N. A. *Mekhanika svyazannykh polei v elementakh konstruksii* [Mechanics of Coupled Fields in Structural Elements]. Kiev, Nauk. dumka, 1989, 279 pp. (In Russian)
16. Senitskij Yu. E. A biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems in mechanics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.
17. Kobzar' V. N., Fil'shtinskii L. A. The plane dynamic problem of coupled thermoelasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 611–618. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.11.002>.

# Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ



УДК 521.182

## Математическое моделирование движения астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона

© А. Ф. Заусаев, М. А. Романюк, А. А. Заусаев

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Проведена оценка точности решений дифференциальных уравнений движения с учетом релятивистских эффектов, полученных на основе нового принципа взаимодействия, на примере исследований эволюции орбит пяти астероидов. Проведено численное интегрирование уравнений движения астероидов с начальными данными, отнесенными к различным моментам времени. На основании сопоставления полученных результатов исследования выявлены определенные закономерности. На интервалах времени при отсутствии сближений астероида с Землей менее 0.1 а.е. можно с одинаковой эффективностью применять приведенные в работе дифференциальные уравнения. Потеря точности численного интегрирования находится в прямой зависимости от величины сближения астероида с Землей. Вследствие того, что в правых частях уравнений движения присутствуют разности координат астероида и планеты, при достаточной их близости относительная точность координат астероида и планеты во много раз превосходит относительную точность их разности. Для исследуемых астероидов при сближении их с Землей относительная погрешность разности координат астероида и Земли примерно от 227 до 44900 раз превышает предельную относительную погрешность

### Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Заусаев А. Ф., Романюк М. А., Заусаев А. А. Математическое моделирование движения астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 692–717. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1779>.

### Сведения об авторах

Анатолий Федорович Заусаев <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [zausaev\\_af@mail.ru](mailto:zausaev_af@mail.ru)

Мария Анатольевна Романюк <https://orcid.org/0000-0003-0796-2061>

кандидат технических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [zausmasha@mail.ru](mailto:zausmasha@mail.ru)

Артем Анатольевич Заусаев <https://orcid.org/0000-0002-5184-3943>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: [zausaevaa@mail.ru](mailto:zausaevaa@mail.ru)

самих координат астероида. Прогнозирование движение Апофиса после его тесного сближения с Землей на основе решения уравнений движения современными методами приводит к большим ошибкам, уменьшение которых возможно только путем улучшения начальных данных элементов орбит астероида. О возможности тесного сближения Апофиса с Землей на интервале времени с 14 апреля 2029 г. по 1 января 2100 г. можно утверждать лишь с определенной степенью вероятности. Результаты проведенных исследований можно обобщить на все астероиды группы Аполлона и Атона.

**Ключевые слова:** численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения, астероиды, (99942) Апофис, (367943) Дуэнде, 2012 UE<sub>34</sub>, 1999 AN<sub>10</sub>, 2001 WN<sub>5</sub>.

Получение: 6 апреля 2020 г. / Исправление: 3 ноября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 18 декабря 2020 г.

**Основные положения и расчетные формулы.** В настоящее время определены элементы орбит более чем у 20 тысяч астероидов, входящих в группы Аполлона, Амура и Атона. Большинство астероидов групп Аполлона, Амура и Атона в процессе эволюции могут сближаться с внутренними планетами, при этом не исключена вероятность столкновения с ними. Исследование эволюции орбит астероидов, сближающихся с Землей, важно для решения проблемы, связанной с астероидной опасностью [1–3].

Движение небесных тел в Солнечной системе описывается различными дифференциальными уравнениями [4–6]. От выбора конкретных дифференциальных уравнений существенно зависит точность прогнозирования движения исследуемого объекта. На примере движения больших планет и Луны показано, что решения уравнений в форме Ньютона не обладают достаточной точностью для прогнозирования движения Меркурия и Луны [7]. Решение дифференциальных уравнений движения с учетом релятивистских эффектов без использования дополнительных уравнений, учитывающих форму Земли и Луны, недостаточно точны для прогнозирования движения Луны [8].

В отличие от ньютоновых и релятивистских уравнений, решение уравнений, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством, полностью согласуются с данными координат больших планет и Луны, полученных с использованием банка данных DE405 [9].

Уравнения движения, основанные на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством, имеют следующий вид [10,11]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i \left( \frac{X_i - X}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i \left( \frac{Y_i - Y}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i \left( \frac{Z_i - Z}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i}r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\Delta_i^2 = (X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2$ ,  $r_{0i}$  — эффективный радиус  $i$ -того тела;  $a_{0i}$  — соответствующее ускорение для  $i$ -того тела на расстоянии  $r_{0i}$  от

центра массы;  $X, Y, Z$  — барицентрические координаты возмущаемого тела;  $X_i, Y_i, Z_i$  — барицентрические координаты возмущающих тел.

Следует отметить, что произведение  $a_{0i}r_{0i}^2$  по размерности и значениям полностью совпадает с  $k^2m_i$ , где  $k$  — постоянная Гаусса, а  $m_i$  — масса  $i$ -той планеты. Данное совпадение значительно упрощает решение уравнений (1), которые по своей форме близки к уравнениям движения задачи  $n$  тел, однако по сравнению с задачей  $n$  тел, в уравнениях (1) отсутствует наличие масс и силовых взаимодействий.

Уравнения движения небесных тел с учетом релятивистских поправок более сложны по сравнению с уравнениями (1). В барицентрической системе координат эти уравнения в векторной форме имеют следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i = & \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left( \frac{v_i}{c} \right)^2 + \right. \\ & + (1 + \gamma) \left( \frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{r}_i \dot{r}_j - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(r_i - r_j) \dot{r}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \ddot{r}_j \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j) [(2 + 2\gamma) \dot{r}_i - (1 + 2\gamma) \dot{r}_j] (\dot{r}_i - \dot{r}_j) + \\ & + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{r}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m (r_m - r_i)}{r_{im}^3}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i$  — векторы положения, скорости и ускорения  $i$ -того тела в барицентрической системе координат;  $\mu_j = k^2 m_j$ ,  $k^2$  — гравитационная постоянная и  $m_j$  — масса  $j$ -того тела;  $r_{ij} = |r_j - r_i|$ ;  $\beta$  и  $\gamma$  — релятивистские параметры;  $c$  — скорость света;  $\beta = \gamma = 1$ ;  $v_i = |\dot{r}_i|$ .

Данные уравнения до 2018 г. использовались при создании каталога орбитальной эволюции астероидов групп Аполлона, Амура, Атона и короткопериодических комет, размещенного на сайте [smallbodies.ru](http://smallbodies.ru) [13]. После 2018 г. при исследовании эволюции элементов орбит этих астероидов используются уравнения (1).

При исследовании эволюции орбит небесных тел важно, чтобы применяемый метод решения обладал высокой степенью точности и устойчивости. В качестве метода решения использовался модифицированный метод Эверхарта [14, 15]. Модификация метода Эверхарта заключалась в увеличении его порядка с 19-го по 33 [16]. Быстродействие работы программы достигалось путем создания банка данных барицентрических координат планет Луны и Солнца на интервале времени с 1600 по 2200 гг. Для удобства, связанного с интерполяцией, в банке данных вместо координат и скоростей возмущающих тел хранятся коэффициенты полиномов Эверхарта. Для нахождения координат и компонент скоростей на определенный момент времени в банке данных с шагом 10 дней хранятся коэффициенты полиномов Эверхарта. Внутри десятидневных интервалов координаты и компоненты скоростей находятся с помощью интерполяционных полиномов Эверхарта.

Разработанные алгоритмы и программный комплекс для исследования эволюции орбит небесных тел позволяют своевременно производить необходимые расчеты и результаты вычислений размещать на сайте [smallbodies.ru](http://smallbodies.ru).

Известно, что при численном решении обыкновенных дифференциальных

уравнений значения начальных данных существенно отражаются на точности полученных результатов. В работе [11] показано, что начальные данные небесных тел при использовании уравнений (1) нуждаются в коррекции по формулам [11]

$$V^2 = \frac{2(c_0^* + c_1^*)}{r} + \frac{1}{6} \frac{c_0^* r_0^3 + c_1^* r_1^3}{r^4} - \frac{c_0^* + c_1^*}{a}, \quad r = \frac{2a(c_0^* + c_1^*)}{aV^2 + c_0^* + c_1^*}, \quad (3)$$

где  $V$  и  $r$  — скорость и радиус-вектор астероида в барицентрической системе координат;  $a$  — большая полуось орбиты астероида;  $a_0 r_0^2 = c_0^*$ ,  $a_1 r_1^2 = c_1^*$ ;  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $r_0$ ,  $r_1$  — ускорения и эффективные радиусы Солнца и астероида.

Цели данной работы следующие:

- а) оценка влияния коррекции начальных данных по формулам (3) на эволюцию орбит астероидов, сближающихся с Землей;
- б) исследование влияния сближения астероида с Землей на точность результатов интегрирования уравнений (1) и (2);
- в) сравнение результатов численного интегрирования на основе решения уравнений (1) и (2).

Для сопоставления результатов численного интегрирования с использованием уравнений (1) и (2) были отобраны пять астероидов (см. табл. 1) из групп Аполлона и Атона, имеющих различные размеры и минимальные сближения с Землей.

Таблица 1

Данные об астероидах, сближающихся с Землей  
[Data for the near-Earth asteroids]

Asteroids	Earth close approaches date	Earth close approaches distance, $r$ (in au)	Earth close approaches distance, $r$ (in km)	Diameter (in m)
(99942) Apophis	2029 04 13	0.000253	37 833	440
2012 DA <sub>14</sub>	2013 02 15	0.000227	33 991	42
2012 UE <sub>34</sub>	2041 04 08	0.000717	107 188	63
1999 AN <sub>10</sub>	2027 08 07	0.002590	390 080	700
2001 WN <sub>5</sub>	2028 06 26	0.001660	249 805	610

**Астероид (99942) Апофис (2004 MN<sub>4</sub>).** Астероид открыт в 2004 году. Исследованию его движения посвящен ряд работ [17–19]. Он является потенциально опасным для Земли астероидом, т.к. его диаметр около 440 м и 13 апреля 2029 г. он пройдет от Земли на расстоянии около 38 000 км (см. табл. 1). К настоящему времени по нему накоплен большой объем наблюдений, по которым регулярно вычисляются элементы орбит. На сайте [smallbodies.ru](http://smallbodies.ru) данные об элементах орбит астероида Апофис приведены начиная с 2005 года. По мере накопления наблюдений точность элементов орбит астероида Апофис улучшается. Для определения элементов орбит астероида Апофис на момент 13 ноября 2019 г. использовалось 4 443 наблюдения. Представляет интерес, насколько согласуются элементы орбит Апофиса, найденные с помощью численного интегрирования различными методами, с данными элементами, полученными на основании наблюдений.

В первом блоке табл. 2 представлены элементы орбит астероида Апофис, полученные с использованием наблюдений и путем численного интегрирования уравнений (1), (2) и с учетом коррекции начальных данных на интервале времени с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г.



Во втором блоке табл. 2 представлены аналогичные результаты вычислений с начальными данными на момент 5 августа 2019 г. Здесь интегрирование проводилось в обратном направлении — с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г.

В первой строке блоков табл. 2 находятся элементы орбит, найденные по данным наблюдений, во второй, третьей и четвертой строках блока — элементы орбит, полученные с помощью интегрирования уравнений (1), (2) и с учетом коррекции (3).

Из сопоставления данных табл. 2 следует, что элементы орбит астероида Апофис, полученные с помощью численного интегрирования различными методами, вполне удовлетворительно согласуются с результатами оптических наблюдений.

На момент 13 ноября 2019 г. разность между вычисленными с помощью решения уравнений (1) (вторая строчка блока) и оптическими наблюдениями (первая строчка блока) составляет следующие величины:  $\Delta M = -0.000001^\circ$ ,  $\Delta a = 0.00000002$  а.е.,  $\Delta e = 0.00000002$ ,  $\Delta \omega = 0.000002^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0^\circ$ ,  $\Delta i = 0^\circ$ , а на момент 5 августа 2019 г. —  $\Delta M = -0.000003^\circ$ ,  $\Delta a = -0.00000002$  а.е.,  $\Delta e = -0.00000002$ ,  $\Delta \omega = -0.000002^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0^\circ$ ,  $\Delta i = 0^\circ$ . Для других методов интегрирования (см. табл. 2) различия между результатами наблюдений и полученными данными также малы. Данные разности можно рассматривать как абсолютные погрешности решений уравнений (1) и (2) на интервале времени 100 дней (с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г.).

В табл. 3 представлены элементы орбит астероида Апофис, найденные с использованием решения уравнений движения (1) и (2) при различных начальных данных. Элементы орбит в первом блоке табл. 3 получены с помощью решения уравнений (1) и (2) с использованием начальных данных на эпоху 5 августа 2019 г. Во втором блоке табл. 3 приведены элементы орбит астероида Апофис, полученные при начальных данных на эпоху 13 ноября 2019 г. При этом календарной дате соответствуют элементы орбит астероида, найденные с использованием решения уравнений движения (1), а юлианской дате соответствуют элементы орбит, полученные на основании решения уравнений (2). Юлианская и календарная даты в табл. 2 соответствуют одному и тому же моменту времени. Элементы орбит астероида в первом и втором блоках табл. 3 приведены на начальный и конечный момент интервала интегрирования, а также на моменты до и после сближения с Землей.

Элементы орбит астероида Апофис через каждые 100 дней, найденные с использованием интегрирования дифференциальных уравнений (1) на стандартные даты, размещены на сайте [smallbodies.ru](http://smallbodies.ru).

Из сравнения элементов орбит астероида первого и второго блоков табл. 3, найденных с помощью решения уравнений (1), видно, что они отличаются между собой. Поскольку начальные данные элементов орбит на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г. имеют почти одинаковую точность, нельзя сказать, какие результаты, приведенные в этих блоках, более точные. По количеству совпадающих разрядов в элементах орбит, представленных в этих блоках, можно оценить степень точности проводимых исследований, а по разности соответствующих элементов найти погрешность численного интегрирования относительно различных начальных данных.

Сложность прогнозирования движения астероида Апофис связана с проблемой численной устойчивости при сближении астероида с Землей. Как видно из результатов численного интегрирования (см. табл. 1), 13 апреля 2029 г. Апофис сблизится с Землей на расстояние 0.000253 а.е. Правые части диф-

**Элементы орбит Апофиса, полученные решением уравнений движения (1) и (2) и с учетом коррекции (3)**  
**[Aphophis' orbital elements calculated by the motion equations (1) and (2) with correction (3)]**

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
2019 11 13 2019 08 05	observations	25.696976	0.92253315	0.19145964	126.676052	204.053469	3.336838
	by the Eq. (1)	25.696975	0.92253317	0.19145966	126.676054	204.053469	3.336838
	by the Eq. (2)	25.696976	0.92253315	0.19145963	126.676052	204.053469	3.336838
	by the Eqs. (1), (3)	25.697016	0.92253317	0.19145964	126.676013	204.053469	3.336838
2019 08 05 2019 11 13	observations	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
	by the Eq. (1)	274.463319	0.92252714	0.19146825	126.676623	204.054436	3.336876
	by the Eq. (2)	274.463322	0.92252716	0.19146828	126.676625	204.054436	3.336876
	by the Eqs. (1), (3)	274.463285	0.92252714	0.19146843	126.676656	204.054436	3.336876

**Элементы орбит Апофиса, полученные по различным начальным данным**  
**[Aphophis' orbital elements calculated from different initial data]**

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	279.1268	0.9260468	0.1903993	122.4825	207.7302	3.2884
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	279.2317	0.9260726	0.1903836	122.4730	207.7298	3.2887
1979 01 27	by the Eq. (1)	48.6918	0.9259608	0.1904005	124.1617	205.3005	3.3245
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	48.6931	0.9259609	0.1904004	124.1611	205.3005	3.3245
2019 08 05	by the Eq. (1)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
2029 03 05	by the Eq. (1)	207.9739	0.9223315	0.1912153	126.6981	203.8631	3.3420
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	207.9738	0.9223315	0.1912152	126.6982	203.8631	3.3420
2029 06 13	by the Eq. (1)	359.6064	1.1040638	0.1893350	71.2000	203.5599	2.2126
JD 2462300.5	by the Eq. (2)	359.5451	1.1036803	0.1892226	71.2914	203.5601	2.2149
2100 02 01	by the Eq. (1)	27.7405	1.1002096	0.1882431	74.2430	202.0987	2.2504
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	198.4852	1.1189026	0.1939314	69.2533	201.0609	2.1555

Окончание табл. 3 [End of the Table 3]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — November 13, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	278.5161	0.9258978	0.1904898	122.5298	207.7331	3.2866
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	279.2301	0.9260723	0.1903838	122.4731	207.7298	3.2887
1979 01 27	by the Eq. (1)	48.6875	0.9259603	0.1904009	124.1622	205.3002	3.3245
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	48.6931	0.9259609	0.1904004	124.1611	205.3005	3.3245
2019 11 13	by the Eq. (1)	25.696976	0.92253315	0.19145964	126.676052	204.053469	3.336838
JD 2458800.5	by the Eq. (2)	25.696976	0.92253315	0.19145964	126.676052	204.053469	3.336838
2029 03 05	by the Eq. (1)	207.9741	0.9223315	0.1912152	126.6981	203.8631	3.3420
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	207.9738	0.9223315	0.1912152	126.6981	203.8631	3.3420
2029 06 13	by the Eq. (1)	359.8071	1.1053400	0.1897284	70.9019	203.5589	2.1994
JD 2462300.5	by the Eq. (2)	359.5430	1.1036667	0.1892185	71.2946	203.5601	2.2151
2100 02 01	by the Eq. (1)	200.5921	1.1170329	0.1930831	70.7095	201.2504	2.2217
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	169.4976	1.1252839	0.1960322	68.2933	201.5017	2.0865
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	279.1268	0.9260468	0.1903993	122.4825	207.7302	3.2884
JD 2415100.5	by the Eqs. (1), (3)	279.1250	0.9260463	0.1903996	122.4826	207.7302	3.2884
1979 01 27	by the Eq. (1)	48.6918	0.9259608	0.1904005	124.1617	205.3005	3.3245
JD 2443900.5	by the Eqs. (1), (3)	48.6918	0.9259608	0.1904004	124.1616	205.3005	3.3245
2019 08 05	by the Eq. (1)	274.463322	0.92252716	0.19146827	126.676625	204.054436	3.336876
JD 2458700.5	by the Eqs. (1), (3)	274.463364	0.92252716	0.19146825	126.676584	204.054436	3.336876
2029 03 05	by the Eq. (1)	207.9739	0.9223315	0.1912153	126.6981	203.8631	3.3420
JD 2462200.5	by the Eqs. (1), (3)	207.9740	0.9223315	0.1912152	126.6981	203.8631	3.3420
2029 06 13	by the Eq. (1)	359.6064	1.1040638	0.1893350	71.2000	203.5599	2.2126
JD 2462300.5	by the Eqs. (1), (3)	359.6005	1.1040255	0.1893213	71.2084	203.5600	2.2137
2100 02 01	by the Eq. (1)	27.7405	1.1002096	0.1882431	74.2430	202.0987	2.2504
JD 2488100.5	by the Eqs. (1), (3)	119.8925	1.0686945	0.1821959	82.8993	202.0349	1.9236

ференциальных уравнений движения (1) и (2) содержат разности координат Земли и астероида. При тесном сближении Апофиса с Землей на расстояние 0.000253 а.е. при вычислении правых частей уравнений (1) или (2) теряются три старших разряда в разностях радиус-векторов. Дальнейшие расчеты будут проводиться при потере трех разрядов в начале числа. Известно, что большие потери точности происходят при вычитании двух близких чисел [20, 21].

Для оценки влияния тесного сближения Апофиса с Землей вычислим относительные погрешности разности между координатами астероида и Земли.

13 апреля 2029 г. Апофис пройдет от Земли на расстоянии 0.000252898 а.е. Обозначим через  $X_3, Y_3, Z_3$  барицентрические координаты Земли, а через  $X_A, Y_A, Z_A$  — барицентрические координаты астероида.

В момент сближения астероида с Землей имеем следующие значения координат:

$$\begin{aligned} X_3 &= -0.916328637 \text{ а.е.}, & Y_3 &= -0.372523621 \text{ а.е.}, & Z_3 &= -0.161395076 \text{ а.е.}, \\ X_A &= -0.916213075 \text{ а.е.}, & Y_A &= -0.372708794 \text{ а.е.}, & Z_A &= -0.161522802 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

Найдем разности координат:  $X_3 - X_A = -0.000115562$  а.е.,  $Y_3 - Y_A = -0.000185173$  а.е.,  $Z_3 - Z_A = -0.000127726$  а.е.

Полагая, что полученные координаты Земли и астероида имеют одинаковую точность — до шести значащих цифр после запятой, найдем предельную абсолютную погрешность разности координат Земли и астероида:

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \Delta_{X_3} + \Delta_{X_A}, & \Delta_Y &= \Delta_{Y_3} + \Delta_{Y_A}, & \Delta_Z &= \Delta_{Z_3} + \Delta_{Z_A}, \\ \Delta_X &= \Delta_Y = \Delta_Z = 0.0000005 \text{ а.е.} + 0.0000005 \text{ а.е.} = 0.000001 \text{ а.е.} \end{aligned}$$

Вычислим предельные относительные погрешности координат астероида:

$$\begin{aligned} \delta_{X_A} &= 0.0000005/0.916213075 = 5.45725 \cdot 10^{-7}, \\ \delta_{Y_A} &= 0.0000005/0.372708794 = 1.34153 \cdot 10^{-6}, \\ \delta_{Z_A} &= 0.0000005/0.161522802 = 3.09554 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Получим предельные относительные погрешности разности координат астероида и Земли:

$$\begin{aligned} \delta_X &= 0.000001/0.000115562 = 8.65336 \cdot 10^{-3}, \\ \delta_Y &= 0.000001/0.000185173 = 5.40036 \cdot 10^{-3}, \\ \delta_Z &= 0.000001/0.000127726 = 7.82926 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Определим, во сколько раз предельная относительная погрешность разности координат Земли и астероида Апофис больше предельной относительной погрешности координат астероида:  $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 15\,857$ ,  $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 4\,026$ ,  $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 2\,562$ .

Предельная относительная погрешность разности координат радиус-вектора Апофиса примерно в 15 857 раз больше его предельной относительной погрешности величины координат радиус-вектора.

Большие относительные погрешности разностей координат радиус-векторов астероида в процессе интегрирования приводят к значительным погрешностям полученных результатов.

Из первых двух блоков табл. 3 видно, что до момента тесного сближения 5 марта 2029 г. элементы орбит Апофиса, вычисленные с помощью численного интегрирования уравнений (1), практически совпадают независимо от даты, на которую брались начальные данные для решения уравнений движения. После тесного сближения разности элементов орбит, полученных с помощью решения уравнений (1) на момент 13 июня 2029 г., составят следующие величины:  $\Delta M = 0.2007^\circ$ ,  $\Delta a = 0.0012762$  а.е.,  $\Delta e = 0.0003934$ ,  $\Delta \omega = -0.2981^\circ$ ,  $\Delta \Omega = -0.001^\circ$ ,  $\Delta i = -0.0132^\circ$ .

Полученные разности характеризуют устойчивость применяемого метода, т.е. определяют влияние погрешности начальных данных на результаты решения при тесном сближении астероида с Землей. По величине разности элементов орбит можно судить о порядке точности решения. До сближения астероида с Землей большие полуоси и эксцентриситеты, найденные с помощью решения уравнений (1), совпадали до шестого знака включительно после запятой (см. табл. 3). После тесного сближения астероида с Землей большие полуоси и эксцентриситеты сохранили совпадения до двух и трех знаков после запятой соответственно.

Таким образом, после сближения Апофиса с Землей произошла потеря точности в большой полуоси и эксцентриситете орбиты астероида на четыре и три порядка соответственно, т.е. большая полуось и эксцентриситет в дальнейшем будут определены с точностью до двух и трех верных знаков после запятой. Угловые элементы (средняя аномалия  $M$  и аргумент перигелия  $\omega$ ) будут определены с точностью до градусов.

Потеря точности численного интегрирования уравнений движения (1) и (2) на участках тесного сближения Апофиса с Землей является наиболее сложной проблемой при прогнозировании движения астероида после его сближения с Землей. Для сохранения заданной точности необходимо координаты астероида и Земли брать с достаточным числом «запасных» верных знаков. Для этого следует повысить точность начальных данных элементов орбит Земли и астероида.

Третий блок табл. 3 содержит элементы орбит Апофиса, полученные с учетом коррекции начальных данных элементов орбит астероида и без учета коррекции. Результаты вычислений в строках, соответствующих календарной дате, получены без учета коррекции, в строках, соответствующих юлианской дате, — с учетом коррекции начальных данных с применением формул (3).

Из данных третьего блока табл. 3 видно, что в результате коррекции начальных данных элементы орбит астероида изменились незначительно. Истинная аномалия  $M$  возросла на  $0.000042^\circ$ , эксцентриситет  $e$  и аргумент перигелия  $\omega$  уменьшились соответственно на  $0.00000002^\circ$  и  $0.000041^\circ$ , остальные элементы орбит не претерпели существенных изменений. Полученные невязки, как видно из данных третьего блока табл. 3, на интервале времени с 1900 г. по 2029 г. существенно не отражаются на результатах интегрирования.

Из сравнения элементов орбит Апофиса, найденных с начальными данными на различные моменты (см. первый и второй блоки табл. 3), следует, что на левом конце интервала интегрирования (22 марта 1900 г.) угловые элементы получены с точностью до градусов, а большие полуоси  $a$  и эксцентриситеты  $e$  — с точностью до двух значащих цифр после запятой. На интервале времени с 1971 г. по 2029 г. имеет место совпадение больших полуосей и эксцентриситетов до шести знаков и до двух знаков после запятой в угловых элементах. На правом конце интервала интегрирования (1 февраля 2100 г.)

элементы орбит астероида отличаются друг от друга более значительно по сравнению с левым концом, достигая в средней аномалии  $M$  свыше  $170^\circ$ , а большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  совпадают лишь до двух значащих цифр.

Возникает вопрос: каким образом можно повысить точность прогнозирования движения астероида Апофис после его тесного сближения с Землей?

Как было показано ранее, в результате тесных сближений астероида с Землей происходит потеря точности при численном интегрировании уравнений движения (1) и (2). Данный факт указывает на необходимость повышения точности начальных данных координат и компонент скоростей для получения более точных решений уравнений (1) и (2). Повышение точности начальных данных элементов орбит Апофиса на несколько порядков является сложновыполнимой проблемой. Однако к решению данной проблемы можно вернуться после 13 апреля 2029 г., т.е. после тесного сближения астероида с Землей. Тогда элементы орбит астероида после его сближения с Землей с учетом новых наблюдений будут определены с большей точностью по сравнению с настоящим прогнозированием.

**Астероид (367943) Дуэнде (2012 DA<sub>14</sub>).** Астероид в прошлом до 2013 г. принадлежал группе Аполлона [22]. После тесного сближения с Землей 15 февраля 2013 г. он стал членом группы Атона. Находясь вблизи афелия, астероид может тесно сближаться с Землей в будущем. Его диаметр около 42 м, элементы орбит найдены с учетом 1007 наблюдений.

Табл. 4 содержит элементы орбит Дуэнде, полученные с помощью наблюдений и численного интегрирования уравнений (1) и (2) на интервале времени с 5 августа 2019 г. по 13 ноября 2019 г. В первой строке табл. 4 представлены элементы орбит, полученные из наблюдений, в последующих строках — полученные интегрированием уравнений (1) и (2).

Из сравнения элементов орбит, представленных в табл. 4, следует, что элементы орбит астероида, полученные с помощью численного интегрирования различными методами, вполне удовлетворительно согласуются с орбитальными элементами, найденными на основании наблюдений. На момент 13 ноября 2019 г. разности между результатами наблюдений и данными, вычисленными с помощью решения уравнений (1), следующие:  $\Delta M = 0.000008^\circ$ ,  $\Delta a = 0$  а.е.,  $\Delta e = 0$ ,  $\Delta \omega = -0.000018^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0^\circ$ ,  $\Delta i = 0^\circ$ .

В табл. 5 представлены элементы орбит Дуэнде, найденные с использованием решений уравнений (1) и (2) с начальными данными, взятыми на эпоху 5 августа 2019 г. (первый блок) и 13 ноября 2019 г. (второй блок).

Согласно данным табл. 5, элементы орбит Дуэнде вблизи момента сближения 18 апреля 2013 г., найденные с использованием решений уравнений (1) и (2) с начальными данными на эпоху 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г., практически совпадают. Показано, что в момент сближения предельная относительная погрешность разности координат Земли и астероида многократно превосходит предельную относительную погрешность координат астероида:  $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 7377$ ,  $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 44857$ ,  $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 19668$ .

Табл. 5 содержит элементы орбит астероида до и после его сближения с Землей. После их тесного сближения различия элементов орбит астероида, найденные с использованием решений по уравнениям (1) и (2) на дату 8 января 2013 г., отличаются друг от друга существенно. Отличия элементов орбит, найденных с использованием уравнений (1) с начальными данными на

Элементы орбит Дуэнде, полученные решением уравнений движения (1) и (2)  
 [Duende's orbital elements calculated by the motion equations (1) and (2)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
2019 11 13	observations	74.709248	0.91036549	0.08936581	195.507297	146.944755	11.607740
2019 08 05	by the Eq. (1)	74.709240	0.91036549	0.08936580	195.507308	146.944755	11.607740
	by the Eq. (2)	74.709247	0.91036549	0.08936580	195.507298	146.944755	11.607740

Элементы орбит Дуэнде, полученные по различным начальным данным  
 [Duende's orbital elements calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	162.2988	1.0228855	0.1117962	277.4281	149.0732	10.0440
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	336.9756	0.9840126	0.1053103	262.8024	148.9084	10.4523
1979 01 27	by the Eq. (1)	204.7295	1.0093180	0.1116128	273.0079	148.1818	10.2243
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	172.2459	1.0073312	0.1123408	274.1891	148.2698	10.2096
2013 01 08	by the Eq. (1)	38.3992	1.0017544	0.1084522	270.9329	147.2452	10.3312
JD 2456300.5	by the Eq. (2)	38.2685	1.0020331	0.1081971	271.1125	147.2451	10.3392
2013 04 18	by the Eq. (1)	231.0973	0.9103249	0.0893984	195.5350	146.9958	11.6077
JD 2456400.5	by the Eq. (2)	231.0975	0.9103249	0.0893984	195.5348	146.9958	11.6077
2019 08 05	by the Eq. (1)	321.196373	0.91036338	0.08935289	195.553046	146.950882	11.608706
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	321.196373	0.91036338	0.08935289	195.553046	146.950882	11.608706
2029 03 05	by the Eq. (1)	333.0554	0.9105411	0.0892248	195.7011	146.8704	11.6111
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	333.0551	0.9105411	0.0892248	195.7012	146.8704	11.6111
2075 03 04	by the Eq. (1)	266.8389	0.9128199	0.0867882	196.7834	146.3949	11.6314
JD 2479000	by the Eq. (2)	266.8446	0.9128197	0.0867882	196.7841	146.3950	11.6314
2100 02 01	by the Eq. (1)	344.8062	0.9269469	0.0708289	200.3959	146.0308	11.7001
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	342.5807	0.9271769	0.0705351	200.4170	146.0329	11.7011

Окончание табл. 5 [End of the Table 5]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — November 13, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	331.0415	1.0118908	0.1125797	273.4893	148.9899	10.1931
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	294.2665	1.0206520	0.1110296	280.9070	148.9649	10.2859
1979 01 27	by the Eq. (1)	203.2924	1.0092187	0.1117550	273.0543	148.1848	10.2199
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	175.2188	1.0074368	0.1124126	274.1113	148.2408	10.2065
2013 01 08	by the Eq. (1)	38.3880	1.0017781	0.1084243	270.9490	147.2452	10.3321
JD 2456300.5	by the Eq. (2)	38.2997	1.0019662	0.1082419	271.0715	147.2451	10.3378
2013 04 18	by the Eq. (1)	231.0973	0.9103249	0.0893984	195.5350	146.9958	11.6077
JD 2456400.5	by the Eq. (2)	231.0975	0.9103249	0.0893984	195.5349	146.9958	11.6077
2019 11 13	by the Eq. (1)	74.709248	0.91036549	0.08936581	195.507297	146.944755	11.607740
JD 2458800.5	by the Eq. (2)	74.709248	0.91036549	0.08936581	195.507297	146.944755	11.607740
2029 03 05	by the Eq. (1)	333.0554	0.9105411	0.0892248	195.7011	146.8704	11.6111
JD 2462200.5	by the Eq. (2)	333.0552	0.9105411	0.0892248	195.7012	146.8704	11.6111
2075 03 04	by the Eq. (1)	266.8400	0.9128199	0.0867882	196.3874	146.3949	11.6314
JD 2479000	by the Eq. (2)	266.8433	0.9128198	0.0867882	196.7841	146.3950	11.6314
2100 02 01	by the Eq. (1)	344.4539	0.9269831	0.0707824	200.3984	146.0312	11.7002
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	343.0403	0.9271291	0.0705961	200.4124	146.0325	11.7009



моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г., следующие:

$$\Delta M = 0.0112^\circ, \quad \Delta a = -0.0000237 \text{ а.е.}, \quad \Delta e = -0.0000279, \\ \Delta \omega = -0.0167^\circ, \quad \Delta \Omega = 0^\circ, \quad \Delta i = 0^\circ.$$

Подобные различия элементов орбит, найденных с использованием уравнений (2), также велики:

$$\Delta M = 0.0312^\circ, \quad \Delta a = 0.0000669 \text{ а.е.}, \quad \Delta e = -0.0000448, \\ \Delta \omega = -0.0410^\circ, \quad \Delta \Omega = 0^\circ, \quad \Delta i = 0.0014^\circ.$$

Полученные разности элементов орбит указывают на значительные расхождения элементов орбит в результате тесного сближения астероида с Землей. При этом большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  орбиты астероида сохраняют четыре верных знака, а угловые элементы — один знак после запятой.

Сравнение элементов орбит астероида на концах интегрирования, полученных с использованием решений уравнений (1) и (2), указывает на значительные различия элементов орбит.

На момент 22 марта 1900 г. отклонения в средней аномалии  $M$  достигают сотен градусов, в аргументе перигелия  $\omega$  — десятков градусов, а в большой полуоси  $a$  и эксцентриситете  $e$  расхождения также значительные — 0.039 а.е. и 0.0067. На другом конце интервала интегрирования 1 февраля 2100 г. различие элементов орбит, вычисленных с использованием решений уравнений (1) и (2), менее значительное по сравнению с предыдущими значениями.

Из сравнения элементов орбит Дуэнде, приведенных в табл. 5, следует, что при интегрировании с различными начальными данными на интервале времени с 18 апреля 2013 г. по 4 марта 2075 г. большие полуоси  $a$  и эксцентриситеты  $e$  совпадают до шести, а угловые элементы — до двух значащих цифр после запятой. При этом важно отметить, что подобное совпадение результатов вычислений не зависит от того, какие дифференциальные уравнения — (1) или (2) — используются для получения элементов орбит этого астероида.

В результате коррекции орбиты начальных данных астероида Дуэнде с использованием формул (3) средняя аномалия  $M$  увеличилась на 0.000075, аргумент перигелия  $\omega$  уменьшился на 0.000075, а эксцентриситет  $e$  увеличился на 0.00000013, остальные элементы остались без изменения. Вследствие малых изменений начальных данных элементов орбит астероида коррекция существенно не влияет на результаты численного интегрирования.

**Астероид 2012 UE<sub>34</sub>.** Астероид принадлежит группе Аполлона. Его диаметр около 63 м, количество наблюдений — 48.

В табл. 6 приведены элементы орбит астероида 2012 UE<sub>34</sub> на эпоху 13 ноября 2019 г., полученные путем решения уравнений движения (1) и (2), начальные данные взяты на эпоху 5 августа 2019 г. В первой строке табл. 6 находятся элементы орбит, полученные на основе наблюдений, в последующих строках — найденные с помощью интегрирования уравнений (1) и (2).

Из сравнения элементов орбит астероида 2012 UE<sub>34</sub>, найденных с помощью наблюдений на эпоху 13 ноября 2019 г. и с использованием решения уравнений (1), следует, что разность между элементами орбит составляет:  $\Delta M = -0.001956^\circ$ ,  $\Delta a = 0.00000076$  а.е.,  $\Delta e = 0.00000041$ ,  $\Delta \omega = -0.000258^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0.000003^\circ$ ,  $\Delta i = 0.000049^\circ$ . Столь значительное расхождение элементов орбит, по-видимому, связано с малым количеством наблюдений, с помощью

Таблица 6

Элементы орбит астероида 2012 UE<sub>34</sub>, полученные решением уравнений движения (1) и (2)  
 [Orbital elements of asteroid 2012 UE<sub>34</sub> calculated by the motion equations (1) and (2)]

$\frac{\text{Current date}}{\text{Initial date}}$	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
2019 11 13	observations	200.756740	1.10525592	0.09926301	18.372284	198.474899	9.658314
2019 08 05	by the Eq. (1)	200.758696	1.10525516	0.09926260	18.372542	198.474893	9.658265
	by the Eq. (2)	200.756694	1.10525516	0.09926260	18.372544	198.474892	9.658265

Таблица 7

Элементы орбит астероида 2012 UE<sub>34</sub>, полученные по различным начальным данным  
 [Orbital elements of asteroid 2012 UE<sub>34</sub> calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	210.9873	1.1303638	0.1198196	17.6157	199.8203	9.3454
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	206.1183	1.1266540	0.1170861	18.1807	199.8882	9.3743
1991 02 13	by the Eq. (1)	301.5303	1.1366802	0.1247145	17.7198	198.9093	9.3001
JD 2448300.5	by the Eq. (2)	301.5301	1.1368536	0.1247091	17.7194	198.9093	9.3002
1991 05 24	by the Eq. (1)	23.3741	1.1063198	0.0999897	18.2661	198.6802	9.6508
JD 2448400.5	by the Eq. (2)	23.3743	1.1063198	0.0999896	18.2659	198.6802	9.6508
2019 08 05	by the Eq. (1)	115.912364	1.1057793	0.0992948	18.392565	198.476118	9.658458
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	115.912364	1.1057793	0.0992948	18.392565	198.476118	9.658458
2041 03 22	by the Eq. (1)	330.1970	1.1069045	0.1005231	18.6453	198.1965	9.6633
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	330.1969	1.1069045	0.1005231	18.6454	198.1965	9.6633
2041 06 30	by the Eq. (1)	72.8574	1.1219000	0.1086517	355.0058	197.9322	9.8664
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	72.8514	1.1219418	0.1086846	355.0081	197.9322	9.8660
2100 02 01	by the Eq. (1)	212.0540	1.1153689	0.1033083	355.3024	197.3397	9.9263
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	201.2951	1.1144423	0.1025756	355.4725	197.2419	9.9310

Окончание табл. 7 [End of the Table 7]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — November 13, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	147.70643	1.1160869	0.1105149	22.0528	199.9363	9.3860
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	175.9209	1.1194219	0.1124193	20.8269	199.9037	9.3885
1991 02 13	by the Eq. (1)	301.5133	1.1358656	0.1238800	17.6435	198.9070	9.3166
JD 2448300.5	by the Eq. (2)	301.5130	1.1358631	0.1238782	17.6436	198.9070	9.3166
1991 05 24	by the Eq. (1)	23.3790	1.1063200	0.0999896	18.2661	198.6802	9.6509
JD 2448400.5	by the Eq. (2)	23.3792	1.1063200	0.0999896	18.2658	198.6802	9.6509
2019 11 13	by the Eq. (1)	200.756740	1.10525592	0.09926301	18.372284	198.474899	9.658314
JD 2458800.5	by the Eq. (2)	200.756740	1.10525592	0.09926301	18.372284	198.474899	9.658314
2041 03 22	by the Eq. (1)	330.1933	1.1069042	0.1005226	18.6450	198.1966	9.6634
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	330.1931	1.1069042	0.1005226	18.6452	198.1966	9.6634
2041 06 30	by the Eq. (1)	71.2048	1.1304986	0.1153238	356.0294	197.9337	9.7898
JD 2466400.5	by the Eq. (2)	71.2037	1.1305110	0.1153335	356.0292	197.9337	9.7897
2100 02 01	by the Eq. (1)	312.1139	1.1278948	0.1132990	356.7267	197.3405	9.8165
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	312.0451	1.1279291	0.1133267	356.7264	197.3418	9.8162

которых определялись элементы орбит астероида 2012 UE<sub>34</sub> на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г.

В табл. 7 представлены элементы орбит астероида 2012 UE<sub>34</sub> на моменты времени вблизи сближения астероида с Землей и Луной, а также на концах интервала интегрирования 1900 г. и 2100 г., полученные с использованием решений уравнений (1) и (2).

В момент сближения астероида с Землей предельная относительная погрешность разности координат астероида 2012 UE<sub>34</sub> с Землей значительно превосходит предельную относительную погрешность координат астероида:  $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 2980$ ,  $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 1736$ ,  $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 6080$ , что непосредственно отражается на результатах численного интегрирования. Если до момента сближения астероида 2012 UE<sub>34</sub> с Землей элементы его орбит, найденные с использованием дифференциальных уравнений (1) и (2), практически совпадают, то после сближения они существенно различаются (см. табл. 7). Различие элементов орбит на момент 30.6.2041 достигает следующих значений:  $\Delta M = -1.6526^\circ$ ,  $\Delta a = 0.0085986$  а.е.,  $\Delta e = 0.0066721$ ,  $\Delta \omega = 1.0236^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0.0015^\circ$ ,  $\Delta i = -0.0766^\circ$ .

Из результатов сравнения следует, что большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  сохраняют совпадение до двух значащих цифр после запятой, расхождения средних аномалий  $M$  и аргументов перигелиев  $\omega$  составляют свыше  $1^\circ$ . Полученные расхождения элементов орбит связаны как с наличием сближения астероида 2012 UE<sub>34</sub> с Землей, так и с точностью начальных данных на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г.

Дальнейшее улучшение точности прогнозирования движения астероида 2012 UE<sub>34</sub> возможно с увеличением точности начальных данных его элементов орбит.

**Астероид 1999 AN<sub>10</sub>.** Астероид является членом группы Аполлона. Его диаметр составляет около 700 м, количество наблюдений — 165. Он относится к числу опасных астероидов в случае столкновения с Землей. Астероид 1999 AN<sub>10</sub> имеет умеренное сближение с Землей на расстоянии 0.00259 а.е. 7 августа 2017 г. Для астероида 1999 AN<sub>10</sub> элементы орбит, найденные на моменты 5 августа 2019 г. и 13 ноября 2019 г. с помощью наблюдений, на сайте NASA<sup>1</sup> отсутствуют, поэтому для оценки погрешности смещения начальных данных на эти моменты использовались данные, соответствующие эпохе 1 июля 2018 г. Элементы орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub> на момент 1 июля 2018 г. имеют следующие значения:  $M = 330.165037^\circ$ ,  $a = 1.45869566$  а.е.,  $e = 0.56221500$ ,  $\omega = 268.322903^\circ$ ,  $\Omega = 314.389797^\circ$ ,  $i = 38.931932^\circ$ .

В табл. 8 приведены элементы орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub> на момент 5 августа 2019 г., полученные путем решения уравнений движения (1) и (2). Начальные данные астероида брались на эпоху 1 июля 2018 г. В первой строке табл. 8 представлены начальные данные элементов орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub> на эпоху 5 августа 2019 г., размещенные на сайте [smallbodies.ru](http://smallbodies.ru), во второй и третьей строках — элементы орбит, найденные с помощью решения уравнений движения (1) и (2).

Из сопоставления элементов орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub>, представленных в табл. 8, следует, что они различаются между собой незначительно, так как разность между соответствующими элементами находится в пределах погрешностей наблюдений.

<sup>1</sup><https://asteroid.lowell.edu/main/astorb>

Таблица 8

Элементы орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub>, полученные решением уравнений движения (1) и (2)

[Orbital elements of asteroid 1999 AN<sub>10</sub> calculated by the motion equations (1) and (2)]

<u>Current date</u> Initial date	Data sources (calculated by)	<i>M</i> (in degrees)	<i>a</i> (in au)	<i>e</i>	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	<i>i</i> (in degrees)
2019 08 05	observations	193.950022	1.45870900	0.56212000	268.330505	314.383261	39.930942
2018 07 01	by the Eq. (1)	193.950034	1.45870860	0.56212010	268.330498	314.383261	39.930942
	by the Eq. (2)	193.950022	1.45870867	0.56212010	268.330505	314.383261	39.930942

Таблица 9

Элементы орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub>, полученные по различным начальным данным

[Orbital elements of asteroid 1999 AN<sub>10</sub> calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	<i>M</i> (in degrees)	<i>a</i> (in au)	<i>e</i>	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	<i>i</i> (in degrees)
Initial date — July 1, 2018							
1900 03 22	by the Eq. (1)	230.3963	1.4547088	0.5616555	267.7807	315.2951	39.9666
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	230.5500	1.4547165	0.5616536	267.7812	315.2951	39.9667
1946 06 29	by the Eq. (1)	8.1235	1.4533749	0.5615438	267.8509	314.9451	39.9688
JD 2433200.5	by the Eq. (2)	8.1209	1.4534137	0.5615467	267.8527	314.9450	39.9687
1946 10 07	by the Eq. (1)	64.0458	1.4577505	0.5620291	268.0734	314.9428	39.9480
JD 2432100.5	by the Eq. (2)	64.0439	1.4577505	0.5620291	268.0730	314.9428	39.9480
2018 07 01	by the Eq. (1)	330.165037	1.45869566	0.56221500	268.322903	314.389797	39.931932
JD 2458300.5	by the Eq. (2)	330.165037	1.45869566	0.56221500	268.322903	314.389797	39.931932
2027 07 14	by the Eq. (1)	16.5546	1.4586290	0.5620482	268.3269	314.3215	39.9320
JD 2461600.5	by the Eq. (2)	16.5545	1.4586289	0.5620482	268.3270	314.3215	39.9320
2027 10 22	by the Eq. (1)	73.3845	1.4482730	0.5603545	267.8858	314.3186	40.0090
JD 2461700.5	by the Eq. (2)	73.3853	1.4482631	0.5603529	267.8854	314.3187	40.0091
2100 02 01	by the Eq. (1)	244.5575	1.4481036	0.5605158	267.9977	313.7713	39.9979
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	244.4425	1.4481178	0.5605133	267.9919	313.7712	39.9981

Окончание табл. 9 [End of the Table 9]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eq. (1)	231.9169	1.4548032	0.5616446	267.7910	315.2948	39.9674
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	231.8607	1.4547992	0.5616450	267.7899	315.2948	39.9674
1946 06 29	by the Eq. (1)	8.1022	1.4536585	0.5615644	267.8664	314.9450	39.9681
JD 2433200.5	by the Eq. (2)	8.1003	1.4536814	0.5615661	267.8678	314.9450	39.9681
1946 10 07	by the Eq. (1)	64.0296	1.4577506	0.5620290	268.0728	314.9428	39.9480
JD 2432100.5	by the Eq. (2)	64.0281	1.4577507	0.5620290	268.0728	314.9428	39.9480
2019 08 05	by the Eq. (1)	193.950022	1.45870900	0.56212000	268.330505	314.383261	39.930942
JD 2458700.5	by the Eq. (2)	193.950022	1.45870900	0.56212000	268.330505	314.383261	39.930942
2027 07 14	by the Eq. (1)	16.5539	1.4586294	0.5620481	268.3269	314.3215	39.9320
JD 2461600.5	by the Eq. (2)	16.5539	1.4586292	0.5620481	268.3270	314.3215	39.9320
2027 10 22	by the Eq. (1)	73.3905	1.4481961	0.5603405	267.8827	314.3186	40.0097
JD 2461700.5	by the Eq. (2)	73.3903	1.4481987	0.5603412	267.8828	314.3186	40.0096
2100 02 01	by the Eq. (1)	247.3241	1.4466384	0.5601487	267.8496	313.7704	40.0171
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	247.3926	1.4466092	0.5601593	267.8515	313.7704	40.0165

В табл. 9 представлены элементы орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub>, найденные с использованием решения уравнений движения (1) и (2) с начальными данными, отнесенными к эпохе 1 июля 2018 г. и 5 августа 2019 г. При этом календарной дате соответствуют элементы орбит, полученные с использованием решений уравнений (1), а юлианской дате — с помощью решения уравнений (2). Элементы орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub> в табл. 9 представлены около моментов сближения с Землей, т. е. в 1946 г. и 2027 г., а также на концах интервала интегрирования — в 1900 г. и 2100 г.

Из сравнения элементов орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub>, приведенных в табл. 9, следует, что различие элементов в большей степени зависит от эпохи, на которую выбираются начальные данные, чем от метода численного интегрирования. При использовании уравнений движения (1) и (2), где начальные данные взяты на одну и ту же эпоху, расхождение элементов орбит менее значительное, чем при выборе начальных данных на различные моменты (см. табл. 9). На интервале времени с 7 октября 1946 г. по 4 июля 2017 г. элементы орбит, полученные с помощью решения уравнений (1) и (2), практически совпадают. На левом конце интервала интегрирования 22 марта 1900 г. различие элементов орбит астероида 1999 AN<sub>10</sub> несколько меньше, чем на правом конце 1 февраля 2100 г., что находится в прямой зависимости от величины сближения астероида с Землей. Потеря точности численного интегрирования происходит в основном на участках сближения астероида с Землей на интервалах времени с 29 июня 1946 г. по 7 октября 1946 г. и с 4 июля 2027 г. по 22 октября 2017 г. В результате сближения астероида с Землей относительная погрешность величины разности координат астероида и Земли примерно в  $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 637$ ,  $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 1291$ ,  $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 699$  раз превышает предельную относительную погрешность координат астероида, что непосредственно отражается на результатах численного интегрирования. Как видно из табл. 9, разность между элементами орбит на момент 22 октября 2027 г. следующая:  $\Delta M = 0.0060^\circ$ ,  $\Delta a = 0.0000769$  а.е.,  $\Delta e = 0.000014$ ,  $\Delta \omega = -0.0031^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0^\circ$ ,  $\Delta i = 0.0007^\circ$ .

В результате на концах этих интервалов потеря точности в большой полуоси и эксцентриситете составляет два порядка от начальной точности (см. табл. 8 и 9).

**Астероид 2001 WN<sub>5</sub>.** Астероид принадлежит группе Аполлона. Его примерный диаметр составляет 610 м, количество наблюдений — 544. Тесные сближения с большими планетами астероида 2001 WN<sub>5</sub> не обнаружены, однако 26 июля 2028 г. он пройдет от Земли на расстоянии 0.00166 а.е.

В табл. 10 приведены элементы орбит астероида 2001 WN<sub>5</sub>, полученные путем решения уравнений движения (1) и (2), где начальные данные взяты на эпоху 1 июля 2018 г. По разности элементов орбит в табл. 10 можно определить погрешность начального смещения для каждого метода решения. Так, например, разности элементов орбит, полученных с помощью решения уравнений (1), и орбитой, полученной с помощью наблюдений, на момент 5 августа 2019 г. составляют следующие величины:  $\Delta M = 0.000017^\circ$ ,  $\Delta a = -0.00000012$  а.е.,  $\Delta e = 0.00000016$ ,  $\Delta \omega = -0.000094^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0.000094^\circ$ ,  $\Delta i = 0^\circ$ .

В табл. 11 представлены элементы орбит астероида 2001 WN<sub>5</sub>, найденные с использованием решения уравнений (1) и (2).

Таблица 10

Элементы орбит астероида 2001 WN<sub>5</sub>, полученные решением уравнений движения (1) и (2)[Orbital elements of asteroid 2001 WN<sub>5</sub> calculated by the motion equations (1) and (2)]

Current date Initial date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
2019 08 05	observations	354.331175	1.71226200	0.46717200	44.526790	277.502911	1.920025
2018 07 01	by the Eq. (1)	354.331192	1.71226188	0.46717216	44.526696	277.503006	1.920025
	by the Eq. (2)	354.331193	1.71226175	0.46717215	44.526700	277.503006	1.920025

Таблица 11

Элементы орбит астероида 2001 WN<sub>5</sub>, полученные по различным начальным данным[Orbital elements of asteroid 2001 WN<sub>5</sub> calculated from different initial data]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — July 1, 2018							
1900 03 22	by the Eq. (1)	234.0925	1.7096245	0.4664074	40.9102	280.5116	1.9493
JD 2415100.5	by the Eq. (2)	234.0922	1.7096243	0.4664074	40.9098	280.5116	1.9493
1979 01 27	by the Eq. (1)	318.5067	1.7118063	0.4675718	43.5168	278.2692	1.9298
JD 2443900.5	by the Eq. (2)	318.5068	1.7118063	0.4675718	43.5167	278.2692	1.9298
2018 07 01	by the Eq. (1)	178.265600	1.71171424	0.46705841	44.550160	277.509563	1.920008
JD 2458300.5	by the Eq. (2)	178.265600	1.71171424	0.46705841	44.550160	277.509563	1.920008
2028 05 09	by the Eq. (1)	322.4042	1.7120438	0.4669588	44.8912	277.2136	1.9172
JD 2461900.5	by the Eq. (2)	322.4042	1.7120437	0.4669588	44.8912	277.2136	1.9172
2028 08 17	by the Eq. (1)	6.2353	1.6835907	0.4597311	46.3609	276.6918	2.3957
JD 2462000.5	by the Eq. (2)	6.2352	1.6835804	0.4597289	46.3613	276.6919	2.3956
2100 02 01	by the Eq. (1)	265.6257	1.6827648	0.4595992	47.9946	275.2588	2.3860
JD 2488100.5	by the Eq. (2)	265.4845	1.6827846	0.4596081	47.9774	274.2758	2.3855



Окончание табл. 11 [End of the Table 11]

Current date	Data sources (calculated by)	$M$ (in degrees)	$a$ (in au)	$e$	$\omega$ (in degrees)	$\Omega$ (in degrees)	$i$ (in degrees)
Initial date — August 5, 2019							
1900 03 22	by the Eqs. (1)	234.0954	1.7096253	0.4663944	40.9138	280.5117	1.9493
JD 2415100.5	by the Eqs. (2)	234.0977	1.7096256	0.4664076	40.9094	280.5119	1.9493
1979 01 27	by the Eqs. (1)	318.5071	1.7118061	0.4675715	43.5169	278.2691	1.9298
JD 2443900.5	by the Eqs. (2)	318.5074	1.7118059	0.4675715	43.5168	278.2692	1.9298
2019 08 05	by the Eqs. (1)	354.331175	1.71226200	0.46717200	44.526790	277.502911	1.920025
JD 2458700.5	by the Eqs. (2)	354.331175	1.71226200	0.46717200	44.526790	277.502911	1.920025
2028 05 09	by the Eqs. (1)	322.4040	1.7120438	0.4669586	44.8913	277.2135	1.9172
JD 2461900.5	by the Eqs. (2)	322.4039	1.7120439	0.4669586	44.8913	277.2135	1.9172
2028 08 17	by the Eqs. (1)	6.2360	1.6836639	0.4597467	46.3582	276.6908	2.3970
JD 2462000.5	by the Eqs. (2)	6.2366	1.6837321	0.4597615	46.3556	276.6899	2.3982
2100 02 01	by the Eqs. (1)	244.6168	1.6826817	0.4595428	48.2220	275.0543	2.3896
JD 2488100.5	by the Eqs. (2)	242.8628	1.6937600	0.4622248	47.9212	274.9574	2.3826

Как видно из табл. 11, на интервале времени с 22 марта 1900 г. по 9 мая 2028 г. элементы орбит астероида 2001 WN<sub>5</sub>, найденные с использованием различных методов, практически совпадают. В результате сближения астероида 2001 WN<sub>5</sub> с Землей 26 июня 2028 г. (см. табл. 1) относительная погрешность разности координат астероида и Земли примерно в  $\delta_X/\delta_{X_A} \approx 227$ ,  $\delta_Y/\delta_{Y_A} \approx 3998$ ,  $\delta_Z/\delta_{Z_A} \approx 574$  раза превысит предельную относительную погрешность самих координат астероида. В результате сближения астероида 2001 WN<sub>5</sub> с Землей разность между соответствующими элементами орбит на момент 26 июня 2028 г. (см. табл. 11) достигает следующих значений:  $\Delta M = 0.0007^\circ$ ,  $\Delta a = 0.0000732$  а.е.,  $\Delta e = 0.0000156$ ,  $\Delta \omega = -0.0027^\circ$ ,  $\Delta \Omega = 0.0010^\circ$ ,  $\Delta i = 0.0022^\circ$ . Из сравнения элементов орбит следует, что большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$  сохраняют совпадение до четырех, а расхождения средних аномалий  $M$  и аргументов перигелиев  $\omega$  — до двух значащих цифр после запятой.

Повышение точности численного интегрирования уравнений движения астероида 2001 WN<sub>5</sub>, как и в предыдущих случаях, связано с улучшением точности начальных данных его элементов орбит.

**Заключение.** На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

- а) учет коррекции начальных данных оказал на эволюцию орбит исследуемых астероидов несущественное влияние;
- б) наибольшая потеря точности численного интегрирования уравнений движения (1) и (2) происходит на участках сближения астероида с Землей, при этом точность результатов интегрирования находится в прямой зависимости от величины сближения;
- в) для исследуемых астероидов при сближении их с Землей относительная погрешность разности координат астероида и Земли превышает предельную относительную погрешность самих координат астероида на несколько порядков (от 227 до 44 900 раз);
- г) при отсутствии сближения астероида с Землей на расстояние менее 0.1 а.е. решение уравнений (1) и (2) приводит практически к одинаковым результатам;
- д) результаты исследований можно обобщить на все астероиды групп Аполлона и Атона.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

### Библиографический список

1. *Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра* / ред. Б. М. Шустов, Л. В. Рыхлова. М.: Физматлит, 2010. 384 с.
2. Krasinsky G. A., Pitjeva E. V., Vasilyev M. V., Yagudina E. I. Hidden mass in the asteroid belt // *Icarus*, 2002. vol. 158, no. 1. pp. 98–105. <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6837>.
3. Адушкин В. В., Басиев Э. У., Зыков Ю. Н. и др. *Катастрофические воздействия космических тел*. М.: Академкнига, 2005. 310 с.

4. Чебогарев Г. А. *Аналитические и численные методы небесной механики*. М., Л.: Наука, 1965. 368 с.
5. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. М.: Наука, 1968. 800 с.
6. Брумберг В. А. *Релятивистская небесная механика*. М.: Наука, 1972. 384 с.
7. Заусаев А. Ф. Исследование движения планет, Луны и Солнца, основанное на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. №3(36). С. 118–131. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
8. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение различных математических моделей на примере решения уравнений движения больших планет и Луны // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т.23, №1. С. 152–185. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
9. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides: DE405/LE405*. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26. 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
10. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. *Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы*. М.: Машиностроение-1, 2008. 250 с.
11. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. *Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе*. Самара: СамГТУ, 2017. 265 с.
12. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // *Astron. Astrophys.*, 1983. vol. 125, no. 1. pp. 150–167.
13. Заусаев А. Ф., Абрамов В. В., Денисов С. С. *Каталог орбитальной эволюции астероидов, сближающихся с Землей с 1800 по 2204 гг.* М.: Машиностроение, 2007. 608 с.
14. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // *Celestial Mech.*, 1974. vol. 10, no. 1. pp. 35–55. <https://doi.org/10.1007/BF01261877>.
15. Бордовицина Т. В. *Современные численные методы в задачах небесной механики*. М.: Наука, 1984. 136 с.
16. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А., Ольхин А. Г. Численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий–Плутон) и Луны с учетом радиолокационных наблюдений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. №26. С. 43–47. <https://doi.org/10.14498/vsgtu175>.
17. Соколов Л. Л., Башаков А. А., Питъев Н. П. Особенности движения астероида 99942 Апофис // *Астроном. вестн.*, 2008. Т. 42, №1. С. 18–27.
18. Заусаев А. Ф., Деревянка А. Е. Сравнительный анализ математических моделей для оценки вероятности столкновения с Землей астероида Апофис // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №2(27). С. 192–195. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1058>.
19. Шор В. А., Кочетова О. М., Соколов Л. Л. Опасный астероид (99942) Апофис / *Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра*; ред. Б. М. Шустов, Л. В. Рыхлова. М.: Физматлит, 2010. С. 206–223.
20. Hamming R. W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. New York, NY: Dover Publ., 1986. xii+721 pp.
21. Демидович Б. П., Марон И. А. *Основы вычислительной математики*. М.: Физматлит, 1963. 660 с.
22. Заусаев А. Ф., Деревянка А. Е., Денисов С. С. Исследование эволюции астероида 2012 DA14 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 211–214. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1082>.

MSC: 70F15, 70M20, 65L05

## Mathematical modeling of the asteroids' motion belonging to the Apollo and Aten groups

© A. F. Zausaev, M. A. Romanyuk, A. A. Zausaev

Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

This article evaluates the accuracy of solutions to differential equations of motion, taking into account relativistic effects obtained on the basis of a new principle of interaction, using the example of studies of the evolution of the orbits of five asteroids. A numerical integration of equations of the asteroids' motion with the initial data referred to different points in time is carried out. Based on a comparison of the results of the study, certain patterns are revealed. At time intervals in the absence of rapprochement of the asteroid with the Earth less than 0.1 au it is possible to apply with equal efficiency the differential equations given in the paper. The loss of accuracy of numerical integration is directly dependent on the magnitude of the rapprochement of the asteroid with the Earth. Due to the fact that in the right sides of the equations of motion we have differences of the coordinates of the asteroid and the planet, with sufficient proximity, the relative accuracy of the coordinates is many times greater than the relative accuracy of the difference. For the studied asteroids, when they approach the Earth, the relative error of the difference in the coordinates of the asteroid and the Earth is approximately 227 to 44900 times higher than the limiting relative error of the coordinates of the asteroid itself. Predicting the motion of Apophis after its close approach to the Earth based on the solution of the equations of motion by modern methods leads to large errors, the reduction of which is possible only by improving the initial data of the elements of the orbits of the asteroid. About the possibility of close approach of Apophis with the Earth on a time interval from April 14, 2029 to January 1, 2100 it can be argued with a certain degree of probability. The results of the research can be generalized to all asteroids of Apollo and Aten groups.

### Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Zausaev A. F., Romanyuk M. A., Zausaev A. A. Mathematical modeling of the asteroids' motion belonging to the Apollo and Aten groups, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 692–717. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1779> (In Russian).


#### Authors' Details:

Anatoliy F. Zausaev  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;  
e-mail: [zausaev\\_af@mail.ru](mailto:zausaev_af@mail.ru)

Mariya A. Romanyuk  <https://orcid.org/0000-0003-0796-2061>

Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;  
e-mail: [zausmasha@mail.ru](mailto:zausmasha@mail.ru)

Artem A. Zausaev  <https://orcid.org/0000-0002-5184-3943>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: [zausaevaa@mail.ru](mailto:zausaevaa@mail.ru)

**Keywords:** numerical integration, differential motion equations, asteroids, (99942) Apofis, (367943) Duende, 2012 UE<sub>34</sub>, 1999 AN<sub>10</sub>, 2001 WN<sub>5</sub>.

Received: 6<sup>th</sup> April, 2020 / Revised: 3<sup>rd</sup> November, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 18<sup>th</sup> December, 2020

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. *Asteroidno-kometnaia opasnost': vchera, segodnia, zavtra* [Asteroid-Comet Hazard: Yesterday, Today, and Tomorrow], ed. B. M. Shustov, L. V. Rykhlova. Moscow, Fizmatlit, 2010, 384 pp. (In Russian)
2. Krasinsky G. A., Pitjeva E. V., Vasilyev M. V., Yagudina E. I. Hidden mass in the asteroid belt, *Icarus*, 2002, vol. 158, no. 1, pp. 98–105. <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6837>.
3. Adushkin V. V., Basiev E. U., Zykov Yu. N., et al. *Katastroficheskie vozdeistviia kosmicheskikh tel* [Catastrophic Impacts of Cosmic Bodies]. Moscow, Akademkniga, 2005, 310 pp. (In Russian)
4. Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, vol. 9, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1967, xviii+331 pp.
5. Subbotin M. F. *Vvedenie v teoreticheskuiu astronomiiu* [Introduction to Theoretical Astronomy]. Moscow, Nauka, 1968, 800 pp. (In Russian)
6. Brumberg V. A. *Relativistskaia nebesnaia mekhanika* [Relativistic Celestial Mechanics]. Moscow, Nauka, 1972, 384 pp. (In Russian)
7. Zausaev A. F. The Investigation of the Motion of Planets, the Moon, and the Sun Based on a New Principle of Interaction, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 118–131 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
8. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of various mathematical models on the example of solving the equations of the movement of large planets and the Moon, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 152–185 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
9. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F–98-048, 1998, August 26, 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
10. Zausaev A. F., Zausaev A. A. *Matematicheskoe modelirovanie orbital'noi evoliutsii malykh tel Solnechnoi sistemy* [Mathematical Modelling of Orbital Evolution of Small Bodies of the Solar System]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2008, 250 pp. (In Russian)
11. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. *Chislennye metody v zadachakh matematicheskogo modelirovaniia dvizheniia nebesnykh tel v Solnechnoi sisteme* [Numerical Methods in the Problems of Mathematical Modeling of the Motion of Celestial Bodies in the Solar System]. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, 265 pp. (In Russian)
12. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 125, no. 1, pp. 150–167.

13. Zausaev A. F., Abramov V. V., Denisov S. S. *Katalog orbital'noi evoliutsii asteroidov, sblizhaiushchikhsia s Zemlei s 1800 po 2204 gg.* [Catalog of Orbital Evolution for Asteroid Approaching the Earth since 1800 until 2204]. Moscow, Mashinostroenie, 2007, 608 pp. (In Russian)
14. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits, *Celestial Mech.*, 1974, vol. 10, no. 1, pp. 35–55. <https://doi.org/10.1007/BF01261877>.
15. Bordovitsyna T. V. *Sovremennyye chislennyye metody v zadachakh nebesnoi mekhaniki* [Modern Numerical Methods in Celestial Mechanics Problems]. Moscow, Nauka, 1984, 136 pp. (In Russian)
16. Zausaev A. F., Zausaev A. A., Ol'khin A. G. The numerical integration of the equations of motion for large planets (Mercury and Pluto) and the Moon with the radar observations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2004, no. 26, pp. 43–47 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu175>.
17. Sokolov L. L., Bashakov A. A., Pitjev N. P. Peculiarities of the motion of asteroid 99942 Apophis, *Sol. Syst. Res.*, 2008, vol. 42, no. 1, pp. 18–27. <https://doi.org/10.1134/S0038094608010036>.
18. Zausaev A. F., Derevyanka A. E. Comparative analysis of mathematical models for estimating the impact probability of asteroid Apophis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 2(27), pp. 192–196 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1058>.
19. Shor V. A., Kochetova O. M., Sokolov L. L. Dangerous asteroid (99942) Apophis, In: *Asteroidno-kometnaia opasnost': vchera, segodnia, zavtra* [Asteroid-Comet Hazard: Yesterday, Today, and Tomorrow]; ed. B. M. Shustov, L. V. Rykhlova. Moscow, Fizmatlit, 2010, pp. 206–223 (In Russian).
20. Hamming R. W. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. New York, NY, Dover Publ., 1986, xii+721 pp.
21. Demidovich B. P., Maron I. A. *Computational Mathematics*. Moscow, Mir Publ., 1981, 688 pp.
22. Zausaev A. F., Denisov S. S., Derevyanka A. E. Research of the orbital evolution of asteroid 2012 DA14, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 211–214 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1082>.



УДК 517.927.4:519.624

# Метод повышения порядка аппроксимации до произвольного натурального числа при численном интегрировании матричным методом краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений различных степеней с переменными коэффициентами

© В. Н. Маклаков

Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

## Аннотация

В работе использован известный матричный метод численного интегрирования краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, который позволяет удерживать произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения или, что то же самое, позволяет использовать многочлен Тейлора произвольной степени.

Разностная краевая задача, аппроксимирующая дифференциальную краевую задачу, разбита на две подзадачи: в первую подзадачу вошли разностные уравнения, при построении которых не были использованы граничные условия краевой задачи; во вторую подзадачу вошли разностные уравнения, при построении которых были использованы граничные условия задачи.

Исходя из ранее установленных фактов дан и апробирован метод повышения порядка аппроксимации на единицу второй подзадачи, а следовательно, и всей разностной краевой задачи в целом. Перечислим эти установленные факты:

- порядок аппроксимации первой и второй подзадач пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
- порядок аппроксимации первой подзадачи зависит от четности или нечетности степени используемого многочлена Тейлора. Оказалось, что при использовании степеней многочлена Тейлора, равных  $2m - 1$  и  $2m$ , порядки аппроксимации этих двух подзадач совпадают;
- порядок аппроксимации второй подзадачи совпадает с порядком аппроксимации первой подзадачи, если во второй подзадаче отсутствуют заданные значения каких-либо производных, входящих в граничные условия;


## Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

## Образец для цитирования

Маклаков В. Н. Метод повышения порядка аппроксимации до произвольного натурального числа при численном интегрировании матричным методом краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений различных степеней с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 718–751. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1785>.

## Сведения об авторе

Владимир Николаевич Маклаков  <https://orcid.org/0000-0003-1644-7424>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. прикладной математики и информатики; e-mail: makvo63@yandex.ru

- г) наличие во второй подзадаче хотя бы одного значения производной той или иной степени, входящей в граничные условия, приводит к понижению порядка аппроксимации на единицу как второй подзадачи, так и всей разностной краевой задачи в целом.

Теоретические выводы подтверждены численными экспериментами.

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора.

Получение: 12 мая 2019 г. / Исправление: 17 сентября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 26 ноября 2020 г.

**Введение.** Известно, что использование конечных разностей приводит ко второму порядку аппроксимации (ПА) при численном интегрировании как краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (ОДУ2) [1–6], так и ряда краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных [4–10]. Последнее обусловлено тем, что при аппроксимации производных конечными разностями удерживалось всего три члена разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи или, что то же самое, был использован многочлен Тейлора второй степени. В работе будет применяться предложенный в [11] метод, использующий средства матричного исчисления, численного интегрирования краевых задач для ОДУ2, который позволяет удерживать произвольное число членов разложения в ряд Тейлора искомого решения задачи, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями.

**1. Обозначения.** Далее будем придерживаться принятых в [4] обозначений:

- а)  $D$  — область интегрирования, ограниченная отрезком  $[a, b]$ ,  $D_h$  — узлы сетки, определяемые значениями  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ ,  $h = (b - a)/n$ ,  $n + 1$  — число узлов сетки;
- б)  $x(t)$  — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи;
- в)  $[x]_h$  — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки  $D_h$ ;
- г)  $x^{(h)}$  — искомая сеточная функция.

Для краткости примем для любой функции обозначение  $\varphi(t_i) = \varphi_i$ , где  $t_i$  — узел сетки  $D_h$ .

В дальнейшем опустим индекс  $h$  в наименованиях сеточных функций  $[x]_h$ ,  $x^{(h)}$  и будем особо оговаривать случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция  $x(t)$ , являющаяся точным решением, при сохранении обозначений  $x(t_i) = x_i$  для нее в узлах сетки.



## 2. Некоторые предварительные результаты и постановка задачи.

Метод повышения ПА от единицы до двух в случае использования конечных разностей при аппроксимации производных при численном интегрировании задачи Коши и краевой задачи для ОДУ2 известен и дан, например, в [4, 5], где показано, что если в граничных условиях (ГУ) задачи хотя бы в одной из границ области интегрирования  $D$  имеется заданное значение первой производной искомой функции, то разностная задача аппроксимирует дифференциальную задачу с первым порядком аппроксимации относительно  $h$ , причем этот первый порядок дает оценка невязки [4] разностного уравнения, которое содержит значение этой первой производной; тогда как оставшиеся уравнения разностной задачи имеют невязки, приводящие ко второму порядку аппроксимации. Отметим, что метод повышения ПА до произвольного натурального числа в задачах для ОДУ2 в [4, 5] не дан.

Исследуем следующую дифференциальную краевую задачу для неоднородного линейного ОДУ4 с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} u(t)x^{(4)}(t) + s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + \\ \quad + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \\ \alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \tilde{z}_0, \\ x'(b) = \tilde{x}'_n, \quad x''(b) = \tilde{x}''_n, \quad x'''(b) = \tilde{x}'''_n, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u(t)$ ,  $s(t)$ ,  $r(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $f(t)$  — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз;  $x(t)$  — искомая функция, являющаяся точным решением задачи;  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\tilde{z}_0$ ,  $\tilde{x}'_n$ ,  $\tilde{x}''_n$ ,  $\tilde{x}'''_n$  — заданные числа. Отметим, что в задаче (1) все числа  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\lambda_0$  могут оказаться отличными от нуля одновременно; если все эти числа кроме одного обратятся в нуль, то будет получено одно из граничных условий в форме одного слагаемого вида:  $x(a) = \tilde{x}_0$ ,  $x'(a) = \tilde{x}'_0$ ,  $x''(a) = \tilde{x}''_0$ ,  $x'''(a) = \tilde{x}'''_0$ .

Оценка ПА задачи (1) при численном интегрировании матричным методом при фиксированной степени  $k$  используемого многочлена Тейлора дана в [12], где рассматриваемая дифференциальная краевая задача аппроксимирована двумя разностными подзадачами (подсистемами), являющимися системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Первая подзадача составлена из разностных уравнений, в которые не входят заданные значения из ГУ дифференциальной задачи, вторая — в которые входят все заданные значения из ГУ.

Первую подзадачу запишем в компактной символической форме [4]:

$$L_h^k x = f_h^k \quad (2)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} -\frac{b_{11}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-2} - \frac{b_{12}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i-1} + \frac{x_i}{b_{15}^{ki}} - \frac{b_{13}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+1} - \frac{b_{14}^{ki}}{b_{15}^{ki}}x_{i+2} = \\ = f_i + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{b_{1m}^{ki}}{b_{15}^{ki}} f_i^{(m-5)}, \quad i = 2, 3, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $i$  — номер центрального узла пятиточечного шаблона  $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, t_{i+2}$ .

Заметим, в [12] показано, что при вычислении ПА не важно, в которой из двух возможных границ сетки  $D_h$  записано то или иное ГУ. Вторую подзадачу запишем в компактной символической форме в виде

$$l_h^k x = g_h^k \tag{4}$$

или, с учетом замечания, в развернутой форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \frac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_3 - \frac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}} \tilde{z}_0, \\ -\frac{c_{12}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{c_{15}^{k2}} - \frac{c_{13}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_3 - \frac{c_{14}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{c_{1m}^{k2}}{c_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{c_{11}^{k2}}{c_{15}^{k2}} \tilde{x}_0, \\ -\frac{d_{12}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{d_{15}^{k2}} - \frac{d_{13}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_3 - \frac{d_{14}^{k2}}{d_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{d_{1m}^{k2}}{d_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{d_{11}^{k2}}{d_{15}^{k2}} \tilde{x}_0'', \\ -\frac{e_{12}^{k2}}{e_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{e_{15}^{k2}} - \frac{e_{13}^{k2}}{e_{15}^{k2}}x_3 - \frac{e_{14}^{k2}}{e_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{e_{1m}^{k2}}{e_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{e_{11}^{k2}}{e_{15}^{k2}} \tilde{x}_0'''. \end{array} \right. \tag{5}$$

Здесь и ниже в соответствии с [12] матрицы и коэффициенты разностного уравнения, при построении которого не были использованы ГУ или было использовано ГУ в форме значений искомой непрерывной функции  $x(t)$  в границе сетки  $D_h$ , обозначены как  $B^{ki}$  и  $b_{ml}^{ki}$  соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной первой степени от искомой функции — как  $C^{ki}$  и  $c_{ml}^{ki}$  соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной второй степени — как  $D^{ki}$  и  $d_{ml}^{ki}$  соответственно; было использовано ГУ в форме значений производной третьей степени — как  $E^{ki}$  и  $e_{ml}^{ki}$  соответственно; было использовано смешанное ГУ

$$\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) + \lambda_0 x'''(a) = \tilde{z}_0 \tag{6}$$

— как  $Q^{ki}$  и  $q_{ml}^{ki}$  соответственно. Указанные обозначения введены для внесения ясности в силу того, что во всех уравнениях СЛАУ (5) центральным узлом шаблона является узел  $t_2$ . Последнее приводит к совпадению номеров пар индексов в наименованиях ряда коэффициентов в уравнениях СЛАУ (5), вследствие чего зафиксировать отличия одного уравнения от другого оказалось возможным лишь различными наименованиями входящих в них коэффициентов. В обозначениях перечисленных матриц и их элементов первый верхний индекс, как и в [12–15], совпадает со степенью  $k$  используемого многочлена Тейлора, второй — с номером центрального узла пятиточечного шаблона, в котором матрица записана.

Методика построения указанных матриц и вычисления коэффициентов уравнений систем (3), (5) дана в [12] и будет проиллюстрирована ниже.

Первую и вторую подзадачи наряду с  $L_h^k x = f_h^k$  и  $l_h^k x = g_h^k$  будем ниже для краткости обозначать и как  $L_h^k$  и  $l_h^k$ .

Ранее в [12] установлено, что

- а) ПА подзадач (2) и (4) пропорционален степени используемого многочлена Тейлора;
- б) независимо от вида ГУ подзадача (2) имеет ПА, равный  $k-2$  при четном  $k$  и равный  $k-3$  при нечетном  $k$ ; подзадача (4) имеет ПА, равный  $k-3$  независимо от четности или нечетности  $k$ .

При четном  $k = 2m$ ,  $m > 2$ ,  $m$  — натуральное число, ПА задачи (2), (4) в соответствии с [4], равен  $\min(k - 2, k - 3) = k - 3$ ; при нечетном  $k = 2m + 1$  ПА также равен  $\min(k - 3, k - 3) = k - 3$ . Если при четном  $k = 2m$  удастся повысить ПА подзадачи (4) на единицу, то ПА всей задачи (2), (4) повысится до  $\min(k - 2, k - 2) = k - 2$  и совпадет с ПА этой же задачи при нечетном  $k = 2m + 1$ ; однако отметим: использование на практике такого нечетного  $k$  является нецелесообразным в силу того, что в этом случае значительно возрастет число  $\frac{8}{3}(k+1)^3 - \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{6}(k+1) - 1$  требуемых арифметических операций при вычислении обратных матриц методом Гаусса [16].

Поставим целью разработку метода повышения ПА краевых задач для ОДУ различных порядков при численном интегрировании матричным методом, когда ГУ задачи содержат хотя бы одно смешанное граничное условие или граничное условие в форме производной той или иной степени больше нуля.

**3. Метод повышения порядка аппроксимации разностной краевой задачи для ОДУ4.** В работе [12] показано, что ПА подзадачи (4) определяется либо смешанным ГУ (6), либо граничными условиями, записанными в форме производной той или иной степени больше нуля при условии отсутствия смешанного ГУ в условиях дифференциальной краевой задачи. Любое граничное условие в форме одного слагаемого является частным случаем смешанного ГУ, поэтому метод повышения ПА разностной краевой задачи (2), (4), которая аппроксимирует дифференциальную краевую задачу (1), исследуем при четном значении  $k = 4$  на примере смешанного ГУ (6), в котором нужно исключить следующий вариант входящих в него коэффициентов:  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ ; хотя, как будет показано ниже, исследование указанного варианта коэффициентов привело к ранее установленному в [12] факту.

В [12] показано, что разностное уравнение, при построении которого при фиксированном  $k$  использовано смешанное ГУ, дает оценку невязки, которая приводит к ПА второй подзадачи, равному  $k - 3$ ; откуда ПА подзадачи (4) при фиксированном четном  $k = 4$  окажется равным единице. При четном  $k = 4$  ПА первой подзадачи (2) окажется равным двум; всей задачи, в соответствии с [4] — единице. Попытаемся повысить ПА подзадачи (4) от единицы до двух на примере смешанного ГУ.

Вычислим производную по аргументу  $t$  от обеих частей ОДУ4 задачи (1), запишем итог в узле  $t_2$ :

$$q'_2[x_2] + (q_2 + p'_2)[x'_2] + (p_2 + r'_2)[x''_2] + (r_2 + s'_2)[x'''_2] + (s_2 + u'_2)[x_2^{(4)}] + u_2[x_2^{(5)}] = f'_2 \quad (7)$$

и выразим  $[x_2^{(5)}]$ . Получим точное равенство

$$[x_2^{(5)}] = -\frac{q'_2}{u_2}[x_2] - \frac{q_2 + p'_2}{u_2}[x'_2] - \frac{p_2 + r'_2}{u_2}[x''_2] - \frac{r_2 + s'_2}{u_2}[x'''_2] - \frac{s_2 + u'_2}{u_2}[x_2^{(4)}] + \frac{f'_2}{u_2}$$

или, введя соответствующие обозначения,

$$[x_2^{(5)}] = -\tilde{q}_2[x_2] - \tilde{p}_2[x'_2] - \tilde{r}_2[x''_2] - \tilde{s}_2[x'''_2] - \tilde{u}_2[x_2^{(4)}] + \tilde{f}_2. \quad (8)$$

Имеем точные равенства, в которых старшая степень производной превосходит  $k = 4$  на единицу:

$$[x_2] - 2h[x'_2] + 4\frac{h^2}{2!}[x''_2] - 8\frac{h^3}{3!}[x'''_2] + 16\frac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] - 32\frac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_0] - R_0^5, \quad (9)$$

$$[x'_2] - 2h[x''_2] + 4\frac{h^2}{2!}[x'''_2] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2^{(4)}] + 16\frac{h^4}{4!}[x_2^{(5)}] = [x'_0] - R_0^4, \quad (10)$$

$$[x''_2] - 2h[x'''_2] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(4)}] - 8\frac{h^3}{3!}[x_2^{(5)}] = [x''_0] - R_0^3, \quad (11)$$

$$[x'''_2] - 2h[x_2^{(4)}] + 4\frac{h^2}{2!}[x_2^{(5)}] = [x'''_0] - R_0^2, \quad (12)$$

где, например,  $R_0^2 = \frac{8h^3}{3!}x^{(6)}(\xi) = O(h^3)$ ,  $\xi \in (t_0, t_2)$  — дополнительный член разложения в ряд Тейлора в форме Лагранжа [17].

Обе части равенства (9) умножим на  $\alpha_0$ , равенства (10) — на  $\beta_0$ , равенства (11) — на  $\gamma_0$ , равенства (12) — на  $\lambda_0$  и сложим; в итоге получим точное равенство:

$$\begin{aligned} & \alpha_0[x_2] + (-2\alpha_0h + \beta_0)[x'_2] + \left(4\frac{\alpha_0h^2}{2!} - 2\beta_0h + \gamma_0\right)[x''_2] + \\ & \quad + \left(-8\frac{\alpha_0h^3}{3!} + 4\frac{\beta_0h^2}{2!} - 2\gamma_0h + \lambda_0\right)[x'''_2] - \\ & \quad - 2\left(-8\frac{\alpha_0h^4}{4!} + 4\frac{\beta_0h^3}{3!} - 2\frac{\gamma_0h^2}{2!} + \lambda_0h\right)[x_2^{(4)}] + \\ & \quad + 4\left(-8\frac{\alpha_0h^5}{5!} + 4\frac{\beta_0h^4}{4!} - 2\frac{\gamma_0h^3}{3!} + \frac{\lambda_0h^2}{2!}\right)[x_2^{(5)}] = \\ & = \alpha_0[x_0] + \beta_0[x'_0] + \gamma_0[x''_0] + \lambda_0[x'''_0] - \alpha_0R_0^5 - \beta_0R_0^4 - \gamma_0R_0^3 - \lambda_0R_0^2 = \\ & = \tilde{z}_0 - \alpha_0R_0^5 - \beta_0R_0^4 - \gamma_0R_0^3 - \lambda_0R_0^2 \end{aligned}$$

или, введя соответствующие обозначения,

$$\begin{aligned} A_0[x_2] + A_1[x'_2] + A_2[x''_2] + A_3[x'''_2] + A_4[x_2^{(4)}] + A_5[x_2^{(5)}] = \\ = \tilde{z}_0 - \alpha_0R_0^5 - \beta_0R_0^4 - \gamma_0R_0^3 - \lambda_0R_0^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 = \alpha_0, \quad A_1 = -2\alpha_0h + \beta_0, \quad A_2 = 4\frac{\alpha_0h^2}{2!} - 2\beta_0h + \gamma_0, \\ A_m = (-2)^{m-3} \left( -8\frac{\alpha_0h^m}{m!} + 4\frac{\beta_0h^{m-1}}{(m-1)!} - 2\frac{\gamma_0h^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{\lambda_0h^{m-3}}{(m-3)!} \right), \quad m = 3, 4, 5. \end{aligned}$$

При построении разностного уравнения, учитывающего смешанное ГУ (6), воспользуемся системой точных равенств, отличающейся от системы матричного метода в [12] при  $k = 4$  тем, что старшая степень производной в многочленах Тейлора превосходит  $k$  на единицу:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0[x_2] + A_1[x'_2] + A_2[x''_2] + A_3[x'''_2] + A_4[x_2^{(4)}] + A_5[x_2^{(5)}] = \\ \qquad \qquad \qquad = \tilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2, \\ [x_2] - h[x'_2] + \frac{h^2}{2!}[x''_2] - \frac{h^3}{3!}[x'''_2] + \frac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] - \frac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_1] - R_1^5, \\ [x_2] + h[x'_2] + \frac{h^2}{2!}[x''_2] + \frac{h^3}{3!}[x'''_2] + \frac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] + \frac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_3] - R_3^5, \\ [x_2] + 2h[x'_2] + 4\frac{h^2}{2!}[x''_2] + 8\frac{h^3}{3!}[x'''_2] + 16\frac{h^4}{4!}[x_2^{(4)}] + 32\frac{h^5}{5!}[x_2^{(5)}] = [x_4] - R_4^5, \\ q_2[x_2] + p_2[x'_2] + r_2[x''_2] + s_2[x'''_2] + u_2[x_2^{(4)}] = f_2. \end{array} \right. \quad (13)$$

Заметим, что эту систему можно трактовать как незамкнутую СЛАУ, состоящую из пяти уравнений с шестью неизвестными  $[x_2]$ ,  $[x'_2]$ ,  $[x''_2]$ ,  $[x'''_2]$ ,  $[x_2^{(4)}]$ ,  $[x_2^{(5)}]$ .

Подстановка точного равенства (8) в систему (13) дает замкнутую СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_0 - \tilde{q}_2 A_5)[x_2] + (A_1 - \tilde{p}_2 A_5)[x'_2] + (A_2 - \tilde{r}_2 A_5)[x''_2] + (A_3 - \tilde{s}_2 A_5)[x'''_2] + \\ \qquad \qquad \qquad + (A_4 - \tilde{u}_2 A_5)[x_2^{(4)}] = \tilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \tilde{f}_2 A_5, \\ \left(1 + \frac{\tilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2] - \left(h - \frac{\tilde{p}_2 h^5}{5!}\right)[x'_2] + \left(\frac{h^2}{2!} + \frac{\tilde{r}_2 h^5}{5!}\right)[x''_2] - \\ \qquad \qquad \qquad - \left(\frac{h^3}{3!} - \frac{\tilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x'''_2] + \left(\frac{h^4}{4!} + \frac{\tilde{u}_2 h^5}{5!}\right)[x_2^{(4)}] = [x_1] - R_1^5 + \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!}, \\ \left(1 - \frac{\tilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2] + \left(h - \frac{\tilde{p}_2 h^5}{5!}\right)[x'_2] + \left(\frac{h^2}{2!} - \frac{\tilde{r}_2 h^5}{5!}\right)[x''_2] + \\ \qquad \qquad \qquad + \left(\frac{h^3}{3!} - \frac{\tilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x'''_2] + \left(\frac{h^4}{4!} - \frac{\tilde{u}_2 h^5}{5!}\right)[x_2^{(4)}] = [x_3] - R_3^5 - \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!}, \\ \left(1 - 32\frac{\tilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x_2] + \left(2h - 32\frac{\tilde{p}_2 h^5}{5!}\right)[x'_2] + \left(4\frac{h^2}{2!} - 32\frac{\tilde{r}_2 h^5}{5!}\right)[x''_2] + \\ \qquad \qquad \qquad + \left(8\frac{h^3}{3!} - 32\frac{\tilde{q}_2 h^5}{5!}\right)[x'''_2] + \left(16\frac{h^4}{4!} - 32\frac{\tilde{u}_2 h^5}{5!}\right)[x_2^{(4)}] = \\ \qquad \qquad \qquad = [x_4] - R_4^5 - 32\frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!}, \\ q_2[x_2] + p_2[x'_2] + r_2[x''_2] + s_2[x'''_2] + u_2[x_2^{(4)}] = f_2, \end{array} \right. \quad (14)$$

состоящую из пяти уравнений, но теперь уже с пятью неизвестными  $[x_2]$ ,  $[x'_2]$ ,  $[x''_2]$ ,  $[x'''_2]$ ,  $[x_2^{(4)}]$ .

Матрицу, элементы которой задаются коэффициентами при неизвестных в левой части СЛАУ (14), ниже, как в [12–15], будем называть локальной матрицей. В наименования локальных матриц будем вносить, если заранее известно, одно из перечисленных выше имен матриц, используемых при построении разностных уравнений; в частности, для системы (14) наименование локальной матрицы запишем как  $A_Q^{42}$ .

В [12, 15] показано, что при вычислении ПА необходимо знать значения алгебраических дополнений  $M_{1j}^{42}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ , элементов первой строки матрицы  $(A_Q^{42})^\top$  или, что то же самое, элементов первого столбца локальной матрицы  $A^{42}$  [18].

Отметим, что вычисление точных значений алгебраических дополнений  $M_{1j}^{42}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ , не является особо трудоемкой процедурой; тем не менее нет строгой необходимости в нахождении точных значений в силу того, что для вычисления ПА (здесь речь не идет о выполнении численных экспериментов) необходимы лишь главные части этих алгебраических дополнений в их разложениях по степеням  $h$ ; поэтому допустим лишь для сокращения объема выкладок пренебрежение старшими степенями при нахождении алгебраических дополнений элементов первого столбца локальной матрицы  $A^{42}$ .

Выпишем отдельно и исследуем первое уравнение СЛАУ (14):

$$(A_0 - \tilde{q}_2 A_5)[x_2] + (A_1 - \tilde{p}_2 A_5)[x_2'] + (A_2 - \tilde{r}_2 A_5)[x_2''] + (A_3 - \tilde{s}_2 A_5)[x_2'''] + (A_4 - \tilde{u}_2 A_5)[x_2^{(4)}] = \tilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \tilde{f}_2 A_5. \quad (15)$$

Пренебрегая старшими степенями и опуская постоянные множители, не зависящие от  $h$  (кроме множителей  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$ ), из системы точных равенств

$$\begin{cases} A_0 - \tilde{q}_2 A_5 = \alpha_0 - 4\tilde{q}_2 \left( \frac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2 \frac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4 \frac{\beta_0 h^4}{4!} - 8 \frac{\alpha_0 h^5}{5!} \right), \\ A_1 - \tilde{p}_2 A_5 = \beta_0 - 2\alpha_0 h - 4\tilde{p}_2 \left( \frac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2 \frac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4 \frac{\beta_0 h^4}{4!} - 8 \frac{\alpha_0 h^5}{5!} \right), \\ A_2 - \tilde{r}_2 A_5 = \gamma_0 - 2\beta_0 h + 4 \frac{\alpha_0 h^2}{2!} - 4\tilde{r}_2 \left( \frac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2 \frac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4 \frac{\beta_0 h^4}{4!} - 8 \frac{\alpha_0 h^5}{5!} \right), \\ A_3 - \tilde{s}_2 A_5 = \left( \lambda_0 - 2\gamma_0 h + 4 \frac{\beta_0 h^2}{2!} - 8 \frac{\alpha_0 h^3}{3!} \right) - \\ \quad - 4\tilde{s}_2 \left( \frac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2 \frac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4 \frac{\beta_0 h^4}{4!} - 8 \frac{\alpha_0 h^5}{5!} \right), \\ A_4 - \tilde{u}_2 A_5 = -2 \left( \lambda_0 h - \gamma_0 h^2 + 4 \frac{\beta_0 h^3}{3!} - 8 \frac{\alpha_0 h^4}{4!} \right) - \\ \quad - 4\tilde{u}_2 \left( \frac{\lambda_0 h^2}{2!} - 2 \frac{\gamma_0 h^3}{3!} + 4 \frac{\beta_0 h^4}{4!} - 8 \frac{\alpha_0 h^5}{5!} \right) \end{cases}$$

составим систему оценок в форме разложений по степеням  $h$  в обозначениях

$$\begin{cases} B_0 = A_0 - \tilde{q}_2 A_5 \approx \alpha_0 + \lambda_0 h^2 + \gamma_0 h^3 + \beta_0 h^4, \\ B_1 = A_1 - \tilde{p}_2 A_5 \approx \beta_0 + \alpha_0 h + \lambda_0 h^2 + \gamma_0 h^3, \\ B_2 = A_2 - \tilde{r}_2 A_5 \approx \gamma_0 + \beta_0 h + \alpha_0 h^2 + \lambda_0 h^2, \\ B_3 = A_3 - \tilde{s}_2 A_5 \approx \lambda_0 + \gamma_0 h + \beta_0 h^2 + \alpha_0 h^3, \\ B_4 = A_4 - \tilde{u}_2 A_5 \approx \lambda_0 h + \gamma_0 h^2 + \beta_0 h^3 + \alpha_0 h^4, \end{cases} \quad (16)$$

в каждой оценке которой среди пар слагаемых, имеющих в качестве множителей одно из чисел  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$ , опущено слагаемое со старшей степенью.

Подставляя данные системы (16) в уравнение (15), окончательно найдем

$$\begin{aligned} B_0[x_2] + B_1[x_2'] + B_2[x_2''] + B_3[x_2'''] + B_4[x_2^{(4)}] = \\ = \tilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \tilde{f}_2 A_5. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда с учетом принятого выше допущения при вычислении алгебраических дополнений локальная матрица  $A_Q^{42}$  системы (14) примет вид

$$A_Q^{42} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} \\ 1 & 2h & 4\frac{h^2}{2!} & 8\frac{h^3}{3!} & 16\frac{h^4}{4!} \\ q_2 & p_2 & r_2 & s_2 & u_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Отметим, что элементы  $B_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ , первой строки матрицы (18), несмотря на частичное пренебрежение старшими степенями при формировании системы оценок (16), еще не являются главными частями соответствующих разложений; сами же оценки главных частей этих элементов в зависимости от конкретных значений  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$  будут приведены ниже в табл. 1.

Систему (14) в обозначениях

$$[W^{42}] = [[x_2] [x'_2] [x''_2] [x'''_2] [x_2^{(4)}]]^\top, \quad (19)$$

$$[G^{42}] = \begin{bmatrix} \tilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \tilde{f}_2 A_5 \\ [x_1] - R_1^5 + \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!} \\ [x_3] - R_3^5 - \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!} \\ [x_4] - R_4^5 - 32 \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!} \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

в матричном виде запишем так:

$$A_Q^{42}[W^{42}] = [G^{42}]. \quad (21)$$

Допуская существование обратной матрицы  $Q^{42} = (A_Q^{42})^{-1}$ , из матричного равенства (21) найдем

$$[W^{42}] = Q^{42}[G^{42}]. \quad (22)$$

Выпишем первую строку матричного равенства (22), являющуюся разностным уравнением, при построении которого было использовано смешанное ГУ (6):

$$q_{11}^{42}(\tilde{z}_0 - \alpha_0 R_0^5 - \beta_0 R_0^4 - \gamma_0 R_0^3 - \lambda_0 R_0^2 - \tilde{f}_2 A_5) + q_{12}^{42}\left([x_1] - R_1^5 + \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!}\right) + q_{13}^{42}\left([x_3] - R_3^5 - \frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!}\right) + q_{14}^{42}\left([x_4] - R_4^5 - 32\frac{\tilde{f}_2 h^5}{5!}\right) + q_{15}^{42}f_2 = [x_2]$$

или

$$\begin{aligned}
 & -\frac{q_{12}^{42}}{q_{15}^{42}}[x_1] + \frac{[x_2]}{q_{15}^{42}} - \frac{q_{13}^{42}}{q_{15}^{42}}[x_3] - \frac{q_{14}^{42}}{q_{15}^{42}}[x_4] = f_2 + \frac{q_{11}^{42}}{q_{15}^{42}}(\tilde{z}_0 - \tilde{f}_2 A_5) + \\
 & + \frac{\tilde{f}_2 h^5}{q_{15}^{42} 5!} (q_{12}^{42} - q_{13}^{42} - 32q_{14}^{42}) - \frac{q_{11}^{42}(\alpha_0 R_0^5 + \beta_0 R_0^4 + \gamma_0 R_0^3 + \lambda_0 R_0^2)}{q_{15}^{42}} - \\
 & - \frac{q_{12}^{42} R_1^5 + q_{13}^{42} R_3^5 + q_{14}^{42} R_4^5}{q_{15}^{42}}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где в соответствии с [4, 12] две последние дроби есть величина невязки  $\delta g_{hq}^4 = \delta g_{hq_1}^4 + \delta g_{hq_2}^4$ , в наименовании которой второй нижний индекс указывает на использование элементов матрицы  $Q^{42}$  при построении разностного уравнения (23).

При вычислении алгебраических дополнений в нижние индексы их обозначений будем вносить для ясности наименования используемых обратных матриц от локальных матриц  $A^{42}$ .

Вычислим алгебраические дополнения  $M_{1j,Q}^{42}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ , элементов первой строки матрицы  $(A_Q^{42})^\top$ .

Анализ матрицы (18) указывает на независимость значения  $M_{11,Q}^{42}$  от чисел  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$ , тогда как оставшиеся оценки алгебраических дополнений зависят от значений этих чисел [18]; действительно, пренебрегая старшими степенями, имеем

$$M_{11,Q}^{42} = -6h^6 \left( \frac{u_i}{3!} - \frac{2s_i h}{4!} + \frac{2r_i h^2}{3!4!} + \frac{2p_i h^3}{3!4!} \right) \approx -h^6 \left( u_2 - \frac{s_2 h}{2} \right) \approx -u_2 h^6, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 M_{12,Q}^{42} &= -B_1 \left( \frac{u_2 h^5}{3} - \frac{s_2 h^6}{4} + \frac{r_2 h^7}{3 \cdot 3!} \right) + B_2 \left( u_2 h^4 - \frac{7s_2 h^5}{2 \cdot 3!} + \frac{p_2 h^7}{3 \cdot 3!} \right) - \\
 & - B_3 \left( u_2 h^3 - \frac{7r_2 h^5}{2 \cdot 3!} + \frac{p_2 h^6}{4} \right) + B_4 \left( s_2 h^3 - r_2 h^4 + \frac{p_2 h^5}{3} \right) \approx \\
 & \approx h^3 \left( s_2 B_4 - u_2 B_3 + u_2 B_2 h - \frac{u_2 B_1 h^2}{3} \right), \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{13,Q}^{42} &= 2 \cdot 3! B_1 \left( \frac{u_2 h^5}{2 \cdot 3!} - \frac{s_2 h^6}{2 \cdot 4!} - \frac{2r_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) - \\
 & - 2 \cdot 3! B_2 \left( -\frac{u_2 h^4}{2 \cdot 3!} + \frac{s_2 h^5}{16} - \frac{2p_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) + 2 \cdot 3! B_3 \left( -\frac{u_2 h^3}{4} + \frac{r_2 h^5}{16} + \frac{p_2 h^6}{2 \cdot 4!} \right) - \\
 & - 2 \cdot 3! B_4 \left( -\frac{s_2 h^3}{4} + \frac{r_2 h^4}{2 \cdot 3!} + \frac{p_2 h^5}{2 \cdot 3!} \right) \approx \\
 & \approx h^3 (3s_2 B_4 - 3u_2 B_3 + u_2 B_2 h + u_2 B_1 h^2), \quad (26)
 \end{aligned}$$



$$M_{14,Q}^{42} = -2B_1 \left( \frac{u_2 h^5}{2 \cdot 3!} - \frac{r_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) + 2B_2 \left( \frac{s_2 h^5}{4!} - \frac{p_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) -$$

$$- 2B_3 \left( -\frac{u_2 h^3}{2} + \frac{r_2 h^5}{4!} \right) + 2B_4 \left( -\frac{s_2 h^3}{2} + \frac{p_2 h^5}{2 \cdot 3!} \right) \approx$$

$$\approx h^3 \left( -s_2 B_4 + u_2 B_3 + \frac{s_2 B_2 h^2}{2 \cdot 3!} - \frac{u_2 B_1 h^2}{3!} \right), \quad (27)$$

$$M_{15,Q}^{42} = h^6 \left( B_4 - \frac{B_3 h}{2} - \frac{B_2 h^2}{2 \cdot 3!} + \frac{B_1 h^3}{2 \cdot 3!} \right). \quad (28)$$

Невязки

$$\delta g_{h q_1}^4 = -\frac{q_{11}^{42} (\alpha_0 R_0^5 + \beta_0 R_0^4 + \gamma_0 R_0^3 + \lambda_0 R_0^2)}{q_{15}^{42}}, \quad (29)$$

$$\delta g_{h q_2}^4 = -\frac{q_{12}^{42} R_1^5 + q_{13}^{42} R_3^5 + q_{14}^{42} R_4^5}{q_{15}^{42}} \quad (30)$$

исследуем отдельно.

Число комбинаций одновременно ненулевых коэффициентов  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$  смешанного ГУ определяется, очевидно, как  $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ , где  $C_n^m$  — число сочетаний из  $n$  по  $m$ . Главные части  $B_j, j = 0, 1, \dots, 4$ , коэффициентов левой части равенства (17) в зависимости от значений  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$  приведены в табл. 1, где единица означает присутствие соответствующего коэффициента в смешанном ГУ, нуль — его отсутствие. Отметим, что четыре последние строки в табл. 1 соответствуют ГУ в форме одного слагаемого.

Опуская не зависящие от  $h$  постоянные множители и пренебрегая старшими степенями, соотношений (24)–(28) и данных табл. 1 можем записать следующие предварительные оценки:

$$M_{11,Q}^{42} \approx h^6, \quad M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42} \approx B_3 h^3, \quad M_{15,Q}^{42} \approx B_4 h^6, \quad \frac{B_3}{B_4} = h^{-1},$$

Таблица 1

Главные части коэффициентов левой части равенства (17)

[Principal parts of the coefficients on the left side of the equality (17)]

nos.	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\lambda_0$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
1	1	1	0	0	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\beta_0 h$	$\beta_0 h^2$	$\beta_0 h^3$
2	1	0	1	0	$\alpha_0$	$\alpha_0 h$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
3	1	0	0	1	$\alpha_0$	$\alpha_0 h$	$\alpha_0 h^2$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
4	0	1	1	0	$\gamma_0 h^3$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
5	0	1	0	1	$\lambda_0 h^2$	$\beta_0$	$\beta_0 h$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
6	0	0	1	1	$\lambda_0 h^2$	$\lambda_0 h^2$	$\gamma_0$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
7	1	1	1	0	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
8	1	1	0	1	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\beta_0 h$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
9	1	0	1	1	$\alpha_0$	$\alpha_0 h$	$\gamma_0$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
10	0	1	1	1	$\lambda_0 h^2$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
11	1	1	1	1	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$
12	1	0	0	0	$\alpha_0$	$\alpha_0 h$	$\alpha_0 h^2$	$\alpha_0 h^3$	$\alpha_0 h^4$
13	0	1	0	0	$\beta_0 h^4$	$\beta_0$	$\beta_0 h$	$\beta_0 h^2$	$\beta_0 h^3$
14	0	0	1	0	$\gamma_0 h^3$	$\gamma_0 h^3$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
15	0	0	0	1	$\lambda_0 h^2$	$\lambda_0 h^2$	$\lambda_0 h^2$	$\lambda_0$	$\lambda_0 h$

на основании которых и очевидных равенств

$$\frac{q_{1j}^{42}}{q_{15}^{42}} = \frac{M_{1j,Q}^{42}}{M_{15,Q}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

из (29) получим

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_1}^4 &= -\frac{q_{11}^{42}(\alpha_0 R_0^5 + \beta_0 R_0^4 + \gamma_0 R_0^3 + \lambda_0 R_0^2)}{q_{15}^{42}} = \\ &= -\frac{M_{11,Q}^{42}(\alpha_0 R_0^5 + \beta_0 R_0^4 + \gamma_0 R_0^3 + \lambda_0 R_0^2)}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{h^6(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4 h^6} = \\ &= -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4}, \end{aligned} \quad (31)$$

а из (30) —

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_2}^4 &= -\frac{q_{12}^{42} R_1^5 + q_{13}^{42} R_3^5 + q_{14}^{42} R_4^5}{q_{15}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{(M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42})O(h^6)}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{B_3 h^3 O(h^6)}{B_4 h^6} = -\frac{h^{-1} O(h^6)}{h^3} = O(h^2). \end{aligned} \quad (32)$$

Оценка (31) для каждого набора коэффициентов  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$  требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 1, тогда как оценка (32) дает окончательный результат.

Пусть  $\lambda_0 \neq 0$ . В этом случае, что следует из табл. 1,  $B_4 = \lambda_0 h$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\lambda_0 O(h^3)}{\lambda_0 h} = O(h^2),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 3, 5, 6, 8–11, 15.

Пусть  $\lambda_0 = 0, \gamma_0 \neq 0$ . В этом случае, что следует из табл.1,  $B_4 = \gamma_0 h^2$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\gamma_0 h O(h^3)}{\gamma_0 h^2} = O(h^2),$$

справедливую для всех строк табл.1 с номерами 2, 4, 7, 14.

Пусть  $\lambda_0 = 0, \gamma_0 = 0, \beta_0 \neq 0$ . В этом случае, что следует из табл. 1,  $B_4 = \beta_0 h^3$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\beta_0 h^2 O(h^3)}{\beta_0 h^3} = O(h^2),$$

справедливую для всех строк табл. 1 с номерами 1, 13.

Пусть  $\lambda_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_0 \neq 0$ . В этом случае, что следует из табл. 1,  $B_4 = \alpha_0 h^4$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (31) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\alpha_0 h^3 O(h^3)}{\alpha_0 h^4} = O(h^2), \quad (33)$$

справедливую для двенадцатой строки табл. 1.

Следовательно, для любого смешанного ГУ оказалось

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx O(h^2). \quad (34)$$

Соотношения (32), (34) дают окончательно оценку невязки для любого смешанного ГУ в форме

$$\delta g_{hq}^4 = \delta g_{hq_1}^4 + \delta g_{hq_2}^4 = O(h^2),$$

откуда следует второй порядок аппроксимации [4, 12], т.е. ПА второй подзадачи (4) и, следовательно, всей рассматриваемой задачи (2), (4) повышен на единицу и стал равным двум при  $k = 4$ .

Данные строк с номерами 12–15 табл. 1 соответствуют ГУ, представленным в виде одного слагаемого в форме производной той или иной степени от нуля до трех. Отметим, что результат (33), соответствующий ГУ  $x(a) = \tilde{x}_0$ , не является результатом действия метода повышения ПА в силу того, что при  $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$  из набора точных равенств (9)–(12) будет сохранено лишь равенство (9) с дополнительным членом  $R_0^5$ , а это соответствует нечетному  $k = 5$  в матричном методе, для которого в соответствии с [12] ПА и так равен  $k - 3 = 5 - 3 = 2$ .

Из изложенного выше следует, что использование в многочленах Тейлора матричного метода старшей степени производной, на единицу превышающей степень многочлена Тейлора  $k$  при ее четном значении, и использование операции дифференцирования обеих частей ОДУ4 задачи (1)  $k - 3$  раза позволяют аналогичным образом повысить ПА задачи до  $k - 2$ .

В силу того, что каждая краевая задача для ОДУ4 гарантированно содержит ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля, сделанный вывод справедлив для любой краевой задачи.

Изложенный выше метод показал возможность повышения ПА краевых задач для ОДУ4 при четном  $k$ . Этот же метод ранее показал возможность повышения ПА краевых задач для ОДУ2 [13] и систем ОДУ2 [14] при четном  $k$ . В [13] метод повышения ПА лишь обоснован при использовании смешанного ГУ  $\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) = \tilde{z}_0$ , а дан при использовании ГУ в форме производной первой степени. В [14] метод повышения ПА дан при использовании смешанного ГУ. Сам же метод реализован в [13, 14] не был. Сделаем это в настоящей работе на примерах краевых задач для ОДУ4, заимствованных в [12], на примерах краевых задачах для ОДУ2 и систем ОДУ2, заимствованных в [13, 14], а также на примере краевой задачи для ОДУ3, заимствованной в [15]; метод повышения ПА краевых задач для ОДУ3 при использовании матричного метода будет дан ниже.

Отметим некоторые особенности, увеличивающие трудоемкость и влияющие на возможность реализации на практике метода повышения ПА второй подзадачи (4) при произвольном четном  $k = 2m \geq 6$ :

- а) увеличение  $k$  влечет возрастание числа слагаемых и степени старшей производной в первых четырех уравнениях системы (13) при сохранении в ней общего числа уравнений, равного пяти;
- б) вычислять производные от обеих частей ОДУ4 и выражать старшую производную придется  $k - 3$  раза, при этом будет выполнено некоторое дублирование действий матричного метода [12], а именно: вычисление производных от обеих частей ОДУ4  $k - 3$  раза;
- в) подстановка вычисленных старших производных в первые четыре уравнения системы (13) и выполнение алгебраических преобразований уравнений этой системы достаточно усложнят (в смысле увеличения объема выкладок) аналитическую реализацию метода повышения ПА в следствие того, что проблематично составить необходимые рекуррентные расчетные формулы для коэффициентов системы (14) в зависимости от значения  $k$ . Последнее делает практически невозможной компьютерную реализацию изложенного выше метода повышения ПА.

Однако попытка реализации метода повышения ПА вполне возможна, если для матричного метода численного интегрирования имеется компьютерная программа расчета для выполнения численных экспериментов, при каждом запуске которой на исполнение осуществляется тем или иным способом ввод числа  $k$ . Для этого на практике при фиксированном  $k = 2m$  следует незначительно модифицировать компьютерную программу расчета следующим образом:

- а) при фиктивном  $k = 2m + 1$  формируются и фиксируются разностные уравнения, соответствующие ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля;
- б) при фактическом  $k = 2m$  формируется и фиксируется система разностных уравнений (2), (4);
- в) в полученной системе (2), (4) разностные уравнения, соответствующие ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля, заменяются на аналогичные ранее зафиксированные уравнения, сформированные при  $k = 2m + 1$ . Полученную таким образом СЛАУ следует использовать далее в расчетах.

Приведем некоторые теоретические обоснования описанной выше реализации метода повышения ПА.

Выделим две различные процедуры построения разностных уравнений, соответствующие ГУ в форме смешанного граничного условия или производной степени больше нуля, имеющих невязки, дающие одинаковый ПА: в первой процедуре использован метод повышения ПА при четном значении  $k$ , во второй — матричный метод при нечетном  $k + 1$  [11–14].

При  $k = 4$  реализация метода повышения ПА (первая процедура) состоит из последовательного выполнения двух не зависящих друг от друга этапов:

- а) вычисляются производные от обеих частей ОДУ4 и из полученного уравнения (7) выражается старшая производная, т.е. составляется равенство (8). Подстановка средствами алгебраических преобразований равенства (8) в первые четыре уравнения незамкнутой системы (13) приводит к построению замкнутой системы (14), состоящей из пяти уравнений;
- б) преобразование системы (14) средствами матричного исчисления (21), (22) приводит к построению разностного уравнения (23), невязка которого обуславливает второй порядок аппроксимации.

Этапы первой процедуры изобразим в виде следующей схемы:

$$(7) \rightarrow (8) \rightarrow [(8) \wedge (13)] \rightarrow (14) \rightarrow (21), (22) \rightarrow (23).$$

Символ  $\wedge$  в приведенной схеме нужно понимать в следующем контексте: правая часть равенства (8) подставляется в первые четыре уравнения незамкнутой системы (13); итогом такой подстановки является замкнутая СЛАУ (14), которая далее преобразуется средствами матричного исчисления (21), (22).

При  $k = 5$  построение разностного уравнения, имеющего невязку, дающую второй порядок аппроксимации, матричным методом (вторая процедура) состоит из одного этапа — вычисленные производные (7) от обеих частей ОДУ4 подставляются в качестве дополнительного уравнения в незамкнутую систему (13), что приводит к формированию замкнутой СЛАУ, но состоящей уже из шести уравнений, преобразование которой средствами матричного исчисления (21), (22) приводит к построению разностного уравнения, невязка которого совпадает с невязкой уравнения (23) [12].

Вторую процедуру изобразим в виде следующей схемы:

$$(7) \rightarrow [(7) \cup (13)] \rightarrow (21), (22) \rightarrow \dots$$

Символ  $\cup$  в приведенной схеме нужно понимать в следующем контексте: незамкнутая система (13) дополняется уравнением (7); в итоге получается замкнутая СЛАУ, которая далее преобразуется средствами матричного исчисления (21), (22).

По сути, первая и вторая процедуры имеют незначительные различия (в обоих случаях речь идет о преобразованиях несколько разными способами одних и тех же уравнений, а именно уравнения (7) и СЛАУ (13); подтверждение чему следует из приведенных выше схем) и достигают одной и той же цели — построения разностного уравнения, имеющего невязку, дающую второй порядок аппроксимации; что можно расценить как теоретическое обоснование описанной выше реализации метода повышения ПА на практике.

Успешная реализация метода повышения ПА для ОДУ4, ОДУ2 и систем ОДУ2 дана ниже. Однако не для всех краевых задач успех сопутствовал на практике при формальной реализации метода, о чем речь пойдет ниже, в частности, при исследовании ОДУ3.

**4. Метод повышения порядка аппроксимации разностной краевой задачи для ОДУ3.** В [15] исследована дифференциальная краевая задача для неоднородного линейного ОДУ3 с переменными коэффициентами вида

$$\begin{cases} s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), & t \in [a, b], \\ x(a) = \tilde{x}_0, & x'(a) = \tilde{x}'_0, \\ x(b) = \tilde{x}_n, \end{cases} \quad (35)$$

где  $s(t)$ ,  $r(t)$ ,  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $f(t)$  — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз;  $x(t)$  — искомая функция, являющаяся точным решением задачи;  $\tilde{x}_0$ ,  $\tilde{x}'_0$ ,  $\tilde{x}_n$  — заданные числа.

Использование пятиточечного шаблона при аппроксимации задачи (35) разностной краевой задачей привело к нехватке одного разностного уравнения для получения замкнутой СЛАУ; поэтому в [15] для рассматриваемой задачи было составлено следующее фиктивное ГУ:

$$X_0 = s_0 x'''(a) + r_0 x''(a), \quad (36)$$

где число  $X_0$  может быть вычислено с использованием ОДУЗ и двух ГУ задачи в левой границе сетки  $D_h$  как

$$X_0 = s_0 x'''(a) + r_0 x''(a) = f_0 - p_0 \tilde{x}'_0 - q_0 \tilde{x}_0. \quad (37)$$

Наряду с приведенными в задаче (35) ГУ в левой границе сетки  $D_h$  возможны еще следующие два набора:

$$x(a) = \tilde{x}_0, \quad x''(a) = \tilde{x}''_0, \quad (38)$$

$$x'(a) = \tilde{x}'_0, \quad x''(a) = \tilde{x}''_0. \quad (39)$$

Граничные условия (38) и (39) позволяют составить, как это было выполнено в [15], следующие фиктивные ГУ:

$$X_0 = s_0 x'''(a) + p_0 x'(a), \quad (40)$$

где

$$X_0 = f_0 - r_0 \tilde{x}''_0 - q_0 \tilde{x}_0;$$

и

$$X_0 = s_0 x'''(a) + q_0 x(a), \quad (41)$$

где

$$X_0 = f_0 - r_0 \tilde{x}''_0 - p_0 \tilde{x}'_0.$$

Объединяя перечисленные фиктивные ГУ в одно, получим смешанное фиктивное граничное условие

$$X_0 = s_0 x'''(a) + r_0 x''(a) + p_0 x'(a) + q_0 x(a), \quad (42)$$

для которого в соответствии с (36), (40), (41) примем следующее:

- а) переменную  $s_0$  положим всегда отличной от нуля;
- б) одну из переменных  $q_0, p_0, r_0$  положим отличной от нуля, тогда как две оставшиеся переменные из перечисленных положим равными нулю одновременно;
- в) число  $X_0$  вычислим по соотношению (42) при определенных заранее входящих в него переменных  $q_0, p_0, r_0, s_0$ .

В итоге смешанное ГУ (42) при тех или иных возможных значениях входящих в него переменных охватывает все три приведенные выше набора ГУ в левой границе сетки.

Граничное условие в правой границе сетки  $D_h$  в задаче (35) заменим на смешанное ГУ

$$\alpha_n x(b) + \beta_n x'(b) + \gamma_n x''(b) = \tilde{z}_n, \quad (43)$$

где  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \tilde{z}_n$  — заданные числа, что позволит отказаться от явного исследования ГУ в форме одного слагаемого. Тогда вместо задачи (35) исследуем следующую задачу:

$$\begin{cases} s(t)x'''(t) + r(t)x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), & t \in [a, b], \\ x(a) = \tilde{x}_0, \quad x'(a) = \tilde{x}'_0, \quad s_0 x'''(a) + r_0 x''(a) + p_0 x'(a) + q_0 x(a) = X_0, \\ \alpha_n x(b) + \beta_n x'(b) + \gamma_n x''(b) = \tilde{z}_n. \end{cases} \quad (44)$$

С учетом приведенного выше замечания, что при вычислении ПА неважно, в которой из двух границ сетки записано ГУ, граничное условие (43) можно заменить на

$$\alpha_0 x(a) + \beta_0 x'(a) + \gamma_0 x''(a) = \tilde{z}_0. \quad (45)$$

Тогда уравнения второй подзадачи задачи (44) запишем в развернутом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{b_{12}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{b_{15}^{k2}} - \frac{b_{13}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_3 - \frac{b_{14}^{k2}}{b_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{b_{1m}^{k2}}{b_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{b_{11}^{k2}}{b_{15}^{k2}} \tilde{x}_0, \\ -\frac{c_{12}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{c_{15}^{k2}} - \frac{c_{13}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_3 - \frac{c_{14}^{k2}}{c_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{c_{1m}^{k2}}{c_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{c_{11}^{k2}}{c_{15}^{k2}} \tilde{x}'_0, \\ -\frac{\phi_{12}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{\phi_{15}^{k2}} - \frac{\phi_{13}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}x_3 - \frac{\phi_{14}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{\phi_{1m}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{\phi_{11}^{k2}}{\phi_{15}^{k2}} X_0, \\ -\frac{q_{12}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_1 + \frac{x_2}{q_{15}^{k2}} - \frac{q_{13}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_3 - \frac{q_{14}^{k2}}{q_{15}^{k2}}x_4 = f_2 + \sum_{m=6}^{k+1} \frac{q_{1m}^{k2}}{q_{15}^{k2}} f_2^{(m-5)} + \frac{q_{11}^{k2}}{q_{15}^{k2}} \tilde{z}_0 \end{array} \right. \quad (46)$$

и исследуем только третье и четвертое уравнения в системе (46). При этом абсолютно неважно, какие ГУ, являющиеся частными случаями смешанного ГУ (45), использованы при составлении первых двух разностных уравнений.

В третьем уравнении системы (46) использованы элементы  $\phi_{ml}^{k2}$  матрицы  $\Phi^{k2}$ , что будет соответствовать смешанному фиктивному ГУ (42).

Для задачи (35) при использовании пятиточечного шаблона в [15] установлено следующее:

- а) ПА первой подзадачи зависит от четности или нечетности  $k$ , причем при нечетном  $k$  одинаковый ПА, равный  $k - 1$ , имели первые подзадачи  $L_h^{2m-1}$  и  $L_h^{2m}$  при  $m \geq 3$ ; при четном  $k$  ПА всех подзадач  $L_h^k$  оказался равным  $k - 2$ ;
- б) ПА второй подзадачи  $l_h^k$  не зависит от четности или нечетности  $k$  и равен  $k - 2$ .

Из установленных фактов следует, что повышать ПА следует при нечетном  $k = 2m - 1$ , например, при  $k = 5$ ; однако лишь для уменьшения объема выкладок попытаемся повысить ПА второй подзадачи на примере четного  $k = 4$  в силу того, что в этом случае удастся воспользоваться приведенными выше выкладками для ОДУ4. При  $k = 4$  ПА второй подзадачи (46) равен  $k - 2 = 2$ . Попытаемся повысить этот ПА от двух до трех.

Начнем с фиктивного ГУ (42), которое совпадает по форме со смешанным ГУ в задаче (1) и отличается от него лишь наименованиями коэффициентов.

В силу того, что ОДУ3 не содержит четвертой производной, равенство вида (8) следует вывести вновь.

Вычислим производную по аргументу  $t$  от обеих частей ОДУ3 задачи (35) и запишем итог в узле  $t_2$ :

$$q'[x_2] + (q + p')[x_2'] + (p + r')[x_2''] + (r + s')[x_2'''] + s[x_2^{(4)}] = f_2'. \quad (47)$$

Вычислим производную по аргументу  $t$  от обеих частей равенства (47) или, что то же самое, вторую производную от обеих частей ОДУ3 задачи (35), и запишем итог в узле  $t_2$ :

$$q_2''[x_2] + (2q_2' + p_2'')[x_2'] + (q_2 + 2p_2' + r_2'')[x_2''] + \\ + (p_2 + 2r_2' + s_2'')[x_2'''] + (r_2 + 2s_2')[x_2^{(4)}] + s_2[x_2^{(5)}] = f_2'' \quad (48)$$

и выразим  $[x_2^{(5)}]$ . Получим точное равенство

$$[x_2^{(5)}] = -\frac{q_2''}{s_2}[x_2] - \frac{2q_2' + p_2''}{s_2}[x_2'] - \frac{q_2 + 2p_2' + r_2''}{s_2}[x_2''] - \\ - \frac{p_2 + 2r_2' + s_2''}{s_2}[x_2'''] - \frac{r_2 + 2s_2'}{s_2}[x_2^{(4)}] + \frac{f_2''}{s_2}$$

или, введя соответствующие обозначения,

$$[x_2^{(5)}] = -\tilde{q}_2[x_2] - \tilde{p}_2[x_2'] - \tilde{r}_2[x_2''] - \tilde{s}_2[x_2'''] - \tilde{u}_2[x_2^{(4)}] + \tilde{f}_2. \quad (49)$$

Отметим, что точные равенства (8) и (49) совпали до обозначений лишь по форме.

При дальнейшем исследовании фиктивного ГУ (42) воспользуемся формулами (9)–(23), кроме (18), с незначительными заменами: число  $\alpha_0$  следует заменить на число  $q_0$ ,  $\beta_0$  — на  $p_0$ ,  $\gamma_0$  — на  $r_0$ ,  $\lambda_0$  — на  $s_0$ ,  $\tilde{z}_0$  — на  $X_0$ . В частности, вместо (17) получим

$$B_0[x_2] + B_1[x_2'] + B_2[x_2''] + B_3[x_2'''] + B_4[x_2^{(4)}] = \\ = X_0 - q_0R_0^5 - p_0R_0^4 - r_0R_0^3 - s_0R_0^2 - \tilde{f}_2A_5. \quad (50)$$

В локальной матрице (18) следует в нижнем правом углу заменить элемент  $u_2$  на нуль в силу вида исследуемого ОДУЗ (отсутствует четвертая производная). Поэтому во всех соотношениях вида (24)–(27) для смешанного фиктивного ГУ (42) следует положить  $u_2 \equiv 0$ . Опуская не зависящие от  $h$  постоянные множители и пренебрегая старшими степенями, из равенств (24)–(28) найдем

$$M_{11,\Phi}^{42} = -6h^6 \left( -\frac{2s_i h}{4!} + \frac{2r_i h^2}{3!4!} + \frac{2p_i h^3}{3!4!} \right) \approx \frac{s_2 h^7}{2} \approx h^7, \quad (51)$$

$$M_{12,\Phi}^{42} = -B_1 \left( -\frac{s_2 h^6}{4} + \frac{r_2 h^7}{3 \cdot 3!} \right) + B_2 \left( -\frac{7s_2 h^5}{2 \cdot 3!} + \frac{p_2 h^7}{3 \cdot 3!} \right) - B_3 \left( -\frac{7r_2 h^5}{2 \cdot 3!} + \frac{p_2 h^6}{4} \right) + \\ + B_4 \left( s_2 h^3 - r_2 h^4 + \frac{p_2 h^5}{3} \right) \approx h^3 (B_4 + B_3 h^2 + B_2 h^2 + B_1 h^3), \quad (52)$$

$$M_{13,\Phi}^{42} = 2 \cdot 3! B_1 \left( -\frac{s_2 h^6}{2 \cdot 4!} - \frac{2r_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) - 2 \cdot 3! B_2 \left( \frac{s_2 h^5}{16} - \frac{2p_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) + \\ + 2 \cdot 3! B_3 \left( \frac{r_2 h^5}{16} + \frac{p_2 h^6}{2 \cdot 4!} \right) - 2 \cdot 3! B_4 \left( -\frac{s_2 h^3}{4} + \frac{r_2 h^4}{2 \cdot 3!} + \frac{p_2 h^5}{2 \cdot 3!} \right) \approx \\ \approx h^3 (B_4 + B_3 h^2 + B_2 h^2 + B_1 h^3), \quad (53)$$



$$M_{14,\Phi}^{42} = 2B_1 \frac{r_2 h^7}{3! \cdot 4!} + 2B_2 \left( \frac{s_2 h^5}{4!} - \frac{p_2 h^7}{3! \cdot 4!} \right) - 2B_3 \frac{r_2 h^5}{4!} + 2B_4 \left( -\frac{s_2 h^3}{2} + \frac{p_2 h^5}{2 \cdot 3!} \right) \approx h^3 (B_4 + B_3 h^2 + B_2 h^2 + B_1 h^4), \quad (54)$$

$$M_{15,\Phi}^{42} = h^6 \left( B_4 - \frac{B_3 h}{2} - \frac{B_2 h^2}{2 \cdot 3!} + \frac{B_1 h^3}{2 \cdot 3!} \right) \approx h^6 (B_4 + B_3 h + B_2 h^2 + B_1 h^3). \quad (55)$$

Главные части  $B_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 4$ , коэффициентов левой части равенства (50) в зависимости от значений  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$  приведены в табл. 2, где единица означает присутствие соответствующего коэффициента в смешанном фиктивном ГУ, нуль — его отсутствие. Из принятого выше соглашения, согласно которому переменная  $s_0$  всегда отлична от нуля и одна из переменных  $q_0, p_0, r_0$  отлична от нуля, тогда как две оставшиеся переменные из перечисленных равны нулю одновременно, следует, что табл. 2 для фиктивного ГУ будет содержать только три строки по числу наборов возможных граничных условий в левой границе задачи (35).

Пренебрегая старшими степенями из соотношений (51)–(55) и данных табл. 2 запишем следующие предварительные оценки:

$$M_{11,\Phi}^{42} \approx h^7, \quad (56)$$

$$M_{12,\Phi}^{42} + M_{13,\Phi}^{42} + M_{14,\Phi}^{42} \approx B_4 h^3, \quad (57)$$

$$M_{15,\Phi}^{42} \approx B_4 h^6, \quad (58)$$

на основании которых и очевидных равенств

$$\frac{\phi_{1j}^{42}}{\phi_{15}^{42}} = \frac{M_{1j,\Phi}^{42}}{M_{15,\Phi}^{42}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

из (29) получим

$$\begin{aligned} \delta g_{h\phi_1}^4 &= -\frac{\phi_{11}^{42}(q_0 R_0^5 + p_0 R_0^4 + r_0 R_0^3 + s_0 R_0^2)}{\phi_{15}^{42}} = \\ &= -\frac{M_{11,\Phi}^{42}(q_0 R_0^5 + p_0 R_0^4 + r_0 R_0^3 + s_0 R_0^2)}{M_{15,\Phi}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{h^7(q_0 h^3 + p_0 h^2 + r_0 h + s_0)O(h^3)}{B_4 h^6} = \\ &= -\frac{h(q_0 h^3 + p_0 h^2 + r_0 h + s_0)O(h^3)}{B_4}, \quad (59) \end{aligned}$$

Таблица 2

Главные части коэффициентов левой части равенства (50)

[Principal parts of the coefficients on the left side of the equality (50)]

nos.	$q_0$	$p_0$	$r_0$	$s_0$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
1	0	0	1	1	$s_0 h^2$	$s_0 h^2$	$r_0$	$s_0$	$s_0 h$
2	0	1	0	1	$s_0 h^2$	$p_0$	$p_0 h$	$s_0$	$s_0 h$
3	1	0	0	1	$q_0$	$q_0 h$	$q_0 h^2$	$s_0$	$s_0 h$

а из (30) —

$$\begin{aligned} \delta g_{h\phi_2}^4 &= -\frac{\phi_{12}^{42}R_1^5 + \phi_{13}^{42}R_3^5 + \phi_{14}^{42}R_4^5}{\phi_{15}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{(M_{12,\Phi}^{42} + M_{13,\Phi}^{42} + M_{14,\Phi}^{42})O(h^6)}{M_{15,\Phi}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{B_4h^3O(h^6)}{B_4h^6} = -\frac{O(h^6)}{h^3} = O(h^3). \end{aligned} \quad (60)$$

Оценка (59) для каждого набора  $q_0, p_0, r_0, s_0$  требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 2, тогда как оценка (60) дает окончательный результат.

Для всех строк табл. 2 имеем  $s_0 \neq 0$  и  $B_4 = s_0h$ . Тогда, пренебрегая старшими степенями, из (59) получим оценку

$$\delta g_{h\phi_1}^4 \approx -\frac{h(q_0h^3 + p_0h^2 + r_0h + s_0)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{s_0hO(h^3)}{s_0h} = O(h^3). \quad (61)$$

Из (60), (61) следует, что разностное уравнение, при построении которого при фиксированном  $k = 4$  было использовано фиктивное ГУ (42), дает следующую оценку невязки:

$$\delta g_{h\phi}^4 = \delta g_{h\phi_1}^4 + \delta g_{h\phi_2}^4 = O(h^3). \quad (62)$$

Продолжим исследование со смешанного ГУ (45) или, что то же самое, займемся четвертым уравнением системы (46). Вновь воспользуемся формулами (9)–(23), в которых положим следующее:

а)  $\lambda_0 \equiv 0$ , тогда вместо (17) получим

$$\begin{aligned} B_0[x_2] + B_1[x_2'] + B_2[x_2''] + B_3[x_2'''] + B_4[x_2^{(4)}] &= \\ &= \tilde{z}_0 - \alpha_0R_0^5 - \beta_0R_0^4 - \gamma_0R_0^3 - \tilde{f}_2A_5; \end{aligned} \quad (63)$$

б)  $u_2 \equiv 0$ , что приведет к сохранению равенств (51)–(55) с точностью до обозначений.

Главные части коэффициентов левой части равенства (63) приведены в табл. 3. Отметим, что три последние строки в табл. 3 соответствуют ГУ в форме одного слагаемого; в частности, пятая строка соответствует первому разностному уравнению в системе (46), шестая строка — второму.

Если пренебречь старшими степенями, соотношения (51)–(55) и данные табл. 3 вновь приводят к полученным выше предварительным оценкам (56)–(58)

с точностью до обозначений, на основании которых из (29) найдем

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_1}^4 &= -\frac{q_{11}^{42}(\alpha_0R_0^5 + \beta_0R_0^4 + \gamma_0R_0^3)}{q_{15}^{42}} = -\frac{M_{11,Q}^{42}(\alpha_0R_0^5 + \beta_0R_0^4 + \gamma_0R_0^3)}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{h^7(\alpha_0h^3 + \beta_0h^2 + \gamma_0h)O(h^3)}{B_4h^6} = -\frac{h(\alpha_0h^3 + \beta_0h^2 + \gamma_0h)O(h^3)}{B_4}, \end{aligned} \quad (64)$$

а из (30) —

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_2}^4 &= -\frac{q_{12}^{42}R_1^5 + q_{13}^{42}R_3^5 + q_{14}^{42}R_4^5}{q_{15}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{(M_{12,Q}^{42} + M_{13,Q}^{42} + M_{14,Q}^{42})O(h^6)}{M_{15,Q}^{42}} \approx \\ &\approx -\frac{B_4 h^3 O(h^6)}{B_4 h^6} = -\frac{O(h^6)}{h^3} = O(h^3). \end{aligned} \quad (65)$$

Оценка (64) для каждого набора  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  требует дальнейшего уточнения результата с использованием данных табл. 3, тогда как оценка (65) дает окончательный результат.

Пусть  $\gamma_0 \neq 0$ . В этом случае, что следует из табл. 3,  $B_4 = \gamma_0 h^2$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (64) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\gamma_0 h^2 O(h^3)}{\gamma_0 h^2} = O(h^3),$$

справедливую для строк табл. 3 с номерами 2, 3, 4, 7.

Пусть  $\beta_0 \neq 0, \gamma_0 = 0$ . В этом случае, что следует из табл. 3,  $B_4 = \beta_0 h^3$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (64) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\beta_0 h^3 O(h^3)}{\beta_0 h^3} = O(h^3),$$

справедливую для строк табл. 3 с номерами 1, 6.

Пусть  $\alpha_0 \neq 0, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 0$ . В этом случае, что следует из табл. 3,  $B_4 = \alpha_0 h^4$ , тогда, пренебрегая старшими степенями, из (64) получим оценку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx -\frac{h(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h)O(h^3)}{B_4} \approx -\frac{\alpha_0 h^4 O(h^3)}{\alpha_0 h^4} = O(h^3),$$

справедливую для пятой строки табл. 3.

Следовательно, для любого смешанного ГУ оценка (64) дает невязку

$$\delta g_{hq_1}^4 \approx O(h^3). \quad (66)$$

Таблица 3

Главные части коэффициентов левой части равенства (63)

[Principal parts of the coefficients on the left side of the equality (63)]

nos.	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$B_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
1	1	1	0	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\beta_0 h$	$\beta_0 h^2$	$\beta_0 h^3$
2	1	0	1	$\alpha_0$	$\alpha_0 h$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
3	0	1	1	$\gamma_0 h^3$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
4	1	1	1	$\alpha_0$	$\beta_0$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$
5	1	0	0	$\alpha_0$	$\alpha_0 h$	$\alpha_0 h^2$	$\alpha_0 h^3$	$\alpha_0 h^4$
6	0	1	0	$\beta_0 h^4$	$\beta_0$	$\beta_0 h$	$\beta_0 h^2$	$\beta_0 h^3$
7	0	0	1	$\gamma_0 h^3$	$\gamma_0 h^3$	$\gamma_0$	$\gamma_0 h$	$\gamma_0 h^2$

Из (65), (66) следует, что разностное уравнение, при построении которого при фиксированном  $k = 4$  было использовано смешанное ГУ (45), дает следующую невязку:

$$\delta g_{hq}^4 = \delta g_{hq_1}^4 + \delta g_{hq_2}^4 = O(h^3). \quad (67)$$

Оценки (62), (67) дают окончательно оценку нормы невязки  $\|\delta g_h^4\|$  второй подзадачи (46) в виде [4]

$$\|\delta g_h^4\| = \max(|\delta g_{h\phi}^4|, |\delta g_{hq}^4|) = O(h^3),$$

откуда следует третий порядок аппроксимации [4]; т.е. ПА второй подзадачи (46) и, следовательно, всей рассматриваемой задачи повышен на единицу и стал равным трем при  $k = 4$ .

Совершенно аналогично показывается работоспособность метода повышения ПА при нечетных  $k$ .

При выполнении численных экспериментов использованы следующие нормы: в качестве суммарной оценки относительной погрешности —

$$D_x^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - [x_i])^2}}{\sum_{i=0}^n |[x_i]|} \cdot 100\%,$$

которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующего меру разброса в процентах [19]; в качестве оценки абсолютной погрешности [4, 5] —

$$E_x^k = \max|x_i - [x_i]|, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Для численных экспериментов была использована краевая задача из [15]:

$$\begin{cases} (\sin t + x) x''' + 3(\cos t + 1)x'' - 3 \sin t \cdot x' - \cos t \cdot x = \sin t, & t \in [7, 11], \\ x(7) = 8.521, & x'(7) = 0.224, \\ x(11) = 14.599. \end{cases} \quad (68)$$

Для численных расчетов было принято  $n = 20$ ,  $h = 0.20$ . Результаты численных экспериментов для краевой задачи (68) приведены в табл. 4, 5, 11. Данные табл. 5 взяты из [15].

Анализ значений в столбцах табл. 4, 5 с нечетными номерами указывает на отсутствие существенного влияния метода повышения ПА на результат, что оказалось несколько неожиданным.

Попытаемся выявить причину указанного факта.

Выписав для ОДУЗ начальные части приведенных выше схем метода повышения ПА (при  $k = 4$ ) и матричного метода (при  $k = 5$ )

$$(47) \rightarrow (48) \rightarrow (49) \rightarrow [(49) \wedge (13)] \rightarrow \dots,$$

$$(47) \rightarrow [(47) \cup (13)] \rightarrow (21), (22) \rightarrow \dots,$$

обнаружим следующие особенности:

- а) реализации метода повышения ПА и матричного метода берут начало из равенства (47), полученного однократным дифференцированием обеих частей ОДУ3, и именно это равенство (47) используется в квадратных скобках второй схемы;
- б) вывод равенства (49) осуществлен из равенства (48), полученного двукратным дифференцированием обеих частей ОДУ3, или, что то же самое, осуществлен однократным дифференцированием обеих частей (47); и именно это равенство (49) используется в квадратных скобках первой схемы.

Следовательно, в квадратных скобках приведенных здесь схем сформированы задачи, которые составлены из различных уравнений. Поэтому эти задачи нельзя считать тождественными, несмотря на то, что они приводят к невязкам, дающим одинаковый ПА. Именно установленными отличиями можно объяснить данные табл. 4, 5. Отметим, что перечисленные особенности отсутствовали при исследовании краевых задач для ОДУ4, ОДУ2 [13] и систем ОДУ2 [14].

Вследствие того, что реализация метода повышения ПА на практике фактически осуществляется матричным методом, для учета указанных особенностей несколько модифицируем матричный метод решения ОДУ3: при  $k \geq 5$  в последнем уравнении всех СЛАУ матричного метода, аналогичных системе (13), увеличим степень производной на единицу в левой и правой частях этого уравнения.

Модифицированный матричный метод нуждается в дополнительных исследованиях, которые выполним на основе задачи (44).

Локальные матрицы  $A_Q^{k2}, A_B^{k2}, A_C^{k2}, A_D^{k2}, A_E^{k2}$  отличаются лишь первыми строками (First Row: FR); для первых строк перечисленных матриц запишем

$$A_Q^{k2}|_{FR} = \alpha_0 A_B^{k2}|_{FR} + \beta_0 A_C^{k2}|_{FR} + \gamma_0 A_D^{k2}|_{FR} + \lambda_0 A_E^{k2}|_{FR}. \quad (69)$$

Способ построения матрицы  $A_Q^{k2}$  в частном случае при  $k = 4$  дан выше,

Таблица 4

**Погрешности решения краевой задачи (68), вычисленные с использованием метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (68) calculated using the method of the increase of the order approximation]**

$k$	4	5	6	7	8	9	10
$D_x^k, \%$	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-5}$	$2.56 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-7}$	$3.74 \cdot 10^{-7}$	$7.16 \cdot 10^{-9}$
$E_x^k$	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$3.19 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$2.09 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-7}$	$3.41 \cdot 10^{-7}$	$6.12 \cdot 10^{-9}$

Таблица 5

**Погрешности решения краевой задачи (68), вычисленные без использования метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (68) calculated without using the method of the increase of the order approximation]**

$k$	4	5	6	7	8	9	10
$D_x^k, \%$	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$6.56 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-5}$	$2.13 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-7}$	$1.72 \cdot 10^{-7}$	$7.16 \cdot 10^{-9}$
$E_x^k$	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$2.03 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-7}$	$6.12 \cdot 10^{-9}$

общий случай дан в [12]. Способ построения матрицы  $A_B^{k2}$ , соответствующей ГУ  $x(a) = \tilde{x}_0$ , и матрицы  $A_C^{k2}$ , соответствующей ГУ  $x'(a) = \tilde{x}'_0$ , дан в [15]; оставшиеся матрицы равенства (69) строятся аналогично.

Справедливость равенства (69) проверяется непосредственно преобразованиями правой части.

В силу того, что увеличение в ГУ в форме одного слагаемого используемой степени производной приводит к понижению степеней по основанию  $h$  в одной из строк локальной матрицы, с учетом предстоящих вычислений алгебраических дополнений  $M_{1j}^{k2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ , элементов первой строки транспонированных локальных матриц запишем, используя (69):

$$\begin{aligned} \text{если } \lambda_0 \neq 0, \text{ то } A_Q^{k2} &\approx \lambda_0 A_E^{k2}; \\ \text{если } \gamma_0 \neq 0, \lambda_0 = 0, \text{ то } A_Q^{k2} &\approx \gamma_0 A_D^{k2}; \\ \text{если } \beta_0 \neq 0, \gamma_0 = 0, \lambda_0 = 0, \text{ то } A_Q^{k2} &\approx \beta_0 A_C^{k2}; \\ \text{если } \alpha_0 \neq 0, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 0, \lambda_0 = 0, \text{ то } A_Q^{k2} &= \alpha_0 A_B^{k2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Аналитическое исследование и непосредственное вычисление главных частей алгебраических дополнений транспонированных локальных матриц модифицированного матричного метода привело к несколько неожиданному результату:

а) не удалось показать справедливость формул вида

$$M_{1j}^{k2} \approx M_{1j}^{42}, \quad j = 1, 2, \dots, 5, \quad (71)$$

которые имели место в [12–15, 20] и были использованы при вычислении ПА;

б) для любого  $k \geq 4$  удалось выявить следующие закономерности:

$$\frac{M_{11,B}^{k2}}{M_{15,B}^{k2}} \approx h^{-3}, \quad \frac{M_{11,C}^{k2}}{M_{15,C}^{k2}} \approx h^{-2}, \quad \frac{M_{11,D}^{k2}}{M_{15,D}^{k2}} \approx h^{-1}, \quad \frac{M_{11,E}^{k2}}{M_{15,E}^{k2}} \approx 1, \quad (72)$$

$$\frac{M_{1j,B}^{k2}}{M_{15,B}^{k2}} \approx \frac{M_{1j,C}^{k2}}{M_{15,C}^{k2}} \approx \frac{M_{1j,D}^{k2}}{M_{15,D}^{k2}} \approx \frac{M_{1j,E}^{k2}}{M_{15,E}^{k2}} \approx \frac{M_{1j,Q}^{k2}}{M_{15,Q}^{k2}} \approx h^{-3}, \quad j = 2, 3, 4, \quad (73)$$

несмотря на то, что значения главных частей алгебраических дополнений  $M_{1j}^{k2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ , функционально зависят от  $k$  и второго нижнего индекса.

Выявим, зависит ли от четности или нечетности  $k$  ПА первой подзадачи (2) модифицированного матричного метода.

Для выявления указанного факта необходимо знать оценки первых двух слагаемых в разложении по степеням  $h$  алгебраических дополнений  $M_{1j,B}^{ki}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ;  $i$  — номер центрального узла пятиточечного шаблона, в котором записана локальная матрица [12–15].

При отсутствии формул (71) укажем следующее: анализ локальных матриц  $A_B^{ki}$  привел к выводу, что оценки первых двух слагаемых в разложениях по степеням  $h$  алгебраических дополнений  $M_{1j,B}^{ki}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , совпадают для любого  $k \geq 4$ ; поэтому достаточно исследовать локальную матрицу  $A_B^{4i}$ , для которой имеем следующие оценки [15]:

$$M_{11,B}^{4i} = (6s_i + r_i h - p_i h^2) \frac{h^7}{12} \approx (6s_i + r_i h) \frac{h^7}{12}, \quad (74)$$

$$M_{14,B}^{4i} = (-6s_i + r_i h + p_i h^2) \frac{h^7}{12} \approx (-6s_i + r_i h) \frac{h^7}{12}, \quad (75)$$

$$M_{12,B}^{4i} = (-3s_i - 4r_i h + 2p_i h^2) \frac{h^7}{3} \approx (-3s_i - 4r_i h) \frac{h^7}{3}, \quad (76)$$

$$M_{13,B}^{4i} = (3s_i - 4r_i h - 2p_i h^2) \frac{h^7}{3} \approx (3s_i - 4r_i h) \frac{h^7}{3}. \quad (77)$$

Отметим закономерность в парах формул (74), (75) и (76), (77): знаки первых слагаемых противоположны, вторых — совпадают. Наличие отмеченной закономерности указывает на то, что при  $m \geq 3$  первые подзадачи  $L_h^{2m-1}$  и  $L_h^{2m}$  имеют одинаковый ПА, что было получено и при исследовании матричного метода в [15].

Исследуем ПА второй подзадачи (4) модифицированного матричного метода на примере разностного уравнения, построенного с использованием смешанного ГУ (6).

Локальная матрица матричного метода при исследовании ОДУ4 при  $u \equiv 0$  и локальная матрица модифицированного матричного метода при исследовании ОДУ3 отличаются лишь последней строкой; поэтому выполнение преобразований (21)–(23) при использовании обратных матриц от этих двух локальных матриц приведет к построению двух разностных уравнений одинаковой структуры; откуда следует и совпадение невязок. Невязка  $\delta g_{hq}^k = \delta g_{hq_1}^k + \delta g_{hq_2}^k$  разностного уравнения, построенного с использованием матричного метода при исследовании ОДУ4, приведена в [12]; следовательно, для рассматриваемой задачи имеем

$$\delta g_{hq_1}^k = -\frac{q_{11}^{k2}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3})}{q_{15}^{k2}}, \quad (78)$$

$$\delta g_{hq_2}^k = -\frac{q_{12}^{k2} R_1^k + q_{13}^{k2} R_3^k + q_{14}^{k2} R_4^k}{q_{15}^{k2}}. \quad (79)$$

Из (78) найдем

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_1}^k &= -\frac{q_{11}^{k2}(\alpha_0 R_0^k + \beta_0 R_0^{k-1} + \gamma_0 R_0^{k-2} + \lambda_0 R_0^{k-3})}{q_{15}^{k2}} \approx \\ &\approx -\frac{M_{11,Q}^{k2}(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^{k-2})}{M_{15,Q}^{k2}} \end{aligned} \quad (80)$$

и, с учетом (73), из (79)

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_2}^k &= -\frac{q_{12}^{k2} R_1^k + q_{13}^{k2} R_3^k + q_{14}^{k2} R_4^k}{q_{15}^{k2}} \approx \\ &\approx -\frac{(M_{12,Q}^{k2} + M_{13,Q}^{k2} + M_{14,Q}^{k2})O(h^{k+1})}{M_{15,Q}^{k2}} \approx \\ &\approx -h^{-3}O(h^{k+1}) \approx O(h^{k-2}). \end{aligned} \quad (81)$$

Оценка (80) для каждого набора коэффициентов  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$  требует дальнейшего уточнения результата, тогда как оценка (81) дает окончательный результат.

Следующая система оценок в сочетании со значениями  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \lambda_0$ :

$$\begin{aligned} \text{если } \lambda_0 \neq 0, \text{ то } \frac{M_{11,Q}^{k2}}{M_{15,Q}^{k2}} &\approx \frac{M_{11,E}^{k2}}{M_{15,E}^{k2}} \approx 1; \\ \text{если } \gamma_0 \neq 0, \lambda_0 = 0, \text{ то } \frac{M_{11,Q}^{k2}}{M_{15,Q}^{k2}} &\approx \frac{M_{11,D}^{k2}}{M_{15,D}^{k2}} \approx h^{-1}; \\ \text{если } \beta_0 \neq 0, \gamma_0 = 0, \lambda_0 = 0, \text{ то } \frac{M_{11,Q}^{k2}}{M_{15,Q}^{k2}} &\approx \frac{M_{11,C}^{k2}}{M_{15,C}^{k2}} \approx h^{-2}; \\ \text{если } \alpha_0 \neq 0, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 0, \lambda_0 = 0, \text{ то } \frac{M_{11,Q}^{k2}}{M_{15,Q}^{k2}} &\approx \frac{M_{11,B}^{k2}}{M_{15,B}^{k2}} \approx h^{-3} \end{aligned} \quad (82)$$

является итогом сравнения соотношений (70), (72) посредством связи через наименования обратных матриц.

Подставим в (80) данные любой строки из (82), например, второй, и, пренебрегая старшими степенями, получим

$$\begin{aligned} \delta g_{hq_1}^k &\approx -\frac{M_{11,Q}^{k2}(\alpha_0 h^3 + \beta_0 h^2 + \gamma_0 h + \lambda_0)O(h^{k-2})}{M_{15,Q}^{k2}} \approx \\ &\approx -h^{-1}\gamma_0 h O(h^{k-2}) \approx O(h^{k-2}). \end{aligned} \quad (83)$$

Равенства (81), (83) окончательно дают оценку невязки

$$\delta g_{hq}^k = \delta g_{hq_1}^k + \delta g_{hq_2}^k \approx O(h^{k-2})$$

разностного уравнения, при построении которого использовано смешанное ГУ (6). Третье и четвертое уравнения во второй подзадаче (46) соответствуют фиктивному смешанному ГУ (42) и смешанному ГУ (45), которые являются частными случаями рассмотренного сейчас смешанного ГУ (6), откуда следует, что ПА второй подзадачи модифицированного матричного метода совпадает с ПА второй подзадачи матричного метода.

Подстановка последнего соотношения из (73) в (60), (65) и подстановка данных любой строки из (82) в (59), (64) дают оценки (62) и (67), из которых следует справедливость метода повышения ПА для модифицированного матричного метода, который назовем модифицированным методом повышения ПА и используем ниже при выполнении численных экспериментов при исследовании ОДУ3.

**5. Оценка погрешностей.** При апробации использованы следующие краевые задачи для ОДУ4 [12]:

$$\begin{cases} (e^t + 2t)x^{(4)} + (e^t + 2)x''' + 6e^t x'' + 4e^t x' + e^t x = t^{-5}, & t \in [2, 6], \\ x(2) = 2.285, & x'''(2) = -0.480, \\ x'(6) = -0.403, & x''(6) = 0.159 \end{cases} \quad (84)$$



И

$$\begin{cases} (e^t + 2t)x^{(4)} + (e^t + 2)x''' + 6e^t x'' + 4e^t x' + e^t x = t^{-5}, & t \in [2, 6], \\ x(2) = 2.285, & x'(2) = 0.135, & x'''(2) = -0.480, \\ x(6) + 2x'(6) + 3x''(6) + 4x'''(6) = 0.415, \end{cases} \quad (85)$$

в которых было принято  $n = 20$ ,  $h = 0.20$ . Результаты численных экспериментов для решений  $x(t)$  приведены в табл. 6, 7.

Наряду с краевыми задачами (84), (85) исследована задача для ОДУ2 [13]

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{t}x' + \frac{2}{t^2}x = t \cos t, & t \in [5, 13], \\ x(5) + 3x'(5) = 17.597, \\ 2x(13) + 2x'(13) = 56.016, \end{cases} \quad (86)$$

в которой было принято  $n = 20$ ,  $h = 0.40$ . Результаты численных экспериментов для решений  $x(t)$  задачи (86) приведены в табл. 8. Кроме этого, исследована задача для системы ОДУ2 [14]

$$\begin{cases} x'' - tx' - \frac{t^2 + 2}{t^2}x - ty'' = 2t \cos t, & t \in [2\pi, 3\pi], \\ \frac{1}{2}x' + \frac{x}{t} + y'' + \frac{t^2 - 4}{2t^2}y = -2t \sin t, \\ x(2\pi) + x'(2\pi) = 4\pi^2, & y(2\pi) + 2y'(2\pi) = 4\pi(\pi + 2), \\ 3x(3\pi) + 2x'(3\pi) = -18\pi^2, & 2y(3\pi) + 3y'(3\pi) = -18\pi(\pi + 1), \end{cases} \quad (87)$$

в которой было принято  $n = 20$ ,  $h = \pi/20 \approx 0.209$ . Результаты численных экспериментов для решений  $x(t)$  и  $y(t)$  приведены в табл. 9.

В рассмотренных задачах по данным анализа табл. 6–9 с увеличением степени  $k$  используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности уменьшаются довольно «резко» или «скачкообразно» (не менее чем на порядок) при переходе от нечетного к четному значению  $k$ , что свидетельствует о зависимости ПА от четности или нечетности  $k$  при использовании метода повышения ПА при выполнении численных экспериментов.

Помимо задач (84)–(87) практически аналогичные результаты (по динамике и по абсолютным значениям погрешностей) были получены для ряда иных краевых задач, например, при исследовании ОДУ4 из задач (84), (85) со следующими ГУ [12],  $t \in [2, 6]$ :

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, & x'''(2) = -0.480, \\ x(6) = 0.746, & x''(6) = 0.159; \end{cases} \quad (88)$$

$$\begin{cases} x'(2) = 0.135, & x'''(2) = -0.480, \\ x'(6) = -0.403, & x'''(6) = -2.18 \cdot 10^{-4}; \end{cases} \quad (89)$$

$$\begin{cases} x(2) = 2.285, & x'(2) = 0.135, & x'''(2) = -0.480, \\ x'''(6) = -2.18 \cdot 10^{-4}; \end{cases} \quad (90)$$

Таблица 6

## Погрешности решения краевой задачи (84) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (84)]

$k$	4	5	6	7	8	9	10	11
$D_x^k, \%$	$7.56 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$4.05 \cdot 10^{-4}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$7.81 \cdot 10^{-6}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	$3.87 \cdot 10^{-7}$	$4.32 \cdot 10^{-7}$
$E_x^k$	$9.73 \cdot 10^{-3}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-5}$	$3.03 \cdot 10^{-5}$	$9.17 \cdot 10^{-7}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$5.19 \cdot 10^{-8}$	$5.69 \cdot 10^{-8}$

Таблица 7

## Погрешности решения краевой задачи (85) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (85)]

$k$	4	5	6	7	8	9	10	11
$D_x^k, \%$	$3.00 \cdot 10^{-2}$	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$2.16 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$6.76 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$5.86 \cdot 10^{-7}$	$5.97 \cdot 10^{-7}$
$E_x^k$	$3.65 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-3}$	$2.09 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-7}$	$1.30 \cdot 10^{-6}$	$6.80 \cdot 10^{-8}$	$6.95 \cdot 10^{-8}$

Таблица 8

## Погрешности решения краевой задачи (86) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (86)]

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9
$D_x^k, \%$	$1.23 \cdot 10^{-1}$	$1.08 \cdot 10^{-1}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$	$4.22 \cdot 10^{-4}$	$2.03 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	$3.12 \cdot 10^{-7}$	$3.04 \cdot 10^{-7}$
$E_x^k$	$3.10 \cdot 10^{-1}$	$2.79 \cdot 10^{-1}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	$1.18 \cdot 10^{-3}$	$5.56 \cdot 10^{-6}$	$2.80 \cdot 10^{-6}$	$6.76 \cdot 10^{-7}$	$6.80 \cdot 10^{-7}$

Таблица 9

## Погрешности решения краевой задачи (87) [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (87)]

$k$	2	3	4	5	6	7
$D_x^k, \%$	$7.53 \cdot 10^{-2}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$	$4.22 \cdot 10^{-4}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$8.61 \cdot 10^{-5}$	$8.70 \cdot 10^{-5}$
$D_y^k, \%$	$2.24 \cdot 10^{-1}$	$3.52 \cdot 10^{-1}$	$4.81 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$	$8.24 \cdot 10^{-5}$	$8.18 \cdot 10^{-5}$
$E_x^k$	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$4.50 \cdot 10^{-1}$	$8.48 \cdot 10^{-4}$	$7.65 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-4}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$
$E_y^k$	$4.10 \cdot 10^{-1}$	$6.54 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$7.24 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$

а также при исследовании краевой задачи для ОДУ2 из [20]:

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{t}x' - \frac{4}{t^2}x = \frac{\sin t}{t} + \frac{4t \cos t}{t^2}, & t \in [1, 5], \\ 2x(1) - x'(1) = -5.012, \\ x(5) + 2x'(5) = -22.631 \end{cases} \quad (91)$$

и при исследовании краевой задачи для системы ОДУ2 из [14]:

$$\begin{cases} (1+t)x'' + 2x + ty'' - 2y = 2 \sin 2t, & t \in [2\pi, 3\pi], \\ x'' + 2x - 2ty' = 2(1+t^2) \sin 2t, \\ x(2\pi) + x'(2\pi) = 0, & y(2\pi) + 2y'(2\pi) = 2(\pi + 1), \\ 3x(3\pi) + 2x'(3\pi) = 0, & 2y(3\pi) + 3y'(3\pi) = 3(2\pi + 1). \end{cases}$$

Расчеты погрешностей без использования метода повышения ПА задач (84)–(91) приведены в [12–14, 20], где, по данным таблиц, относительная и абсолютная погрешности уменьшаются довольно «плавно», что свидетельствует о независимости ПА от четности или нечетности  $k$ . В качестве иллюстрации ниже приведена табл. 10 для задачи (84), заимствованная из [12].

Обратимся к ОДУ3. Используем модифицированный метод повышения ПА при исследовании задачи (68).

Результаты численного эксперимента приведены в табл. 11, из которой следует, что с увеличением степени  $k$  используемого многочлена Тейлора относительная и абсолютная погрешности уменьшаются довольно «резко» или «скачкообразно» (не менее чем на порядок) при переходе от четного к нечетному значению  $k$ , что свидетельствует о зависимости ПА от четности или нечетности  $k$  при использовании модифицированного метода повышения ПА при выполнении численных экспериментов.

Анализ выполненных исследований позволяет сделать вывод: при численном интегрировании краевых задач для ОДУ четной степени следует исполь-

Таблица 10

**Погрешности решения краевой задачи (84), вычисленные без использования метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (84) calculated without using the method of the increase of the order approximation]**

$k$	4	5	6	7	8	9	10	11
$D_x^k, \%$	$8.95 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$4.69 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-5}$	$1.80 \cdot 10^{-6}$	$4.32 \cdot 10^{-7}$
$E_x^k$	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$3.03 \cdot 10^{-5}$	$6.12 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$5.69 \cdot 10^{-8}$

Таблица 11

**Погрешности решения краевой задачи (68), вычисленные с использованием модифицированного метода повышения ПА [Estimates for the errors in the solutions of the boundary value problem (68) calculated using the modified method of the increase of the order approximation]**

$k$	4	5	6	7	8	9	10
$D_x^k, \%$	$5.02 \cdot 10^{-3}$	$3.83 \cdot 10^{-4}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$1.44 \cdot 10^{-6}$	$6.66 \cdot 10^{-6}$	$4.80 \cdot 10^{-9}$	$1.97 \cdot 10^{-9}$
$E_x^k$	$5.06 \cdot 10^{-3}$	$3.51 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$4.96 \cdot 10^{-6}$	$4.03 \cdot 10^{-9}$	$1.54 \cdot 10^{-9}$

зовать метод повышения ПА, для ОДУ нечетной степени — модифицированный метод повышения ПА.

**Выводы.** Основные выводы по работе можно сформулировать следующим образом.

1. Дан и апробирован метод повышения порядка аппроксимации на единицу разностной краевой задачи для ОДУ<sub>4</sub>, ОДУ<sub>3</sub>, ОДУ<sub>2</sub> и системы ОДУ<sub>2</sub>, содержащих в своих граничных условиях хотя бы одно смешанное граничное условие или граничное условие в форме производной той или иной степени больше нуля.
2. Установлено, что при исследовании дифференциальных краевых задач, содержащих ОДУ <sub>$z$</sub>  ( $z$  — порядок ОДУ), следует руководствоваться следующими рекомендациями:
  - а) при  $z = 2m$  использовать  $(z+1)$ -точечный шаблон и матричный метод численного интегрирования;
  - б) при  $z = 2m + 1$  использовать  $(z+2)$ -точечный шаблон и модифицированный матричный метод численного интегрирования.

**Конкурирующие интересы.** Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

**Авторская ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Это исследование не получило специального финансирования.

### Библиографический список

1. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol.11, no.2. pp. 305–320. <https://doi.org/10.1137/0711028>.
2. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems // *Math. Comp.*, 1974. vol.28, no.128. pp. 981–1003. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4>.
3. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some recent results on difference methods / *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations: Part I: Survey Lectures*; ed. A. K. Aziz. New York: Academic Press, 1975. pp. 27–88. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7>.
4. Годунов С. К., Рябенкий В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию*. М.: Наука, 1977. 439 с.
5. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы*. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
6. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. М.: Наука, 1973. 432 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973. 416 с.
9. Boutayeb A., Chetouani A. Global extrapolations of numerical methods for solving a parabolic problem with non local boundary conditions // *Intern. J. Comp. Math.*, 2003. vol.80, no.6. pp. 789–797. <https://doi.org/10.1080/0020716021000039209>.
10. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions // *Appl. Math. Sci.*, 2007. vol.1, no.44. pp. 2173–2185. <http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf>.

11. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. <https://doi.org/10.14498/vsgtu646>.
12. Маклаков В. Н., Ильичева М. А. Численное интегрирование матричным методом и оценка порядка аппроксимации разностных краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 137–162. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1732>.
13. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 143–160. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1364>.
14. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1528>.
15. Маклаков В. Н., Стельмах Я. Г. Численное интегрирование матричным методом краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 1. С. 153–183. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1565>.
16. Турчак Л. И. *Основы численных методов*. М.: Наука, 1987. 320 с.
17. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
18. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1971. 431 с.
19. Закс Л. *Статистическое оценивание*. М.: Статистика, 1976. 598 с.
20. Сходимость матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 559–577. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1426>.

MSC: 34B99

## A method for increasing the order of approximation to an arbitrary natural number by the numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of various degrees with variable coefficients by the matrix method

© V. N. Maklakov

Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

### Abstract

The paper includes the well-known matrix method of numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations with variable coefficients, which provides retaining an arbitrary number of Taylor series expansion members of the sought-for solution or, equally, using the Taylor polynomial of arbitrary degree.

The difference boundary value problem approximating the differential boundary value problem is divided into two subtasks: the first subtask includes difference equations, in the construction of which the boundary conditions of the boundary value problem were not used. The second subtask includes difference equations, in the construction of which the boundary conditions of the problem were used.

Based on the earlier results, the method of increasing the order of approximation of the second subtask per unit, and, consequently, of the entire difference boundary problem as a whole is obtained and tested. The earlier findings are as follows:

- the order of approximation of the first and second subtasks is proportional to the degree of the Taylor polynomial used;
- the order of approximation of the first subtask depends on the parity or oddness of the degree of the Taylor polynomial used. It turned out that when using the degrees of the Taylor polynomial which are equal to  $2m - 1$  and  $2m$ , the approximation orders of these two subtasks are the same;
- the order of approximation of the second subtask coincides with the order of approximation of the first subtask, if the second subtask does not contain the specified values of any derivatives included in the boundary conditions;

### Research Article

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

#### Please cite this article in press as:

Maklakov V. N. A method for increasing the order of approximation to an arbitrary natural number by the numerical integration of boundary value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of various degrees with variable coefficients by the matrix method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 718–751. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1785> (In Russian).

#### Author's Details:

Vladimir N. Maklakov ✉ <https://orcid.org/0000-0003-1644-7424>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science; e-mail: makvo63@yandex.ru

- d) the presence in the second subtask of at least one derivative value of varying degrees included in the boundary conditions leads to a decrease in the order of approximation per unit in both the second subtask and the entire difference boundary value problem in general.

The theoretical conclusions have been confirmed by numerical experiments.

**Keywords:** ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor polynomials.

Received: 12<sup>th</sup> May, 2019 / Revised: 17<sup>th</sup> September, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 26<sup>th</sup> November, 2020

**Competing interests.** I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

**Author's Responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Keller H. B. Accurate difference methods for nonlinear two-point boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 2, pp. 305–320. <https://doi.org/10.1137/0711028>.
2. Lentini M., Pereyra V. A variable order finite difference method for nonlinear multipoint boundary value problems, *Math. Comp.*, 1974, vol. 28, no. 128, pp. 981–1003. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1974-0386281-4>.
3. Keller H. B. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations: Survey and some recent results on difference methods, In: *Numerical Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Part I: Survey Lectures; ed. A. K. Aziz. New York, Academic Press, 1975, pp. 27–88. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-068660-5.50007-7>.
4. Godunov S. K., Ryabenki V. S. *Theory of Difference Schemes: An Introduction*. New York, Wiley, 1964, xii+289 pp.
5. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
6. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
7. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennyye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
8. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [The Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)
9. Boutayeb A., Chetouani A. Global extrapolations of numerical methods for solving a parabolic problem with non local boundary conditions, *Intern. J. Comp. Math.*, 2003, vol. 80, no. 6, pp. 789–797. <https://doi.org/10.1080/0020716021000039209>.
10. Boutayeb A., Chetouani A. A numerical comparison of different methods applied to the solution of problems with non local boundary conditions, *Appl. Math. Sci.*, 2007, vol. 1, no. 44, pp. 2173–2185. <http://www.m-hikari.com/ams/ams-password-2007/ams-password41-44-2007/boutayebAMS41-44-2007.pdf>.
11. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu646>.

12. Maklakov V. N., Ilicheva M. A. Numerical integration by the matrix method and evaluation of the approximation order of difference boundary value problems for non-homogeneous linear ordinary differential equations of the fourth order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 137–162 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1732>.
13. Maklakov V. N. Estimation of the order of the matrix method approximation of numerical integration of boundary-value problems for inhomogeneous linear ordinary differential equations of the second order, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], no. 3(36), pp. 143–160 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1364>.
14. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1528>.
15. Maklakov V. N., Stelmakh Ya. G. Numerical integration by the matrix method of boundary value problems for linear inhomogeneous ordinary differential equations of the third order with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 1, pp. 153–183 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1565>.
16. Turchak L. I. *Osnovy chislennykh metodov* [The Fundamentals of Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1987, 320 pp. (In Russian)
17. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung*. I [Differential and Integral Calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
18. Kurosh A. *Higher algebra*. Moscow, Mir Publ., 1972, 428 pp.
19. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical Estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
20. Maklakov V. N. Convergence of the matrix method of numerical integration of the boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary differential second order equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 559–577 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1426>.





# Short Communications

MSC: 74A20, 74A35, 74A60

## On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation

© V. A. Kovalev<sup>1</sup>, E. V. Murashkin<sup>2</sup>, Y. N. Radayev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Moscow City Government University of Management,  
28, Sretenka st., Moscow, 107045, Russian Federation.

<sup>2</sup> A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,  
101, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

### Abstract

The present paper deals with a pseudotensor formulation of the Neuber theory of micropolar elasticity. The dynamic equations of the micropolar continuum in terms of relative tensors (pseudotensors) are presented and discussed. The constitutive equations for a linear isotropic micropolar solid is given in the pseudotensor form. The final forms of the dynamic equations for the isotropic micropolar continuum in terms of displacements and microrotations are obtained in terms of relative tensors. The refinements of Neuber's dynamic equations are discussed. Those are also considered in the cylindrical coordinate net.

**Keywords:** micropolarity, elasticity, continuum, microrotation, pseudoscalar, relative tensor, weight, constitutive equation.

Received: 16<sup>th</sup> July, 2020 / Revised: 17<sup>th</sup> October, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 22<sup>nd</sup> November, 2020

---

### Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this paper in press as:**

Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Y.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.

**Authors' Details:**

Vladimir A. Kovalev <https://orcid.org/0000-0003-2991-9531>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Professor; Dept. of Financial Management and Financial Law; e-mail: vlad\_koval@mail.ru

Evgenii V. Murashkin <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@google.com

Yuri N. Radayev <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

## 1. Preliminary remarks

The classical theories of continuum mechanics often is not acceptable for mathematical modeling of the modern materials behavior (for example, elastic meta-materials [1, 2] or biomaterials [3]: among them sands, soils and other granular elastic media, even perfectly plastic media exhibiting irreversible volume transformation (for instance, the Coulomb–Mohr media), fibrous media, honeycomb structures, reinforced composite materials, bones, vessels, muscles, and other tissues). In those materials the waves of microtations coupled to the displacements waves are observed due to the microstructure effects. Moreover, mirror modes of propagating waves in hemitropic media are caused by a physical mechanism manifested in the hemitropic elastic equations as their sensitivity to mirror reflections and 3D-space inversions.

A first variant of asymmetric elasticity theory was developed by the Cosserats brothers (1909) in the pioneering work [4]. Further consideration of the micropolar theory for finite deformation have been carried out by Truesdell and Toupin [5]. The Aero and Kuvshinskii derived linear constitutive equation of micropolar continuum in [6]. The material anisotropy of micropolar media has been considered and discussed in the Mindlin studies (see for example [7, 8]). The problem of stress concentration is the subject of the Neuber papers [9–11]. An extension of micropolar theory to the hemitropic case can be found in [12, 13].

In the general case of micropolar anisotropy the elastic material is specified by the 171 constitutive constant, which extremely complicates the equations analysis while solving applied problems. A semi-isotropic (hemitropic) solid is determining by nine constitutive constants of which only three new dimensionless ones if compared to the isotropic case. Literary search shows that papers devoted to micropolar theory often contain errors and misprints in the fundamental equations (see for example [10, 14]) making them difficult to understand.

Another important issue in mathematical modelling of micropolar material behaviour is a deficiency of relative tensors technique [5, 15–25], since micropolar characteristics actually are relative tensors. The relative tensors notation provides a deep insight to the physical and geometric nature of considered physical fields. Nonetheless, relative tensors notation in the continuum mechanics is not widespread. The most recent relative tensor formulation of hemitropic micropolar continuum in application to growing solid mechanics is discussed in [26].

The present paper is arranged as follows. The second section is devoted to a number of fundamental definitions from relative tensors algebra. The covariant derivative of an arbitrary relative tensor is considered.

In Sec. 3 Neuber's dynamic equations are derived in terms of relative tensors. The constitutive equations for linear isotropic micropolar continuum are furnished by pseudotensors notation. The weights of relative tensors of linear micropolar elastic medium and constitutive scalars are verified and presented by tables 1 and 2. The final form of Neuber's dynamic equations in an arbitrary curvilinear coordinate system is obtained. The misprints in Neuber's dynamic equations known from [10] are corrected.

The Sec. deals with a formulation of dynamic equations in cylindrical coordinate net. The obtained equations are of crucial importance for investigating wave propagation in long cylindrical waveguides.

The final section contains concluding remarks.

## 2. Relative tensors algebra and covariant differentiation

The permutation symbols and the fundamental orienting pseudoscalar are fundamental objects of relative tensor theory. This theory is a subject of many discussions found in multidimensional geometry tutorials and tensor analysis books [5, 15–25, 27]. A re-orientation of a coordinate frame (left-handed into right-handed or vice versa) can be afforded by re-enumeration of coordinate axes, thus allowing to introduce the fundamental object of relative tensor algebra and multidimensional geometry — the Levi–Civita permutation symbols [18]. It is well known, that the permutation symbols determined according to

$$\epsilon^{[-1]}_{ijk} = \epsilon^{[+1]}_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{for triplets } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2); \\ -1 & \text{for triplets } (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3); \\ 0 & \text{in all other cases;} \end{cases}$$

are not absolute tensors. In fact, permutation symbols  $\epsilon^{[-1]}_{ijk}$  and  $\epsilon^{[+1]}_{ijk}$  are the relative tensors (pseudotensors) of the weight  $-1$  (w.g.t. =  $-1$ ) and at the same time — relative contravariant tensors of the weight  $+1$  (w.g.t. =  $+1$ ). Hereinafter, position above a root symbol is reserved for weight of a relative tensor which is additionally embraced by square brackets.

We proceed to discussion of an orienting pseudoscalar (relative scalar of weight  $+1$  (w.g.t. =  $+1$ )), defined by the sequential application of inner and cross products to the covariant basis vectors:

$$e^{[+1]} = \mathbf{i}_1 \cdot (\mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3) \tag{1}$$

and the relative scalar of the negative weight  $-1$  (w.g.t. =  $-1$ ):

$$e^{[-1]}_{-1} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{i}).$$

Note that the pseudoscalar (1) is related to the parallelepiped volume built on the vectors  $\mathbf{i}_s$ . In further considerations, we will omit the weight indication for fundamental symbols such as  $e$ ,  $\epsilon_{ijk}$ ,  $\epsilon^{ijk}$  and also true for zero weight relative tensors. Here once again, we emphasize that  $e > 0$  for a right-handed coordinate system,  $e < 0$  for a left-handed coordinate system.

In general, the transformation formula for a relative tensor of weight  $W$  reads by [15–17]

$$\overline{T}^{lm\dots n}_{ij\dots k} = \Delta^W (\partial_p \overline{x}^l) (\partial_q \overline{x}^m) \dots (\partial_s \overline{x}^n) (\overline{\partial}_i x^a) (\overline{\partial}_j x^b) \dots (\overline{\partial}_k x^c) T^{pq\dots s}_{ab\dots c},$$

where

$$\Delta = \det(\overline{\partial}_j x^i), \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad \overline{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}.$$

Here, an overlined symbol should be considered as related to new coordinates  $\overline{x}^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $\Delta$  denotes the transformation Jacobian.

Covariant derivative of the relative tensor  $T^{lm\dots n}_{ij\dots k}$  of a given weight  $W$  is similarly defined by the corresponding derivative for an absolute tensor [15, 17, 21]:

$$\nabla_p [W] T_{ij\dots k}^{lm\dots n} = \partial_p [W] T_{ij\dots k}^{lm\dots n} + T_{ij\dots k}^{sm\dots n} \Gamma_{sp}^l + \dots + T_{ij\dots k}^{lm\dots s} \Gamma_{ip}^s - \Gamma_{sp}^l [W] T_{sj\dots k}^{lm\dots n} - \dots - \Gamma_{sp}^l [W] T_{ij\dots s}^{lm\dots n} - W [W] T_{ij\dots k}^{lm\dots n} \Gamma_{sp}^s \quad (2)$$

### 3. Reminder and refinement of Neuber's micropolar elasticity theory

The applying relative tensors formalism to the Neuber's theory allows to clarify its physical sense. The dynamic equations in terms of relative tensors can be presented in contrary to [9]

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial.\partial.V^\mu, \\ \nabla_\lambda [m]^{[-1]\lambda\mu} + \epsilon^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} &= -\theta [m]^{[-2]} \partial.\partial.\omega^{[+1]\mu}. \end{aligned} \quad (3)$$

In the latter equation contrary to the Neuber theory we use  $\epsilon^{\mu\lambda\eta}$  despite of weights unbalance.

The equations (3) in a curvilinear coordinate net can be rearranged due to (2) as follows

$$\begin{aligned} \partial_\lambda t^{\lambda\mu} + t^{\eta\mu} \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda + t^{\lambda\eta} \Gamma_{\eta\lambda}^\mu &= \rho \partial.\partial.V^\mu, \\ \partial_\lambda [m]^{[-1]\lambda\mu} + [m]^{[-1]\mu\eta} \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda + [m]^{[-1]\lambda\mu} \Gamma_{\eta\lambda}^\mu + [m]^{[-1]\lambda\mu} \Gamma_{\eta\lambda}^\eta + \epsilon^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} &= -\theta [m]^{[-2]} \partial.\partial.\omega^{[+1]\mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Linear isotropic micropolar elastic constitutive equations [9] in terms of rela-

Table 1

Relative tensors of the isotropic micropolar elasticity

Standard terminology	Notation adopted in [26]	Neuber's notation	Weight	Transformation to absolute tensor
displacements vector	$u^k$	$V^\mu$	0	
asymmetric strain tensor	$\epsilon_{ij}$	$d^{\lambda\mu}$	0	
force stress tensor	$\sigma^{ik}$	$t^{\lambda\mu}$	0	
mass density	$\rho$	$\rho$	0	
couple stress tensor	$\mu_{\cdot k}^i$	$m^{\lambda\mu}$	-1	$m^{\lambda\mu} = e [m]^{[-1]\lambda\mu}$
microinertia	$\mathfrak{I}$	$\theta$	-2	$\theta = e^2 [m]^{[-2]}$
microrotation vector	$\phi^i$	$\omega^\mu$	+1	$\omega^\mu = \frac{1}{e} [\omega]^{[+1]\mu}$
wryness tensor	$\kappa_{\cdot i}^s$	$k_{\lambda\mu}$	+1	$k_{\lambda\mu} = \frac{1}{e} [k]^{[+1]\lambda\mu}$

tive tensors are furnished by

$$\begin{aligned}
 t^{\lambda\mu} &= G[(1 + e^{2\overset{[-2]}{a}})\nabla^\lambda V^\mu + (1 - e^{2\overset{[-2]}{a}})\nabla^\mu V^\lambda + 2\overset{[-2]}{a}\epsilon^{\mu\lambda\eta}\overset{[+1]}{\omega}_\eta + \\
 &\quad + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}g^{\lambda\mu}\nabla_\eta V^\eta], \quad (5) \\
 \overset{[-1]}{m}^{\lambda\mu} &= 4G\overset{[-1]}{l}\overset{[-1]}{l}[\nabla^\lambda\overset{[+1]}{\omega}^\mu + b\nabla^\mu\overset{[+1]}{\omega}^\lambda + cg^{\lambda\mu}\nabla_\eta\overset{[+1]}{\omega}^\eta].
 \end{aligned}$$

In the above formulae the constitutive scalars and pseudoscalars are denoted by:

- $G$  is the shear modulus of elasticity;
- $\nu$  is the Poisson ratio;
- $\overset{[-1]}{l}$  is the micropolar characteristic length;
- $\overset{[-2]}{a}$ ,  $b$ ,  $c$  are dimensionless constitutive scalars.

Upon substituting constitutive equations (5) in equations (3) the Neuber dynamic equations in terms of relative tensors read by

$$\begin{aligned}
 (1 + e^{2\overset{[-2]}{a}})\Delta V^\mu + ((1 - 2\nu)^{-1} - e^{2\overset{[-2]}{a}})\nabla^\mu\nabla_\lambda V^\lambda + \\
 + 2\overset{[-2]}{a}\epsilon^{\mu\lambda\eta}\nabla_\lambda\overset{[+1]}{\omega}_\eta = \rho G^{-1}\partial.\partial.V^\mu, \\
 (\overset{[-2]}{a} - \overset{[-1]}{l}\overset{[-1]}{l}\Delta)\overset{[+1]}{\omega}^\mu - \overset{[-1]}{l}\overset{[-1]}{l}(b + c)\nabla^\mu\nabla_\lambda\overset{[+1]}{\omega}^\lambda - \\
 - \frac{\overset{[-2]}{a}}{2}\epsilon^{\mu\eta\sigma}\nabla_\eta V_\sigma = -\overset{[-2]}{\theta}(4G)^{-1}\partial.\partial.\overset{[+1]}{\omega}^\mu.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Note that in the original paper [9] the multiplier  $l^2$  is omitted in the second term of the second equation of the system (6).

Dynamic equations of linear micropolar elasticity by notation introduced in [13,26] in relative tensors are represented by

$$\begin{aligned}
 (1 + e^{2\overset{[-2]}{c_1}})\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - e^{2\overset{[-2]}{c_1}} + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + \\
 + 2\overset{[-2]}{c_1}\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l = \rho G^{-1}\partial.\partial.u^i, \quad (7) \\
 \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1 + e^{-2\overset{[+2]}{c_2}})\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i + (1 - e^{-2\overset{[+2]}{c_2}} + 2c_3)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}^k] - \\
 - 2\overset{[-2]}{c_1}(2\overset{[+1]}{\phi}_i - \epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l) = \overset{[-2]}{\mathfrak{J}}G^{-1}\partial.\partial.\overset{[+1]}{\phi}_i.
 \end{aligned}$$

Comparison of equations (6) and (7) leads to the relations between the micropolar constitutive constants in the form

$$\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L} = 2\overset{[-1]}{l}\overset{[-1]}{l}(1 + b), \quad \overset{[-2]}{c_1} = \overset{[-2]}{a}, \quad \overset{[+2]}{c_2} = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad c_3 = \frac{c}{1 + b}.$$

The weights of the Neuber constitutive scalars and pseudoscalars  $l, a, b, c$  are given by table 2. The weight of constitutive scalar  $b$  in table 2 is verified by formula

$$b = \frac{e^2 - \overset{[+2]}{c_2}}{e^2 + \overset{[+2]}{c_2}}.$$

Table 2

**Micropolar constitutive scalars of Neuber's theory**

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
shear modulus of elasticity	$G$	0	
the Poisson ratio	$\nu$	0	
micropolar characteristic length	$l$	-1	$l = e^{[-1]} l$
dimensionless micropolar modulus i	$a$	-2	$a = e^{2[-2]} a_1$
dimensionless micropolar modulus ii	$b$	0	
dimensionless micropolar modulus iii	$c$	0	

**4. Neuber's dynamic equations in cylindrical coordinates**

We proceed the paper to consideration of Neuber's dynamic equations in cylindrical coordinate net  $(r, \varphi, z)$ . It is convenient to assume that the reference plane of the former is the Cartesian  $xy$ -plane (with equation  $z = 0$ ), and the cylindrical axis is the Cartesian  $z$ -axis. Then the  $z$ -coordinate is the same in both systems. The transformation formulae between cylindrical  $(r, \varphi, z)$  and Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  can be furnished by

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

The nonzero components of metric tensor and Christoffel symbols are determined by

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r^{-1}.$$

Thus, the dynamic equations (4) can be presented in following form

$$\begin{aligned} &\partial_r(rt_{rr}) + \partial_\varphi t_{\varphi r} + r\partial_z t_{zr} - t_{\varphi\varphi} = r\rho\partial.\partial.V^r, \\ &\partial_\varphi(t_{\varphi\varphi}) + \partial_\varphi(rt_{r\varphi}) + r\partial_z t_{z\varphi} + t_{\varphi r} = r\rho\partial.\partial.V^\varphi, \\ &r\partial_z(t_{zz}) + \partial_\varphi t_{\varphi z} + \partial_r(rt_{zr}) = r\rho\partial.\partial.V^z, \\ &\partial_r(r^{[-1]}m_{rr}) - m_{\varphi\varphi}^{[-1]} + \partial_\varphi m_{\varphi r}^{[-1]} + r\partial_z m_{zr}^{[-1]} + m_{rr}^{[-1]} + r(t_{\varphi z} - t_{z\varphi}) = r\theta\partial.\partial.\omega^{[-2] [+1]}_r, \quad (8) \\ &\partial_\varphi m_{\varphi\varphi}^{[-1]} + \partial_r(r^{[-1]}m_{r\varphi}) + m_{\varphi r}^{[-1]} + r\partial_z m_{z\varphi}^{[-1]} + r^{-1}m_{r\varphi}^{[-1]} + r(t_{zr} - t_{rz}) = r\theta\partial.\partial.\omega^{[-2] [+1]}_\varphi, \\ &\partial_r(r^{[-1]}m_{rz}) + \partial_\varphi m_{\varphi z}^{[-1]} + r\partial_z m_{zz}^{[-1]} + m_{rz}^{[-1]} + r(t_{r\varphi} - t_{\varphi r}) = r\theta\partial.\partial.\omega^{[-2] [+1]}_z. \end{aligned}$$

The obtained equations (8) are of crucial importance for investigating waves propagation in long cylindrical waveguides.

## 5. Conclusions

- (i) The Neuber dynamic equations of the linear micropolar continuum in terms of relative tensors (pseudotensors) in an arbitrary curvilinear coordinate system are presented and discussed. The misprints in original Neuber's dynamic equations are eliminated.
- (ii) The constitutive equations for linear isotropic micropolar continuum are furnished by pseudotensors notation.
- (iii) The weights of relative tensors of linear micropolar elastic medium and the Neuber constitutive scalars are verified and given by tables 1 and 2.
- (iv) The final forms of the dynamic equations for the isotropic micropolar continuum in terms of displacements and microrotations are obtained in terms of relative tensors.
- (v) The refinements of the final form of Neuber's dynamic equations are discussed.

**Competing interests.** We declare that we have no competing interests.

**Author's Responsibilities.** We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 18-01-00844, 20-01-00666).

**Acknowledgments.** The authors are grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable improvements, suggestions and comments.

## References

1. Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*, Advanced Structured Materials, vol. 51. Singapore, Springer Verlag, 2017, xvii+259 pp. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-2434-4>.
2. Chandrasekhar S. *Liquid Crystals*. Cambridge, Cambridge University Press, 1992, xvi+460 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511622496>.
3. Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*, Interdisciplinary Applied Mathematics book series, vol. 45. New York, Springer, 2017, xxii+646 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-87710-5>.
4. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, A. Hermann et fils, 1909, 126 pp.
5. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, vol. III/1; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226-902. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2).
6. Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles, *Soviet Physics-Solid State*, 1961, vol. 2, no. 7, pp. 1272-1281.
7. Mindlin R. D., Tiersten H. F. Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, no. 1, pp. 415-448. <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
8. Mindlin R. D. Influence of couple-stresses on stress concentrations, *Experimental Mechanics*, 1963, vol. 3, no. 1, pp. 1-7. <https://doi.org/10.1007/BF02327219>.
9. Neuber H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper, *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 48-69. <https://doi.org/10.1007/BF01176729>.

10. Neuber H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, In: *Applied Mechanics*; eds. Görtler H.. Berlin, Heidelberg, Springer, 1966, pp. 153–158. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16).
11. Neuber H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua, In: *Mechanics of Generalized Continua*; eds. Kröner E.. Berlin, Heidelberg, Springer, 1968, pp. 109–113. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13).
12. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 15. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xv+345 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
13. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
14. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
15. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
16. Veblen O., Thomas T. Y. The geometry of paths, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1923, vol. 25, no. 4, pp. 551–608. <https://doi.org/10.2307/1989307>.
17. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge University Press, 1927, 102 pp.
18. Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. London, Glasgow, Blackie & Son Limited, 1927, 450 pp.
19. Shirokov P. A. *Tensor Calculus: Tensor Algebra*. Moscow, Leningrad, ONTI GTTI, 1934, 464 pp. (In Russian)
20. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, x+275 pp.
21. Thomas T. Y. *Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 1. London, New York, Academic Press, 1961, v+119 pp.
22. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York, John Wiley & Sons Inc, 1964, xii+361 pp <https://archive.org/details/tensoranalysissth0000soko>.
23. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Gröningen, P. Noordhoff, 1964, viii+418 pp.
24. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, 334 pp.
25. Das A. *Tensors: The mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
26. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
27. Rosenfeld B. A. Multidimensional Spaces, In: *A History of Non-Euclidean Geometry*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 12. New York, Springer, 1988, pp. 247–279. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8680-1\\_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8680-1_7).



УДК 539.3

## К теории микрополярной упругости Нейбера. Псевдотензорная формулировка

© В. А. Ковалев<sup>1</sup>, Е. В. Мурашкин<sup>2</sup>, Ю. Н. Радаев<sup>2</sup><sup>1</sup> Московский городской университет управления Правительства Москвы, Россия, 107045, Москва, ул. Сретенка, 28.<sup>2</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

### Аннотация

Рассматривается псевдотензорная формулировка теории микрополярной упругости Нейбера. Приведены и обсуждаются динамические уравнения микрополярного континуума в терминах относительных тензоров (псевдотензоров). Даны определяющие уравнения для линейного изотропного микрополярного твердого тела. Окончательные формы динамических уравнений для изотропного микрополярного континуума в терминах смещений и микровращений получены в терминах относительных тензоров. Устранены недочеты в окончательной форме динамических уравнений Нейбера. Получены динамические уравнения Нейбера в цилиндрической системе координат.

**Ключевые слова:** микрополярность, упругость, континуум, микровращение, псевдоскаляр, относительный тензор, вес, определяющее уравнение.

Получение: 16 июля 2020 г. / Исправление: 17 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 22 ноября 2020 г.

---


### Краткое сообщение


© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


### Образец для цитирования

Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.

### Сведения об авторах

Владимир Александрович Ковалев  <https://orcid.org/0000-0003-2991-9531>  
д.ф.-м.н.; профессор; каф. финансового менеджмента и финансового права;  
e-mail: vlad\_koval@mail.ru

Евгений Валерьевич Мурашкин  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>  
к.ф.-м.н.; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@google.com

Юрий Николаевич Радаев  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>  
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-51-00844, № 20-01-00666).

**Благодарности.** Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

MSC: 76D05, 76D99

## A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations

© V. P. Kovalev<sup>1</sup>, E. Yu. Prosviryakov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Moscow Institute of Physics and Technology  
(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russian Federation.

<sup>2</sup> Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences,  
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.

### Abstract

The paper presents a new class of exact solutions for the Navier–Stokes equations. These solutions describe unsteady three-dimensional in velocities and two-dimensional in coordinates for a viscous incompressible fluid flow. The procedure for constructing an exact solution generalizes Trkal's method proposed for studying screw flows. The new class of exact solutions allows to describe non-helical flows (the velocity vector forms a nonzero angle with the vorticity vector) and fluid flows existing in a finite time.

**Keywords:** Navier–Stokes equation, exact solution, Trkal's method, eigenfunctions of the Laplacian, non-helical flows, blow-up regimes.

Received: 29<sup>th</sup> July, 2020 / Revised: 18<sup>th</sup> September, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 9<sup>th</sup> December, 2020

**Introduction.** The study of the properties of Navier–Stokes equation solutions and continuity equation solutions is known to be based on different approaches, which can be divided into two big groups: analytical research and numerical integration. Analytical research, in turn, is divided into the study of the general properties of flows (one of the latest results were obtained in [1–3]) and the integration of the equations of motion of a viscous incompressible fluid. The mathematical tool for the analytical integration of the equations of motion of a

### Short Communication

© ⓘ The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this paper in press as:**

Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 762–768. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1814>.

#### Authors' Details:

Vitalii P. Kovalev ⓘ <https://orcid.org/0000-0001-5116-8135>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;  
e-mail: [kovalev-falt@yandex.ru](mailto:kovalev-falt@yandex.ru)

Evgeny Yu. Prosviryakov ⓘ ⓘ <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics;  
e-mail: [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)

viscous incompressible fluid for replication of exact solutions is based on group (symmetry) analysis. However, the study of the invariant properties and finding various symmetries of equations gives no way of obtaining all the exact solutions to the Navier–Stokes equations [4]. An important problem of the theory of integration of the equations of fluid motion is constructing classes of exact solutions, which is often heuristic [5–15]. The fact is that classes of exact solutions are known that have yet to be classified in terms of the invariance theory [5–7, 14, 15]. Therefore, it is very important to know how methods for “reproducing” exact solutions can be developed using known flows as examples. This approach was discussed in [5, 9, 12, 13].

It has been shown in recent papers that there are generalizations of the well-known Trkal method [16] which allow exact solutions to the Navier–Stokes equations to be constructed [17, 18]. Most of nonstationary three-dimensional exact solutions to the Navier–Stokes equations were obtained by the Trkal method which is an extension of the Taylor–Caldonazzo approach to helical flows [18].

The method is based on the fact that with a constant coefficient  $k$  relating velocity vector to vorticity one, velocity vector and vorticity rotor one will also be related by a constant coefficient  $k^2$ . This paper proposes a family of non-helical exact solutions in which the velocity vector and the vorticity one are even non-collinear. However, the velocity and vorticity rotor vectors prove to be related by a constant coefficient, and this eventually enables us to obtain nonstationary exact solutions to the Navier–Stokes equations from stationary exact solutions to the Euler equations. Thus, the here-proposed method can be viewed as an extension of the Trkal method to non-helical flows.

**1. Notation and equations of motion.** In dimensionless variables, the flow of a viscous incompressible fluid in a potential field of body forces obeys the Navier–Stokes equation system and the continuity equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\frac{1}{\text{Re}} \nabla \times \boldsymbol{\Omega} - \nabla \left( p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + G \right), \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

where  $\mathbf{V}$  is velocity,  $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$  is vorticity,  $p$  is pressure related to density,  $\text{Re}$  is the Reynolds number,  $\nabla$  is the two-dimensional Hamilton operator,  $G$  is the potential of body forces.

**2. The family of exact solutions.** Consider an arbitrary solution to the equation with respect to the (twice continuously differentiable) function of two variables  $\psi = \psi(x, y)$  in a rectangular Cartesian coordinate system  $Oxyz$ :

$$\Delta \psi = \lambda \psi, \quad (3)$$

where  $\lambda$  is an arbitrary constant,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  is the two-dimensional Laplace operator. Examples of such solutions (which are the eigenfunctions of the Laplace operator) can be found e.g. in [4, 17, 18].

For any solution  $\psi = \psi(x, y)$  of equation (3), we assume that

$$\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z) = \exp\left(\frac{t\lambda}{\text{Re}}\right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \psi, \quad -\frac{\partial}{\partial x} \psi, \quad \lambda \psi \right). \quad (4)$$

It can easily be seen that this representation of velocity provides the inherent (identical) fulfillment of the continuity equation (2). It remains to verify that there exists a pressure field  $p > 0$  that, together with the velocity represented by equation (4), satisfies equation (1). To do this, we rewrite the Navier–Stokes equation (1) as

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla \times \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla \left( p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + G \right), \quad (5)$$

and compute the terms in the left-hand side of (5).

The first term in equation (5) is transformed as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} = \frac{\lambda}{\text{Re}} \exp\left(\frac{t\lambda}{\text{Re}}\right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \psi, -\frac{\partial}{\partial x} \psi, \lambda \psi \right) = \frac{\lambda}{\text{Re}} \mathbf{V}. \quad (6)$$

Taking into account (3), we obtain the following expressions for the vorticity vector:

$$\boldsymbol{\Omega} = \lambda \exp\left(\frac{t\lambda}{\text{Re}}\right) \left( \frac{\partial}{\partial y} \psi, -\frac{\partial}{\partial x} \psi, -\psi \right). \quad (7)$$

Note that the second term in the left-hand side of (5) coincides up to sign with the first term in equation (6):

$$\frac{1}{\text{Re}} \nabla \times \boldsymbol{\Omega} = \frac{\lambda}{\text{Re}} \exp\left(\frac{t\lambda}{\text{Re}}\right) \left( -\frac{\partial}{\partial y} \psi, \frac{\partial}{\partial x} \psi, -\lambda \psi \right) = -\frac{\lambda}{\text{Re}} \mathbf{V}. \quad (8)$$

Finally, we compute the third term:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= \lambda \exp\left(\frac{2t\lambda}{\text{Re}}\right) \left( -(\lambda + 1)\psi \frac{\partial}{\partial x} \psi, -(\lambda + 1)\psi \frac{\partial}{\partial y} \psi, 0 \right) = \\ &= -\nabla \left( \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} \psi^2 \exp\left(\frac{2t\lambda}{\text{Re}}\right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Substituting expressions (6), (8), and (9) into formula (5), we arrive at the fluid motion equation:

$$-\nabla \left( \frac{\lambda(\lambda + 1)}{2} \psi^2 \exp\left(\frac{2t\lambda}{\text{Re}}\right) \right) = -\nabla \left( p + \frac{\mathbf{V}^2}{2} + G \right). \quad (10)$$

For the velocity field  $\mathbf{V}$  set by formula (4), the solution of equation (10), and hence equation (1) with respect to the pressure field  $p > 0$  does exist and it is determined to an arbitrary constant  $p_0$  ensuring the positivity of the pressure in the region under study as

$$p = p_0 - G + \frac{1}{2} \left\{ \lambda \psi^2 - \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial y} \psi \right)^2 \right\} \exp\left(\frac{2t\lambda}{\text{Re}}\right). \quad (11)$$

Thus, for any solution  $\psi = \psi(x, y)$  of equation (3) and any field of body forces  $G$ , formulae (4) and (11) specify the velocity and pressure fields of an exact solution to the Navier–Stokes equations.

**3. The analysis of the obtained solution family.** The projection of the velocity (4) onto the plane  $Oxy$  coincides with the velocities of plane exact solutions obtained in [17]. A comprehensive analysis of these exact solutions was performed in [17]; therefore, in [17], one can become familiar with the projections of the velocities and streamlines of solution (4) for various values of  $\lambda$  and for various corresponding functions  $\psi$ .

It follows from the analysis of the formulae for the velocity vector (4) and the vorticity vector (7) that they are parallel when  $\lambda = -1$ . Thus, it is only in the case  $\lambda = -1$  that the found exact solution is helical [16–18].

Note that when  $\lambda = -1$ , one of the solutions to equation (3) is a stream function of the form

$$\psi = -\cos(x/\sqrt{2})\cos(y/\sqrt{2}).$$

The corresponding velocity field (4) coincides with the known exact Berker solution [19]:

$$\begin{aligned} V_x &= -\cos(kx/\sqrt{2})\sin(ky/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ V_y &= \sin(kx/\sqrt{2})\cos(ky/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ V_z &= \cos(kx/\sqrt{2})\cos(ky/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

If  $k = 1$ , this exact solution describes the flow of an ideal fluid in an infinite square cross-section pipe ( $0 \leq x \leq \sqrt{2}\pi, 0 \leq y \leq \sqrt{2}\pi$ ).

The construction of the exact solution (4) for the equations of motion of a viscous incompressible fluid (1), (2) is based on finding eigenfunctions of the Laplace equation (3). Recall that this approach was first proposed by Trkal [16]. When the classical Trkal method is applied, the velocity always decreases with time since the exponent is  $-tk^2/\text{Re}$ . In the family of the here-obtained solutions, the velocity can increase with time. This is possible if the function  $\psi$  corresponds to the positive value of  $\lambda$ . Such a stream function can be exemplified the formula

$$\psi = \exp(2x)\cos y.$$

The substitution of this function to into formula (11) yields the following pressure distribution in the fluid:

$$p = p_0 - G + \frac{\exp(2x)}{2} \{(\lambda - 4)(\cos y)^2 - (\sin y)^2\} \exp\left(\frac{2t\lambda}{\text{Re}}\right). \quad (12)$$

We assume that  $\lambda = 3$  in (12), then the expression in the curly brackets proves to be negative ( $((3 - 4)(\cos y)^2 - (\sin y)^2 = -1)$ ). Therefore, the corresponding solution is time-bounded since, with any choice of  $p_0$ , there exists such a point in time that the pressure at some points reaches zero, and there appear caverns (cavities) whose presence prevents from using the Navier–Stokes equations in the entire region under study. The study of such flows is not the subject matter of this paper; yet, the proposed class of exact solutions of the Navier–Stokes equations allows us to describe blow-up flows.

**4. Conclusion.** The paper has presented a procedure for constructing a new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations for a viscous incompressible fluid. The obtaining of the new family of exact solutions is based on the modified Trkal method. The announced solutions of the Navier–Stokes equations have a

number of interesting properties. We have shown that it is possible to describe not only helical flows, exponentially damped with time, by the Trkal method. We have found examples of non-helical flows of a viscous incompressible fluid existing in finite time. In other words, they simulate fluid motions characterized by blow-up regimes.

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** We are fully responsible for submitting the final manuscript in print. Each of us has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-19-00571).

## References

1. Sizykh G. B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1038–1042. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060083>.
2. Sizykh G. B. Axisymmetric helical flows of viscous fluid, *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 44–50. <https://doi.org/10.3103/S1066369X19020063>.
3. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 407–416. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1723>.
4. Pukhnachev V. V. Symmetries in Navier–Stokes equations, *Usp. Mekh.*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6–76 (In Russian).
5. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyaniin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>.
6. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
7. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. <https://doi.org/10.1007/BF00852164>.
8. Meleshko S. V., Pukhnachev V. V. One class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 208–216. <https://doi.org/10.1007/BF02468516>.
9. Ludlow D. K., Clarkson P. A., Bassom A. P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations, *Stud. Appl. Math.*, 1999, vol. 103, no. 3, pp. 183–240. <https://doi.org/10.1111/1467-9590.00125>.
10. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *Nonlinear Dynam.*, 2004, vol. 36, no. 1, pp. 47–68. <https://doi.org/10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73>.
11. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 334. Cambridge, Cambridge Univ., 2006, x+196 pp. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526459>.
12. Polyaniin A. D., Aristov S. N. A new method for constructing exact solutions to three dimensional Navier–Stokes and Euler equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2011, vol. 45, no. 6, pp. 885–890. <https://doi.org/10.1134/S0040579511060091>.
13. Aristov S. N., Polyaniin A. D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier–Stokes equations, *Russ. J. Math. Phys.*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 1–18. 15324515. <https://doi.org/10.1134/S1061920810010012>.
14. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 107–114. <https://doi.org/10.1134/S0040579518060088>.

15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. <https://doi.org/10.1134/S0040579516030027>.
16. Trkal V. Poznámka k hydrodynamice vazkých tekutin, *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, 1919, vol. 48, no. 3, pp. 302–311 (In Czech). <https://doi.org/10.21136/CPMF.1919.109099>; Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids, *Czech. J. Phys.*, 1994, vol. 44, no. 2, pp. 97–106. <https://doi.org/10.1007/BF01701186>.
17. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
18. Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu., Sizykh G. B. Obtaining examples of exact solutions of the Navier–Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities, *Proc. of Moscow Institute of Physics and Technology*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 71–88 (In Russian).
19. Berker R. *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, vol. VIII/2. Berlin, Springer, 1963, 384 pp. (In French)



УДК 532.517.2

## Новый класс невинтовых точных решений уравнений Навье–Стокса

© В. П. Ковалев<sup>1</sup>, Е. Ю. Просвиряков<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Россия, 141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9.

<sup>2</sup> Институт машиноведения УрО РАН, Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

### Аннотация

Приведен новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса. Эти решения описывают нестационарные трехмерные по скоростям и двумерные по координатам течения вязкой несжимаемой жидкости. Процедура построения точного решения обобщает метод Тркала, предложенный для изучения винтовых течений. Новый класс точных решений позволяет описывать невинтовые течения (вектор скорости образует ненулевой угол с вектором завихренности) и течения жидкости, существующие конечное время.

**Ключевые слова:** уравнение Навье–Стокса, точное решение, метод Тркала, собственные функции оператора Лапласа, невинтовые течения, режимы с обострением.

Получение: 29 июля 2020 г. / Исправление: 18 сентября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 9 декабря 2020 г.

**Конкурирующие интересы.** Мы заявляем, что у нас нет конфликта интересов в отношении авторства и публикации этой статьи.

**Авторская ответственность.** Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Каждый из нас одобрил окончательную версию рукописи.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19–19–00571).

### Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


### Образец для цитирования

Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu. A new class of non-helical exact solutions of the Navier–Stokes equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 762–768. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1814>.

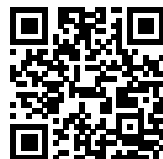
### Сведения об авторах

Виталий Петрович Ковалев  <https://orcid.org/0000-0001-5116-8135>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики; e-mail: [kovalev-falt@yandex.ru](mailto:kovalev-falt@yandex.ru)

Евгений Юрьевич Просвиряков  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>

доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики; e-mail: [evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)



УДК 517.958:539.3(1)

## Статическая термоустойчивость пологой геометрически нерегулярной оболочки из ортотропного термочувствительного материала

© М. В. Вильде, О. А. Мыльцина,  
С. А. Григорьев, Г. Н. Белосточный

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
(национальный исследовательский университет),  
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83.

### Аннотация

Рассматривается полая ортотропная геометрически нерегулярная оболочка (ГНО) постоянного кручения, термомеханические параметры которой линейно зависят от температуры. При достижении температуры определенного значения происходит скачкообразно смена формы равновесия, что вызывает изменение первоначальной геометрии оболочки. Эти значения температур называют критическими.

Для практики значительный интерес представляют соотношения, связывающие критические температуры с геометрическими и термомеханическими параметрами ГНО. Решение задач статической термоустойчивости ГНО, как правило, начинается с анализа их исходного безмоментного состояния. Тангенциальные усилия, вызванные нагревом оболочки, определяются как решения системы сингулярных дифференциальных уравнений безмоментной термоупругости. Эти усилия содержатся в формах Брайена или Рейсснера в уравнениях статической термоустойчивости, и от их структуры существенно зависит успех в дальнейшем решении задачи.

В работе решение сингулярной безмоментной термоупругости найдено в элементарных функциях. Уравнения моментной термоупругости,

### Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Вильде М. В., Мыльцина О. А., Григорьев С. А., Белосточный Г. Н. Статическая термоустойчивость пологой геометрически нерегулярной оболочки из ортотропного термочувствительного материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 769–779. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1784>.

### Сведения об авторах

Мария Владимировна Вильде <https://orcid.org/0000-0001-8198-3368>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: mv\_wilde@mail.ru

Ольга Анатольевна Мыльцина <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

кандидат физико-математических наук; доцент; каф. теории функций и стохастического анализа; e-mail: omyltsina@yandex.ru

Степан Андреевич Григорьев; аспирант; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: kafedramtuibm@yandex.ru

Григорий Николаевич Белосточный <https://orcid.org/0000-0001-6949-4174>

доктор технических наук, профессор; профессор; каф. математической теории упругости и биомеханики; e-mail: belostochny@mail.ru

записанные в компонентах поля перемещений, методом функции перемещений сведены к одному сингулярному дифференциальному уравнению в частных производных восьмого порядка. Решение записывается в виде двойного тригонометрического ряда, коэффициенты которого на основании процедуры Галёркина определяются как решения линейной однородной алгебраической системы уравнений. Из равенства нулю определителя этой системы (в первом приближении) получено алгебраическое уравнение пятой степени для относительной критической температуры, наименьший положительный действительный корень которого и есть искомая температура. Проводится количественный анализ влияния геометрических и термомеханических параметров ГНО на величины критических температур.

**Ключевые слова:** ортотропность, термочувствительность, статика, термоустойчивость, сингулярность, пологая оболочка, кручение, температура.

Получение: 12 мая 2020 г. / Исправление: 14 октября 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 21 декабря 2020 г.

---

**Введение.** В известных областях современной техники используются конструкции, содержащие элементы в виде геометрически нерегулярных оболочек (ГНО), выполненных из ортотропных чувствительных к нагреву материалов.

Штатные условия эксплуатации предусматривают в ряде случаев сохранение их первоначальной геометрии при воздействии температурных и силовых факторов со стороны рабочей среды. Это одна из основных причин, требующая предварительного предельно точного анализа статической и динамической термоустойчивости объектов указанного класса — геометрически нерегулярных ортотропных пологих оболочек, обширный класс которых образуют ребристые оболочки. Несмотря на значительное число научных работ, посвященных гладким оболочкам, информация о термоустойчивости ГНО в открытой печати практически отсутствует.

Целью настоящей работы является решение задачи статической термоустойчивости ортотропной ГНО из термочувствительного материала на основании строгой континуальной модели [1, 2]. Уравнение для критической температуры получено в предположении линейной зависимости термомеханических параметров от температуры.

Количественные результаты представлены в виде таблиц, наглядно иллюстрирующих влияние геометрических и термомеханических параметров на величины критических температур.

**1. Методика решения задачи статической термоустойчивости ГНО из термочувствительного материала.** Рассмотрим геометрически нерегулярную пологую ортотропную оболочку постоянного кручения, уравнение срединной поверхности которой имеет вид [3, 4]

$$x_3(x_1, x_2) = \frac{\tilde{\delta}}{ab} x_1 x_2,$$

где  $\tilde{\delta}$  — наибольший подъем оболочки над ее прямоугольным планом в координатной плоскости  $\pi_1(x_1, x_2)$  со сторонами  $a$  и  $b$ . Оболочка выполнена из термочувствительного материала, модули упругости и коэффициенты линейного расширения линейно зависят от постоянной температуры  $\theta$  [5, 6]:

$$E_j = E_{j0}(1 - \gamma_j\theta), \quad \alpha_j = \alpha_{j0}(1 + \beta_j\theta), \quad j = 1, 2.$$

Здесь  $E_{j0}$  и  $\alpha_{j0}$  — соответственно модули упругости и коэффициенты линейного расширения материала при нулевой температуре;  $\gamma_j, \beta_j$  — известные постоянные.

Тангенциальные усилия  $T^{ij}$ , возникающие в ГНО при нагреве до постоянной температуры  $\theta$ , когда она находится в безмоментном состоянии, удовлетворяют сингулярным дифференциальным уравнениям [7–10]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{,1}^{11} + \tilde{T}_{,2}^{12} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{T}_{i,2}^{12} \delta(x_1 - x_1^i) &= 0, \\ \tilde{T}_{,2}^{22} + \tilde{T}_{,1}^{12} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{T}_{i,2}^{22} \delta(x_1 - x_1^i) &= 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{T}^{11} = B_1[\tilde{u}_{,1} + \nu_2\tilde{v}_{,2} - (\alpha_1 + \nu_2\alpha_2)\theta]$ ,  $\tilde{T}^{22} = B_2[\tilde{v}_{,2} + \nu_1\tilde{u}_{,1} - (\alpha_2 + \nu_1\alpha_1)\theta]$ ,  $\tilde{T}^{12} = Gh(\tilde{u}_{,2} + \tilde{v}_{,1}) - 2k_{12}\tilde{w}$ ,  $\delta(x_1 - x_1^i)$  — сдвинутая  $\delta$ -функция Дирака,

$$B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad k_{12} = x_{3,12} = \frac{\tilde{\delta}}{ab},$$

$\bar{T}_i^{12} = Gh_i \tilde{u}_{,2}$ ,  $\bar{T}_i^{22} = E_2 h_i (\tilde{v}_{,2} - \alpha_2 \theta)$ ;  $a_i$  — ширина  $i$ -того ребра,  $h_i$  — высота  $i$ -того ребра,  $n$  — число ребер,  $\nu_j$  — коэффициенты Пуассона,  $j = 1, 2$ ;  $\tilde{u}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  — компоненты поля перемещений в безмоментном состоянии ГНО,  $G$  — модуль сдвига.

Решение сингулярной системы (1) в случае краевых условий

$$\begin{aligned} \tilde{u} = 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a, \\ \tilde{v} = 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b \end{aligned}$$

запишется в элементарных функциях [11, 12]:

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{T}^{12} = 0, \quad \tilde{T}^{11} = -B_1(\alpha_1 + \nu_2\alpha_2)\theta, \quad \tilde{T}^{22} = -B_2(\alpha_2 + \nu_1\alpha_1)\theta. \quad (2)$$

Тангенциальные усилия (2) содержатся в сингулярных уравнениях статической термоустойчивости ГНО, которая в компонентах поля перемещений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{,11} + \frac{Gh}{B_1} u_{,22} + \left( \nu_2 + \frac{Gh}{B_1} \right) v_{,12} - 2 \frac{Gh}{B_1} k_{12} w_{,2} &= 0, \\ v_{,22} + \frac{Gh}{B_2} v_{,11} + \left( \nu_1 + \frac{Gh}{B_2} \right) u_{,12} - 2 \frac{Gh}{B_2} k_{12} w_{,1} &= 0, \end{aligned}$$

$$D_1 w_{,1111} + 2(D_1 \nu_1 + 2D) w_{,1122} + D_2 w_{,2222} + 4Gh k_{12}^2 w - \quad (3)$$

$$-2Ghk_{12}(u,_{2} + v,_{1}) + \sum_{i=1}^n (E_2 J_i w,_{2222} + \bar{T}_i^{22} w,_{22}) \delta(x_1 - x_1^i) + \\ + \tilde{T}^{11} w,_{11} + 2\tilde{T}^{12} w,_{12} + \tilde{T}^{22} w,_{22} = 0.$$

Здесь  $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$ ,  $D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}$ ,  $D = \frac{Gh^3}{12}$ ,  $\bar{T}_i^{22} = -E_2 a_i h_i \alpha_2 \theta$ ,  $J_i = \frac{a_i h_i^3}{12}$ .

Обращаясь к методу функций перемещений [3, 4], система (3) подстановкой

$$u = 2k_{12} \frac{Gh}{B_2} \left( \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right), \quad v = 2k_{12} \frac{Gh}{B_2} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right), \\ w = \frac{Gh}{B_2} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right)$$

сводится к сингулярному дифференциальному уравнению восьмого порядка относительно функции  $\Phi(x_1, x_2)$ :

$$\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^8} + \left[ \frac{E_2}{G} + 4(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G}{E_1} \right] \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^6 \partial x_2^2} + \\ + 2 \left[ \frac{E_2}{E_1} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) (\nu_2 + 2(1 - \nu_1 \nu_2)) \right] \frac{G}{E_1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} + \\ + \left[ \frac{E_2}{G} + 4(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{G}{E_1} \right] \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^6} + \left( \frac{E_2}{E_1} \right)^2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_2^8} + \\ + \frac{48}{a^2 b^2} \frac{E_2}{E_1} \left( \frac{\tilde{\delta}}{h} \right)^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \\ + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{E_2 J_i}{D_1} \left[ \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^4} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^6} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial x_2^8} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\bar{T}_i^{22}}{D_1} \left[ \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_1^4 \partial x_2^2} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^4} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x_2^6} \right] \right\} \delta(x_1 - x_1^i) - \\ - \frac{1}{D_1} \left( \tilde{T}^{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2\tilde{T}^{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \tilde{T}^{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \times \\ \times \left[ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right] = 0. \quad (4)$$

В этом уравнении тангенциальные усилия определяются соотношениями (2).

Рассмотрим случай шарнирно-подвижного опирания краев оболочки:

$$u = 0, \quad T^{12} = 0, \quad M^{11} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = b, \\ v = 0, \quad T^{12} = 0, \quad M^{22} = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b, \quad (5)$$

где  $M^{11} = -D_1(w,_{11} + \nu_2 w,_{22})$ ,  $M^{22} = -D_2(w,_{22} + \nu_1 w,_{11})$ .

Краевые условия (5) переписутся через функцию перемещений  $\Phi(x_1, x_2)$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_2^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= 0, & \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right) &= 0, \quad \text{при } x_1 = 0, \quad x_1 = a; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} &= 0, & \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^3} - \nu_2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} - \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^4} + \left( \frac{E_2}{G} - 2\nu_2 \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2^4} \right) &= 0, \quad \text{при } x_2 = 0, \quad x_2 = b. \end{aligned} \quad (7)$$

Функцию  $\Phi(x_1, x_2)$ , тождественно удовлетворяющую всем условиям (6), (7), зададим в виде двойного тригонометрического ряда с постоянными коэффициентами:

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_{k,m} C_{km} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi x_2}{b}. \quad (8)$$

Подстановка (8) в уравнение (4) с последующим обращением к процедуре Галёркина приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно коэффициентов ряда (8) [13]. Из равенства нулю определителя этой системы получим алгебраическое уравнение относительно безразмерной величины  $\theta_* = (a/h)^2 \alpha_{10} \theta$ . Наименьший положительный корень этого уравнения и есть искомая относительная критическая температура  $\theta_*^{cr}$ , при достижении которой возможен скачкообразный переход термоупругой системы к новой форме равновесия. В первом приближении это уравнение пятой степени запишется в виде

$$\begin{aligned} K_5(\gamma, \beta) \theta_*^5 + K_4(\gamma, \beta) \theta_*^4 + [K_3'(\gamma) + K_3''(\gamma, \beta)] \theta_*^3 + \\ + [K_2'(\gamma) + K_2''(\gamma, \beta)] \theta_*^2 + [K_1'(\gamma) + K_1''(\alpha)] \theta_* + K_0 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_0 = a_{11} + a_{12} \frac{E_{20}}{G} + a_{13} \frac{G}{E_{10}} + a_{14} \frac{E_{20}}{E_{10}} + \\ + a_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + a_{16} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + a_{17} \frac{G}{E_{10}} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2, \end{aligned}$$

$$K_1'(\gamma) = - \left[ 2a_{11}\gamma_1 + a_{12} \frac{E_{20}}{G} (2\gamma_1 + \gamma_2) + a_{13} \frac{G}{E_{10}} \gamma_1 + a_{14} \frac{E_{20}}{E_{10}} (\gamma_1 + \gamma_2) + \right. \\ \left. + a_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (2\gamma_2 + \gamma_1) + 2a_{16} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \gamma_2 + a_{17} \frac{G}{E_{10}} \frac{E_{20}}{E_{10}} \gamma_2 \right],$$

$$K_1''(\alpha) = -12 \left[ b_{11} + b_{12} \frac{E_{20}}{E_{10}} + b_{13} \frac{E_{20}}{G} - b_{14} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + \right. \\ \left. + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} + b_{17} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{E_{10}} + b_{18} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} + \right. \\ \left. + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \right],$$

$$K_2'(\gamma) = a_{11}\gamma_2^2 + a_{12} \frac{E_{20}}{G} (\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2) + a_{14} \frac{E_{20}}{E_{10}} \gamma_1\gamma_2 + \\ + a_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2) + a_{16} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \gamma_2^2,$$

$$K_2''(\gamma, \beta) = -12 \left[ b_{11}(\beta_1 - 2\gamma_1) + b_{12} \frac{E_{20}}{E_{10}} (\beta_1 - \gamma_1 - \gamma_2) + \right. \\ \left. + b_{13} \frac{E_{20}}{G} (\beta_1 - 2\gamma_1 - \gamma_2) + b_{14} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_1 - 2\gamma_2) + \right. \\ \left. + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_1 - 2\gamma_2 - \gamma_1) + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} (\beta_2 - 2\gamma_1) + \right. \\ \left. + b_{17} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{E_{10}} (\beta_2 - \gamma_1 - \gamma_2) + b_{18} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} (\beta_2 - 2\gamma_1 - \gamma_2) + \right. \\ \left. + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_2 - 2\gamma_2 - \gamma_1) + b_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_2 - 2\gamma_2) \right],$$

$$K_3'(\gamma) = - \left[ a_{12} \frac{E_{20}}{G} \gamma_1^2 \gamma_2 + a_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \gamma_1 \gamma_2^2 \right],$$

$$K_3''(\gamma, \beta) = -12 \left[ b_{11}(\gamma_1^2 - 2\gamma_1\beta_1) + b_{12} \frac{E_{20}}{E_{10}} (\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) + \right. \\ \left. + b_{13} \frac{E_{20}}{G} (\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - 2\beta_1\gamma_1 - \beta_1\gamma_2) + b_{14} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\gamma_2^2 - 2\beta_1\gamma_2) + \right. \\ \left. + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 - 2\beta_1\gamma_2) + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} (\gamma_1^2 - 2\gamma_1\beta_2) + \right. \\ \left. + b_{17} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{E_{10}} (\gamma_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 - \beta_2\gamma_2) + b_{18} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} (\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_1\beta_2 - \beta_2\gamma_2) + \right. \\ \left. + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_1 - 2\beta_2\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + b_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\gamma_2^2 - 2\beta_2\gamma_2) \right],$$

$$\begin{aligned}
 K_4(\gamma, \beta) = & -12 \left[ b_{11} \beta_1 \gamma_1^2 + b_{12} \frac{E_{20}}{E_{10}} \beta_1 \gamma_1 \gamma_2 + b_{13} \frac{E_{20}}{G} (\beta_1 \gamma_1^2 + 2\beta_1 \gamma_2 \gamma_1 - \gamma_2 \gamma_1^2) + \right. \\
 & + b_{14} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_1 \gamma_2^2 + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_1 \gamma_2^2 + \beta_1^2 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2^2) + \\
 & + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \beta_2 \gamma_1^2 + b_{17} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{E_{10}} \beta_2 \gamma_1 \gamma_2 + b_{18} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} (\beta_2 \gamma_1^2 + 2\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1^2 \gamma_2) + \\
 & \left. + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 (\beta_2 \gamma_2^2 + 2\beta_2 \gamma_1 \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2^2) + b_{10} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_2 \gamma_2^2 \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_5(\gamma, \beta) = & 12 \left[ b_{13} \frac{E_{20}}{G} \beta_1 \gamma_1^2 \gamma_2 + b_{15} \frac{E_{10}}{G} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_1 \gamma_1 \gamma_2^2 + \right. \\
 & \left. + b_{16} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \frac{E_{20}}{G} \beta_2 \gamma_1^2 \gamma_2 + b_{19} \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \left( \frac{E_{20}}{E_{10}} \right)^2 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2^2 \right];
 \end{aligned}$$

$$a_{11} = \pi^2 \left[ 1 - 4\nu_2^2 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right], \quad a_{12} = \pi^2 \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 2\nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right],$$

$$a_{13} = 4\pi^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 2\nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right], \quad a_{17} = 4\pi^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \left( \frac{a}{b} \right)^6,$$

$$\begin{aligned}
 a_{14} = & \pi^2 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \left[ 2 + 4(1 - \nu_1 \nu_2) + 43 \left( \frac{b}{a} \right)^2 \left( \frac{\tilde{\delta}}{h} \right)^2 \pi^4 + \right. \\
 & \left. + 24(1 - \nu_1 \nu_2) \left[ 1 - 2\nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{ah^3} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a} \right],
 \end{aligned}$$

$$a_{15} = \pi^2 \left( \frac{a}{b} \right)^6 \left[ 1 + 24(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{ah^3} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a} \right],$$

$$a_{16} = \pi^2 \left( \frac{a}{b} \right)^8 \left[ 1 + 24(1 - \nu_1 \nu_2) \frac{E_2}{E_1} \sum_{i=1}^n \frac{I_i}{ah^3} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a} \right];$$

$$b_{11} = 1 - 2\nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^2, \quad b_{12} = \left( \frac{a}{b} \right)^2 \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 (1 - 2\nu_1 \nu_2) + \nu_1 \right],$$

$$b_{13} = \left( \frac{a}{b} \right)^2, \quad b_{14} = \nu_1 \left( \frac{a}{b} \right)^6, \quad b_{15} = \nu_1 \left( \frac{a}{b} \right)^4,$$

$$b_{16} = \left[ \nu_2 - 2\nu_2^2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] (1 + \psi), \quad b_{17} = \left[ \nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^4 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 - 2\nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right] (1 + \psi),$$

$$b_{18} = \nu_2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 (1 + \psi), \quad b_{19} = \left( \frac{a}{b} \right)^4 (1 + \psi), \quad b_{10} = \left( \frac{a}{b} \right)^6 (1 + \psi);$$

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{h} \frac{a_i}{a} \sin^2 \frac{\pi x_1^i}{a}.$$

**Результаты расчетов.** Значения относительных критических температур при различных величинах геометрических и термомеханических параметров приводятся в табл. 1, 2 для материала «стеклопластик КАСТ-Б»



Таблица 1

Величины относительных температур при различных значениях геометрических параметров оболочки [Relative temperatures for different values of the shell geometric parameters]

$\tilde{\delta}/h$	$I_i/(ah^3)$	$\theta_*^{cr}, b/a = 0.5$	$\theta_*^{cr}, b/a = 0.9$
$n = 1$			
1	0	2.7531	1.2064
	0.01	3.1801	1.2898
	0.05	4.8912	1.6232
5	0	3.3985	1.6717
	0.01	3.8226	1.7550
	0.05	5.5366	2.0885
$n = 3$			
1	0	2.7531	1.2064
	0.01	3.6083	1.3781
	0.05	7.0294	2.0400
5	0	3.3984	1.6717
	0.01	4.2537	1.8384
	0.05	7.6748	2.5052

Таблица 2

Величины абсолютных критических температур (в °C) для оболочки из термочувствительного материала [The absolute critical temperatures (in °C) for a thermosensitive shell]

$a/h$	$\beta = \gamma = 0$	$\beta \neq 0, \gamma = 0$		$\beta = 0, \gamma \neq 0$	
		$\beta$	$5\beta$	$\gamma$	$5\gamma$
100	56.8054	$2\beta$	55.7989	$2\gamma$	56.9019
		$3\beta$	54.8596	$3\gamma$	57.0024
			54.6269		57.1073
75	100.9874	$\beta$	97.8897	$\gamma$	101.2973
		$2\beta$	95.1357	$2\gamma$	101.6312
		$3\beta$	94.4720	$3\gamma$	101.9925
50	227.2217	$\beta$	212.6090	$\gamma$	228.8675
		$2\beta$	201.0799	$2\gamma$	230.8364
		$3\beta$	198.4670	$3\gamma$	233.2451

( $E_{10} = 213 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $E_{20} = 121 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $G = 20.3 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu_2 = 0.19$ ),  
 везде  $a_i/a = 0.01$ .

В табл. 2 приводятся значения истинных критических температур  $\theta^{cr}$  при «замороженных» параметрах:  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,  $b/a = 0.5$ ,  $h_i/h = 3.9$ ,  $\tilde{\delta}/h = 2.5$ ,  $n = 3$ .

На величины критических температур существенное влияние оказывают параметры  $h_i/h$  и  $\tilde{\delta}/h$  — абсолютные высоты ребер и кручение оболочки. С увеличением длины ребер их влияние заметно уменьшается. Учет зависимости термомеханических характеристик материала ГНО вносит в значения критических температур тем большие поправки, чем больше относительная толщина оболочки — параметр  $a/h$ .

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

### Библиографический список

1. Жилин П. А. Линейная теория ребристых оболочек // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1970. № 4. С. 150–162.
2. Белосточный Г. Н., Ульянова О. И. Континуальная модель композиции из оболочек вращения с термочувствительной толщиной // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 2. С. 32–40.
3. Назаров А. А. *Основы теории и методы расчета пологих оболочек*. Л., М.: Стройиздат, 1966.
4. Красюков В. П., Панкратов Н. Д., Рассудов В. М. *Метод тригонометрических рядов в решении температурных задач теории пологих оболочек*. Саратов: СГУ, 1974.
5. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. *Обобщенная термомеханика*. Киев: Наук. думка, 1976.
6. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. *Температурные напряжения от объемных источников*. Киев: Наук. думка, 1983.
7. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Устойчивость нагретой ортотропной геометрически нерегулярной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*, 2017. № 4. С. 109–120. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.08>.
8. Белосточный Г. Н., Рассудов В. М. Континуальный подход к термоустойчивости упругих систем «пластинка–ребра» / *Прикладная теория упругости*. Саратов: Саратов. политехн. ин-т, 1980. С. 94–99.
9. Огибалов П. М., Грибанов В. Ф. *Термоустойчивость пластин и оболочек*. М.: МГУ, 1958.
10. Огибалов П. М. *Вопросы динамики и устойчивости оболочек*. М.: МГУ, 1963.
11. Белосточный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // *Доклады Академии военных наук*, 1999. № 1. С. 14–25.
12. Мыльцина О. А., Белосточный Г. Н. Термоупругость подкрепленной пластинки под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий на границе // *Вестник Московского авиационного института*, 2014. Т. 21, № 2. С. 169–174.
13. Канторович Л. В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. М.: Физматлит, 1962.

MSC: 74F05, 74K20

## Static thermal stability of a shallow geometrically irregular shell made of orthotropic temperature-sensitive material

© M. V. Wilde, O. A. Myltcina,  
S. A. Grigoriev, G. N. Belostochny

N. G. Chernyshevsky Saratov State University (National Research University),  
83, Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russian Federation.

### Abstract

A flat orthotropic geometrically irregular shell of constant torsion, whose thermomechanical parameters are linearly dependent on temperature, is considered. When the temperature reaches a certain value, the change in the shape of the equilibrium occurs abruptly, which causes a change in the initial geometry of the shell. These temperatures are called critical.

For practice, the relationships connecting the critical temperatures with the geometrical and thermomechanical parameters of the geometrically irregular shell are of considerable interest. The solution of the problems of static thermal stability of geometrically irregular shells usually begins with an analysis of their initial momentless state. Tangential forces caused by shell heating are defined as solutions of a system of singular differential equations of momentless thermoelasticity. These efforts are contained in the Brian or Reissner forms in the equations of static thermal stability and the further solution of the problem essentially depends on their structure.

In this paper, the solution of singular momentless thermoelasticity is found by elementary functions. Using the method of displacement functions, the equations of moment thermoelasticity, written in the components of the displacement field, are reduced to a single singular differential equation in partial derivatives of the eighth order depending on the temperature, which is assumed to be constant. The solution is written as a double trigonometric series. The coefficients of the series, based on the Galerkin procedure, are determined as solutions to a linear homogeneous algebraic system of equations. From the equality to zero of the determinant of this system, an algebraic


### Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)



#### Please cite this paper in press as:

Wilde M. V., Myltcina O. A., Grigoriev S. A., Belostochny G. N. Static thermal stability of a shallow geometrically irregular shell made of orthotropic temperature-sensitive material, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 769–779. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1784> (In Russian).


#### Authors' Details:


Maria V. Wilde  <https://orcid.org/0000-0001-8198-3368>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: [mv\\_wilde@mail.ru](mailto:mv_wilde@mail.ru)

Olga A. Myltcina   <https://orcid.org/0000-0003-4718-2772>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Functions & Approximation Theory; e-mail: [omyltcina@yandex.ru](mailto:omyltcina@yandex.ru)

Stepan A. Grigoriev ; Postgraduate Student; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: [kafedramtuibm@yandex.ru](mailto:kafedramtuibm@yandex.ru)

Grigory N. Belostochny  <https://orcid.org/0000-0001-6949-4174>

Dr. Techn. Sci.; Professor; Dept. of Mathematic Theory of Elasticity & Biomechanics; e-mail: [belostochny@mail.ru](mailto:belostochny@mail.ru)

equation of the fifth degree is obtained for the relative critical temperature. The smallest positive real root of which is the desired temperature. A quantitative analysis of the influence of the geometrical and thermomechanical parameters of the geometrically irregular shell on the value of the critical temperature is carried out.

**Keywords:** orthotropic, thermosensitive, statics, thermal stability, singularity, shallow shell, torsion, temperature.

Received: 12<sup>th</sup> May, 2020 / Revised: 14<sup>th</sup> October, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 21<sup>st</sup> December, 2020

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Author's Responsibilities.** We take full responsibility for submitting the final manuscript in print. We approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Zhilin P. A. The linear theory of ribbed shells, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1970, no. 4, pp. 150–162 (In Russian).
2. Belostochnyi G. N., Ul'yanova O. I. Continuum model for a composition of shells of revolution with thermosensitive thickness, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 184–191. <https://doi.org/10.3103/S0025654411020051>.
3. Nazarov A. A. *Osnovy teorii i metody rascheta pologikh obolochek* [Fundamentals of the Theory and Methods of Calculating Shallow Shells]. Leningrad, Moscow, Stroiizdat, 1966, In Russian pp.
4. Krasnyukov V. P., Pankratov N. D., Rassudov V. M. *Metod trigonometricheskikh riadov v reshenii temperaturnykh zadach teorii pologikh obolochek* [The Trigonometric Series Method in Solving Temperature Problems in the Shallow Shell Theory]. Saratov, Saratov State Univ., 1974 (In Russian).
5. Podstrigach Ya. S., Kolyano Yu. M. *Obobshchennaia termomekhanika* [Generalized Thermomechanics]. Kiev, Nauk. Dumka, 1976 (In Russian).
6. Kolyano Yu. M., Kulik A. N. *Temperaturnye napriazheniia ot ob'emnykh istochnikov* [Temperature Stresses from Bulk Sources]. Kiev, Nauk. Dumka, 1983 (In Russian).
7. Myltcina O. A., Belostochny G. N. Stability of heated orthotropic geometrically irregular plate in a supersonic gas flow, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 109–120 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.08>.
8. Belostochny G. N., Rassudov V. M. Continuum approach to the thermal stability of the elastic “plate–ribs” systems, In: *Prikladnaia teoriia uprugosti* [Applied Elasticity Theory]. Saratov, Saratov Politekhn. Inst., pp. 94–99 (In Russian).
9. Ogibalov P. M., Gribov V. F. *Termoustoichivost' plastin i obolochek* [Thermal Stability of Plates and Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1958 (In Russian).
10. Ogibalov P. M. *Voprosy dinamiki i ustoiichivosti obolochek* [Problems in Dynamics and Stability of Shells]. Moscow, Moscow State Univ., 1963 (In Russian).
11. Belostochny G. N. Analytical methods for determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity of geometrically irregular shells, *Dokl. Akad. Voen. Nauk*, 1999, no. 1, pp. 14–25 (In Russian).
12. Myltcina O. A., Belostochny G. N. Thermoelasticity of the reinforced plate under influence of quick change for coordinate of thermal and force factors on the boundary, *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 169–174 (In Russian).
13. Kantorovich L. V., Krylov V.I. *Priblizhennnye metody vysshego analiza* [Approximate Methods of Higher Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 1962 (In Russian).



УДК 532.5.011

## Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости

© И. Ю. Миронюк, Л. А. Усов

Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет),  
Россия, 141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9.

### Аннотация

С использованием уравнений Эйлера исследуется линия торможения (критическая линия) в общем пространственном случае стационарного обтекания тела с гладкой выпуклой носовой частью несжимаемой жидкостью. Предполагается, что в некоторой окрестности точки торможения (критической точки) всюду, за исключением точки торможения, скорость жидкости отлична от нуля, и что все линии тока на поверхности тела в этой окрестности начинаются в точке торможения.

Доказываются следующие три утверждения. 1) Если на некотором отрезке вихревой линии завихренности не обращается в нуль, то величина скорости жидкости на этом отрезке либо тождественно равна нулю, либо отлична от нуля во всех точках отрезка вихревой линии (скоростная альтернатива). 2) Завихренность в точке торможения равна нулю. 3) На линии торможения завихренность коллинеарна скорости и отношение величины завихренности к величине скорости одинаково во всех точках линии торможения (инвариант линии торможения).

На основании полученных результатов делается вывод о невозможности стационарного обтекания тела вихревым потоком, в котором скорость и завихренность не коллинеарны. Однако вопрос о завихренности в точке торможения в плоскопараллельных течениях остается открытым, поскольку принятое предположение об отличии от нуля скорости жидкости в некоторой окрестности точки торможения всюду, кроме самой точки торможения, исключает из рассмотрения плоскопараллельные течения.

**Ключевые слова:** уравнения Эйлера, теоремы Гельмгольца о вихрях, критерий Зоравского, критическая линия тока, линия торможения.

Получение: 30 июля 2020 г. / Исправление: 15 августа 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 25 декабря 2020 г.

---

### Краткое сообщение

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.

### Сведения об авторах

Игорь Юрьевич Миронюк <https://orcid.org/0000-0002-3835-6059>

студент; факультет аэромеханики и летательной техники; e-mail: [mironyuk.ig@yandex.ru](mailto:mironyuk.ig@yandex.ru)

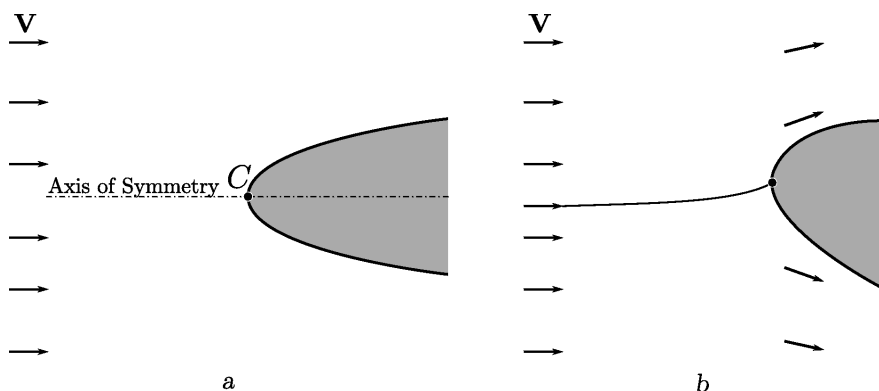
Лев Александрович Усов <https://orcid.org/0000-0001-7316-7328>

студент; факультет аэромеханики и летательной техники; e-mail: [usov.la@phystech.edu](mailto:usov.la@phystech.edu)

**Введение.** Современное состояние вычислительной техники и уровень развития численных методов позволяют исследовать течения жидкости и газа в рамках моделей, гораздо более сложных, чем модель идеальной несжимаемой жидкости. Однако некоторые процессы и в настоящее время с успехом изучаются в рамках этой модели [1–7]. Наряду с поиском точных решений уравнений движения вязкого газа [8, 2] исследователи ищут точные решения уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости [1, 3]. Все это говорит о том, что исследование общих свойств течений несжимаемой жидкости в рамках уравнений Эйлера до сих пор остается актуальным. Данная статья посвящена свойствам завихренности на линии торможения при наличии завихренности в потоке, обтекающем несимметричное тело или осесимметричное тело под углом атаки. В отличие от осесимметричного обтекания, где линия торможения лежит на оси симметрии (рис. а), в рассматриваемом случае линия торможения искривлена (рис. б), и в течении отсутствует симметрия, что значительно усложняет исследование.

Недавно в статье [12] в общем 3D-случае обнаружены некоторые замечательные свойства завихренности на линии торможения в изоэнергетических течениях идеального газа. Результаты [12] нельзя непосредственно применить к идеальной несжимаемой жидкости. Однако авторы данной статьи заметили, что два шага доказательства [12] при надлежащем видоизменении можно применить и к идеальной несжимаемой жидкости. Один из этих шагов «повторен» ниже в третьем разделе. Что касается другого шага доказательства [12], то речь идет о доказательстве равенства нулю завихренности в точке торможения. Для идеальной несжимаемой жидкости можно было бы применить видоизмененное доказательство [12] этого факта. Однако в данной статье предложено совершенно другое доказательство, основанное на неизвестном ранее свойстве (названном ниже *скоростной альтернативой*).

Наряду с использованием перечисленных выше идей [12] данная статья содержит новые оригинальные доказательства, и обнаруженные в ней свойства (скоростная альтернатива, инвариант линии торможения и вывод о невозможности стационарных обтеканий тел некоторыми вихревыми потоками) ранее были неизвестны, не являются видоизмененными результатами каких-либо других работ и получены впервые.



Носовая часть тела в потоке: а) осесимметричное обтекание; б) неосесимметричное обтекание [The nasal part of the body in the stream: a) axisymmetric flow; b) non-axisymmetric flow]

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью вихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости. Уравнения Эйлера стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости запишем в форме Громеки—Ламба [13]:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = -\nabla B, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  — скорость,  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{V}$  — завихренность,  $B = p\rho^{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{V}^2$  — функция Бернулли, где, в свою очередь,  $p$  — давление,  $\rho = \text{const}$  — плотность. Дополним (1) уравнением неразрывности

$$\text{div } \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Гидродинамические функции  $\mathbf{V}$  и  $p$  предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по пространственным координатам в замыкании<sup>1</sup> некоторой области течения  $G$ , содержащей линию торможения. Под производными гидродинамических функций на поверхности тела понимаются их непрерывные продолжения из  $G$ . Замыкание области  $G$  обозначим  $\bar{G}$ .

**2. Скоростная альтернатива.** Применение операции ротора к обеим частям равенства (1) с учетом (2) и тождества  $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$  дает

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} = 0. \quad (3)$$

Представим завихренность в виде  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$ ,  $|\mathbf{e}| = 1$ . Тогда всюду, где  $\omega \neq 0$ , последнее уравнение равносильно следующему:

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{\omega}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}. \quad (4)$$

Рассмотрим произвольно выбранную вихревую линию, на которой скорость  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(l)$ , где  $l$  — переменная длина дуги вдоль этой вихревой линии. Тогда

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{d}{dl}\mathbf{V}. \quad (5)$$

Обозначим через  $V_x, V_y, V_z$  и  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  компоненты вектора  $\mathbf{V}$  и вектора завихренности  $\boldsymbol{\omega}$  в некоторой прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ . С использованием этих обозначений и равенства (5) векторное уравнение (4) на рассматриваемой вихревой линии можно записать в матричном виде

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \omega_x}{\partial y} & \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} & \frac{\partial \omega_y}{\partial y} & \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial x} & \frac{\partial \omega_z}{\partial y} & \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Коэффициенты матрицы зависят от вторых производных компонент скорости и являются непрерывными (и ограниченными) функциями на любом отрезке вихревой линии, где модуль завихренности  $\omega \geq \omega_0 > 0$ . Если считать

<sup>1</sup>Замыкание нужно для того, чтобы рассматривать течение в том числе и на поверхности обтекаемого тела в окрестности точки торможения.

коэффициенты матрицы заданными функциями переменной  $l$ , то матричное уравнение (6) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для компонент вектора  $\mathbf{V}$ . Эта система линейна, а ее коэффициенты непрерывны и ограничены. Поэтому из теоремы существования и единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [14] следует, что на всем рассматриваемом отрезке вихревой линии либо  $|\mathbf{V}| \equiv 0$ , либо  $|\mathbf{V}| \neq 0$ . Поскольку приведенные рассуждения верны для любого значения  $\omega_0 > 0$ , приходим к следующему выводу, который авторы предлагают назвать скоростной альтернативой.

*Если на некотором отрезке вихревой линии стационарного движения идеальной несжимаемой жидкости завихренность не обращается в нуль, то величина скорости  $|\mathbf{V}|$  на всем отрезке либо тождественно равна нулю, либо во всех точках отрезка  $|\mathbf{V}| \neq 0$ .*

**3. Скорость переноса линий тока.** Дальнейшее исследование проведем с использованием критерия Зоравского [15]. В этом критерии говорится о переносе векторных линий частицами жидкости. Перенос векторных линий вектора  $\mathbf{c}$  со скоростью  $\mathbf{a}$  означает, что частицы жидкости, движущиеся со скоростью  $\mathbf{a}$  и составляющие в некоторый момент времени векторную линию вектора  $\mathbf{c}$ , продолжают составлять одну из векторных линий вектора  $\mathbf{c}$  во все время своего движения. Согласно критерию Зоравского, для того чтобы векторные линии  $\mathbf{c}$  переносились со скоростью  $\mathbf{a}$ , необходимо и достаточно, чтобы во всем поле течения выполнялось равенство

$$\mathbf{c} \times \left[ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{a} \right] = 0. \quad (7)$$

Чтобы использовать критерий Зоравского, рассмотрим в области  $\bar{G}$  воображаемую жидкость, частицы которой движутся со скоростью  $\omega$ . Из равенства (3) следует, что (7) выполнено для векторных линий вектора  $\mathbf{V}$  и скорости воображаемой жидкости  $\omega$ . Таким образом, если в некоторый момент времени частицы воображаемой жидкости, движущиеся со скоростью  $\omega$ , составляли сегмент линии тока (то есть сегмент векторной линии  $\mathbf{V}$ ), содержащейся в области  $\bar{G}$ , то в любой последующий момент времени (пока эти частицы находятся в области  $\bar{G}$ ) они будут составлять сегмент одной из линий тока жидкости. Другими словами, можно считать, что линии тока (реальной) жидкости движутся со скоростью  $\omega$ .

**4. Завихренность в точке торможения.** Поскольку носовая часть гладкая и выпуклая, в некоторой окрестности точки торможения  $C$  (см. рисунок) всюду, за исключением точки  $C$ , скорость  $\mathbf{V}$  не равна нулю и все линии тока на поверхности тела (в этой окрестности) начинаются в точке  $C$ . В плоскопараллельных течениях точка торможения не единственная, и сформулированное утверждение не выполняется. Поэтому дальнейшее исследование проведем для неплоскопараллельных течений.<sup>2</sup>

Вдоль любой линии тока интеграл Бернулли  $B$  сохраняет свое значение, поэтому на поверхности тела  $B$  принимает одно и то же значение, равное своему значению в точке  $C$ . Следовательно, на поверхности тела (в рассматриваемой окрестности точки торможения)  $\nabla B$  ортогонален этой поверхности.

<sup>2</sup>Плоскопараллельные течения будут обсуждены в следующем разделе.



При этом во всех точках поверхности тела, кроме точки  $C$ , скорость  $\mathbf{V}$  не равна нулю и лежит в касательной к этой поверхности плоскости. Поэтому из векторного уравнения (1) для всех точек поверхности тела, кроме точки  $C$ , следует, что завихренность  $\boldsymbol{\omega}$  также лежит в касательной (к поверхности тела) плоскости. В силу непрерывности завихренность лежит в касательной плоскости и в точке  $C$ . Следовательно, в некоторой окрестности точки  $C$  вихревые линии, имеющие хотя бы одну точку на поверхности тела, лежат на этой поверхности (если на этих вихревых линиях в окрестности точки  $C$  завихренность не равна нулю).

Докажем, что завихренность  $\boldsymbol{\omega}$  в точке торможения равна нулю. Предположим обратное, то есть, что в точке  $C$  завихренность  $\boldsymbol{\omega}$  не равна нулю. Тогда в силу непрерывности в некоторой окрестности точки  $C$  завихренность  $\boldsymbol{\omega}$  также не равна нулю. Значит, есть отрезок вихревой линии, лежащий на поверхности и проходящий через точку  $C$ , на котором скорость  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  в точке  $C$ , а во всех других его точках  $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ . Но это противоречит скоростной альтернативе (раздел 2). Полученное противоречие означает следующее.

*При стационарном неплоскопараллельном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью тела с гладкой выпуклой носовой частью завихренность в точке торможения равна нулю.*

**5. О плоскопараллельных течениях.** Как обычно, течение жидкости будем называть плоскопараллельным, если существует такая прямоугольная декартова система координат  $Oxyz$ , в которой все гидродинамические параметры зависят только от координат  $x$  и  $y$ , а  $z$  — компонента скорости, всюду равная нулю. В таких течениях вихревые линии параллельны оси  $z$  и на вихревых линиях гидродинамические параметры постоянны. Поэтому в плоскопараллельных течениях скоростная альтернатива (раздел 2) имеет место, но не дает ничего нового.

Использование того факта, что линии тока «движутся» со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  (раздел 3), также приводит к известному результату. Действительно, частицы воображаемой жидкости, движущиеся со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  и составляющие линию тока в какой-то момент времени, продолжают составлять линию тока. Все линии тока лежат в плоскостях вида  $z = \text{const}$ . Следовательно, все частицы воображаемой жидкости, составляющие в какой-то момент времени линию тока, должны двигаться параллельно оси  $z$  с одинаковой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Это значит, что на каждой линии тока завихренность  $\boldsymbol{\omega}$  постоянна, но это свойство давно известно, так как для плоскопараллельных течений оно легко следует из уравнения Гельмгольца [13].

Рассмотрим обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью вихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости в случае плоскопараллельного течения. Как и в общем пространственном случае, поскольку носовая часть гладкая и выпуклая, на каждой плоскости вида  $z = \text{const}$  скорость  $\mathbf{V}$  равна нулю в единственной точке — точке торможения. Координаты  $x$  и  $y$  таких точек торможения одинаковы для всех плоскостей вида  $z = \text{const}$ , поэтому точки торможения составляют линию, параллельную оси  $z$ . Если попытаться применить технику доказательства раздела 4, то предположение о ненулевой величине завихренности в точке торможения  $C$  на одной из плоскостей вида  $z = \text{const}$  не приведет к противоречию. Дело в том, что вихревая линия (параллельная оси  $z$ ), проходящая через точку  $C$ , будет целиком лежать на теле и состоять из точек торможения, лежащих в других плоскостях вида

$z = \text{const}$ , поэтому скорость на всей этой вихревой линии будет равна нулю, что не противоречит скоростной альтернативе (как это имело место в разделе 4).

Следовательно, вопрос о завихренности в точке торможения при обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью вихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости в случае плоскопараллельного течения в данной работе не решен и остается открытым. В следующих разделах будем рассматривать неплюскопараллельные пространственные течения (в которых завихренность в точке торможения равна нулю).

**6. Инвариант линии торможения.** Рассмотрим движение частиц воображаемой жидкости, составляющих в некоторый момент времени  $t_0$  линию торможения и двигающихся со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . В точке торможения  $\boldsymbol{\omega}$  равна нулю (раздел 4). Значит, частица воображаемой жидкости, находящаяся в этой точке, покоится. Предположим, что на линии торможения есть точки, в которых завихренность не равна нулю и имеет ненулевую нормальную к линии торможения составляющую. Тогда в последующий момент времени  $t + \Delta t$  находившиеся в этих точках частицы воображаемой жидкости окажутся вне линии торможения и вместе с остальными частицами составят другую линию тока (раздел 3). Но тогда получается, что к точке торможения подходит еще одна (кроме линии торможения) линия тока, находящаяся во внутренних точках течения, что противоречит единственности линии торможения. Полученное противоречие показывает, что частицы воображаемой жидкости, составляющие линию торможения, либо покоятся, либо движутся вдоль этой линии. Следовательно, завихренность параллельна скорости, то есть вдоль всей линии торможения выполняется векторное равенство

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим скорость и завихренность на линии торможения. Скорость представим в виде

$$\mathbf{V} = V(l) \mathbf{e}(l),$$

где  $|\mathbf{e}| = 1$ ,  $l$  — переменная длина дуги вдоль линии торможения. На всей линии торможения, кроме точки  $C$ , скорость  $V(l)$  не равна нулю. Поэтому в силу (8) завихренность можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(l) \mathbf{e}(l) = \alpha(l)V(l) \mathbf{e}(l),$$

где  $\alpha$  — некоторая скалярная непрерывно дифференцируемая функция. Если направление возрастания длины дуги  $l$  совпадает с направлением единичного вектора  $\mathbf{e}$ , то действие оператора  $(\mathbf{e} \cdot \nabla)$  на линии торможения равносильно дифференцированию по  $l$ , т.е.  $(\mathbf{e} \cdot \nabla) \equiv \frac{d}{dl}$ . Следовательно, на линии торможения (кроме точки  $C$ ) уравнение (3) записывается в виде

$$\alpha V \frac{d}{dl}(\mathbf{e}V) = V \frac{d}{dl}(\mathbf{e}\alpha V)$$

или

$$\alpha V^2 \frac{d}{dl} \mathbf{e} + \alpha V \mathbf{e} \frac{d}{dl} V = \alpha V^2 \frac{d}{dl} \mathbf{e} + \alpha V \mathbf{e} \frac{d}{dl} V + V^2 \mathbf{e} \frac{d}{dl} \alpha.$$

После сокращений имеем  $V^2 \mathbf{e} \frac{d}{dl} \alpha = 0$ . Так как на всей линии торможения кроме точки торможения скорость не равна нулю, из последнего равенства

получаем  $\alpha = \text{const}$ , то есть  $\omega/V = \text{const}$ . Таким образом, доказано следующее утверждение (инвариант линии торможения).

*При стационарном неплоскопараллельном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью тела с гладкой выпуклой носовой частью на всей линии торможения завихренность коллинеарна скорости, а отношение величины завихренности к величине скорости постоянно (кроме точки торможения, где это отношение не определено).*

Заметим, что, согласно данной формулировке, инвариантом является и отношение  $\omega/V$ , и равное нулю векторное произведение  $\omega \times \mathbf{V}$ .

**7. О стационарном обтекании вихревым потоком.** Рассмотрим стационарное обтекание вихревым потоком тела с гладкой выпуклой носовой частью (например шара), расположенного в канале, во всем входном сечении которого завихренность и скорость неколлинеарны. Тогда в том месте линии торможения, где она проходит через входное сечение, завихренность тоже должна быть неколлинеарна скорости. Однако из инварианта линии торможения, полученного в предыдущем разделе, следует, что завихренность и скорость коллинеарны вдоль всей линии торможения. Полученное противоречие вынуждает пересмотреть предположения, на которые опирается исследование, и заключить, что в данном случае обтекание не может быть стационарным. Рассмотренный пример показывает, что полученные в данной статье результаты могут применяться для качественного анализа течений.

**Заключение.** Исследована линия торможения в общем пространственном случае (за исключением плоскопараллельных течений) стационарного обтекания тела с гладкой выпуклой носовой частью несжимаемой идеальной жидкостью. Доказаны следующие три утверждения.

1. Если на некотором отрезке вихревой линии завихренность не обращается в нуль, то величина скорости жидкости на этом отрезке либо тождественно равна нулю, либо отлична от нуля во всех точках отрезка вихревой линии (скоростная альтернатива).
2. Завихренность в точке торможения равна нулю.
3. На линии торможения завихренность коллинеарна скорости и отношение величины завихренности к величине скорости одинаково во всех точках линии торможения (инвариант линии торможения).

Из третьего утверждения следует, что если в набегающем потоке скорость и завихренность неколлинеарны, то обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью обязательно будет нестационарным.

Полученные результаты могут быть использованы для качественного анализа течений и для верификации численных расчетов.

**Конкурирующие интересы.** Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method // *AIP Conf. Proc.*, 2014. vol. 1629, 69. <https://doi.org/10.1063/1.4902260>.
2. Gutnikov V. A., Setukha A. V. Solving the problems of buildings and structures aerodynamics with a vortex method // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol. 456, 012068. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012068>.
3. Shcheglov G. A., Dergachev S. A. Vortex loops based method for subsonic aerodynamic loads calculation // *MATEC Web Conf.*, 2018. vol. 221, 05004. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822105004>.
4. Пичев А. Т., Tomashpolskii V. Ja. Characteristic parameters of nonlinear surface envelope waves beneath an ice cover under pre-stress // *Wave Motion*, 2019. vol. 86. pp. 11–20. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.12.003>.
5. Ильичев А. Т. Физические параметры уединенных волновых пакетов под ледовым покровом в бассейнах небольшой глубины // *ТМФ*, 2019. Т. 201, № 3. С. 347–360. <https://doi.org/10.4213/tmf9746>.
6. Marchenko A., Markov V., Taylor R. *Influence of water on collisions of floating ice blocks: ISOPE-I-19-546: The 29th International Ocean and Polar Engineering Conference*, 16–21 June, Honolulu, Hawaii, USA, 2019. 8 pp.
7. Сетуха А. В. О лагранжевом описании трехмерных течений вязкой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2020. Т. 60, № 2. С. 297–322. <https://doi.org/10.31857/S004446692002012X>.
8. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667. <https://doi.org/10.31857/S003282350002271-8>.
9. Хорин А. Н., Конохова А. А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
10. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 2. pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
11. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1348, no. 1, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>.
12. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
13. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
14. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 400 с.
15. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. <https://doi.org/10.2307/2032429>.

MSC: 76D17

## The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body

© I. Yu. Mironyuk, L. A. Usov

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russian Federation.

### Abstract

In this study, using the Euler equations we investigate the stagnation streamline in the general spatial case of a stationary incompressible fluid flow around a body with a smooth convex bow. It is assumed that in some neighborhood of the stagnation point everywhere, except for the stagnation point, the fluid velocity is nonzero; and that all streamlines on the surface of the body in this neighborhood start at the stagnation point.

Here we prove the following three statements. 1) If on a certain segment of the vortex line the vorticity does not turn to zero, then the value of the fluid velocity in this segment is either identically equal to zero or nonzero at all points of the segment of the vortex line (velocity alternative). 2) The vorticity at the stagnation point is equal to zero. 3) On the stagnation streamline, the vorticity is collinear to the velocity, and the ratio of the vorticity to the velocity is the same at all points of the stagnation streamline (invariant of the stagnation streamline).

On the basis of the obtained results, it is concluded that if in the free stream the velocity and vorticity are not collinear, a stationary flow around the body is impossible. However, the question of vorticity at the stagnation point in plane-parallel flows remains open, because the accepted assumption that the velocity of the fluid differs from zero in some neighborhood of the stagnation point everywhere, except for the stagnation point itself, excludes plane-parallel flows from consideration.

**Keywords:** Euler equations, Helmholtz vortex theorems, Zorawski's criterion, stagnation streamline.

Received: 30<sup>th</sup> July, 2020 / Revised: 15<sup>th</sup> August, 2020 /

Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 25<sup>th</sup> December, 2020

---


### Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


**Please cite this paper in press as:**

Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815> (In Russian).

**Authors' Details:**

Igor Yu. Mironyuk  <https://orcid.org/0000-0002-3835-6059>

Student; Faculty of Aeromechanics and Flight Engineering; e-mail: [mironyuck.ig@yandex.ru](mailto:mironyuck.ig@yandex.ru)

Lev A. Usov  <https://orcid.org/0000-0001-7316-7328>

Student; Faculty of Aeromechanics and Flight Engineering; e-mail: [usov.la@phystech.edu](mailto:usov.la@phystech.edu)

**Competing interests.** We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

**Authors' contributions and responsibilities.** Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

## References

1. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method, *AIP Conf. Proc.*, 2014, vol. 1629, 69. <https://doi.org/10.1063/1.4902260>.
2. Gutnikov V. A., Setukha A. V. Solving the problems of buildings and structures aerodynamics with a vortex method, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 456, 012068. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/456/1/012068>.
3. Shcheglov G. A., Dergachev S. A. Vortex loops based method for subsonic aerodynamic loads calculation, *MATEC Web Conf.*, 2018, vol. 221, 05004. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822105004>.
4. Il'ichev A. T., Tomashpolskii V. Ja. Characteristic parameters of nonlinear surface envelope waves beneath an ice cover under pre-stress, *Wave Motion*, 2019, vol. 86, pp. 11–20. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.12.003>.
5. Il'ichev A. T. Physical parameters of solitary wave packets in shallow basins under ice cover, *Theoret. and Math. Phys.*, 2019, vol. 201, no. 3, pp. 1710–1722. <https://doi.org/10.1134/S0040577919120043>.
6. Marchenko A., Markov V., Taylor R. *Influence of water on collisions of floating ice blocks*, ISOPE-I-19-546: The 29th International Ocean and Polar Engineering Conference, 16–21 June, Honolulu, Hawaii, USA, 2019, 8 pp.
7. Setukha A. V. Lagrangian description of three-dimensional viscous flows at large Reynolds numbers, *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 2, pp. 302–326. <https://doi.org/10.1134/S0965542520020116>.
8. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Viscous gas flow between vertical walls, *Fluid. Dyn.*, 2018, vol. 53 (Suppl. 2), pp. 11–18. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060046>.
9. Khorin A. N., Konyukhova A. A. Couette flow of hot viscous gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
10. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
11. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, no. 1, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>.
12. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid. Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. <https://doi.org/10.1134/S0015462819070139>.
13. Loitsyanskii L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. Oxford, Pergamon Press, 1966, 802 pp.
14. Pontryagin L. S. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniia* [Ordinary Differential Equations]. Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 400 pp. (In Russian)
15. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. <https://doi.org/10.2307/2032429>.

УДК 532.5.032

## Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами



© Г. Б. Сизых

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

### Аннотация

Течениями Бельтрами или винтовыми течениями в статье называются течения, в которых векторы завихренности и скорости коллинеарны, а коэффициент пропорциональности между этими векторами отличен от нуля и одинаков во всех точках течения. Предлагается метод, позволяющий с использованием известных винтовых решений получать новые винтовые решения уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости. Некоторые из этих новых решений не могут быть получены известными методами тиражирования решений путем сдвига и поворота системы координат, симметрии, масштабирования, циклической перестановки компонент скорости и координат, векторного суммирования. Новый метод тиражирования применяется к таким параметрическим семействам точных решений, в которых коэффициент пропорциональности между скоростью и завихренностью остается неизменным при различных значениях параметра. Суть метода состоит в том, что для таких семейств производная скорости по параметру также является винтовой скоростью. Последовательное дифференцирование скорости нового решения по параметру дает бесконечную цепочку новых точных решений.

**Ключевые слова:** винтовые решения уравнений Навье–Стокса, точные решения уравнений Эйлера, течения Бельтрами.

Получение: 15 июля 2020 г. / Исправление: 3 августа 2020 г. /

Принятие: 16 ноября 2020 г. / Публикация онлайн: 26 ноября 2020 г.

**Введение.** Поиск новых точных решений уравнений движения жидкости по-прежнему остается актуальной задачей. Достаточно указать, например, на новые точные решения [1–4], полученные для различных типов жидкостей. Такой интерес к точным решениям объясняется не только их общетеоретической ценностью, связанной со сложностью уравнений, описывающих движение жидкости. Такие решения востребованы в вычислительной аэрогидродинамике. В настоящее время общепринято измельчать расчетную сетку,


### Краткое сообщение

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

### Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 790–798. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802>.

### Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых ✉  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики;  
e-mail: o1o2o3@yandex.ru

шаг по времени и увеличивать точность машинных операций до тех пор, пока результаты численного расчета не перестанут изменяться. Но это не дает уверенности в правильности результата, и нет возможности, пусть даже грубо, но все же математически строго оценить ошибку (речь идет не о порядке убывания ошибки, а о ее численной оценке). Дело в том, что сходимости большинства методов доказана, как правило, только для линеаризованных уравнений. Поэтому численные алгоритмы приходится верифицировать, в частности, на задачах с известными точными решениями (см., например, [5, 6]), что и объясняет интерес к таким решениям в вычислительной аэрогидродинамике.

Тркал в статье [7] в общем пространственном случае показал, что для несжимаемой жидкости скорость стационарного винтового (векторы завихренности и скорости коллинеарны) решения уравнений Эйлера, умноженная на  $\exp(-at)$ , где  $t$  — время, при надлежащем выборе параметра  $a$  будет удовлетворять уравнениям Навье—Стокса (метод Тркала). При этом предполагалось, что коэффициент пропорциональности между скоростью и завихренностью сохраняет свое значение в пространстве и не меняется со временем. В возможности получать точные нестационарные решения уравнений Навье—Стокса заключается одна из причин интереса к точным винтовым решениям стационарных уравнений Эйлера. Данная статья посвящена точным винтовым решениям уравнений Эйлера.

Один из способов поиска новых точных решений — использование методов их тиражирования из известных решений. К числу таких методов относятся, в частности, циклическая перестановка компонент скорости и координат, сдвиг и поворот системы координат, векторное суммирование. В данной статье предложен новый метод тиражирования винтовых решений.

**1. Примеры точных решений, полученных методами тиражирования.** Первыми винтовыми решениями (здесь и далее речь идет о стационарных решениях уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости) были осесимметричные решения Громеки—Бельтрами [8, 9]. К этим решениям можно применять метод [10], названный в [11] методом векторного суммирования. Он состоит в том, что любая линейная комбинация скоростей винтовых решений с одинаковым коэффициентом  $k$  будет скоростью винтового решения с тем же коэффициентом  $k$ . В статье [11] были получены новые точные решения путем векторного суммирования двух различных решений Громеки—Бельтрами со скрещивающимися осями симметрий этих решений.

Другим, давно известным, винтовым решением, полученным путем комбинации методов векторного суммирования и циклической перестановки, является *ABC*-решение:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} V_x &= A \sin(kz) + C \cos(ky), \\ V_y &= B \sin(kx) + A \cos(kz), \\ V_z &= C \sin(ky) + B \cos(kx), \end{aligned}$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности между скоростью и завихренностью ( $\mathbf{rot} \mathbf{V} = k\mathbf{V}$ ).

<sup>1</sup>Аббревиатура *ABC* состоит из первых букв фамилий *Arnold*, *Beltrami* и *Childress*. Это связано с тем, что Арнольд и Чилдрес изучали свойства этого решения [12, 13], а именем Бельтрами называют винтовые течения.



В статье [7] Тркал предложил поле винтовой скорости (решение Тркала):

$$V_x = \sin(kz), \quad V_y = \cos(kz), \quad V_z = 0.$$

Циклическая перестановка компонент скорости и координат дает еще два решения, которые также следует считать решениями Тркала:

$$V_x = 0, \quad V_y = \sin(kx), \quad V_z = \cos(kx);$$

$$V_x = \cos(ky), \quad V_y = 0, \quad V_z = \sin(ky).$$

Очевидно, что  $ABC$ -решение есть линейная комбинация этих трех решений Тркала с одним и тем же коэффициентом  $k$ . Поэтому  $ABC$ -решение можно считать полученным из решения Тркала известными методами тиражирования.

Еще одним давно известным винтовым решением является решение Беркера [14]:

$$\begin{aligned} V_x &= -\cos(kx/\sqrt{2}) \sin(ky/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ V_y &= -\sin(kx/\sqrt{2}) \cos(ky/\sqrt{2})/\sqrt{2}, \\ V_z &= \cos(kx/\sqrt{2}) \cos(ky/\sqrt{2}). \end{aligned} \quad (1)$$

Это решение описывает течение идеальной жидкости в бесконечной трубе квадратного сечения ( $0 \leq x \leq \sqrt{2}\pi/k$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{2}\pi/k$ ). Поворот на  $90^\circ$  системы координат вокруг оси  $z$  позволяет из решения Тркала  $V_x = 0$ ,  $V_y = \sin(kx)$ ,  $V_z = \cos(kx)$  получить решение  $V_x = -\sin(ky)$ ,  $V_y = 0$ ,  $V_z = \cos(ky)$ . Если сложить эти два решения с одним и тем же коэффициентом  $k$  (векторное суммирование), а затем повернуть на  $45^\circ$  систему координат вокруг оси  $z$ , то получится решение Беркера. Таким образом, решение Беркера, как и  $ABC$ -решение, можно получить из решений Тркала комбинацией известных методов тиражирования.

**2. Метод дифференцирования по параметру.** Всякое векторное поле  $\mathbf{V}$ , обладающее свойством

$$\mathbf{rot} \mathbf{V} = k\mathbf{V}, \quad \text{где } k = \text{const} \neq 0, \quad (2)$$

будет соленоидальным. Для такого поля скорости в любой ограниченной области пространства существует поле давления, которое вместе со скоростью  $\mathbf{V}$  есть решение стационарных уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости (доказательство см., например, в [11]). Поэтому поиск винтовых решений уравнений Эйлера сводится к поиску не равного тождественно нулю поля  $\mathbf{V}$ , для которого выполнено условие Бельтрами (2).

В данной статье предлагается следующий метод получения новых решений с использованием известных решений. Пусть  $\mathbf{V}(x, y, z, a)$  — такое параметрическое семейство скоростей, что уравнение (2) остается выполненным для фиксированного  $k$  при всех допустимых значениях параметра  $a$ , при которых определена операция дифференцирования по  $a$ . Оператор  $\mathbf{rot}$  есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Поэтому  $\frac{\partial}{\partial a} \mathbf{rot} \mathbf{V} = \mathbf{rot} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V}$ , и после дифференцирования по параметру  $a$  обеих частей (2) имеем  $\mathbf{rot} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V} = k \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V}$ . То есть  $\frac{\partial}{\partial a} \mathbf{V}(x, y, z, a)$  также будет

решением (2). Таким образом, предлагаемый новый метод тиражирования состоит в дифференцировании по параметру. Несмотря на свою простоту, в известной автору литературе этот метод не упоминается, и представляется, по-видимому, впервые. Заметим, что метод дифференцирования по параметру всегда дает решение, но не всегда это решение оказывается новым. Например, дифференцирование семейства  $ABC$ -решений по параметру  $A$  приводит к (известному) решению Тркала. Чтобы показать состоятельность нового метода тиражирования, нужно получить этим методом новое точное решение и показать, что оно не может быть получено другими известными методами тиражирования. Этому посвящены следующие разделы.

**3. Параметрическое семейство винтовых решений.** Для того чтобы привести пример применения метода, получим параметрическое семейство винтовых решений с одинаковым для всего семейства коэффициентом  $k \neq 0$ . Будем искать решение уравнения  $\mathbf{rot} \mathbf{V} = k\mathbf{V}$  в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ . Воспользовавшись методом, с помощью которого в [14] найдено решение (1), получим параметрическое (параметр  $a$ ) семейство полей скорости

$$\begin{aligned} V_x &= \sqrt{1 - a^2} \sin(ax) \cos(y\sqrt{1 - a^2}), \\ V_y &= -a \cos(ax) \sin(y\sqrt{1 - a^2}), \\ V_z &= \sin(ax) \sin(y\sqrt{1 - a^2}), \end{aligned} \quad (3)$$

которое естественно назвать одним из параметрических решений Беркера. Непосредственной проверкой можно убедиться, что поле скорости (3) будет винтовым с коэффициентом  $k = -1$  при любом значении параметра  $a \in [-1, 1]$ .

Проекции линий тока этого ячеистого течения при  $a = 1/\sqrt{2}$  на плоскость  $Oxy$  представлены на рис. 1, а. В каждой ячейке (размером  $\pi\sqrt{2} \times \pi\sqrt{2}$ ) формулы (3) описывают течение идеальной жидкости в бесконечной трубе квадратного сечения (выполнено условие непротекания на стенках трубы).

**4. Пример применения метода и новое точное решение.** При всех допустимых ( $a \in [-1, 1]$ ) значениях параметра  $a$  для скорости (3) будет выполнено условие  $\mathbf{rot} \mathbf{V} = -\mathbf{V}$  (т.е. коэффициент  $k \equiv -1$ ). Это позволяет применить метод дифференцирования по параметру при  $a \in (-1, 1)$  (концы отрезка исключены, поскольку в них производные компонент скорости по  $a$  не определены). Продифференцируем три компоненты скорости (3) по параметру  $a$  и положим  $a = 1/\sqrt{2}$ . Получим поле винтовой ( $\mathbf{rot} \tilde{\mathbf{V}} = -\tilde{\mathbf{V}}$ ) скорости

$$\begin{aligned} \tilde{V}_x &= \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}} - \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{V}_y &= \frac{y}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}} - \sin \frac{y}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{V}_z &= x \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}} - y \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Проекции линий тока этого ячеистого течения на плоскость  $Oxy$  представлены на рис. 1, b.

В отличие от течения (3), в течении (4) ячейки не повторяют друг друга. На рис. 2 представлены два фрагмента течения (4) в увеличенном виде с указанием направления движения жидкости.

На рис. 2 видны стационарные точки, окруженные замкнутыми линиями (эти линии есть линии уровня функции  $\psi = x \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{\sqrt{2}} - y \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \cos \frac{y}{\sqrt{2}}$ ). Каждую из этих замкнутых линий можно рассматривать как сечение бес-

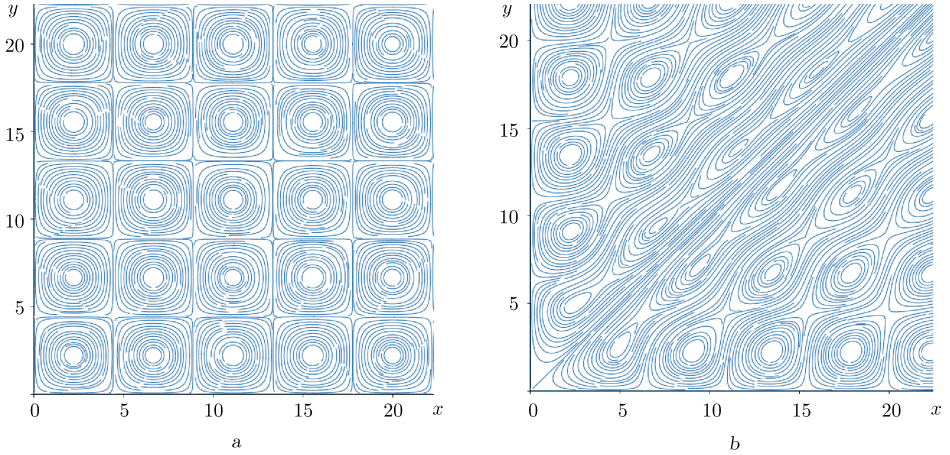


Рис. 1. Проекция линий тока на плоскость  $Oxy$  ( $a = 1/\sqrt{2}$ ): а) течение (3); б) «продифференцированное» течение (4)

[Figure 1. Projections of streamlines onto a plane  $Oxy$  ( $a = 1/\sqrt{2}$ ): а) flow (3); б) “differentiated” flow (4)]

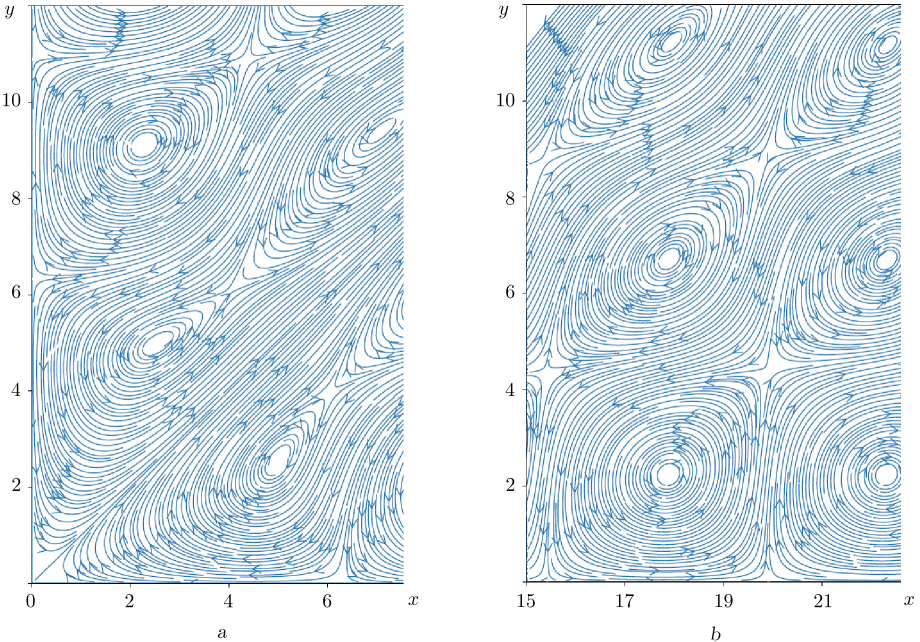


Рис. 2. Два увеличенных фрагмента проекций линий тока течения (4) на плоскость  $Oxy$   
[Figure 2. Two enlarged fragments of the streamlines projections (4) onto a plane  $Oxy$ ]

конечной цилиндрической трубы, в которой идеальная жидкость течет (со скоростью (4)) так, что на стенках выполнено условие непротекания.

В известных точных решениях отсутствуют произведения координат на синусы или косинусы от линейной комбинации координат. Поэтому решение (4) не может быть получено из известных точных решений (в том числе и из решения (3)) такими способами тиражирования, как сдвиг и поворот системы координат, масштабирование, различные симметрии, циклическая перестановка компонент скорости и координат, векторное суммирование. Поэтому решение (4) есть искомое новое решение, что показывает состоятельность метода дифференцирования по параметру.

Применение метода дифференцирования по параметру к другим параметрическим винтовым решениям с одинаковым  $k$  (например к решениям Громеки—Бельтрами) представляется в рамках данной статьи излишним.

**Заключение.** Предложен новый метод тиражирования точных винтовых решений уравнений Эйлера. Применение предложенного в статье метода дифференцирования по параметру к известному решению Беркера позволило получить новое точное решение (4). Тем самым доказана состоятельность предложенного метода дифференцирования по параметру.

**Конкурирующие интересы.** Конкурирующих интересов не имею.

**Авторский вклад и ответственность.** Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

**Финансирование.** Исследование выполнялось без финансирования.

## Библиографический список

1. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 2. pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
2. Хорин А. Н., Конюхова А. А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
3. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1348, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>.
4. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667. <https://doi.org/10.31857/S003282350002271-8>.
5. Bosnyakov S. M., Mikhaylov S. V., Podaruev V. Yu., Troshin A. I. Unsteady discontinuous Galerkin method of a high order of accuracy for modeling turbulent flows // *Math. Models Comput. Simul.*, 2019. vol. 11, no. 1. pp. 22–34. <https://doi.org/10.1134/S2070048219010058>.
6. Dergachev S. A., Marchevsky I. K., Shcheglov G. A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components // *Aerospace Science and Technology*, 2019. vol. 94, 105374. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105374>.
7. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // *Czech. J. Phys.*, 1994. vol. 44. pp. 97–106. <https://doi.org/10.1007/BF01701186>.

8. Громека И. С. *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости* (докторская диссертация): Казань, 1881. 107 с.; Громека И. С. *Собрание трудов*. М.: АН СССР, 1952. 76–148 с.
9. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche // *Nuovo Cim.*, 1889. vol. 25. pp. 212–222. <https://doi.org/10.1007/BF02719090>.
10. Васильев О. Ф. *Основы механики винтовых и циркуляционных потоков*. Л.; М.: Госэнергоиздат, 1958. 144 с.
11. Ковалев В. П., Просвиряков Е. Ю., Сизых Г. Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // *Труды Московского физико-технического института*, 2017. Т. 9, № 1. С. 71–88.
12. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965. vol. 261. pp. 17–20. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7_3).
13. Childress S. New solutions of the kinematic dynamo problem // *J. Math. Phys.*, 1970. vol. 11, no. 10. pp. 3063–3076. <https://doi.org/10.1063/1.1665095>.
14. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible / *Encyclopedia of Physics*. vol. 8/2. Berlin: Springer-Verlag, 1963. pp. 1–384. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-10109-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10109-4_1).

MSC: 76D05, 76D99

## A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows

© G. B. Sizykh

Moscow Aviation Institute (National Research University),  
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

### Abstract

In the paper, Beltrami flows or helical flows are flows in which the vorticity and velocity vectors are collinear, and the proportionality coefficient between these vectors is nonzero and is the same at all points of the flow. A method is proposed that allows using known helical solutions to obtain new helical solutions of the Euler equations for an incompressible fluid. Some of these new solutions cannot be obtained by the known methods of replicating solutions by shifting and rotating the coordinate system, symmetry, scaling, cyclic permutation of the velocity and coordinate components, vector summation. The new replication method is applied to such parametric families of exact solutions in which the proportionality coefficient between velocity and vorticity remains unchanged for different values of the parameter. The essence of the method is that for such families the derivative of the velocity with respect to the parameter is also the helical velocity. The sequential differentiation of the speed of a new solution with respect to a parameter gives an endless chain of new exact solutions.

**Keywords:** helical solutions of the Navier–Stokes equations, exact solutions of the Euler equations, Beltrami flows.

Received: 15<sup>th</sup> July, 2020 / Revised: 3<sup>rd</sup> August, 2020 /Accepted: 16<sup>th</sup> November, 2020 / First online: 26<sup>th</sup> November, 2020

**Competing interests.** I have no competing interests.

**Authors' contributions and responsibilities.** I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

**Funding.** This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.


### Short Communication

© The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

**Please cite this paper in press as:**

Sizykh G. B. A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 790–798. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802> (In Russian).

**Author's Details:**

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. &amp; Math. Sci; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

## References

1. Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 319–330. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1766>.
2. Khorin A. N., Konyukhova A. A. Couette flow of hot viscous gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
3. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1348, 012099. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1348/1/012099>.
4. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Viscous gas flow between vertical walls, *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 11–18. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060046>.
5. Bosnyakov S. M., Mikhaylov S. V., Podaruev V. Yu., Troshin A. I. Unsteady discontinuous Galerkin method of a high order of accuracy for modeling turbulent flows, *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 22–34. <https://doi.org/10.1134/S2070048219010058>.
6. Dergachev S. A., Marchevsky I. K., Shcheglov G. A. Flow simulation around 3D bodies by using Lagrangian vortex loops method with boundary condition satisfaction with respect to tangential velocity components, *Aerospace Science and Technology*, 2019, vol. 94, 105374. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105374>.
7. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids, *Czech. J. Phys.*, 1994, vol. 44, pp. 97–106. <https://doi.org/10.1007/BF01701186>.
8. Gromeka I. S. *Some cases of the motion of an incompressible fluid*, Doctoral Dissertation, Kazan, 1881, 107 pp. (In Russian); *Collected Works*. Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1952.
9. Beltrami E. Considerazioni idrodinamiche, *Nuovo Cim.*, 1889, vol. 25, pp. 212–222. <https://doi.org/10.1007/BF02719090>.
10. Vasil'ev O. F. *Fundamentals of mechanics of screw and flow patterns*. Leningrad; Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1958, 144 pp. (In Russian)
11. Kovalev V. P., Prosviryakov E. Yu., Sizykh G. B. Obtaining examples of exact solutions of the Navier–Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities, *Proceedings of MIPT*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 71–88 (In Russian).
12. Arnold V. I. Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1965, vol. 261, pp. 17–20. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-31031-7_3).
13. Childress S. New solutions of the kinematic dynamo problem, *J. Math. Phys.*, 1970, vol. 11, no. 10, pp. 3063–3076. <https://doi.org/10.1063/1.1665095>.
14. Berker R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, In: *Encyclopedia of Physics*, vol. 8/2. Berlin, Springer-Verlag, 1963, pp. 1–384. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-10109-4\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10109-4_1).





# ПОДПИСКА – 2021

на январь–июнь по Объединенному  
каталогу «Пресса России»

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2020 г. проводится подписная кампания на журналы Самарского государственного технического университета (первое полугодие 2021 г.)

- 18106 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки»
- 18107 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки»
- 18108 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»
- 41340 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Философия»

*Условия оформления подписки Вы найдете  
в I томе каталога «Пресса России»*