ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Физико-математические науки»

Т. 25, № 2 – 2021

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)

ISSN 2310–7081 (online)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Июнь — 2021

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 25, № 2 – 2021)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:
- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеенко — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)
- З. Д. Усманов — акад. АН РТ, д.ф.-м.н., проф. (Душанбе, Таджикистан)

Редакционная коллегия:
- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвиряков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. ((Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Белгород, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 25, № 2 – 2021)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 30 июня 2021 г.
Дата выхода в свет 30 июля 2021 г.
Формат 70×108 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 97/2021.
Заказ № 1-4853-lv.

Отпечатано в
ООО «Типография Фурсова»
196105, г. Санкт-Петербург,
ул. Благодатная, 69

Тел.: +7 (812) 646 33 77

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
• 01.01.02 (1.1.2) – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
• 01.02.04 (1.1.8) – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
• 05.13.18 (1.2.2) – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «ЭкоВектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Самарский государственный технический университет, 2021 (составление)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
June — 2021

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2021, vol. 25, no. 2

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:
- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shõji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyanov (Częstochowa, Poland)
- Z. D. Usmanov (Dushanbe, Tajikistan)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:
- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V.Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Belgorod, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
49, Blagodatnaya st., Saint Petersburg, 196105, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Samara State Technical University, 2021 (Compilation)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i2

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Миронов А. Н., Миронова Л. Б., Яковлева Ю. О. “Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор)” 207

Хуштова Ф. Г. “Первая краевая задача в прямоугольной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля” 241

Эргашев Т. Г. “Потенциалы для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом и их применение” 257

Механика деформируемого твёрдого тела

Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А., Жегалов Д. В. “Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды” 286

Фукалов А. А., Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Баяндин Ю. В. “Равновесие жестко закрепленной на внешней поверхности полой трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил” 303

Шляхин Д. А., Кусаева Ж. М. “Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований” 320

Янковский А. П. “Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек” . . 343

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Соломин Е. В., Терехин А. А., Мартьянов А. С., Ковалёв А. А., Исмагилов Д. Р., Мирошниченко А. А., Ян Ю., Рявкин Г. Н. “Дифференциальная ошибка угла ориентации анеморумбометра горизонтально-осевой ветроэнергетической установки” 365

Краткие сообщения

Орлов В. Н., Ковальчук О. А. “О точных границах области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности приближенного значения подвижной особой точки для вещественной области” 381

Самарин А. Ю. “Квантовая эволюция в терминах механического движения” 393

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i2

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Mironov A. N., Mironova L. B., Yakovleva Yu. O. "The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review)" 207

Khushtova F. G. "The first boundary-value problem in a rectangular domain for a differential equation with the Bessel operator and the Riemann–Liouville partial derivative" 241

Ergashev T. G. "Potentials for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient and their application" 257

Mechanics of Solids

Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A., Zhegalov D. V. "Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium"286

Fukalov A. A., Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Bayandin Yu. V. "The equilibrium state of a hollow transversally-isotropic thick-walled sphere, which is fixed on the external surfaces and is subject to a uniform internal lateral pressure and weight forces" 303

Shlyakhin D. A., Kusaeva Zh. M. "Solution of the coupled nonstationary problem of thermoelasticity for a rigidly fixed multilayer circular plate by the finite integral transformations method" 320

Yankovskii A. P. "A refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible spatially-reinforced cylindrical shells" 343

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Solomin E. V., Terekhin A. A., Martyanov A. S., Kovalyov A. A., Ismagilov D. R., Miroshnichenko A. A., Yang Y., Ryavkin G. N. "Horizontal-axis wind turbine weathervane yaw differential error" 365

Short Communications

Orlov V. N., Kovalchuk O. A. "Exact boundaries for the analytical approximate solution of a class of first-order nonlinear differential equations in the real domain" 381

Samarin A. Yu. "Quantum evolution in terms of mechanical motion" 393

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 207–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1853

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956

Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор)

© *А. Н. Миронов*[1,2], *Л. Б. Миронова*[1], *Ю. О. Яковлева*[2]

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Елабужский институт (филиал),
Россия, 423600, Елабуга, ул. Казанская, 89.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Данная обзорная статья посвящена классу линейных уравнений с доминирующей частной производной вида $(D+M)u=f$, где Du — смешанная частная производная, а M — линейный дифференциальный оператор, содержащий производные функции u, получаемые из D отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования. Можно отметить структурное сходство таких уравнений с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Излагается метод Римана для линейных уравнений с доминирующей частной производной, являющийся естественным обобщением хорошо известного метода Римана для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

В статье изложены основные положения теории, разработанной для уравнения с доминирующей частной производной общего вида, позволяющие заинтересованному читателю применить полученные результаты к интересующей его задаче.

Дается определение функции Римана как решения интегрального уравнения Вольтерры, приведено основное дифференциальное тождество, продемонстрирован процесс получения формулы решения задачи

Обзор

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Миронов А. Н., Миронова Л. Б., Яковлева Ю. О. Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 207–240. https://doi.org/10.14498/vsgtu1853.

Сведения об авторах

Алексей Николаевич Миронов https://orcid.org/0000-0002-8818-286X
доктор физико-математических наук, доцент; профессор каф. математики и прикладной информатики[1]; профессор[2]; e-mail: miro73@mail.ru

Любовь Борисовна Миронова https://orcid.org/0000-0002-3299-2601
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. математики и прикладной информатики[1]; e-mail: lbmironova@yandex.ru

Юлия Олеговна Яковлева https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики[2]; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

Коши в терминах функции Римана путем интегрирования указанного тождества по соответствующей области в n-мерном пространстве. Приведен пример построения решения задачи Коши для одного уравнения третьего порядка.

Далее излагается метод Римана для достаточно широкого класса линейных систем уравнений гиперболического типа (в том числе с кратными характеристиками). Данный метод идейно весьма близок к методу Римана для линейных уравнений с доминирующей частной производной.

Обсуждаются вопросы приложений метода Римана к исследованию новых задач для уравнений с частными производными. В частности, с использованием метода Римана доказана корректность новых граничных задач для факторизованных гиперболических уравнений, исследованы вопросы разрешимости интегральных уравнений с частными интегралами, определенная модификация метода Римана позволяет развивать метод Римана–Адамара для задач Дарбу. Представление решений гиперболических систем в явном виде в терминах матрицы Римана позволяет исследовать новые граничные задачи, в частности, задачи с заданием нормальных производных искомых функций на характеристиках, задачи с условиями на всей границе области, задачи Дарбу.

Изложенный здесь метод Римана для линейных уравнений с доминирующей частной производной очевидным образом переносится на матричные уравнения. В связи с этим указаны некоторые случаи, когда для таких матричных уравнений построена в явном виде (в терминах гипергеометрических функций) матрица Римана.

В работе дается обзор литературы, кратко излагается история развития данного направления в России и за рубежом.

Ключевые слова: метод Римана, функция Римана, матрица Римана, задача Коши, задача Гурса, задача Дарбу, уравнение с доминирующей частной производной, гиперболическое уравнение, система уравнений гиперболического типа, уравнение Бианки, уравнение Векуа, уравнение Аллера, уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной, уравнение Буссинеска–Лява.

Получение: 15 марта 2021 г. / Исправление: 28 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 18 мая 2021 г.

Введение

В данной статье речь идет о классах гиперболических уравнений и систем уравнений, для которых при участии авторов статьи были разработаны варианты метода Римана, позволяющие строить в явном виде в терминах функции (или матрицы) Римана решения задач Коши, Гурса и некоторых других задач. Первоначально метод Римана разрабатывался для уравнений вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^m u(x)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m-1, \\ \alpha_s \leqslant m_s,\ s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \qquad (1)$$

где $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — декартовы координаты точки x; $m = m_1 + \dots + m_n$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; m_s, α_s, $s = \overline{1,n}$, — целые неотрицательные числа; $m > 1$; $u(x)$ — искомая, а a_α, f — известные функции.

Признаком, отличающим уравнения вида (1) от других уравнений с частными производными, является наличие первого слагаемого в правой части (1), представляющего собой доминирующую производную: все остальные входящие в (1) производные получаются из нее отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования по какой-либо из независимых переменных. Заметим, что подобный признак всегда имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно рассматривать (1) как класс уравнений с частными производными, наиболее близкий к классу линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

При $m_s = 1$, $s = \overline{1, n}$, уравнение (1) обычно называют уравнением Бианки. Итальянский математик Л. Бианки (L. Bianci) одновременно с О. Никколетти (O. Niccoletti) еще в 1895 г. [1,2] рассматривал его как многомерное обобщение хорошо известного в математической физике уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f.$$

В связи с этим появление уравнений вида (1) представляет собой естественный шаг на пути теоретических обобщений.

К частным случаям уравнений (1) сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие, они применяются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почве, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах (см. [3, с. 63, 109; 4; 5, с. 5–13; 6–9] и библиографический список в конце текста статьи [10]).

Можно особо отметить широко известные уравнения указанного класса: полученное И.Н. Векуа [11, с. 258] основное дифференциальное уравнение изгиба тонкой сферической оболочки

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + 2\Big)\Big(\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\delta E h R^2}{D}\Big)u = \Phi(z, \zeta);$$

уравнение Аллера (уравнение Баренблатта—Желтова – Кочиной)

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x,$$

описывающее диффузию в трещиноватых средах [6; 7, пп. 1.5 и 9.6; 12–14]; уравнение Буссинеска—Лява

$$u_{ttxx} - u_{tt} + u_{xx} = 0,$$

описывающее волновые процессы в тонком упругом стержне с учетом эффектов инерции и в периодических слоистых средах [15,16]. К виду (1) относятся и поливибрационные уравнения Д. Манжерона (D. Mangeron) [17,18].

Уравнение Бианки третьего порядка встречается при редукции системы Дарбу для символов Кристоффеля, описывающей сопряженные криволинейные системы координат [19].

После Л. Бианки и О. Николетти различные вопросы, связанные с уравнениями вида (1) изучали H. Bateman, E. Lahaye, D. Mangeron, M. Oğustöreli,

D. Colton, S. Easwaran, V. Radochová, A. Corduneany, W. Rundell, M. Stecher [20–32], В. А. Водахова [33, 34], М. Х. Шхануков [35–37], О. М. Джохадзе [38, 39], В. И. Корзюк [40], И. Г. Мамедов [41–45] и другие.

М. К. Фаге [46] был предложен вариант метода Римана для уравнения Бианки произвольного порядка. В этой статье автор констатирует, что «Бианки и Николетти разработали лишь формальную часть теории, не вдаваясь в аналитические детали».

С начала 1990-х годов в Казани сформировалась группа (В. И. Жегалов, В. А. Севастьянов, Е. А. Уткина, А. Н. Миронов), ведущая систематические исследования в обсуждаемой области. В частности, в 1990 г. В. И. Жегаловым [47] было рассмотрено уравнение с переменными коэффициентами

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{2}$$

Отправным пунктом рассуждений являлся результат И. Н. Векуа из [11], где было показано, что функция Римана для уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(x,y) - \int_\tau^y a(x,\eta)v(x,\eta)\,d\eta - \int_t^x b(\xi,y)v(\xi,y)\,d\xi + \\ + \int_t^x \int_\tau^y c(\xi,\eta)v(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi = 1$$

и имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x\partial y} - RL_1(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\Big[u\Big(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[u\Big(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\Big)\Big],$$

отличающееся от тождества, использованного Б. Риманом. Данная модификация метода Римана допускала возможность его распространения на случай уравнения (2), что и было реализовано в [47].

Позднее в ряде работ В. И. Жегалова, В. А. Севастьянова и Е. А. Уткиной этот модифицированный метод был распространен на класс уравнений с доминирующей частной производной [8, 48–57], при этом для уравнений с кратным дифференцированием изучалась задача Гурса, а задача Коши исследовалась лишь для уравнения Бианки. Существенное значение имеет то, что функция Римана в этих работах определяется не как решение сопряженного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, число которых очень быстро увеличивается с ростом n, а как решение некоторого интегрального уравнения. Отметим еще, что при построении решений задач Коши В. А. Севастьянов использовал аппарат дифференциальных форм. Оба указанных изменения привели к существенному уменьшению сложности выкладок, и вывод окончательных формул решения стал более компактным. Это позволило получить более лаконичную и прозрачную схему решения задач Гурса и Коши, чем в работах предыдущих авторов. Кроме того, предложенный вариант оказался конструктивным в том смысле, что удалось выделить ряд новых случаев, когда решение может быть записано в явном виде [50, 51, 58, 59].

Далее естественно было перейти к построению теории уравнения (1) в общем случае, когда искомая функция содержит кратное дифференцирование по независимым переменным. Часто такие уравнения называются псевдопараболическими (первым такое название использовал Д. Колтон в 1972 г. [24]).

В 2005 г. Е. А. Уткиной было доказано тождество [60,61], необходимое для решения задачи Гурса в общем случае уравнения (1). Главным недостатком предложенного тождества было то, что его структура отличалась от тождества для уравнения Бианки. Полученная формула решения задачи Гурса позволила распространить теорию характеристических задач с нормальными производными в граничных условиях со случая уравнения Бианки на общее псевдопараболическое уравнение (1) [62].

А. Н. Мироновым для уравнения (1) было предложено тождество, имеющее структуру тождества для уравнения Бианки, что позволило применить метод Римана и к задаче Коши [63,64]. В работе [65] для уравнения (1) в терминах функции Римана построено решение задачи, из формулы решения которой формула решения задачи Гурса может быть получена как частный случай.

Одной из областей применения результатов, связанных с использованием метода Римана для уравнения (1), являются краевые задачи для факторизованных уравнений вида

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)Lu=0,$$

где L — оператор уравнения (1). Для таких уравнений поставлены новые краевые задачи неклассического характера и получены условия их однозначной разрешимости [66, 67].

Применение метода Римана позволяет вести поиск новых возможностей решения уравнений вида (1) и граничных задач для них в явном виде. Выделено значительное число уравнений, допускающих эффективную разрешимость в терминах функции Римана [69–74]. Указанные результаты применяются и к решению в явном виде интегральных уравнений Вольтерра, в том числе с несколькими независимыми переменными [75, 76].

Наконец, был разработан векторно-матричный аналог метода Римана для некоторого класса гиперболических систем (который включает системы с кратными характеристиками). Поставлен ряд новых характеристических задач для подобных систем в пространствах $\mathbb{R}^n$ и исследован характер их разрешимости [77–81].

В последнее время на основе метода Римана развивается метод Римана—Адамара, позволяющий строить решения задач Дарбу для уравнений Бианки и систем уравнений гиперболического типа в терминах функции или матрицы Римана—Адамара [82–84].

Некоторое время, начиная с 1991 г., метод Римана для уравнений Бианки развивался в Самаре (см., например, [85, 86]). Обзор методов построения функции Римана для уравнения Бианки при $n=2$ содержится в работе [87].

В данной работе мы останавливаемся на описании наиболее общих результатов для уравнения (1), которые позволяют применять метод Римана в разнообразных частных случаях, возникающих при изучении краевых задач для рассмотренных здесь классов гиперболических уравнений и систем.

1. Построение решения задачи Коши методом Римана

Здесь изложен процесс построения решения задачи Коши в терминах функции Римана, то есть дается решение поставленной М. К. Фаге задачи [46]: *построить в терминах функции Римана решение задачи Коши для уравнения с доминирующей частной производной в общем случае.*

Изложенные ниже результаты с полными доказательствами опубликованы в [64].

Рассмотрим уравнение (1), записанное в следующей форме

$$L(u) \equiv \sum_{\substack{0\leqslant q_i\leqslant m_i,\\ i=\overline{1,n}}} a_{q_1q_2\ldots q_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)u_{x_1^{q_1}x_2^{q_2}\ldots x_n^{q_n}} = f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad (3)$$

где $a_{q_1q_2\ldots q_n}$, f — заданные функции; $a_{m_1m_2\ldots m_n} \equiv 1$; u — искомая функция; порядок уравнения (3) равен $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.

1.1. Основное тождество. Считаем, что коэффициенты (3) удовлетворяют включениям $a_{q_1q_2\ldots q_n} \in C^{(q_1,q_2,\ldots,q_n)}$, $f \in C$ в замыкании рассматриваемой области G (областью всюду будем называть открытое связное множество). Класс $C^{(q_1,q_2,\ldots,q_n)}(\overline{G})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1+l_2+\cdots+l_n}/\partial x_1^{l_1}\partial x_2^{l_2}\ldots\partial x_n^{l_n}$, $l_i = \overline{0,q_i}$, $i = \overline{1,n}$, на множестве $\overline{G}$.

Введем для (3) функцию Римана $R = R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ как решение интегрального уравнения

$$R(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_{k,n}}\int_{\xi_{q_1}}^{x_{q_1}}\int_{\xi_{q_2}}^{x_{q_2}}\cdots\int_{\xi_{q_k}}^{x_{q_k}} F_{q_1q_2\ldots q_k}(x_1,x_2,\ldots,$$
$$x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\ldots,\alpha_{q_k})R(x_1,x_2,\ldots,x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\ldots,$$
$$x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\ldots,x_n)\,d\alpha_{q_k}\ldots d\alpha_{q_2}d\alpha_{q_1} = 1, \quad (4)$$

где вторая сумма берется по множеству всех упорядоченных наборов индексов $Q_{k,n} = \{(q_1,q_2,\ldots,q_k) \mid 1 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots < q_k \leqslant n\}$;

$$F_{q_1q_2\ldots q_k}(x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha_{q_1},\alpha_{q_2},\ldots,\alpha_{q_k}) =$$
$$= \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1}\sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1}\cdots\sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}(m_{q_i}-p_{q_i})}a_{p_1p_2\ldots p_n}(x_1,x_2,\ldots,$$
$$x_{q_1-1},\alpha_{q_1},x_{q_1+1},\ldots,x_{q_k-1},\alpha_{q_k},x_{q_k+1},\ldots,x_n)\prod_{j=1}^{k}\frac{(x_{q_j}-\alpha_{q_j})^{m_{q_j}-p_j-1}}{(m_{q_j}-p_j-1)!},$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = 0$. Здесь x_i, $\alpha_i \in [\xi_i,\eta_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть $\Omega = [\xi_1,\eta_1] \times [\xi_2,\eta_2] \times \cdots \times [\xi_n,\eta_n] \subset \overline{G}$. Решение (4) существует и единственно в классе $C(\Omega)$. Как обычно (например [88, с. 63]), считаем R функцией как переменных $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, так и параметров $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$:

$$R = R(x_1,x_2,\ldots,x_n;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n).$$

Из (4) следует, что $R(x_1,\ldots,x_n;x_1,\ldots,x_n) \equiv 1$.

Рассмотрим конструкции

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \\ = \sum_{s_1=0}^{l_1} \sum_{s_2=0}^{l_2} \cdots \sum_{s_n=0}^{l_n} (-1)^{\sum_{i=1}^n s_i} (Ra_{m_1-s_1, m_2-s_2, \ldots, m_n-s_n})_{x_1^{l_1-s_1} x_2^{l_2-s_2} \ldots x_n^{l_n-s_n}}, \quad (5)$$

$$0 \leqslant l_i \leqslant m_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Всего имеется $(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_n+1)$ конструкций вида (5) (как и коэффициентов уравнения (3)), причем $A_{m_1 m_2 \ldots m_n} = 0$ есть сопряженное к (3) уравнение $L^*(R) = 0$, а $A_{00\ldots0} \equiv R$.

Из уравнения (4) вытекают тождества

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots, \\ x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \equiv 0 \quad (6)$$

при $l_{q_1} \leqslant m_{q_1} - 1, \ldots, l_{q_k} \leqslant m_{q_k} - 1$, $l_r = m_r$, $r \neq q_i$, $i = \overline{1, k}$. Покажем это.

Дифференцируем (4) l_1 раз по x_1, l_2 раз по x_2, …, l_n раз по x_n, после чего полагаем $x_{q_1} = \xi_{q_1}$, $x_{q_2} = \xi_{q_2}, \ldots, x_{q_k} = \xi_{q_k}$, где $l_{q_1} \leqslant m_{q_1} - 1$, $l_{q_2} \leqslant m_{q_2} - 1, \ldots$, $l_{q_k} \leqslant m_{q_k} - 1$, а $l_r = m_r$ при $r \neq q_i$, $i = \overline{1, k}$. Тогда

$$R_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}} + \sum_{p_1=m_1-l_1}^{m_1-1} \sum_{p_2=m_2-l_2}^{m_2-1} \cdots \sum_{p_n=m_n-l_n}^{m_n-1} (-1)^{\sum_{i=1}^n m_i - p_i} \times \\ \times (Ra_{p_1 p_2 \ldots p_n})_{x_1^{l_1+p_1-m_1} x_2^{l_2+p_2-m_2} \ldots x_n^{l_n+p_n-m_n}} = 0. \quad (7)$$

Ясно, что (7) есть равенство

$$A_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, \ldots, x_{q_1-1}, \xi_{q_1}, x_{q_1+1}, \ldots, \\ x_{q_k-1}, \xi_{q_k}, x_{q_k+1}, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно положить $s_1 = m_1 - p_1$, $s_2 = m_2 - p_2, \ldots$, $s_n = m_n - p_n$.

Центральную роль в дальнейшем играет тождество

$$RL(u) \equiv \sum_{\substack{p_i \leqslant m_i, \\ \sum p_i < \sum m_i, \\ 0 \leqslant l_i \leqslant 1, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^n p_i} (A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-l_1-p_1} x_2^{m_2-l_2-p_2} \ldots x_n^{m_n-l_n-p_n}})_{x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_n^{l_n}}, \quad (8)$$

где p_i, m_i, l_i — целые неотрицательные числа, справедливые для любой функции класса $C^{(m_1, \ldots, m_n)}$. В сумме (8) каждое слагаемое встречается лишь один раз и определяется конструкцией $A_{p_1 p_2 \ldots p_n}$ (точнее, набором $(p_1, p_2, \ldots p_n)$). Формула (8) строится по следующему правилу. Берется набор $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, затем определяется набор $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ так, чтобы $p_1 + l_1 \leqslant m_1$, $p_2 + l_2 \leqslant$ $\leqslant m_2, \ldots, p_n + l_n \leqslant m_n$, при этом берутся наибольшие значения l_1, l_2, …, l_n

(т. е. $l_i = 1$, если $p_i < m_i$; $l_i = 0$, если $p_i = m_i$). Эти наборы $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ однозначно определяют слагаемое из (8).

Тождество (8) доказано в [64] методом математической индукции.

1.2. Построение решения задачи Коши. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим поверхность S класса C^{m-1}, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x_1 &= x_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_2 &= x_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \end{cases} \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_{n-1}} \end{pmatrix} = n-1, \quad (9)$$

$(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \in H$, где H — область пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей.

Выберем точку $P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ так, чтобы плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$ вырезали из поверхности S ограниченный участок S^0. Обозначим через D^0 конечную область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0. Считаем ориентацию области D^0 положительной.

Регулярным в области D_0 решением уравнения (3) назовем решение, непрерывное в D_0 вместе со всеми входящими в это уравнение производными.

Задача Коши. *Найти регулярное в области D^0 решение уравнения* (3), *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial l^k}\right|_{S^0} = \psi_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (10)$$

$\psi_k \in C^{m-k}(\overline{S^0})$, *а $\vec{l}$ — заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.*

Пусть поле направлений $\vec{l}$ задано вектором

$$\vec{l}\big(l_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, l_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\big), \quad |\vec{l}| \equiv 1.$$

Введем систему координат, связанную с поверхностью S:

$$x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) + l_i(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})\mu_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mu_n \in \mathbb{R}.$$

Поле направлений $\vec{l}$ некасательно к S, следовательно, существует обратное преобразование координат $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ класса C^{m-1} в окрестности поверхности S [89, с. 495].

Отметим, что значения u и ее производных на S определяются по данным (10), поскольку частные производные решения u на поверхности S по $x_1, \ldots,$ x_n находятся дифференцированием $u = U(\mu_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mu_n(x_1, \ldots, x_n))$ как сложной функции. Нетрудно заметить, что в силу условий гладкости, налагаемых на поверхность S и данные смешанной задачи, все частные производные на S^0 до порядка $(m-1)$ включительно, входящие в уравнение (3), будут непрерывными функциями.

Решение задачи Коши существует и единственно, так как заменой

$$v = u_{x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}}$$

задача Коши сводится к интегральному уравнению с частными интегралами относительно функции v, решение которого существует и единственно в классе непрерывных функций. Покажем это. Поверхность S может быть задана уравнениями $x_i = \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Введем интегральные операторы

$$I_j \varphi(x_1, \dots, x_n) = \int_{\sigma_j}^{x_j} \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n)\, d\alpha_j.$$

Тогда

$$u_{x_1^{m_1-k_1} x_2^{m_2-k_2} \dots x_n^{m_n-k_n}} = g(x_1, \dots, x_n) + I_1^{k_1} I_2^{k_2} \dots I_n^{k_n} v(x_1, \dots, x_n), \tag{11}$$

где функция $g(x_1, \dots, x_n)$, очевидно, определяется по известным значениям частных производных функции u на поверхности S. Учтем, что

$$I_j^{k_j} v(x_1, \dots, x_n) = \int_{x_j^1}^{x_j} \frac{(x_j - \alpha_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} v(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha_j, x_{j+1}, x_n)\, d\alpha_j.$$

Подставляя (11) в (3), получим интегральное уравнение относительно функции v:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_{k,n}} \int_{\sigma_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{\sigma_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \int_{\sigma_{q_k}}^{x_{q_k}} \Phi_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots,$$
$$x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) v(x_1, x_2, \dots, x_{q_1 - 1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots,$$
$$x_{q_k - 1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n) d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} = f_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\Phi_{q_1 q_2 \dots q_k}(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_{q_1}, \alpha_{q_2}, \dots, \alpha_{q_k}) =$$
$$= \sum_{p_{q_1}=0}^{m_{q_1}-1} \sum_{p_{q_2}=0}^{m_{q_2}-1} \dots \sum_{p_{q_k}=0}^{m_{q_k}-1} a_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^{k} \frac{(x_{q_j} - \alpha_{q_j})^{m_{q_j} - p_{q_j} - 1}}{(m_{q_j} - p_{q_j} - 1)!},$$

причем если $i \neq q_j$, то $p_i = m_i$. Очевидно, f_1 — известная непрерывная функция. Это уравнение Вольтерра с непрерывными ядрами и свободным членом (как и приведенное выше уравнение (4)). Его решение существует и единственно в классе непрерывных функций.

По известной функции v однозначно восстанавливаем функцию u в области D_0, используя известные значения u и ее производных на S^0. Ясно, что найденная таким образом функция u является регулярным решением уравнения (3).

Проведем через точку $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in D^0$ плоскости $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \dots,$ $x_n = \xi_n$. Получим область $D \subset D^0$, граница которой образована указанными плоскостями и частью поверхности S^0, которую обозначим через S^1. Ясно,

что для решения задачи Коши достаточно найти значение решения уравнения (3) в точке M. Это достигается путем интегрирования тождества (8) по области D с использованием общей формулы Стокса:

$$\int_D \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\Big) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k =$$
$$= \int_{\partial D} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k, \quad (12)$$

где ∂D — граница области D.

Введем следующие обозначения:

$$Q = \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$Q_n^{l,l+k} = \big\{(q_1, q_2, \ldots, q_n) \mid \{q_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} = \{1, 2, \ldots, n\},$$
$$q_1 < \cdots < q_l, q_{l+1} < \cdots < q_{l+k},\ q_{l+k+1} < \cdots < q_n\big\},$$

$$B_{q_1} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_{q_i} \leqslant 1,\\ i=\overline{2,n}, l_{q_1}=1,\\ p_r \leqslant m_r, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{n} p_i}}{\sum_{i=1}^{n} l_{q_i}} \times$$
$$\times \big(A_{p_1 \ldots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} x_{q_2}^{m_{q_2}-p_{q_2}-l_{q_2}} \ldots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\big)_{x_{q_2}^{l_{q_2}} \ldots x_{q_n}^{l_{q_n}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ,$$

$$B_{q_1 \ldots q_k} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_{q_i} \leqslant 1,\\ i=\overline{k+1,n},\\ l_{q_j}=1, j=\overline{1,k},\\ p_r \leqslant m_r, r=\overline{1,n}}} \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{n} p_i}}{\prod_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{n} l_{q_i}} \times$$
$$\times \big(A_{p_1 \ldots p_n} u_{x_{q_1}^{m_{q_1}-p_{q_1}-1} \ldots x_{q_k}^{m_{q_k}-p_{q_k}-1} x_{q_{k+1}}^{m_{q_{k+1}}-p_{q_{k+1}}-l_{q_{k+1}}} \ldots x_{q_n}^{m_{q_n}-p_{q_n}-l_{q_n}}}\big)_{x_{q_{k+1}}^{l_{q_{k+1}}} \ldots x_{q_n}^{l_{q_n}}}.$$

Конструкции $B_{q_1 \ldots q_k}$, получающиеся перестановкой индексов, совпадают.

Рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^1, D и ∂D с индексами, являющимися комбинациями из 1, 2, …, $n-1$ различных цифр 1, 2, …, n (каждая из которых соответствует номеру переменной). При этом S^1- и D-многообразия с индексами являются пересечениями соответственно S^1 и D с соответствующими плоскостями, а ∂D-многообразия с индексами — краями соответствующих D-многообразий. Например S_{12}^1 — множество точек поверхности S^1, лежащих в плоскостях $x_1 = \xi_1$

и $x_2 = \xi_2$. Ясно, что геометрически S^1-многообразия содержатся в ∂D-многообразиях с теми же индексами, а D-многообразия — в ∂D-многообразиях с теми же индексами без последнего. Например, S^1_2 — часть ∂D_2, D_{312} — часть ∂D_{31}. Ориентации ∂D-многообразий считаем согласованными с ориентациями соответствующих D-многообразий. В результате будут определены все введенные ориентированные многообразия. Два из рассмотренных как D, так и S^1-многообразия геометрически совпадают, если их индексы образованы одним и тем же неупорядоченным набором переменных. При этом если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, а в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Запишем правую часть тождества (8) в дивергентной форме:

$$RL(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i}. \tag{13}$$

Пусть u — регулярное решение уравнения (3). Тогда, интегрируя (13) по области D и применяя общую формулу Стокса (12) при $k = n$, получим

$$\int_D Rf dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1 - 1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n}.$$

Заменим интеграл по множеству ∂D суммой интегралов по его составляющим:

$$\int_{\partial D} \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} = \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} +$$
$$+ \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{S^1} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n}. \tag{14}$$

Учтем, что входящие в B_{q_1} слагаемые, соответствующие $l_{q_2} = l_{q_3} = \dots = l_{q_n} = 0$, тождественно равны нулю на D_{q_1} в силу (6). Поэтому B_{q_1} на D_{q_1} можно снова записать в дивергентном виде:

$$B_{q_1} = \sum_{i \in Q \setminus \{q_1\}} \frac{\partial B_{q_1 i}}{\partial x_i}. \tag{15}$$

Подставив (15) в первую сумму правой части (14), применяем формулу Стокса:

$$I_1 = \sum_{Q_n^{1,1}} (-1)^{q_1-1} \int_{D_{q_1}} B_{q_1} dx_{q_2} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} =$$
$$= 2! \sum_{Q_n^{2,1}} \sigma(q_1, \dots, q_n) \int_{D_{q_1 q_2}} B_{q_1 q_2} dx_{q_3} \wedge \dots \wedge dx_{q_n} +$$

$$+\sum_{Q_n^{1,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{S^1_{q_1}}B_{q_1q_2}dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n},\quad (16)$$

где $\sigma(q_1,\dots,q_n)$ — знак перестановки $\binom{1\dots n}{q_1\dots q_n}$. При получении (16) мы перешли от интеграла по множеству D_{q_1} к интегралу по его границе ∂D_{q_1}, разбив затем множество ∂D_{q_1} на его составляющие. При этом учтено, что D_{ij} и D_{ji} совпадают как множества, но имеют противоположные ориентации. То есть в процессе вычислений появляются одинаковые интегралы (их количество равно 2) по одной области с точностью до ориентации. Нетрудно заметить, что с учетом знаков эти члены оказываются равными, поэтому мы оставляем интеграл с коэффициентом 2! по D-многообразию с упорядоченным набором индексов. Знак перед ним можно записать в виде $\sigma(q_1,\dots,q_n)$.

Далее мы будем продолжать этот процесс, то есть заменять интегралы по областям $\partial D_{q_1\dots q_p}$ суммами интегралов по их составляющим, а затем представлять подынтегральные выражения интегралов по областям $D_{q_1\dots q_pq_{p+1}}$ в дивергентном виде (что возможно в силу тождеств (6)). При этом, как уже было указано выше, будут появляться одинаковые интегралы. Например, при фиксированном множестве $\{q_i \mid 1\leqslant i\leqslant k\}$ будет $k!$ интегралов от одного выражения по областям $D_{h_1\dots h_k}$, где $(h_1,\dots,h_k)$ — всевозможные перестановки $(q_1,\dots,q_k)$. С учетом знаков все эти $k!$ интегралов равны между собой.

Итак, слагаемые в $B_{q_1q_2}$ при $l_{q_3}=l_{q_4}=\dots=l_{q_n}=0$ тождественно равны нулю на $D_{q_1q_2}$ в силу (6), поэтому $B_{q_1q_2}$ на $D_{q_1q_2}$ можно записать в дивергентном виде:

$$B_{q_1q_2}=\sum_{i\in Q\setminus\{q_1,q_2\}}\frac{\partial B_{q_1q_2i}}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$I_2=2!\sum_{Q_n^{2,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{D_{q_1q_2}}B_{q_1q_2}dx_{q_3}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}=$$

$$=3!\sum_{Q_n^{3,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{D_{q_1q_2q_3}}B_{q_1q_2q_3}dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}+$$

$$+2!\sum_{Q_n^{2,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{S^1_{q_1q_2}}B_{q_1q_2q_3}dx_{q_4}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}.$$

Дальнейший ход преобразований ясен из предыдущего. Для завершения процесса получения окончательной формулы надо определиться, каким будет последний шаг. Нетрудно видеть, что последним шагом будут одномерные интегралы. Очевидно, имеем

$$I_{n-2}=(n-1)!\sum_{Q_n^{n-1,1}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{D_{q_1\dots q_{n-1}}}B_{q_1\dots q_{n-1}}dx_{q_n}+$$

$$+(n-2)!\sum_{Q_n^{n-2,2}}\sigma(q_1,\dots,q_n)\int_{S^1_{q_1\dots q_{n-2}}}B_{q_1\dots q_{n-1}}dx_{q_n},$$

$$I_{n-1} = (n-1)! \sum_{Q_n^{n-1,1}} \sigma(q_1, \ldots, q_n) \int_{D_{q_1 \ldots q_{n-1}}} \frac{\partial B_{q_1 \ldots q_n}}{\partial x_{q_n}} dx_{q_n} =$$

$$= (n-1)! n B_{1\ldots n}(M) - (n-1)! \sum_{Q_n^{n-1,1}} B_{1\ldots n}(S^1_{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}}) =$$

$$= \sum_{\substack{p_i < m_i, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^n p_i} (A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1} x_2^{m_2-p_2-1} \ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(M) -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{Q_n^{n-1,1}} \sum_{\substack{p_i < m_i, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^n p_i} (A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1} \ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}}) =$$

$$= u_{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1}}(M) -$$

$$- \frac{1}{n} \sum_{Q_n^{n-1,1}} \sum_{\substack{p_i < m_i, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^n p_i} (A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1} \ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}}).$$

Здесь снова учтены тождества (6) при $x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$.

Окончательно получаем

$$u_{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1}}(M) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{Q_n^{n-1,1}} \sum_{\substack{p_i < m_i, \\ i=\overline{1,n}}} (-1)^{\sum_{i=1}^n p_i} (A_{p_1 p_2 \ldots p_n} u_{x_1^{m_1-p_1-1} \ldots x_n^{m_n-p_n-1}})(S^1_{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}}) -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{Q_n^{k,2}} \sigma(q_1, q_2, \ldots, q_n) k! \int_{S^1_{q_1 q_2 \ldots q_k}} B_{q_1 q_2 \ldots q_k q_{k+1}} dx_{q_{k+2}} \wedge \cdots \wedge dx_{q_n} +$$

$$+ \int_D R f dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \quad (17)$$

Формулу (17) можно переписать в виде

$$u_{x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \ldots x_n^{m_n-1}}(M) = \Phi(M), \quad (18)$$

где правая часть (17) $\Phi(M)$ содержит значения u и ее производных на S. Эти значения могут быть определены по данным Коши (10). Действительно, частные производные решения u на поверхности S по $x_1, \ldots, x_n$ находятся дифференцированием $u = U(\mu_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mu_n(x_1, \ldots, x_n))$ как сложной функции.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема 1.1. *Решение задачи Коши для уравнения* (3) *с граничными условиями* (10) *существует, единственно и его можно вычислить, используя формулу* (18).

Отметим, что в работе [65] на основе изложенных выше результатов для уравнения (1) рассмотрена задача, названная смешанной, из построенного решения которой как частный случай получается решение задачи Гурса.

1.3. Задача на плоскости. В качестве примера рассмотрим один частный случай, когда число независимых переменных равно двум. Предложенную выше схему построения решения задачи Коши применим к уравнению

$$L(u) \equiv u_{xxy} + a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = f. \tag{19}$$

Считаем, что выполняются включения $a_{ij} \in C^{(i,j)}$, $f \in C$.

Частным случаем (19) является уже упомянутое выше уравнение Аллера

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x.$$

Рассмотрим треугольную область D плоскости (ξ, η), ограниченную характеристиками $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезком кривой Σ: $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma'(\xi) < 0$, класса C^2.

Сформулируем задачу Коши: найти в D регулярное решение (19), удовлетворяющее условиям

$$u\big|_\Sigma = u_0(\xi), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Sigma = u_1(\xi), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Sigma = u_2(\xi). \tag{20}$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали:

$$\vec{n} = (\sigma'/\Delta, -1/\Delta), \quad \Delta = \sqrt{1 + \sigma'^2(x)};$$

$$u_0 \in C^2[0, x_0], \quad u_1 \in C^1[0, x_0], \quad u_2 \in C[0, x_0].$$

Тождество (8) принимает вид

$$RL(u) \equiv (Ru_x)_{xy} - (A_{10}u)_{xy} - (A_{01}u_x)_x + (A_{11}u)_x + (A_{20}u)_y, \tag{21}$$

где

$$A_{10} = R_x - a_{11}R, \quad A_{01} = R_y - a_{20}R,$$
$$A_{11} = R_{xy} - (a_{20}R)_x - (a_{11}R)_y + a_{10}R,$$
$$A_{20} = R_{xx} - (a_{11}R)_x + a_{01}R.$$

Здесь R зависит от (x, y, ξ, η), а коэффициенты уравнения — от (x, y); $u(x, y)$ — любая функция из $C^{(2,1)}$.

Функция Римана является решением уравнения

$$v(x,y) - \int_\eta^y a_{20}(x,\beta)v(x,\beta)\,d\beta - \int_\xi^x \big[a_{11}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{01}(\alpha,y)\big]v(\alpha,y)\,d\alpha +$$
$$+ \int_\xi^x \int_\eta^y \big[a_{10}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{00}(\alpha,\beta)\big]v(\alpha,\beta)\,d\beta d\alpha = 1. \tag{22}$$

Из (22) следует, что

$$\begin{gathered} A_{10}(x,y,x,y) \equiv A_{01}(x,y,x,\eta) \equiv A_{11}(x,y,x,\eta) \equiv A_{20}(x,y,\xi,y) \equiv 0, \\ R(x,y,x,y) \equiv 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Запишем (21) в дивергентной форме:

$$RL(u) \equiv \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y},$$

где

$$B_1 = \frac{1}{2}(Ru_x)_y - \frac{1}{2}(A_{10}u)_y - A_{01}u_x + A_{11}u,$$
$$B_2 = \frac{1}{2}(Ru_x)_x - \frac{1}{2}(A_{10}u)_x + A_{20}u.$$

Рассмотрим точку (x, y) из D. Пусть $y_1 = \sigma(x)$, $y = \sigma(x_1)$; D_{xy} и Σ_{xy} — части области D и кривой Σ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi = x$, $\eta = y$. Поменяв в (21) ролями переменные ξ с x, η с y, проинтегрируем (21) по (ξ, η) по области D_{xy}. Использовав формулу Грина, получим

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf dxdy = \int_{x_1}^{x} B_2\Big|_{\eta=y} d\xi + \int_{y_1}^{y} B_1\Big|_{\xi=x} d\eta + \int_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi.$$

Учитывая тождества (23), после очевидных преобразований получим частный случай формулы (17):

$$u_\xi(x, y) = \frac{1}{2}Ru_x(x_1, y, x, y) + \frac{1}{2}Ru_x(x, y_1, x, y) - \frac{1}{2}A_{10}u(x_1, y, x, y) - \\ - \frac{1}{2}A_{10}u(x, y_1, x, y) - \int_{\Sigma_{xy}} B_1 d\eta - B_2 d\xi + \iint\limits_{D_{xy}} Rf d\xi d\eta. \quad (24)$$

Формула (24) содержит заданные на Σ значения u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}. В данном случае явный вид уравнений, из которых по данным Коши могут быть найдены эти значения, не является слишком громоздким. Запишем эти уравнения. Из (20) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma' \frac{\partial u}{\partial y} = u_0', \quad \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y} = u_1,$$
$$\sigma'' \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sigma' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sigma'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_0'',$$
$$\frac{\sigma''\Delta - \sigma'\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_1',$$
$$\frac{\sigma'^2}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_2,$$

где все значения берутся на кривой S^0. Определитель этой системы

$$\frac{1}{\Delta^4}\begin{vmatrix} 1 & \sigma' & 0 & 0 & 0 \\ \sigma' & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'' & 1 & 2\sigma' & \sigma'^2 \\ \dfrac{\sigma''\Delta - \sigma'\Delta'}{\Delta} & \dfrac{\Delta'}{\Delta} & \sigma' & \sigma'^2 - 1 & -\sigma' \\ 0 & 0 & \sigma'^2 & -2\sigma' & 1 \end{vmatrix} = \frac{(1 + \sigma'^2)^4}{\Delta^4} = (1 + \sigma'^2)^2 > 0,$$

следовательно, по условиям (20) определяются все требуемые для (24) функции.

1.4. Исследование матричных уравнений. Изложенная выше схема рассуждений с очевидными изменениями может быть распространена на случай матричного уравнения (то есть системы) подобно тому, как это сделано в [88, с. 62–66] для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными.

А. А. Андреевым и Ю. О. Яковлевой была рассмотрена система линейных уравнений гиперболического типа третьего порядка частного вида с кратными характеристиками [90]. Ими использовалось то обстоятельство, что с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа—Сильвестра можно определить значение аналитической функции на множестве постоянных квадратных матриц. Если ограничиться множеством матриц, являющихся значениями некоторых аналитических функций от одной матрицы, то определение легко обобщается на случай аналитических функций многих комплексных переменных, что позволяет, в свою очередь, доопределять целый ряд специальных функций на матричные значения входящих в них параметров.

На плоскости двух независимых переменных $(x,\, y)$ рассмотрим две системы уравнений гиперболического типа

$$U_{xxy} + \Omega_1 U = 0, \tag{25}$$

$$U_{xxyy} + \Omega_2 U = 0, \tag{26}$$

где $U(x,y)$ — искомая m-мерная вектор-функция; Ω_1, Ω_2 — постоянные действительные матрицы размера $(m \times m)$.

Матрица Римана для уравнения (25) имеет вид [90]

$$V(x_0, y_0; x, y) = (x - x_0)\, {}_0F_2\Big(1; \frac{3}{2}; \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)}{4}\Omega_1\Big),$$

где ${}_0F_2(a,b,A)$ — гипергеометрическая функция матричного аргумента [91]. Матрица Римана для (26) также строится в терминах обобщенной гипергеометрической функции матричного аргумента и имеет вид [92]

$$V(x_0, y_0; x, y) = (x - x_0)(y - y_0)\, {}_0F_3\Big(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{16}\Omega_2\Big).$$

Опираясь на полученные результаты для уравнений (25), (26), в явном виде были построены решения задач Гурса и Коши.

2. Метод Римана для одного класса гиперболических систем

Здесь излагается метод Римана для системы

$$u_{lx_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{li}(x_1, \ldots, x_n) u_i + f_l(x_1, \ldots, x_n), \quad 1 \leqslant l \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{27}$$

если $1 \leqslant l \leqslant k_1$, то $j = 1$; если $k_1 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2$, то $j = 2$; если $k_1 + k_2 + 1 \leqslant \leqslant l \leqslant k_1 + k_2 + k_3$, то $j = 3$; $\ldots$; если $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, то $j = n$. Изложенные ниже результаты с полными доказательствами опубликованы в [77].

Ранее ряд авторов исследовал систему уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) u_k + f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{28}$$

которая представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа.

Аналогичная система высокого порядка имеет, очевидно, вид

$$\frac{\partial^{k_s} v_s}{\partial x_s^{k_s}} = f_s\Big(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, \frac{\partial^{k_1-1} v_1}{\partial x_s^{k_1-1}}, \ldots, v_n, \ldots, \frac{\partial^{k_n-1} v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}\Big), \tag{29}$$
$$s = 1, \ldots, n,$$

где f_s — линейные относительно аргументов $v_1, \ldots, \frac{\partial^{k_n-1} v_n}{\partial x_s^{k_n-1}}$ функции. Путем введения новых искомых функций можно представить (29) как частный случай системы (27).

Метод Римана для систем дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными был разработан Э. Хольмгреном [93]. В работе Б. Н. Бурмистрова [94] результаты Хольмгрена развивались с целью решения задачи Коши, возникшей в связи с исследованием граничной задачи для системы уравнений смешанного типа на плоскости.

Вместе с тем многие авторы исследовали системы дифференциальных уравнений с частными производными, не прибегая к схеме, предложенной Э. Хольмгреном. Так, в работах Т. В. Чекмарева [95,96] решение задачи Гурса для (28) с условиями

$$u_i\big|_{x_i = x_i^0} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

строится методом последовательных приближений. Отметим также работу [97], в которой были найдены интегральные представления решений задач Коши и Гурса для (28) при $n = 2$, позволяющие установить их структурные свойства, а также работы Р. К. Романовского, Е. В. Воробьевой, Ю. А. Медведева, в которых исследованы начально-краевые задачи и задачи оптимального управления для гиперболических систем (с использованием определенных В. К. Романовским матриц Римана), устойчивость и экспоненциальная дихотомия решений [98–101].

Таким образом, система (27) может рассматриваться как обобщение ряда частных случаев, изучавшихся в различных аспектах.

2.1. Существование и единственность решений задач Гурса и Коши. Рассмотрим систему уравнений, вообще говоря, с кратными характеристиками (27). Далее всюду предполагается, что все a_{li}, f_l непрерывны в замыкании рассматриваемой области. Будем называть регулярным в области D решение (27), непрерывное в D, вместе со всеми входящими в систему производными:

$$u_l \in C(D), \quad u_{lx_j} \in C(D), \quad l = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^{j-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{i=1}^{j} k_i.$$

Пусть $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1,\ i = \overline{1, n}\}$. Обозначим через X_j грани G при $x_j = x_j^0$.

Задача Гурса. *Найти регулярное в области G решение системы* (27), *удовлетворяющее условиям*

$$u_l\big|_{\overline{X}_j} = \varphi_l(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n), \quad l = \overline{1, m}, \tag{30}$$

$\varphi_l \in C(\overline{X}_j)$, *где связь между l и j дается формулой* (27).

Решение задачи Гурса существует и единственно. Действительно, сведем (27) с условиями (30) к системе интегральных уравнений

$$u_l = \varphi_l + \int_{x_j^0}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \right) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}. \tag{31}$$

Решение системы (31) существует и единственно в $C(\overline{G})$ (это можно доказать методом последовательных приближений). Очевидно, система (31) равносильна задаче Гурса (27), (30).

Перейдем к постановке задачи Коши. В ориентированном системой координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим поверхность S класса C^1, заданную уравнениями (9). Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Через точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ проведем плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$. Обозначим S^0 участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, D_0 — конечную область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченную плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$, $x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0, ∂D_0 — край D_0. Считаем ориентацию области D_0 положительной.

Задача Коши. *Найти регулярное в D_0 решение системы* (27), *удовлетворяющее на поверхности S условиям*

$$u_l\big|_{\overline{S^0}} = u_{l0}, \quad l = \overline{1, m}, \quad u_{l0} \in C(\overline{S^0}). \tag{32}$$

Отметим, что поверхность S допускает различные формы записи через переменные x_1, $\ldots$, x_n: $x_1 = \sigma_1(x_2, \ldots, x_n)$, $x_2 = \sigma_2(x_1, x_3, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $x_n = \sigma_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Поэтому мы можем считать, что функции u_{l0} зависят от любого набора $(n-1)$ переменных из числа x_1, $\ldots$, x_n.

Существование и единственность решения задачи Коши доказывается так же, как и в случае задачи Гурса. Для определенности будем считать, что в области D_0 выполняются неравенства

$$x_1 > \sigma_1(x_2, \ldots, x_n), \quad x_2 > \sigma_2(x_1, x_3, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad x_n > \sigma_n(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Тогда система (27) с условиями (32) сводится к системе интегральных уравнений

$$u_l = u_{l0} + \int_{\sigma_j}^{x_j} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \right) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}, \tag{33}$$

где связь между l и j снова дается формулой (27).

Как уже было изложено выше, решение (33) существует и единственно в $C(\overline{D}_0)$. Система (33) равносильна задаче Коши (27), (32).

2.2. Построение решений задач в терминах матрицы Римана. Перепишем (27) в векторно-матричной форме:

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \operatorname{colon}(u_1, \ldots, u_m).$$

Здесь $\mathbf{A}_i$ — постоянные диагональные матрицы, $\mathbf{A}_i = \operatorname{diag}(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, причем $\alpha_s^1 = 1$ при $1 \leqslant s \leqslant k_1$, $\alpha_s^2 = 1$ при $k_1 + 1 \leqslant s \leqslant k_1 + k_2$, $\ldots$, $\alpha_s^n = 1$ при $\sum_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant s \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$, остальные диагональные элементы матриц $\mathbf{A}_i$ равны нулю; $\mathbf{B} = (a_{li})$, a_{li} — коэффициенты системы (27), $l = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,m}$; $\mathbf{F} = \operatorname{colon}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Введем матрицу Римана

$$\mathbf{R} = \operatorname{colon}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m),$$

где $\mathbf{R}_i(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (r_{i1}, \ldots, r_{im})$, $i = \overline{1,m}$, являются решениями систем

$$r_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \delta_{ij} - \int_{\xi_p}^{x_p} \Bigg(\sum_{q=1}^{m} a_{qj}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \times \\ \times r_{iq}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \Bigg) d\eta_p, \quad (34)$$

$$\sum_{q=1}^{p-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{p} k_q, \quad p = \overline{1,n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, a_{qj} — коэффициенты системы (27). Решения систем (34) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. Дифференцируя (34), получаем, что по первым n аргументам $(x_1, \ldots, x_n)$ матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (27) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\mathbf{A}_i)_{x_i} - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Для любого вектора $\mathbf{U} \in C^1$ справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i}. \quad (35)$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} = \\ = \mathbf{R}L(\mathbf{U}) + \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} = \\ = \mathbf{R}L(\mathbf{U}) - L^*(\mathbf{R})\mathbf{U} = \mathbf{R}L(\mathbf{U}).$$

Далее используется общая формула Стокса

$$\int_H \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k =$$

$$= \int_{\partial H} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Перейдем теперь к выводу формул решения задач.

2.2.1. Задача Гурса. Пусть $M(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in G$. Считая в тождестве (35) матрицу $\mathbf{U}$ решением системы (27), проинтегрируем (35) по области $G_1 = \{x_i^0 < x_i < \xi_i,\ i = \overline{1,n}\}$:

$$\int_{G_1} \mathbf{RF} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_{G_1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{RA}_i \mathbf{U})_{x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

По общей формуле Стокса

$$\int_{G_1} \mathbf{RF} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{\partial G_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mathbf{RA}_i \mathbf{U} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (36)$$

Найдем значение $u_k(M)$. Пусть в (27) входит производная функции u_k по переменной x_s. Ясно, что номера s и k связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{s-1} k_i + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{i=1}^{s} k_i.$$

Запишем k-тую строку (36):

$$\int_{G_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i\right) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{\partial G_1} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (37)$$

Так как ∂G_1 — граница параллелепипеда, формула (37) принимает вид

$$\int_{G_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i\right) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_1^0}^{\xi_1} \cdots \int_{x_{i-1}^0}^{\xi_{i-1}} \int_{x_{i+1}^0}^{\xi_{i+1}} \cdots \int_{x_n^0}^{\xi_n} \left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right) \Bigg|_{x_i^0}^{\xi_i} dx_n \cdots dx_{i+1} dx_{i-1} \cdots dx_1. \quad (38)$$

Из системы (34) следует, что входящие в правую часть (38) функции r_{kj} удовлетворяют соотношениям

$$r_{kj}(x_1,\dots,x_{i-1},\xi_i,x_{i+1},\dots,x_n;\xi_1,\dots,\xi_n)\equiv\begin{cases}1,\ j=k,\\ 0,\ j\neq k,\end{cases}\tag{39}$$

где

$$\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1\leqslant j\leqslant\sum_{q=1}^{i}k_q.$$

Левая часть (38) и функции $u_j(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n)$, $\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1\leqslant j\leqslant$ $\leqslant\sum_{q=1}^{i}k_q$, $j=\overline{1,n}$, известны (если считать известной матрицу $\mathbf{R}$). Поэтому (38) можно переписать в виде

$$\int_{x_1^0}^{\xi_1}\cdots\int_{x_{s-1}^0}^{\xi_{s-1}}\int_{x_{s+1}^0}^{\xi_{s+1}}\cdots\int_{x_n^0}^{\xi_n}u_k(x_1,\dots,x_{s-1},\xi_s,x_{s+1},\dots,x_n)\,dx_n\cdots$$
$$\cdots dx_{s+1}dx_{s-1}\cdots dx_1=\Phi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

с известной $\Phi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Отсюда решение задачи Гурса получается в виде

$$u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{\partial^{n-1}\Phi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial\xi_1\cdots\partial\xi_{s-1}\partial\xi_{s+1}\cdots\partial\xi_n}.\tag{40}$$

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 2.1. *Решение задачи Гурса* (27), (30) *существует, единственно и дается формулой* (40).

2.2.2. Задача Коши. Через точку $M(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\in D_0$ проведем плоскости $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2$, …, $x_n=\xi_n$. Обозначим D_1 часть D_0, ограниченную плоскостями $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2$, …, $x_n=\xi_n$; D_{1i} — пересечение D_1 с плоскостью $x_i=\xi_i$. Тогда $\partial D_1=S_1^0\cup(\cup_{i=1}^n D_{1i})$, где S_1^0 является частью S^0. Снова считая в тождестве (35) $\mathbf{U}$ решением системы (27), проинтегрируем (35) по области D_1. Согласно общей формуле Стокса, получаем

$$\int_{D_1}\mathbf{RF}\,dx_1\cdots dx_n=$$
$$=\int_{\partial D_1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\mathbf{RA}_i\mathbf{U}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n.\tag{41}$$

Построчная запись (41) дает

$$\int_{D_1}\Big(\sum_{i=1}^{m}r_{ki}f_i\Big)dx_1\cdots dx_n=$$
$$=\sum_{l=1}^{n}\int_{D_{1l}}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q}r_{kj}u_j\Big)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n+$$

$$+\int_{S_1^0}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\Bigg)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

Очевидно,

$$\int_{D_{1l}}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\Bigg)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n =$$

$$=\int_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\Bigg(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\Bigg)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

Отсюда

$$\int_{D_1}\Bigg(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\Bigg)dx_1\cdots dx_n =$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\int_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\Bigg(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\Bigg)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\cdots\wedge dx_n +$$

$$+\int_{S_1^0}\Bigg(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\Bigg)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n. \quad (42)$$

В силу (39) формулу (42) можно записать в виде

$$\int_{D_{1s}} u_k dx_1\cdots dx_{s-1}dx_{s+1}\cdots dx_n = \Psi_k(\xi_1,\ldots,\xi_n), \quad (43)$$

где Ψ_k выражается через элементы $\mathbf{R}$ и данные Коши. Преобразуя интеграл по $(n-1)$-мерному многообразию D_{1s} в повторный и дифференцируя (43) по ξ_1, …, ξ_{s-1}, ξ_{s+1}, …, ξ_n, получим искомое решение задачи Коши $u_k(\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. *Решение задачи Коши* (27), (32) *существует, единственно и определяется по формуле* (43).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Введение написано совместно А.Н. Мироновым и Л.Б. Мироновой. Раздел 1 написан совместно А.Н. Мироновым и Ю.О. Яковлевой. Раздел 2 написан Л.Б. Мироновой. Идея написания обзора принадлежит А.Н. Миронову. Обсуждение содержания и структуры обзора проводилось совместно всеми авторами. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895. vol. 4, no. 1. pp. 89–99, 133–142 (In Italian).
2. Niccoletti O. Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore // *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895. vol. 4, no. 1. pp. 330–337 (In Italian).
3. Бондаренко Б. А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* Ташкент: Фан, 1987. 146 с.
4. Фаге М. К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // *Тр. Моск. матем. об-ва*, 1958. Т. 7. С. 227–268.
5. Фаге М. К., Нагнибида Н. И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* Новосибирск: Наука, 1987. 260 с.
6. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
7. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 287 с.
8. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* Казань: Казанск. матем. общ-во, 2001. 226 с.
9. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доминирующей частной производной.* Казань: Казанск. ун-т, 2001. 385 с.
10. Джохадзе О. М. Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 1. С. 58–68.
11. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* М., Л.: Гостехиздат, 1948. 296 с.
12. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // *ПММ*, 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
13. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // *Докл. АН СССР*, 1960. Т. 132, № 3. С. 545–548.
14. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement / *L'Eau et la Production Végétale.* vol. 9. Paris: INRA, 1964. pp. 27–62.
15. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 547–552.
16. Сердюкова С. И. Экзотическая асимптотика для линейного гиперболического уравнения // *Докл. РАН*, 2003. Т. 389, № 3. С. 305–309.
17. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena. I. // *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, N. Ser.*, 1968. vol. 14(18), no. 1–2. pp. 433–436.
18. Mangeron D., Oğuztöreli M. N. Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an F-equation // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1970. vol. 67, no. 3. pp. 1488–1492. `https://doi.org/10.1073/pnas.67.3.1488`.
19. Кулаев Р. Ч., Шабат А. Б. Система Дарбу и разделение переменных в задаче Гурса для уравнения третьего порядка в $\mathbb{R}^3$ // *Изв. вузов. Математика*, 2020. № 4. С. 43–53. `https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-43-53`.
20. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1933. vol. 19. pp. 852–854.
21. Corduneanu A. About the equation $u_{xyz} + cu = g$ // *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1974. vol. 20(24), no. 1–2. pp. 103–109.

22. Florian H., Püngel J., Wallner H. Darstellungen von Riemannfunction for $\dfrac{\partial^n w}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_n} + c(z_1, \ldots, z_n)w = 0$ // *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz*, 1983. vol. 204. 29 pp. (In German)
23. Lahaye E. La méthode de Riemann appliquee à la résolution d'une categorie d'équations linéaires du troisieme ordre // *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1946. vol. 31. pp. 479–494 (In French).
24. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // *J. Differ. Equ.*, 1972. vol. 12, no. 3. pp. 559–565. https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3.
25. Easwaran S. On the positive definiteness of polyvibrating operators of Mangeron // *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973. vol. 59, no. 7. pp. 563–569.
26. Easwaran S. Mangeron's polyvibrating operators and their eigenvalues // *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973. vol. 59, no. 10. pp. 1011–1015.
27. Oğuztöreli M. N. Boundary value problems for Mangeron's equations. I // *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1973. vol. 19(23), no. 3–4. pp. 81–85.
28. Radochová V. Die Lösing der partiellen Differentialgleihung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedinungen // *Časopis pro pěstování matematiky*, 1973. vol. 98, no. 4. pp. 389–397 (In German). http://eudml.org/doc/21186.
29. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977. vol. 63, no. 1. pp. 77–81. https://doi.org/10.2307/2041069.
30. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncilindrical domains // *J. Differ. Equ.*, 1978. vol. 27, no. 3. pp. 394–404. https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90059-1.
31. Rundell W. The Stefan problem for a pseudo-heat equation // *Indiana Univ. Math. J.*, 1978. vol. 27, no. 5. pp. 739–750. https://www.jstor.org/stable/24892297.
32. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979. vol. 76, no. 2. pp. 253–257. https://doi.org/10.2307/2042998.
33. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
34. Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А. М. Нахушева // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 163–166.
35. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
36. Шхануков М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // *ДАН СССР*, 1982. Т. 265, № 6. С. 1327–1330.
37. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка и экстремальных свойствах их решений // *ДАН СССР*, 1982. Т. 267, № 3. С. 567–570.
38. Джохадзе О. М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // *Диффер. уравн.*, 1996. Т. 32, № 4. С. 523–535.
39. Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // *Матем. заметки*, 2003. Т. 74, № 4. С. 517–528. https://doi.org/10.4213/mzm282.
40. Корзюк В. И. Граничная задача для уравнения Манжерона третьего порядка // *Диффер. уравн.*, 1997. Т. 33, № 12. С. 1683–1690.
41. И. Г. Мамедов Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009. Т. 49, № 1. С. 99–110.
42. И. Г. Мамедов Об одной задаче Гурса в пространстве Соболева // *Изв. вузов. Математика*, 2011. № 2. С. 54–64.

43. И. Г. Мамедов Неклассический аналог задачи Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // *Матем. заметки*, 2014. Т. 96, № 2. С. 251–260. https://doi.org/10.4213/mzm8569.
44. Bandaliyev R. A., Guliyev V. S., Mamedov I. G., Rustamov Y. I. Optimal control problem for Bianchi equation in variable exponent Sobolev spaces // *J. Optim. Theory Appl.*, 2019. vol. 180, no. 1. pp. 303–320. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1290-9.
45. Мамедов И. Г., Марданов М. Д., Меликов Т. К., Бандалиев Р. А. О корректной разрешимости задачи Неймана для обобщенного уравнения Манжерона с негладкими коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 10. С. 1405–1415.
46. Фаге М. К. Задача Коши для уравнения Бианки // *Матем. сб.*, 1958. Т. 45(87), № 3. С. 281–322.
47. Жегалов В. И. Трехмерный аналог задачи Гурса / *Неклассические задачи и уравнения смешанного типа.* Новосибирск, 1990. С. 94–98.
48. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // *Диффер. уравн.*, 1996. Т. 32, № 10. С. 1429–1430.
49. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. *Задача Гурса в n-мерном пространстве*: Сибирский матем. журн. Деп. в ВИНИТИ 08.07.97 № 2290–В97. Новосибирск, 1997. 4 с.
50. Жегалов В. И. О трехмерной функции Римана // *Сибирский матем. журн.*, 1997. Т. 38, № 5. С. 1074–1079.
51. Жегалов В. И., Котухов М. П. Об интегральных уравнениях для функции Римана // *Изв. вузов. Математика*, 1998. № 1. С. 26–30.
52. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // *Изв. вузов. Математика*, 1999. № 10. С. 73–76.
53. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // *Изв. вузов. Математика*, 2001. № 11. С. 77–81.
54. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными // *Диффер. уравн.*, 2002. Т. 38, № 1. С. 93–97.
55. Севастьянов В. А. Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // *Изв. вузов. Математика*, 1997. № 5. С. 69–73.
56. Севастьянов В. А. Об одном случае задачи Коши // *Диффер. уравн.*, 1998. Т. 34, № 12. С. 1706–1707.
57. Уткина Е. А. *Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка*: Дифференц. уравн. Деп. в ВИНИТИ 28.06.99 № 2059–В99. Минск, 1999. 13 с.
58. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 1999. № 7. С. 78–80.
59. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 12. С. 1698–1701.
60. Уткина Е. А. Об одном дифференциальном уравнении со старшей частной производной в трехмерном пространстве // *Диффер. уравн.*, 2005. Т. 41, № 5. С. 697–701.
61. Уткина Е. А. К общему случаю задачи Гурса // *Изв. вузов. Математика*, 2005. № 8. С. 57–62.
62. Уткина Е. А. Повышение порядка нормальных производных в граничных условиях задачи Гурса // *Изв. вузов. Математика*, 2007. № 3. С. 79–83.
63. Миронов А. Н. О методе Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ / *Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского.* Т. 19. Казань: Казанское матем. общ-во, 2003. С. 154–155.
64. Миронов А. Н. Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // *Сибирский матем. журн.*, 2006. Т. 47, № 3. С. 584–594.
65. Миронов А. Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. № 2(15). С. 27–32. https://doi.org/10.14498/vsgtu526.

66. Жегалов В. И., Миронов А. Н. К пространственным граничным задачам для гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 3. С. 364–371.
67. Миронов А. Н. Применение метода Римана к факторизованному уравнению в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2012. № 1. С. 54–60.
68. Миронова Л. Б. Задача для факторизованного уравнения с псевдопараболическим дифференциальным оператором // *Изв. вузов. Математика*, 2020. № 8. С. 44–49. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-8-44-49.
69. Миронов А. Н. О построении функций Римана для двух уравнений со старшими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 49–59. https://doi.org/10.14498/vsgtu444.
70. Миронов А. Н. О функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2010. № 3. С. 23–27.
71. Миронов А. Н. О построении функции Римана для одного уравнения со старшей частной производной пятого порядка // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 2. С. 266–272. 13044911.
72. Жегалов В. И. К случаям разрешимости гиперболических уравнений в терминах специальных функций / *Неклассические уравнения математической физики.* Новосибирск, 2002. С. 73–79.
73. Жегалов В. И. О случаях разрешимости гиперболических уравнений в квадратурах // *Изв. вузов. Математика*, 2004. № 7. С. 47–52.
74. Кощеева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2008. № 9. С. 40–46.
75. Жегалов В. И. Решение уравнений Вольтерры с частными интегралами с помощью дифференциальных уравнений // *Диффер. уравн.*, 2008. Т. 44, № 7. С. 874–882.
76. Жегалов В. И., Сарварова И. М. Об одном подходе к решению интегральных уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами // *Изв. вузов. Математика*, 2011. № 7. С. 28–36.
77. Миронова Л. Б. О методе Римана в $\mathbb{R}^n$ для одной системы с кратными характеристиками // *Изв. вузов. Математика*, 2006. № 1. С. 34–39.
78. Миронова Л. Б. О характеристических задачах для одной системы с двукратными старшими частными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 31–37. https://doi.org/10.14498/vsgtu450.
79. Жегалов В. И., Миронова Л. Б. Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными // *Изв. вузов. Математика*, 2007. № 3. С. 12–21.
80. Созонтова Е. А. О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа // *Изв. вузов. Математика*, 2013. № 10. С. 43–54.
81. Миронова Л. Б. Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве // *Изв. вузов. Математика*, 2019. № 6. С. 48–57. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-48-57.
82. Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // *Матем. заметки*, 2017. Т. 102, № 1. С. 64–71. https://doi.org/10.4213/mzm11395.
83. Миронов А. Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 3. С. 349–363. https://doi.org/10.31857/S0374064121030067.
84. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 3. pp. 400–406. https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.
85. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. *Функция Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.* Самара: Самар. ун-т, 1995. 76 с.
86. Волкодавов В. Ф., Захаров В. Н. *Функция Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения.* Самара: СамГПУ, 1996. 51 с.

87. Андреев А. А. *Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа*: Дисс. … канд. ф.-м. н., специальность 01.01.02. Куйбышев, 1981. 100 с.
88. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* М.: Наука, 1981. 448 с.
89. Зорич В. А. *Математический анализ.* Ч. 1. М.: Наука, 1981. 544 с.
90. Андреев А. А., Яковлева Ю. О. Задача Гурса для одной системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка с двумя независимыми переменными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 3(24). С. 35–41. `https://doi.org/10.14498/vsgtu996`.
91. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
92. Яковлева Ю. О., Тарасенко А. В. Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2019. Т. 25, № 3. С. 33–38. `https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38`.
93. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre // *Arkiv för mat., astr. och fys.*, 1910. vol. 6, no. 2. pp. 1–10 (In French).
94. Бурмистров Б. Н. Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе / Тр. сем. по краев. задачам, Т. 8. Казань: Казанск. ун-т, 1971. С. 41–54.
95. Чекмарев Т. В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 9. С. 1614–1622.
96. Чекмарев Т. В. *Системы уравнений смешанного типа.* Нижний Новгород: Нижегородский гос. техн. ун-т, 1995. 199 с.
97. Бицадзе А. В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных первого порядка // *Матем. моделирование*, 1994. Т. 6, № 6. С. 22–31.
98. Романовский Р. К. О матрицах Римана первого и второго рода // *Матем. сб.*, 1985. Т. 127(169), № 4(8). С. 494–501.
99. Романовский Р. К. Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными // *Матем. сб.*, 1987. Т. 133(175), № 3(7). С. 341–355.
100. Воробьева Е. В., Романовский Р. К. Метод характеристик для гиперолических краевых задач на плоскости // *Сиб. матем. журн.*, 2000. Т. 41, № 3. С. 531–540.
101. Романовский Р. К., Медведев Ю. А. Оптимальное двустороннее граничное управление теплопереносом в стержне. Гиперболическая модель // *Изв. вузов. Математика*, 2016. № 6. С. 54–60.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1853

MSC: 35L25, 35L40

The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review)

© *A. N. Mironov*[1,2], *L. B. Mironova*[1], *Yu. O. Yakovleva*[2]

[1] Kazan Federal (Volga Region) Federal University,
Yelabuga Institute,
89, Kazanskaya str., Yelabuga, 423600, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

This review article is devoted to a class of linear equations with a dominant (leading) partial derivative of the form $(D + M)u = f$, where Du is a mixed partial derivative, and M is a linear differential operator containing the derivatives of the function u obtained from D by discarding at least one differentiation. We can point out the structural similarity of such linear equations with linear ordinary differential equations. We present the Riemann method for linear equations with a dominant partial derivative, which is a natural generalization of the well-known Riemann method for a second-order hyperbolic equation with two independent variables.

The article deals with the main provisions of the theory developed for the equation with the dominant partial derivative of the general form, allowing the interested reader to apply the obtained results to the task that interests him. The definition of the Riemann function as a solution of the Volterra integral equation is given. The main differential identity is discussed, and the process of obtaining a formula for solving the Cauchy problem in terms of the Riemann function by integrating the specified identity over the corresponding domain in n-dimensional space is demonstrated. An example of constructing a solution to the Cauchy problem for the third-order equation is given.

The Riemann method is described below for a fairly wide class of linear systems of hyperbolic equations (including those with multiple character-

Review Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Mironov A. N., Mironova L. B., Yakovleva Yu. O. The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review), *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240. https://doi.org/10.14498/vsgtu1853 (In Russian).

Authors' Details:

Alexei N. Mironov https://orcid.org/0000-0002-8818-286X
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematics and Applied Computer Science[1]; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: miro73@mail.ru

Lyubov B. Mironova https://orcid.org/0000-0002-3299-2601
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics and Applied Computer Science[1]; e-mail: lbmironova@yandex.ru

Yulia O. Yakovleva https://orcid.org/0000-0002-9839-3740
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: julia.yakovleva@mail.ru

 © Samara State Technical University

istics). This method is ideologically very close to the Riemann method for linear equations with a dominant partial derivative.

Applications of the Riemann method to the study of new problems for partial differential equations are discussed. In particular, using the Riemann method, the correctness of new boundary value problems for factorized hyperbolic equations is proved, the solvability of integral equations with partial integrals is investigated, and a certain modification of the Riemann method allows us to develop the Riemann–Hadamard method for Darboux problems. The explicit representation of solutions of hyperbolic systems in terms of the Riemann matrix allows us to study new boundary value problems, in particular, problems with the assignment of normal derivatives of the desired functions on the characteristics, problems with conditions on the entire boundary of the domain, and Darboux problems.

The Riemann method described here for linear equations with a dominant partial derivative is obviously transferred to matrix equations. In this regard, some cases are indicated when the Riemann matrix is constructed explicitly (in terms of hypergeometric functions) for such matrix equations.

The paper provides a review of the literature, briefly describes the history of the development of this direction in Russia and in foreign countries.

Keywords: Riemann method, Riemann function, Riemann matrix, Cauchy problem, Goursat problem, Darboux problem, partial differential equation with dominant derivative, hyperbolic equation, hyperbolic system, Bianchi equation, Vekua equation, Hallaire equation, Barenblatt–Zheltov–Kochina equation, Boussinesq–Love equation.

Received: 15th March, 2021 / Revised: 28th April, 2021 / Accepted: 11th May, 2021 / First online: 18th May, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship or publication of this paper.

Author's Responsibilities. The introduction was written jointly by A.N. Mironov and L.B. Mironova. The 1st section was written jointly by A.N. Mironov and Yu.O. Yakovleva. The 2nd section was written by L.B. Mironova. The idea of writing this review belongs to A.N. Mironov. The discussion of the content and structure of the review article was carried out jointly by all authors. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore, *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895, vol. 4, no. 1, pp. 89–99, 133–142 (In Italian).
2. Niccoletti O. Sull'estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore, *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1895, vol. 4, no. 1, pp. 330–337 (In Italian).
3. Bondarenko B. A. *Bazisnye sistemy polinomial'nykh i kvazipolinomial'nykh reshenii uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Basic Systems of Polynomial and Quasi-Polynomial Solutions of Partial Differential Equations]. Tashkent, Fan, 1987, 146 pp. (In Russian)
4. Fage M. K. Operator-analytic functions of one independent variable, *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1958, vol. 7, pp. 227–268 (In Russian).

5. Fage M. K., Nagnibida N. I. *Problema ekvivalentnosti obyknovennykh lineinykh differentsial'nykh operatorov* [The Equivalence Problem of Ordinary Linear Differential Operators]. Novosibirsk, Nauka, 1987, 260 pp. (In Russian)
6. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. Shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
7. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)
8. Zhegalov V. I., Mironov A. N. *Differentsial'nye uravneniia so starshimi chastnymi proizvodnymi* [Differential Equations with Higher Partial Derivatives]. Kazan, Kazan Math. Society, 2001, 226 pp. (In Russian)
9. Zhegalov V. I., Mironov A. N., Utkina E. A. *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi* [Equations with Leading Partial Derivative]. Kazan, Kazan Univ., 2014, 385 pp. (In Russian)
10. Dzhokhadze O. M. Laplace invariants for some classes of linear partial differential equations, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 63–74. `https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000028714.62481.2d`.
11. Vekua I. N. *New methods for Solving Elliptic Equations*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 1. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1967, xii+358 pp.
12. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Konina I. N. On the basic concepts of filtration theory in fractured media, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 58–73 (In Russian).
13. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P. Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks, *Sov. Phys., Dokl.*, 1960, vol. 5, pp. 522–525.
14. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement, In: *L'Eau et la Production Végétale*, vol. 9. Paris, INRA, 1964, pp. 27–62.
15. Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Boundary-value-problems with a Samarsky, A. A. general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations, *Dokl. Math.*, 1988, vol. 36, no. 3, pp. 507–511.
16. Serdyukova S. I. Exotic asymptotics for a linear hyperbolic equation, *Dokl. Math.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 203–207.
17. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena. I., *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, N. Ser.*, 1968, vol. 14(18), no. 1–2, pp. 433–436.
18. Mangeron D., Oğuztöreli M. N. Darboux problem for a polyvibrating equation: Solution as an F-equation, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1970, vol. 67, no. 3, pp. 1488–1492. `https://doi.org/10.1073/pnas.67.3.1488`.
19. Kulaev R. C., Shabat A. B. Darboux system and separation of variables in the Goursat problem for a third order equation in $\mathbb{R}^3$, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2020, vol. 64, no. 4, pp. 35–43. `https://doi.org/10.3103/S1066369X20040040`.
20. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1933, vol. 19, pp. 852–854.
21. Corduneanu A. About the equation $u_{xyz} + cu = g$, *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1974, vol. 20(24), no. 1–2, pp. 103–109.
22. Florian H., Püngel J., Wallner H. Darstellungen von Riemannfunction for $\dfrac{\partial^n w}{\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_n} + c(z_1, \ldots, z_n)w = 0$, *Ber. Math.-Stat. Sekt. Forschungszent. Graz*, 1983, vol. 204, 29 pp. (In German)
23. Lahaye E. La méthode de Riemann appliquee à la résolution d'une categorie d'équations linéaires du troisieme ordre, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1946, vol. 31, pp. 479–494 (In French).
24. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable, *J. Differ. Equ.*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 559–565. `https://doi.org/10.1016/0022-0396(72)90025-3`.

25. Easwaran S. On the positive definiteness of polyvibrating operators of Mangeron, *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973, vol. 59, no. 7, pp. 563–569.
26. Easwaran S. Mangeron's polyvibrating operators and their eigenvalues, *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Ser.*, 1973, vol. 59, no. 10, pp. 1011–1015.
27. Oğuztöreli M. N. Boundary value problems for Mangeron's equations. I, *Bul. Inst. Politeh. Iaşi, Secţ. I*, 1973, vol. 19(23), no. 3–4, pp. 81–85.
28. Radochová V. Die Lösing der partiellen Differentialgleihung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedinungen, *Časopis pro pěstování matematiky*, 1973, vol. 98, no. 4, pp. 389–397 (In German). `http://eudml.org/doc/21186`.
29. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, vol. 63, no. 1, pp. 77–81. `https://doi.org/10.2307/2041069`.
30. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncilindrical domains, *J. Differ. Equ.*, 1978, vol. 27, no. 3, pp. 394–404. `https://doi.org/10.1016/0022-0396(78)90059-1`.
31. Rundell W. The Stefan problem for a pseudo-heat equation, *Indiana Univ. Math. J.*, 1978, vol. 27, no. 5, pp. 739–750. `https://www.jstor.org/stable/24892297`.
32. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 76, no. 2, pp. 253–257. `https://doi.org/10.2307/2042998`.
33. Vogahova V. A. A boundary value problem with A. M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 280–285 (In Russian).
34. Vogahova V. A. A boundary value problem for a third-order equation with the nonlocal condition of A. M. Nakhushev, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 163–166 (In Russian).
35. Shkhanukov M. Kh. Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (In Russian).
36. Shkhanukov M. Kh. On a method of solving boundary value problems for third order equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 6, pp. 272–275.
37. Shkhanukov M. Kh. On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions, *Sov. Math., Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 3, pp. 675–678.
38. Dzhokhadze O. M. A Darboux-type problem for a third-order equation with dominating lowest terms, *Differ. Equ.*, 1996, vol. 32, no. 4, pp. 524–537.
39. Dzhokhadze O. M. Influence of lower terms on the well-posedness of characteristics problems for third-order hyperbolic equations, *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 4, pp. 491–501. `https://doi.org/10.1023/A:1026139709809`.
40. Korzyuk V. I. A boundary value problem for a third-order Mangeron equation, *Differ. Equ.*, 1997, vol. 33, no. 12, pp. 1686–1694.
41. Mamedov I. G. A fundamental solution to the Cauchy problem for a fourth-order pseudoparabolic equation, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 1, pp. 93–104. `https://doi.org/10.1134/S0965542509010072`.
42. Mamedov I. G. One Goursat problem in a Sobolev space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 2, pp. 46–55. `https://doi.org/10.3103/S1066369X1102006X`.
43. Mamedov I. G. Nonclassical analog of the Goursat problem for a three-dimensional equation with highest derivative, *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 2, pp. 239–247. `https://doi.org/10.1134/S0001434614070256`.
44. Bandaliyev R. A., Guliyev V. S., Mamedov I. G., Rustamov Y. I. Optimal control problem for Bianchi equation in variable exponent Sobolev spaces, *J. Optim. Theory Appl.*, 2019, vol. 180, no. 1, pp. 303–320. `https://doi.org/10.1007/s10957-018-1290-9`.
45. Mamedov I. G., Mardanov M. D., Melikov T. K., Bandaliev R. A. Well-posed solvability of the Neumann problem for a generalized mangeron equation with nonsmooth coefficients, *Differ. Equ.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1362–1372. `https://doi.org/10.1134/S0012266119100112`.

46. Fage M. K. The Cauchy problem for Bianchi's equation, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 45(87), no. 3, pp. 281–322 (In Russian).
47. Zhegalov V. I. A three-dimensional analog of the Goursat problem, In: *Neklassicheskie zadachi i uravneniia smeshannogo tipa* [Nonclassical Equations and Equations of Mixed Type]. Novosibirsk, 1990, C. 94–98 (In Russian).
48. Zhegalov V. I., Sevast'yanov V. A. The Goursat problem in four-dimensional space, *Differ. Equ.*, 1996, vol. 32, no. 10, pp. 1427–1428.
49. Zhegalov V. I., Sevast'yanov V. A. *The Goursat problem in n-dimensional space*, Siberian Math. J., Deposited at VINITI, 08 Jule 1997, no 2290–B97. Novosibirsk, 1997, 4 pp. (In Russian)
50. Zhegalov V. I. On the three-dimensional Riemann function, *Siberian Math. J.*, 1997, vol. 38, no. 5, pp. 929–934. `https://doi.org/10.1007/BF02673035`.
51. Zhegalov V. I., Kotukhov M. P. On integral equations for the Riemann function, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1998, vol. 42, no. 1, pp. 24–28.
52. Zhegalov V. I., Utkina E. A. Pseudoparabolic equation of the third order, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1999, vol. 43, no. 10, pp. 70–73.
53. Zhegalov V. I., Utkina E. A. The Goursat problem for a three-dimensional equation with a higher derivative, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2001, vol. 45, no. 11, pp. 74–78.
54. Zhegalov V. I., Utkina E. A. On a fourth-order partial differential equation with three independent variables, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 1, pp. 99–103. `https://doi.org/10.1023/A:1014811811530`.
55. Sevast'yanov V. A. The Riemann method for a three-dimensional hyperbolic equation of third order, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 66–70.
56. Sevast'yanov V. A. On a certain case of the Cauchy problem, *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 12, pp. 1716–1717.
57. Utkina E. A., Differ. Equ., Deposited at VINITI, 28 June 1999, no 2059–B99. Minsk, 1999, 13 pp. (In Russian)
58. Mironov A. N. On construction of the Riemann function for certain equation in n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1999, vol. 43, no. 7, pp. 75–77.
59. Mironov A. N. The construction of the Riemann function for a fourth-order equation, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 12, pp. 1787–1791. `https://doi.org/10.1023/A:1014435727536`.
60. Utkina E. A. On a differential equation with a higher-order partial derivative in three-dimensional space, *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 733–738. `https://doi.org/10.1007/s10625-005-0208-0`.
61. Utkina E. A. On the general case of the Goursat problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005, vol. 49, no. 8, pp. 53–58.
62. Utkina E. A. Increase of order of normal derivatives in the Goursat boundary value problem, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 76–81. `https://doi.org/10.3103/S1066369X07040093`.
63. Mironov A. N. On the Riemann method for equations with leading partial derivative in $\mathbb{R}^n$, In: *Trudy Matematicheskogo Tsentra Lobachevskogo*, vol. 19. Kazan, Kazan Math. Society, 2003, pp. 154–155 (In Russian).
64. Mironov A. N. The Riemann method for equations with leading partial derivative in $\mathbb{R}^n$, *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 481–490. `https://doi.org/10.1007/s11202-006-0060-3`.
65. A. N. Mironov On Riemann method for solving a mixed problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2007, no. 2(15), pp. 27–32 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu526`.
66. Zhegalov V. I., Mironov A. N. A remark on spatial boundary value problems for hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 367–374. `https://doi.org/10.1134/S0012266110030067`.

67. Mironov A. N. Application of the riemann method to a factorized equation in an n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 48–54. https://doi.org/10.3103/S1066369X12010070.
68. Mironova L. B. A problem for a factorized equation with a pseudoparabolic differential operator, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2020, vol. 64, no. 8, pp. 37–41. https://doi.org/10.3103/S1066369X20080058.
69. Mironov A. N. Riemann function formulation for two equations with leading partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 49–59 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu444.
70. Mironov A. N. The Riemann function for one equation in an n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, vol. 54, no. 3, pp. 19–23. https://doi.org/10.3103/S1066369X10030047.
71. Mironov A. N. On the construction of the Riemann function for an equation with leading fifth partial derivative, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 2, pp. 270–276. 15330223. https://doi.org/10.1134/S0012266110020114.
72. Zhegalov V. I. On solvability of hyperbolic equations in terms of special functions, In: *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, 2002, pp. 73–79 (In Russian).
73. Zhegalov V. I. The solvability of hyperbolic equations in quadratures, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 7, pp. 44–49.
74. Koshcheeva O. A. Construction of the Riemann function for the Bianchi equation in an n-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 9, pp. 35–40. https://doi.org/10.3103/S1066369X08090053.
75. Zhegalov V. I. Solution of Volterra partial integral equations with the use of differential equations, *Differ. Equ.*, 2008, vol. 44, no. 7, pp. 900–908. https://doi.org/10.1134/S0012266108070021.
76. Zhegalov V. I., Sarvarova I. M. One approach to the solution of volterra integral equations with degenerate kernels, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2011, vol. 55, no. 7, pp. 23–29. https://doi.org/10.3103/S1066369X11070048.
77. Mironova L. B. The Riemann method in $\mathbb{R}^n$ for a system with multiple characteristics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2006, vol. 50, no. 1, pp. 32–37.
78. Mironova L. B. On characteristic problem for a system with double higher partial derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 31–37 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu450.
79. Zhegalov V. I., Mironova L. B. One system of equations with double major partial derivatives, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 9–18. https://doi.org/10.3103/S1066369X07030024.
80. Sozontova E. A. Characteristic problems with normal derivatives for hyperbolic systems, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 37–47. https://doi.org/10.3103/S1066369X13100046.
81. Mironova L. B. Application of Riemann method to one system in three-dimensional space, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 6, pp. 42–50. https://doi.org/10.3103/S1066369X19060057.
82. Mironov A. N. Darboux problem for the third-order Bianchi equation, *Math. Notes*, 2017, vol. 102, no. 1, pp. 53–59. https://doi.org/10.1134/S0001434617070069.
83. Mironov A. N. Darboux problem for the fourth-order Bianchi equation, *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 328–341. https://doi.org/10.1134/S001226612103006X.
84. Mironova L. B. Boundary-value problems with data on characteristics for hyperbolic systems of equations, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 400–406. https://doi.org/10.1134/S1995080220030130.

85. Volkodavov V. F., Nikolaev N. Ya., Bystrova O. K., Zakharov V. N. *Funktsiia Rimana dlia nekotorykh differentsial'nykh uravnenii v n-mernom evklidovom prostranstve i ikh primeneniia* [The Riemann Function for Some Differential Equations in n-Dimensional Euclidean Space and their Applications]. Samara, Samara Univ., 1995, 76 c. (In Russian)
86. Volkodavov V. F., Zakharov V. N. *Funktsiia Rimana dlia odnogo klassa differentsial'nykh uravnenii v trekhmernom evklidovom prostranstve i ee primeneniia* [The Riemann Function for a Class of Differential Equations in Three-Dimensional Euclidean Space and its Applications]. Samara, Samara State Pedagogical Univ., 1996, 51 c. (In Russian)
87. Andreev A. A. *Construction of elementary solutions and solution of Cauchy problem for equations and hyperbolic systems of equations*, Ph.D. Thesis (Phys. & Math.) in the specialty 01.01.02 – Differential Equations. Kuibyshev, 1981, 100 pp. (In Russian)
88. Bitsadze A. V. *Some Classes of Partial Differential Equations*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, vol. 4. New York, Gordon & Breach Science Publ., 1988, xi+504 pp.
89. Zorich V. A. *Matematicheskii analiz* [Mathematical Analysis]. Part I. Moscow, Nauka, 1981, 544 pp. (In Russian)
90. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat problem for one hyperbolic system of the third order differential equations with two independent variables, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 3(24), pp. 35–41 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu996`.
91. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, vol. I, Bateman Manuscript Project. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953, xxvi+302 pp.
92. Yakovleva Ju. O., Tarasenko A. V. The solution of Cauchy problem for the hyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya* [Vestnik of Samara University. Natural Science Series], 2019, vol. 25, no. 3, pp. 33–38 (In Russian). `https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-33-38`.
93. Holmgren E. Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, *Arkiv för mat., astr. och fys.*, 1910, vol. 6, no. 2, pp. 1–10 (In French).
94. Burmistrov B. N. Solution of the Cauchy problem by the Riemann method for a system of first order equations with a degeneracy on the boundary, Tr. Semin. Kraev. Zadacham, 8. Kazan, Kazan Univ., 1971, pp. 41–54.
95. Chekmarev T. V. Formulas for solution of the Goursat problem for a linear system of partial differential equations, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 9, pp. 1614–1622 (In Russian).
96. Chekmarev T. V. *Sistemy uravnenii smeshannogo tipa* [Systems of Mixed-Type Equations]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Techn. Univ., 1995, 199 pp. (In Russian)
97. Bitsadze A. V. On structural properties of solutions of hyperbolic systems of partial differential equations of the first order, *Matem. Mod.*, 1994, vol. 6, no. 6, pp. 22–31 (In Russian).
98. Romanovskii R. K. On Riemann matrices of the first and second kind, *Math. USSR-Sb.*, 1986, vol. 55, no. 2, pp. 485–492. `https://doi.org/10.1070/SM1986v055n02ABEH003016`.
99. Romanovskii R. K. Exponentially splittable hyperbolic systems with two independent variables, *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 61, no. 2, pp. 335–349. `https://doi.org/10.1070/SM1988v061n02ABEH003211`.
100. Vorob'eva E. V., Romanovskii R. K. The method of characteristics for hyperbolic boundary value problems on the plane, *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 3, pp. 433–441. `https://doi.org/10.1007/BF02674100`.
101. Romanovskii R. K., Medvedev Y. A. Optimal two-sided boundary control of heat transmission in a rod. Hyperbolic model., *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 45–51. `https://doi.org/10.3103/S1066369X16060062`.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 241–256
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1820

УДК 517.95

Первая краевая задача в прямоугольной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля

© *Ф. Г. Хуштова*

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Для дифференциального уравнения с сингулярным оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и оператором дробного дифференцирования Римана—Лиувилля, действующим по временной переменной, рассматривается краевая задача в прямоугольной области с граничными условиями первого рода. Построено явное представление решения. Единственность решения доказана в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера по временной переменной. Когда порядок дробной производной равен единице, а особенность у оператора Бесселя отсутствует, рассматриваемое уравнение совпадает с уравнением теплопроводности и полученные результаты совпадают с известными соответствующими классическими результатами.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, оператор дробного дифференцирования, оператор Бесселя, цилиндрическая функция, функция типа Миттаг—Леффлера, первая краевая задача.

Получение: 18 августа 2020 г. / Исправление: 18 мая 2021 г. / Принятие: 24 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2021 г.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Хуштова Ф. Г. Первая краевая задача в прямоугольной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 241–256. https://doi.org/10.14498/vsgtu1820.

Сведения об авторе
Фатима Гидовна Хуштова https://orcid.org/0000-0003-4088-3621
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; отдел дробного исчисления; e-mail: khushtova@yandex.ru

© Самарский государственный технический университет

Введение

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < r,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L}u \equiv B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля порядка $0 < \alpha \leqslant 1$, определяемый равенствами [1–3]: $D_{0y}^{\alpha} g(y) = dg/dy$, если $\alpha = 1$ и

$$D_{0y}^{\alpha} g(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(t)}{(y-t)^{\alpha}} dt,$$

если $0 < \alpha < 1$,

$$B_x = x^{-b} \frac{\partial}{\partial x} x^b \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

— оператор Бесселя, $|b| < 1$.

Частным случаем уравнения (1) является уравнение

$$u_{xx}(x,y) + \frac{b}{x} u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0,$$

которое в работе И. А. Киприянова [4, 5] носит название B-параболического уравнения. Дифференциальные уравнения с оператором Бесселя подробно и более полно исследованы в работах И. А. Киприянова и его учеников.

В работе Я. И. Житомирского [6] исследовалась краевая задача в первом квадранте для системы линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P(B,t) u(x,t),$$

где $u(x,t) = \{u_1(x,t), \ldots, u_m(x,t)\}$; $P(B,t)$ — квадратная матрица размера $m \times m$, элементами которой являются полиномы от операторов Бесселя

$$B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{\partial}{\partial x}$$

одного и того же порядка $p \geqslant 0$.

Параболическим и эллиптическим уравнениям с оператором Бесселя посвящены также монографии [7, 8].

Различные краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда оно совпадает с диффузионно-волновым уравнением, то есть $b = 0$, $0 < \alpha < 2$, также богато и обстоятельно исследованы многими авторами. Подробную библиографию можно найти в работах [9–11].

Интерес к изучению уравнения (1) вызван его приложениями при моделировании процессов переноса во фрактальных средах [12–14].

Ранее задача Коши, первая и вторая краевые задачи в неограниченных областях для уравнения (1) были рассмотрены в работах [15–19].

1. Постановка задачи

Пусть $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \{y = T\}$, $\overline{\Omega}$ — замыкание области Ω. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\widetilde{\Omega}$ и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\overline{\Omega})$, $B_x u$, $D_{0y}^{\alpha} u \in C(\widetilde{\Omega})$.

Первая краевая задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{2}$$

$$u(0, y) = u(r, y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — заданная непрерывная функция, $\varphi(0) = \varphi(r) = 0$.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Специальные функции. Далее в работе $J_\nu(z)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода порядка ν [20, с. 132], [21, с. 95]; $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода порядка ν [20, с. 139], [21, с. 129, 131]; $E_{\rho,\mu}(z)$ — функция типа Миттаг—Леффлера [22, с. 117].

Докажем следующее равенство:

$$\frac{2^{2-\nu}}{\Gamma(\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\omega_m z)}{\omega_m^{2-\nu} J_{1+\nu}^2(\omega_m)} = z^{-\nu} - z^{\nu}, \quad 0 < z \leqslant 1, \tag{4}$$

где ω_m — положительные корни уравнения $J_\nu(\omega) = 0$.

Разложим функцию

$$f(z) = z^{-\nu} - z^{\nu}, \tag{5}$$

заданную на полуинтервале $(0; 1]$, в ряд Фурье—Бесселя [20, с. 163]

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu(\omega_m z), \quad \nu > -1/2, \tag{6}$$

где коэффициенты c_m вычисляются по формуле

$$c_m = \frac{2}{J_{1+\nu}^2(\omega_m)} \int_0^1 z J_\nu(\omega_m z) f(z)\, dz, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Ряд (6) сходится к рассматриваемой функции (5), если $-1/2 < \nu < 3/2$ [20, с. 165]. Подставим (5) в (7) и вычислим полученный интеграл с помощью формул (5.3.6) [20, с. 133]. Учитывая поведение функции $J_\nu(x)$ при $x \to 0$ [20, с. 172], найдем

$$\int_0^1 \left[z^{1-\nu} - z^{1+\nu}\right] J_\nu(\omega_m z)\, dz = -\frac{1}{\omega_m}\left[J_{\nu-1}(\omega_m) + J_{\nu+1}(\omega_m)\right] + \frac{\omega_m^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}.$$

Тогда из (7), используя первую из формул (5.3.5) [20, с. 133] и условие

$$J_\nu(\omega_m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

будем иметь

$$c_m = \frac{2^{2-\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{\omega_m^{\nu-2}}{J_{1+\nu}^2(\omega_m)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (6), приходим к (4).

2.2. Интегральное преобразование Станковича. В работе Б. Станковича [24] рассмотрено обобщенное преобразование Ханкеля в виде

$$G(x) = \int_0^\infty \phi(\delta, \mu+1; -x^\delta t) t^\mu g(t)\, dt, \quad \delta > 0, \quad \mu > -1.$$

В работе А. В. Псху [25] (см. также [3, с. 72]) определено преобразование

$$A^{\alpha,\mu} v(y) = y^{\mu-1} \int_0^\infty \phi\left(-\alpha, \mu; -ty^{-\alpha}\right) v(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1, \ \ \mu \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Достаточные условия сходимости интеграла (8) приведены в [3, с. 72]. Если $\mu = 0$, то этот параметр опускается, то есть $A^{\alpha,0} v(y) = A^\alpha v(y)$. Если функция v зависит от нескольких переменных, то переменная, по которой проводится преобразование, обозначается в нижнем индексе, например, $A_y^{\alpha,\mu} v(x,y)$. В работе [26] исследованы различные формы обращения преобразования (8).

Пусть $0 \leqslant \mu \leqslant \alpha$ и $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{-\mu/\alpha} v(y) = v_0 < \infty$. Тогда [3, с. 80]

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} A^{\alpha,\mu} v(y) = v_0. \tag{9}$$

Справедливы формулы [3, с. 84]

$$A^\alpha e^{\lambda y} = y^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda y^\alpha), \tag{10}$$

$$A^{\alpha/2,\alpha/2} \cos \lambda y = y^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda^2 y^\alpha). \tag{11}$$

3. Основные результаты

Обозначим $\beta = (1-b)/2$,

$$G(x,\xi,y) = \frac{2}{r^2} \frac{x^\beta \xi^\beta}{y^{1-\alpha}} \sum_{m=1}^\infty \frac{J_\beta(\lambda_m x) J_\beta(\lambda_m \xi)}{J_{1+\beta}^2(\lambda_m r)} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_m^2 y^\alpha), \tag{12}$$

где λ_m — положительные корни уравнения $J_\beta(\lambda_m r) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$

Теорема 1. *Функция*

$$u(x,y) = \int_0^r \xi^{1-2\beta} G(x,\xi,y) \varphi(\xi)\, d\xi \tag{13}$$

является решением задачи (1)–(3).

Доказательство. Докажем, что функция (13) удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), (3). Для этого сначала покажем, что ряд

(12) и ряды, которые получаются после применения к нему оператора Бесселя по x и дробного дифференцирования по y порядка α, равномерно сходятся. Обозначим через

$$X_m(x) = x^\beta J_\beta(\lambda_m x), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Функции $X_m(x)$ являются собственными функциями уравнения

$$B_x X(x) + \lambda X(x) = 0.$$

В силу ортогональности цилиндрических функций первого рода [21, с. 177] заключаем, что система функций (14) ортогональна с весом $x^{1-2\beta}$:

$$\int_0^r x^{1-2\beta} X_m(x) X_l(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ \dfrac{r^2}{2} J^2_{\beta+1}(\lambda_m r), & m = l. \end{cases} \tag{15}$$

Для больших значений λ справедливо неравенство [27, с. 274]

$$\int_0^\lambda t J^2_\beta(t)\, dt \geqslant K\lambda, \quad K = \text{const} > 0.$$

Из асимптотической формулы для функции $J_\nu(x)$ при $x \to \infty$ [20, с. 172], (15) и последнего неравенства получим, что

$$\frac{r^2}{2} J^2_{\beta+1}(\lambda_m r) = \int_0^r x J^2_\beta(\lambda_m x) dx = \frac{1}{\lambda_m^2} \int_0^{\lambda_m r} t J^2_\beta(t)\, dt \geqslant \frac{rK}{\lambda_m}.$$

Тогда, учитывая асимптотические формулы (5.16.1) [20, с. 172] и (2.24) [22, с. 143] при больших значениях аргументов, для общего члена ряда (12) имеем

$$G_m = O(\lambda_m^{-4}).$$

Используя формулы (5.3.6) [20, с. 133], (1.2.12) [3, с. 15], а также (1.4) [22, с. 118], находим

$$B_x G(x, \xi, y) = -\frac{2}{r^2} \frac{x^\beta \xi^\beta}{y^{1-\alpha}} \sum_{m=1}^\infty \frac{\lambda_m^2 J_\beta(\lambda_m x) J_\beta(\lambda_m \xi)}{J^2_{1+\beta}(\lambda_m r)} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_m^2 y^\alpha), \tag{16}$$

$$D^\alpha_{0y} G(x, \xi, y) = -\frac{2}{r^2} \frac{x^\beta \xi^\beta}{y^{1-\alpha}} \sum_{m=1}^\infty \frac{\lambda_m^2 J_\beta(\lambda_m x) J_\beta(\lambda_m \xi)}{J^2_{1+\beta}(\lambda_m r)} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_m^2 y^\alpha). \tag{17}$$

Общие члены этих рядов будут иметь оценки

$$B_x G_m = O(\lambda_m^{-2}), \quad D^\alpha_{0y} G_m = O(\lambda_m^{-2}).$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (12), (16) и (17).

Подставляя (16) и (17) в уравнение (1), убеждаемся, что оно обращается в тождество.

Чтобы доказать выполнимость условия (2), прежде покажем, что представление функции (12) эквивалентно представлению

$$G(x,\xi,y) = A_y^\alpha g(x,\xi,y),$$

где

$$g(x,\xi,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ys}\widetilde{g}(x,\xi,s)\,ds, \quad \gamma > 0, \tag{18}$$

$$\widetilde{g}(x,\xi,s) = \begin{cases} \Delta(\xi,x,s), & 0 \leqslant \xi \leqslant x, \\ \Delta(x,\xi,s), & x \leqslant \xi \leqslant r, \end{cases} \tag{19}$$

$$\Delta(x,\xi,s) = x^\beta \xi^\beta \frac{I_\beta(\sqrt{s}x)}{I_\beta(\sqrt{s}r)}[I_\beta(\sqrt{s}r)K_\beta(\sqrt{s}\xi) - K_\beta(\sqrt{s}r)I_\beta(\sqrt{s}\xi)]. \tag{20}$$

Определим порядок величины функции $\widetilde{g}(x,\xi,s)$ в интеграле (18). Пусть

$$s = Re^{i\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 < \pi, \quad 0 < \xi < x. \tag{21}$$

Тогда

$$|e^{\sqrt{s}(\xi-r)}| < e^{\sqrt{R}(\xi-r)\cos(\theta/2)}, \quad |\operatorname{sh}\sqrt{s}(r-x)| < e^{\sqrt{R}(r-x)\cos(\theta/2)}.$$

Используя асимптотические формулы (5.16.5) для функций $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ при больших значениях аргумента [20, с. 173] из последних оценок находим

$$|\widetilde{g}(x,\xi,s)| < \mathrm{const}\cdot R^{-1/2}e^{-\sqrt{R}(x-\xi)\cos(\theta/2)}. \tag{22}$$

Так как функция (19) есть однозначная функция переменной s, для вычисления интеграла (18) будем использовать контур, представленный на рис. 1. Полюсами функции $\widetilde{g}(x,\xi,s)$ будут являться нули функции $I_\beta(\sqrt{s}r)$, то есть $s = -\lambda_m^2$, где $\pm\lambda_m$ — корни уравнения $J_\beta(\lambda_m r) = 0$, $m = 1,2,\ldots$ По теореме Коши [28] интеграл (18) есть произведение $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов подынтегральной функции.

При $0 \leqslant \xi \leqslant x$ получаем

$$g(x,\xi,y) = x^\beta\xi^\beta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_\beta(i\lambda_m\xi)[-K_\beta(i\lambda_m r)I_\beta(i\lambda_m x)]}{\left[\frac{d}{ds}I_\beta(\sqrt{s}r)\right]_{s=-\lambda_m^2}} e^{-\lambda_m^2 t},$$

где суммирование ведется по положительным корням уравнения $J_\beta(\lambda_m r) = 0$, занумерованным в порядке их возрастания.

Из равенств

$$\frac{d}{ds}I_\beta(\sqrt{s}r) = \frac{r}{2\sqrt{s}}I'_\beta(\sqrt{s}r)$$

и (5.9.5) [20, с. 145], а также формулы

$$zI'_\beta(z) - \beta I_\beta(z) = zI_{\beta+1}(z),$$

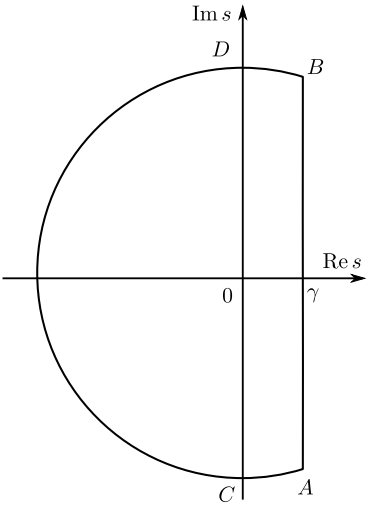


Рис. 1. [Figure 1]

которую легко можно вывести из формул (5.7.9) [20, с. 141], следует

$$g(x,\xi,y)=\frac{2x^{\beta}\xi^{\beta}}{r^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_{\beta}(\lambda_m x)J_{\beta}(\lambda_m \xi)}{J_{1+\beta}^2(\lambda_m r)}e^{-\lambda_m^2 y}. \tag{23}$$

К равенству (23) применим преобразование A^{α} по переменной y по формуле (10). В результате для функции $G(x,\xi,y)$ придем к представлению (12), симметричному относительно x и ξ и в силу последнего верному также при $x\leqslant\xi\leqslant r$.

Контур интегрирования $L=(\gamma-i\infty,\gamma+i\infty)$ в (18) при $y>0$ и $0<\xi<r$ может быть заменен контуром L^*, который начинается в бесконечно удаленной точке в направлении $\arg s=-\theta_1$, где $\pi/2<\theta_1<\pi$, огибает начало координат справа, оставляя все особенности подынтегральной функции слева, и заканчивается в бесконечно удаленной точке в направлении $\arg s=\theta_1$ (рис. 2). Покажем, что интеграл

$$\int e^{ys}\widetilde{g}(x,\xi,s)\,ds$$

по дугам BDF и ECA окружности радиуса R стремится к нулю, когда $R\to\infty$. Учитывая условия (21), можем записать

$$0<e^{-\sqrt{R}(x-\xi)\cos(\theta/2)}<1.$$

Обозначим через I_1 и I_2 интегралы вдоль дуг BD и DF, а на дуге BD положим $\omega=\arccos(\gamma/R)$. Тогда из (22) найдем

$$|I_1|<\mathrm{const}\cdot\sqrt{R}e^{\gamma y}\int_{\omega}^{\pi/2}d\theta=\mathrm{const}\cdot\sqrt{R}e^{\gamma y}\arcsin\frac{\gamma}{R}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{R\to\infty}I_1=0$.

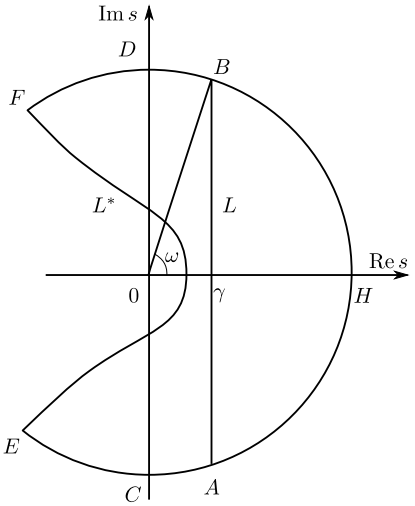


Рис. 2. [Figure 2]

Заменяя в (21) θ_0 через $\theta_1 > \pi/2$ и принимая во внимание оценку $\sin\theta \geqslant \geqslant 2\theta/\pi$, справедливую при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, для интеграла I_2 получим

$$|I_2| < \mathrm{const}\cdot\sqrt{R}\int_{\pi/2}^{\theta_1} e^{Rt\cos\theta}d\theta < \mathrm{const}\cdot\sqrt{R}\int_0^{\theta_1-\pi/2} e^{-Rt\sin\theta}d\theta <$$
$$< \mathrm{const}\cdot\sqrt{R}\int_0^{\pi/2} e^{-2Rt\theta/\pi}d\theta < \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{R}t},$$

откуда $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 = 0$.

Аналогичные результаты можно получить и для интегралов по дугам AC и CE. В силу вышеприведенных рассуждений функцию $g(x,\xi,y)$ можно записать следующим образом:

$$g(x,\xi,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^*} e^{ts}\widetilde{g}(x,\xi,s)\,ds, \tag{24}$$

где $\widetilde{g}(x,\xi,s)$ определяется из (19).

Заметим, что функция $g(x,\xi,y)$ является непрерывной функцией от y при $y \geqslant 0$, $x \neq \xi$, так как в силу оценки (22) при фиксированных $x \neq \xi$ интеграл (24) равномерно сходится при $y \geqslant 0$.

В силу формулы (9) можно записать:

$$\lim_{y\to 0}\int_0^r \xi^{1-2\beta}D_{0y}^{\alpha-1}G(x,\xi,y)\,d\xi =$$
$$= \lim_{y\to 0}\left[\int_0^r \xi^{1-2\beta}g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi + \varphi(x)\int_0^r \xi^{1-2\beta}g(x,\xi,y)\,d\xi\right] =$$
$$= \lim_{y\to 0}[J_1(x,y)+J_2(x,y)].$$

Представим интеграл $J_1(x,y)$ в виде

$$J_1(x,y) = \int_0^{x-\varepsilon} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi +$$
$$+ \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{r} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi =$$
$$= J_{11}(x,y) + J_{12}(x,y) + J_{13}(x,y),$$

где $\varepsilon > 0$.

Так как функция $g(x,\xi,y)$ непрерывна при $y \geqslant 0$, $x \neq \xi$, то

$$\lim_{y\to 0} g(x,\xi,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^*} \widetilde{g}(x,\xi,s)\,ds.$$

Вдоль дуги $FDHAE$ имеет место оценка

$$|\widetilde{g}(x,\xi,s)| < x^{\beta-1/2}\xi^{\beta-1/2}R^{-1/2}e^{-\sqrt{R}(x-\xi)\cos(\theta/2)}. \tag{25}$$

Отсюда следует, что интеграл

$$\int \widetilde{g}(x,\xi,s)\,ds$$

по этой дуге стремится к нулю при $R \to \infty$. Так как внутри замкнутого контура, изображенного на рис. 2, нет полюсов, то имеем

$$\int_{L^*} \widetilde{g}(x,\xi,s)\,ds = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{y\to 0} J_{11}(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} J_{13}(x,y) = 0$.

Пусть $\omega(\varepsilon) = \sup|\varphi(x)-\varphi(\xi)|$, $\xi \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, то $\omega(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Из оценки (25) и произвольности выбора ε получаем $\lim\limits_{y\to 0} J_{12}(x,y) = 0$.

Для вычисления интеграла $J_2(x,y)$ воспользуемся представлением (23). В силу второй из формул (5.3.6) [20, с. 133] поведения функции $J_{\beta-1}(x)$ при $x \to 0$ [20, с. 172] и первой из формул (5.3.5) [20, с. 133] при $\nu = \beta$, а также учитывая, что $J_\beta(\lambda_m r) = 0$, будем иметь

$$\int_0^r \xi^{1-\beta} J_\beta(\lambda_m \xi)d\xi = \frac{r^{1-\beta}}{\lambda_m} J_{\beta+1}(\lambda_m r) + \frac{\lambda_m^{\beta-2}}{2^{\beta-1}\Gamma(\beta)}.$$

Тогда при $y \to 0$ для $J_2(x,y)$ получим

$$\lim_{y\to 0} J_2(x,y) = \frac{2x^\beta\varphi(x)}{r^{1+\beta}\Gamma(\alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_\beta(\lambda_m x)}{\lambda_m J_{1+\beta}(\lambda_m r)} +$$
$$+ \frac{x^\beta\varphi(x)}{r^2\Gamma(\alpha)} \frac{2^{2-\beta}}{\Gamma(\beta)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_\beta(\lambda_m x)}{\lambda_m^{2-\beta} J_{1+\beta}^2(\lambda_m r)}.$$

Отсюда, в силу равенств 5.7.33 (1) [23, с. 610] и (4), окончательно получим $\lim\limits_{y\to 0} J_2(x,y)=\varphi(x)$. □

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (1)–(3), *удовлетворяющего для любого* $x\in(0,r)$ *условию*

$$|u(x,y)-u(x,t)|\leqslant k(y-t)^{\lambda},\quad k=k(x)>0,\ \lambda>\alpha,\ \forall\, y\geqslant t>0. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи

$$\mathbf{L}u\equiv 0 \ \text{ при } \ (x,y)\in\widetilde{\Omega},$$

$$u(0,y)=u(r,y)=0,\ \ 0<y<T \ \text{ и } \ \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant r.$$

Последнее равенство равносильно тому, что

$$\lim_{y\to 0} y^{1-\alpha}u(x,y)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant r.$$

Необходимо показать, что $u(x,y)\equiv 0$ на $\widetilde{\Omega}$. Допустим, что это не так, то есть существует точка $(\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}$ такая, что $u(\xi,\eta)\neq 0$. Не теряя общности, будем считать, что $u(\xi,\eta)>0$. Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} y^{1-\alpha}u(x,y)=\eta^{1-\alpha}u(\xi,\eta)>0,\quad (\xi,\eta)\in\widetilde{\Omega}. \tag{27}$$

В этой точке в силу необходимых условий экстремума имеем

$$u_x(\xi,\eta)=0,\quad u_{xx}(\xi,\eta)\leqslant 0.$$

С другой стороны, в силу условий (26) и (27) из принципа экстремума для оператора дробного дифференцирования следует [29]

$$D_{0y}^{\alpha}u(\xi,y)|_{y=\eta}\geqslant 0,$$

причем равенство в последнем неравенстве возможно только в случае, когда $y^{1-\alpha}u(x,y)=\mathrm{const}$. В последнем случае сразу же заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ на $\widetilde{\Omega}$. Если $y^{1-\alpha}u(x,y)\neq\mathrm{const}$, то $\mathbf{L}u<0$ в точке (ξ,η). Последнее неравенство противоречит условию $\mathbf{L}u(\xi,\eta)=0$. Следовательно, наше допущение неверно, поэтому $u(x,y)\equiv 0$ на $\widetilde{\Omega}$. □

4. Неоднородные граничные условия и частный случай

Решение первой краевой задачи для уравнения (1) в случае, когда $\varphi(x)\equiv 0$ и

$$u(0,y)=\tau_0(y),\quad u(r,y)=\tau_r(y),\quad 0<y<T,$$

может быть представлено в виде

$$u(x,y)=\int_0^y \xi^{1-2\beta}G_{\xi}(x,\xi,y-\eta)\big|_{\xi=0}\tau_0(\eta)\,d\eta-r^{1-2\beta}\int_0^y G_{\xi}(x,r,y-\eta)\tau_r(\eta)\,d\eta.$$

При этом от заданных функций $\tau_0(y)$ и $\tau_r(y)$ нужно требовать выполнения условий $y^{1-\alpha}\tau_0(y)$, $y^{1-\alpha}\tau_r(y) \in C[0,T]$, $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\tau_0(y) = \lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\tau_r(y) = 0$.

Заметим, что в силу первого представления (1.2) [22, с. 118] функция (12) при $\alpha = 1$ примет вид

$$G(x,\xi,y) = \frac{2x^\beta\xi^\beta}{r^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_\beta(\lambda_m x)J_\beta(\lambda_m\xi)}{J_{1+\beta}^2(\lambda_m r)}e^{-\lambda_m^2 y}, \tag{28}$$

а при $\beta = 1/2$ из (5.8.1) и (5.8.2) [20, с. 142] следует

$$G(x,\xi,y) = \frac{2y^{\alpha-1}}{r}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{r}\sin\frac{m\pi\xi}{r}E_{\alpha,\alpha}\Big(-\Big(\frac{m\pi}{r}\Big)^2 y^\alpha\Big). \tag{29}$$

В свою очередь, из (28) при $\beta = 1/2$ и (29) при $\alpha = 1$ получаем функцию

$$G(x,\xi,y) = \frac{2}{r}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{r}\sin\frac{m\pi\xi}{r}\exp\Big(-\Big(\frac{m\pi}{r}\Big)^2 y\Big),$$

которая совпадает с функцией Грина (или функцией мгновенного точечного источника тепла) первой краевой задачи в прямоугольной области для уравнения теплопроводности [30, с. 205], [31, с. 472]. Различные краевые задачи для уравнения теплопроводности, записанного в цилиндрических и сферических координатах, можно найти в работах [30, с. 464], [31, с. 473].

В случае, когда $\beta = 1/2$ ($b = 0$), решение первой краевой задачи в прямоугольной области для уравнения диффузии дробного порядка в терминах функции Райта приведено в работе [3, с. 108]. Эквивалентность представления из этой работы и представления (29) нетрудно показать, используя формулу (11) и проведя рассуждения, аналогичные приведенным в [30, с. 475].

5. Случай $r = \infty$

Устремляя r к бесконечности в (20) и используя асимптотические формулы (5.16.5) [20, с. 173], получаем

$$\Delta(x,\xi,s) = x^\beta\xi^\beta I_\beta\big(\sqrt{s}x\big)K_\beta\big(\sqrt{s}\xi\big).$$

Тогда из формулы (116) [32, с. 590] следует, что функция

$$G(x,\xi,y) = A_y^\alpha g(x,\xi,y), \quad g(x,\xi,y) = \frac{x^\beta\xi^\beta}{2y}\exp\Big(-\frac{x^2+\xi^2}{4y}\Big)I_\beta\Big(\frac{x\xi}{2y}\Big),$$

совпадает с функцией Грина первой краевой задачи для уравнения (1) в полуполосе [18].

Заключение

В данной работе рассматривается краевая задача в прямоугольной области с граничными условиями первого рода для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана—Лиувилля. В терминах специальных функций построено представление решения и доказана его единственность в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера по временной переменной.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарности. Автор благодарит двух анонимных рецензентов за внимательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
4. Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М. О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // *Докл. АН СССР*, 1976. Т. 230, № 6. С. 1271–1274.
5. Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука, 1997. 204 с.
6. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // *Матем. сб.*, 1955. Т. 36(78), № 2. С. 299–310.
7. Матійчук М. І. *Параболічні сингулярні крайові задачі.* Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. 176 с.
8. Матійчук М. І. *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями.* Чернівці: Прут, 2003. 284 с.
9. Псху А. В. Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2017. Т. 81, № 6. С. 158–179. https://doi.org/10.4213/im8520.
10. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* / Mathematics in Science and Engineering. vol. 198. San Diego, CA: Academic Press, 1999. xxiv+340 pp.
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xv+523 pp. https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
12. Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion // *Physica A. Stat. Mech. Appl.*, 1994. vol. 211. pp. 13–24. https://doi.org/10.1016/0378-4371(94)90064-7.
13. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Reports*, 2000. vol. 339, no. 1. pp. 1–77. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
14. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers.* vol. 1: Background and Theory. Berlin: Springer, 2013. xxi+385 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0.

15. Хуштова Ф. Г. Задача Коши для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 74–84. https://doi.org/10.14498/vsgtu1455.
16. Хуштова Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // *Матем. заметки*, 2016. Т. 99, № 6. С. 921–928. https://doi.org/10.4213/mzm10759.
17. Хуштова Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Матем. заметки*, 2018. Т. 103, № 3. С. 460–470. https://doi.org/10.4213/mzm10986.
18. Хуштова Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для дробно-дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля // *Уфимск. матем. журн.*, 2017. Т. 9, № 4. С. 117–128. https://doi.org/10.13108/2017-9-4-114.
19. Хуштова Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 7. С. 84–93.
20. Лебедев Н. Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: Физматлит, 1963. 359 с.
21. Кузнецов Д. С. *Специальные функции.* М.: Высш. шк., 1962. 248 с.
22. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966. 672 с.
23. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды.* Т. 2: Специальные функции. М.: Физматлит, 2003. 664 с.
24. Stanković B. Inversion et invariantes de la transformation généralisée de Hankel // *Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math.*, 1955. vol. 8. pp. 37–52 (In French).
25. Псху А. В. Интегральное преобразование с функцией Райта в ядре // *Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Акад.*, 2002. Т. 6, № 1. С. 35–47.
26. Псху А. В. Об обращении интегрального преобразования Б. Станковича // *Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Акад.*, 2013. Т. 15, № 2. С. 64–67.
27. Толстов Г. П. *Ряды Фурье.* М.: Физматлит, 1960. 390 с.
28. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1965. 716 с.
29. Псху А. В. Краевая задача для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей // *Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. Акад. наук*, 2014. Т. 6, № 2. С. 58–63.
30. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1977. 736 с.
31. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики.* М.: Высш. шк., 1970. 710 с.
32. Лыков А. В. *Теория теплопроводности.* М.: Высш. шк., 1967. 600 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 241–256
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1820

MSC: 26A33, 35K20, 35R11

The first boundary-value problem in a rectangular domain for a differential equation with the Bessel operator and the Riemann–Liouville partial derivative

© *F. G. Khushtova*

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to the first boundary-value problem in a rectangular domain for a differential equation with the singular Bessel operator acting with respect to a spatial variable and the Riemann–Liouville fractional differentiation operator acting with respect to a time variable. An explicit representation of the solution is constructed. The uniqueness of the solution is proved in the class of functions satisfying the Hölder condition with respect to the time variable. When the order of the fractional derivative is equal to unity, and the Bessel operator has no singularity, the studied equation coincides with the heat equation and the obtained results coincide with well-known corresponding classical results.

Keywords: fractional diffusion equation, fractional differentiation operator, Bessel operator, cylindrical function, Mittag–Leffler type function, first boundary-value problem.

Received: 18th August, 2020 / Revised: 18th May, 2021 / Accepted: 24th May, 2021 / First online: 30th June, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript for print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

Acknowledgments. The author thanks two anonymous referees for their careful reading of the article, valuable suggestions and comments.

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Khushtova F. G. The first boundary-value problem in a rectangular domain for a differential equation with the Bessel operator and the Riemann–Liouville partial derivative, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 241–256. https://doi.org/10.14498/vsgtu1820 (In Russian).

Author's Details:
Fatima G. Khushtova https://orcid.org/0000-0003-4088-3621
Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Dept. of Fractional Calculus;
e-mail: khushtova@yandex.ru

 © Samara State Technical University

References

1. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
2. Nakhushev A. M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculus and Its Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp. (In Russian)
3. Pskhu A. V. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka* [Partial Differential Equations of Fractional Order]. Moscow, Nauka, 2005, 199 pp. (In Russian)
4. Kipriyanov I. A., Katrakhov V. V., Lyapin V. M. On boundary value problems in domains of general type for singular parabolic systems of equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, no. 6, pp. 1461–1464.
5. Kipriyanov I. A. *Singuliarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1997, 204 pp. (In Russian)
6. Zhitomirskii Ya. I. Cauchy's problem for systems of linear partial differential equations with differential operators of Bessel type, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1955, vol. 36(78), no. 2, pp. 299–310 (In Russian).
7. Matiichuk M. I. *Parabolichni singuliarni kraiovi zadachi* [Parabolic Singular Boundary-Value Problems]. Kiev, Institute of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences, 1999, 176 pp. (In Ukrainian)
8. Matiichuk M. I. *Parabolichni ta eliptichni kraiovi zadachi z osoblivostiami* [Parabolic and Elliptic Boundary-Value Problems with Singularities]. Chernivtsi, Prut, 2003, 284 pp. (In Ukrainian)
9. Pskhu A. V. The first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in a non-cylindrical domain, *Izv. Math.*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 1212–1233. https://doi.org/10.1070/IM8520.
10. Podlubny I. *Fractional Differential Equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, CA, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp.
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. https://doi.org/10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
12. Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion, *Physica A. Stat. Mech. Appl.*, 1994, vol. 211, pp. 13–24. https://doi.org/10.1016/0378-4371(94)90064-7.
13. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Reports*, 2000, vol. 339, no. 1, pp. 1–77. https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3.
14. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*, vol. 1, Background and Theory. Berlin, Springer, 2013, xxi+385 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0.
15. Khushtova F. G. Cauchy problem for a parabolic equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 74–84 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1455.
16. Khushtova F. G. First boundary-value problem in the half-strip for a parabolic-type equation with Bessel operator and Riemann–Liouville derivative, *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 6, pp. 916–923. https://doi.org/10.1134/S0001434616050308.
17. Khushtova F. G. The second boundary-value problem in a half-strip for a parabolic-type equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 474–482. https://doi.org/10.1134/S0001434618030136.
18. Khushtova F. G. Dirichlet boundary value problem in half-strip for fractional differential equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative, *Ufa Math. J.*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 114–126. https://doi.org/10.13108/2017-9-4-114.

19. Khushtova F. G. Second boundary-value problem in a half-strip for equation of parabolic type with the Bessel operator and Riemann–Liouvulle derivative, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 7, pp. 73–82. https://doi.org/10.3103/S1066369X17070106.
20. Lebedev N. N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniia* [Special Functions and Their Applications]. Moscow, Fizmatlit, 1963, 359 pp. (In Russian)
21. Kuznetsov D. S. *Spetsial'nye funktsii* [Special Functions]. Moscow, Vyssh. shk., 1962, 248 pp. (In Russian)
22. Dzhrbashyan M. M. *Integral'nye preobrazovaniia i predstavleniia funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral Transforms and Representations of Functions in the Complex Domain]. Moscow, Nauka, 1966, 672 pp. (In Russian)
23. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integraly i riady* [Integrals and Series], vol. 2, Spetsial'nye funktsii [Special Functions]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 664 pp. (In Russian)
24. Stanković B. Inversion et invariantes de la transformation généralisée de Hankel, *Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math.*, 1955, vol. 8, pp. 37–52 (In French).
25. Pskhu A. V. Integral transformation with Wright's function in the kernel, *Dokl. Adygskoi (Cherkes.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2002, vol. 6, no. 1, pp. 35–47 (In Russian).
26. Pskhu A. V. On inversion of the Stanković integral transformation, *Dokl. Adygskoi (Cherkes.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2013, vol. 15, no. 2, pp. 64–67 (In Russian).
27. Tolstov G. P. *Riady Fur'e* [Fourier Series]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 390 pp. (In Russian)
28. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables]. Moscow, Nauka, 1965, 716 pp. (In Russian)
29. Pskhu A. V. A boundary-value problem for the partial differential equation of fractional order in a domain with curvilinear boundary, *Dokl. Adygskoi (Cherkes.) Mezhdunar. Akad. Nauk*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 58–63 (In Russian).
30. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977, 736 pp. (In Russian)
31. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki* [Partial Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Vyssh. shk., 1970, 710 pp. (In Russian)
32. Lykov A. V. *Teoriia teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vyssh. shk., 1967, 600 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 257–285
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1810

УДК 517.956.6

Потенциалы для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом и их применение

© *Т. Г. Эргашев*[1,2]

[1] Институт математики имени В. И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4-а.

[2] Ташкентский институт инженеров ирригации
и механизации сельского хозяйства,
Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары-Ниязи, 39.

Аннотация

Рассматривается теория потенциала для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом. В рассмотрение вводятся потенциалы двойного и простого слоев с неизвестной плотностью, которые выражаются через фундаментальное решение названного эллиптического уравнения. При исследовании этих потенциалов используются свойства гипергеометрической функции Гаусса.

Доказаны теоремы о предельных значениях введенных потенциалов и их конормальных производных, которые позволяют эквивалентным образом свести краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений к интегральному уравнению второго рода, к которому применима теория Фредгольма.

В качестве приложения изложенной теории в области, ограниченной координатной плоскостью $x = 0$ и поверхностью Ляпунова при $x > 0$, для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом решается задача Хольмгрена. Единственность решения поставленной задачи доказывается известным методом abc, а существование — методом функции Грина, регулярная часть которой ищется в виде потенциала двойного слоя с временно неизвестной плотностью. Решение задачи Хольмгрена находится в виде, удобном для дальнейших исследований.

Ключевые слова: трехмерное эллиптическое уравнение с одним сингулярным коэффициентом, фундаментальные решения, теория потенциала, функция Грина, задача Хольмгрена.

Получение: 22 июля 2020 г. / Исправление: 4 февраля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 11 июня 2021 г.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Эргашев Т. Г. Потенциалы для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом и их применение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 257–285. https://doi.org/10.14498/vsgtu1810.

Сведения об авторе

Тухтасин Гуламжанович Эргашев https://orcid.org/0000-0003-3542-8309
доктор физико-математических наук; лаб. дифференциальных уравнений и их приложений[1]; доцент; каф. высшей математики[2]; e-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

© Самарский государственный технический университет

Введение. Предварительные сведения

Теория потенциала, имеющая многочисленные приложения в механике жидкости, эластодинамике, электромагнетизме и акустике, позволяет свести краевые задачи для эллиптических уравнений к решению интегральных уравнений, а это, в свою очередь, облегчает процесс исследования краевых задач, особенно, когда рассматриваются задачи для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами [1].

При решении всякой краевой задачи, в том числе при построении теории потенциала, для эллиптических уравнений важную роль играют фундаментальные решения данного уравнения. Фундаментальные решения более обобщенного эллиптического уравнения

$$E^{(m,n)}_{(\alpha,\lambda)}(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\alpha_k}{x_k} u_{x_k} + \lambda u = 0 \tag{1}$$

в области $\mathbb{R}^{n+}_m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, являющейся 2^n-ой частью евклидова пространства $\mathbb{R}_m$, найдены при $\lambda = 0$ в [2], а при наличии параметра λ — в [3]. Здесь m — размерность $\mathbb{R}_m$, n — число сингулярных коэффициентов уравнения (1) ($1 \leqslant n \leqslant m, m \geqslant 2$); $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и λ — действительные числа, причем $0 < 2\alpha_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$. Отметим, что многие авторы [4–10] занимались нахождением фундаментальных решений для различных частных случаев уравнения (1). Кроме того, в работе [11] исследована задача Дирихле для трехмерного уравнения эллиптико-гиперболического типа с тремя сингулярными коэффициентами ($m = n = 3, \lambda = 0$), а в [12] методом оператора преобразования найдено решение задачи Дирихле для уравнения (1) в случае, когда $m = n$.

Пользуясь известными фундаментальными решениями [2], в работе [13] найдено в явном виде решение обобщенной задачи Хольмгрена для уравнения $E^{(m,n)}_{(\alpha,0)}(u) = 0$ в 2^n-ой части многомерного шара, находящейся в $\mathbb{R}^{n+}_m$.

Несмотря на то, что в настоящее время известны фундаментальные решения даже для многомерного (более двумерного) уравнения, такого, как уравнение (1), построение теории потенциала ограничивалось лишь двумерными уравнениями с одним и двумя сингулярными коэффициентами.

В работах [14–16] построена теория потенциала для простейшего сингулярного эллиптического уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1 \tag{2}$$

в области, ограниченной в полуплоскости $x > 0$. Изложение результатов по теории потенциала для двумерного сингулярного эллиптического уравнения (2) со ссылками на оригинальную литературу содержится в монографии Смирнова [17], которая является основным трудом в этой области.

В работах [18–21] установлены некоторые свойства потенциалов двойного слоя, соответствующих четырем фундаментальным решениям обобщенного двуосесимметрического эллиптического уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y = 0, \quad 0 < 2\alpha, \quad 2\beta < 1,$$

в области, ограниченной в первой четверти плоскости xOy.

Относительно мало работ посвящено случаям, когда размерность уравнения превышает два. Отметим лишь работы [10, 22]. Поэтому вопрос исследования потенциалов двойного и простого слоев, хотя бы для трехмерного эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом, является актуальной задачей.

Рассмотрим уравнение

$$E(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1, \tag{3}$$

в полупространстве $x > 0$. В работе [23] доказываются теоремы, позволяющие выявить предельные свойства потенциалов двойного и простого слоев, соответствующих одному из фундаментальных решений уравнения (3), и в качестве приложения полученных результатов исследуется смешанная задача для уравнения (3) в области, ограниченной в полупространстве $x > 0$.

В данной работе, пользуясь другим фундаментальным решением уравнения (3), построим теорию потенциала и применим ее к решению задачи Хольмгрена.

При необходимости будем использовать запись $\mathbb{R}^+_3 = \{(x, y, z) : x > 0\}$ для обозначения полупространства $x > 0$. Прежде чем перейти к изложению основных результатов, приведем необходимые сведения о специальных функциях.

Символ Похгаммера $(t)_n$ при целых n определяется равенством

$$(t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad (t)_0 \equiv 1. \tag{4}$$

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется внутри круга $|t| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда [24, гл. 2, § 2.1, формула (2)]

$$F(a, b; c; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k!(c)_k} t^k, \tag{5}$$

а при $|t| \geqslant 1$ получается аналитическим продолжением этого ряда. В формуле (5) параметры a, b, c и переменная t могут быть комплексными, причем $c \neq 0, -1, \ldots$, а $(t)_k$ — символ Похгаммера (4).

Одно из фундаментальных решений уравнения (3) имеет вид [2]

$$q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} r^{-2\alpha-1} F\Big(\alpha + \frac{1}{2}, \alpha; 2\alpha; \sigma\Big), \tag{6}$$

где

$$0 < 2\alpha < 1, \quad \sigma = 1 - \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \left.\begin{matrix} r_1^2 \\ r^2 \end{matrix}\right\} = (x \pm \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

Эта функция по переменным (x, y, z) является решением уравнения (3), имеет особенность порядка $1/r$ при $r \to 0$ и, следовательно, действительно является фундаментальным решением уравнения (3). Нетрудно видеть, что

$$\Big(x^{2\alpha} \frac{\partial q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = \Big(\xi^{2\alpha} \frac{\partial q(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=0} = 0 \tag{7}$$

для всех y, z, η и ζ.

1. Формулы Грина

Рассмотрим тождество

$$x^{2\alpha}[uE(v)-vE(u)]=\frac{\partial}{\partial x}[x^{2\alpha}(v_xu-vu_x)]+ \\ +x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial y}(v_yu-vu_y)+x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(v_zu-vu_z), \quad (8)$$

интегрируя обе части которого по области D, расположенной в полупространстве $x>0$, и пользуясь формулой Гаусса—Остроградского, получим

$$\iiint\limits_D x^{2\alpha}\big[uE(v)-vE(u)\big]\,dxdydz=\iint\limits_S\big(uB_n^\alpha[v]-vB_n^\alpha[u]\big)\,dS, \quad (9)$$

где S — граница области D, n — внешняя нормаль к поверхности S и

$$B_n^\alpha[\,\cdot\,]=x^{2\alpha}\Big[\cos(n,x)\frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial x}+\cos(n,y)\frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial y}+\cos(n,z)\frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial z}\Big]. \quad (10)$$

Здесь и далее (ради краткости записи) буква n в нижнем индексе обозначения $B_n^\alpha[\,\cdot\,]$ указывает на то, что конормальная производная вычисляется по переменным x, y и z (сравни с определением (15) ниже).

Формула Грина (9) выводится при следующих предположениях:

– функции $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$,
– частные производные второго порядка непрерывны внутри D и интегралы по D, содержащие $E(u)$ и $E(v)$, имеют смысл.

Если $E(u)$ и $E(v)$ не обладают непрерывностью вплоть до S, то это — несобственные интегралы, которые получаются как пределы по любой последовательности областей D_k, которые содержатся внутри D, когда эти области D_k стремятся к D, так что всякая точка, находящаяся внутри D попадает внутрь областей D_k, начиная с некоторого номера k.

Если u и v — решения уравнения (3), то из формулы (9) имеем

$$\iint\limits_S\big(uB_n^\alpha[v]-vB_n^\alpha[u]\big)dS=0. \quad (11)$$

Полагая в формуле (9) $v\equiv 1$ и заменяя u на u^2, получим

$$\iiint\limits_D x^{2\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2\Big]dxdydz=\iint\limits_S uB_n^\alpha[u]dS, \quad (12)$$

где $u\,(x,y,z)$ — решение уравнения (3).

Наконец, из формулы (11), полагая $v\equiv 1$, будем иметь

$$\iint\limits_S B_n^\alpha[u]dS=0, \quad (13)$$

т.е. интеграл от конормальной производной решения уравнения (3) по замкнутой поверхности S области D равен нулю.

2. Потенциал двойного слоя

Пусть Γ — поверхность Ляпунова, лежащая в полупространстве $x > 0$, и пусть D — область, ограниченная односвязной открытой областью X плоскости yOz и поверхностью Γ. Общую границу плоской области X и поверхности Γ обозначим через γ.

Параметрическое уравнение поверхности Γ пусть будет $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$, $(s,t) \in \overline{\Phi}$, где $\Phi := (s_1, s_2) \times (t_1, t_2)$ — область изменения s и t. Тогда параметрическое уравнение плоской кривой γ будет иметь вид $y = y(s, t_0)$, $z = z(s, t_0)$, где $t_0 \in [t_1, t_2]$ — фиксированное число, удовлетворяющее уравнению $x(s, t_0) = 0$ при любых значениях $s \in [s_1, s_2]$. Относительно поверхности Γ будем предполагать, что:

1) функции $x(s,t)$, $y(s,t)$ и $z(s,t)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по s и t в $\overline{\Phi}$, не обращающиеся одновременно в нуль ($x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 \neq 0$, $x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 \neq 0$);
2) при стремлении точек поверхности Γ к точкам кривой γ поверхность Γ образует прямой угол с плоскостью $x = 0$.

Координаты переменной точки на поверхности Γ будем обозначать через (ξ, η, ζ), где $\xi = \xi(\theta, \vartheta)$, $\eta = \eta(\theta, \vartheta)$, $\zeta = \zeta(\theta, \vartheta)$, $(\theta, \vartheta) \in \overline{\Phi}$.

Рассмотрим интеграл

$$w(x,y,z) = \iint\limits_{\Gamma} \mu(\theta,\vartheta) B_\nu^\alpha \big[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big] d\theta d\vartheta, \tag{14}$$

где $\mu(\theta,\vartheta) \in C(\overline{\Gamma})$ и $q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$ — фундаментальное решение уравнения (3), определенное формулой (6),

$$B_\nu^\alpha[\,\cdot\,] = \xi^{2\alpha}\Big[\cos(\nu,\xi)\frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial\xi} + \cos(\nu,\eta)\frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial\eta} + \cos(\nu,\zeta)\frac{\partial(\,\cdot\,)}{\partial\zeta}\Big], \tag{15}$$

ν — внешняя нормаль к поверхности Γ. Здесь и далее (опять ради краткости записи) буква ν в нижнем индексе обозначения $B_\nu^\alpha[\,\cdot\,]$ указывает на то, что конормальная производная вычисляется по переменным ξ, η и ζ (сравни с определением (10)).

Определение 1. Интеграл (14) будем называть *потенциалом двойного слоя с плотностью* $\mu(\theta,\vartheta)$.

Очевидно, что $w\,(x,y,z)$ есть регулярное решение уравнения (3) в любой области, лежащей в полупространстве $x > 0$, не имеющей общих точек ни с поверхностью Γ, ни с плоскостью yOz. Как и в случае логарифмического потенциала, можно показать существование потенциала двойного слоя (14) в точках поверхности Γ для ограниченной плотности $\mu\,(\theta,\vartheta)$.

Лемма 1. *Справедлива следующая формула*:

$$w_1(x,y,z) \equiv \iint\limits_{\Gamma} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big] d\Gamma = \begin{cases} -1, & (x,y,z) \in D \cup X, \\ -1/2, & (x,y,z) \in \Gamma \cup \gamma, \\ 0, & (x,y,z) \notin \bar{D}. \end{cases} \tag{16}$$

Доказательство. Процесс доказательства состоит из нескольких случаев.

1. Пусть точка (x, y, z) лежит вне области D и над плоскостью yOz. Тогда $q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ есть регулярное решение уравнения (3) внутри области D с непрерывными производными всех порядков вплоть до поверхности Γ, и в силу (13)

$$w_1(x, y, z) \equiv \iint\limits_{\Gamma} B_\nu^\alpha \big[q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\big] d\theta d\vartheta = 0.$$

2. Пусть точка (x, y, z) находится внутри D. Вырежем из области D шар малого радиуса ρ с центром в точке (x, y, z) и обозначим через D_ρ оставшуюся часть области D, а через C_ρ — сферу вырезанного шара. В области D_ρ функция $q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ — регулярное решение уравнения (3) и, согласно (7) и (13), мы имеем

$$\iint\limits_{\Gamma} B_\nu^\alpha \big[q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\big] d\theta d\vartheta + \iint\limits_{C_\rho} B_\nu^\alpha \big[q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\big] dC_\rho = 0,$$

т.е.

$$w_1(x, y, z) = -\iint\limits_{C_\rho} B_\nu^\alpha \big[q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)\big] dC_\rho. \tag{17}$$

Вычислим производную по нормали ν от фундаментального решения $q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$. Применяя последовательно формулу для вычисления производной гипергеометрической функции Гаусса [24, гл. 2, § 2.8, формула (20)]

$$\frac{d}{d\sigma} F(a, b; c; \sigma) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; \sigma)$$

и смежное соотношение

$$\frac{b}{c} \sigma F(a+1, b+1; c+1; \sigma) = F(a+1, b; c; \sigma) - F(a, b; c; \sigma),$$

получим

$$\frac{\partial q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)}{\partial \xi} = \frac{1+2\alpha}{2\pi}(x-\xi) r^{-2\alpha-3} F\Big(\alpha + \frac{3}{2}, \alpha; 2\alpha; \sigma\Big) - \\ - \frac{1+2\alpha}{2\pi} x r^{-2\alpha-3} F\Big(\alpha + \frac{3}{2}, 1+\alpha; 1+2\alpha; \sigma\Big). \tag{18}$$

В результате применения формулы дифференцирования [24, гл. 2, § 2.8, формула (21)]

$$\frac{d}{d\sigma}\big[\sigma^a F(a, b; c; \sigma)\big] = a\sigma^{a-1} F(a+1, b; c; \sigma)$$

находим

$$\frac{\partial q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)}{\partial \eta} = \frac{1+2\alpha}{2\pi}(y-\eta) r^{-2\alpha-3} F\Big(\alpha + \frac{3}{2}, \alpha; 2\alpha; \sigma\Big), \tag{19}$$

$$\frac{\partial q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)}{\partial \zeta} = \frac{1+2\alpha}{2\pi}(z-\zeta) r^{-2\alpha-3} F\Big(\alpha + \frac{3}{2}, \alpha; 2\alpha; \sigma\Big). \tag{20}$$

Используя (18), (19) и (20), с учетом (15) имеем

$$B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big] = \frac{1+2\alpha}{2\pi} r^{-2\alpha-1} F\Big(\alpha+\frac{3}{2},\alpha;2\alpha;\sigma\Big) B_\nu^\alpha\Big[\ln\frac{1}{r}\Big] - \\ - \frac{1+2\alpha}{2\pi} x r^{-2\alpha-3} \xi^{2\alpha} F\Big(\alpha+\frac{3}{2},1+\alpha;1+2\alpha;\sigma\Big)\cos(\nu,\xi). \quad (21)$$

Далее, применив известную формулу [24, гл. 2, § 2.9, формула (2)]

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{-b} F\Big(c-a,b;c;\frac{x}{x-1}\Big)$$

к каждой гипергеометрической функции в (21), получим

$$B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big] = -\frac{1+2\alpha}{4\pi r_1^{2\alpha} r} F\Big(\alpha-\frac{3}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big) B_\nu^\alpha\big[\ln r^2\big] - \\ - \frac{1+2\alpha}{2\pi r r_1^{2\alpha+2}} x \xi^{2\alpha} F\Big(\alpha-\frac{1}{2},1+\alpha;1+2\alpha;1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big)\cos(\nu,\xi). \quad (22)$$

Теперь равенство (17) может быть написано так:

$$w_1(x,y,z) = i_1(x,y,z) + j_1(x,y,z), \quad (23)$$

где

$$i_1(x,y,z) = -\frac{1+2\alpha}{2\pi} \iint\limits_{C_\rho} \frac{1}{r_1^{2\alpha} r} F\Big(\alpha-\frac{3}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big) B_\nu^\alpha\Big[\ln\frac{1}{r}\Big] dC_\rho, \quad (24)$$

$$j_1(x,y,z) = \frac{1+2\alpha}{2\pi} x \iint\limits_{C_\rho} \frac{\xi^{2\alpha}}{r_1^{2\alpha} r} F\Big(\alpha-\frac{1}{2},1+\alpha;1+2\alpha;1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big)\cos(\nu,\xi) dC_\rho.$$

Преобразуем правую часть равенства (24). На сфере нормаль направлена против радиуса. Отсюда

$$i_1(x,y,z) = -\frac{1+2\alpha}{2\pi} \iint\limits_{C_\rho} \frac{\xi^{2\alpha}}{r_1^{2\alpha} r^2} F\Big(\alpha-\frac{3}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big) dC_\rho. \quad (25)$$

Вводя сферические координаты

$$\xi = x + \rho\cos\varphi, \quad \eta = y + \rho\sin\varphi\cos\psi, \quad \zeta = z + \rho\sin\varphi\sin\psi \quad (26)$$

$$(\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi)$$

в интеграле (25), получим

$$i_1(x,y,z) = -\frac{1+2\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \Big[\frac{x^2+2x\rho\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}{4x^2+4x\rho\cos\varphi+\rho^2}\Big]^\alpha \times \\ \times F\Big(\alpha-\frac{3}{2},\alpha;2\alpha;\frac{4x^2+4x\rho\cos\varphi}{4x^2+4x\rho\cos\varphi+\rho^2}\Big)\sin\varphi\, d\varphi. \quad (27)$$

Теперь в правой части равенства (27) переходим к пределу при $\rho \to 0$. Используя формулу суммирования для гипергеометрической функции Гаусса [24, гл. 2, § 2.8, формула (46)]

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \mathrm{Re}(c-a-b) > 0; \quad c \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

получим

$$\lim_{\rho\to 0} i_1(x,y,z) = -1. \tag{28}$$

Еще проще доказывается, что

$$\lim_{\rho\to 0} j_1(x,y,z) = 0. \tag{29}$$

Подставляя теперь (28) и (29) в (23), получим

$$w_1(x,y,z) = -1, \quad (x,y,z) \in D.$$

3. Пусть теперь точка (x,y,z) совпадает с некоторой точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей на поверхности Γ. Проведем сферу малого радиуса ρ с центром в точке M_0. Эта сфера вырежет часть Γ_ρ поверхности Γ. Оставшуюся часть поверхности обозначим через Γ_ρ^*. Мы имеем

$$w_1(x_0,y_0,z_0) = \lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{\Gamma_\rho^*} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)\big]\,d\Gamma_\rho^*. \tag{30}$$

Обозначим через C_ρ^* часть сферы C_ρ, лежащей внутри области D, и рассмотрим область, ограниченную поверхностями Γ_ρ^*, C_ρ^* и плоской областью X плоскости yOz. Так как точка M_0 лежит вне этой области, в этой области $q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)$ — регулярное решение уравнения (3), и в силу (13) имеем

$$\iint\limits_{\Gamma_\rho^*} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)\big]\,d\Gamma_\rho^* = \iint\limits_{C_\rho^*} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)\big]\,dC_\rho^*. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (30), получим

$$w_1(x_0,y_0,z_0) = -\lim_{\rho\to 0} \iint\limits_{C_\rho^*} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)\big]\,dC_\rho^*.$$

Вводя снова сферические координаты (26) с центром в точке M_0, получим

$$w_1(x,y,z) = -1/2, \quad (x,y,z) \in \Gamma.$$

4. Положим, наконец, что точка (x,y,z) находится на плоскости yOz. Проведем плоскость $x = \delta$ ($\delta > 0$ достаточно мало) и рассмотрим область D_δ, которая есть часть области D, лежащая над плоскостью $x = \delta$. Применяя формулу (13), получим

$$w_1(0,y,z) = \iint\limits_{H_\delta} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;0,y,z)\big]dH_\delta + \\ + \iint\limits_{X_\delta}\Big[\xi^{2\alpha}\frac{\partial q(\xi,\eta,\zeta;0,y,z)}{\partial\xi}\Big]_{\xi=\delta}dX_\delta, \quad (32)$$

где H_δ — часть поверхности Γ, находящаяся ниже плоскости $x=\delta$, а X_δ — сечение области D плоскостью $x=\delta$, т.е. X_δ — плоская область, ограниченная замкнутой кривой γ_δ: $y=y(s,t_\delta)$, $z=z(s,t_\delta)$, здесь $t_\delta\in[t_1,t_2]$ определяется из уравнения $x(s,t_\delta)=\delta$ при любых значениях $s\in[s_1,s_2]$.

Нетрудно видеть, что интеграл

$$\iint\limits_{H_\delta} B_\nu^\alpha\big[q(\xi,\eta,\zeta;0,y,z)\big]dH_\delta$$

при $\delta\to 0$ стремится к нулю при любом значении y и z.

Пусть $X_\delta=\{(y,z): p(\delta)<y<q(\delta), h(y,\delta)<z<k(y,\delta)\}$, где $p(\delta)$ и $q(\delta)$ — некоторые конечные действительные числа, зависящие от δ, а $z=h(y,\delta)$, $z=k(y,\delta)$ — непрерывные функции на отрезке $[p(\delta),q(\delta)]$. Далее, согласно (18), выражение (32) можно записать в виде

$$w_1(0,y,z) = \\ = -\frac{1+2\alpha}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\delta^{1+2\alpha}\int_{p(\delta)}^{q(\delta)}\int_{h(\zeta,\delta)}^{k(\zeta,\delta)}\big[\delta^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\big]^{-\alpha-3/2}d\eta d\zeta. \quad (33)$$

Преобразуем выражение (33). Вместо η и ζ введем новые переменные интегрирования $t=(\eta-y)/\delta$ и $s=(\zeta-z)/\delta$. Совершая замену переменных, получим

$$w_1(0,y,z) = -\frac{1+2\alpha}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}(1+t^2+s^2)^{-\alpha-3/2}dtds, \quad (34)$$

где

$$\alpha_1=\frac{p(\delta)-y}{\delta},\quad \alpha_2=\frac{q(\delta)-y}{\delta},\quad \beta_1=\frac{h(\eta+t\delta,\delta)-z}{\delta},\quad \beta_2=\frac{k(\eta+t\delta,\delta)-z}{\delta}.$$

Известно [25, гл. 4, § 4.6, формула 4.638.3], что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2+s^2)^{-\alpha-3/2}dtds = \frac{2\pi}{1+2\alpha}. \quad (35)$$

Таким образом, из формулы (34) в силу условий 1) и 2), наложенных на поверхность Γ, и формулы (35) будем иметь

$$w_1(0,y,z) = \begin{cases} -1, & (y,z)\in X,\\ -1/2, & (y,z)\in\gamma,\\ 0, & (y,z)\notin X\cup\gamma.\end{cases}$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Если поверхность* Γ *удовлетворяет перечисленным выше условиям, то*

$$\iint\limits_{\Gamma} \left| B_\nu^\alpha \left[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) \right] \right| d\theta d\vartheta \leqslant B,$$

где B *— постоянная.*

Доказательство. Проведем плоскость $x=\delta$ ($\delta>0$ достаточно мало) и части поверхности Γ, находящиеся ниже и выше этой плоскости, обозначим через H_δ и L_δ, соответственно. Формулу (22) представим в виде

$$B_\nu^\alpha \left[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) \right] = P(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) + Q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z),$$

где

$$P(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) = -\frac{1+2\alpha}{2\pi r r_1^{2+2\alpha}} x \xi^{2\alpha} F\Big(\alpha-\frac{1}{2}, 1+\alpha; 1+2\alpha; 1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big) \cos(\nu,\xi),$$

$$Q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) = -\frac{1+2\alpha}{4\pi r r_1^{2\alpha}} F\Big(\alpha-\frac{3}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{r^2}{r_1^2}\Big) B_\nu^\alpha \left[\ln r^2 \right].$$

Из теории специальных функций известно, что гипергеометрическая функция Гаусса $F(a,b;c;t)$ при $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ и $|t|\leqslant 1$ ограничена. Кроме того, согласно теории потенциала для уравнения Лапласа имеет место неравенство

$$\Big| \iint\limits_{\Gamma} \mu \frac{\cos(r,\nu)}{r^2} d\theta d\vartheta \Big| < C,$$

где μ — ограниченная интегрируемая функция, а C — некоторая постоянная.

Теперь легко видеть, что

$$\iint\limits_{L_\delta} \left| P(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) \right| dL_\delta \leqslant C_1, \quad \delta>0, \tag{36}$$

где C_1 не зависит от x, y и z.

В силу неравенства $r_1^2 > r^2$ имеем

$$\iint\limits_{H_\delta} \left| P(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) \right| dH_\delta \leqslant C_2 \iint\limits_{H_\delta} \frac{|\cos(\nu,\xi)|}{r^2} dH_\delta \leqslant C_3. \tag{37}$$

Далее, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\iint\limits_{\Gamma} |Q| d\Gamma \leqslant C_4 \iint\limits_{\Gamma} \frac{1}{r r_1^{2\alpha}} \left| B_\nu^\alpha \left[\ln r \right] \right| d\theta d\vartheta \leqslant C_5 \iint\limits_{\Gamma} \frac{|\cos(\nu,\xi)|}{r^2} d\theta d\vartheta \leqslant C_6. \tag{38}$$

Таким образом, из полученных оценок (36), (37), (38) следует справедливость леммы 2. □

Лемма 3. *Если точка* (x,y,z) *лежит на* Γ, *то*

$$\left| B_\nu^\alpha \left[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z) \right] \right| \leqslant \frac{B_1}{r_1^{2\alpha} r}, \tag{39}$$

где B_1 *— постоянная.*

Доказательство. Оценка непосредственно следует из формулы (22). □

Формулы (16) показывают, что при $\mu \equiv 1$ потенциал двойного слоя испытывает разрыв непрерывности, когда точка (x, y, z) пересекает поверхность Γ. В случае произвольной непрерывной плотности $\mu(s, t)$ имеет место

Теорема 1. *Потенциал двойного слоя $w(x, y, z)$ имеет пределы при стремлении точки (x, y, z) к точке (x_0, y_0, z_0) поверхности Γ извне или изнутри. Если предел значений $w(x, y, z)$ изнутри обозначить через $w_i(s, t)$, а предел извне — через $w_e(s, t)$, то имеют место формулы*

$$\begin{aligned} w_i(s,t) &= -\frac{1}{2}\mu(s,t) + \iint\limits_{\Gamma} \mu(\theta,\vartheta)K(s,t;\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta, \\ w_e(s,t) &= \frac{1}{2}\mu(s,t) + \iint\limits_{\Gamma} \mu(\theta,\vartheta)K(s,t;\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta, \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$K(s,t;\theta,\vartheta) = B_\nu^\alpha\big[q\big(\xi(\theta,\vartheta),\eta(\theta,\vartheta),\zeta(\theta,\vartheta);x(s,t),y(s,t),z(s,t)\big)\big].$$

Доказательство. Доказательство теоремы 1 следует из лемм 1 и 2. □

Функция

$$w_0(s,t) = \iint\limits_{\Gamma} \mu(\theta,\vartheta)K(s,t;\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta$$

непрерывна при $(x, y, z) \in \overline{\Gamma}$, что следует из хода доказательства теоремы 1. Принимая во внимание формулы (40) и непрерывность функций $w_0(s, t)$ и $\mu(s, t)$ при $(s, t) \in [s_1, s_2] \times [t_1, t_2]$, можно утверждать, что потенциал двойного слоя $w(x, y, z)$ есть функция, непрерывная внутри области D вплоть до поверхности Γ. Точно так же $w(x, y, z)$ непрерывна вне области D вплоть до поверхности Γ.

3. Потенциал простого слоя

Пусть поверхность Γ удовлетворяет условиям 1) и 2) п. 2.

Определение 2. *Потенциалом простого слоя с плотностью $\rho(\theta, \vartheta)$* назовем функцию

$$v(x,y,z) = \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta)q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)d\theta d\vartheta, \tag{41}$$

где $q(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$ — фундаментальное решение уравнения (3).

Будем предполагать, что $\rho(\theta, \vartheta)$ — непрерывная функция на $\overline{\Gamma}$. Потенциал простого слоя (41) определен во всем полупространстве $x > 0$ и остается непрерывным при переходе через поверхность Γ. Очевидно, что потенциал простого слоя $v(x, y, z)$ есть регулярное решение уравнения (3) в любой области, лежащей в полупространстве $x > 0$, не имеющей общих точек ни с поверхностью Γ, ни с плоскостью yOz. Нетрудно видеть, что при стремлении точки (x, y, z) к бесконечности потенциал простого слоя $v(x, y, z)$ стремится к нулю. Действительно, пусть точка (x, y, z) находится на полусфере C_R: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x > 0$, тогда в силу (6) имеем

$$|v(x,y,z)| \leqslant \iint\limits_{\Gamma} \big|\rho(\theta,\vartheta)\big| \, \big|q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big| d\Gamma \leqslant MR^{-1-2\alpha}, \quad R \geqslant R_0, \tag{42}$$

где M — постоянная.

3.1. Конормальная производная потенциала простого слоя. Возьмем на поверхности Γ произвольную точку $N\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t)\big)$ и проведем в этой точке нормаль. Рассмотрим на этой нормали какую-нибудь точку $M(x,y,z)$, не лежащую на поверхности Γ, и составим конормальную производную от потенциала простого слоя (41):

$$B_n^{\alpha}\big[v(x,y,z)\big] = \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta) B_n^{\alpha}\big[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big] d\theta d\vartheta, \tag{43}$$

где $B_n^{\alpha}[\,\cdot\,]$ — конормальная производная по переменным x, y и z, определенная формулой (10).

Интеграл (43) существуют и в том случае, когда точка $M(x,y,z)$ совпадает с точкой $N(x_0,y_0,z_0)$, упомянутой выше.

Обозначим через $B_n^{\alpha}\big[v(x,y,z)\big]_i$ и $B_n^{\alpha}\big[v(x,y,z)\big]_e$ соответственно предельные значения конормальной производной при стремлении точки $M(x,y,z)$ к точке $N \in \Gamma$ изнутри и извне поверхности Γ.

Теорема 2. *Для непрерывной плотности $\rho(\xi,\eta,\zeta)$ имеют место следующие формулы*:

$$\begin{aligned} B_n^{\alpha}\big[v(x,y,z)\big]_i &= \frac{1}{2}\rho(s,t) + \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta) K(\theta,\vartheta;s,t) d\theta d\vartheta, \\ B_n^{\alpha}\big[v(x,y,z)\big]_e &= -\frac{1}{2}\rho(s,t) + \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta) K(\theta,\vartheta;s,t) d\theta d\vartheta, \end{aligned} \tag{44}$$

где

$$K(\theta,\vartheta;s,t) = B_n^{\alpha}\big[q\big(\xi(\theta,\vartheta),\eta(\theta,\vartheta),\zeta(\theta,\vartheta);x(s,t),y(s,t),z(s,t)\big)\big].$$

Из этих формул непосредственно следует величина скачка конормальной производной потенциала простого слоя:

$$B_n^{\alpha}[v(x,y,z)]_i - B_n^{\alpha}[v(x,y,z)]_e = \rho(x,y,z). \tag{45}$$

Точно так же, как и в неравенстве (42), можно показать, что имеет место следующая оценка:

$$|B_n^{\alpha}[v(x,y,z)]| \leqslant MR^{-2-2\alpha}, \quad R \geqslant R_0, \tag{46}$$

где M — постоянная.

3.2. Применимость формулы Грина для потенциалов. Покажем, что для потенциала простого слоя (41) применима формула Грина (12). Рассмотрим область $D_{\varepsilon,\delta}$, лежащую внутри D и ограниченную поверхностью Γ_{ε}, параллельной поверхности Γ, и замкнутой областью X_{δ}, т.е. сечением области $D_{\varepsilon,\delta}$ плоскостью $x = \delta$. Применим формулу Грина (12) к потенциалу простого

слоя $v(x,y,z)$, выбирая за область интегрирования область $D_{\varepsilon,\delta}$. Тогда получим

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} x^{2\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2\Big]dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} vB_n^\alpha[v]d\Gamma_\varepsilon+\iint\limits_{X_\delta}\delta^{2\alpha}v(\delta,y,z)\frac{\partial v(\delta,y,z)}{\partial x}dydz. \quad (47)$$

Конормальная производная $B_n^\alpha[v(x,y,z)]$ есть непрерывная функция вплоть до поверхности Γ и

$$\lim_{x\to 0} x^{2\alpha}\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}=0, \quad (y,z)\in X.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to 0}\iint\limits_{X_\delta}\delta^{2\alpha}v(\delta,y,z)\frac{\partial v(\delta,y,z)}{\partial x}dydz=0. \quad (48)$$

Переходя в формуле (47) к пределу при $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$ и принимая во внимание (48), получим

$$\iiint\limits_{D} x^{2\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2\Big]dxdydz=\iint\limits_{\Gamma} vB_n^\alpha[v(x,y,z)]_i d\Gamma. \quad (49)$$

Плоскую область, ограниченную кривой γ и окружностью $y^2+z^2=R^2$, лежащей в плоскости yOz, обозначим через X_{0R}. Применим теперь формулу (49) к области D'_R, ограниченной поверхностью Γ, областью X_{0R} и полусферой C_R, содержащей область D. Переходя затем к пределу при $R\to\infty$ и учитывая (42) и (46), получим

$$\iiint\limits_{D'} x^{2\alpha}\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial z}\Big)^2\Big]dxdydz=-\iint\limits_{\Gamma} vB_n^\alpha[v(x,y,z)]_e d\Gamma. \quad (50)$$

Здесь и далее $D'=\mathbb{R}_3^+\setminus\bar{D}$ — неограниченная область при $x>0$.

4. Интегральные уравнения для плотностей

Формулы (40) и (44) могут быть написаны как интегральные уравнения для плотностей:

$$\mu(s,t)-\lambda\iint\limits_{\Gamma} K(s,t;\theta,\vartheta)\mu(\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta=f(s,t), \quad (51)$$

$$\rho(s,t)-\lambda\iint\limits_{\Gamma} K(\theta,\vartheta;s,t)\rho(\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta=g(s,t), \quad (52)$$

где

$$\begin{array}{lll}\lambda=2, & f(s,t)=-2w_i(s,t), & g(s,t)=-2B_n^\alpha[v]_e,\\ \lambda=-2, & f(s,t)=2w_e(s,t), & g(s,t)=2B_n^\alpha[v]_i.\end{array}$$

Уравнения (51) и (52) — сопряженные, и в силу леммы 3 к ним применима теория Фредгольма.

Покажем, что $\lambda = 2$ не является собственным значением ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$. Это утверждение эквивалентно тому, что однородное интегральное уравнение

$$\rho(s,t) - 2\iint\limits_{\Gamma} K(\theta,\vartheta;s,t)\rho(\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta = 0 \tag{53}$$

не имеет нетривиальных решений. Пусть $\rho_0(\theta,\vartheta)$ — непрерывное нетривиальное решение уравнения (53). Потенциал простого слоя с плотностью $\rho_0(\theta,\vartheta)$ дает функцию $v_0(x,y,z)$, которая является решением уравнения (3) в областях D и D' и у которой предельные значения конормальной производной $B_n^\alpha[v_0]_e$ равны нулю в силу уравнения (53). К потенциалу простого слоя $v_0(x,y,z)$ применима формула (50), из которой следует, что $v_0(x,y,z) = \mathrm{const}$ в области D'. На бесконечности потенциал простого слоя равен нулю и, следовательно, $v_0(x,y,z) \equiv 0$ в D', а также и на поверхности Γ. Применяя теперь формулу (49), мы получим, что $v_0(x,y,z) \equiv 0$ и внутри области D. Но тогда $B_n^\alpha[v_0]_i = 0$, и на основании формулы (45) получим $\rho_0(\theta,\vartheta) \equiv 0$. Таким образом, однородное уравнение (53) имеет только тривиальное решение; следовательно, $\lambda = 2$ не есть собственное значение ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$.

Однородное уравнение

$$\mu(s,t) - \lambda\iint\limits_{\Gamma} K(s,t;\theta,\vartheta)\mu(\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta = 0$$

при $\lambda = -2$ имеет в силу (16) решение, равное произвольной постоянной, т.е. $\lambda = -2$ есть собственное значение ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$.

5. Решение задачи Хольмгрена с помощью потенциалов

5.1. Постановка краевой задачи Хольмгрена. Пусть D — область, ограниченная односвязной открытой областью X плоскости yOz и поверхностью Ляпунова Γ, лежащей в полупространстве $x > 0$. Общую границу плоской области X и поверхности Γ обозначим через γ. Будем предполагать, что поверхность Γ удовлетворяет условиям 1) и 2) п. 2.

5.2. Задача Хольмгрена. Найти в области D регулярное решение уравнения (3), непрерывное в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\Gamma} = \varphi(s,t), \quad (s,t) \in \overline{\Phi}; \quad \lim_{x\to 0} x^{2\alpha}\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \nu_1(y,z), \quad (y,z) \in X, \tag{54}$$

где $\nu_1(y,z)$ — непрерывная функция в X, причем в случае, когда кривая γ есть окружность, при стремлении точек $(y,z) \in X$ к кривой γ функция $\nu_1(y,z)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\alpha$.

5.3. Единственность решения задачи Хольмгрена. Рассмотрим область $D_{\varepsilon,\delta}$, лежащую внутри D и ограниченную поверхностью Γ_ε, параллельной поверхности Γ, и замкнутой областью X_δ, т.е. сечением области $D_{\varepsilon,\delta}$ плоскостью $x = \delta$. Интегрируя обе части тождества (8) по области $D_{\varepsilon,\delta}$ и пользуясь формулой Гаусса—Остроградского, получим

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} x^{2\alpha}[uE(v)-vE(u)]dxdydz=\iint\limits_{S_{\varepsilon,\delta}}(uB_n^{\alpha}[v]-vB_n^{\alpha}[u])dS_{\varepsilon,\delta},$$

где $S_{\varepsilon,\delta}$ — граница области $D_{\varepsilon,\delta}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} x^{2\alpha}uE(u)dxdydz=\iiint\limits_{D_{\varepsilon,\delta}} x^{2\alpha}[u_x^2+u_y^2+u_z^2]dxdydz-$$
$$-\iiint\limits_{D_{\varepsilon,\delta}}\Big[\frac{\partial}{\partial x}(x^{2\alpha}uu_x)+x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+x^{2\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(uu_z)\Big]dxdydz.$$

Применяя формулу Гаусса—Остроградского к этому тождеству, после перехода к пределу при $\delta\to 0$ и $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\iiint\limits_{D} x^{2\alpha}[u_x^2+u_y^2+u_z^2]dxdydz=$$
$$=\iint\limits_{X}\tau_1(y,z)\nu_1(y,z)dydz-\iint\limits_{\Gamma}\varphi(x,y,z)B_{nx}^{\alpha}[u]dxdydz. \quad (55)$$

Если теперь рассмотрим однородную задачу Хольмгрена, то из (55) получим

$$\iiint\limits_{D} x^{2\alpha}[u_x^2+u_y^2+u_z^2]dxdydz=0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y,z)=0$ в $\overline{D}$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если задача Хольмгрена для уравнения* (3) *имеет регулярное решение, то оно единственно.*

5.4. Сведение задачи Хольмгрена к случаю однородных условий на плоскости вырождения. Покажем, что можно ограничиться случаем, когда $\nu_1(y,z)\equiv 0$.

Пусть $X=\{(y,z): p<y<q, h(y)<z<k(y)\}$, где p, q — некоторые конечные действительные числа, а $z=h(y)$, $z=k(y)$ — непрерывные функции на отрезке $[p,q]$.

Используя фундаментальное решение (6) уравнения (3), возьмем решение в виде

$$v(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{X}\nu_1(\eta,\zeta)[x^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{-1/2-\alpha}d\eta d\zeta. \quad (56)$$

Дифференцируя интеграл (56) по x, получим

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1+2\alpha}{2\pi}x\iint\limits_{X}\nu_1(\eta,\zeta)[x^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{-3/2-\alpha}d\eta d\zeta.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0\\ z\to z_0}} \frac{1+2\alpha}{2\pi} x^{1+2\alpha} \int_p^q d\eta \int_{h(\eta)}^{k(\eta)} [x^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{-3/2-\alpha} d\zeta = 1. \qquad (57)$$

Действительно, полагая $\eta = y + xs$ и $\zeta = z + xt$, будем иметь

$$\frac{1+2\alpha}{2\pi} x^{1+2\alpha} \int_p^q d\eta \int_{h(\eta)}^{k(\eta)} \nu_1(\eta,\zeta)[x^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]^{-3/2-\alpha} d\zeta =$$
$$= \frac{1+2\alpha}{2\pi} \int_{(p-y)/x}^{(q-y)/x} \int_{(h(y+xs)-z)/x}^{(k(y+xs)-z)/x} \nu_1(y+xs, z+xt)[1+s^2+t^2]^{-3/2-\alpha} ds dt.$$

Отсюда, учитывая формулу (35) при $x \to 0$, $y \to y_0$, $z \to z_0$, $(y_0, z_0) \in X$, получим (57).

Далее, следуя [17, гл. 2, § 6] и используя равенство (57), можно доказать, что производная $\partial v/\partial x$ с весом $x^{2\alpha}$ в области X принимает значение $\nu_1(y,z)$, т.е.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0\\ z\to z_0}} \left(x^{2\alpha} \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} \right) = \nu_1(y_0, z_0), \quad (y_0, z_0) \in X.$$

Нетрудно видеть, что значения функции $v(x,y,z)$ непрерывны и ограничены на поверхности Γ. Теперь решение первоначальной задачи Хольмгрена может быть представлено в виде

$$u(x,y,z) = v(x,y,z) + w(x,y,z),$$

где $w(x,y,z)$ — решение уравнения (3) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$w\big|_\Gamma = \varphi(s,t) - v\big|_\Gamma = \varphi_1(s,t); \quad \left(x^{2\alpha} \frac{\partial w}{\partial x} \right)\Big|_{x=0} = 0, \quad (y,z) \in X. \qquad (58)$$

Итак, доказано, что в случае задачи Хольмгрена можно ограничиться случаем $\nu_1(y,z) \equiv 0$.

5.5. Сведение задачи Хольмгрена к интегральному уравнению. Решение задачи Хольмгрена будем искать в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью $\mu(\theta, \vartheta)$:

$$w(x,y,z) = \iint_\Gamma \mu(\theta,\vartheta) B_\nu^\alpha \big[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\big] d\theta d\vartheta.$$

Потенциал двойного слоя $w(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (3) внутри области D и $\left(x^{2\alpha}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\big|_{x=0} = 0$ при $(y,z) \in X$. Для выполнения краевого условия (58) на Γ необходимо, чтобы предельные значения $w(x,y,z)$ изнутри равнялись $\varphi_1(s,t)$:

$$w_i(x,y,z) = \varphi_1(s,t), \quad (x,y,z) \in \Gamma.$$

Пользуясь первой из формул (40), получим для плотности $\mu(\theta,\vartheta)$ интегральное уравнение

$$\mu(s,t) - 2\iint\limits_{\Gamma} K(s,t;\theta,\vartheta)\mu(\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta = -2\varphi_1(s,t), \tag{59}$$

где

$$K(s,t;\theta,\vartheta) = B_\nu^\alpha\big[q\big(\xi(\theta,\vartheta),\eta(\theta,\vartheta),\zeta(\theta,\vartheta);x(s,t),y(s,t),z(s,t)\big)\big].$$

Как это следует из оценки (39), ядро $K(s,t;\theta,\vartheta)$ имеет слабую особенность.

Отметим, что если уравнение (59) разрешимо, то его решение непрерывно. Это следует из непрерывности свободного члена и из вида ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$.

В п. 4 было показано, что $\lambda = 2$ не является собственным значением ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$ и, следовательно, уравнение (59) при любом свободном члене имеют единственное решение. Таким образом, если поверхность Γ удовлетворяет условиям 1) и 2) п. 2 и заданные значения решения на поверхности Γ непрерывны, то задача Хольмгрена для уравнения (3) имеет единственное решение, и это решение можно представить в виде потенциала двойного слоя.

6. Функция Грина оператора $E(u)$

6.1. Функция Грина задачи Хольмгрена.

Определение 3. *Функцией Грина задачи Хольмгрена* для уравнения (3) называется функция $G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) внутри области D, кроме точки (x_0,y_0,z_0), эта функция есть регулярное решение уравнения (3);
2) она удовлетворяет граничным условиям

$$G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\big|_\Gamma = 0; \quad \Big(x^{2\alpha}\frac{\partial G}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = 0; \tag{60}$$

3) она может быть представлена в виде

$$G(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = q(x,y,z;x_0,y_0,z_0) + v(x,y,z;x_0,y_0,z_0), \tag{61}$$

где $q(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ — фундаментальное решение уравнения (3), определенное формулой (6), а $v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ — регулярное решение уравнения (3) везде внутри D.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$, которая в силу (7), (60) и (61) должна удовлетворять граничным условиям

$$v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\big|_\Gamma = -q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)\big|_\Gamma; \tag{62}$$
$$\Big(x^{2\alpha}\frac{\partial v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = 0.$$

Функцию $v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ будем искать в виде потенциала двойного слоя:

$$v(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \iint\limits_{\Gamma} \mu_1\big(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0\big)B_\nu^\alpha[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)]d\theta d\vartheta. \tag{63}$$

Принимая во внимание первое из равенств (40) и граничное условие (62), получим интегральное уравнение для плотности $\mu(s,t;x_0,y_0,z_0)$:

$$\mu(s,t;x_0,y_0,z_0) - 2\iint\limits_{\Gamma} K(s,t;\theta,\vartheta)\mu(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta = \\ = 2q[x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0]. \quad (64)$$

Правая часть уравнения (64) есть непрерывная функция от s и t (точка (x_0,y_0,z_0) лежит внутри D). В п. 4 было доказано, что $\lambda = 2$ не является собственным значением ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$ и, следовательно, уравнение (64) разрешимо и его непрерывное решение можно записать в виде

$$\mu(s,t;x_0,y_0,z_0) = 2q[x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0] + \\ + 4\iint\limits_{\Gamma} R(s,t;\theta,\vartheta;2)q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta, \quad (65)$$

где $R(s,t;\theta,\vartheta;2)$ — резольвента ядра $K(s,t;\theta,\vartheta)$; $(x(s,t),y(s,t),z(s,t)) \in \Gamma$. Подставляя (65) в (63), получим

$$v(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = 2\iint\limits_{\Gamma} q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)B_\nu^\alpha[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)]d\theta d\vartheta + \\ + 4\iint\limits_{\Gamma}\iint\limits_{\Gamma} B_\nu^\alpha[q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)]R(\theta,\vartheta;s,t;2)\times \\ \times q[x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0]d\theta d\vartheta ds dt. \quad (66)$$

Определим теперь функцию

$$g(x,y,z) = \begin{cases} v(x,y,z;x_0,y_0,z_0), & (x,y,z) \in D, \\ -q(x,y,z;x_0,y_0,z_0), & (x,y,z) \in D'. \end{cases} \quad (67)$$

Функция $g(x,y,z)$ является регулярным решением уравнения (3) как внутри области D, так и внутри D' и равна нулю на бесконечности. Так как точка (x_0,y_0,z_0) лежит внутри D, то в D' функция $g(x,y,z)$ имеет производные любого порядка, непрерывные вплоть до Γ. Мы можем рассматривать $g(x,y,z)$ в D' как решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям

$$B_n^\alpha\big[g(x,y,z)\big]\big|_\Gamma = -B_n^\alpha\big[q(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)\big], \\ \Big(x^{2\alpha}\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = 0.$$

Это решение представим в виде потенциала простого слоя

$$g(x,y,z) = \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)d\theta d\vartheta, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}_3^+\backslash\overline{D} \quad (68)$$

с неизвестной плотностью $\rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)$.

Воспользовавшись второй из формул (44), получим интегральное уравнение для плотности $\rho(s,t;x_0,y_0,z_0)$:

$$\rho(s,t;x_0,y_0,z_0) - 2\iint\limits_{\Gamma} K(\theta,\vartheta;s,t)\rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta = \\ = 2B_n^{\alpha}[q(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)]. \quad (69)$$

Уравнение (69) — союзное с уравнением (64). Его правая часть есть непрерывная функция от s и t. Таким образом, уравнение (69) имеет непрерывное решение:

$$\rho(s,t;x_0,y_0,z_0) = 2B_n^{\alpha}[q(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)] \\ + 4\iint\limits_{\Gamma} R(\theta,\vartheta;s,t;2)B_{\nu}^{\alpha}[q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)]d\theta d\vartheta. \quad (70)$$

Значения потенциала простого слоя $g(x,y,z)$ на поверхности Γ равны $-q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$, т.е. такие же, как и функции $v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$, а на плоскости yOz их частные производные по x равны нулю. Отсюда в силу теоремы единственности задачи Хольмгрена следует, что формула (68) для функции $g(x,y,z)$, определенной равенством (67), справедлива во всем полупространстве $x \geqslant 0$, т.е.

$$v(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \\ = \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)d\theta d\vartheta, \quad (x,y,z) \in D. \quad (71)$$

Таким образом, регулярная часть $v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ функции Грина представима в виде потенциала простого слоя.

Применяя первую из формул (44) к (71), получим

$$2B_n^{\alpha}[v(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)]_i = \\ = \rho(s,t;x_0,y_0,z_0) + 2\iint\limits_{\Gamma} K(\theta,\vartheta;s,t)\rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta,$$

но, согласно (69), имеем

$$2B_n^{\alpha}[q(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)]_i = \\ = \rho(s,t;x_0,y_0,z_0) - 2\iint\limits_{\Gamma} K(\theta,\vartheta;s,t)\rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta.$$

Складывая почленно последние два равенства и принимая во внимание (61), будем иметь

$$B_n^{\alpha}\big[G\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0\big)\big] = \rho(s,t;x_0,y_0,z_0), \quad (72)$$

и, следовательно, формулу (71) можно записать в виде

$$v(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \iint\limits_{\Gamma} B_{\nu}^{\alpha}[G(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)]q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)d\theta d\vartheta.$$

Умножая теперь обе части равенства (70) на $q(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x,y,z)$, интегрируя по Γ и учитывая (65) и (63), получим

$$v(x_0,y_0,z_0;x,y,z)=\iint\limits_{\Gamma}\rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)q(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)d\theta d\vartheta.$$

Сравнивая это с формулой (71), будем иметь

$$v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=v(x_0,y_0,z_0;x,y,z), \tag{73}$$

если точки (x,y,z) и (x_0,y_0,z_0) находятся внутри области D.

Лемма 4. *Функция Грина $G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ симметрична относительно точек (x,y,z) и (x_0,y_0,z_0), если они находятся внутри области D.*

Доказательство леммы 4 следует из представления (61) функции Грина и равенства (73).

Для области D_0, ограниченной кругом $y^2+z^2\leqslant a^2$ плоскости yOz и полусферой $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\geqslant 0$, функция Грина задачи Хольмгрена имеет вид

$$G_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=q(x,y,z;x_0,y_0,z_0)-\left(\frac{a}{R}\right)^{1+2\alpha}q(x,y,z;\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{z}_0), \tag{74}$$

где

$$R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,\quad \tilde{x}_0=\frac{a^2}{R^2}x_0,\quad \tilde{y}_0=\frac{a^2}{R^2}y_0,\quad \tilde{z}_0=\frac{a^2}{R^2}z_0.$$

Покажем, что регулярную часть

$$v_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=-\left(\frac{a}{R}\right)^{1+2\alpha}q(x,y,z;\tilde{x}_0,\tilde{y}_0,\tilde{z}_0)$$

функции Грина $G_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ можно представить в виде

$$v_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)= \\ =-\iint\limits_{\Gamma}\rho(s,t;x,y,z)v_0(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)dsdt, \tag{75}$$

где $\rho(s,t;x,y,z)$ — решение уравнения (71).

Действительно, пусть (x_0,y_0,z_0) — произвольная точка внутри области D. Рассмотрим функцию

$$u(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=-\iint\limits_{\Gamma}\rho(s,t;x,y,z)v_0(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0)dsdt.$$

Она, как функция от (x,y,z), удовлетворяет уравнению (3), так как этому уравнению удовлетворяет функция $\rho(s,t;x,y,z)$. Подставляя вместо $\rho(s,t;x,y,z)$ ее выражение (70), получим

$$u(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \\ = -\iint\limits_{\Gamma} \psi(s,t;x_0,y_0,z_0) B_n^{\alpha}[q(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x,y,z)]dsdt, \quad (76)$$

где

$$\psi(s,t;x_0,y_0,z_0) = 2v_0\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0\big) + \\ + 4\iint\limits_{\Gamma} R(s,t;\theta,\vartheta;2)v_0(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta,$$

т.е. $\psi(s,t;x_0,y_0,z_0)$ — решение интегрального уравнения

$$\psi(s,t;x_0,y_0,z_0) - 2\iint\limits_{\Gamma} K(s,t;\theta,\vartheta)\psi(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta = \\ = 2v_0\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0\big). \quad (77)$$

Применяя первую из формул (40) к потенциалу двойного слоя (76), получим

$$u_i\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0\big) = \\ = \frac{1}{2}\psi(s,t;x_0,y_0,z_0) - \iint\limits_{\Gamma} K(s,t;\theta,\vartheta)\psi(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta,$$

откуда в силу (77) имеем

$$u_i\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0\big) = \\ = v_0\big(x(s,t),y(s,t),z(s,t);x_0,y_0,z_0\big), \quad (x(s,t),y(s,t),z(s,t)) \in \Gamma.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\Big(x^{2\alpha}\frac{\partial u(x,y,z;x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = 0, \quad \Big(x^{2\alpha}\frac{\partial v_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\Big)\Big|_{x=0} = 0.$$

Таким образом, функции $u(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ и $v_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (3) и одинаковым краевым условиям, и в силу единственности решения задачи Хольмгрена

$$u(x,y,z;x_0,y_0,z_0) \equiv v_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0).$$

Вычитая теперь из (61) обе части равенства (74), получим

$$H(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = G(x,y,z;x_0,y_0,z_0) - G_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \\ = v(x,y,z;x_0,y_0,z_0) - v_0(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$$

или в силу (71), (73), (74) и (75)

$$H(x,y,z;x_0,y_0,z_0) = \iint\limits_{\Gamma} \rho(\theta,\vartheta;x,y,z)G_0(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta. \quad (78)$$

6.2. Решение задачи Хольмгрена для уравнения (3). Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка внутри области D. Рассмотрим область $D_{\varepsilon,\delta} \subset D$, ограниченную поверхностью Γ_ε, параллельной поверхности Γ, и областью $X_{\varepsilon,\delta}$, лежащей на плоскости $x = \delta > \varepsilon$. Выберем ε и δ столь малыми, чтобы точка (x_0, y_0, z_0) находилась внутри $D_{\varepsilon,\delta}$. Вырежем из области $D_{\varepsilon,\delta}$ шар малого радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0, z_0) и оставшуюся часть $D_{\varepsilon,\delta}$ обозначим через $D^{\rho}_{\varepsilon,\delta}$, в которой функция Грина $G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ будет регулярным решением уравнения (3).

Пусть $u(x, y, z)$ есть регулярное решение уравнения (3) в области D, удовлетворяющее граничным условиям (54).

Применяя формулу (11), получим

$$\iint\limits_{\Gamma_\varepsilon} \big(GB^\alpha_n[u] - uB^\alpha_n[G]\big)dsdt + \iint\limits_{X_{\varepsilon,\delta}} x^{2\alpha}\Big(u\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial u}{\partial x}\Big)\Big|_{x=\delta} dydz = \\ = \iint\limits_{C_\rho} \big(GB^\alpha_n[u] - uB^\alpha_n[G]\big)dsdt,$$

где C_ρ — сфера вырезанного шара. Переходя к пределу при $\rho \to 0$, а затем при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\iint\limits_{X} \nu_1(y, z)G(0, y, z; x_0, y_0, z_0)dydz - \\ - \iint\limits_{\Gamma} \varphi(\theta, \vartheta)B^\alpha_n[G(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)]d\theta d\vartheta. \quad (79)$$

Покажем, что формула (79) дает решение задачи Хольмгрена.

Нетрудно видеть, что первый интеграл $I_1(x_0, y_0, z_0)$ в формуле (79) есть регулярное в области D решение уравнения (3), непрерывное в $\overline{D}$. Обозначим

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \iint\limits_{X} \nu_1(y, z)q(0, y, z; x_0, y_0, z_0)dydz = \\ = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{X} \nu_1(y, z)[x_0^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2-\alpha}dydz. \quad (80)$$

Легко видеть, что $\varphi(x_0, y_0, z_0)$ есть непрерывная функция в $\overline{D}$. Интеграл $I_1(x_0, y_0, z_0)$ в силу (80) и (66) и симметричности функции $v(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ можно представить в виде

$$I_1(x_0, y_0, z_0) = -\varphi(x_0, y_0, z_0) - 2\iint\limits_{\Gamma} \phi(\xi, \eta, \zeta)B^\alpha_\nu[q(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)]d\theta d\vartheta - \\ - 4\iint\limits_{\Gamma}\iint\limits_{\Gamma} R(\theta, \vartheta; s, t; 2)\varphi\big(x(s, t), y(s, t), z(s, t)\big) \times \\ \times B^\alpha_\nu[q(\xi, \eta, \zeta; x_0, y_0, z_0)]d\theta d\vartheta dsdt. \quad (81)$$

Последние два интеграла в формуле (81) — потенциалы двойного слоя. Принимая во внимание первую из формул (40) и интегральное уравнение для резольвенты $R(s,t;\theta,\vartheta;2)$, из формулы (81) получим

$$I_1(x_0,y_0,z_0)\big|_\Gamma = 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{x_0\to 0} x_0^{2\alpha}\frac{\partial I_1(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0} = \nu_1(y_0,z_0), \quad (y_0,z_0)\in X.$$

В самом деле, интеграл $I_1(x_0,y_0,z_0)$ в силу (71) и симметричности функции $v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$ можно записать также в виде

$$I_1(x_0,y_0,z_0) = -\iint\limits_X \nu_1(y,z)q(0,y,z;x_0,y_0,z_0)dydz - \\ - \iint\limits_X \nu_1(y,z)dydz \iint\limits_\Gamma \rho(\theta,\vartheta;0,y,z)q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)d\theta d\vartheta.$$

В п. 5 показано, что производная по x_0 от первого слагаемого, умноженного на $x_0^{2\alpha}$, равна $\nu_1(y_0,z_0)$ при $x_0\to 0$, $(y_0,z_0)\in X$. Производная по x_0 от второго слагаемого, умноженного на $x_0^{2\alpha}$, равна нулю при $x_0=0$, так как $x_0^{2\alpha}\frac{\partial q}{\partial x_0}=0$ при $x_0\to 0$, $(y_0,z_0)\in X$.

Рассмотрим второй интеграл $I_2(x_0,y_0,z_0)$ в формуле (79), который в силу (70) и (72) можно записать в виде

$$I_2(x_0,y_0,z_0) = -\iint\limits_\Gamma \varphi(s,t)\rho(s,t;x_0,y_0,z_0)dsdt = \\ = -\iint\limits_\Gamma \chi(\theta,\vartheta)B_\nu^\alpha[q(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)]d\theta d\vartheta,$$

где

$$\chi(\theta,\vartheta) = 2\varphi(\theta,\vartheta) + 4\iint\limits_\Gamma R(\theta,\vartheta;s,t;2)\varphi(s,t)dsdt,$$

т.е. функция $\chi(\theta,\vartheta)$ — решение интегрального уравнения

$$\chi(s,t) - 2\iint\limits_\Gamma K(s,t)\chi(\theta,\vartheta)d\theta d\vartheta = 2\varphi(s,t). \tag{82}$$

Так как $\chi(s,t)$ — непрерывная функция, $I_2(x_0,y_0,z_0)$ — регулярное в области D решение уравнения (3), непрерывное в $\overline{D}$, которое в силу (40) и (82) удовлетворяет условию

$$I_2(x_0,y_0,z_0)\big|_\Gamma = \varphi(s,t),$$

нетрудно видеть, что

$$\lim_{x_0\to 0} x_0^{2\alpha}\frac{\partial I_2(x_0,y_0,z_0)}{\partial x_0} = 0, \quad (y_0,z_0)\in X.$$

Используя формулы (78) и (74), решение (79) задачи Хольмгрена для уравнения (3) можно записать в виде

$$u(x_0,y_0,z_0)=$$
$$=-\iint\limits_{\Gamma}\varphi(\theta,\vartheta)\big\{B_\nu^\alpha[G_0(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)]+B_\nu^\alpha[H(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)]\big\}d\theta d\vartheta-$$
$$-\iint\limits_{X}\nu_1(y,z)[G_0(0,y,z;x_0,y_0,z_0)+H(0,y,z;x_0,y_0,z_0)]dydz, \quad (83)$$

где $G_0(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)$ — функция Грина задачи Хольмгрена для полусферической области D_0:

$$G_0(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r^{1+2\alpha}}F\Big(\alpha+\frac{1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{r_1^2}{r^2}\Big)-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\tilde r^{1+2\alpha}}\Big(\frac{a}{R}\Big)^{1+2\alpha}F\Big(\alpha+\frac{1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{\tilde r_1^2}{\tilde r^2}\Big), \quad (84)$$

$$a^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,\quad R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,$$
$$\left.\begin{matrix} r_1^2\\ r^2\end{matrix}\right\}=(\xi\pm x_0)^2+(\eta-y_0)^2+(\zeta-z_0)^2,$$
$$\left.\begin{matrix} \tilde r_1^2\\ \tilde r^2\end{matrix}\right\}=\Big(\xi\pm\frac{a^2}{R^2}x_0\Big)^2+\Big(\eta-\frac{a^2}{R^2}y_0\Big)^2+\Big(\zeta-\frac{a^2}{R^2}z_0\Big)^2$$

и

$$H(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=\iint\limits_{\Gamma}\rho(\theta,\vartheta;x_0,y_0,z_0)G_0(\xi,\eta,\zeta;x,y,z)d\theta d\vartheta.$$

Непосредственным вычислением можно показать, что функция, определенная формулой (83), является решением задачи Хольмгрена для уравнения (3), т.е. она удовлетворяет уравнению (3) и условиям (54).

6.3. Решение задачи Хольмгрена для полушара. В этом случае функция $H(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)$ тождественно равна нулю:

$$H(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)\equiv 0,\quad (\xi,\eta,\zeta)\in D_0. \quad (85)$$

Чтобы явно получить решение задачи Хольмгрена по формуле (83) для полуферической области D_0, необходимо вычислить конормальную производную функции Грина (84). Воспользовавшись выведенной выше формулой (21), нетрудно найти аналогичную формулу для $B_\nu^\alpha[q(\xi,\eta,\zeta;\tilde x_0,\tilde y_0,\tilde z_0)]$. Далее, следуя [26, § 26], имеем

$$B_\nu^\alpha\big[G_0(\xi,\eta,\zeta;x_0,y_0,z_0)\big]=\frac{1+2\alpha}{2\pi}\xi^{2\alpha}F\Big(\frac{3}{2}+\alpha,\alpha;2\alpha;1-\frac{r_1^2}{r^2}\Big)\frac{R^2-a^2}{ar^{3+2\alpha}}. \quad (86)$$

Подставив (85) и (86) в (83), окончательно получим решение задачи Хольмгрена для уравнения (3) в полусферической области D_0 в явном виде:

$$u(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \nu_1(y,z)\Big\{[x_0^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{-1/2-\alpha} -$$

$$-\Big[\Big(a-\frac{yy_0}{a}\Big)^2+\Big(a-\frac{zz_0}{a}\Big)^2+\frac{x_0^2y^2+y^2z_0^2+x_0^2z^2+y_0^2z^2}{a^2}-a^2\Big]^{-1/2-\alpha}\Big\}dz +$$

$$+\frac{1+2\alpha}{2\pi}\iint\limits_{\Gamma}\varphi(\theta,\vartheta)\xi^{2\alpha}F\Big(\frac{3}{2}+\alpha,\alpha;2\alpha;1-\frac{r_1^2}{r^2}\Big)\frac{a^2-R^2}{ar^{3+2\alpha}}d\theta d\vartheta. \quad (87)$$

Решение (83) (в частности формула (87)) задачи Хольмгрена более удобно для дальнейших исследований. Действительно, полученные формулы (83) и (87) играют важную роль при изучении краевых задач для уравнений смешанного типа, т.е. для уравнений эллиптико-гиперболического или эллиптико-параболического типов: каждая из этих формул позволяет легко вывести основное функциональное соотношение между следами искомого решения и его производной на линии вырождения, принесенное из эллиптической части смешанной области.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Кондратьев Б. П. *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями.* М.: Мир, 2007. 512 с.
2. Ergashev T. G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2020. vol. 13, no. 1. pp. 48–57. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-1-48-57.
3. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables // *Lobachevskii J. Math*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 15–26. https://doi.org/10.1134/S1995080220010047.
4. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2007. vol. 52, no. 8. pp. 673–683. https://doi.org/10.1080/17476930701300375.
5. Hasanov A., Karimov E. T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients // *Appl. Math. Letters*, 2009. vol. 22, no. 12. pp. 1828–1832, arXiv: 0901.0468 [math-ph]. https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.006.
6. Urinov A. K., Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter // *Appl. Math. Letters*, 2011. vol. 24, no. 3. pp. 314–319. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.10.013.
7. Ergashev T. G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients // *Comp. Math. Appl.*, 2019. vol. 77, no. 1. pp. 69–76, arXiv: 1804.04363 [math.AP].
8. Уринов А. К., Эргашев Т. Г. Конфлюэнтные гипергеометрические функции многих переменных и их применение к нахождению фундаментальных решений обобщенного уравнения Гельмгольца с сингулярными коэффициентами // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2018. № 55. С. 45–56. https://doi.org/10.17223/19988621/55/5.

9. Mavlyaviev R. M., Garipov I. B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation // *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2017. vol. 63, no. 3. pp. 287–296. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1218853.
10. Мавлявиев Р. М. Построение фундаментальных решений B-эллиптических уравнений с младшими членами // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 6. С. 70–75.
11. Уринов А. К., Каримов К. Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 4. С. 665–683. https://doi.org/10.14498/vsgtu1559.
12. Shishkina E. L. The Dirichlet problem for an elliptic singular equation // *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020. vol. 65, no. 7. pp. 1210–1218. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1588259.
13. Эргашев Т. Г. Обобщённая задача Хольмгрена для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 7. С. 872–886, arXiv: 1910.05264 [math.AP]. https://doi.org/10.1134/S0374064120070043.
14. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour l'équation $y^{2s}z_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1935. vol. 25, no. 10. pp. 1–12 (In French).
15. Франкль Ф. И. К теории уравнения $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1946. Т. 10, № 2. С. 135–166.
16. Пулькин С. П. Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + px^{-1}u_x = 0$ // *Уч. зап. Куйбышев. пед. ин-та.*, 1958. Т. 21. С. 3–55.
17. Смирнов М. М. *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.* М.: Наука, 1966. 292 с.
18. Srivastava H. M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation // *Sohag J. Math.*, 2015. vol. 2, no. 1. pp. 1–10, arXiv: 0810.3979 [math.AP].
19. Berdyshev A. S., Hasanov A., Ergashev T. G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II // *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020. vol. 65, no. 2. pp. 316–332. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219.
20. Эргашев Т. Г. Третий потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // *Уфимск. матем. журн.*, 2018. Т. 10, № 4. С. 111–122, arXiv: 1807.00903 [math.AP].
21. Эргашев Т. Г. Четвертый потенциал двойного слоя для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца // *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2017. № 50. С. 45–56. https://doi.org/10.17223/19988621/50/4.
22. Мухлисов Ф. Г., Нигмедзянова А. М. Решение краевых задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго рода методом потенциалов // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 8. С. 57–70.
23. Ergashev T. G. Potentials for three-dimensional singular equation and their application to the solving a mixed problem // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 6. pp. 1067–1077. https://doi.org/10.1134/S1995080220060086.
24. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
25. Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Физматлит, 1962. 1100 с.
26. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики.* М.: Физматлит, 2013. 352 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 257–285
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1810

MSC: 35J70, 33C20, 33C65

Potentials for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient and their application

© *T. G. Ergashev*[1,2]

[1] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
Uzbekistan Academy of Science,
4-a, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
[2] Tashkent Institute of Irrigation
and Agricultural Mechanization Engineers,
39, Kari Niyaziy st., Tashkent, 100000, Uzbekistan.

Abstract

A potential theory for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient is considered. Double- and simple-layer potentials with unknown density are introduced, which are expressed in terms of the fundamental solution of the mentioned elliptic equation. When studying these potentials, the properties of the Gaussian hypergeometric function are used.

Theorems are proved on the limiting values of the introduced potentials and their conormal derivatives, which make it possible to equivalently reduce boundary value problems for singular elliptic equations to an integral equation of the second kind, to which the Fredholm theory is applicable.

The Holmgren problem is solved for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient in the domain bounded $x = 0$ by the coordinate plane and the Lyapunov surface for $x > 0$ as an application of the stated theory. The uniqueness of the solution to the stated problem is proved by the well-known abc method, and existence is proved by the method of the Green's function, the regular part of which is sought in the form of the double-layer potential with an unknown density. The solution to the Holmgren problem is found in a form convenient for further research.

Keywords: three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient, fundamental solution, potential theory, Green's function, Holmgren problem.

Received: 22nd July, 2020 / Revised: 4th February, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 11th June, 2021

Competing interests. I hereby declare that I have no conflict of interest in the authorship and publication of this article.

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Ergashev T.G. Potentials for a three-dimensional elliptic equation with one singular coefficient and their application, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 257–285. https://doi.org/10.14498/vsgtu1810 (In Russian).

Author's Details:
Tuhtasin G. Ergashev https://orcid.org/0000-0003-3542-8309
Dr. Phys. & Math. Sci.; Lab. of Differential Equations and Their Applications[1]; Associate Professor; Dept. Higher Mathematics[2]; e-mail: ergashev.tukhtasin@gmail.com

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Kondrat'ev B. P. *Teoriia potentsiala. Novye metody i zadachi s resheniiami* [Theory of Potential. New Methods and Problems with Solutions]. Moscow, Mir, 2007, 512 pp. (In Russian)
2. Ergashev T. G. Fundamental solutions for a class of multidimensional elliptic equations with several singular coefficients, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2020, vol. 13, no. 1, pp. 48–57. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-1-48-57.
3. Ergashev T. G. Fundamental solutions of the generalized Helmholtz equation with several singular coefficients and confluent hypergeometric functions of many variables, *Lobachevskii J. Math*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 15–26. https://doi.org/10.1134/S1995080220010047.
4. Hasanov A. Fundamental solutions bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2007, vol. 52, no. 8, pp. 673–683. https://doi.org/10.1080/17476930701300375.
5. Hasanov A., Karimov E. T. Fundamental solutions for a class of three-dimensional elliptic equations with singular coefficients, *Appl. Math. Letters*, 2009, vol. 22, no. 12, pp. 1828–1832, arXiv: 0901.0468 [math-ph]. https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.07.006.
6. Urinov A. K., Karimov E. T. On fundamental solutions for 3D singular elliptic equations with a parameter, *Appl. Math. Letters*, 2011, vol. 24, no. 3, pp. 314–319. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.10.013.
7. Ergashev T. G. On fundamental solutions for multidimensional Helmholtz equation with three singular coefficients, *Comp. Math. Appl.*, 2019, vol. 77, no. 1, pp. 69–76, arXiv: 1804.04363 [math.AP].
8. Urinov A. K., Ergashev T. G. Confluent hypergeometric functions of many variables and their application to the finding of fundamental solutions of the generalized helmholtz equation with singular coefficients, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2018, no. 55, pp. 45–56 (In Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/55/5.
9. Mavlyaviev R. M., Garipov I. B. Fundamental solution of multidimensional axisymmetric Helmholtz equation, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2017, vol. 63, no. 3, pp. 287–296. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1218853.
10. Mavlyaviev R. M. Construction of fundamental solutions to B-elliptic equations with minor terms, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 60–65. https://doi.org/10.3103/S1066369X17060081.
11. Urinov A. K., Karimov K. T. The Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 665–683 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1559.
12. Shishkina E. L. The Dirichlet problem for an elliptic singular equation, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, vol. 65, no. 7, pp. 1210–1218. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1588259.
13. Ergashev T. G. Generalized Holmgren problem for an elliptic equation with several singular coefficients, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 7, pp. 842–856. https://doi.org/10.1134/S0012266120070046.
14. Gellerstedt S. Sur un problème aux limites pour l'équation $y^{2s}z_{xx} + z_{yy} = 0$, *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1935, vol. 25, no. 10, pp. 1–12 (In French).
15. Frankl F. On the theory of the equation $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1946, vol. 10, no. 2, pp. 135–166 (In Russian).
16. Pul'kin S. P. Certain boundary value problems for equations $u_{xx} \pm u_{yy} + px^{-1}u_x = 0$, *Uch. Zap. Kuibyshev. Ped. Inst.*, 1958, vol. 21, pp. 3–55 (In Russian).

17. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations]. Moscow, Nauka, 1966, 292 pp. (In Russian)
18. Srivastava H. M., Hasanov A., Choi J. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Sohag J. Math.*, 2015, vol. 2, no. 1, pp. 1–10, arXiv: 0810.3979 [math.AP].
19. Berdyshev A. S., Hasanov A., Ergashev T. G. Double-layer potentials for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation. II, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, vol. 65, no. 2, pp. 316–332. https://doi.org/10.1080/17476933.2019.1583219.
20. Ergashev T. G. Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Ufa Math. J.*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 111–121. https://doi.org/10.13108/2018-10-4-111.
21. Ehrgashev T. G. The fourth double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2017, no. 50, pp. 45–56 (In Russian).
22. Mukhlisov F. G., Nigmetzyanova A. M. Solution of boundary-value problems for a degenerating elliptic equation of the second kind by the method of potentials, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 8, pp. 46–57. https://doi.org/10.3103/S1066369X09080088.
23. Ergashev T. G. Potentials for three-dimensional singular equation and their application to the solving a mixed problem, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 6, pp. 1067–1077. https://doi.org/10.1134/S1995080220060086.
24. Bateman H., Erdélyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions], vol. 1, Gipergeometricheskaia funktsiia. Funktsii Lezhandra [The Hypergeometric Function. Legendre Functions]. Moscow, Nauka, 1973, 296 pp. (In Russian)
25. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Table of Integrals, Series, and Products]. Moscow, Fizmatlit, 1962, 1100 pp. (In Russian)
26. Sabitov K. B. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013, 352 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 286–302
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1850

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.372

Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды

© *Л. А. Игумнов*[1,2], *Д. А. Казаков*[1,2], *Д. Н. Шишулин*[1,2], *И. А. Модин*[1,2], *Д. В. Жегалов*[2]

[1] Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, Россия, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.

Аннотация

Приводятся результаты экспериментальных исследований высокотемпературной ползучести и длительной прочности в условиях одноосного и сложного напряженно-деформированного состояния: одноосное растяжение, кручение и их совместное действие.

Испытания проведены на лабораторных трубчатых образцах из материала ВТ6 при температуре 600°C в состоянии поставки и в условиях воздействия агрессивной среды путем предварительного наводораживания лабораторных образцов с различной концентрацией водорода по массе C_m равной 0.15 % и 0.3 %.

Представлена экспериментальная информация для построения материальных параметров и скалярных функций модели термоползучести с изотропно-кинематическим упрочнением, полученная из базовых экспериментов по определению: начального радиуса поверхности ползучести

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А., Жегалов Д. В. Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 286–302. https://doi.org/10.14498/vsgtu1850.

Сведения об авторах

Леонид Александрович Игумнов https://orcid.org/0000-0003-3035-0119
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; главный научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов[2]; e-mail: igumnov@mech.unn.ru

Дмитрий Александрович Казаков https://orcid.org/0000-0002-9316-4105
кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов[2]; e-mail: kazakov@mech.unn.ru

 © Самарский государственный технический университет

нулевого уровня (нулевая скорость ползучести); веера кривых ползучести при разных уровнях задаваемых напряжений с получением характеристик третьего участка на диаграмме ползучести, предшествующего разрушению образца при фиксированной температуре на заданном временном интервале; кривых ползучести при кручении до момента потери устойчивости в рабочей части образца. По результатам испытаний на одноосное нагружение выбрано два уровня интенсивности напряжений, при различном сочетании которых проведены эксперименты в условиях сложного нагружения.

Приводятся результаты экспериментальных исследований высокотемпературной ползучести и длительной прочности при нескольких различных программах изотермического нагружения в условиях сложного напряженно-деформированного состояния для образцов из сплава ВТ6 в состоянии поставки в условиях воздействия агрессивной среды. Полученная экспериментальная информация позволяет определить необходимые материальные параметры и провести верификацию используемой математической модели термоползучести.

Ключевые слова: наводораживание, нестационарная ползучесть, длительная прочность, повреждение, ресурс, базовый эксперимент, материальные параметры, сложное нагружение.

Получение: 10 марта 2021 г. / Исправление: 21 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 28 июня 2021 г.

Введение. Ресурс конструктивных элементов, работающих в условиях повышенных температур и механических воздействий, часто определяется физическими процессами накопления повреждений в результате процесса ползучести. Поскольку процессы накопления повреждений зависят от кинетики напряженно-деформированного состояния (НДС), точность расчетных оценок прочности и ресурса элементов конструкций зависит от того, насколько используемые математические модели достоверно описывают процессы деформирования и повреждения материала в опасных зонах элементов конструкции в результате процесса высокотемпературной ползучести и насколько точно определены вещественные параметры материала, входящие в используемую математическую модель [1–11]. Особое внимание необходимо уделять экспериментальным исследованиям процессов высокотемпературной ползучести при многоосном нагружении, так как именно эта экспериментальная информация позволяет строить достоверную математическую модель по

Денис Николаевич Шишулин https://orcid.org/0000-0002-6527-557X
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов[2]; e-mail: shishulindn@gmail.com

Иван Александрович Модин https://orcid.org/0000-0002-3561-4606
кандидат физико-математических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов[2]; e-mail: mianet@mail.ru

Дмитрий Владимирович Жегалов https://orcid.org/0000-0002-7282-598X
кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. проблем прочности, динамики и ресурса[2]; e-mail: zhegalov@mech.unn.ru

учету эффектов, возникающих при сложных непропорциональных нагружениях и определяющих точность расчетов длительной прочности конструкций.

Возможности испытательного оборудования [12–15] с интегрированным математическим обеспечением позволяют создать различные программы испытаний лабораторных образцов соответствующей геометрии: одноосное растяжение–сжатие, кручение, нагружение по лучевым траекториям с изломом, по лучевым пространственным траекториям в широком диапазоне изменения скоростей деформирования и температуры.

Экспериментальные исследования одноосного и многоосного напряженных состояний в условиях высокотемпературной ползучести и длительной прочности проводились на титановом сплаве ВТ6 при температуре 600°C на лабораторных тонкостенных трубчатых образцах. Часть испытаний проводилась на материале в состоянии поставки. Для исследования влияния водородной коррозии на механические характеристики титанового сплава ВТ6 при указанных условиях нагружения часть образцов была подвергнута влиянию агрессивной среды (наводораживанию при концентрациях водорода по массе 0.15 % и 0.3 %).

1. Экспериментальная информация для получения вещественных параметров модели термоползучести. Проведены эксперименты для материала ВТ6 по программе получения вещественных параметров для модели термоползучести с комбинированным упрочнением [16–19]. Определены начальные радиусы поверхности ползучести, соответствующие нулевой скорости ползучести. Для уровней интенсивности напряжений σ_u, равных 50, 66, 78, 90 МПа, построен веер кривых ползучести с получением характеристик третьего участка на диаграмме ползучести, предшествующего разрушению образца, и кривые ползучести при кручении до момента потери устойчивости в рабочей части образца при температуре $T = 600$°C на временном интервале $t = 10 \div 20$ ч.

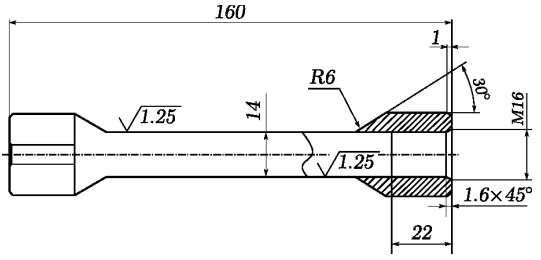


Рис. 1. Схема лабораторного образца (в мм)
[Figure 1. The Laboratory Sample (in mm)]

Эксперименты были проведены на лабораторных образцах (рис. 1), имеющих форму тонкостенной трубы с размерами рабочей части: наружный диаметр — 16 мм, толщина стенки — 1 мм, длина — 105 мм. Образцы испытывались в состоянии поставки и в условиях, имитирующих воздействие агрессивной среды — предварительного наводораживания при концентрациях водорода по массе — 0.15 % и 0.3 %. Выбор агрессивной среды связан с тем, что в условиях эксплуатации инженерных объектов из титановых сплавов при высоких температурах, несмотря на то, что данные сплавы обладают высо-

кой стойкостью ко многим агрессивным средам, наводораживание во многих конструктивных элементах энергетического оборудования и систем является причиной интенсивно протекающих деградационных механизмов, вызванных «водородным охрупчиванием», которое приводит к труднопрогнозируемым разрушениям конструкций, выполненных из этих материалов.

Наводораживание проводилось в газовой среде диффузионным способом (метод Сивертса). Технология наводораживания состояла из следующих этапов: обеспечение вакуума и необходимой температуры, подача водорода, временная выдержка в данных условиях до достижения требуемой концентрации и отжига для выравнивания концентрации по длине и объему рабочей части образца. Выполненное измерение концентрации водорода атомно-эмиссионным спектральным методом анализа в приповерхностных слоях рабочей части лабораторных образцов показало разброс для образцов при выбранном уровне наводораживания $0.3 \pm 0.04\,\%$. Химический состав сплава ВТ6 в состоянии поставки приведен в табл. 1. Сплав относится к двухфазным $(\alpha + \beta)$ мартенситного класса с небольшим количеством β-фазы.

Таблица 1

Химический состав сплава ВТ6 в состоянии поставки (в %)
[Chemical composition of titanium alloy VT6 (Ti-6Al-4V), per %]

Fe	C	Si	V	N	Ti	Al	Zr	O	H	Others
< 0.6	< 0.1	< 0.1	3.5–5.3	< 0.05	86.45–90.9	5.3–6.8	< 0.3	< 0.2	< 0.015	< 0.3

Испытания лабораторных образцов выполнялись на универсальном испытательном комплексе Z100 ZWICK-ROEL (рис. 2), который позволяет проводить эксперименты на сложное многоосное нагружение в квазистатическом диапазоне скоростей деформаций на трубчатых образцах при синхронизированном по времени задании следующих параметров:

– скорость изменения продольной силы, скорость изменения крутящего момента на активном захвате, скорость изменения внутреннего давления в образце (режимы «мягкого» нагружения),

Рис. 2. Общий вид испытательной машины Z100 ZWICK-ROEL
[Figure 2. General view of the Z100 ZWICK-ROEL testing machine]

– скорость перемещения (деформации на рабочей части образца) и угла закручивания активного захвата (режимы «жесткого» нагружения).

Максимальные значения воспроизводимых параметров испытаний — по силе ±100 кН и по крутящему моменту 1000 Нм, по внутреннему давлению $0 \div 48$ МПа. Измерительная аппаратура универсального экспериментального комплекса состоит из следующих элементов:

– лазерного экстензометра laserXtens, позволяющий одновременно измерять как продольные деформации (база измерения от 20 до 100 мм) с разрешающей способностью $\leqslant 1$ мкм, так и деформации при кручении (углы поворота реперных точек в рабочей части образцов), класс точности 1 по ISO 9513;
– измерителя поперечных деформаций на базе видеоэкстензометра ME46 с разрешающей способностью от 0.4 до 2 мкм;
– датчика силы и крутящего момента с классом точности 1 по ISO 7500-1.

Экспериментальная установка снабжена термокамерой модели EC 2181 с контроллером, позволяющая проводить испытания образцов различной формы в диапазоне температур от минус 150 до плюс 600°C. Термокамера обеспечивает равномерное распределение поля температуры в рабочей части образцов с погрешностью менее ±1°C.

Для экспериментальных исследований была разработана программная база проведения испытаний на многоосную ползучесть с учетом основных требуемых условий:

– изменение нагружающих параметров при управлении испытаниями с безударными переходами с одного режима нагружения на другой;
– жесткое беззазорное закрепление захватных частей образцов в захваты нагружающего устройства;
– обеспечение вынужденной конвекцией в термокамере равномерного распределения температуры и ее контроль на рабочей части образца.

Экспериментальные исследования процессов ползучести титанового сплава ВТ6 проводились по схеме «мягкого» нагружения (задающие параметры испытаний — сила и крутящий момент) и температуре 600 °C. Температура окружающего воздуха при проведении испытаний составляла 20 ± 5 °C. Испытания проводились до момента разрушения образца при растяжении либо до момента потери устойчивости при кручении.

Проводимые исследования характеризовались:

– по виду испытаний — определительные;
– по продолжительности проведения и степени интенсификации процессов — нормальные;
– по виду воздействия — механические и температурные;
– по результатам воздействия — разрушающие.

Графический материал, представленный в работе, имеет следующее соответствие:

– сплошными линиями изображается информация, относящаяся к испытаниям материала в состоянии поставки;
– штрих-пунктирными — в состоянии наводороженного при концентрациях водорода по массе 0.15 %;
– штриховыми линиями — в состоянии наводороженного при концентрациях водорода по массе 0.3 %.

В случае одноосного нагружения представлены следующие результаты испытаний.

1. Определение значений радиуса поверхности ползучести, соответствующего нулевой скорости ползучести, когда действующее напряжение вызывает деформацию ползучести, не превышающую значений $0.1 \div 0.2\,\%$ за принятый временной интервал. В табл. 2 приведены экспериментально определенные значения уровней напряжений, при которых за базовое время 10–20 ч деформация ползучести составила не более $0.1 \div 0.2\,\%$ (допуск на остаточную деформацию ползучести) для температуры испытаний 600°C. Значения указанных напряжений получены для материала с различной степенью наводораживания по массе C_m. Результаты являются исходной экспериментальной информацией для расчета соответствующих значений начальных радиусов поверхностей ползучести сплава.

Таблица 2

Начальный радиус поверхности ползучести [Initial radius of the creep surface]

C_m, %	0	0.15	0.3
σ_{11}, MPa	25	17.5	15

2. Ползучесть при кручении с интенсивностями действующих напряжений σ_u, равными 50 и 66 МПа, для сплава в состоянии поставки и с предварительно внедренным водородом с концентрацией по массе 0.3 % до момента потери устойчивости образцов (рис. 3).
3. Ползучесть при одноосном растяжении с интенсивностями действующих напряжений σ_u, равными 30, 50, 66, 78 и 90 МПа, для сплава в состоянии поставки и с предварительно внедренным водородом с концен-

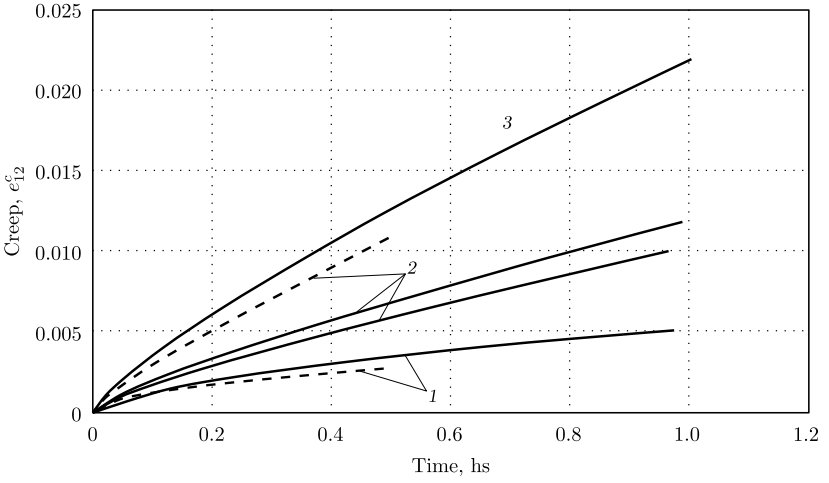


Рис. 3. Ползучесть при кручении для заданных уровней интенсивности напряжений: *1* — $\sigma_u = 50$ МПа, *2* — $\sigma_u = 66$ МПа, *3* — $\sigma_u = 78$ МПа

[Figure 3. Torsional creep at given stress intensity levels: *1* — $\sigma_u = 50$ MPa, *2* — $\sigma_u = 66$ MPa, *3* — $\sigma_u = 78$ MPa; solid lines — the alloy at delivery condition, dashed lines — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.3 %]

трацией по массе 0.3 % с получением третьего участка диаграмм ползучести (рис. 4).

4. На рис. 5 графически представлены этапы нагружения образца: реализация процесса ползучести при кручении с одновременным поддержанием нулевого значения растягивающего напряжения (чистое кручение), где под номером *1* указан вектор действующего напряжения $\sigma_{u(1)} = 50$ МПа, под номером *2* — вектор при разгрузке напряжения; реализация процесса ползучести при растяжении — вектор нагрузки $\sigma_{u(2)} = 78$ МПа под номером *3*. Значения деформаций ползучести, полученных при реализации описанной истории нагружения, изображены на рис. 6 для одноосного кручения и на рис. 7 для растяжения соответственно. Результаты серии испытаний представляют информацию для

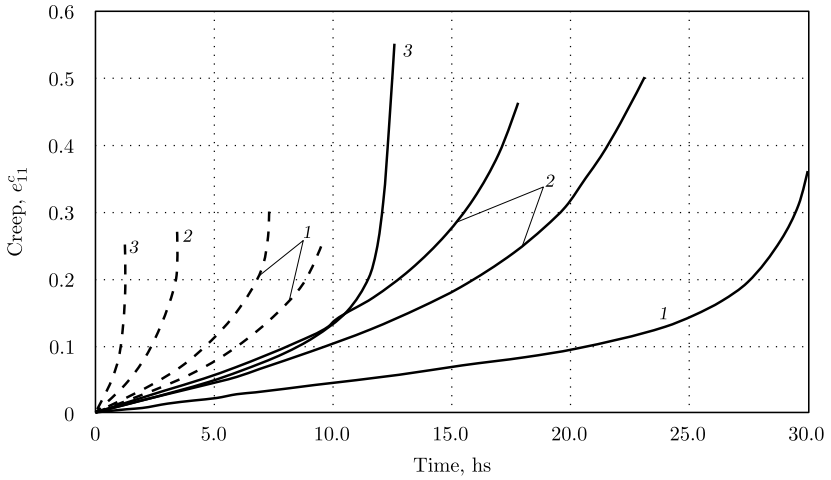


Рис. 4. Ползучесть при кручении для заданных уровней интенсивности напряжений: *1* — $\sigma_u = 66$ МПа, *2* — $\sigma_u = 78$ МПа, *3* — $\sigma_u = 90$ МПа

[Figure 4. Torsional creep at given stress intensity levels: *1* — $\sigma_u = 66$ MPa, *2* — $\sigma_u = 78$ MPa, *3* — $\sigma_u = 90$ MPa; solid lines — the alloy at delivery condition, dashed lines — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.3 %]

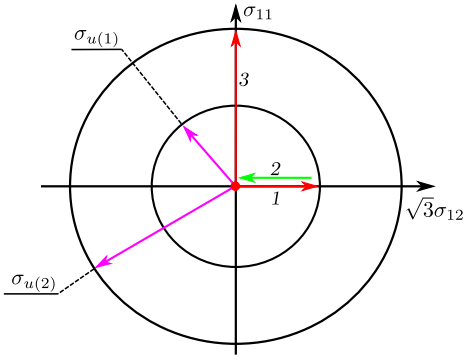


Рис. 5. Этапы нагружения образца при одноосном кручении с переходом к одноосному растяжению

[Figure 5. Stages of the uniaxial torsion loading with the transition to the uniaxial tension]

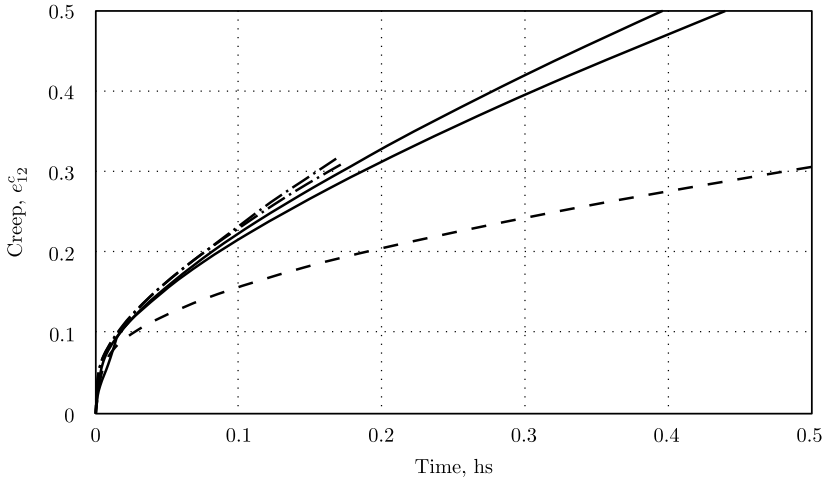


Рис. 6. Ползучесть при кручении (режим 1, $\sigma_{u(1)} = 50$ МПа, $\sigma_{11} = 0$)

[Figure 6. Torsional creep (1st mode, $\sigma_{u(1)} = 50$ MPa, $\sigma_{11} = 0$): solid lines — the alloy at delivery condition, dash-dotted lines — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.15 %, dashed line — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.3 %]

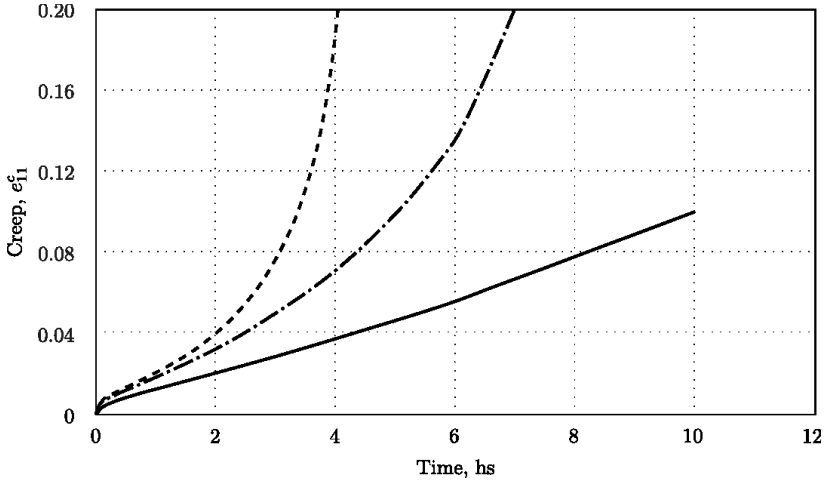


Рис. 7. Ползучесть при одноосном растяжении (режим 3, $\sigma_{u(2)} = 78$ МПа)

[Figure 7. Uniaxial tensile creep (3rd mode, $\sigma_{u(2)} = 78$ MPa): solid line — the alloy at delivery condition, dash-dotted line — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.15 %, dashed line — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.3 %]

оценки влияния агрессивной среды и уточнения вещественных параметров используемой модели термоползучести для материала в состоянии поставки и с предварительно внедренным водородом с концентрацией по массе 0.15 % и 0.3 %, а также влияния предварительно накопленной деформации ползучести в условиях нагружения при кручении на последующую деформацию ползучести и процесс накопления повреждений при растяжении.

На основании полученной экспериментальной информации при одноосных режимах кручения и растяжения выбраны два уровня интенсивности напряжений $\sigma_{u1} = 50$ МПа и $\sigma_{u2} = 78$ МПа, при которых проводятся дальнейшие эксперименты при ползучести в условиях комбинированного нагружения при одновременном растяжении и кручении, а также при их ступенчатом изменении в условиях сложного нагружения.

2. Испытания в условиях многоосного нагружения на ползучесть и длительную прочность. При испытаниях в условиях многоосного нагружения интенсивность тензора напряжений определялась как $\sigma_u = |\bar{\sigma}| = (\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2)^{1/2}$.

Для многоосного нагружения было выбрано два режима. Первый режим реализовывался следующим образом: ползучесть при совместном растяжении и кручении для двух выбранных уровней интенсивности напряжений $\sigma_{u(1)}$, $\sigma_{u(2)}$ при кусочно-линейном задании траектории нагружения. Задаваемые углы векторов действующих напряжений между осями σ_{11} и $\sqrt{3}\sigma_{12}$ равны 30° и 60° соответственно (рис. 8).

На рис. 8 графически представлены этапы испытаний на многоосную ползучесть, где под номером *1* указан вектор напряжения $\sigma_{u(1)} = 50$ МПа, действующий на первом этапе нагружения (угол 30°), под номером *2* — вектор напряжения $\sigma_{u(2)} = 78$ МПа, действующий на втором этапе (угол 60°), вектор под номером *3* обозначает переход между уровнями интенсивности напряжения в испытаниях. Для оценки влияния агрессивной среды на свойства материала при нестационарных условиях деформирования по указанной истории нагружения проведены эксперименты для материала в состоянии поставки с тремя повторами и с предварительно внедренным водородом с концентрацией 0.15 % и 0.3 % (два повтора). Результаты проведенных испытаний представлены на рис. 9.

Второй режим реализовывался следующим образом: ползучесть при кручении, совместном растяжении–кручении, растяжении по лучевым путям нагружения с направлением действующего напряжения $\sigma_{u(1)} = 50$ МПа в пространстве напряжений σ_{11}–$\sqrt{3}\sigma_{12}$ под углами, равными 0°, 30°, 60° и 90°.

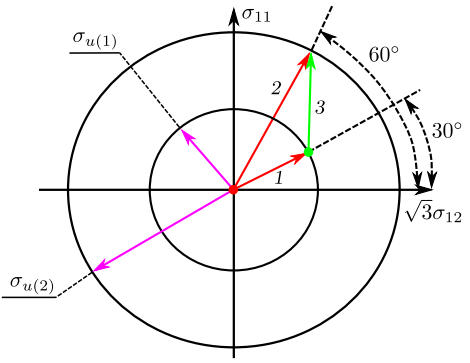


Рис. 8. История первого режима комбинированного нагружения

[Figure 8. Stages of the first combined loading mode]

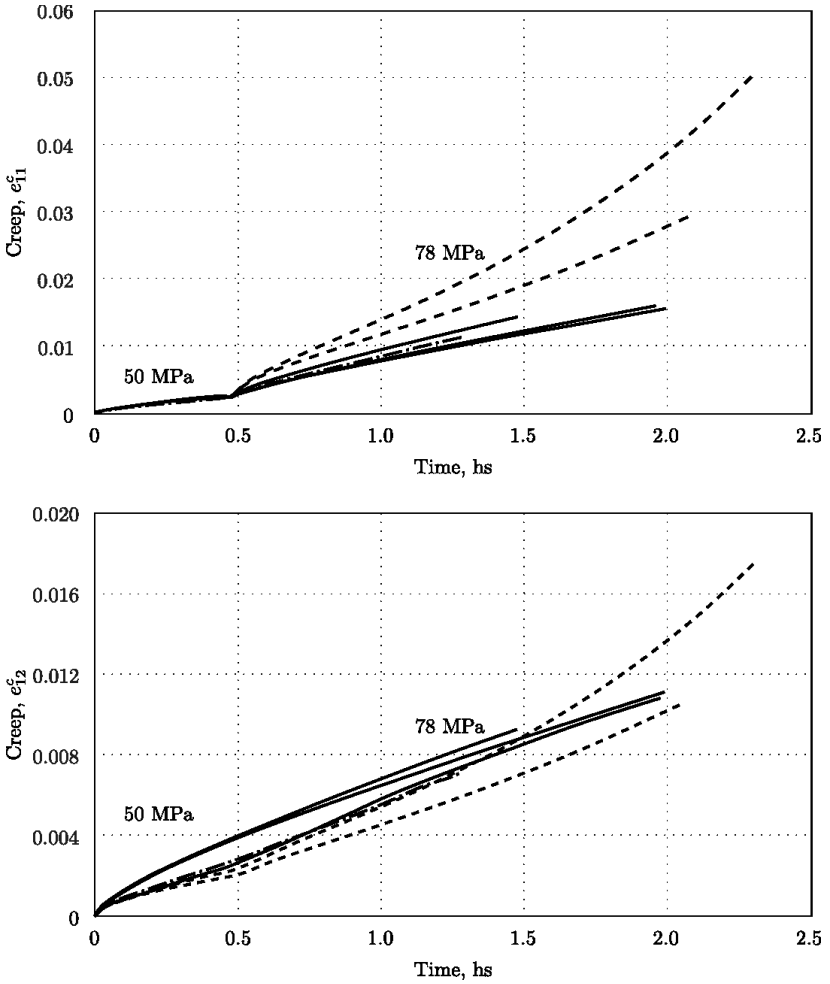


Рис. 9. Деформация ползучести при комбинированном нагружении
[Figure 9. Creep under combined loading: solid lines — the alloy at delivery condition, dash-dotted lines — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.15 %, dashed lines — the hydrogenated alloy with the hydrogen-ion concentration by weight of 0.3 %]

На рис. 10 графически представлены этапы лучевых нагружений, где цифрами *1*, *3*, *5* и *7* обозначены векторы действующего напряжения при нагружении образца, цифрами *2*, *4*, *6* — векторы разгрузки. При смене угла вектора действующих напряжений (непропорциональное нагружение) существенной особенностью является неколлинеарность векторов напряжений и скоростей деформаций ползучести. Характер изменения деформаций ползучести, полученных при реализации указанной истории нагружения, приведен на рис. 11. На рис. 12 приведена траектория деформирования при ползучести при лучевом нагружении.

При изменении угла вектора напряжения для лучевых нагружений наблюдается временное увеличение скоростей осевой и сдвиговой деформации ползучести. Это переходное увеличение скорости деформаций уменьшается по мере увеличения продолжительности времени нагружения, а также вектор

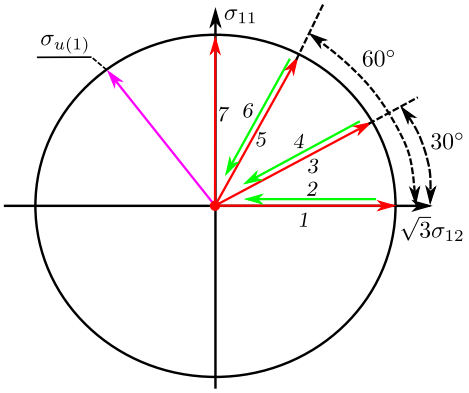
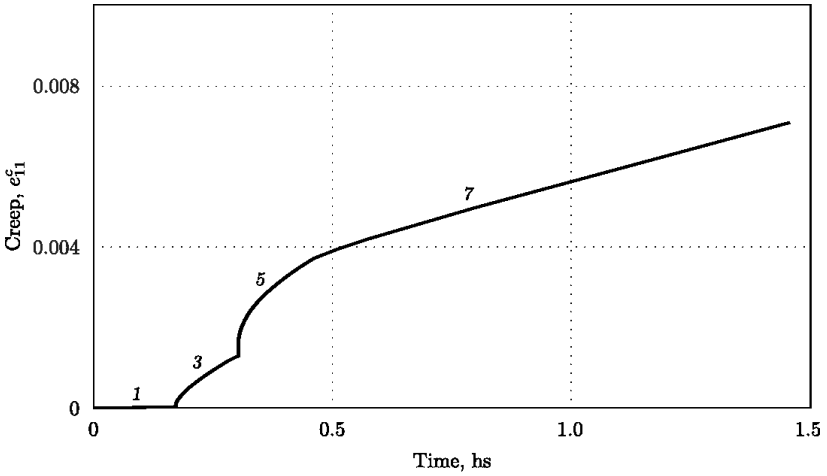


Рис. 10. История второго режима нагружения
[Figure 10. Stages of the second loading mode]



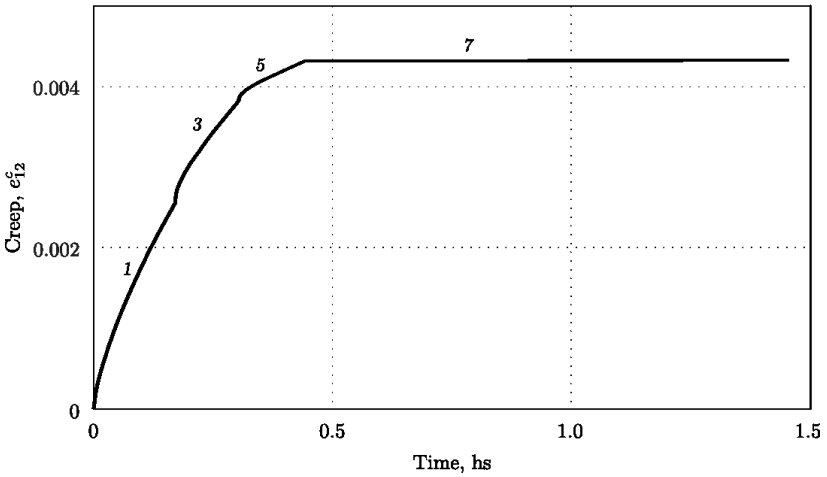


Рис. 11. Деформация ползучести при растяжении в условиях лучевых нагружений
[Figure 11. Tensile creep under conditions of the second loading mode]

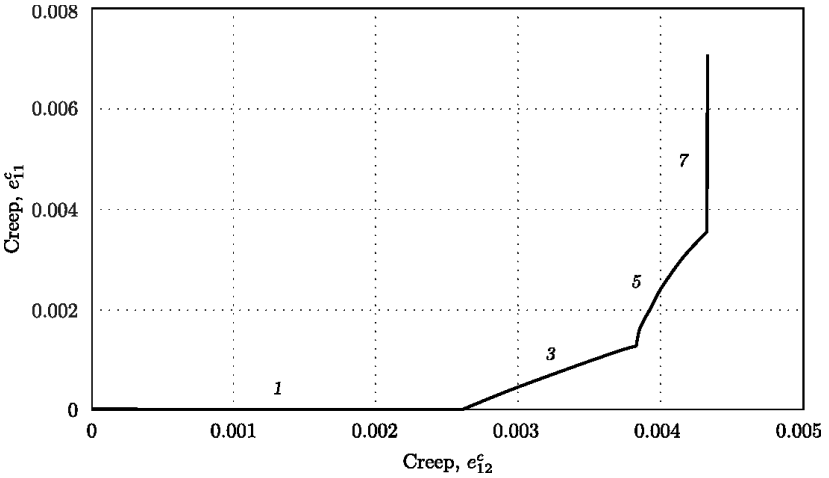


Рис. 12. Траектория деформирования при ползучести в условиях лучевых нагружений
[Figure 12. Creep deformation trajectory under conditions of the second loading mode]

скорости деформаций ползучести $\bar{\dot{e}}^c$ становится неколлинеарным вектору напряжений $\bar{\sigma}$ сразу же после угла вектора напряжения. Однако эта неколлинеарность имеет тенденцию к постепенному исчезновению по мере протекания процесса ползучести.

Дополнительно для лабораторных образцов после проведенных испытаний были выполнены металлографические исследования, которые показали, что наводораживание приводит к образованию гидридной составляющей сплава ВТ6 и увеличению микротвердости, что связано с повышением сжимающих микронапряжений в структуре сплава. Процесс образования гидридов титана начинается после превышения предела растворимости водорода в титановом сплаве. При увеличении содержания водорода от 0 до 0.3 % гидриды титана выпадают в структуре в виде выделений произвольной формы и образуют по границам зерен сплошную сетку. Также происходит увеличение доли β-фазы в результате фазового превращения $\alpha \to \beta$. Характерной особенностью указанной структуры является то, что материал значительно снижает пластические свойства при температуре 600°C, что подтверждается проведенными экспериментальными исследованиями процессов ползучести и, как следствие, приводит к снижению ресурсных характеристик материла в этих условиях.

Анализ результатов испытаний на ползучесть в условиях одноосного и многоосного нагружения лабораторных образцов сплава ВТ6 в исходном и наводороженном состоянии позволяет сделать вывод, что наводороженные образцы имеют тенденцию к уменьшению начальной скорости ползучести на начальном участке деформирования (см. рис. 6). Данный факт связан с образованием практически не деформируемой гидридной фазы и увеличением микротвердости сплава, однако при увеличении длины пути деформирования при ползучести скорость деформации ползучести начинает превосходить соответствующую скорость на образцах в состоянии поставки, что связано с дополнительным активным накоплением дефектов на границах фаз (α и β).

Заключение. Проведено экспериментальное исследование поведения металлических трубчатых образцов из материла ВТ6 при различных режимах нагружения. По результатам проведенных испытаний получены: исходная экспериментальная информация для получения материальных параметров и скалярных функций математической модели многоосной ползучести с учетом влияния агрессивной среды (наводораживания); зависимости изменения компонент тензора деформаций ползучести и времени до разрушения для указанных выше законов нагружения с учетом влияния агрессивной среды (наводораживания).

Полученная экспериментальная информация при многоосной ползучести сплава ВТ6 в условиях поставки и с учетом предварительного наводораживания в совокупности с металлографическими исследованиями позволяет обосновать возможность верификации математической модели термовязкопластичности с комбинированным упрочнением и входящих в ее состав материальных параметров для определенного класса траекторий нагружения с учетом влияния агрессивной среды на механические характеристики материала.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Л.А. Игумнов — визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.А. Казаков — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.Н. Шишулин — определение химического состава материала, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. И.А. Модин — проведение экспериментальных исследований, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.В. Жегалов — проведение экспериментальных исследований, обработка и анализ результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Самарский государственный технический университет).

Библиографический список

1. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Тарасов И. С. Уравнения состояния нестационарной ползучести при сложном нагружении // *ПМТФ*, 2018. №3. С. 191–202. https://doi.org/10.15372/PMTF20180320.
2. Волков И. А., Игумнов Л. А., Тарасов И. С., Шишулин Д. Н., Сметанин И. В. Оценка длительной прочности элементов конструкций при термомеханическом нагружении // *Проблемы прочности и пластичности*, 2018. Т. 80, №4. С. 495–512. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-4-494-512.
3. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 504 с.
4. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Миронов А. А., Тарасов И. С., Шишулин Д. Н., Сметанин И. В. Модель поврежденной среды для описания длительной прочности конструкционных материалов (металлов и их сплавов) // *Проблемы*

прочности и пластичности, 2017. Т. 79, № 3. С. 285–300. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300.

5. Бондарь В. С., Абашев Д. Р., Петров В. К. Сравнительный анализ вариантов теорий пластичности при циклических нагружениях // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2017. № 2. С. 23–44. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.02.
6. Ohashi Y., Kawai M., Kaito T. Inelastic behavior of type 316 stainless steel under multiaxial nonproportional cyclic stressings at elevated temperature // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1985. vol. 107, no. 2. pp. 101–109. https://doi.org/10.1115/1.3225781.
7. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification // *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982. vol. 1, no. 5. pp. 743–761.
8. Gorokhov V., Kazakov D., Kapustin S., Churilov Y. Simulation of fracture of heat-resistant alloys under creep and neutron irradiation conditions // *Procedia Structural Integrity*, 2020. no. 28. pp. 1416–1425. https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.114.
9. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members.* Amsterdam, London: North-Holland Publ., 1969. xiv+822 pp.
10. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций.* М.: Машиностроение-1, 2004. 263 с.
11. Murakami S., Ohno N. A constitutive equation of creep based on the concept of a creep-hardening surface // *Int. J. Solids Struct.*, 1982. vol. 18, no. 7. pp. 597–609. https://doi.org/10.1016/0020-7683(82)90042-7.
12. Igumnov L. A., Vlasov S. Y., Kazakov D. A., Zhegalov D. V., Modin I. A. Experimental studies of elastic-plastic deformation of structural materials under conditions of triaxial loading / *Multiscale Solid Mechanics* / Advanced Structured Materials, 141. Cham: Springer, 2021. pp. 203–212. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_16.
13. А. В. Кочетков, Н. В. Леонтьев, И. А. Модин, А. О. Савихин Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2018. № 52. С. 53–62. https://doi.org/10.17223/19988621/52/6.
14. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer // *AIP Conference Proceedings*, 2019. vol. 2116, 270003. https://doi.org/10.1063/1.5114277.
15. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1214, 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004.
16. Казаков Д. А., Капустин С. А., Коротких Ю. Г. *Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций.* Н. Новгород: Нижегородск. гос. ун-т, 1999. 226 с.
17. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями.* М.: Физматлит, 2008. 424 с.
18. Капустин С. А., Горохов В. А., Чурилов Ю. А. Численное моделирование процесса разрушения экспериментального образца с концентратором в условиях плоского изгиба // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2010. № 6. С. 47–53.
19. Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г., Казаков Д. А., Емельянов А. А., Тарасов И. С., Гусева М. А. Программная реализация процессов вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при термомеханическом нагружении // *Проблемы прочности и пластичности*, 2016. Т. 78, № 2. С. 188–207. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2016-78-2-188-207.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 286–302
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1850

MSC: 74-05, 74C99

Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium

© *L. A. Igumnov*[1,2], *D. A. Kazakov*[1,2], *D. N. Shishulin*[1,2], *I. A. Modin*[1,2], *D. V. Zhegalov*[2]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Research Institute of Mechanics,
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23, korp. 6, pr. Gagarina, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation.

Abstract

The results of experimental studies of high-temperature creep and long-term strength under conditions of a uniaxial and complex stress-strain state are presented. Tests for uniaxial tension, torsion and their combined action.

The tests were carried out on laboratory tubular specimens made of VT6 material at a temperature of 600°C as delivered and under conditions of exposure to an aggressive environment. An aggressive environment was created by preliminary hydrogenation of laboratory samples with different hydrogen-ion concentration by mass C_m equal to 0.15 % and 0.3 %.

Experimental information for the construction of material parameters and scalar functions of a thermal creep model with isotropic-kinematic hardening is presented. This information is obtained from basic experiments to determine: the initial radius of the zero level creep surface; fans of creep curves at different levels of specified stresses, with obtaining the characteristics of the third section on the creep diagram, which precedes the failure of the sample at a fixed temperature at a given time interval; torsional creep curves up to the moment of loss of stability in the working part of the specimen. Based on the results of tests for uniaxial loading, two levels of stress intensity were selected, with different combinations of which experiments were carried out under conditions of complex loading.

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A., Zhegalov D. V. Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 286–302. https://doi.org/10.14498/vsgtu1850 (In Russian).

Authors' Details:

Leonid A. Igumnov https://orcid.org/0000-0003-3035-0119
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Chief Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes[2]; e-mail: igumnov@mech.unn.ru

Dmitriy A. Kazakov https://orcid.org/0000-0002-9316-4105
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials[2]; e-mail: kazakov@mech.unn.ru

 © Samara State Technical University

The results of experimental studies of high-temperature creep and long-term strength under several different programs of isothermal loading under conditions of a complex stress-strain state are presented. Investigations are carried out for specimens made of VT6 alloy at delivery condition, under conditions of exposure to an aggressive environment. The obtained experimental information makes it possible to determine the necessary material parameters and to verify the used mathematical model of thermal creep.

Keywords: hydrogen saturation, unsteady creep, long-term strength, damage, resource, basic experiment, material parameters, complex loading.

Received: 10th March, 2021 / Revised: 21st April, 2021 / Accepted: 11th May, 2021 / First online: 28th June, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. L.A. Igumnov: Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. D.A. Kazakov: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. D.N. Shishulin: Determination of the chemical composition of the alloy; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. I.A. Modin: Experimental research; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. D.V. Zhegalov: Experimental research; Processing and analysis of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Samara State Technical University).

References

1. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Tarasov I. S. State equations of unsteady creep under complex loading, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 551–560. https://doi.org/10.1134/S0021894418030203.
2. Volkov I. A., Igumnov L. A., Tarasov I. S., Shishulin D. N., Smetanin I. V. Evaluating long-term strength of structural elements subjected to thermal-mechanical loading, *Problems of Strength and Plasticity*, 2018, vol. 80, no. 4, pp. 495–512 (In Russian). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-4-494-512.
3. Lokoshchenko A. M. *Creep and long-term strength of metals.* Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. https://doi.org/10.1201/b22242.

Denis N. Shishulin https://orcid.org/0000-0002-6527-557X
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials[2]; e-mail: shishulindn@gmail.com

Ivan A. Modin https://orcid.org/0000-0002-3561-4606
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes[2]; e-mail: mianet@mail.ru

Dmitriy V. Zhegalov https://orcid.org/0000-0002-7282-598X
Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Problems of Strength, Dynamics and Resource[2]; e-mail: zhegalov@mech.unn.ru

4. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., Mironov A. A., Tarasov I. S., Shishulin D. N., Smetanin I. V. damaged medium model for describing the process of long-term strength of structural materials (metals and their alloys), *Problems of Strength and Plasticity*, 2017, vol. 79, no. 3, pp. 285–300 (In Russian). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300.
5. Bondar V. S., Abashev D. R., Petrov V. K. Comparative analysis of variants of plasticity theories under cyclic loading, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 2, pp. 23–44 (In Russian). https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.2.02.
6. Ohashi Y., Kawai M., Kaito T. Inelastic behavior of type 316 stainless steel under multiaxial nonproportional cyclic stressings at elevated temperature, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1985, vol. 107, no. 2, pp. 101–109. https://doi.org/10.1115/1.3225781.
7. Murakami S., Imaizumi T. Mechanical description of creep damage state and its experimental verification, *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982, vol. 1, no. 5, pp. 743–761.
8. Gorokhov V., Kazakov D., Kapustin S., Churilov Y. Simulation of fracture of heat-resistant alloys under creep and neutron irradiation conditions, *Procedia Structural Integrity*, 2020, no. 28, pp. 1416–1425. https://doi.org/10.1016/j.prostr.2020.10.114.
9. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, xiv+822 pp.
10. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Destruction of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 263 pp. (In Russian)
11. Murakami S., Ohno N. A constitutive equation of creep based on the concept of a creep-hardening surface, *Int. J. Solids Struct.*, 1982, vol. 18, no. 7, pp. 597–609. https://doi.org/10.1016/0020-7683(82)90042-7.
12. Igumnov L. A., Vlasov S. Y., Kazakov D. A., Zhegalov D. V., Modin I. A. Experimental studies of elastic-plastic deformation of structural materials under conditions of triaxial loading, In: *Multiscale Solid Mechanics*, Advanced Structured Materials, 141. Cham, Springer, 2021, pp. 203–212. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_16.
13. Kochetkov A. V., Leont'ev N. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2018, no. 52, pp. 53–62 (In Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/52/6.
14. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer, *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2116, 270003. https://doi.org/10.1063/1.5114277.
15. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1214, 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004.
16. Kazakov D. A., Kapustin S. A., Korotkikh Yu. G. *Modelirovanie protsessov deformirovaniia i razrusheniia materialov i konstruktsii* [Modeling of the Processes of Deformation and Fracture of Materials and Structures]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 1999, 226 pp. (In Russian)
17. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of State of Viscoelastic Plastic Media with Damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian)
18. Kapustin S. A., Gorokhov V. A., Churilov Y. A. Numerical simulation of the failure process for an experimental sample with a concentrator under plane bending conditions, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2010, vol. 39, no. 6, pp. 549–553. https://doi.org/10.3103/S1052618810060063.
19. Volkov I. A., Igumnov L. A., Korotkikh Yu. G., Kazakov D. A., Emelyanov A. A., Tarasov I. S., Guseva M. A. Software implementation of viscoplastic deformation and damage accumulation processes in structural alloys under thermal-mechanical loading, *Problems of Strength and Plasticity*, 2016, vol. 78, no. 2, pp. 188–207 (In Russian). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2016-78-2-188-207.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 303–319
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1829

УДК 539.311

Равновесие жестко закрепленной на внешней поверхности полой трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил

© *А. А. Фукалов*[1], *А. В. Зайцев*[1], *Ю. В. Соколкин*[1], *Ю. В. Баяндин*[2]

[1] Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, 29.
[2] Институт механики сплошных сред УрО РАН, Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

С использованием разложения компонент вектора перемещений по окружной и радиальной координатам в ряды по полиномам Лежандра и обобщенных степенных рядов получено точное аналитическое решение задачи о равновесии жестко закрепленного на внешней поверхности толстостенного трансверсально-изотропного центрально-симметричного полого тела, которое находится под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил.

В качестве примера использования полученного аналитического решения проанализировано влияние массовых сил на характер распределения независимых инвариантов тензора напряжений в поперечном сечении тяжелой железобетонной сферы, внутренняя поверхность которой свободна от внутреннего давления. На основе многокритериального подхода, описывающего различные механизмы исчерпания несущей способности (от растяжения или сжатия в радиальном и окружном направлениях и межслойного сдвига), определены области тяжелой железобетонной сферы, в которых может быть инициировано разрушение.

Проведено качественное и количественное сравнение полей напряжений в точках поперечных сечений толстостенных тяжелых сфер с результатами численного решения той же задачи в осесимметричной и трехмерной постановках в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Фукалов А. А., Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Баяндин Ю. В. Равновесие жестко закрепленной на внешней поверхности полой трансверсально-изотропной толстостенной сферы, находящейся под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 303–319. https://doi.org/10.14498/vsgtu1829.

Сведения об авторах

Антон Александрович Фукалов https://orcid.org/0000-0003-3009-7379
старший преподаватель; каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: mr_aa@mail.ru

Алексей Вячеславович Зайцев https://orcid.org/0000-0003-0578-7917
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

и ABAQUS 6.11. Оба пакета продемонстрировали минимальное отклонение численно определенных значений инвариантов напряжений от аналитического решения в осесимметричной постановке и различие с сопоставимой погрешностью — в трехмерной. В последнем случае представление численных результатов для напряжений и деформаций в компонентной форме привело к неожиданному эффекту — появлению существенных ошибок по сравнению с точным аналитическим решением. Для исключения обнаруженных при определении напряженно-деформированного состояния ошибок, которые обусловлены только особенностями определения сферической системы координат в конечноэлементных пакетах ANSYS 13.0 и ABAQUS 6.11, необходимо использовать представление полученных результатов в инвариантном виде.

Ключевые слова: толстостенная трансверсально-изотропная тяжелая сфера, равновесие, гравитационные силы, точное аналитическое решение, механизмы начала разрушения, верификация конечноэлементных решений, ANSYS 13.0, ABAQUS 6.11.

Получение: 5 октября 2020 г. / Исправление: 19 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 11 июня 2021 г.

1. Введение. В различных отраслях промышленности, строительстве, геологии, на предприятиях аэрокосмического и нефтегазохимического комплексов находят применение разнообразные элементы конструкций и сооружений в виде массивных толстостенных центрально-симметричных тел, изготавливаемых из анизотропных материалов, весом которых нельзя пренебречь. Наиболее распространенными видами нагрузки этих объектов являются квазистатическое или слабо изменяющееся во времени равномерное и/или неравномерное внутреннее и/или внешнее давление и собственный вес.

Получение новых аналитических решений задач о равновесии анизотропных сферических тел важно и актуально для разработки инженерных методов уточненного прочностного анализа. Конструкции и сооружения создаются, как правило, одновременно с материалом, из которого они изготовлены. Получение аналитических решений позволит разработать методики экспериментальной идентификации материальных постоянных и функций анизотропных материалов с целью расширения базы определяющих соотношений.

Большую популярность при решении научных и инженерных задач, возникающих при определении напряженно-деформированного состояния, оптимальном проектировании и оценке прочности элементов конструкций ответственного назначения, получили численные методы. Это обусловлено стремительным развитием, доступностью и широкими возможностями современной вычислительной техники. При проведении вычислительных экспериментов по исследованию напряженно-деформированного состояния элементов

Юрий Викторович Соколкин https://orcid.org/0000-0003-3255-1360
доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. механики композиционных материалов и конструкций

Юрий Витальевич Баяндин https://orcid.org/0000-0002-1824-1940
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник лаб. физических основ прочности; e-mail: buv@icmm.ru

конструкций возникает вопрос о корректности полученных результатов: для успешного применения численных методов требуется провести оценку правильности составленного алгоритма, обоснование выбора способа дискретизации на основе сравнения численных расчетов с точными аналитическими решениями тестовых задач для тел простейшей геометрии. Наиболее остро (из-за ограниченного количества задач, имеющих аналитические решения) эта проблема возникает при необходимости учета в вычислительных экспериментах анизотропии деформационных и прочностных свойств материалов.

2. Аналитическое решение. Рассмотрим равновесие упругого толстостенного центрально-симметричного тела, жестко закрепленного на внешней поверхности радиуса ρ_2 и находящегося в равновесии под действием гравитационных сил и равномерно распределенного давления p, заданного на внутренней поверхности радиуса ρ_1. Будем предполагать, что материал, из которого изготовлено тело, линейно упругий однородный с постоянным по всему объему удельным весом γ, сферически трансверсально-изотропный относительно любого радиус-вектора, проведенного из центра симметрии в данную точку.

В геометрический центр тела поместим начало сферической ортогональной системы координат ρ, θ и φ. В силу осевой симметрии задачи радиальные u_ρ и меридиональные u_θ перемещения, радиальные ($\sigma_{\rho\rho}$ и $\varepsilon_{\rho\rho}$), окружные ($\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$) и меридиональные ($\sigma_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\theta\theta}$) нормальные напряжения и деформации, касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ и сдвиговые деформации $\gamma_{\rho\theta}$ не зависят от окружной координаты φ. Это позволяет записать геометрические соотношения Коши и уравнения равновесия следующим образом:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_\theta}{\rho}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_\rho}{\rho},$$
$$\gamma_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{u_\theta}{\rho}; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\left(2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta\right) + F_\rho = 0, \\ &\frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\left[(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\tau_{\rho\theta}\right] + F_\theta = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $F_\rho = -\gamma\cos\theta$ и $F_\theta = \gamma\sin\theta$ — компоненты вектора массовых сил.

Будем называть центрально-симметричное тело тяжелым в случае, если величины F_ρ и F_θ имеют один порядок с остальными слагаемыми уравнений (2) и, как следствие, при описании механического поведения возникает необходимость учета массовых сил.

Определяющие соотношения

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\rho} = A_{11}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{12}(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}), \quad && \sigma_{\varphi\varphi} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{23}\varepsilon_{\theta\theta}, \\ &\sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{\rho\rho} + A_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta}, && \tau_{\rho\theta} = A_{44}\gamma_{\rho\theta} \end{aligned} \tag{3}$$

для сферически трансверсально-изотропного тела содержат постоянные

$$A_{11} = \frac{\tilde{E}}{m}(1-\nu), \quad A_{12} = \frac{E\tilde{\nu}}{m}, \quad A_{23} = \frac{E}{(1+\nu)m}\Big(\nu + \nu_1^2\frac{E}{\tilde{E}}\Big),$$

$$A_{22} = \frac{E}{(1+\nu)m}\Big(1 - \tilde{\nu}^2\frac{E}{\tilde{E}}\Big), \quad A_{44} = \tilde{G}, \quad m = 1 - \nu - 2\tilde{\nu}^2\frac{E}{\tilde{E}}.$$

Здесь $\tilde{E}$ и E — модули Юнга вдоль радиальной координаты и в направлении касательной; $\tilde{G}$ — модуль сдвига для диаметральной плоскости; $\tilde{\nu}$ и ν — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечную деформацию в направлениях θ и φ при растяжении вдоль радиальной координаты ρ и в направлении φ и θ при растяжении в направлениях θ и φ соответственно.

Граничные условия для находящегося в равновесии под действием гравитационных сил и равномерно распределенного давления, заданного на внутренней поверхности рассматриваемого толстостенного центрально-симметричного тела с жестко закрепленной внешней поверхностью имеют вид

$$u_\rho\big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad u_\theta\big|_{\rho=\rho_2} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}\big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \sigma_{\rho\rho}\big|_{\rho=\rho_1} = -p. \tag{4}$$

Последовательная подстановка геометрических соотношений Коши (1) в определяющие соотношения (3), а затем полученного результата — в уравнения равновесия (2) позволяет записать систему неоднородных дифференциальных уравнений Ламе в частных производных:

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\Big[2A_{11}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho} + (A_{12}+A_{44})\Big(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial\rho}\operatorname{ctg}\theta\Big)\Big] + \\ &+ \frac{1}{\rho^2}\Big[A_{44}\Big(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\Big) + (A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44})\Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_\theta\operatorname{ctg}\theta\Big) + \\ &\qquad + 2(A_{12} - A_{22} - A_{23})u_\rho\Big] = \gamma\cos\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\Big[2A_{44}\frac{\partial u_\theta}{\partial\rho} + (A_{12}+A_{44})\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial\rho\partial\theta}\Big] + \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2}\Big[A_{22}\Big(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta\Big) + (A_{22} + A_{23} + 2A_{44})\frac{\partial u_\rho}{\partial\theta} - \\ &\qquad - (A_{23} + 2A_{44} + A_{22}\operatorname{ctg}^2\theta)u_\theta\Big] = -\gamma\sin\theta. \end{aligned}$$

Следуя [1, 2], представим радиальную u_ρ и меридиональную u_θ компоненты вектора перемещений в виде бесконечных рядов по полиномам Лежандра:

$$u_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\rho_n}(\rho)\,P_n(\cos\theta), \quad u_\theta = -\sum_{n=0}^{\infty} u_{\theta_n}(\rho)\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}.$$

В результате этого вместо одной системы неоднородных дифференциальных уравнений Ламе в частных производных получим последовательность из n систем обыкновенных дифференциальных уравнений ($n = 0, 1, 2, \dots$) для каждого члена разложения u_{ρ_n} и u_{θ_n} [3–9]:

$$\begin{aligned} a_{1n}u''_{\rho_n} + a_{2n}\frac{1}{\rho}u'_{\rho_n} + a_{3n}\frac{1}{\rho^2}u_{\rho_n} + a_{4n}\frac{1}{\rho}u'_{\theta_n} + a_{5n}\frac{1}{\rho^2}u_{\theta_n} = A_n, \\ b_{1n}u''_{\theta_n} + b_{2n}\frac{1}{\rho}u'_{\theta_n} + b_{3n}\frac{1}{\rho^2}u_{\theta_n} + b_{4n}\frac{1}{\rho}u'_{\rho_n} + b_{5n}\frac{1}{\rho^2}u_{\rho_n} = B_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Коэффициенты, входящие в (5), записываются следующим образом:

$$a_{1n} = A_{11}, \quad a_{2n} = 2A_{11}, \qquad a_{3n} = 2(A_{12} - A_{22} - A_{23}) - nA_{44}(n+1),$$
$$a_{4n} = n(A_{12} + A_{44})(n+1), \quad a_{5n} = n(A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44})(n+1);$$

$$b_{1n} = A_{44}, \quad b_{2n} = 2A_{44}, \qquad b_{3n} = -A_{23} - 2A_{44} - A_{22}(n^2 + n - 1),$$
$$b_{4n} = -A_{12} - A_{44}, \qquad b_{5n} = -A_{22} - A_{23} - 2A_{44};$$

$$A_n = \begin{cases} \gamma, & n = 1, \\ 0, & n = 0,\ n > 1; \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} -\gamma, & n = 1, \\ 0, & n = 0,\ n > 1. \end{cases}$$

Каждая из систем обыкновенных дифференциальных уравнений (5), записанная для своего $n = 0, 1, 2, \ldots$, будет рассматриваться в виде самостоятельной задачи со своими граничными условиями, полученными из разложения (4) в бесконечные ряды по полиномам Лежандра, и будет отражать вклад различных составляющих нагрузки. Все системы (за исключением $n = 1$) являются однородными.

Так, например, равномерно распределенное давление учитывается при решении краевой задачи, записанной для $n = 0$. При этом из двух уравнений равновесия (2) остается только первое, из четырех геометрических соотношений Коши (1) остаются первые три, которые в силу $u_\theta \equiv 0$ еще и значительно упрощаются. Решение краевой задачи для $n = 0$ известно

$$u_\rho = C_1^{(0)} \rho^{-1/2-k} + C_2^{(0)} \rho^{-1/2+k}, \quad u_\theta \equiv 0$$

и является классическим [10]. Здесь

$$k = \sqrt{1/4 + 2(A_{22} + A_{23} - A_{12})/A_{11}}$$

является показателем анизотропии для сферически трансверсально-изотропного тела, на которое действует центрально-симметричная нагрузка [11].

При решении краевой задачи для $n = 1$ учитывается вклад массовых сил. Поэтому ненулевыми являются радиальное u_ρ и меридиональное u_θ перемещения. Решение неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $n = 1$ представляет суперпозицию любого частного решения рассматриваемой и общего решения (записанного в виде многочлена) соответствующей однородной системы [3, 5–7]. Характеристические числа определяются из решения характеристического уравнения четвертого порядка [3].

При решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при $n > 1$ может быть учтена неравномерно распределенная поверхностная нагрузка. Поскольку в рассматриваемом частном случае неравномерно распределенное давление отсутствует, разложения в ряды по полиномам Лежандра граничных условий (4) будут иметь только нулевые слагаемые. Как следствие, при $n > 1$ однородные системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеют тривиальные решения $u_\rho = u_\theta \equiv 0$ [3].

На основе вышеизложенного общее решение краевой задачи (1)–(3) может быть записано следующим образом [3, 6]:

$$\begin{aligned} u_\rho &= C_1^{(0)} \rho^{-1/2-k} + C_2^{(0)} \rho^{-1/2+k} + \\ &\quad + (x_1 C_1^{(1)} + x_2 C_2^{(1)} \rho^{-1} + x_3 C_3^{(1)} \rho^{-1/2+t} + x_4 C_4^{(1)} \rho^{-1/2-t} + H_\rho \rho^2) \cos\theta, \\ u_\theta &= (C_1^{(1)} + C_2^{(1)} \rho^{-1} + C_3^{(1)} \rho^{-1/2+t} + C_4^{(1)} \rho^{-1/2-t} + H_\theta \rho^2) \sin\theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{A_{22} + A_{23} + 2A_{44}}{A_{12} - A_{22} - A_{23} - A_{44}},$$
$$x_3 = \frac{A_{44}[A_{12} - 2\,(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} + 2\,(A_{12} + A_{44})\,t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})},$$
$$x_4 = \frac{A_{44}[A_{12} - 2(A_{22} + A_{23}) - 3A_{44} - 2(A_{12} + A_{44})t]}{2(A_{12} + A_{44})^2 - A_{11}(A_{22} + A_{23} + 2A_{44})},$$
$$H = 2\left\{A_{11}(A_{22} + A_{23} - 4A_{44}) + 2[A_{44}(A_{22} + A_{23} - 3A_{12}) - A_{12}^2]\right\},$$
$$H_\rho = \frac{\gamma}{H}[A_{22} + A_{23} - 2(A_{12} + A_{44})], \quad H_\theta = \frac{\gamma}{H}[2(A_{11} - A_{44}) - A_{22} - A_{23}].$$

Обратим внимание на то, что входящие в равенства (6) слагаемые $H_\rho\rho^2$ и $H_\theta\rho^2$ являются частными решениями рассматриваемой неоднородной системы, а положительный параметр

$$t = \sqrt{\frac{9}{4} + 2\frac{A_{22} + A_{23} - A_{12}}{A_{11}} + \frac{A_{22} + A_{23}}{A_{44}} - 2\frac{A_{12}(A_{12} + 2A_{44})}{A_{11}A_{44}}}$$

является показателем анизотропии для центрально-симметричного трансверсально-изотропного тела, находящегося под действием вертикальной осесимметричной нагрузки. В отличие от k, введенного С. Г. Лехницким [11], показатель t зависит от модуля сдвига материала.

При подстановке выражений (6) в граничные условия (4) могут быть определены постоянные интегрирования:

$$KC_1^{(0)} = 2p\rho_1^{3/2+k}\rho_2^{2k}, \quad KC_2^{(0)} = -2p\rho_1^{3/2+k},$$
$$K = [A_{11}(2k-1) + 4A_{12}]\rho_1^{2k} + [A_{11}(2k+1) - 4A_{12}]\rho_2^{2k},$$

$$\begin{aligned}
K_C C_2^{(1)} = \rho_1\sqrt{\rho_2}\Big(&-H_\rho\Big\{4A_{12}\rho_2\big[(1+x_4)(2t-1)\rho_1^{5/2+2t} + \\
&+ (1+x_3)(2t+1)\rho_1^{5/2}\rho_2^{2t} + (x_4 - x_3 - 2\{2 + x_4 + x_3\})\rho_1^t\rho_2^{5/2+t}\big] + \\
&+ A_{11}\big[2(1+x_3)(6 + 5x_4 + 2t\{2+x_4\})\rho_1^{5/2}\rho_2^{1+2t} - \\
&\qquad - 2(1+x_4)(6 + 5x_3 - 2t\{2+x_3\})\rho_1^{5/2+2t}\rho_2 - Y_5\rho_1^t\rho_2^{7/2+t}\big]\Big\} + \\
&+ H_\theta\Big\{4A_{12}\big[(1+x_4)(5 + 4x_3 - 2t)\rho_1^{5/2+2t}\rho_2 - \\
&- (1+x_3)(5 + 4x_4 + 2t)\rho_1^{5/2}\rho_2^{1+2t} + (x_3 - x_4 + 2\{2 + x_4 + x_3\})\rho_1^t\rho_2^{7/2+t}\big] + \\
&\qquad + A_{11}\rho_2\big[2x_3(1+x_4)(2t-1)\rho_1^{5/2+2t} + \\
&\qquad\qquad + 2x_4(1+x_3)(2t+1)\rho_1^{5/2}\rho_2^{2t} + Y_5\rho_1^t\rho_2^{5/2+t}\big]\Big\}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_C C_3^{(1)} = -2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}\Big(&H_\rho\Big\{A_{11}\big[2(4+3x_2)(1+x_4)\rho_1^{5/2+t}\rho_2 + \\
&+ Y_1\rho_2^{7/2+t} - (6 + 5x_4 + 2t\{2+x_4\})(1+x_2)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t}\big] + \\
&+ A_{12}\big[2(1+x_4)\rho_1^{5/2+t}\rho_2 + Y_3\rho_2^{7/2+t} - (1+x_2)(2t+1)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t}\big]\Big\} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ H_\theta\Big\{2A_{12}\big[2(3+2x_2)(1+x_4)\rho_1^{5/2+t}\rho_2 - \\
&\qquad - (1+x_2)(5+4x_4+2t)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} + Y_3\rho_2^{7/2+t}\big] - \\
&\quad - A_{11}\big[x_2\big(2\{1+x_4\}\rho_1^{5/2+t}\rho_2 + (3+x_4+2t\{1-x_4\})\rho_2^{7/2+t} - \\
&\qquad - x_4\{2t+1\}\rho_1^3\rho_2^{1/2+t}\big) - x_4(2t+1)(\rho_1^3+2\rho_2^3)\rho_2^{1/2+t}\big]\Big\}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_C C_4^{(1)} = 2\rho_1^t\rho_2^t\Big(&H_\theta\Big\{2A_{12}\big[2(3+2x_2)(1+x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} - \\
&\qquad - (5+4x_3-2t)(1+x_2)\rho_1^{7/2+t} - Y_4\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3\big] - \\
&- A_{11}\big[2x_2(1+x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} + (1+x_2)(2t-1)x_3\rho_1^{7/2+t} + Y_2\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3\big]\Big\} + \\
&+ H_\rho\Big\{2A_{12}\big[2(1+x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} + (1+x_2)(2t-1)\rho_1^{7/2+t} - Y_4\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3\big] + \\
&\quad + A_{11}\big[2(4+3x_2)(1+x_3)\rho_1^3\rho_2^{1/2+t} - \\
&\qquad - (1+x_2)(6+5x_3-2t\{2+x_3\})\rho_1^{7/2+t} - Y_2\rho_1^{1/2+t}\rho_2^3\big]\Big\}\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_C = A_{11}&\big\{2[Y_1(1+x_3)\rho_2^{2t} + Y_2(1+x_4)\rho_1^{2t}]\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2} - Y_5[1+x_2]\rho_1^{1+t}\rho_2^t\big\} + \\
&+ 4A_{12}\big\{[Y_3(1+x_3)\rho_2^{2t} + Y_4(1+x_4)\rho_1^{2t}]\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2} - \\
&\qquad - [1+x_2][(1+x_4)(2t-1) + (1+x_3)(2t+1)]\rho_1^{1+t}\rho_2^t\big\},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{gathered}
Y_1 = 2x_4[2t+1] - x_2[3+x_4+2t(1-x_4)], \\
Y_3 = (1+x_2)(2t+1) - 2(1+x_4), \\
Y_2 = 2x_3[2t-1] + x_2[3+x_3+2t(x_3-1)], \\
Y_4 = (1+x_2)(2t-1) + 2(1+x_3), \\
Y_5 = x_4(3-4t[t-1]) + x_3(4t[1+t+2x_4]-3).
\end{gathered}
$$

Константа $C_1^{(1)}$ не приводится из-за громоздкости ее представления.

Подстановка уравнений (6) в геометрические соотношения (1) позволяет в явном виде записать выражения для компонент тензора деформаций, а подстановка последних в (3) — выражения для компонент тензора напряжения [6]:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{2}\rho^{-3/2-k}&\big\{C_{1_0}\big[4A_{12} - A_{11}(1+2k)\big] + C_{2_0}\big[4A_{12} - A_{11}(1-2k)\big]\rho^{2k}\big\} + \\
&+ \Big\{2A_{12}\big[(1+x_2)C_{2_1}\rho^{-2} + (1+x_3)C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + (1+x_4)C_{4_1}\rho^{-3/2-t} + \\
&\quad + (H_\rho + H_\theta)\rho\big] - \frac{1}{2}A_{11}\big[2x_2C_{2_1}\rho^{-2} + (1-2t)x_3C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + \\
&\qquad + (1+2t)x_4C_{4_1}\rho^{-3/2-t} - 4H_\rho\rho\big]\Big\}\cos\theta,
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\rho^{-3/2-k}\big\{C_{1_0}\big[2(A_{22}+A_{23}) - A_{12}(1+2k)\big] + \\ + C_{2_0}\big[2(A_{22}+A_{23}) - A_{12}(1-2k)\big]\rho^{2k}\big\} + \\ + \Big\{(A_{22}+A_{23})\big[(1+x_2)C_{2_1}\rho^{-2} + (1+x_3)C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + \\ + (1+x_4)C_{4_1}\rho^{-3/2+t} + (H_\rho + H_\theta)\rho\big] - \\ - \frac{1}{2}A_{12}\big[2x_2C_{2_1}\rho^{-2} + (1-2t)x_3C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + \\ + (1+2t)x_4C_{4_1}\rho^{-3/2-t} - 4H_\rho\rho\big]\Big\}\cos\theta, \quad (7)$$

$$\tau_{\rho\theta} = -A_{44}\Big[(2+x_2)C_{2_1}\rho^{-2} + (3/2+x_3-t)C_{3_1}\rho^{-3/2+t} + \\ + \Big(\frac{3}{2}+x_4+t\Big)C_{4_1}\rho^{-3/2-t} + (H_\rho - H_\theta)\rho\Big]\sin\theta.$$

3. Сравнение полученного нового аналитического и численных конечноэлементных решений. В качестве примера использования точного аналитического решения (6) и (7) может быть проанализирован вклад массовых сил в напряженное состояние железобетонной сферы (рассматривается в качестве модели монолитной крепи сферической горной выработки), а также проведена оценка ее начальной прочности по совокупности критериев.

В работе [12] были введены независимые величины для тензоров деформаций

$$J_\varepsilon^{\mathrm{I}} = \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}, \quad J_\varepsilon^{\mathrm{II}} = \varepsilon_{\rho\rho}, \\ J_\varepsilon^{\mathrm{III}} = \sqrt{(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\theta\theta})^2 + 4\gamma_{\varphi\theta}^2}, \quad J_\varepsilon^{\mathrm{IV}} = \sqrt{\gamma_{\varphi\rho}^2 + \gamma_{\theta\rho}^2}$$

и напряжений

$$J_\sigma^{\mathrm{I}} = 0.5(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}), \quad J_\sigma^{\mathrm{II}} = \sigma_{\rho\rho}, \quad (8) \\ J_\sigma^{\mathrm{III}} = \sqrt{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})^2 + 4\tau_{\varphi\theta}^2}, \quad J_\sigma^{\mathrm{IV}} = \sqrt{\tau_{\varphi\rho}^2 + \tau_{\theta\rho}^2},$$

инвариантные относительно ортогональных преобразований, допустимых над трансверсально-изотропным однородным телом. Эти независимые инварианты были использованы для разработки моделей механики повреждаемых трансверсально-изотропных сред [13], описывающих следующие механизмы разрушения:

– от растяжения или сжатия в окружном (J_σ^{I} или $J_\varepsilon^{\mathrm{I}}$) и радиальном ($J_\sigma^{\mathrm{II}}$ или $J_\varepsilon^{\mathrm{II}}$) направлениях;
– от сдвигов по сферическим поверхностям изотропии (J_σ^{III} или $J_\varepsilon^{\mathrm{III}}$) и межслойных сдвигов ($J_\sigma^{\mathrm{IV}}$ или $J_\varepsilon^{\mathrm{IV}}$).

На рис. 1 представлены распределения ненулевых инвариантов тензоров напряжений (8) в точках тяжелой железобетонной сферы вдоль меридиональной θ и обезразмеренной радиальной координаты $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_1)/(\rho_2 - \rho_1)$, построенные на основе полученного точного аналитического решения (6) и (7). Будем предполагать, что внутреннее давление отсутствует ($p = 0$ МПа), а гео-

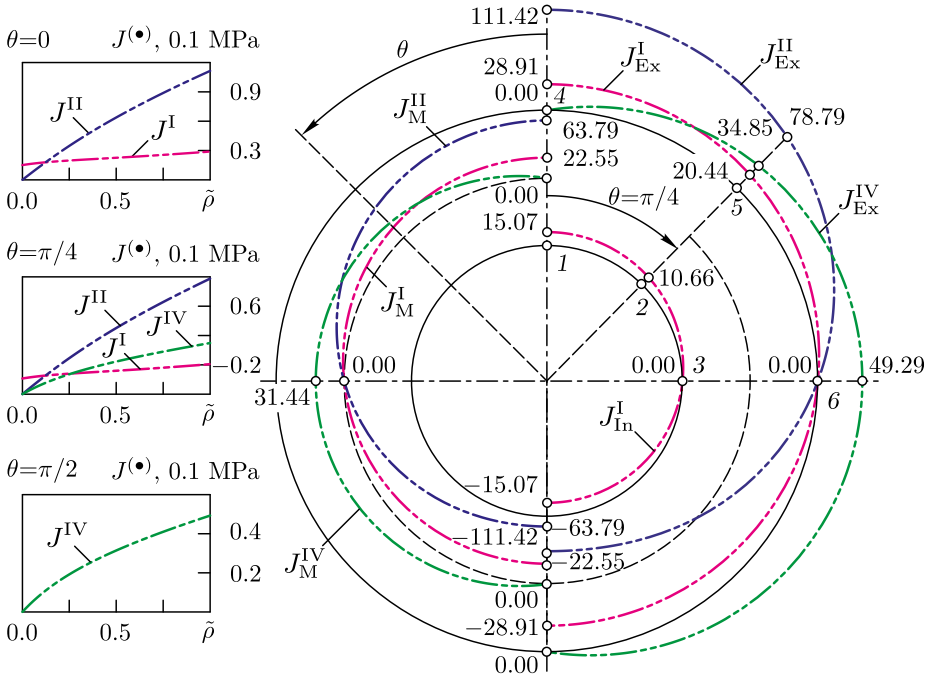


Рис. 1. Распределение независимых инвариантов тензора напряжений (МПа) на свободной от нагрузок внутренней ($J_{\mathrm{In}}^{(\bullet)}$), закрепленной внешней ($J_{\mathrm{Ex}}^{(\bullet)}$) и серединной ($J_{\mathrm{M}}^{(\bullet)}$) поверхностях железобетонной сферы

[Figure 1. The distribution of the independent invariants of the stress tensor (MPa) on the load-free internal ($J_{\mathrm{In}}^{(\bullet)}$), fixed external ($J_{\mathrm{Ex}}^{(\bullet)}$), and medial ($J_{\mathrm{M}}^{(\bullet)}$) surfaces]

метрические размеры и свойства материала центрально-симметричного тела принимают следующие значения: $\rho_1 = 3.0$ м и $\rho_2 = 6.0$ м; $\gamma = 40.0$ кН/м^3, $E = 40.0$ ГПа, $\tilde{E} = 25.0$ ГПа, $\tilde{G} = 11.0$ ГПа, $\nu = 0.075$ и $\tilde{\nu} = 0.15$.

Как видим, в отличие от «классического» решения задачи Ламе для анизотропных сфер [10, 11] компоненты тензора напряжений и их инварианты в рассматриваемом случае являются ненулевыми даже при отсутствии внутреннего давления. Это объясняется тем, что полученное новое аналитическое решение (6) и (7) учитывает вклад массовых сил.

На внутренней свободной поверхности (рис. 1) ненулевым является только первый инвариант J_σ^{I}, который в верхней части тяжелой железобетонной сферы всюду монотонно возрастает вдоль $\tilde{\rho}$, а в нижней — всюду монотонно убывает, принимая нулевые значения в точках горизонтальной диаметральной плоскости. При изменении радиальной координаты от свободной поверхности к закрепленной второй инвариант J_σ^{II} возрастает всюду по абсолютной величине. Поскольку своих наибольших по абсолютной величине значений J_σ^{I} и J_σ^{II} достигают в точках вертикальной диаметральной плоскости, эти точки являются наиболее опасными с точки зрения возможности начала разрушения тяжелого центрально-симметричного тела от растяжения или сжатия в окружном и радиальном направлении. Четвертый инвариант J_σ^{IV} принимает нулевые значения.

Определение перемещений, деформаций и напряжений в толстостенной сфере с жестко закрепленной внешней поверхностью, находящейся в равно-

весии под действием гравитационных сил, было проведено численно методом конечных элементов в пакетах `ANSYS 13.0` и `ABAQUS 6.11`. Краевая задача осесимметрична относительно вертикальной диаметральной оси. Этот очевидный вывод следует из центральной симметрии рассматриваемого тела и осевой симметрии действующей нагрузки.

Проведено сравненение результатов расчетов методом конечных элементов с полученным аналитическим решением (6) и (7), позволившее установить совпадение численно определенных значений компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений в осесимметричной постановке для трансверсально-изотропного тела в сферической системе координат в точках экстремумов с величинами, вычисленными аналитически, с погрешностью, не превышающей 0.1 %.

Исследование напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов конструкций сложной формы требует решения краевых задач в трехмерных постановках, учитывающих особенности геометрии конструкций и характер приложенных нагрузок. В связи с этим следует обратить внимание на ограничения, отмеченные в документации к пакету `ANSYS` (`ANSYS` Release 13.0 Documentation): “Singularities also occur in the spherical coordinate system at $\varphi = \pm 90°$, such that these locations should not be used” (из-за возникающей сингулярности для сферической системы координат не следует использовать сечения сферы с окружной координатой $\varphi = \pm\pi/2$).

Проведем в пакете `ANSYS 13.0` дискретизацию симметричной четвертой части толстостенного центрально-симметричного тела в локальной сферической системе координат, развернутой на угол $\varphi = -\pi/4$ относительно вертикальной оси `OY`, на 1920 (5 элементов вдоль радиуса) и на 15360 (10 элементов вдоль радиуса, для проверки сходимости) гексаэдральных элементов `Solid95` с квадратичной аппроксимацией поля перемещений так, чтобы получилась регулярная сетка конечных элементов, согласующаяся с симметрией тела. В пакете `ABAQUS 6.11` были использованы те же самые конечноэлементные сетки, которые состояли из элементов `C3D20R` с квадратичной аппроксимацией поля перемещений и имели такие же степени дискретизации (1920 и 15360 элементов). При использовании сферической системы координат в пакете `ANSYS` индекс `X` отождествляется с радиальным ρ, `Y` — с меридиональным θ, а `Z` — с окружным φ направлением.

Вследствие особенностей определения в пакетах `ANSYS` и `ABAQUS` сферической системы координат результат численного конечноэлементного решения задачи соответствует осесимметричному случаю, рассмотренному ранее, только в точках вертикальной диаметральной плоскости при $\varphi = 0$. В любых других точках тяжелого центрально-симметричного тела радиальные компоненты искомых полей совпадают с вычисленными аналитически. Однако меридианальные u_θ и окружные u_φ компоненты вектора перемещений, а также сдвиговые деформации $\gamma_{\rho\theta}$ и касательные напряжения $\tau_{\rho\theta}$ значительно отличаются. Так, например, в аналитическом решении (6) перемещения u_φ являются нулевыми. А результаты конечноэлементного решения, полученные с использованием пакета `ANSYS 13.0` (рис. 2), показывают, что эти же самые окружные перемещения оказываются сопоставимыми по абсолютной величине с экстремальными значениями остальных компонент u_ρ и u_θ. Аналогичные ненулевые значения имеют место в полученном численном конечно-

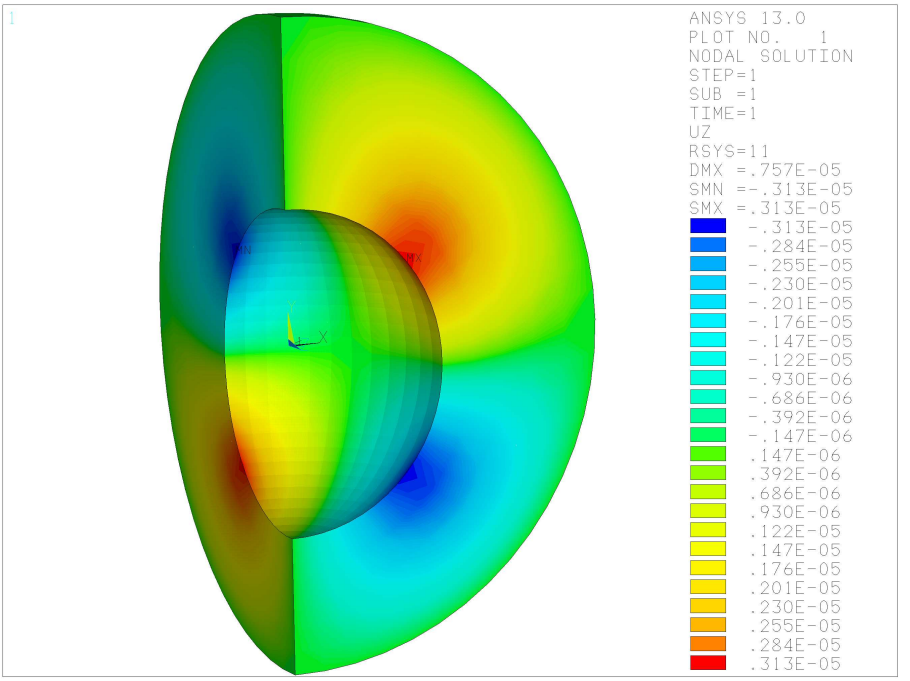


Рис. 2. Распределение окружной компоненты вектора перемещений `UZ` (обозначения пакета `ANSYS 13`) в тяжелой толстостенной сфере с жестко закрепленной внешней поверхностью

[Figure 2. The distribution of the hoop component of the displacement vector `UZ` (notation used in package `ANSYS 13.0`) in the heavy thick-walled sphere with a fixed external surface]

элементном решении и для компонент тензоров деформаций и напряжений, которые по постановке задачи должны быть нулевыми.

Для исключения зависимости искомых полей напряжений и деформаций, полученных в результате численного решения краевых задач методом конечных элементов, от системы координат представим результаты в инвариантной форме. Как следствие, сравнение аналитического (7) и численного решений будем проводить по инвариантным величинам (8).

Следует обратить особое внимание на то, что в пакетах `ANSYS 13.0` и `ABAQUS 6.11` отсутствует возможность представления напряжений и деформаций в инвариантном виде (8). Однако необходимые величины могут быть вычислены путем алгебраических преобразований над полученными результатами в компонентной форме.

Максимальные по абсолютной величине значения инварианты тензора напряжений принимают в точках, принадлежащих вертикальной оси (J_σ^{I} и J_σ^{II}) и горизонтальной диаметральной плоскости (J_σ^{IV}). Было обнаружено хорошее качественное и количественное совпадение полученных численных результатов в инвариантной форме с аналитическим решением. Максимальная погрешность не превышала 2 %.

В табл. 15 и 2 представлены значения независимых инвариантов тензора напряжений (8) в характерных точках *1–6* (рис. 1). При определении искомых величин в результате численных конечноэлементных решениий в пакетах `ANSYS 13.0` и `ABAQUS 6.11` использовалось среднее значение по узлам линии, проходящей через соответствующую точку. При этом координата φ изменя-

Таблица 1

Значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках тяжелой сферы [Values of the independent invariants of the stress tensor at the characteristic points of the heavy sphere calculated by ANSYS 13.0]

Points	J_σ^{I}, kPa	J_σ^{II}, kPa	J_σ^{III}, kPa	J_σ^{IV}, kPa
1	15.31	0.33	0.01	0.00
	15.15	0.06	0.00	0.00
	15.07	0.00	0.00	0.00
2	10.83	0.24	0.07	0.54
	10.71	0.05	0.00	0.16
	10.66	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.00	0.00	0.76
	0.00	0.00	0.00	0.22
	0.00	0.00	0.00	0.00
4	28.94	111.66	0.00	0.00
	28.92	111.48	0.00	0.00
	28.91	111.42	0.00	0.00
5	20.45	78.89	0.14	34.92
	20.44	78.81	0.02	34.87
	20.44	78.79	0.00	34.85
6	0.00	0.00	0.00	49.37
	0.00	0.00	0.00	49.31
	0.00	0.00	0.00	49.29

Верхнее и среднее число — значения независимых инвариантов, полученные при численном решении краевой задачи в пакете `ANSYS 13.0` (дискретизации толстостенной сферы на 1920 и 15360 элементов `Solid95` соответственно), нижнее число — аналитическое решение.

The upper and middle numbers are the values of independent invariants obtained by numerically solving the boundary value problem in the `ANSYS 13.0` package (discretization of the thick-walled sphere by 1920 and 15360 `Solid95` elements, respectively), the lower numbers are the analytical solution.

лась в пределах от $-\pi/4$ до $\pi/4$, а радиальная ρ и меридиональная θ координаты были постоянны. Обратим еще раз внимание на то, что численные решения краевых задач получены на одних и тех же сетках. Представленные в первых двух строках значения независимых инвариантов для всех характерных точек тяжелой трансверсально-изотропной сферы демонстрируют сходимость полученных численных решений к аналитическим при увеличении степени дискретизации.

Заключение. Таким образом, полученное точное аналитическое решение задачи о равновесии жестко закрепленного по внешней поверхности трансверсально-изотропного центрально-симметричного тела, находящегося под действием равномерного внутреннего давления и гравитационных сил, позволило провести качественное и количественное сравнение полей напряжений в точках поперечных сечений с результатами численного решения той же задачи в осесимметричной и трехмерной постановках в конечноэлементных пакетах `ANSYS 13.0` и `ABAQUS 6.11`. Определенные численно методом конечных элементов напряжения и деформации в сферической системе координат (трехмерная постановка) необходимо представлять в инвариантной относительно ортогональных преобразований, допустимых над трансверсально-изотропным телом, форме. Это позволит исключить ошибки, связанные только с особенностями определения указанной системы координат в конечноэлементных пакетах `ANSYS 13.0` и `ABAQUS 6.11`.

Таблица 2

Значения независимых инвариантов тензора напряжений в характерных точках тяжелой сферы [Values of the independent invariants of the stress tensor at the characteristic points of the heavy sphere calculated by ABAQUS 6.11]

Points	J_σ^{I}, kPa	J_σ^{II}, kPa	J_σ^{III}, kPa	J_σ^{IV}, kPa
	15.34	0.22	0.01	0.05
1	15.07	0.00	0.01	0.00
	15.07	0.00	0.00	0.00
	10.83	0.23	0.01	0.42
2	10.67	0.00	0.00	0.02
	10.66	0.00	0.00	0.00
	0.00	0.00	0.00	0.54
3	0.00	0.00	0.00	0.03
	0.00	0.00	0.00	0.00
	28.94	111.71	0.00	0.07
4	28.91	111.43	0.00	0.00
	28.91	111.42	0.00	0.00
	20.46	78.84	0.01	34.96
5	20.44	78.79	0.00	34.86
	20.44	78.79	0.00	34.85
	0.00	0.00	0.00	49.37
6	0.00	0.00	0.00	49.31
	0.00	0.00	0.00	49.29

Верхнее и среднее число — значения независимых инвариантов, полученные при численном решении краевой задачи в пакете `ABAQUS 6.11` (дискретизация толстостенной сферы на 1920 и 15360 элементов `C3D20R` соответственно), нижнее число — аналитическое решение.

The upper and middle numbers are the values of independent invariants obtained by numerically solving the boundary value problem in the `ABAQUS 6.11` package (discretization of the thick-walled sphere by 1920 and 15360 `C3D20R` elements, respectively), the lower numbers are the analytical solution.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.А. Фукалов — получение аналитического и численных решений в пакете `ANSYS 13.0` и их анализ, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.В. Зайцев — идея исследования, получение аналитического решения и его анализ, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Ю.В. Соколкин — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, анализ аналитических решений, консультирование, работа с черновиком рукописи. Ю.В. Баяндин — получение численных решений в пакете `ABAQUS 6.11` и их анализ, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания МинобрРФ FSNM–2020–0027 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2020 г. и плановый период 2021 и 2022 гг. и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ–Урал № 19–41–590026_а).

Библиографический список

1. Morse P. M., Feshbach H. *Methods of theoretical physics.* vol. II. New York: McGraw-Hill Book Co., 1953.
2. Лурье А. И. *Пространственные задачи теории упругости.* М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
3. Зайцев А. В., Фукалов А. А. Упругое равновесие тяжелой трансверсально-изотропной толстостенной сферы с жёстко закреплённой внутренней поверхностью // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 85–95. https://doi.org/10.14498/vsgtu818.
4. Фукалов А. А., Кутергин А. В. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тяжелых тел с центральной и осевой симметрией и их приложения // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2011. № 4. С. 1831–1833.
5. Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Механизмы начального разрушения железобетонной крепи сферической горной выработки в массиве осадочных пород // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2013. № 4. С. 59–74. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.59-74.
6. Зайцев А. В., Соколкин Ю. В., Фукалов А. А. Равновесие жестко закрепленных по внешней поверхности тяжелых упругих анизотропных тел с центральной симметрией в поле гравитационных сил // *Вестн. КРСУ*, 2017. Т. 17, № 8. С. 13–17.
7. Zaitsev A. V., Fukalov A. A., Sokolkin Y. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass / *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes.* Cham: Springer, 2019. pp. 463–471. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_46.
8. Кожевникова Л. Л., Кузнецов Г. Б., Матвеенко В. П., Шардаков И. Н. Аналитическое исследование упругого равновесия полой сферы, жестко закрепленной по внешнему контуру // *Пробл. прочности*, 1974. № 9. С. 20–23.
9. Кузнецов Г. Б. *Упругость, вязкоупругость и длительная прочность цилиндрических и сферических тел.* М.: Наука, 1979. 112 с.
10. Saint-Venant B. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité semi-polaire ou cylindrique et sur les homogénéités polaires ou sphéri-coniques et sphériques // *J. Math. Pures Appl.*, 1865. vol. 10. pp. 297–349.
11. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела.* М.: Наука, 1977. 416 с.
12. Победря Б. Е. *Механика композиционных материалов.* М.: МГУ, 1984. 336 с.
13. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов.* М.: Наука, 1997. 288 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 303–319
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1829

MSC: 74B05

The equilibrium state of a hollow transversally-isotropic thick-walled sphere, which is fixed on the external surfaces and is subject to a uniform internal lateral pressure and weight forces

© *A. A. Fukalov*[1], *A. V. Zaitsev*[1], *Yu. V. Sokolkin*[1], *Yu. V. Bayandin*[2]

[1] Perm State National Research Polytechnical University, 29, Komsomolskiy pr., 614990, Perm, Russian Federation.
[2] Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1, Academician Korolev st., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

We use the decomposition of the components of the displacement vector along the hoop and radial coordinates in series in Legendre polynomials and generalized power series to obtain an exact analytical solution to the equilibrium problem of a thick-walled transversely isotropic centrally symmetric hollow body, which is rigidly fixed on the external surface and is subject to a uniform internal pressure and weight forces.

As an example of using the obtained analytical solution, we analyzed the influence of weight forces on distribution of independent invariants of the stress tensor in the cross section of a heavy reinforced concrete sphere, which internal surface is free from pressure. Based on the multicriteria approach describing various loss of strength mechanisms (from tension or compression in the radial and hoop direction and interlayer shear), we found the regions of a heavy reinforced concrete sphere, in which damage can be initiated.

A qualitative and quantitative comparison of the stress fields at the points of the cross-sections of the thick-walled heavy spheres with the results of the numerical solution of the same problem in the axisymmetric and 3D formulations in the FEM packages `ANSYS 13.0` and `ABAQUS 6.11` is carried out. Both packages demonstrated the minimum deviation of the numerically determined values of the stress invariants from the exact analytical solution in the axisymmetric formulation. Also the difference with a comparable error

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (`http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/`)

Please cite this article in press as:
Fukalov A. A., Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Bayandin Yu. V. The equilibrium state of a hollow transversally-isotropic thick-walled sphere, which is fixed on the external surfaces and is subject to a uniform internal lateral pressure and weight forces, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 303–319. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1829` (In Russian).

Authors' Details:

Anton A. Fukalov `https://orcid.org/0000-0003-3009-7379`
Senior Lecturer; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures; e-mail: `mr_aa@mail.ru`

Alexey V. Zaitsev `https://orcid.org/0000-0003-0578-7917`
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures; e-mail: `a-zaitsev@mail.ru`

in the 3D setting was found. In the latter case, the presentation of the FEM results for stresses and strains in the component form led to an unexpected result, i.e. significant errors in comparison with the exact analytical solution. To eliminate the errors found in determining the stress-strain state, which are caused only by features of determining the spherical coordinate system in the FEM packages `ANSYS 13.0` and `ABAQUS 6.11`, it is necessary to use the presentation of the results obtained in the invariant form.

Keywords: thick-walled transversally-isotropic heavy sphere, equilibrium state, weight forces, exact analytical solution, mechanisms of initial stage of damage evolution, verification of FEM solutions, `ANSYS 13.0`, `ABAQUS 6.11`.

Received: 5th October, 2020 / Revised: 19th April, 2021 / Accepted: 11th May, 2021 / First online: 11th June, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. A.A. Fukalov: Obtaining analytical and numerical solutions by `ANSYS 13.0` and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Zaitsev: Idea of study; Obtaining the analytical solution and its analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. Yu.V. Sokolkin: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Consulting; Writing — original draft. Yu.V. Bayandin: Obtaining analytical and numerical solutions by `ABAQUS 6.11` and their analysis; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study is supported by the Russian Ministry of Science and Education (State Assignment FSNM–2020–0027 for Basic Researches in 2020–2022) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–41–590026_a).

References

1. Morse P. M., Feshbach H. *Methods of theoretical physics*, vol. II. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953.
2. Lurie A. I. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial Problems of Theory of Elasticity]. Moscow, Gostekhizdat, 1955, 491 pp. (In Russian)
3. Zaitsev A. V., Fukalov A. A. Elastic equilibrium state of thick-walled heavy transversely-isotropic spheres fixed on the interior surface, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 5(21), pp. 85–95 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu818`.
4. Fukalov A. A., Kutergin A. V. Exact analytical solutions to problems of the equilibrium state of elastic anisotropic heavy central and axial-symmetric bodies and their applications, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4, pp. 1831–1833 (In Russian).

Yuriy V. Sokolkin `https://orcid.org/0000-0003-3255-1360`
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures
Yuriy V. Bayandin `https://orcid.org/0000-0002-1824-1940`
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Physical Foundation of Strength;
e-mail: `buv@icmm.ru`

5. Zaitsev A. V., Sokolkin Y. V., Fukalov A. A. Initial damage mechanisms of reinforced concrete monolithic supports for spherical mine workings located in sedimentary rock mass, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 4, pp. 54–74 (In Russian). `https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.59-74`.
6. Zaitsev A. V., Sokolkin Yu. V., Fukalov A. A. Equilibrium state of heavy anisotropic central-symmetric bodies which are fixed on the external surfaces, *Vestn. KRSU*, 2017, vol. 17, no. 8, pp. 13–17 (In Russian).
7. Zaitsev A. V., Fukalov A. A., Sokolkin Y. V. Initial strength analysis of anisotropic concrete supports for spherical mine workings in a sedimentary rock mass, In: *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes*. Cham, Springer, 2019, pp. 463–471. `https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_46`.
8. Kozhevnikova L. L., Kuznetsov G. B., Matveenko V. P., Shardakov I. N. Analytical investigation of the elastic equilibrium of a hollow sphere rigidly fixed along the outer contour, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1057–1061. `https://doi.org/10.1007/BF01528263`.
9. Kuznetsov G. B. *Uprugost', viazkouprugost' i dlitel'naia prochnost' tsilindricheskikh i sfericheskikh tel* [Elasticity, Viscoelasticity and Long-term Strength of Cylindrical and Spherical Bodies]. Moscow, Nauka, 1979, 112 pp. (In Russian)
10. Saint-Venant B. Mémoire sur les divers genres d'homogénéité semi-polaire ou cylindrique et sur les homogénéités polaires ou sphéri-coniques et sphériques, *J. Math. Pures Appl.*, 1865, vol. 10, pp. 297–349.
11. Lekhnitskii S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow, Mir Publ., 1981, 430 pp.
12. Pobedrya B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Moscow State Univ., 1984, 336 pp. (In Russian)
13. Wildemann V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Inelastic Deformation and Failure of Composite Materials]. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 320–342
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1797

УДК 539.3

Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований

© *Д. А. Шляхин, Ж. М. Кусаева*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи для жесткозакрепленной круглой многослойной пластины в случае изменения температуры на ее верхней лицевой поверхности (граничные условия 1-го рода) и учета конвекционного теплообмена нижней лицевой поверхности с окружающей средой (граничные условия 3-го рода).

Математическая формулировка рассматриваемой задачи включает линейные уравнения равновесия и теплопроводности (классическая теория) в пространственной постановке в предположении, что при анализе работы исследуемой конструкции можно пренебречь ее инерционными характеристиками. При этом используется полуобратный метод решения, связанный с заданием на цилиндрической поверхности конструкции касательных напряжений, которые позволяют с заданной точностью удовлетворить условия жесткого закрепления пластины.

При построении общего решения нестационарной задачи, описываемой системой линейных связанных несамосопряженных уравнений в частных производных, используется математический аппарат разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований Фурье–Бесселя и обобщенного биортогонального преобразования. Особенностью данного решения является применение конечного интегрального преобразования, основанного на многокомпонентном соотношении собственных вектор-функций двух однородных краевых задач с выделением сопряженного оператора, позволяющего осуществить решение несамосопряженных линейных задач математической физики. Данное преобразование является наиболее эффективным методом исследования подобных краевых задач.

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Шляхин Д. А., Кусаева Ж. М. Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 320–342. https://doi.org/10.14498/vsgtu1797.

Сведения об авторах

Дмитрий Аверкиевич Шляхин https://orcid.org/0000-0003-0926-7388
доктор технических наук; заведующий кафедрой; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Жанслу Маратовна Кусаева https://orcid.org/0000-0001-7028-0130
аспирант; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: dauletmuratova@mail.ru

 © Самарский государственный технический университет

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние и характер распределения температурного поля в жесткозакрепленной круглой многослойной пластине при произвольном по времени и радиальной координате внешнем температурном воздействии. Кроме того, численные результаты расчета позволяют проанализировать эффект связанности термоупругих полей, который приводит к существенному увеличению нормальных напряжений по сравнению с решением аналогичных задач в несвязанной постановке.

Ключевые слова: круглая многослойная пластина, классическая теория термоупругости, нестационарное температурное воздействие, биортогональные конечные интегральные преобразования.

Получение: 15 июля 2020 г. / Исправление: 26 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 18 июня 2021 г.

Введение. Неравномерное нестационарное температурное воздействие на конструкцию приводит к образованию тепловых деформаций и напряжений, которые необходимо учитывать при определении прочностных характеристик упругих систем [1–3]. Для описания их работы формулируются начально-краевые задачи термоупругости в линейной постановке, математическая формулировка которых включает связанные несамосопряженные дифференциальные уравнения движения и теплопроводности в частных производных.

Проблема интегрирования исходных расчетных соотношений при построении замкнутого решения приводит к необходимости введения ряда допущений. В результате их использования исследуется только уравнение теплопроводности без учета деформирования упругой системы [4–8] или решается несвязанная задача термоупругости для тонкостенных [9–13] и бесконечно длинных тел [14–18].

Использование системы несамосопряженных дифференциальных уравнений, которые формируются в классической (CTE) [8] и гиперболической (LS, GHII, GHIII) [19–21] теориях термоупругости, позволило построить связанные замкнутые решения динамических задач в немногих работах. Здесь необходимо отметить статьи, посвященные исследованию гармонических волн и анализу частотного уравнения в бесконечном цилиндрическом волноводе [21] и длинной пластине [20]. В работах [22, 23] при использовании классической (CTE) теории для бесконечного цилиндра построено нестационарное решение, позволяющее удовлетворить граничные условия первого, второго и третьего рода, а в [24,25] получены результаты для цилиндра конечных размеров с мембранным закреплением его торцов. Из последних работ следует отметить статью [26], посвященную анализу работы жесткозакрепленной пластины при внешнем нестационарном температурном воздействии на ее лицевых поверхностях (граничные условия 1-го рода).

Задача термоупругости становится более сложной при исследовании многослойных конструкций. В данных работах, как правило, рассматривается бесконечно длинный цилиндр. Так, в [27, 28] при действии на конструкцию нестационарной тепловой и механических нагрузок использовалось преобразование Лапласа по времени с численной реализацией расчетных соотношений в области изображений функций.

В настоящей работе объектом исследования является многослойная жесткозакрепленная круглая пластина в случае нестационарного осесимметричного температурного воздействия на ее верхней лицевой поверхности (граничные условия 1-го рода). При этом в исходных расчетных соотношениях не учитываются инерционные характеристики упругой системы, что допустимо при исследовании пластин, для которых выполняется условие $h^*/b < 0.01$ (h^*, b — толщина и радиус пластины) [29]. Новое замкнутое решение связанной осесимметричной нестационарной задачи термоупругости строится при использовании метода неполного разделения переменных в виде конечных интегральных преобразований.

1. Постановка задачи. Пусть круглая многослойная жесткозакрепленная пластина занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область Ω: $\{0 \leqslant r_* \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z_* \leqslant h^*\}$. Рассматривается случай изменения температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$ на ее верхней ($z_* = 0$) лицевой поверхности при заданной температуре внешней среды ϑ^* на нижней ($z_* = h^*$) плоскости (звездочкой отмечены размерные величины). Расчетная схема представлена на рис. 1.

Разрешающая система дифференциальных осесимметричных уравнений равновесия и теплопроводности классической (CTE) теории термоупругости j-го слоя изотропной среды, а также краевые условия рассматриваемой задачи в безразмерной форме имеют вид [8, 9]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial r}\nabla U + a_1^{(j)}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2^{(j)}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} - a_3^{(j)}\frac{\partial T}{\partial r} = 0,\\
a_1^{(j)}\nabla\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2^{(j)}\frac{\partial}{\partial z}\nabla U - a_3^{(j)}\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \qquad (1)\\
\nabla\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - a_4^{(j)}\frac{\partial T}{\partial t} - a_5^{(j)}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z}\Big) = 0;\\
r = 1: \quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \quad U\big|_{r=1} = W\big|_{r=1} = 0; \qquad (2)\\
r = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=0} = \frac{\partial W}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad U\big|_{r=0} = 0; \qquad (3)\\
z = 0: \ \Big[a_6^{(1)}\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} - T\Big]_{z=0} = 0, \ \Big[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{z=0} = 0, \ T\big|_{z=0} = \omega_1; \quad (4)\\
z = h_1, h_1 + h_2, \ldots, h - h_m: \quad \{U, W, T\}|_{-z} = \{U, W, T\}|_{+z},
\end{gathered}$$

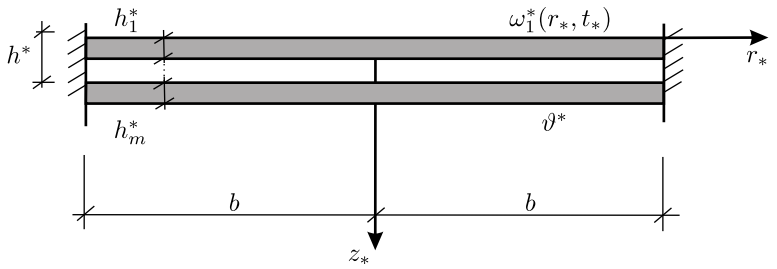


Рис. 1. Расчетная схема [Calculation scheme]

$$-\Lambda^{(j)}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{-z}=-\Lambda^{(j+1)}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{+z},\quad \Big[\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{-z}=a_8^{(j)}\Big[\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{+z},$$
$$\Big[a_6^{(j)}\nabla U+\frac{\partial W}{\partial z}-a_3^{(j)}T\Big]_{-z}=a_7^{(j)}\frac{a_3^{(j)}}{a_3^{(j+1)}}\Big[a_6^{(j+1)}\nabla U+\frac{\partial W}{\partial z}-a_3^{(j+1)}T\Big]_{+z},$$
$$j=1,2,\ldots,m;\quad (5)$$

$$z=h:\quad \Big[a_6^{(m)}\nabla U+\frac{\partial W}{\partial z}-a_3^{(m)}T\Big]_{z=h}=0,\quad \Big[\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{z=h}=0,$$
$$-\Lambda^{(m)}\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=h}=\alpha(T-\vartheta);\qquad (6)$$

$$t=0:\quad U\big|_{t=0}=W\big|_{t=0}=T\big|_{t=0}=0,\qquad (7)$$

где

$$\{U,W,r,h_m,h\}=\frac{1}{b}\{U^*,W^*,r_*,h_m^*,h^*\},\quad \big\{T,\omega_1,\vartheta\big\}=a_9^{(1)}\big\{[T^*,\omega_1^*,\vartheta^*]-T_0\big\},$$

$$t=t_*\frac{k^{(1)}}{b^2},\quad a_1^{(j)}=\frac{1-2v^{(j)}}{2(1-v^{(j)})},\quad a_2^{(j)}=\frac{1}{2(1-v^{(j)})},\quad a_3^{(j)}=\frac{a_9^{(j)}}{a_9^{(1)}},$$

$$a_4^{(j)}=\frac{k^{(1)}}{k^{(j)}},\quad a_5^{(j)}=\frac{\gamma^{(j)}T_0}{\Lambda^{(j)}}a_9^{(1)}k^{(1)},\quad a_6^{(j)}=\frac{v^{(j)}}{1-v^{(j)}},\quad a_7(j)=\frac{\gamma^{(j+1)}}{\gamma^{(j)}},$$

$$a_8^{(j)}=\frac{E^{(j+1)}(1+v^{(j)})}{E^{(j)}(1+v^{(j+1)})},\quad a_9^{(j)}=\frac{\gamma^{(j)}(1+\nu^{(j)})(1-2\nu^{(j)})}{E^{(j)}(1-\nu^{(j)})};$$

$$\gamma^{(j)}=\frac{E^{(j)}}{(1-2v^{(j)})}\alpha_t^{(j)},\quad k^{(j)}=\frac{\Lambda^{(j)}}{c_\varepsilon^{(j)}},\quad \nabla=\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r};$$

$U^*(r_*,z_*,t_*)$, $W^*(r_*,z_*,t_*)$, $T^*(r_*,z_*,t_*)$, $T_0(r_*,z_*,t_*)$ — компоненты вектора перемещений, температура и абсолютная температура начального недеформированного состояния тела в размерной форме; t_* — время в размерной форме; $E^{(j)}$, $v^{(j)}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала j-го слоя; $\Lambda^{(j)}$, $\alpha_t^{(j)}$, $c_\varepsilon^{(j)}$ — коэффициенты теплопроводности, линейного теплового расширения и объемная теплоемкость материала j-го слоя; α — коэффициент теплоотдачи.

Условия (2) определяют жесткое закрепление и теплоизоляцию цилиндрической поверхности пластины, а равенства (3) — осевую симметрию решения. Первые условия (4), (6) учитывают отсутствие нормальных и касательных напряжений на ее лицевых поверхностях, а последние — соответственно, действие температурной нагрузки (граничные условия 1-го рода) и конвекционный теплообмен лицевой поверхности с окружающей средой (граничные условия 3-го рода). Соотношения (5) являются условиями совместности перемещений, температуры, напряжений и идеального теплового контакта (граничные условия 4-го рода) на поверхности жесткого соединения слоев.

2. Построение общего решения. Начально-краевая задача (1)–(7) решается путем последовательного использования конечного интегрального преобразования Фурье—Бесселя [30] по переменной r и обобщенного конечного

биортогонального преобразования [31] по координате z. При этом для определенности решения ниже рассматривается двухслойная пластина ($m = 2$).

Принимая во внимание, что преобразование Фурье—Бесселя позволяет исследовать задачи со смешанными однородными граничными условиями [30], заменяем последнее равенство (2) на условие наличия касательных напряжений $P_1(z,t)$ при $r = 1$:

$$\sigma_{rz}\Big|_{r=1} = \frac{E^{(j)}}{2(1+v^{(j)})}\Big[\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\Big]_{r=1} = P_1(z,t) \tag{8}$$

и вводим новую функцию $w(r,z,t)$, связанную с $W(r,z,t)$ соотношением

$$W(r,z,t) = \frac{1+v^{(j)}}{E^{(j)}} r^2 P_1(z,t) + W_1(t) + w(r,z,t). \tag{9}$$

Выражения для P_1, W_1 определяются в процессе решения задачи при выполнении условия $W(1,z,t) = 0$.

Таким образом, рассматриваемая задача решается полуобратным методом, когда на цилиндрической поверхности пластины действуют неизвестные касательные напряжения и известная температурная нагрузка.

Подстановка (9) в (1)–(8) позволяет сформулировать новую задачу относительно функций U, w, T, в которой дифференциальные уравнения (1), первые (4), (6) и последнее (5) граничные условия, а также начальное условие относительно вертикальной компоненты вектора перемещений становятся неоднородными с правыми частями R_1, R_2, R_3, B_1, B_2, B_3, B_4[1]:

$$\{R_1, R_2, R_3\} = -\big(a_{10}^{(j)}\big)^{-1}\Big\{2a_2^{(j)} r\frac{\partial}{\partial z},\ \Big(4a_1^{(j)} + r^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big),\ a_5^{(j)} r^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t}\Big\}P_1,$$

$$\{B_1, B_2, B_3\} = -r^2\Big\{\big(a_{10}^{(1)}\big)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=0},\ \big(a_{10}^{(2)}\big)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{z=h},$$
$$\Big[\big(a_{10}^{(1)}\big)^{-1}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{-z} - a_7^{(1)}\frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}a_{10}^{(2)}}\frac{\partial P_1}{\partial z}\Big|_{+z}\Big]\Big\},$$

$$B_4 = -\big(a_{10}^{(j)}\big)^{-1} r^2 P_1(z,0) - W_1(0), \qquad a_{10}^{(j)} = E^{(j)}(1+v^{(j)})^{-1},$$

а граничные условия на цилиндрической поверхности принимают вид

$$r = 1: \quad U(1,z,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0. \tag{10}$$

Применим к краевой задаче относительно U, w, T преобразование Фурье—Бесселя, используя трансформанты

$$u_H(n,z,t) = \int_0^1 U(r,z,t) r J_1(j_n r)dr,$$
$$\big\{w_H(n,z,t), \phi_H(n,z,t)\big\} = \int_0^1 \big\{w(r,z,t), T(r,z,t)\big\} r J_0(j_n r)dr$$

[1]На основании парности и неразрывности касательных напряжений имеем $P_1|_{z=0,h_1,h}=0$.

и формулы обращения

$$U(r,z,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n,z,t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r),$$
$$\big\{w(r,z,t), T(r,z,t)\big\} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big\{w_H(n,z,t), \phi_H(n,z,t)\big\}}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где j_n — положительные нули функции $J_1(j_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $j_0 = 0$.

В результате получим следующую задачу относительно трансформант u_H, w_H, ϕ_H:

$$\begin{gathered}
-j_n^2 u_H + a_1^{(j)} \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3^{(j)} j_n \phi_H = R_{1H}, \\
-a_1^{(j)} j_n^2 w_H + \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_3^{(j)} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} = R_{2H}, \\
-j_n^2 \phi_H + \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(a_4^{(j)} \phi_H + a_5^{(j)} j_n u_H + a_5^{(j)} \frac{\partial w_H}{\partial z}\Big) = R_{3H};
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
z = 0: \quad \Big[a_6^{(1)} j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z}\Big]_{z=0} = B_{1H} + \omega_{1H}, \\
\Big[\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H\Big]_{z=0} = 0, \quad \phi_H\big|_{z=0} = \omega_{1H};
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
z = h_1: \quad \big\{u_H, w_H, \phi_H\big\}\big|_{-z} = \big\{u_H, w_H, \phi_H\big\}\big|_{+z}, \\
-\Lambda^{(1)} \frac{\partial \phi_H}{\partial z}\Big|_{-z} = -\Lambda^{(2)} \frac{\partial \phi_H}{\partial z}\Big|_{+z}, \ \Big[\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H\Big]_{-z} = a_8^{(1)} \Big[\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H\Big]_{+z}, \\
\Big[a_6^{(1)} \nabla U + \frac{\partial w_H}{\partial z} - a_3^{(1)} T\Big]_{-z} - a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \Big[a_6^{(2)} \nabla U + \frac{\partial w_H}{\partial z} - a_3^{(2)} T\Big]_{+z} = B_{3H};
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}
z = h: \quad \Big[a_6^{(2)} j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} - a_3^{(2)} \phi_H\Big]_{z=h} = B_{2H}, \\
\Big[\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H\Big]_{z=h} = 0, \quad \Big[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + \phi_H\Big]_{z=h} = \vartheta_H,
\end{gathered} \tag{14}$$

$$t = 0: \quad u_H\big|_{t=0} = \phi_H\big|_{t=0} = 0, \quad w_H\big|_{t=0} = B_{4H}; \tag{15}$$

где

$$\big\{R_{2H}, R_{3H}, B_{1H}, \ldots, B_{4H}, \omega_{1H}, \vartheta_H\big\} = \\ = \int_0^1 \big\{R_2, R_3, B_1, \ldots, B_4, \omega_1, \vartheta\big\} r J_0(j_n r) dr,$$

$$R_{1H} = \int_0^1 R_1 r J_1(j_n r) dr.$$

Неоднородные граничные условия (12)–(14) приводятся к однородным путем введения новых функций U_H, W_H, L_H, связанных с u_H, w_H, ϕ_H соотношениями

$$\begin{aligned} u_H(n,z,t) &= H_1(n,z,t) + U_H(n,z,t),\\ w_H(n,z,t) &= H_2(n,z,t) + W_H(n,z,t),\\ \phi_H(n,z,t) &= H_3(n,z,t) + L_H(n,z,t), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} \big\{H_1, H_2\big\} = \big\{f_1(z), f_2(z)\big\}\omega_{1H}(t) + \big\{f_3(z), f_4(z)\big\}\vartheta_H + \\ + \big\{f_5(z), f_6(z)\big\}B_{1H}(0,t) + \big\{f_7(z), f_8(z)\big\}B_{2H}(h,t) + \\ + \big\{f_9(z), f_{10}(z)\big\}B_{3H}\big(h_1,t\big), \end{aligned}$$

$$H_3 = f_{11}(z)\omega_{1H}(t) + f_{12}(z)\vartheta_H;$$

$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_{12}(z)$ — дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (16) в (11)–(15) при выполнении условий

$$\begin{aligned} z = 0: \quad & \Big[a_6^{(1)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z}\Big]_{z=0} = B_{1H} + \omega_{1H},\\ & \Big[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\Big]_{z=0} = 0, \quad H_3\big|_{z=0} = \omega_{1H}; \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} z = h_1: \quad & \big\{H_1, H_2, H_3\big\}\big|_{-z} = \big\{H_1, H_2, H_3\big\}\big|_{+z},\\ & -\Lambda^{(1)}\frac{\partial H_3}{\partial z}\Big|_{-z} = -\Lambda^{(2)}\frac{\partial H_3}{\partial z}\Big|_{+z}, \quad \Big[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\Big]_{-z} = a_8^{(1)}\Big[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\Big]_{+z},\\ & \Big[a_6^{(1)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(1)} H_3\Big]_{-z} - a_7^{(1)}\frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}}\Big[a_6^{(2)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(2)} H_3\Big]_{+z} = B_{3H}; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} z = h: \quad & \Big[a_6^{(2)} j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(2)} H_3\Big]_{z=h} = B_{2H},\\ & \Big[\frac{\partial H_1}{\partial z} - j_n H_2\Big]_{z=h} = 0, \quad \Big[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial z} + H_3\Big]_{z=h} = \vartheta_H \end{aligned} \tag{19}$$

позволяет преобразовать задачу (11)–(15) относительно U_H, W_H, L_H:

$$\begin{aligned} -j_n^2 U_H + a_1^{(j)}\frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3^{(j)} j_n L_H = F_{1H},\\ -a_1^{(j)} j_n^2 W_H + \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_3^{(j)}\frac{\partial L_H}{\partial z} = F_{2H},\\ -j_n^2 L_H + \frac{\partial^2 L_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(a_4^{(j)} L_H + a_5^{(j)} j_n U_H + a_5^{(j)}\frac{\partial W_H}{\partial z}\Big) = F_{3H}; \end{aligned} \tag{20}$$

$$z = 0: \quad \Big[a_6^{(1)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z}\Big]_{z=0} = 0, \ \Big[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\Big]_{z=0} = 0, \ L_H\big|_{z=0} = 0; \tag{21}$$

$$z = h_1: \quad \{U_H, W_H, L_H\}\big|_{-z} = \{U_H, W_H, L_H\}\big|_{+z},$$
$$\Lambda^{(1)}\frac{\partial L_H}{\partial z}\Big|_{-z} = \Lambda^{(2)}\frac{\partial L_H}{\partial z}\Big|_{+z}, \quad \Big[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\Big]_{-z} = a_8^{(1)}\Big[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\Big]_{+z},$$
$$\Big[a_6^{(1)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(1)} L_H\Big]_{-z} - a_7^{(1)}\frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}}\Big[a_6^{(2)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(2)} L_H\Big]_{+z} = 0; \quad (22)$$

$$z = h: \quad \Big[a_6^{(2)} j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} - a_3^{(2)} L_H\Big]_{z=h} = 0,$$
$$\Big[\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H\Big]_{z=h} = 0, \quad \Big[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha}\frac{\partial L_H}{\partial z} + L_H\Big]_{z=h} = 0; \quad (23)$$

$$t = 0: \quad U_H\big|_{t=0} = u_{0H}, \quad W_H\big|_{t=0} = w_{0H}, \quad L_H\big|_{t=0} = l_{0H}, \quad (24)$$

где

$$F_{1H} = R_{1H} + j_n^2 H_1 - a_1^{(j)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(j)} j_n H_3,$$
$$F_{2H} = R_{2H} + a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_3^{(j)}\frac{\partial H_3}{\partial z},$$
$$F_{3H} = R_{3H} + j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t}\Big(a_4^{(j)} H_3 + a_5^{(j)} j_n H_1 + a_5^{(j)}\frac{\partial H_2}{\partial z}\Big),$$
$$u_{0H} = -H_1, \quad w_{0H} = B_{4H} - H_2, \quad l_{0H} = -H_3.$$

Начально-краевая задача (20)–(24) решается с использованием структурного алгоритма вырожденного биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [31]. Для этого на сегменте $[0, h]$ вводится КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\mu_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$, $N_3(\mu_{in}, z)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_0^h \Big[a_5^{(j)} j_n U_H(n, z, t) + a_4^{(j)} L_H(n, z, t) - \\ - a_5^{(j)} W_H(n, z, t)\frac{d}{dz}\Big] K_3(\lambda_{in}, z)dz, \quad (25)$$

$$\{U_H(n, z, t), W_H(n, z, t), L_H(n, z, t)\} = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t)\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z)\}\|K_{in}\|^{-2}, \quad (26)$$

где

$$\|K_{in}\|^2 = \int_0^h K_3(\lambda_{in}, z) N_3(\mu_{in}, z)dz;$$

λ_{in}, μ_{in} — собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент вектор-функций ядер КИП ($k = 1, 2, 3$).

Принимая во внимание кусочно-гладкий характер функций U_H, W_H, L_H, подвергаем уравнения (20) и краевые условия (21)–(24) вырожденному

КИП [31]. В результате получается задача для трансформанты $G(\lambda_{in}, n, t)$:

$$\frac{dG_{in}}{dt} + \lambda_{in} G_{in} = F_H, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad t = 0: \quad G_{in}\big|_{t=0} = G_{0H}(n, z), \tag{27}$$

решение которой имеет вид

$$G_{in} = G_{0H} \exp(-\lambda_{in} t) + \int_0^t F_H(\tau) \exp \lambda_{in}(\tau - t) d\tau, \tag{28}$$

а также две однородные задачи относительно функций $K_{ein}^{(j)} = K_{ein}^{(j)}(\lambda_{in}, z)$ $(e = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots)$:

$$\begin{gathered} -j_n^2 K_{1in}^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{d^2 K_{1in}^{(j)}}{dz^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} + \lambda_{in} a_5^{(j)} j_n K_{3in}^{(j)} = 0, \\ -a_1^{(j)} j_n^2 K_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{2in}^{(j)}}{dz^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{dK_{1in}^{(j)}}{dz} - \lambda_{in} a_5^{(j)} \frac{dK_{3in}^{(j)}}{dz} = 0, \\ (\lambda_{in} a_4^{(j)} - j_n^2) K_{3in}^{(j)} + \frac{d^2 K_{3in}^{(j)}}{dz^2} + a_3^{(j)} j_n K_{1in}^{(j)} + a_3^{(j)} \frac{dK_{2in}^{(j)}}{dz} = 0; \end{gathered} \tag{29}$$

$$z = 0: \quad \left[a_1^{(1)} \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz} + (a_6^{(1)} - a_2^{(1)}) j_n K_{2in}^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \qquad \left[\frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz} + (a_2^{(1)} - a_1^{(1)}) j_n K_{1in}^{(1)}\right]_{z=0} = 0, \quad K_{3in}^{(1)}\big|_{z=0} = 0; \tag{30}$$

$$z = h_1: \quad \left\{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\right\}\big|_{z=h_1} = \left\{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\right\}\big|_{z=h_1},$$

$$\left[(a_2^{(1)} - a_1^{(1)}) j_n K_{1in}^{(1)} + \frac{dK_{2in}^{(1)}}{dz}\right]_{z=h_1} = a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \left[(a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) j_n K_{1in}^{(2)} + \frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz}\right]_{z=h_1},$$

$$\left[(a_2^{(1)} - a_6^{(1)}) j_n K_{2in}^{(1)} - a_1^{(1)} \frac{dK_{1in}^{(1)}}{dz}\right]_{z=h_1} = a_8 \frac{a_1^{(1)}}{a_1^{(2)}} \left[(a_2^{(2)} - a_6^{(2)}) j_n K_{2in}^{(2)} - a_1^{(2)} \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz}\right]_{z=h_1},$$

$$\Lambda^{(1)} \frac{dK_{3in}^{(1)}}{dz}\bigg|_{z=h_1} = \Lambda^{(2)} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz}\bigg|_{z=h_1}, \tag{31}$$

$$z = h: \quad \left[a_1^{(2)} \frac{dK_{1in}^{(2)}}{dz} + (a_6^{(2)} - a_2^{(2)}) j_n K_{2in}^{(2)}\right]_{z=h} = 0, \qquad \left[\frac{dK_{2in}^{(2)}}{dz} + (a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) j_n K_{1in}^{(2)}\right]_{z=h} = 0, \quad \left[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{dK_{3in}^{(2)}}{dz} + K_{3in}^{(2)}\right]_{z=h} = 0 \tag{32}$$

и $N_{ein}^{(j)} = N_{ein}^{(j)}\big(\mu_{in}, z\big)$ $(e = 1, 2, 3,\ i = 1, 2, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots)$:

$$-j_n^2 N_{1in}^{(j)} + a_1^{(j)} \frac{d^2 N_{1in}^{(j)}}{dz^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + a_3^{(j)} j_n N_{3in}^{(j)} = 0,$$

$$-a_1^{(j)} j_n^2 N_{2in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{2in}^{(j)}}{dz^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - a_3^{(j)} \frac{dN_{3in}^{(j)}}{dz} = 0, \tag{33}$$

$$-j_n^2 N_{3in}^{(j)} + \frac{d^2 N_{3in}^{(j)}}{dz^2} + \mu_{in}\Big(a_5^{(j)} j_n N_{1in}^{(j)} + a_5^{(j)} \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz} + a_4^{(j)} N_{3in}^{(j)}\Big) = 0;$$

$$z = 0: \quad \Big[a_6^{(1)} j_n N_{1in}^{(j)} + \frac{dN_{2in}^{(j)}}{dz}\Big]_{z=0} = 0,$$

$$\Big[\frac{dN_{1in}^{(j)}}{dz} - j_n N_{2in}^{(j)}\Big]_{z=0} = 0, \quad N_{3in}^{(j)}\big|_{z=0} = 0; \tag{34}$$

$$z = h_1: \quad \{N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)}\}\big|_{z=h_1} = \{N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)}\}\big|_{z=h_1},$$

$$\Big[j_n N_{2in}^{(1)} - \frac{dN_{1in}^{(1)}}{dz}\Big]_{z=h_1} = a_8 \Big[j_n N_{2in}^{(2)} - \frac{dN_{1in}^{(2)}}{dz}\Big]_{z=h_1},$$

$$\Big[a_6^{(1)} j_n N_{1in}^{(1)} + \frac{dN_{2in}^{(1)}}{dz} - a_3^{(1)} N_{3in}^{(1)}\Big]_{z=h_1} = a_7^{(1)} \frac{a_3^{(1)}}{a_3^{(2)}} \Big[a_6^{(2)} j_n N_{1in}^{(2)} + \frac{dN_{2in}^{(2)}}{dz} - a_3^{(2)} N_{3in}^{(2)}\Big]_{z=h_1},$$

$$\Lambda^{(1)} \frac{dN_{3in}^{(1)}}{dz}\Big|_{z=h_1} = \Lambda^{(2)} \frac{dN_{3in}^{(2)}}{dz}\Big|_{z=h_1}; \tag{35}$$

$$z = h: \quad \Big[a_6^{(2)} j_n N_{1in} + \frac{\partial N_{2in}}{\partial z} - a_3^{(2)} N_{3in}\Big]_{z=h} = 0, \quad \Big[\frac{\partial N_{1in}}{\partial z} - j_n N_{2in}\Big]_{z=h} = 0,$$

$$\Big[\frac{\Lambda^{(2)}}{\alpha} \frac{\partial N_{3in}}{\partial z} + N_{3in}\Big]_{z=h} = 0. \tag{36}$$

В равенствах (27)–(36) используются следующие обозначения:

$$\{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\} = \{K_{1in}^{(1)}, K_{2in}^{(1)}, K_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \\ + \{K_{1in}^{(2)}, K_{2in}^{(2)}, K_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1),$$

$$\{N_{1in}, N_{2in}, N_{3in}\} = \{N_{1in}^{(1)}, N_{2in}^{(1)}, N_{3in}^{(1)}\} H(h_1 - z) + \\ + \{N_{1in}^{(2)}, N_{2in}^{(2)}, N_{3in}^{(2)}\} H(z - h_1);$$

$$F_H = -\int_0^h (F_{1H} K_{1in} + F_{2H} K_{2in} + F_{3H} K_{3in}) dz - a_5^{(j)} \Big[K_{3in} \frac{\partial W_H}{\partial t}\Big]_{z=h},$$

$$G_{0H} = \int_0^h (u_{0H} K_{1in} + w_{0H} K_{2in} + l_{0H} K_{3in}) dz,$$

$H(\,\cdot\,)$ — единичная функция Хэвисайда.

Задачи для трансформанты (27) G_{in} и сопряженная однородная задача (29), (30) относительно компонент ядра $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_2(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$ получены в результате применения вырожденного преобразования (25), а соотношения (33), (34) построены путем использования в полученной (сопряженной)

задаче (29), (30) аналогичного (25) КИП с1 компонентами ядра $N_1(\mu_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$, $N_3(\mu_{in}, z)$.

Особенность полученных расчетных соотношений (27), (28) заключается в том, что трансформанта нагрузки F_H включает неоднородное граничное условие. Для определения F_H первоначально принимается $\frac{\partial W_H}{\partial t}\big|_{z=h} = 0$ с последующим определением в процессе решения $\frac{\partial W_H}{\partial t}\big|_{z=h}$.

Системы (29), (33) приводятся к разрешающим дифференциальным уравнениям 6-го порядка относительно функций $K_1^{(j)}(\lambda_{in}, z)$, $N_1^{(j)}(\mu_{in}, z)$:

$$\Big(\frac{d^6}{dr^6} + b_{1in}^{(j)}\frac{d^4}{dr^4} + b_{2in}^{(j)}\frac{d^2}{dr^2} + b_{3in}^{(j)}\Big)\big\{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\big\} = 0, \tag{37}$$

которые допускают разложение на коммутативные сомножители 2-го порядка:

$$\Big[\frac{d^2}{dz^2} + (A_{in}^{(j)})^2\Big]\Big(\frac{d^2}{dz^2} - j_n^2\Big)\Big(\frac{d^2}{dz^2} - j_n^2\Big)\big\{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\big\} = 0,$$

где

$$b_{1in}^{(j)} = \xi_{in}b_4^{(j)} - 3j_n^2, \qquad b_{2in}^{(j)} = (3j_n^2 - 2\xi_{in}b_4^{(j)})j_n^2,$$
$$b_{3in}^{(j)} = (\xi_{in}b_4^{(j)} - j_n^2)j_n^4, \quad b_4^{(j)} = a_3^{(j)}a_5^{(j)} + a_4^{(j)},$$

$\xi_{in} = \lambda_{in}$ и $\xi_{in} = \mu_{in}$ при решении соответственно задач (29), (30) и (33), (34), $A_{in}^{(j)}$ — действительный корень следующего бикубического уравнения:

$$\big[(A_{in}^{(j)})^2\big]^3 - b_{1in}^{(j)}\big[(A_{in}^{(j)})^2\big]^2 + b_{2in}^{(j)}(A_{in}^{(j)})^2 - b_{3in}^{(j)} = 0.$$

Общий интеграл дифференциальных уравнений (33) имеет вид

$$\begin{aligned}\{K_{1in}^{(j)}, N_{1in}^{(j)}\} = \{D_{1in}^{(j)}, E_{1in}^{(j)}\}\sin(A_{in}^{(j)}z) + \{D_{2in}^{(j)}, E_{2in}^{(j)}\}\cos(A_{in}^{(j)}z) + \\ + \{D_{3in}^{(j)}, E_{3in}^{(j)}\}\exp(j_nz) + \{D_{4in}^{(j)}, E_{4in}^{(j)}\}\exp(-j_nz) + \\ + \{D_{5in}^{(j)}, E_{5in}^{(j)}\}z\exp(j_nz) + \{D_{6in}^{(j)}, E_{6in}^{(j)}\}z\exp(-j_nz).\end{aligned} \tag{38}$$

Использование связи между компонентами преобразований, полученных в результате приведения (29), (33) к (37), дает выражения для $K_{2in}^{(j)}(\lambda_{in}, z)$, $K_{3in}^{(j)}(\lambda_{in}, z)$, $N_{2in}^{(j)}(\mu_{in}, z)$, $N_{3in}^{(j)}(\mu_{in}, z)$:

$$\begin{aligned}K_{2in}^{(j)} = -D_{1in}^{(j)}\frac{A_{in}^{(j)}}{j_n}\cos(A_{in}^{(j)}z) + D_{2in}^{(j)}\frac{A_{in}^{(j)}}{j_n}\sin(A_{in}^{(j)}z) - \\ - D_{3in}^{(j)}\exp(j_nz) + D_{4in}^{(j)}\exp(-j_nz) + D_{5in}^{(j)}j_n^{-1}(b_5^{(j)} - j_nz)\exp(j_nz) + \\ + D_{6in}^{(j)}j_n^{-1}(b_5^{(j)} + j_nz)\exp(-j_nz),\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}K_{3in}^{(j)} = \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{\lambda_{in}a_5^{(j)}j_n}\big[D_{1in}^{(j)}\sin(A_{in}^{(j)}z) + D_{2in}^{(j)}\cos(A_{in}^{(j)}z)\big] - \\ - a_3^{(j)}b_{6in}^{(j)}\big[D_{5in}^{(j)}\exp(j_nz) - D_{6in}^{(j)}\exp(-j_nz)\big],\end{aligned}$$

$$N_{2in}^{(j)} = -E_{1in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \cos(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \frac{A_{in}^{(j)}}{j_n} \sin(A_{in}^{(j)} z) - E_{3in}^{(j)} \exp(j_n z) + \\ + E_{4in}^{(j)} \exp(-j_n z) + E_{5in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} - j_n z) \exp(j_n z) + \\ + E_{6in}^{(j)} j_n^{-1} (b_5^{(j)} + j_n z) \exp(-j_n z),$$

$$N_{3in}^{(j)} = \frac{j_n^2 + (A_{in}^{(j)})^2}{a_3^{(j)} j_n} \left[E_{1in}^{(j)} \sin(A_{in}^{(j)} z) + E_{2in}^{(j)} \cos(A_{in}^{(j)} z) \right] - \\ - a_5^{(j)} b_{6in}^{(j)} \left[E_{5in}^{(j)} \exp(j_n z) + E_{6in}^{(j)} \exp(-j_n z) \right].$$

Здесь

$$b_5^{(j)} = 1 + \frac{2a_1^{(j)} a_4^{(j)}}{a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_2^{(j)} a_4^{(j)}}, \quad b_{6in}^{(j)} = \frac{2a_1^{(j)}}{\xi_{in}(a_3^{(j)} a_5^{(j)} + a_2^{(j)} a_4^{(j)})}.$$

Подстановка (38), (39) в граничные условия (30), (34) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых дает возможность определить постоянные интегрирования $D_{1in}^{(j)}, \ldots, D_{6in}^{(j)}$, $E_{1in}^{(j)}, \ldots, E_{6in}^{(j)}$ и собственные значения λ_{in}, μ_{in}.

Окончательные выражения для функций $U(r,z,t)$, $W(r,z,t)$, $T(r,z,t)$ получаются последовательным использованием формул обращения (26), (10) к трансформанте (28). В результате с учетом (9), (16) имеем:

$$U(r,z,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_1(n,z,t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$W(r,z,t) = \frac{1+v^{(j)}}{E^{(j)}} r^2 P_1(z,t) + W_1(t) + \\ + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right], \quad (40)$$

$$T(r,z,t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n,z,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Полученные выражения в виде рядов являются сходящимися в силу полноты систем функций $\{J_v(j_n r)\}_{n=0}^{\infty}$ на интервале $r \in [0,1]$ и $\{K_{ein}(\lambda_{in}, z), N_{ein}(\mu_{in}, z)\}_{i=1}^{\infty}$ на участке $z \in [0,h]$.

Заключительным этапом исследования является определение функций $W_1(t)$, $P_1(z,t)$, $H_1(n,z,t)$, $H_2(n,z,t)$, $H_3(n,z,t)$.

Сначала рассматривается случай действия только температурной нагрузки ω_1, ϑ ($P_1 = 0$). Тогда H_1, H_2, H_3 определяются из условия упрощений правых частей уравнений (20):

$$j_n^2 H_1 - a_1^{(j)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3^{(j)} j_n H_3 = 0,$$

$$a_1^{(j)} j_n^2 H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)} j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_3^{(j)} \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0, \quad j_n^2 H_3 - \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} = 0.$$

В результате формируются системы уравнений относительно $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_{11}(z)$ и $f_3(z)$, $f_4(z)$, $f_{12}(z)$, решение которых с учетом условий (17) позволяет определить H_1, H_2, H_3.

Функция $W_1(t)$ определяется из условия $W(1,h,t)=0$:

$$W_1(t) = -2\sum_{n=0}^{\infty} J_0(j_n)^{-1}\Big[H_2(n,h,t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in},n,t)N_2^{(2)}(\mu_{in},h)\|K_{in}\|^{-2}\Big].$$

Затем к цилиндрической поверхности пластины прикладываются касательные напряжения $P_1(z,t)$ ($\omega_1=\vartheta=0$). Условия уравновешенности пластины, парности и неразрывности касательных напряжений

$$\int_0^h P_1(z,t)dz = 0, \quad P_1|_{z=0,h_1,h} = 0$$

позволяют записать $P_1(z,t)$ в виде следующей зависимости:

$$P_1(z,t) = S_0W_1(t)\Big[\frac{h-h_1}{h_1}\sin\Big(\frac{\pi}{h_1}z\Big)H(h_1-z) - \\ - \sin\Big(\frac{\pi}{h-h_1}(z-h_1)\Big)H(z-h_1)\Big]. \quad (41)$$

Функции H_1, H_2 также вычисляются из условия упрощений правых частей дифференциальных уравнений (20):

$$j_n^2H_1 - a_1^{(j)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2^{(j)}j_n\frac{\partial H_2}{\partial z} = 0, \quad a_1^{(j)}j_n^2H_2 - \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2^{(j)}j_n\frac{\partial H_1}{\partial z} = 0.$$

В этом случае образуются системы дифференциальных уравнений относительно функций $f_5(z)$, $f_6(z)$; $f_7(z)$, $f_8(z)$ и $f_9(z)$, $f_{10}(z)$, которые решаются при удовлетворении граничных условий (17).

Сумма двух результатов расчета позволяет определить постоянную S_0 из условия интегрального равенства нулю вертикальных перемещений цилиндрической поверхности пластины:

$$\int_0^h W(1,z,t_{\max})dz = 0.$$

3. Численный анализ результатов. Выводы. Рассмотрим случай действия на верхней лицевой поверхности ($z_*=0$) упругой системы ($b=1$ м) температурной нагрузки

$$\omega_1^*(r_*,t_*) = \Big(1-\frac{r_*}{b}\Big)T_{\max}\Big[\sin\Big(\frac{\pi}{2t_{\max}}t_*\Big)H(t^*_{\max}-t_*) + H(t_*-t^*_{\max})\Big] \quad (42)$$

при известной температуре внешней среды $\vartheta^*=293$ К (20 °C); коэффициент теплоотдачи между поверхностью пластины и воздухом $\alpha = 8.7$ Вт/(м$^2\cdot$К). Здесь $T_{\max}=T^*_{\max}-T_0$; $T^*_{\max}$, $t^*_{\max}$ — максимальное значение температурной

нагрузки и время, при котором тепловое внешнее воздействие достигает наибольшей величины в размерной форме ($T^*_{\max} = 373\,\mathrm{K}$ ($100\,^\circ\mathrm{C}$), $T_0 = 293\,\mathrm{K}$ ($20\,^\circ\mathrm{C}$), $t^*_{\max} = 10$ с).

Двухслойная пластина ($b = 1$ м), изготовленная из стали ($j = 1$) и пластика ($j = 2$), имеет следующие физико-механические характеристики материалов:

$$\{E^{(1)}, E^{(2)}\} = \{20, 0.33\} \times 10^{10}\ \text{Па}, \quad \{\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}\} = \{50, 0.2\}\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)},$$
$$\{v^{(1)}, v^{(2)}\} = \{0.28, 0.33\}, \quad \{c_\varepsilon^{(1)}, c_\varepsilon^{(2)}\} = \{3.8, 0.23\} \times 10^6\ \text{Дж/(м}^3\cdot\ \text{К)},$$
$$\{\alpha_t^{(1)}, \alpha_t^{(2)}\} = \{1.2, 8\} \times 10^{-5}\ 1/\text{К}.$$

На рис. 2, 3 представлены графики изменения температурного поля $T^*(0, z, t)$, перемещений $W^*(0, z, t)$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по пространственным переменным в различные моменты времени t. Анализ численных результатов расчета позволяет сделать следующие выводы.

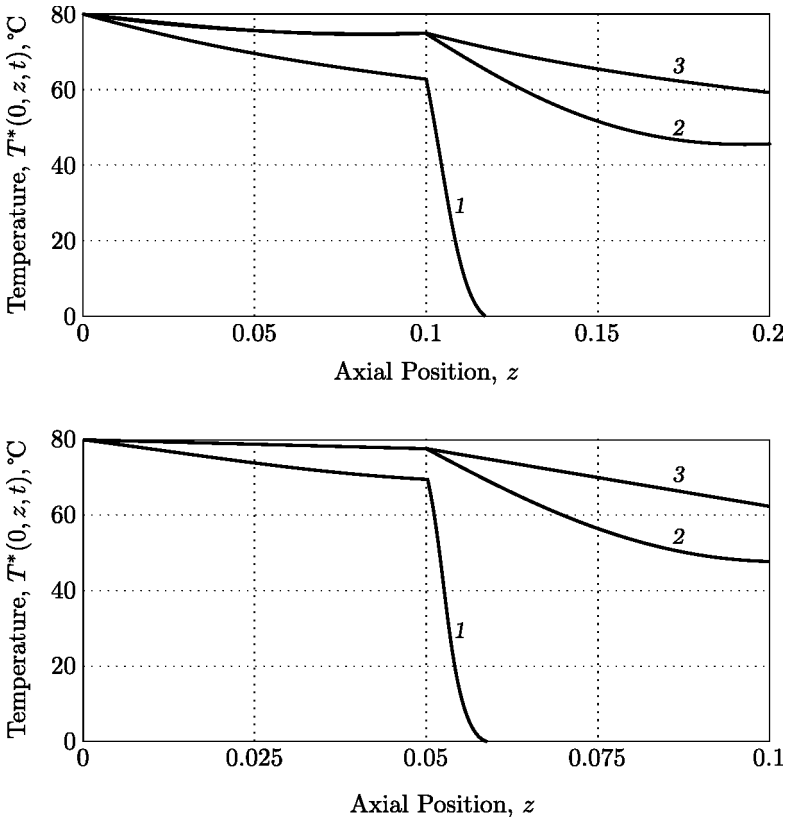


Рис. 2. Графики изменения температуры в конструкции по аксиальной координате z в различные моменты времени: $h_1 = h_2 = 0.1$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 550\,t_{\max}$, *3* — $t = 1100\,t_{\max}$ (сверху) и $h_1 = h_2 = 0.05$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 150\,t_{\max}$, *3* — $t = 300\,t_{\max}$ (снизу)

[Figure 2. Graphs of temperature changes in the structure along the axial coordinate at various points in time: $h_1 = h_2 = 0.1$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 550\,t_{\max}$, *3* — $t = 1100\,t_{\max}$ (at the top of the figure), and $h_1 = h_2 = 0.05$, *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 150\,t_{\max}$, *3* — $t = 300\,t_{\max}$ (at the bottom)]

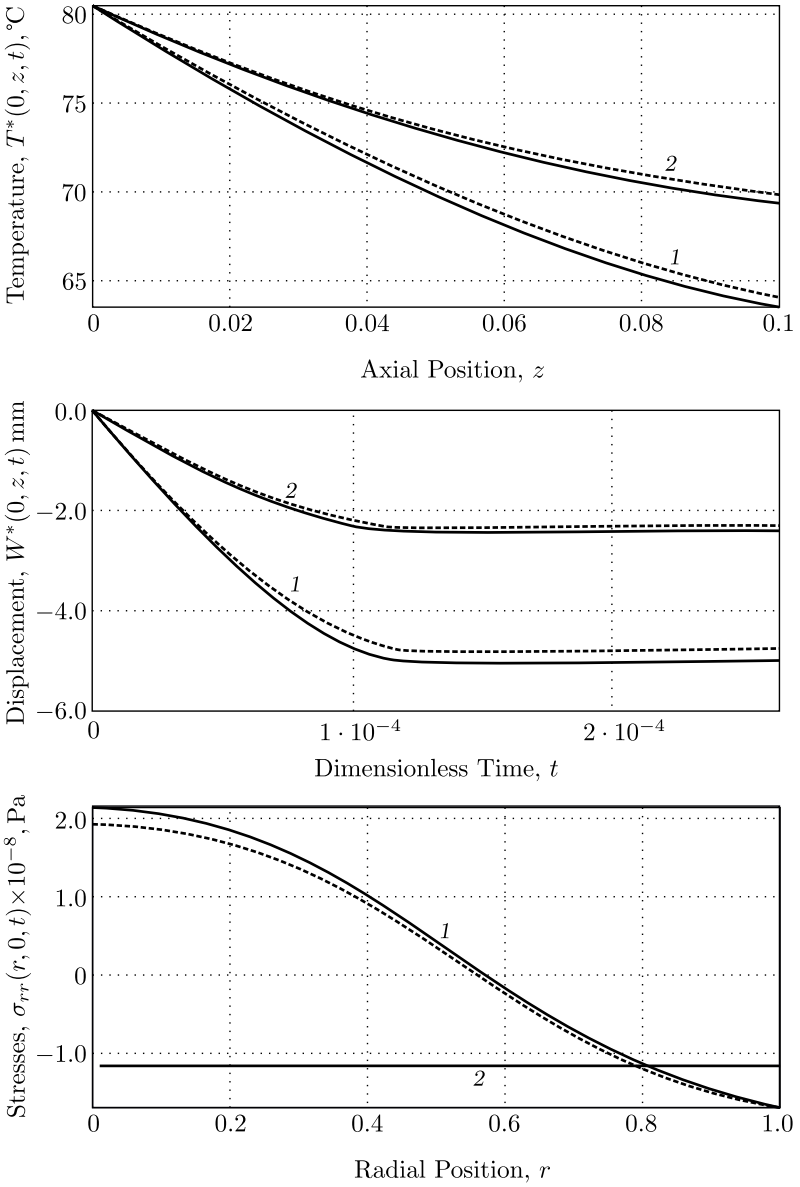


Рис. 3. Графики изменения температуры, перемещений и напряжений в металлической части конструкции ($h = 0.2$); сплошные линии — с учетом связанности термоупругих полей; пунктирные линии — без учета связанности термоупругих полей; метки сверху: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 100\,t_{\max}$; метки по середине: *1* — $z = h$, *2* — $z = h_1$, $t_{\max} = 1.3\cdot10^{-4}$; метки снизу: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 1100\,t_{\max}$

[Figure 3. Graphs of temperature, displacement and stress changes in the metal part of the structure ($h = 0.2$); the solid lines correspond to the solution with the connectivity of thermoelastic fields; the dashed lines correspond to the solution without the connectivity of thermoelastic fields; labels at the top: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 100\,t_{\max}$; labels in the middle: *1* — $z = h$, *2* — $z = h_1$, $t_{\max} = 1.3\cdot10^{-4}$; labels at the bottom: *1* — $t = t_{\max}$, *2* — $t = 1100\,t_{\max}$]

1. При достижении температурной нагрузкой максимальных значений $t = t_{\max}$, $t_{\max} = k^{(1)} b^{-2} t^*_{\max}$ вследствие большой теплопроводности металла на внутренней поверхности стальной части пластины (рис. 2, кривые *1*) наблюдается достаточно высокая температура:

$$T^*(0, h_1, t_{\max}) = 63\,^\circ\mathrm{C}, \quad h_1 = 0.1;$$
$$T^*(0, h_1, t_{\max}) = 71\,^\circ\mathrm{C}, \quad h_1 = 0.05.$$

   При этом толщина пластины оказывает существенное влияние на время полного прогрева конструкции и на температуру ее нижней ($z = h$) лицевой поверхности. Для толстой ($h = 0.2$) пластины $T^*(0, h, t) = 60\,^\circ\mathrm{C}$, $t = 1100\, t_{\max}$, а для более тонкой ($h = 0.1$) конструкции $T^*(0, h, t) = 64\,^\circ\mathrm{C}$, $t = 300\, t_{\max}$ (рис. 2, кривые *3*).
2. Связанность термоупругих полей приводит к уменьшению температуры пластины (рис. 3 сверху), росту перемещений (рис. 3 по середине), что приводит к увеличению радиальной компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ (рис. 3 снизу) до 10 % во время ее прогрева. Наибольший эффект связанности полей наблюдается в центре пластины при достижении температурной нагрузкой максимальных значений $t = t_{\max}$ (рис. 3 снизу кривая *1*).
3. При достижении температурной нагрузкой максимальных значений ($t = t_{\max}$) верхняя лицевая поверхность пластины ($z = 0$) на участке $0 \leqslant r < 0.55$ испытывает растяжение в радиальной плоскости, а на оставшемся участке — сжатие. Однако в процессе прогрева конструкции область сжатия увеличивается и при установившемся тепловом режиме $t = 1100\, t_{\max}$ данная плоскость будет сжата, а напряжения $\sigma_{rr}(r, 0, t)$ — постоянны (рис. 3 снизу, кривая *2*).

В заключение следует отметить, что построенный алгоритм расчета позволяет также исследовать начально-краевые задачи термоупругости для многослойной пластины в случае действия силовой нагрузки и кинематического воздействия на ее лицевых поверхностях, а также учитывать воздействие внутренних источников тепла, расположенных в области соединения слоев.

На рис. 4, 5 приведены графики, позволяющие сделать выводы о влиянии приближенного выполнения граничного условия $W(1, z, t) = 0$ $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\big|_{r=1} = 0\right)$ на напряженно-деформированное состояние упругой системы:

1) аппроксимация касательных напряжений $\sigma_{rz}(1, z, t)$ с помощью функции $P_1(z, t)$ позволяет существенно снизить градиент вертикальных перемещений $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)$ по аксиальной координате при $r = 1$ (рис. 4, кривая *1*) по сравнению с соответствующей величиной при $r = 0$ (рис. 4, кривая *2*);
2) учет функции $P_1(z, t)$ в приближенном представлении (41) приводит к увеличению касательных напряжений (рис. 5, кривые *2*, *3*). При этом дальнейшее ее уточнение, связанное с использованием более сложной зависимости по высоте пластины, не приводит к существенному изменению численных значений касательных напряжений в пластине.

Кроме этого, решение задачи, когда к цилиндрической поверхности пластины прикладываются касательные напряжения $P_1(z, t)$ ($\omega_1 = \vartheta = 0$), приводит к несущественному изменению остальных компонент тензора напряжений и температурного поля, за исключением σ_{zz} в приграничном слое.

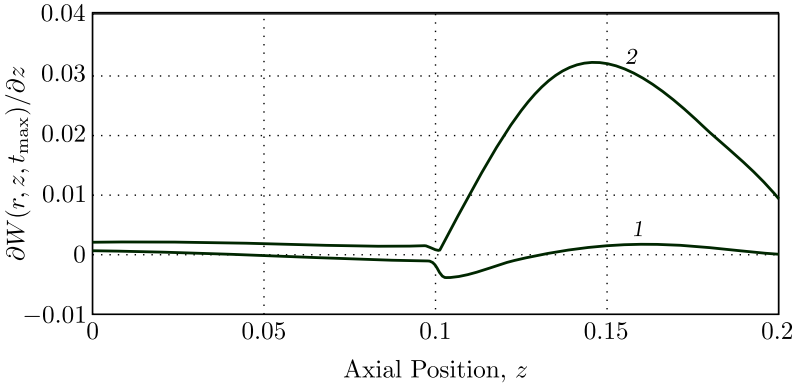


Рис. 4. Степень сжатия конструкции по высоте: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0$
[Figure 4. The compression ratio of the structure in height: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0$]

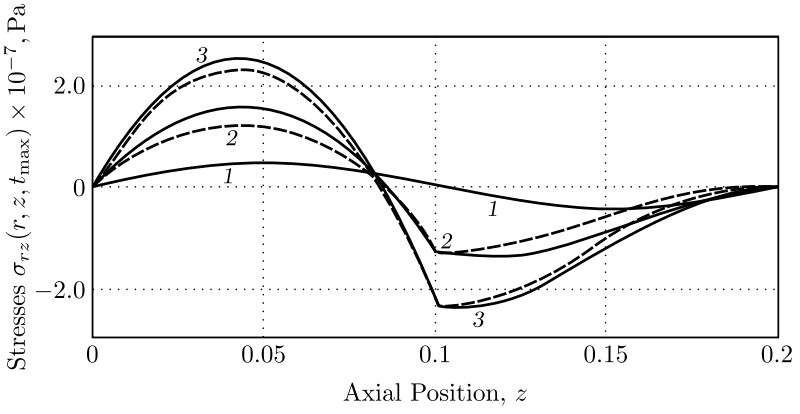


Рис. 5. Графики изменения касательного напряжения по высоте конструкции; сплошные линии — с учетом функции $P_1(z, t_{\max})$; пунктирные линии — без учета функции $P_1(z, t_{\max})$; метки: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0.8$, *3* — $r = 0.5$
[Figure 5. Graphs of shear stress changes along the structure's height; the solid lines correspond to the solution with the function $P_1(z, t_{\max})$; the dashed lines correspond to the solution without the function $P_1(z, t_{\max})$; labels: *1* — $r = 1$, *2* — $r = 0.8$, *3* — $r = 0.5$

Отметим, что при действии внешней температурной нагрузки в виде гладкой функции по радиальной координате (42) ряды, входящие в разложения (40), сходятся достаточно быстро, как правило, при $n = 0, 1, \ldots, 10$, $i = 0, 1, \ldots, 10$ (вычисление ряда заканчивается, когда численное значение последнего члена ряда составляет меньше 1 % от суммы предыдущих членов). В случае вычисления механических напряжений сходимость рядов ухудшается и количество учитываемых членом ряда (в среднем) увеличивается в два раза.

Заключение. В представленной работе при использовании классической теории термоупругости построено новое замкнутое решение осесимметричной задачи для многослойной жесткозакрепленной пластины. Полученные расчетные соотношения позволяют учесть связанность температурных и упругих полей.

Использование приближенного выражения для функции касательных напряжений не оказывает существенного влияния на напряженно-деформированное состояние и температурное поле пластины.

Представленный алгоритм расчета позволяет также исследовать начально-краевые задачи термоупругости для многослойной пластины в случае действия силовой нагрузки и кинематического воздействия на ее лицевых поверхностях, а также учитывать воздействие внутренних источников тепла, расположенных в области соединения слоев.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Д.А. Шляхин — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, математическая постановка задачи и разработка подходов для построения общего решения, анализ численных результатов и формирование выводов, работа с черновиком рукописи. Ж.М. Кусаева — построение замкнутого решения рассматриваемой начально-краевой задачи, реализация построенного решения в среде Mathcad 15, верификация результатов и формирование выводов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–31–90042.

Библиографический список

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. *Термоупругость тел неоднородной структуры.* М.: Наука, 1984. 368 с.
2. Boley B., Weiner J. *Theory of Thermal Stresses.* New York: Wiley, 1960. xvi+586 pp.
3. Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости.* М.: Мир, 1970. 256 с.
4. Коваленко А. Д. *Введение в термоупругость.* Киев: Наук. думка, 1965. 202 с.
5. Радаев Ю. Н., Таранова М. В. Волновые числа термоупругих волн в волноводе с теплообменом на боковой стенке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 53–61. https://doi.org/10.14498/vsgtu965.
6. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. *Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход.* М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
7. Кудинов В. А., Карташев Э. М., Калашников В. В. *Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций.* М.: Высш. шк., 2005. 430 с.
8. Кудинов В. А., Клебнеев Р. М., Куклова Е. А. Получение точных аналитических решений нестационарных задач теплопроводности ортогональными методами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 197–206. https://doi.org/10.14498/vsgtu1521.
9. Карташов Э. М. *Аналитические методы в теплопроводности твердых тел.* М.: Высш. шк., 1985. 480 с.
10. Филатов В. Н. Расчет на температурные воздействия гибких пологих оболочек, подкрепленных ортогональной сеткой ребер / *Нелинейные задачи расчета тонкостенных конструкций.* Саратов: СГУ, 1989. С. 108–110.
11. Кудинов В. А., Кузнецова А. Э., Еремин А. В., Котова Е. В. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2(35). С. 130–135. https://doi.org/10.14498/vsgtu1219.

12. Кобзарь В. Н., Фильштинский Л. А. Плоская динамическая задача термоупругости // *ПММ*, 2008. Т. 72, № 5. С. 842–851.
13. Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar thermo-elasticity of thin shells // *J. Thermal Stresses*, 2013. vol. 36, no. 11. pp. 1200–1216. https://doi.org/10.1080/01495739.2013.819265.
14. Жорник А. И., Жорник В. А., Савочка П. А. Об одной задаче термоупругости для сплошного цилиндра // *Изв. ЮФУ. Техн. науки*, 2012. № 6(131). С. 63–69.
15. Жуков П. В. Расчет температурных полей и термических напряжений в толстостенном цилиндре при импульсном подводе теплоты // *Вестник ИГЭУ*, 2013. № 3. С. 54–57.
16. Макарова И. С. Решение несвязной задачи термоупругости с краевыми условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 3(28). С. 191–195. https://doi.org/10.14498/vsgtu1088.
17. Harmatij H., Król M., Popovycz V. Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange // *Adv. Pure Math.*, 2013. vol. 3, no. 4. pp. 430–437. https://doi.org/10.4236/apm.2013.34061.
18. Lee Z.-Y. Coupled problem of thermoelasticity for multilayered spheres with time-dependent boundary conditions // *J. Mar. Sci. Tech.*, 2004. vol. 12, no. 2. pp. 93–101.
19. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *J. Mech. Phys. Solids*, 1967. pp. 299–309. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5.
20. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2009. Т. 9, № 4(2). С. 94–127. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127.
21. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А. Прохождение обобщенной GNIII-термоупругой волны через волновод с проницаемой для тепла стенкой // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2011. Т. 11, № 1. С. 59–70. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70.
22. Сеницкий Ю. Э. К решению связанной динамической задачи термоупругости для бесконечного цилиндра и сферы // *Прикл. мех.*, 1982. Т. 18, № 6. С. 34–41.
23. Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра // *Инженерный вестник Дона*, 2020. № 3. http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2020/6361.
24. Лычев С. А. Связанная динамическая задача термоупругости для конечного цилиндра // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2003. № 4(30). С. 112–124.
25. Лычев С. А., Манжиров А. В., Юбер С. В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 4. С. 138–154.
26. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная связанная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2019. № 4. С. 191–200. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18.
27. Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F. Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials // *Compos. Struct.*, 2015. vol. 131, no. 1. pp. 139–150. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.053.
28. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders // *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2016. vol. 36, no. 9. pp. 2411–2417, arXiv: 1511.06562 [cond-mat.mtrl-sci]. https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.12.003.
29. Шляхин Д. А., Даулетмуратова Ж. М. Нестационарная осесимметричная задача термоупругости для жесткозакрепленной круглой пластины // *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018. № 5(77), 1761. 18 с. https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761.
30. Sneddon I. N. *Fourier Transforms.* New York: McGraw-Hill, 1950. xii+542 pp.
31. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 8. С. 71–81.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 320–342
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1797

MSC: 74F15, 74S20

Solution of the coupled nonstationary problem of thermoelasticity for a rigidly fixed multilayer circular plate by the finite integral transformations method

© *D. A. Shlyakhin, Zh. M. Kusaeva*

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A new closed solution of an axisymmetric non-stationary problem is constructed for a rigidly fixed round layered plate in the case of temperature changes on its upper front surface (boundary conditions of the 1st kind) and a given convective heat exchange of the lower front surface with the environment (boundary conditions of the 3rd kind).

The mathematical formulation of the problem under consideration includes linear equations of equilibrium and thermal conductivity (classical theory) in a spatial setting, under the assumption that their inertial elastic characteristics can be ignored when analyzing the operation of the structure under study.

When constructing a general solution to a non-stationary problem described by a system of linear coupled non-self-adjoint partial differential equations, the mathematical apparatus for separating variables in the form of finite integral Fourier–Bessel transformations and generalized biorthogonal transformation (CIP) is used. A special feature of the solution construction is the use of a CIP based on a multicomponent relation of eigenvector functions of two homogeneous boundary value problems, with the use of a conjugate operator that allows solving non-self-adjoint linear problems of mathematical physics. This transformation is the most effective method for studying such boundary value problems.

The calculated relations make it possible to determine the stress-strain state and the nature of the distribution of the temperature field in a rigid round multilayer plate at an arbitrary time and radial coordinate of external temperature influence. In addition, the numerical results of the calculation

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Shlyakhin D. A., Kusaeva Zh. M. Solution of the coupled nonstationary problem of thermoelasticity for a rigidly fixed multilayer circular plate by the finite integral transformations method, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 320–342. https://doi.org/10.14498/vsgtu1797 (In Russian).

Authors' Details:

Dmitriy A. Shlyakhin https://orcid.org/0000-0003-0926-7388
Dr. Techn. Sci.; Head of Dept.; Dept. of Structural Mechanics and Engineering Geology;
e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Zhanslu M. Kusaeva https://orcid.org/0000-0001-7028-0130
Postgraduate Student; Dept. of Structural Mechanics and Engineering Geology;
e-mail: Dauletmuratova@mail.ru

allow us to analyze the coupling effect of thermoelastic fields, which leads to a significant increase in normal stresses compared to solving similar problems in an unrelated setting.

Keywords: round multilayer plate, classical theory of thermoelasticity, nonstationary temperature influence, biorthogonal finite integral transformations.

Received: 15th July, 2020 / Revised: 26th April, 2021 / Accepted: 11th May, 2021 / First online: 18th June, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. D.A. Shlyakhin: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Mathematical formulation of the problem; Development of methods for constructing a general solution; Interpreting results and drawing conclusions; Writing — original draft. Zh.M. Kusaeva: Constructing a closed solution for the considered initial-boundary value problem; Implementation of the solution by Mathcad 15; Interpreting results and drawing conclusions; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was funded by RFBR, research project no. 20–31–90042.

References

1. Podstrigach Ya. S., Lomakin V. A., Kolyano Yu. M. *Termouprugost' tel neodnorodnoi struktury* [Thermoelasticity of Bodies with Inhomogeneous Structure]. Moscow, Nauka, 1984, 368 pp. (In Russian)
2. Boley B., Weiner J. *Theory of Thermal Stresses*. New York, Wiley, 1960, xvi+586 pp.
3. Nowacki W. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic Problems of Thermoelasticity]. Moscow, Mir, 1970, 256 pp. (In Russian)
4. Kovalenko A. D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to Thermoelasticity]. Kiev, Nauk. dumka, 1965, 202 pp. (In Russian)
5. Radayev Yu. N., Taranova M. V. Wavenumbers of type III thermoelastic waves in a long waveguide under sidewall heat interchanging, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 2(23), pp. 53–61 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu965`.
6. Shashkov A. G., Bubnov V. A., Ianovsky S. Yu. *Volnovye iavleniia teploprovodnosti. Sistemno-strukturnyi podkhod* [Wave Phenomena of Heat Conductivity. System and Structural Approach]. Moscow, Editorial URSS, 2004, 296 pp. (In Russian)
7. Kudinov V. A., Kartashev E. M., Kalashnikov V. V. *Analiticheskie resheniia zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlia mnogosloinykh konstruktsii* [Analytical Solutions of Heat and Mass Transfer and Thermoelasticity Problems for Multilayer Structures]. Moscow, Vyssh. Shk., 2005, 430 pp. (In Russian)
8. Kudinov V. A., Klebleev R. M., Kuklova E. A. Obtaining exact analytical solutions for nonstationary heat conduction problems using orthogonal methods, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 197–206 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1521`.
9. Kartashov E. M. *Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical Methods in the Theory of the Thermal Conductivity of Solids]. Moscow, Vyssh. shk., 1985, 480 pp. (In Russian)
10. Filatov V. N. Calculation of the temperature effects of flexible gently sloping shells supported by an orthogonal grid of edges, In: *Nelineinye zadachi rascheta tonkostennykh konstruktsii*

[Nonlinear Problems of Calculating Thin-Walled Structures]. Saratov, Saratov State Univ., 1989, pp. 108–110 (In Russian).

11. Kudinov V. A., Kuznetsova A. E., Eremin A. V., Kotova E. V. Analytical solutions of the quasistatic thermoelasticity task with variable physical properties of a medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 2(35), pp. 130–135 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1219.
12. Kobzar' V. N., Fil'shtinskii L. A. The plane dynamic problem of coupled thermoelasticity, *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 5, pp. 611–618. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.11.002.
13. Sargsyan S. H. Mathematical model of micropolar thermo-elasticity of thin shells, *J. Thermal Stresses*, 2013, vol. 36, no. 11, pp. 1200–1216. https://doi.org/10.1080/01495739.2013.819265.
14. Zhornik A. I., Zhornik V. A., Savochka P. A. On a problem of thermoelasticity for a solid cylinder, *Izv. YuFU. Tekhn. Nauki*, 2012, no. 6(131), pp. 63–69 (In Russian).
15. Zhukov P. V. Calculation of temperature fields and thermal stresses in thick-walled cylinder under impulse heat supply, *Vestnik IGEU*, 2013, no. 3, pp. 54–57 (In Russian).
16. Makarova I. S. The solution of uncoupled thermoelastic problem with first kind boundary conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 191–195 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1088.
17. Harmatij H., Król M., Popovycz V. Quasi-static problem of thermoelasticity for thermosensitive infinite circular cylinder of complex heat exchange, *Adv. Pure Math.*, 2013, vol. 3, no. 4, pp. 430–437. https://doi.org/10.4236/apm.2013.34061.
18. Lee Z.-Y. Coupled problem of thermoelasticity for multilayered spheres with time-dependent boundary conditions, *J. Mar. Sci. Tech.*, 2004, vol. 12, no. 2, pp. 93–101.
19. Lord H. W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 1967, pp. 299–309. https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5.
20. Kovalev V. A., Radayev Yu. N., Semenov D. A. Coupled dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, no. 4(2), pp. 94–127 (In Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-94-127.
21. Kovalev V. A., Radayev Yu. N., Revinsky R. A. Generalized cross-coupled type-III thermoelastic waves propagating via a waveguide under sidewall heat interchange, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, no. 1, pp. 59–70 (In Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-1-59-70.
22. Senitskii Yu. E. Solution of coupled dynamic thermoelasticity problem for an infinite cylinder and sphere, *Sov. Appl. Mech.*, 1982, vol. 18, no. 6, pp. 514–520. https://doi.org/10.1007/BF00883341.
23. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. A coupled unsteady thermoelasticity problem for a long hollow cylinder, *Engineering Journal of Don*, 2020, no. 3 (In Russian). http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2020/6361.
24. Lychev S. A. A coupled dynamic problem of thermoelasticity for a finite cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2003, no. 4(30), pp. 112–124 (In Russian).
25. Lychev S. A., Manzhirov A. V., Joubert S. V. Closed solutions of boundary-value problems of coupled thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 610–623. https://doi.org/10.3103/S0025654410040102.
26. Shlyakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Non-stationary coupled axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed round plate, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 191–200 (In Russian). https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.18.
27. Fu J. W., Chen Z. T., Qian L. F. Coupled thermoelastic analysis of a multi-layered hollow cylinder based on the C–T theory and its application on functionally graded materials, *Compos. Struct.*, 2015, vol. 131, no. 1, pp. 139–150. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.04.053.

28. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders, *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2016, vol. 36, no. 9, pp. 2411–2417, arXiv: 1511.06562 [cond-mat.mtrl-sci]. https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.12.003.
29. Shliakhin D. A., Dauletmuratova Zh. M. Nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a rigidly fixed circular plate, *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, no. 5(77), 1761, 18 pp (In Russian). https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-5-1761
30. Sneddon I. N. *Fourier Transforms*. New York, McGraw-Hill, 1950, xii+542 pp.
31. Senitskij Yu. È. Biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems of mechanics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 343–364
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1838

УДК 539.4

Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек

© *А. П. Янковский*

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

Разработана модель вязкоупругопластического деформирования гибких круговых цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования. Мгновенное пластическое поведение материалов композиции определяется теорией течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое деформирование компонентов композиции описывается уравнениями модели тела Максвелла—Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Используемые соотношения позволяют с разной степенью точности рассчитывать остаточные перемещения точек конструкции и остаточное деформированное состояние компонентов композиции. При этом моделируется возможное слабое сопротивление армированной оболочки поперечному сдвигу. В первом приближении используемые уравнения, начальные и граничные условия редуцируются в соотношения неклассической теории Амбарцумяна.

Численное решение сформулированной начально-краевой задачи строится по явной схеме «крест». Исследовано упругопластическое и вязкоупругопластическое динамическое деформирование тонких стеклопластиковых оболочек под действием внутреннего давления взрывного типа. Рассматриваются две структуры армирования:

1) ортогональное армирование в продольном и окружном направлениях;
2) пространственное армирование в четырех направлениях.

Показано, что даже для относительно тонких композитных оболочек теория Амбарцумяна неприемлема для получения адекватных результатов расчетов их вязкоупругопластического динамического деформирования. Продемонстрировано, что расчет по теории упругопластического деформирования армированных конструкций не позволяет даже приближенно оценить остаточные состояния композитных оболочек после их динамического нагружения. Показано, что даже для относительно тонкой и длинной цилиндрической оболочки замена традиционной

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Янковский А. П. Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 343–364. https://doi.org/10.14498/vsgtu1838.

Сведения об авторе

Андрей Петрович Янковский https://orcid.org/0000-0002-2602-8357
доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: lab4nemir@rambler.ru

«плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций связующего материала. В случаях относительно толстых и, особенно, коротких оболочек положительный эффект от такой замены структур армирования проявляется в значительно большей степени.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, пространственное армирование, армирование по эквидистантным поверхностям, вязкоупругопластическое деформирование, нагрузки взрывного типа, уточненные теории изгиба, теория Амбарцумяна, геометрическая нелинейность, явная численная схема «крест».

Получение: 8 декабря 2020 г. / Исправление: 12 марта 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 5 июня 2021 г.

Введение. Оболочки из композиционных материалов (КМ) находят широкое применение в инженерной практике [1–7], поэтому актуальна проблема моделирования их механического поведения в особенности при действии высокоинтенсивных нагрузок, характерных для современных КМ-изделий [7–9].

Механическое поведение анизотропных и слоистых оболочек в рамках классической теории изгиба моделировалось в [10,11], однако при этом не принимается во внимание плохое сопротивление таких конструкций поперечным сдвигам. Традиционно это негативное свойство тонкостенных КМ-изделий учитывают в рамках теорий Тимошенко—Рейсснера [5, 7, 12–14], Амбарцумяна [11, 15, 16] и Редди—Немировского [2, 17]; реже применяются более точные теории [5,14,18–20]. При этом большинство публикаций посвящено рассмотрению линейно-упругого деформирования КМ-конструкций [2, 5, 10–14, 17–19]. Однако при нагрузках высокой интенсивности компоненты композиции изделия могут деформироваться пластически [7, 8, 21, 22]. Проблема моделирования неупругого поведения КМ-конструкций сейчас находится на стадии начального становления. Так, в работе [14] исследовалось упругопластическое деформирование слоистых конструкций с изотропными слоями. В [15, 16, 20] моделировалось вязкоупругопластическое поведение армированных гибких пластин, пологих и цилиндрических оболочек, причем в [15, 20] рассматривались только традиционные «плоско»-перекрестные структуры армирования. Известно, что тонкостенные элементы конструкций с таким армированием плохо сопротивляются поперечному сдвигу и отрыву [9]. Для ликвидации этого серьезного недостатка КМ-изделий используют пространственные структуры армирования [9, 20, 23, 24]. В работе [16] была разработана структурная модель вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных сред, примененная для исследования механического поведения гибких пологих оболочек.

В [17] было показано, что в случае линейно-упругого деформирования компонентов композиции армированных оболочек уточнения расчетов, выполненных по теории Редди—Немировского, не требуется. (Напомним, что в теориях Редди—Немировского и Амбарцумяна [11] используются одинаковые кинематические соотношения, а различие заключается в уравнениях силового и моментного балансов.) Однако в [20] продемонстрировано, что

при исследовании динамического вязкоупругопластического поведения гибких цилиндрических оболочек, традиционно армированных в окружном и продольном направлениях, целесообразно использовать кинематические соотношения более высоких порядков, чем в теориях Редди—Немировского и Амбарцумяна. При этом открытым остался вопрос: нужно ли использовать теории изгиба КМ-оболочек высоких порядков точности при пространственных структурах армирования таких конструкций?

Решения нелинейных задач динамики тонкостенных конструкций, как правило, строят с использованием явных численных схем [14–16, 20], например схемы типа «крест», или неявных методов Ньюмарка [8, 25].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена моделированию вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных цилиндрических оболочек в рамках уточненной теории изгиба. Численные решения соответствующих начально-краевых задач предполагается при этом строить по явной схеме «крест».

1. Моделирование вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированной цилиндрической оболочки. Рассматривается тонкая замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса R, длиной L и толщиной $2h \ll \min(L, R)$ (рис. 1). С оболочкой связана цилиндрическая система координат x_i так, что x_1 — осевая координата ($0 \leqslant x_1 \leqslant L$), x_2 — угловая координата в окружном направлении ($0 \leqslant x_2 < 2\pi$), x_3 — радиальная координата ($R - h \leqslant x_3 \leqslant R + h$). Конструкция усилена «плоско»-перекрестно (традиционное армирование по эквидистантным поверхностям) или пространственно-перекрестно N семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leqslant k \leqslant N$). Структура армирования по толщине оболочки квазиоднородна. На рис. 2 изображены представительные элементы таких композиций: «плоская» ортогональная 2D-структура армирования (рис. 2, *a*) и неортогональная пространственная 4D-структура (рис. 2, *b*) [9].

С волокнами k-го семейства свяжем ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$ так, как показано на рис. 3. Направление армирования при этом задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k, а направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1,3}$, $1 \leqslant k \leqslant N$) вычисляются по формулам (27) из [16].

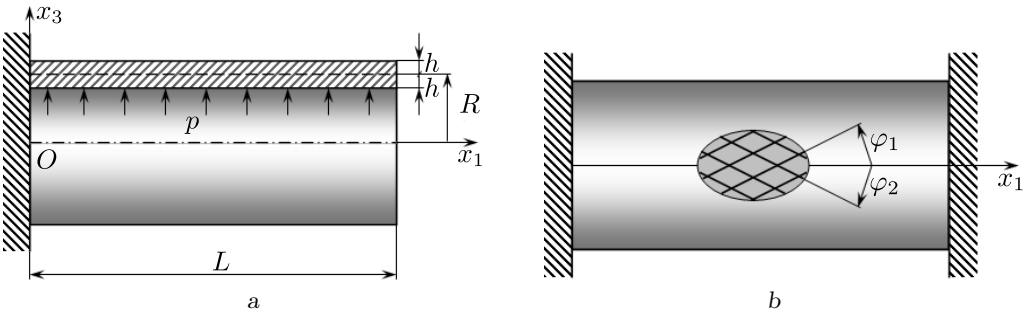


Рис. 1. Цилиндрические КМ-оболочки с жестким закреплением левой кромки (*a*) и с жестким закреплением обеих кромок (*b*) [Figure 1. Cylindrical CM-shells with rigid fastening of the left edge (*a*) and with rigid fastening of both edges (*b*)]

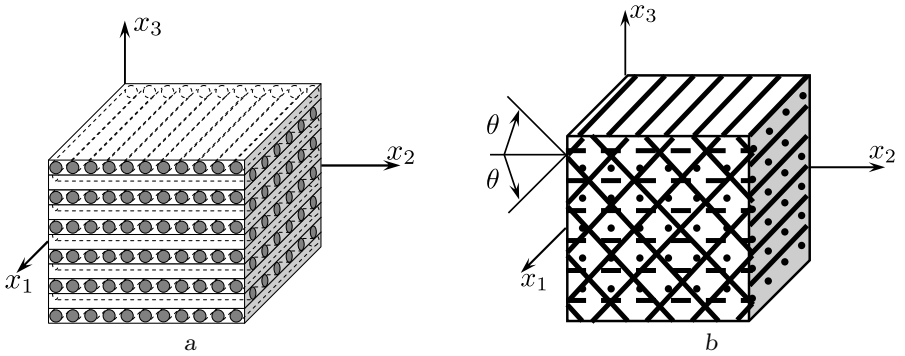


Рис. 2. Репрезентативная ячейка композиции с ортогональным 2D-армированием (a) и с пространственным 4D-армированием (b) [Figure 2. A representative cell of a composition with orthogonal 2D-reinforcement (a) and with spatial 4D-reinforcement (b)]

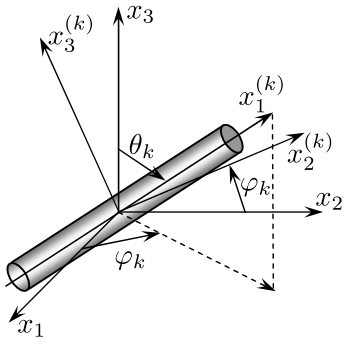


Рис. 3. Локальная система координат, связанная с волокнами k-го семейства

[Figure 3. Local coordinate system associated with k-th family of fibers]

Рассматривается частный, но практически важный случай нагружения оболочки, когда на ее лицевых поверхностях ($x_3 = R \pm h$) можно пренебречь распределенными внешними касательными силами (рис. 1, a). При этом предполагается: пространственные структуры армирования таковы, что если арматура некоторого k-го семейства имеет наклонную траекторию ($0 < \theta_k < \pi/2$), то обязательно найдется l-е семейство наклонных волокон, изготовленных из того же материала и имеющих параметры армирования $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k, \omega_l = \omega_k, 1 \leqslant k, l \leqslant N, l \neq k$ (см. рис. 3). Структуры армирования с таким свойствами, как правило, и встречаются на практике [9,24]. В частности, к ним относится структура, изображенная на рис. 2, b, а также ортогональная 3D-структура армирования [24]. (При нарушении этих двух условий не удается разработать явную численную схему типа «крест».)

Для учета возможного плохого сопротивления армированной оболочки поперечным сдвигам [2,5,7,11,13,14,17,20] используем более точные кинематические соотношения, чем в теориях Редди—Немировского [2,17] и Амбарцумяна [11]. При этом, согласно [20], осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек гибкой цилиндрической оболочки U_i в рамках уточненной теории аппроксимируются так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) = \partial_1 u_1 - z\partial_1^2 w + \sum_{m=0}^{M} f_1^{(m)}(z)\partial_1 \varepsilon_{13}^{(m)} + \frac{1}{2}(\partial_1 w)^2,$$

$$\varepsilon_{22}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{R+z}\Big[\frac{R+z}{R}\partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_{m=0}^{M} f_2^{(m)}(z)\partial_2\varepsilon_{23}^{(m)}\Big] + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial_2 w}{R+z}\Big)^2,$$

$$2\varepsilon_{12}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{R+z}\Big[\partial_2 u_1 - z\partial_1\partial_2 w + \sum_{m=0}^{M} f_1^{(m)}(z)\partial_2\varepsilon_{13}^{(m)}\Big] + \tag{1}$$

$$+\frac{R+z}{R}\partial_1 u_2 + \partial_1\partial_2 w + \sum_{m=0}^{M} f_2^{(m)}(z)\partial_1\varepsilon_{23}^{(m)} + \frac{1}{R+z}\partial_1 w\partial_2 w,$$

$$\varepsilon_{i3}(t,\mathbf{r}) = \frac{h^2-z^2}{h^2}\sum_{m=0}^{M}\Big(\frac{z}{h}\Big)^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t,\mathbf{x}), \quad i=1,2;$$

$$\begin{aligned}
&U_1(t,\mathbf{r}) = u_1(t,\mathbf{x}) - z\partial_1 w + \sum_{m=0}^{M} f_1^{(m)}(z)\varepsilon_{13}^{(m)}(t,\mathbf{x}),\\
&U_2(t,\mathbf{r}) = \frac{R+z}{R}u_2(t,\mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_{m=0}^{M} f_2^{(m)}(z)\varepsilon_{23}^{(m)}(t,\mathbf{x}),\\
&U_3(t,\mathbf{r}) = w(t,\mathbf{x});\\
&\mathbf{x} = (x_1,x_2)\in\Omega, \quad \Omega = \{\mathbf{x} : 0\leqslant x_1\leqslant L, 0\leqslant x_2 < 2\pi\},\\
&\mathbf{r} = (x_1,x_2,x_3), \quad x_3 \equiv R+z, \quad |z|\leqslant h, \quad t\geqslant t_0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
&f_i^{(m)}(z) \equiv \frac{2}{h^2}\big[h^2\Phi_i^{(m)}(z) - \Phi_i^{(m+2)}(z)\big], \quad i=1,2,\\
&\Phi_1^{(m)}(z) \equiv \frac{z^{m+1}}{h^m(1+m)}, \quad \Phi_2^{(m)}(z) \equiv \frac{R+z}{h^m}\Psi_m(z),\\
&\Psi_m(z) \equiv \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(-1)^l R^l z^{m-l}}{m-l} - R^m\ln(R+z);
\end{aligned} \tag{3}$$

$\mathbf{r}$ — вектор места; $\mathbf{x}$ — вектор точки срединной поверхности ($z=0$); z — введенная для удобства новая радиальная переменная; w — прогиб; u_1, u_2 — перемещения точек срединной поверхности в осевом и окружном направлениях; t_0 — начальный момент времени t; Ω — область, которую занимает срединная поверхность оболочки в координатах x_1, x_2; ∂_i — оператор частного дифференцирования по x_i; M — целое число, задающее количество слагаемых, которые удерживаются в степенных разложениях деформаций поперечного сдвига ε_{i3}. При $M=0$ из (1)–(3) получаются кинематические соотношения теорий Редди—Немировского [2,17] и Амбарцумяна [11]. В равенствах (1) и (2) неизвестны функции w, u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i=1,2$, $0\leqslant m\leqslant M$), зависящие от времени t и двух пространственных координат x_1, x_2.

Материал k-го компонента композиции предполагается изотропным, а его вязкоупругопластическое деформирование описывается определяющими уравнениями [15,16,20]:

$$\dot\sigma_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)}\dot\varepsilon_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\lambda^{(k)}\dot\varepsilon_{ll}^{(k)} - B^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}D^{(k)}\sigma_{ll}^{(k)} -$$
$$- A^{(k)}s_{ij}^{(k)}s_{ml}^{(k)}\dot\varepsilon_{ml}^{(k)}, \quad i,j=\overline{1,3}, \quad 0\leqslant k\leqslant N, \tag{4}$$

где

$$
\begin{gathered}
A^{(k)} = \frac{G^{(k)}\kappa^{(k)}}{T_k^2}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}}(1-\kappa^{(k)}), \quad D^{(k)} = \frac{1}{3}\Big(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}}\Big), \\
\kappa^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{1+g^{(k)}}, \quad g^{(k)} = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1+\nu^{(k)})(1-2\nu^{(k)})}, \\
G^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}}, \quad K^{(k)} = \frac{1}{3}\frac{E^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}}, \\
c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_{\mathrm{s}}^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_{\mathrm{s}}^{(k)},\ s_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \leqslant (\tau_{\mathrm{s}}^{(k)}(\chi^{(k)}))^2/\eta^{(k)}, \\ 1, & T_k = \tau_{\mathrm{s}}^{(k)}(\chi^{(k)}),\ s_{ij}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} > (\tau_{\mathrm{s}}^{(k)}(\chi^{(k)}))^2/\eta^{(k)}, \end{cases} \\
T_k = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi^{(k)} = \int_{t_0}^{t}\sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)}\dot{p}_{ij}^{(k)}}\,dt, \\
s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(k)};
\end{gathered}
\tag{5}
$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и малых деформаций; $p_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора пластических деформаций ($p_{ii}^{(k)} = 0$); $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ — мгновенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\eta^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ — коэффициенты линейной вязкости при чистом сдвиге и объемном расширении-сжатии; $\tau_{\mathrm{s}}^{(k)}$ — функция упрочнения при чистом сдвиге, которая зависит от параметра Одквиста $\chi^{(k)}$; $\bar{G}^{(k)}$ — касательный модуль на мгновенной диаграмме чистого сдвига $\tau^{(k)} \sim \gamma_{\mathrm{p}}^{(k)}$; $\gamma_{\mathrm{p}}^{(k)}$ — пластическая составляющая полной угловой деформации при сдвиге; $\tau^{(k)}$ — касательное напряжение при сдвиге; δ_{ij} — символ Кронекера; индекс k — номер компонента композиции ($k = 0$ — связующее, $1 \leqslant k \leqslant N$ — арматура k-го семейства); точка — дифференцирование по времени. Соотношения (4) при учете (5) получены в [15] в предположении, что деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ можно разложить на сумму вязкоупругих и пластических $p_{ij}^{(k)}$ составляющих. При этом пластическое поведение материала описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением, а вязкоупругое деформирование — уравнениями модели тела Максвелла—Больцмана.

Как и в работах [15, 16, 20], решение исследуемой задачи будем строить численно, используя пошаговый алгоритм [8, 25]. Согласно этому, значения искомых функций будем вычислять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где Δ — шаг по времени. В [16] была разработана структурная модель вязкоупругопластического деформирования КМ с пространственным армированием, механическое поведение материалов композиции которого описывается соотношениями (4) при учете (5). При этом в рассматриваемый момент времени t_n определяющее уравнение для композиции записывается в матричной форме

$$
\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \overset{n}{\mathbf{B}}\,\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \overset{n}{\mathbf{P}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}
$$

где

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4\ \sigma_5\ \sigma_6)^\top \equiv (\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{23}\ \sigma_{31}\ \sigma_{12})^\top,\\
&\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \varepsilon_5\ \varepsilon_6)^\top \equiv (\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ 2\varepsilon_{23}\ 2\varepsilon_{31}\ 2\varepsilon_{12})^\top,\\
&\mathbf{p} = (p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6)^\top;
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t_n,\mathbf{r}), \quad \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t_n,\mathbf{r}), \quad \overset{n}{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{p}(t_n,\mathbf{r}), \quad \overset{n}{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{B}(t_n,\mathbf{r}); \tag{8}$$

σ_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензоров усредненных напряжений и деформаций в КМ; $\mathbf{B}$ — матрица размером 6×6; индекс $^\top$ — операция транспонирования.

Согласно [16], соотношение (6) линеаризовано по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости [26], причем матрица $\mathbf{B}$ и вектор $\mathbf{p}$ с учетом (7) вычисляются по матричным формулам (24) из [16]. На данной итерации указанного метода при $t = t_n$ элементы матрицы $\mathbf{B}$ и вектора-столбца $\mathbf{p}$ уже известны и определяются механическими характеристиками материалов композиции, напряженным состоянием в них (которое рассчитано на предыдущей итерации) и структурой армирования: углами θ_k, φ_k (см. рис. 3) и плотностями ω_k $(1 \leqslant k \leqslant N)$ армирования.

Далее моделируется механическое поведение КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, поэтому нормальное напряжение $\sigma_{33}(t,\mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по координате z [13]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}(t,\mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t,\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t,\mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t,\mathbf{x})}{2h} z +\\
+ \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t,\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t,\mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leqslant h, \quad t \geqslant t_0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t,\mathbf{x},\pm h)$ — напряжения на внешней (+) и внутренней (−) лицевых поверхностях, которые известны из силовых граничных условий.

Матричное равенство (6) является системой шести алгебраических уравнений. В силу условий соответствия (7) из третьего равенства этой системы выразим скорость линейной поперечной деформации конструкции

$$\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_{33} \equiv \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_3 = \left(\overset{n}{b}_{33}\right)^{-1}\left(\overset{n}{\dot{\sigma}}_3 - \sum_{i=1}^{6}(1-\delta_{3i})\,\overset{n}{b}_{3i}\,\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_i - \overset{n}{p}_3\right), \tag{10}$$

где $\overset{n}{b}_{3i}$ $(i = \overline{1,6})$ — элементы матрицы $\overset{n}{\mathbf{B}}$ в уравнении (6); производная $\dot{\sigma}_3$ определяется путем дифференцирования по времени выражения (9). Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части (10) получаются дифференцированием по t равенств (1), т. е. зависят от функций w, $\dot{w}$, $\dot{u}_l$, $\dot{\varepsilon}_{l3}^{(m)}$ $(0 \leqslant m \leqslant M)$ и их частных производных по x_l $(l = 1,2)$.

Для окончательной формулировки начально-краевой задачи вязкоупругопластического изгибного деформирования тонких армированных цилиндрических оболочек в рамках уточненной теории к равенствам (1), (2), (6), (10) следует добавить двумерные уравнения движения и соответствующие начальные и граничные условия (см. [20], соотношения (7), (17), (19) и (21)).

2. Численный метод расчета. В разделе 1 уже отмечалось, что для численного интегрирования сформулированной начально-краевой задачи будем использовать метод шагов по времени [8,14–16,20,25,26]. Согласно этому, предполагаем, что в дискретные моменты времени t_m уже известны следующие функции:

$$\begin{gathered}\overset{m}{w}(\mathbf{x}) \equiv w(t_m,\mathbf{x}), \quad \overset{m}{u}{}_i^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_m,\mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}{}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m,\mathbf{x}),\\ \overset{m}{\dot\sigma}{}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \dot\sigma_{33}^{(\pm)}(t_m,\mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}{}_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m,\mathbf{r}), \quad i=1,2, \quad j=\overline{1,3},\\ m=n-1,n, \quad 0\leqslant l\leqslant M+1, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad |z|\leqslant h,\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$u_i^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} U_i(t,\mathbf{r}) z^l dx_3 \quad i=1,2, \quad 0\leqslant l\leqslant M+1, \tag{12}$$

— введенные новые кинематические неизвестные переменные [20].

За исключением необходимых преобразований уравнений (4) (см. [16], формулы (19) и (20)), обеспечивающих устойчивость разрабатываемой численной схемы [15], производные по времени далее заменяем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1},t_n,t_{n+1}\}$. Это позволяет построить явную схему численного интегрирования рассматриваемой задачи. После аппроксимации в уравнениях движения вторых производных по времени от кинематических переменных w и $u_i^{(l)}$ (см. (12)) их конечно-разностными аналогами, учитывая обозначения, аналогичные (8) и (11), получим [20]

$$\begin{gathered}\frac{2h\rho}{\Delta^2}\big(\overset{n+1}{w}-2\overset{n}{w}+\overset{n-1}{w}\big) = \partial_1\big(\overset{n}{M}{}_{13}^{(0)}+\overset{n}{M}{}_{11}^{(0)}\partial_1\overset{n}{w}+\overset{n}{\bar M}{}_{12}^{(0)}\partial_2\overset{n}{w}\big)+\\ +\partial_2\big(\overset{n}{\bar M}{}_{23}^{(0)}+\overset{n}{M}{}_{21}^{(0)}\partial_1\overset{n}{w}+\overset{n}{\bar{\bar M}}{}_{22}^{(0)}\partial_2\overset{n}{w}\big)-\overset{n}{M}{}_{22}^{(0)}+\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)}-\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)},\\ \frac{\rho}{\Delta^2}\big(\overset{n+1}{u}{}_1^{(l)}-2\overset{n}{u}{}_1^{(l)}+\overset{n-1}{u}{}_1^{(l)}\big) = \partial_1\big(\overset{n}{M}{}_{11}^{(l)}-\overset{n}{M}{}_{13}^{(l)}\partial_1\overset{n}{w}\big)+\partial_2\big(\overset{n}{\bar M}{}_{12}^{(l)}-\overset{n}{\bar M}{}_{23}^{(l)}\partial_1\overset{n}{w}\big)-\\ -l\overset{n}{M}{}_{13}^{(l-1)}+l\overset{n}{M}{}_{33}^{(l-1)}\partial_1\overset{n}{w}-h^l\big[\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)}-(-1)^l\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)}\big]\partial_1\overset{n}{w},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho}{\Delta^2}\big(\overset{n+1}{u}{}_2^{(l)}-2\overset{n}{u}{}_2^{(l)}+\overset{n-1}{u}{}_2^{(l)}\big) = \partial_1\big(\overset{n}{M}{}_{21}^{(l)}-\overset{n}{\bar M}{}_{13}^{(l)}\partial_2\overset{n}{w}\big)+\\ +\partial_2\big(\overset{n}{\bar M}{}_{22}^{(l)}-\overset{n}{\bar{\bar M}}{}_{23}^{(l)}\partial_2\overset{n}{w}\big)-l\overset{n}{M}{}_{23}^{(l-1)}+l\overset{n}{\bar M}{}_{33}^{(l-1)}\partial_2\overset{n}{w}-\\ -h^l\big[(R+h)^{-1}\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)}-(-1)^l(R-h)^{-1}\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)}\big]\partial_2\overset{n}{w}+\overset{n}{\bar M}{}_{23}^{(l)},\\ 0\leqslant l\leqslant M+1, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad n=1,2,3,\ldots,\end{gathered}$$

где (см. выражение (9))

$$\rho=\rho_0\omega_0+\sum_{k=1}^{N}\rho_k\omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h}\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})z^l dz,$$

$$\bar M_{ij}^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h}\frac{\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})}{R+z}z^l dz, \quad \bar{\bar M}_{ij}^{(l)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h}\frac{\sigma_{ij}(t,\mathbf{r})}{(R+z)^2}z^l dz,$$

$$lM_{33}^{(l-1)}(t,\mathbf{x}) = l\int_{-h}^{h}\sigma_{33}(t,\mathbf{r})z^{l-1}dz =$$
$$= \frac{h^l}{2}\Big[(\sigma_{33}^{(+)}+\sigma_{33}^{(-)})(1-(-1)^l)+\frac{l}{l+1}(\sigma_{33}^{(+)}-\sigma_{33}^{(-)})(1+(-1)^l)\Big], \quad (14)$$

$$l\bar{M}_{33}^{(l-1)}(t,\mathbf{x}) = l\int_{-h}^{h}\frac{\sigma_{33}(t,\mathbf{r})}{R+z}z^{l-1}dz = \frac{l}{2h}(\sigma_{33}^{(+)}+\sigma_{33}^{(-)})(\Psi_l(h)-\Psi_l(-h))+$$
$$+\frac{l}{2}(\sigma_{33}^{(+)}-\sigma_{33}^{(-)})(\Psi_{l-1}(h)-\Psi_{l-1}(-h)),$$

$$\omega_0 = 1-\sum_{k=1}^{N}\omega_k, \quad i,j=\overline{1,3}, \quad 0\leqslant l\leqslant M+1;$$

ρ_0, ρ_k — объемная плотность материала связующего и волокон k-го семейства; функции $\Psi_l(z)$ определены в (3). В уравнениях (13) массовые нагрузки не учитываются.

На основании формул (14) с учетом (11) при $t=t_n$ можем определить все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, $\bar{M}_{ij}^{(l)}$, $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$ и внешние силы $\sigma_{33}^{(\pm)}$, которые входят в правые части равенств (13). Учитывая при этом необходимые граничные условия (см. (17) и (19) в [20]), из (13) определяем по явной схеме значения функций $\overset{n+1}{w}$, $\overset{n+1}{u}{}_i^{(l)}$, $0\leqslant l\leqslant M+1$, в следующий момент времени t_{n+1}. После этого по формуле (23) из [20], которая вытекает из (2) и (12) при учете (3), вычисляем функции $\overset{n+1}{u}_i$ и $\overset{n+1}{\varepsilon}{}_{i3}^{(m)}$, $i=1,2$, $0\leqslant m\leqslant M$. Затем на основании (1) получаем осредненные деформации композиции $\overset{n+1}{\varepsilon}_{ij}$. В предшествующий момент времени t_{n-1} деформации $\overset{n-1}{\varepsilon}_{ij}$ уже известны (см. (1) при учете (11)), поэтому, используя численное дифференцирование по времени и соотношение (10), определяем и скорости деформаций $\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_{ij}$ в текущий момент времени t_n. Дальнейшее численное решение исследуемой задачи строится совершенно так же, как и в работах [16, 20].

Структура левых частей равенств (13) свидетельствует о том, что для начала проведения расчетов по разработанной явной схеме нужно знать значения функций $\overset{0}{w}$ и $\overset{0}{u}{}_i^{(l)}$, известные из начальных условий (см. (21) в [20]), а также $\overset{1}{w}$ и $\overset{1}{u}{}_i^{(l)}$ (см. (13) при $n=1$). Значения последних функций вычисляются по формуле Тейлора при учете начальных условий и уравнений движения, рассматриваемых при $t=t_0$ (см. последние формулы раздела 2 в [20]).

Для замкнутой круговой цилиндрической оболочки область Ω (см. (2)) является прямоугольной. Следовательно, аппроксимируя в соотношениях (13) производные $\partial_i(\cdot)$ их конечно-разностными аналогами от уже известных (см. (14) при учете (11)) в текущий момент времени t_n сеточных функций, окончательно получим явную численную схему «крест» [14–16, 20]. Необходимые условия устойчивости этой схемы для однородных тонкостенных конструкций приведены в [14]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-оболочки.

3. Обсуждение результатов расчетов. Исследуем неупругое динамическое изгибное поведение относительно тонкой замкнутой цилиндрической КМ-оболочки толщиной $2h = 2$ см, радиуса $R = 1$ м и длиной $L = 4$ м ($2h/\min(L, R) = 1/50$), которая жестко закреплена на кромках ($w = 0$, $u_i^{(l)} = 0$ при $x_1 = 0, L$ и $t \geqslant t_0$ [20]) и до начального момента времени $t = t_0 = 0$ покоится в естественном состоянии ($w = 0$, $u_i^{(l)} = 0$, $i = 1, 2$, $0 \leqslant l \leqslant M + 1$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t < t_0$ [20]). Конструкция нагружается изнутри равномерным давлением $p(t)$ по закону (см. (9), (13), (14)) [25]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leqslant t \leqslant t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \tag{15}$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0.01 p_{\max},$$

где смысл параметров нагрузки $p_{\max}$, $t_{\max}$, $t_{\min}$ и α вполне очевиден и подробно описан в [16, 20]. Используя экспериментальные данные [25], в расчетах примем $p_{\max} = 8$ МПа, $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Эти данные условно характеризуют давление, вызванное воздушной взрывной волной.

Оболочка изготовлена из эпоксидной смолы и армирована стекловолокнами. Мгновенное упругопластическое поведение k-го материала композиции при активном нагружении описывается диаграммой растяжения-сжатия с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_{\mathrm{s}}^{(k)} \equiv \sigma_{\mathrm{s}}^{(k)}/E^{(k)}, \\ \operatorname{sign}(\varepsilon)\sigma_{\mathrm{s}}^{(k)} + E_{\mathrm{s}}^{(k)}(\varepsilon - \operatorname{sign}(\varepsilon)\varepsilon_{\mathrm{s}}^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_{\mathrm{s}}^{(k)},\ 0 \leqslant k \leqslant N, \end{cases}$$

где σ, ε — осевое напряжение и линейная деформация; $E_{\mathrm{s}}^{(k)}$ — модуль упрочнения; $\sigma_{\mathrm{s}}^{(k)}$ — предел текучести. Физико-механические характеристики материалов композиции приведены в таблице, причем объемная вязкость не учитывается: $\mu^{(k)} \to \infty$ (см. (5)).

Physico-mechanical characteristics of the composite components [21, 22]

Components	ρ, kg/m^3	ν	σ_{s}, MPa	E, HPa	E_{s}, HPa	η, MPa·s
Epoxy	1210	0.33	20	2.8	1.114	250
Fiberglass	2520	0.25	4500	86.8	6.230	1000

Рассматриваются две структуры однородного армирования:

1) продольно-окружное 2D-армирование (рис. 2, a) с интенсивностями армирования $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ в осевом и окружном направлениях;
2) пространственное 4D-армирование, при котором два первых семейства волокон также уложены в продольном и окружном направлениях с плотностями армирования $\omega_1 = 0.05$ и $\omega_2 = 0.3$, а третье и четвертое семейства стекловолокон уложены наклонно с плотностями $\omega_3 = \omega_4 = 0.025$.

В случае 4D-структуры направления армирования определяются следующими значениями углов сферической системы координат (см. рис. 3): $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$ (на рис. 2, b

угол $\theta = \pi/4$ и оси x_1, x_2 следует поменять местами). В обеих структурах армирования расход волокон одинаков.

При указанных условиях армирования, закрепления и нагружения цилиндрическая КМ-оболочка деформируется осесимметрично (решение начально-краевой задачи не зависит от окружной переменной x_2), а также симметрично относительно центрального сечения $x_1 = L/2$, например $w(t,x) = w(t,-x)$, где $x = x_1 - L/2$ и $|x| \leqslant L/2$.

На рис. 4 изображены зависимости от времени наибольшего абсолютного значения прогиба КМ-конструкции

$$w_{\mathrm{m}}(t) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant L} |w(t,x_1)|.$$

Номера кривых на рис. 4 соответствуют номеру структуры армирования. Кривые *1* и *2* получены при указанных выше входных данных. Кривая *1″* рис. 4, *a* рассчитана при тех же условиях, что и кривая *1*, но в рамках теории упругопластического деформирования материалов композиции (при $\eta^{(k)} \to \infty$, $0 \leqslant k \leqslant N$; см. (5)). Поведение кривой *1″* показывает, что согласно упругопластическому расчету, КМ-конструкция колеблется неограниченно долго. Кривые же *1* и *2* свидетельствуют о том, что к моменту времени $t = 400$ мс осцилляции наибольшего по модулю значения прогиба практически прекращаются, а величина максимального остаточного прогиба имеет значение, равное примерно 1.3 мм. Сопоставление кривых *1* и *1″* на рис. 4, *a* показывает, что упругопластические расчеты (кривая *1″*) не позволяют определить величину наибольшего остаточного прогиба цилиндрической КМ-оболочки даже весьма приближенно.

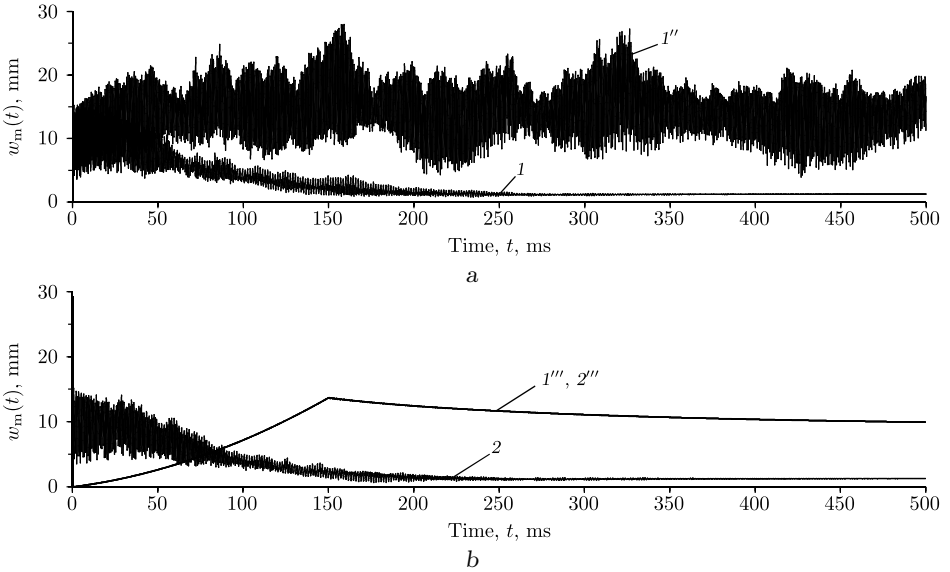


Рис. 4. Осцилляции максимального абсолютного значения прогиба: (*a*) — уточненные упругопластический и вязкоупругопластический расчеты КМ-оболочки с 2D-армированием; (*b*) — уточненный вязкоупругопластический расчет оболочки с 4D-армированием

[Figure 4. Oscillations of the maximum absolute value of the deflection: (*a*) — refined elastoplastic and viscoelastoplastic calculations for the CM-shell with 2D-reinforcement; (*b*) — refined viscoelastoplastic calculation for the shell with 4D-reinforcement]

На рис. 5 приведены зависимости $w(x)$ ($x = x_1 - L/2$), рассчитанные при $t = 500$ мс. (Согласно поведению кривых *1* и *2* на рис. 4, осцилляции прогиба КМ-конструкции при этом практически уже прекратились.) Кривые *1* и *2* на рис. 5 определены при тех же условиях, что и кривые *1* и *2* на рис. 4. Как указывалось выше, решения исследуемой задачи обладают симметрией относительно центральных сечений конструкций $x = 0$ ($x_1 = L/2$), поэтому на рис. 5 изображены только правые части зависимостей $w(x)$ ($|x| \leqslant L/2$). Сравнение максимальных значений ординат точек на кривых *1* и *2* рис. 5, которые достигаются в зоне краевого эффекта ($x \approx 1.84$ м), показывает, что при $t = 500$ мс значения w_{m} на кривой *2* примерно на 2 % больше, чем на кривой *1*. Сопоставление же этих кривых при $0 \leqslant x \leqslant 1.3$ м свидетельствует о том, что при использовании 4D-структуры армирования (кривая *2*) остаточный прогиб в центральной части даже относительно тонкой КМ-конструкции на 10–20 % меньше аналогичной величины в цилиндрической оболочке с традиционным 2D-армированием.

Все кривые на рис. 4 и 5 получены по уточненной теории изгиба оболочек при $M = 7$ (см. (1) и (2)). Расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна ($M = 0$), приводят к зависимостям $w_{\mathrm{m}}(t)$ и $w(x)$ при $t = 500$ мс, которые визуально практически не отличаются от кривых, приведенных на рис. 4 и 5, поэтому не изображены.

На рис. 6 представлены зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции $\varepsilon_*^{(k)}$:

$$\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(k)}(t) = \max_{x_1, z} \varepsilon_*^{(k)},$$

где $|z| \leqslant h$, $0 \leqslant x_1 \leqslant L$ для цилиндрической оболочки с 4D-структурой армирования в окрестности начального момента времени (рис. 6, *a*) и в окрестности $t = 500$ мс (рис. 6, *b*). Номера кривых соответствуют номеру k-го компонента композиции: *0*, *0′* — связующее ($k = 0$); *2*, *2′* — арматура второго (окружного) семейства ($k = 2$). Сплошные кривые *0* и *2* рассчитаны по

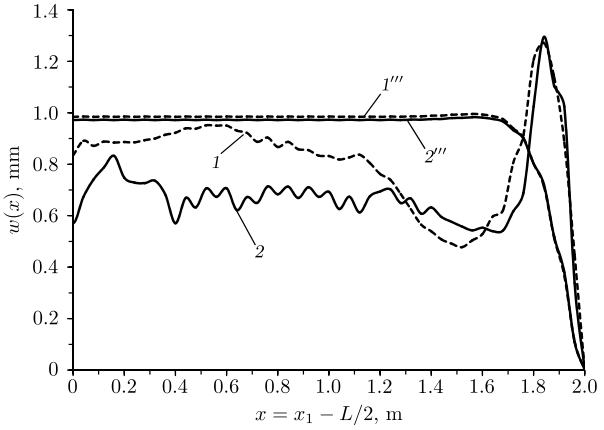


Рис. 5. Эпюры остаточных прогибов цилиндрических КМ-оболочек, рассчитанные по уточненной теории

[Figure 5. Diagrams of residual deflections of cylindrical CM-shells calculated by the refined theory]

уточненной теории ($M = 7$), а штриховые кривые *0′* и *2′* — по теории Амбарцумяна ($M = 0$). На рис. 6, *a* кривые *2* и *2′* визуально практически не различаются. Кривые *0*, *0′* и *2*, *2′* на рис. 6 получены при прежних входных данных.

Сравнение ординат глобальных максимумов на кривых *0* и *0′* (при $t = 0.5$ мс) на рис. 6, *a* показывает, что расчет по традиционной теории Амбарцумяна завышает наибольшее значение $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}$ в связующем оболочки с пространственной структурой армирования на 29 % по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории. Сопоставление же кривых *0*, *2* и *0′*, *2′* на рис. 6, *b* демонстрирует, что теория Амбарцумяна примерно на 35 % завышает величину интенсивности остаточных деформаций в компонентах композиции по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории.

На рис. 7 изображены зависимости $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(k)}(t)$, рассчитанные по уточненной теории ($M = 7$) в окрестности начального момента времени (рис. 7, *a*) и в ок-

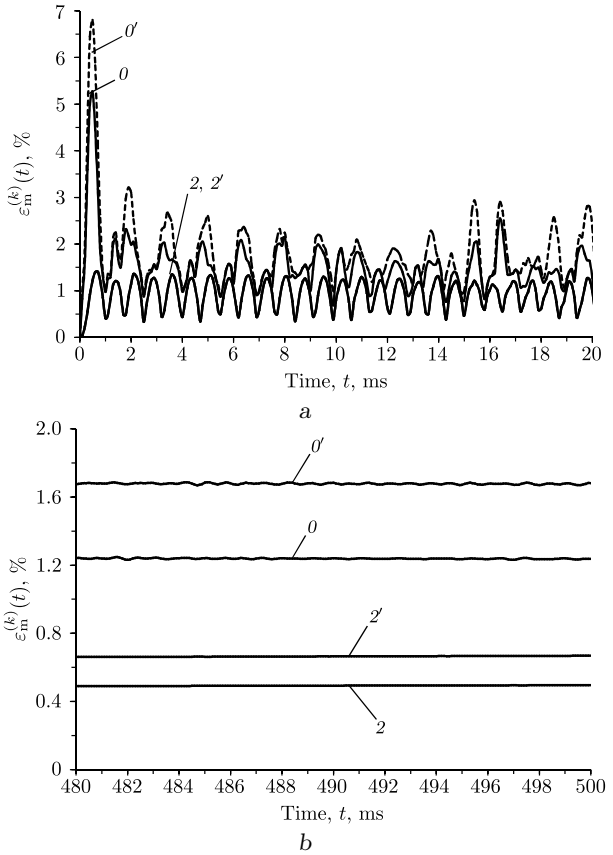


Рис. 6. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиции оболочки с 4D-армированием, рассчитанные по разным теориям: (*a*) — в окрестности начального момента времени; (*b*) — в окрестности $t = 500$ мс

[Figure 6. Oscillations of the highest values of the deformation intensities of components of shell compositions with 4D-reinforcement calculated by the different theories: (*a*) — close to the initial moment of time; (*b*) — close to the time $t = 500$ ms]

рестности $t = 500$ мс (рис. 7, b) для КМ-оболочки с 2D-структурой армирования (сплошные кривые *0*, *2*) и с пространственной 4D-структурой (штриховые кривые *0′*, *2′*). Как и на рис. 6, номера кривых соответствуют номеру k-го компонента композиции. Сравнение кривых *0* и *0′* на рис. 7, a показывает, что для относительно тонкой цилиндрической оболочки замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру приводит к увеличению максимального значения $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}$ примерно на 9 % (см. кривые *0* и *0′* при $t \approx 0.5$ мс). Однако сопоставление этих же кривых на рис. 7, b свидетельствует о том, что к моменту времени $t = 500$ мс конструкция с 4D-структурой армирования (кривая *0′*) практически перестала осциллировать, а оболочка с 2D-структурой (кривая *0*) все еще колеблется. Сравнение ординаты точки кривой *0′* при $t = 500$ мс со средним значением ординат точек кривой *0* в окрестности этого момента времени демонстрирует, что замена 2D-структуры на 4D-структуру армирования позволяет уменьшить величину интенсивности остаточных

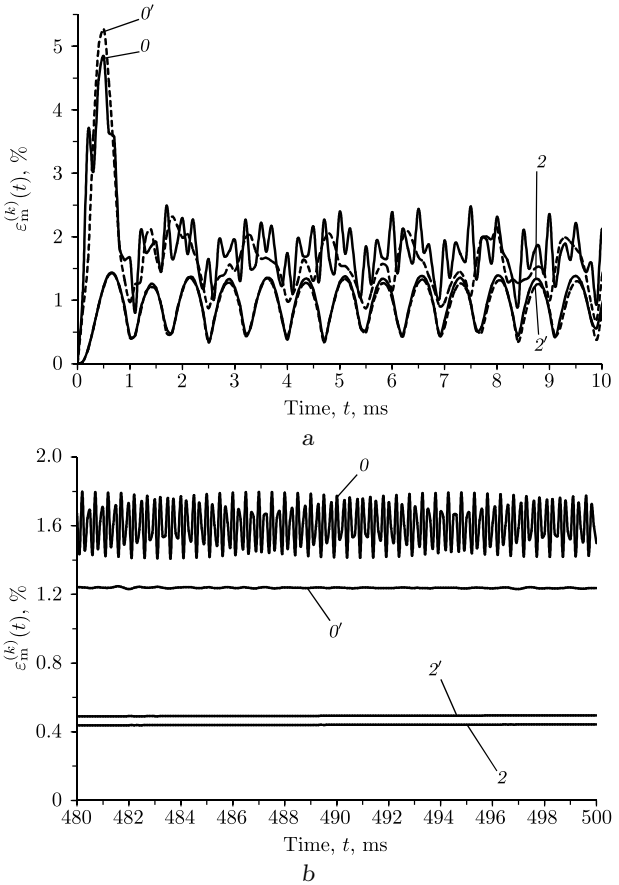


Рис. 7. Осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиций оболочек с разными структурами армирования, рассчитанные по уточненной теории: (a) — в окрестности начального момента времени; (b) — в окрестности $t = 500$ мс

[Figure 7. Oscillations of the highest values of the deformation intensities of components of shell compositions with different structures of reinforcement calculated according to the refined theory: (a) — close to the initial moment of time; (b) — close to the time $t = 500$ ms]

деформаций связующего примерно на 30 %. Из поведения кривых *2* и *2′* на рис. 7, *b* видно, что при такой замене структуры армирования максимальное значение интенсивности остаточных деформаций второго (окружного) семейства возрастает на 12 %. Таким образом, замена «плоско»-перекрестной 2D-структуры армирования (рис. 2, *a*) на пространственную 4D-структуру (рис. 2, *b*) при динамическом нагружении тонкой длинной цилиндрической оболочки и фиксированном расходе волокон может приводить как к увеличению, так и уменьшению интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции.

В связи с этим целесообразно проанализировать неупругое поведение таких цилиндрических КМ-оболочек при квазистатическом нагружении. Так, на рис. 4, *b* кривые *1‴* и *2‴* характеризуют зависимости $w_{\mathrm{m}}(t)$, рассчитанные при разных структурах армирования и следующих параметрах нагрузки: $p_{\max} = 3$ МПа, $t_{\max} = 150$ мс и $t_{\min} = 300$ мс (см. (15)). При принятом на рис. 4, *b* масштабе по оси ординат кривые *1‴* и *2‴* визуально не различаются, однако кривая *2‴* все же лежит ниже кривой *1‴*. В отличие от кривой *2*, кривые *1‴* и *2‴* не осциллируют. Это свидетельствует о том, что указанное нагружение действительно можно рассматривать как квазистатическое.

На рис. 5 кривые *1‴* и *2‴* характеризуют зависимости $w(x)$, рассчитанные при квазистатическом нагружении в момент времени $t = 500$ мс. Ординаты точек этих кривых уменьшены в 10 раз (см. правые участки кривых *1‴* и *2‴* на рис. 4, *b*). Из поведения кривых *1‴* и *2‴* на рис. 5 видно, что при квазистатическом нагружении цилиндрических КМ-оболочек внутренним давлением такие конструкции после снятия нагрузки не приобретают гофрированную остаточную форму, как это наблюдается при динамическом нагружении (см. кривые *1* и *2*). На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1.6$ м кривые *1‴* и *2‴* имеют практически горизонтальные участки. Это свидетельствует о том, что при квазистатическом нагружении в длинных цилиндрических КМ-оболочках реализуется в основном безмоментное напряженное состояние и лишь в зонах краевых эффектов (при $1.6 < x \leqslant 2$ м) возникает ярко выраженное моментное состояние. Сравнение правых участков всех кривых на рис. 5 показывает, что протяженность зон краевых эффектов как при динамическом (кривые *1* и *2*), так и при квазистатическом (кривые *1‴* и *2‴*) нагружениях примерно одна и та же.

Кривая *2‴* на рис. 5 в основном лежит несколько ниже кривой *1‴*, т. е. при квазистатическом нагружении замена 2D-структуры армирования (кривая *1‴*) на 4D-структуру (кривая *2‴*) также приводит к уменьшению величины остаточного прогиба за пределами зон краевых эффектов. Однако это уменьшение мало (около 1.5 %). Сравнение же интенсивности деформаций в компонентах композиции при этом показывает, что при $t = 500$ мс значения $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)} = 3.14\,\%$, $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(2)} = 1.11\,\%$ в случае 2D-структуры армирования и $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)} = 4.08\,\%$, $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(2)} = 1.08\,\%$ в случае использования 4D-структуры. Следовательно, при квазистатическом нагружении тонкой длинной цилиндрической оболочки замена традиционной «плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру приводит к увеличению интенсивности остаточных деформаций связующей матрицы на 29.9 % и к уменьшению аналогичной величины волокон второго семейства всего на 2.7 %. Очевидно,

что при квазистатическом нагружении таких конструкций указанная замена структур армирования неэффективна.

Кривые *1‴* и *2‴* на рис. 4, *b* и 5 получены по уточненной теории изгиба ($M = 7$). Расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна, приводят практически к тем же результатам. Это относится и к определению деформированного состояния компонентов композиции оболочек. Поэтому неупругое поведение длинных тонких цилиндрических КМ-оболочек при их квазистатическом нагружении внутренним давлением вполне адекватно можно определять по традиционной неклассической теории Амбарцумяна.

Для расчета остаточных состояний (в частности, остаточных прогибов) динамически нагружаемых и неупруго деформируемых цилиндрических оболочек (в том числе и композитных, подкрепленных) ранее предлагалось использовать модель жесткопластического тела, что позволяет в ряде случаев получить достаточно простые и вполне обозримые аналитические решения [27]. Поэтому здесь целесообразно обсудить результаты расчетов по упругопластической модели, но приближенной к модели жесткопластического тела. С этой целью модули Юнга материалов композиции $E^{(k)}$ (см. таблицу) были увеличены: для связующей матрицы ($k = 0$) в $15 \cdot 10^6$ раз, а для арматуры ($k \geqslant 1$) в 10^6 раз. Для обеспечения устойчивости схемы «крест» шаг по времени Δ при этом был уменьшен в 10^3 раз. Динамический расчет проводился при исходных параметрах нагрузки: $p_{\max} = 8$ МПа, $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс (см. (15)). Оказалось, что при таких входных данных величины w_{m} имеют порядок 10^{-9} м, а значения $\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$ — порядок $10^{-6}\,\%$ как в случае 2D-структуры армирования, так и в случае 4D-структуры, т. е. пластичность в материалах композиции вообще не возникает. Кроме того, в момент времени $t = t_{\max} = 0.1$ мс, когда внутреннее давление достигает своего максимального значения $p_{\max}$, эпюра прогибов $w(x)$ имеет вид, аналогичный кривым *1‴* и *2‴* на рис. 5, т. е. качественно отличается от поведения остаточного прогиба, характеризуемого кривыми *1* и *2* на рис. 5. Следовательно, расчеты динамического неупругого поведения стеклопластиковых цилиндрических оболочек, выполненные по модели жесткопластического тела, ни количественно, ни качественно не позволяют определить и даже грубо оценить остаточные формы таких конструкций.

Приведенные выше результаты относятся к относительно тонким длинным цилиндрическим КМ-оболочкам ($2h/R = 1/50$, $L = 4R$). Дополнительные расчеты показывают, что для относительно толстых конструкций ($2h/\min(R, L) = 1/10$), а особенно для коротких цилиндрических КМ-оболочек, положительный эффект от замены «плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную 4D-структуру значительно возрастает, причем он начинает проявляться уже и при квазистатическом нагружении таких конструкций. В частности, величина наибольшего по модулю остаточного прогиба при такой замене может уменьшаться на несколько десятков процентов, а интенсивность остаточных деформаций в связующей матрице может уменьшаться даже в разы. Кроме того, с увеличением относительной толщины КМ-оболочки увеличивается различие между решениями, полученными по уточненной теории изгиба и традиционной неклассической теории Амбарцумяна. Разность наибольших по модулю значений остаточных прогибов при этом может превосходить $5\,\%$, а разность максимальных значений

интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции может достигать даже сотен процентов как при «плоско»-перекрестном, так и при пространственном армировании конструкции.

Заключение. Разработана уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования, которая позволяет более точно, чем в рамках теории Амбарцумяна, рассчитывать остаточные перемещения и остаточные напряженно-деформированные состояния в компонентах композиции при действии интенсивных кратковременных нагрузок. Показано, что даже для относительно тонкой и длинной цилиндрической КМ-оболочки динамические расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна, могут на несколько десятков процентов завышать максимальное значение и остаточную величину интенсивности деформаций компонентов композиции. Однако при квазистатическом нагружении таких неупруго деформируемых КМ-конструкций вполне оправданно можно использовать теорию Амбарцумяна.

Следовательно, для получения адекватных результатов динамических расчетов вязкоупругопластического поведения гибких КМ-конструкций целесообразно использовать теории изгиба более высокой точности, чем теория Амбарцумяна [11].

Проведенные расчеты продемонстрировали, что даже для тонких длинных оболочек из стеклопластика, нагруженных изнутри давлением взрывного типа, замена традиционной перекрестной структуры армирования по эквидистантным поверхностям (см. рис. 1, *b* и 2, *a*) на пространственную структуру (см. рис. 2, *b*) позволяет существенно уменьшить интенсивность остаточных деформаций связующей матрицы, а также снизить на 10–20 % величину остаточных прогибов в центральной части КМ-оболочки. Наибольший остаточный прогиб, который возникает в зоне краевого эффекта, при такой замене структур армирования изменяется пренебрежимо мало. Однако осцилляции пространственно-армированной конструкции затухают быстрее, чем оболочки с «плоско»-перекрестной структурой армирования. При квазистатическом нагружении тонких длинных цилиндрических оболочек внутренним давлением такая замена структур армирования является неэффективной. В случаях же относительно толстых, и особенно коротких, цилиндрических оболочек положительный эффект от замены 2D-структуры армирования (рис. 2, *a*) на 4D-структуру (рис. 2, *b*) значительно возрастает, причем заметно проявляется и в случаях квазистатического нагружения таких конструкций.

Показано, что после неупругого динамического деформирования тонкие длинные стеклопластиковые цилиндрические КМ-оболочки приобретают гофрированную остаточную форму, причем образующиеся складки ориентированы в окружном направлении. При квазистатическом нагружении и неупругом деформировании таких конструкций складчатая остаточная форма не образуется (за пределами краевых эффектов цилиндрические КМ-оболочки при этом деформируются как безмоментные).

Продемонстрировано, что использование жесткопластической модели не позволяет адекватно рассчитывать форму остаточного прогиба цилиндрических стеклопластиковых оболочек при их динамическом нагружении. Такие расчеты на 6 порядков занижают максимальные значения прогибов и интенсивностей деформаций компонентов композиции по сравнению с расчетами,

проведенными с использованием вязкоупругопластической модели. Поэтому модель жесткопластического тела нецелесообразно использовать для проведения динамических расчетов неупругого поведения тонкостенных стеклопластиковых конструкций.

Конкурирующие интересы. У меня нет конфликта интересов в авторстве и публикации этой статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

Библиографический список

1. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.*, 2001. vol. 53, no. 1. pp. 21–42. https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6.
2. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis.* Boca Raton: CRC Press, 2003. xxiii+831 pp. https://doi.org/10.1201/b12409.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progress in Aerospace Sciences*, 2005. vol. 41, no. 2. pp. 143–151. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004.
4. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics.* Boca Raton: CRC Press, 2016. 700 pp. https://doi.org/10.1201/b19626.
5. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements.* Elsever: Amsterdam, 2013. xii+412 pp. https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1.
6. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x.
7. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андрюшин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек.* М.: Физматлит, 2014. 408 с.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.
9. Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
10. Григоренко Я. М. *Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости.* Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.
11. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек.* М.: Наука, 1974. 446 с.
12. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. https://doi.org/10.1090/qam/69715.
13. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек.* Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
14. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций.* Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
15. Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // *Вычислительная механика сплошных сред*, 2019. Т. 12, № 1. С. 80–97. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8.
16. Янковский А. П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования // *Вестн. Сам. гос.*

техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 24, № 3. С. 506–527. https://doi.org/10.14498/vsgtu1709.

17. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания.* Новосибирск: Наука, 2001. 287 с.
18. Whitney J. M., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. Sound Vib.*, 1973. vol. 30, no. 1. pp. 85–97. https://doi.org/10.1016/s0022-460x(73)80052-5.
19. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates // *J. Appl. Mech.*, 1977. vol. 44, no. 4. pp. 669–676. https://doi.org/10.1115/1.3424155.
20. Янковский А. П. Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования армированных цилиндрических оболочек // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2020. № 1. С. 138–149. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.11.
21. *Композиционные материалы*: Справочник / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
22. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. xi+786 pp. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1.
23. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites // *Sampe J.*, 2001. vol. 37, no. 3. pp. 3–17.
24. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // *Mech. Compos. Mater.*, 2009. vol. 45, no. 2. pp. 241–254. https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X.
26. Хажинский Г. М. *Модели деформирования и разрушения металлов.* М.: Научный мир, 2011. 231 с.
27. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. *Динамика жесткопластических элементов конструкций.* Новосибирск: Наука, 1984. 234 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 343–364
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1838

MSC: 74K20

A refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible spatially-reinforced cylindrical shells

© *A. P. Yankovskii*

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

A model of viscoelastic-plastic deformation of flexible circular cylindrical shells with spatial reinforcement structures is developed. The instant plastic behavior of the materials of the composition is determined by flow theory with isotropic hardening. The viscoelastic deformation of the components of the composition is described by the equations of the Maxwell–Boltzmann model. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The used relations make it possible to calculate with varying degrees of accuracy the residual displacements of the points of the construction and the residual deformed state of the components of the composition. In this case, a possible weak resistance of the reinforced shell to transverse shear is simulated. In the first approximation, the equations used, the initial and boundary conditions, are reduced to the formulas of the nonclassical Ambardzumyan theory.

The numerical solution of the formulated initial boundary-value problem is constructed according to the explicit "cross" scheme. Elastoplastic and viscoelastic-plastic dynamic deformation of thin fiberglass shells under the influence of internal pressure of an explosive type is investigated. Two reinforcement structures are considered:

1) orthogonal reinforcement in the longitudinal and circumferential directions;
2) spatial reinforcement in four directions.

It is shown that even for relatively thin composite shells the Ambardzumyan theory is unacceptable to obtain adequate results of calculations of their viscoelastic-plastic dynamic deformation. It has been demonstrated that a calculation according to the theory of elastoplastic deformation of reinforced structures does not allow even an approximate estimate of the residual states of composite shells after their dynamic loading. It is shown that even for a relatively thin and long cylindrical shell, the replacement of the traditional "flat"-cross-reinforcement structure with a spatial structure

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Yankovskii A. P. A refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible spatially-reinforced cylindrical shells, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 343–364. https://doi.org/10.14498/vsgtu1838 (In Russian).

Author's Details:
Andrei P. Yankovskii https://orcid.org/0000-0002-2602-8357
Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;
e-mail: lab4nemir@rambler.ru

 © Samara State Technical University

can significantly reduce the residual strain of the binder material. In cases of relatively thick and especially short shells, the positive effect of such a replacement of the reinforcement structures is manifested to a much greater extent.

Keywords: cylindrical shell, spatial reinforcement, reinforcement along equidistant surfaces, viscoelastic-plastic deformation, explosive-type loads, refined bending theories, Ambardzumyan theory, geometric nonlinearity, explicit numerical "cross" scheme type scheme.

Received: 8th December, 2020 / Revised: 12th March, 2021 / Accepted: 11th May, 2021 / First online: 5th June, 2021

Competing interests. I hereby declare that I have no conflict of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was carried out within the framework of a state assignment; state registration number — 121030900260-6.

References

1. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines, *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42. https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6.
2. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis.* Boca Raton, CRC Press, 2003, xxiii+831 pp. https://doi.org/10.1201/b12409.
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction, *Progress in Aerospace Sciences*, 2005, vol. 41, no. 2, pp. 143–151. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004.
4. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics.* Boca Raton, CRC Press, 2016, 700 pp. https://doi.org/10.1201/b19626.
5. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements.* Elsever, Amsterdam, 2013, xii+412 pp. https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1.
6. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x.
7. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp. (In Russian)
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.
9. Tarnopol'skii Yu. M., Zhigun I. G., Polyakov V. A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy* [Spatially Reinforced Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 224 pp. (In Russian)
10. Grigorenko Ya. M. *Izotropnye i anizotropnye sloistye obolochki vrashcheniia peremennoi zhestkosti* [Isotropic and Anisotropic Layered Shells of Revolution of Variable Stiffness]. Kiev, Naukova dumka, 1973, 228 pp. (In Russian)
11. Ambartsumyan S. A. *Obshchaia teoriia anizotropnykh obolochek* [General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 2002, 446 pp. (In Russian)

12. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. https://doi.org/10.1090/qam/69715.
13. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Non-Linear Dynamic Problems for Composite Cylindrical Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
14. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktsii* [Nonlinear Problems of Dynamics of Composite Structures]. Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
15. Yankovskii A. P. Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear, *Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 80–97 (In Russian). https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8.
16. Yankovskii A. P. Modeling of viscoelastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial-reinforcements structures, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 506–527 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1709.
17. Andreev A. N., Nemirovskii Yu. V. *Mnogosloinye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoichivost' i kolebaniia* [Multilayer Anisotropic Shells and Plates. Bending, Stability, and Vibrations]. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 pp. (In Russian)
18. Whitney J. M., Sun C. A higher order theory for extensional motion of laminated composites, *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, no. 1, pp. 85–97. https://doi.org/10.1016/s0022-460x(73)80052-5.
19. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high-order theory of plate deformation. Part 2: Laminated plates, *J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, no. 4, pp. 669–676. https://doi.org/10.1115/1.3424155.
20. Yankovskii A. P. The refined model of viscoelastic-plastic deformation of reinforced cylindrical shells, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 138–149 (In Russian). https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.11.
21. *Kompozitsionnye materialy* [Composite Materials], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Naukova Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)
22. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, xi+786 pp. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7139-1.
23. Mohamed M. H., Bogdanovich A. E., Dickinson L. C., Singletary J. N., Lienhart R. R. A new generation of 3D woven fabric preforms and composites, *Sampe J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3–17.
24. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites, *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254. https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y.
25. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X.
26. Khazhinskii G. M. *Modeli deformirovaniia i razrusheniia metallov* [Deformation and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Nauchnyi Mir, 2011, 231 pp. (In Russian)
27. Komarov K. L., Nemirovskii Yu. V. *Dinamika zhestkoplasticheskikh elementov konstruktsii* [Dynamics of Rigid-Plastic Structural Elements]. Novosibirsk, Nauka, 1984, 234 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 365–380
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1839

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 517.958:621.311.245

Дифференциальная ошибка угла ориентации анеморумбометра горизонтально-осевой ветроэнергетической установки

© *Е. В. Соломин, А. А. Терехин, А. С. Мартьянов, А. А. Ковалёв, Д. Р. Исмагилов, А. А. Мирошниченко, Ю. Ян, Г. Н. Рявкин*

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.

Аннотация

Рассматривается проблема ориентации горизонтально-осевых ветроэнергетических установок при изменении направления, силы и скорости ветра. Когда направление ветра меняется, активная ометаемая площадь ротора, представляющая собой круг при коллинеарности оси вращения и вектора набегающего потока, уменьшается и принимает форму эллипса. Это, в свою очередь, приводит к снижению вырабатываемой электроэнергии.

Для ориентации ротора используется анеморумбометр, регистрирующий скорость и направление потока ветра. При изменении направления потока ветра соответствующий сигнал передается системе управления, которая дает команду на разворот ротора на ветер. Однако при прохождении потока ветра между вращающимися лопастями его направление искажается, происходит вихреобразование, в результате чего прибор выдает изначально неверные данные о направлении и скорости потока. В результате при регулировании положения ротора коллинеарность оси

Научная статья

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Соломин Е. В., Терехин А. А., Мартьянов А. С., Ковалёв А. А., Исмагилов Д. Р., Мирошниченко А. А., Ян Ю., Рявкин Г. Н. Дифференциальная ошибка угла ориентации анеморумбометра горизонтально-осевой ветроэнергетической установки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 365–380. https://doi.org/10.14498/vsgtu1839.

Сведения об авторах

Евгений Викторович Соломин https://orcid.org/0000-0002-4694-0490
доктор технических наук, профессор; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: solominev@susu.ru

Александр Александрович Терехин https://orcid.org/0000-0002-5744-2104
кандидат технических наук, доцент; каф. летательных аппаратов;
e-mail: aleksandr.terekhin@gmail.com

вращения и вектора набегающего потока не достигается, ометаемая площадь постоянно остается эллипсообразной, а вырабатываемая мощность пропорционально снижается. В связи со значимостью приведенной проблемы целью исследования является получение численных значений угла отклонения в различных режимах путем трехмерного моделирования в программном комплексе ANSYS CFX. Полученные сведения могут быть использованы в дальнейшем для разработки алгоритма устранения данной ошибки.

Ключевые слова: горизонтально-осевая ветроэнергетическая установка, ориентация, анеморумбометр, ошибка угла ориентации.

Получение: 18 декабря 2020 г. / Исправление: 27 марта 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2021 г.

1. Постановка задачи, назначение физических и геометрических параметров. Стремительный рост использования полезных ископаемых и резкое увеличение энергопотребления в ряде стран в начале XXI века, связанное с этим интенсивное загрязнение атмосферы, а также угроза глобального потепления с ростом концентрации парниковых газов представляют для человечества вызовы планетарного масштаба, реагировать на которые требуется незамедлительно. Одним из апробированных и экономически выгодных подходов к решению указанных проблем является развитие возобновляемой энергетики. К 2020 году доля одной только ветроэнергетики, сформировавшейся в ряде стран в мощные национальные отрасли, составила свыше 6 % мировой выработки электроэнергии (или около 900 ТВт · ч в год) [1], в связи с чем увеличение эффективности эксплуатируемого оборудования является актуальной задачей мирового уровня.

Возобновляемая энергетика в комплексе решает проблемы как энергодефицита, так и снижения загрязнения окружающей среды, в том числе за счет гибридизации с использованием «зеленых» водородных накопителей [2].

Андрей Сергеевич Мартьянов https://orcid.org/0000-0002-9997-9989
кандидат технических наук, доцент; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: martianovas@susu.ru

Антон Александрович Ковалёв https://orcid.org/0000-0001-6952-277X
аспирант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения;
e-mail: alpenglow305@yandex.ru

Денис Рашидович Исмагилов https://orcid.org/0000-0002-9312-295X
инженер-исследователь; НОЦ «Аэрокосмические технологии»;
e-mail: drismagilov@gmail.com

Алексей Александрович Мирошниченко https://orcid.org/0000-0003-4594-3806
аспирант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения;
e-mail: alex.miroshnichenko@mail.ru

Юйсун Ян https://orcid.org/0000-0002-2941-5942
аспирант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения;
e-mail: 1152108936@qq.com

Глеб Николаевич Рявкин https://orcid.org/0000-0002-7637-0310
магистрант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения;
e-mail: amdx3@bk.ru

Быстрое развитие мировой ветроэнергетики, глобальная установленная мощность которой превысила в 2019 году 650 ГВт [1], привело к возникновению целого ряда способов повышения эффективности ветроэнергетических установок (ВЭУ), включая как конструктивные изменения, так и аппаратно-программные, с учетом того, что современная ВЭУ представляет собой сложный электротехнический комплекс с программным управлением. Мировой парк ВЭУ состоит в основном (на 90 %) из крупных горизонтально-осевых ветроэнергетических установок (ГО ВЭУ).

Одной из очевидных и хорошо известных проблем ГО ВЭУ является следующий феномен [3]. При взаимодействии набегающего потока ветра с аэродинамическим профилем лопасти возникает подъемная сила, создающая крутящий момент ротора. При вращении лопасти за ней создается турбулизированный поток, направление которого отличается от начального направления потока ветра. Анеморумбометр — прибор определения скорости и направления ветра, расположенный, как правило, на задней части гондолы — периодически отклоняется при прохождении лопасти через вертикальное положение. В результате усреднения показаний анеморумбометра системой управления определяются параметры не набегающего потока, а его отклоненной турбулизированной составляющей, за счет чего возникает дифференциальная (т.е. разнесенная по времени и величине) ошибка ориентации ротора. В связи с этим система управления дает команду на разворот ротора в сторону снижения ошибки, что приводит к рассогласованию коллинеарности вектора набегающего потока и оси вращения ротора. Результатом такой манипуляции является снижение ометаемой площади, приводящее к потерям выработки энергии пропорционально косинусу угла рассогласования. Далее система управления дает команду на разворот ротора с целью устранения мнимой усредненной ошибки и либо еще увеличивает рассогласование коллинеарности, либо выставляет ротор в такое положение, где ошибка вновь появляется. С учетом реакции на изменение направления ветра многотонный ротор периодически «ориентируется», пытаясь ликвидировать мнимую ошибку рассогласования, что приводит к значительному дополнительному потреблению (а значит, потере) электроэнергии. Выработка энергии генератором ВЭУ в такие периоды может привносить дополнительные ошибки [4] в связи с тем, что система управления ориентируется на падение мощности при определенной быстроходности и дает команду на поиск причины. Более того, в ряде случаев (например, при отключении сети), когда требуется срочное аварийное торможение [5], система управления может некорректно отключиться [6, 7] с невозможностью нормальной работы после восстановления сети. Данная проблема, безусловно, не осталась без внимания ученых и разработчиков и достаточно хорошо освещена [8–10].

Тем не менее, несмотря на внедрение различных приборов точного определения направления (и скорости) ветрового потока типа LiDAR и SoDAR [9], а также дополнительных сенсоров на роторе ВЭУ, проблема возникновения дифференциальной ошибки ротора до сих пор не решена [11, 12].

Вместе с тем повышение выработки электроэнергии даже на 10 % привело бы к экономическому эффекту свыше $ 7 млрд. США.[1] Таким образом, проблема является системной и фундаментальной.

[1] 900 ТВт · ч × $ 0.08 × 10 % = $ 7.2 млрд.

С целью прояснения проблемы и проведения фундаментальных исследований коллективом ученых был инициирован проект, поддержанный позже РФФИ, в области определения дифференциальной ошибки ориентации ротора ГО ВЭУ.

Для проведения данного исследования была выбрана одна из самых распространенных в мире моделей ГО ВЭУ Siemens: SWT-3.6-120 с профилем лопасти B52 и соответствующими характеристиками [13]. Используемая 3D-модель изображена на рис. 1. Основные параметры представлены в таблице.

Далее модель экспортирована в пакет `ANSYS CFX` для проведения исследований в части численного моделирования потока, отклоняемого вращающейся лопастью и приходящего к анеморумбометру, расположенному на гондоле ВЭУ, с измененными параметрами вектора скорости.

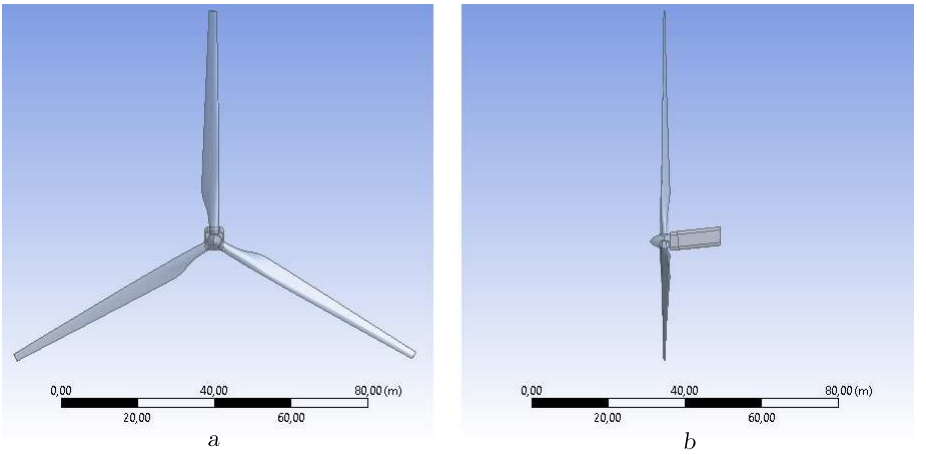


Рис. 1. 3D-модель ГО ВЭУ: *a* — вид спереди; *b* — вид сбоку
[Figure 1. The 3D model of the horizontal-axis wind turbine (HAWT): *a* — front view; *b* — side view]

Значения параметров ГО ВЭУ SWT-3.6-120 [The parameter values of the horizontal-axis wind turbine SWT-3.6-120]

Parameter names	Values
Nominal power P, kW	3 600
Lower limit of wind speed $V_{\min}$, m/s	3
Upper limit of wind speed $V_{\max}$, m/s	25
Nominal wind speed V_{nom}, m/s	12.5
Circumferential speed of the rotor ω, rad/s	1
Rotor diameter D, m	120
Swept area of rotor S, m	11 300

2. Программные настройки. Для моделирования турбулентных потоков использовался подход, основанный на уравнениях Навье—Стокса, осредненных по Рейнольдсу [14–16]:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho} \cdot U_j) = 0;$$

– уравнение импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\cdot U_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\cdot U_i\cdot U_j-\tau_{ij})=0,$$

где $\overline{\rho}$ — среднее значение плотности, кг/м^3; t — время, с; $U_{i,j,k}$ — среднее значение скорости в направлении $x_{i,j,k}$, м/с;

– сила трения, Па

$$\tau_{ij}=\mu\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_I}\Big)-\frac{2}{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}-\overline{\rho}\overline{u_i'u_j'};$$

– турбулентная вязкость, Па · с

$$\mu_t=f_\mu C_\mu\rho\frac{k^2}{\varepsilon};$$

– тензор напряжений Рейнольдса [14], Па

$$-\overline{\rho}\overline{u_i'u_j'}=\mu_t\Big(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_I}\Big)-\frac{2}{3}\Big(\mu_t\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\rho k\Big)\delta_{ij},$$

где μ — коэффициент динамической вязкости, Па · с; δ_{ij} — коэффициент плотности энергии; f_μ — функция демпфирования [18–20]; $C_\mu=0.09$ — эмпирическая константа замыкания; ρ — плотность воздуха, кг/м^3; k — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, м^2/с^2; ε — скорость рассеяния энергии турбулентности, м^2/с^3;

– модель турбулентности $k{-}\varepsilon$ [21, 22]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho U_j k-\Big(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\Big)\frac{\partial k}{\partial x_j}\Big)=$$
$$=\mu_t(P+P_B)-\rho\varepsilon-\frac{2}{3}\Big(\mu_t\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\rho k\Big)\frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\rho u_j\varepsilon-\Big(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\Big)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\Big)=$$
$$=C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\Big(\mu_t P-\frac{2}{3}\Big(\mu_t\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\rho k\Big)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\Big)+C_{\varepsilon3}\frac{\varepsilon}{k}\mu_t P_B-$$
$$-C_{\varepsilon2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}+C_{\varepsilon4}\rho\varepsilon\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{C_\mu\eta^3(1-\eta/\eta_0)}{1+\beta\eta^3}\frac{\rho\varepsilon^2}{k},$$

где $\sigma_{k,\varepsilon}$ — турбулентные числа Прандтля; P, P_B — дополнительные слагаемые модели турбулентности $k{-}\varepsilon$; $u_{i,k}$ — множители тензора напряжений Рейнольдса; $C_{1,2,3,4}$ — коэффициенты стандартной модели турбулентности $k{-}\varepsilon$; η, η_0, β — коэффициенты модели турбулентности $k{-}\varepsilon$ метода ренормализационной группы (RNG).

При создании сетки задается призматическая форма ячеек для модели ВЭУ. Наличие призматического слоя на поверхности исследуемого объекта (комлевая часть лопасти и верхняя поверхность гондолы) обусловлена градиентом профиля скорости в пограничном слое. Призматической слой позволяет привести в соответствие безразмерный критерий применимости модели турбулентности $\mathsf{Y+}$ к требованиям модели турбулентности $k-\varepsilon$. Высота призмы в пристеночном слое равна 0.001 мм, что приводит значение $\mathsf{Y+}$ в диапазон от 0 до 100 [14–17].

Для вычислений в программе необходимо найти оптимальный шаг по времени с целью получения точных результатов. В начале рассчитывается число Рейнольдса:[2]

$$\mathsf{Re} = \frac{\rho(V_{\text{nom}} + \omega\frac{D}{2})D_{\text{k}}}{\eta} = \frac{1.2041 \cdot (12.5 + 1 \cdot \frac{120}{2}) \cdot 2.327}{1.8 \cdot 10^{-5}} = 11.286 \cdot 10^{6},$$

где D_{k} — диаметр комля на уровне прибора, м (рис. 2); η — динамическая вязкость воздуха, Па · с.

Поиск числа Струхаля S осуществляется по соответствующей зависимости (рис. 3). Для чисел Рейнольдса, попадающих под условие $\mathsf{Re} > 1000$, число Струхаля остается почти постоянным, равным 0.21 [24, 25].

Соответственно, при числе Струхаля, равном 0.21, рассчитывается значение частоты отрыва вихрей в одну секунду:

$$n = \frac{\mathsf{S}V_{\text{nom}}}{D_{\text{k}}} = \frac{0.21 \cdot 12.5}{2.327} = 1.128\,\text{с}^{-1},$$

откуда период

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.128} = 0.8865\,\text{с}.$$

Для расчета принимается шаг

$$t = \frac{0.8865}{100} = 8.865 \cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

Необходимо проверить безразмерный критерий применимости модели турбулентности $\mathsf{Y+}$ на соответствие математической модели турбулентности. Для этого лопасть поворачивается вертикально вверх и создается контур пересечения между плоскостью на высоте установки прибора и внешней стенкой комеля. Диаметр окружности полилинии соответствует измеренному ранее диаметру D_{k}. Строится график зависимости $\mathsf{Y+}$ от положения на окружности (рис. 4).

Как видно, значения на графике в основном укладываются в обозначенный ранее диапазон. Безразмерный критерий применимости модели турбулентности $\mathsf{Y+}$ отвечает за формирование турбулентной энергии диссипации и генерации в пристеночном слое. Его выход за пределы рекомендованных

[2]Берется диаметр комля, соответствующий высоте 3 м над поверхностью гондолы (см. рис. 2).

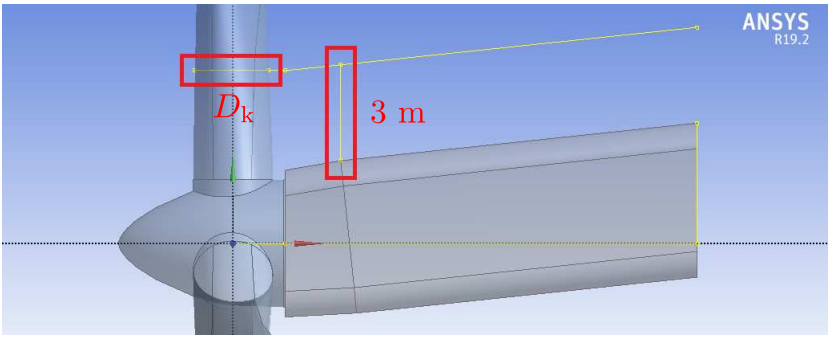


Рис. 2. Диаметр комля на уровне установки прибора
[Figure 2. The diameter of the blade root at the device location level]

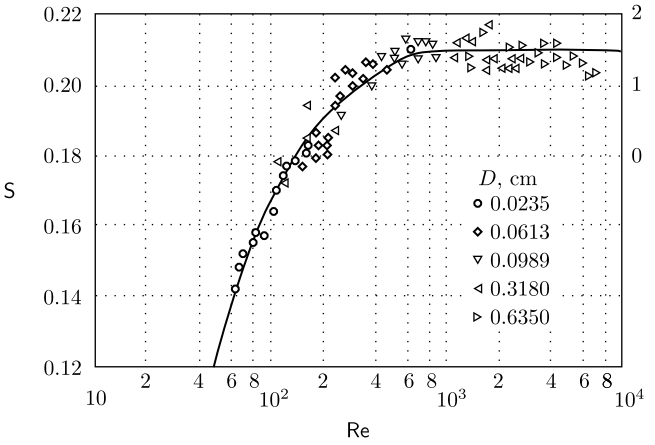


Рис. 3. Зависимость числа Струхаля от числа Рейнольдса для течения около круглого цилиндра
[Figure 3. Dependence of the Strouhal number on the Reynolds number for a flow near a round cylinder]

диапазонов ставит под сомнение правильность применения $k-\varepsilon$ модели турбулентности. В данной статье проведено исследование движения газа в рамках инженерного подхода моделирования турбулентности (RANS); результаты численного моделирования не сравнивались с более сложными методами моделирования крупномасштабных вихревых структур, таких как DES и LES [26].

Для снижения количества расчетных элементов область расчета уменьшена до 40 м в диаметре центра ступицы при виде спереди. При этом выполнено локальное измельчение сетки над гондолой для получения наиболее точных характеристик течения (рис. 5).

Для осуществления вращения вокруг оси X модель была наклонена на 6° вверх так, чтобы ось ротора стала параллельной абсциссе. Данная величина является средним углом наклона ротора ГО ВЭУ. При этом направление потока ветра также задается с наклоном.

У выбранной ВЭУ анеморумбометр располагается на высоте 3 м и по горизонтали от начала гондолы на расстоянии в 8 м [13]. Точка для фиксации параметров, соответствующая данным расстояниям, представлена на рис. 6.

В препроцессоре задаются следующие параметры для расчета:

$$\mathsf{Alpha} = 6(\pi/180)\ [\mathrm{rad}], \quad \mathsf{Vel} = 10\ [\mathrm{m/s}],$$
$$\mathsf{Vx} = \mathsf{Vel}\cos(\mathsf{Alpha}), \quad \mathsf{Vy} = \mathsf{Vel}\sin(\mathsf{Alpha}).$$

Здесь Alpha — угол наклона потока ветра, рад. (он соответствует углу наклона модели, что необходимо для выравнивания вектора потока перпендикулярно ометаемой площади для максимально эффективной выработки электроэнергии); Vel — скорость потока ветра, м/с; Vx — составляющая вектора скорости по оси X, м/с; Vy — составляющая вектора скорости по оси Y, м/с.

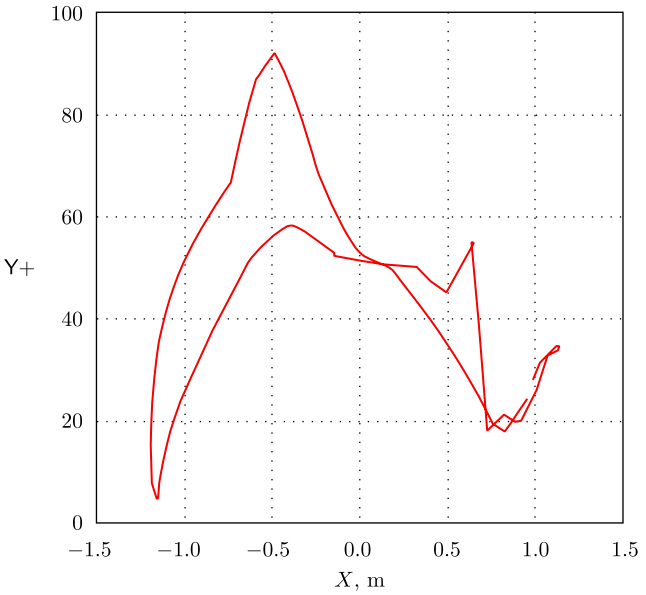


Рис. 4. Зависимость критерия применимости от положения точки, взятой на окружности с диаметром D_{k}

[Figure 4. Dependence of the applicability criterion on the position of a point taken on a circle with D_{k} diameter]

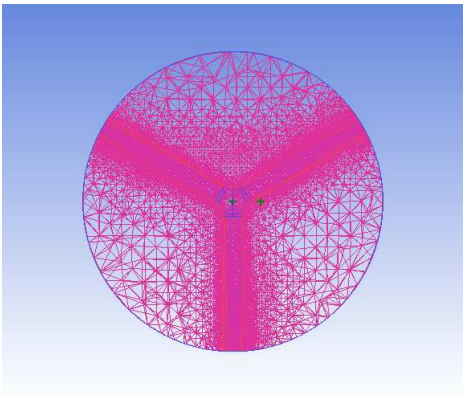


Рис. 5. Локальное измельчение сетки на поверхности конструкции и над гондолой

[Figure 5. Local mesh refinement on the surface of the model and above the nacelle]

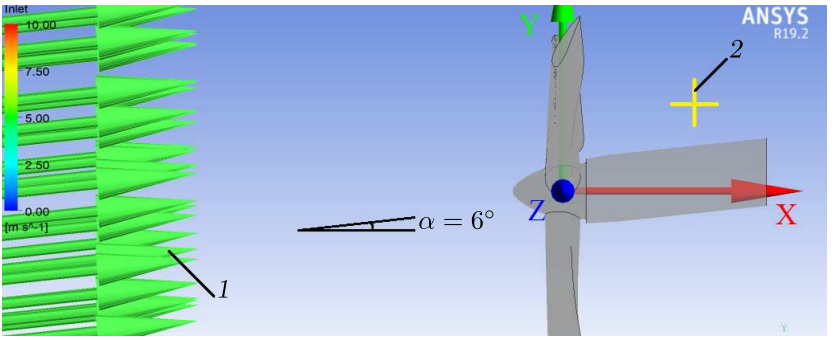


Рис. 6. Положение модели (вид сбоку), потока ветра (*1*) и точки размещения прибора (*2*) относительно системы координат

[Figure 6. Position of the model (side view), wind flow (*1*), and device location point (*2*) relatively to the coordinate system]

Скорость потока ветра включена в список изменяемых параметров в меню `Parameter Set` на рабочем мониторе `Workbench` для моделирования сразу нескольких расчетных случаев.

3. Представление и анализ полученных результатов. Обработанные численные результаты расчетов представлены на рис. 7. Значения углов отклонения показывают разницу между осью X, направление которой совпадает с направлением потока ветра до момента прохождения через лопасти, и направлением прибора в данный момент времени. Выбраны три скорости в пределах рабочего диапазона ГО ВЭУ – 7, 12 и 18 м/с. В точке установки прибора считывалась скорость и ее составляющие по осям X и Z (положение осей показано на рис. 6).

Для получения значений углов отклонения применяется следующая формула, град.:

$$\Theta_z = \frac{V_z}{|V_z|} \arccos \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}.$$

Из графиков на рис. 7 можно сделать вывод о том, что движущиеся лопасти ГО ВЭУ сильно влияют на направление потока ветра. На любой скорости возникают серьезные возмущения через равномерные промежутки времени.

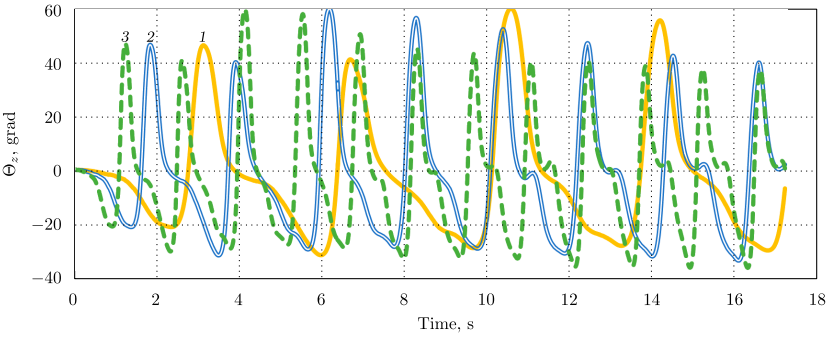


Рис. 7. Углы отклонения по оси Z для трех скоростей (*1* — 7 м/с, *2* — 12 м/с, *3* — 18 м/с)

[Figure 7. Combined chart of Z-axis deviation angles for three speeds (*1* — 7 m/s, *2* — 12 m/s, *3* — 18 m/s)]

Они возникают каждый раз по прошествии почти полного оборота (360°). На скорости 18 м/с видно, что после примерно десятой секунды режим постепенно устанавливается, и отклонения практически перестают превышать отметку в 20° по обоим направлениям.

Векторное поле потоков ветра и поле скоростей во время прохождения лопасти через верхнюю точку представлены на рис. 8.

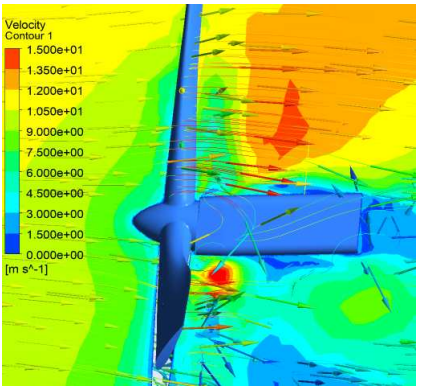


Рис. 8. Векторы потока ветра и поле скоростей (вид сбоку)
[Figure 8. Wind flow vectors and velocity field (side view)]

4. Выводы. В результате представленного исследования были сделаны следующие выводы.

1. При моделировании процессов при разных скоростях потока было подтверждено наличие постоянно изменяющейся во времени и по величине (дифференциальной) погрешности ориентации ротора и получены численные значения отклонений флюгера. Как показали эксперименты, значения угла ошибки варьируются в диапазоне от −40 до +60°.
2. Когда скорость вращения постоянна, изменение скорости ветра не оказывает существенного влияния на результаты. Как видно из графиков на рис. 7, примерно после 12-й секунды начинается установившийся режим. В этом случае дифференциальная ошибка находится в диапазоне от −40 до +40°.
3. Численные значения отклонения флюгера могут быть использованы для разработки алгоритма устранения ошибки рыскания ротора.
4. Из данных рис. 7 можно получить зависимость изменения частоты пульсации от скорости.

Таким образом, моделирование показало наличие дифференциальной ошибки ориентации ротора, которая неизбежно снижает активную ометаемую площадь ГО ВЭУ, а значит, приводит к снижению вырабатываемой мощности.

Дальнейшие исследования планируется направить на изучение свойств дифференциальной ошибки, сопоставление результатов и технико-экономический анализ различных подходов снижения потерь выработки электроэнергии горизонтально-осевыми ветроэнергетическими установками.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Е.В. Соломин — написание аннотации и первой главы, редактирование и исправление текста статьи. А.А. Терехин — разработка подхода для моделирования процессов. А.С. Мартьянов — работа с изображениями и формулами, написание выводов. А.А. Ковалев — обработка результатов расчета, построение графиков и их анализ, оформление рукописи в LaTeX. Д.Р. Исмагилов — работа в программе ANSYS (проведение расчетов, настройка параметров расчетных случаев). А.А. Мирошниченко — написание второй и третьей глав статьи. Ю.Ян — построение модели ветроэнергетической установки в программе SolidWorks. Г.Н. Рявкин — работа в программе ANSYS (обработка и настройка геометрии в Design Modeler, построение сетки в ICEM). Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19–08–00070 «Теоретическое обоснование и экспериментальные исследования нового метода управления ориентацией ротора горизонтально-осевой ветроэнергетической установки» на базе проектного обучения ЮУрГУ.

Библиографический список

1. *Statistics — World Wind Energy Association*: https://wwindea.org/information-2/information/.
2. Solomin E., Kirpichnikova I., Amerkhanov R., Korobatov D., Lutovats M., Martyanov A. Wind-hydrogen standalone uninterrupted power supply plant for all-climate application // *Int. J. Hydrogen Energy*, 2019. vol. 44, no. 7. pp. 3433–3449. https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.12.001.
3. Wan S., Cheng L., Sheng X. Effects of yaw error on wind turbine running characteristics based on the equivalent wind speed model // *Energies*, 2015. vol. 8, no. 7. pp. 6286–6301. https://doi.org/10.3390/en8076286.
4. Кирпичникова И. М., Мартьянов А. С., Соломин Е. В. Моделирование генератора ветроэнергетической установки // *Электротехника*, 2013. № 10. С. 46–49.
5. Sirotkin E. A., Martyanov A. S., Solomin E. V., Kozlov S. V. Emergency braking system for the wind turbine / *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, 2016. https://doi.org/10.1109/icieam.2016.7911451.
6. Korobatov D. V., Sirotkin E. A., Troickiy A. O., Solomin E. V. Wind turbine power plant control / *2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 2016. https://doi.org/10.1109/Dynamics.2016.7819031.
7. Martyanov A. S., Martyanov N. A., Anikin A. S. Comparative analysis of wind turbine control strategies // *Procedia Engineering*, 2015. vol. 129. pp. 607–614. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.077.
8. Chen F., Yang J. Fuzzy PID controller used in yaw system of wind turbine / *2009 3rd International Conference on Power Electronics Systems and Applications (PESA)*, 2009. 4 pp. https://ieeexplore.ieee.org/document/5228644.
9. van Dijk M. T., van Wingerden, J.-W., Ashuri T., Li Y., Rotea M. A. Yaw-misalignment and its impact on wind turbine loads and wind farm power output // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016. vol. 753, 062013. https://doi.org/10.1088/1742-6596/753/6/062013.
10. MacMahon E., Stock A., Jamieson P., Leithead B. Yaw control for 20MW offshore multi rotor system / *European Wind Energy Association Annual Event (EWEA 2015), Paris expo Porte de Versailles*, 2015. https://strathprints.strath.ac.uk/59716/.
11. Zhang L., Yang Q. A method for yaw error alignment of wind turbine based on LiDAR // *IEEE Access*, 2020. vol. 8. pp. 25052–25059. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2969477.

12. Scholbrock A., Fleming P., Wright A., Slinger C., Medley J., Harris M. *Field test results from lidar measured yaw control for improved yaw alignment with the NREL controls advanced research turbine*: To be presented at the AIAA Science and Technology Forum and Exposition, 2015. 9 pp. https://www.nrel.gov/docs/fy15osti/63202.pdf.
13. *Wind power plant Siemens: SWT–3.6–120, Technical documentation.* https://pdf.archiexpo.com/pdf/siemens-gamesa/swt-36-120/88089-134487.html.
14. Wilcox D. C. *Turbulence Modeling for CFD.* California: DCW Industries, 1998. 460 pp.
15. Chung T. J. *Computational Fluid Dynamics.* London: Cambridge Univ. Press, 2010. xxii+1034 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511780066.
16. Versteeg H., Malalasekra W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method.* London: Prentice Hall, 2007. xiii+503 pp.
17. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Berlin: Springer-Verlag, 2002. xiv+426 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2.
18. Hassid S., Poreh M. A turbulent energy dissipation model for flows with drag reduction // *J. Fluids Eng.*, 1978. vol. 100, no. 1. pp. 107–112. https://doi.org/10.1115/1.3448580.
19. Wolfshtein M. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1969. vol. 12, no. 3. pp. 301–318. https://doi.org/10.1016/0017-9310(69)90012-x.
20. Troshko A. A, Hassan Y. A. A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows // *Int. J. Multiphase Flow*, 2001. vol. 27, no. 11. pp. 1965–2000. https://doi.org/10.1016/s0301-9322(01)00043-x.
21. Yakhot V, Orszag S. A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory // *J. Sci. Comput.*, 1986. vol. 1, no. 1. pp. 3–51. https://doi.org/10.1007/bf01061452.
22. Yakhot V., Orszag S. A., Thangam S., Gatski T. B., Speziale C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique // *Phys. Fluids A*, 1992. vol. 4, no. 7. pp. 1510–1520. https://doi.org/10.1063/1.858424.
23. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.*, 1994. vol. 32, no. 8. pp. 1598–1605. https://doi.org/10.2514/3.12149.
24. Roshko A. *On the development of turbulent wakes from vortex streets*: Technical Report no. 1191. Washington, D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics, 1954. 25 pp. https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:ROSnacarpt1191.
25. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974. 637 с.
26. Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flows / *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.* Reno, NV, 2001. https://doi.org/10.2514/6.2001-879.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 365–380
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1839

MSC: 76G25, 76N15, 76F10

Horizontal-axis wind turbine weathervane yaw differential error

© *E. V. Solomin, A. A. Terekhin, A. S. Martyanov, A. A. Kovalyov, D. R. Ismagilov, A. A. Miroshnichenko, Y. Yang, G. N. Ryavkin*

South Ural State University (National Research University),
76, Lenin pr., Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with the problem of orientation of the traditional horizontal-axis wind turbine (HAWT) when changing the direction, strength and speed of the wind.

When the wind direction changes, the active swept area of the rotor, which is a circle when the rotation axis and the incoming air flow vector are collinear, decreases and takes the form of an ellipse. This, in turn, leads to a decrease in the electricity volume generation.

Weathervane or rumba-anemometer is a device for registering the speed and direction of wind flow. When the wind direction changes, the device transmits a corresponding signal to the Control System, which in turn generates the command to turn the HAWT rotor on the wind. However, when the wind flow is passing between the rotating blades, the direction of distorted wake is changing, causing eddy formation. As a result the device gives out the initially incorrect data about the direction and velocity of the air flow. Furthermore, when adjusting the position of the rotor (yawing), the collinearity of the rotation axis and the vector of the incoming flow is not achieved, the swept area remains mostly elliptical, and the power generated is proportionally reduced. In accordance with the relevancy of the said problem, the goal of the study was to calculate numerical values of the wake deflection angle in various modes, using the three-dimensional modeling in `Ansys CFX` software package. The obtained information can be used then to develop the algorithm for eliminating this error.

Keywords: horizontal-axis wind turbine, orientation, rumba-anemometer, yaw error.

Research Article

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (`http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/`)

Please cite this article in press as:
Solomin E. V., Terekhin A. A., Martyanov A. S., Kovalyov A. A., Ismagilov D. R., Miroshnichenko A. A., Yang Y., Ryavkin G. N. Horizontal-axis wind turbine weathervane yaw differential error, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 365–380. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1839` (In Russian).

Authors' Details:

Evgeny V. Solomin `https://orcid.org/0000-0002-4694-0490`
Dr. Tech. Sci., Professor; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: `solominev@susu.ru`

Aleksandr A. Terekhin `https://orcid.org/0000-0002-5744-2104`
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Flying Apparatus;
e-mail: `aleksandr.terekhin@gmail.com`

Received: 18th December, 2020 / Revised: 27th March, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 30th June, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. E.V. Solomin: Writing the abstract; Writing the first chapter; Editing and correcting the manuscript. A.A. Terekhin: Developing an approach for modeling processes. A.S. Martyanov: Working with images and formulas; Writing conclusions. A.A. Kovalyov: Processing of calculation results; Plotting and analyzing graphs; Manuscript formatting in LaTeX. D.R. Ismagilov: Working in the `ANSYS` (performing calculations, setting parameters of calculated cases). A.A. Miroshnichenko: Writing the second and third chapters of the manuscript. Y. Yang: Building a model of a wind power plant in the `SolidWorks` software. G.N. Ryavkin: Working in the `ANSYS` (processing and configuring geometry in `Design Modeler`, building a grid in `ICEM`). The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The presented research was funded by Russian Foundation for Basic Research, Agreement RFBR 19–08–00070 "Theoretical justification and experimental studies of a new method of yaw control of the rotor of a horizontal-axis wind turbine" on the base of Project-Training Education at South Ural State University (National Research University).

Andrey S. Martyanov https://orcid.org/0000-0002-9997-9989
Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: martianovas@susu.ru

Anton A. Kovalyov https://orcid.org/0000-0001-6952-277X
Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: alpenglow305@yandex.ru

Denis R. Ismagilov https://orcid.org/0000-0002-9312-295X
Research Engineer; Aerospace Technologies Research and Educational Center;
e-mail: drismagilov@gmail.com

Alexey A. Miroshnichenko https://orcid.org/0000-0003-4594-3806
Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: alex.miroshnichenko@mail.ru

Yusong Yang https://orcid.org/0000-0002-2941-5942
Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: 1152108936@qq.com

Gleb N. Ryavkin https://orcid.org/0000-0002-7637-0310
Master's Degree Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: amdx3@bk.ru

References

1. *Statistics — World Wind Energy Association*, https://wwindea.org/information-2/information/.
2. Solomin E., Kirpichnikova I., Amerkhanov R., Korobatov D., Lutovats M., Martyanov A. Wind-hydrogen standalone uninterrupted power supply plant for all-climate application, *Int. J. Hydrogen Energy*, 2019, vol. 44, no. 7, pp. 3433–3449. https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.12.001.
3. Wan S., Cheng L., Sheng X. Effects of yaw error on wind turbine running characteristics based on the equivalent wind speed model, *Energies*, 2015, vol. 8, no. 7, pp. 6286–6301. https://doi.org/10.3390/en8076286.
4. Kirpichnikova I. M., Martyanov A. S., Solomin E. V. Simulation of a generator for a wind-power unit, *Russ. Electr. Engin.*, 2013, vol. 84, no. 10, pp. 577–580. https://doi.org/10.3103/S1068371213100076.
5. Sirotkin E. A., Martyanov A. S., Solomin E. V., Kozlov S. V. Emergency braking system for the wind turbine, In: *2016 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*, 2016. https://doi.org/10.1109/icieam.2016.7911451.
6. Korobatov D. V., Sirotkin E. A., Troickiy A. O., Solomin E. V. Wind turbine power plant control, In: *2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 2016. https://doi.org/10.1109/Dynamics.2016.7819031.
7. Martyanov A. S., Martyanov N. A., Anikin A. S. Comparative analysis of wind turbine control strategies, *Procedia Engineering*, 2015, vol. 129, pp. 607–614. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.12.077.
8. Chen F., Yang J. Fuzzy PID controller used in yaw system of wind turbine, In: *2009 3rd International Conference on Power Electronics Systems and Applications (PESA)*, 2009, 4 pp. https://ieeexplore.ieee.org/document/5228644.
9. van Dijk M. T., van Wingerden, J.-W., Ashuri T., Li Y., Rotea M. A. Yaw-misalignment and its impact on wind turbine loads and wind farm power output, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016, vol. 753, 062013. https://doi.org/10.1088/1742-6596/753/6/062013.
10. MacMahon E., Stock A., Jamieson P., Leithead B. Yaw control for 20MW offshore multi rotor system, In: *European Wind Energy Association Annual Event (EWEA 2015), Paris expo Porte de Versailles*, 2015. https://strathprints.strath.ac.uk/59716/.
11. Zhang L., Yang Q. A method for yaw error alignment of wind turbine based on LiDAR, *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 25052–25059. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2969477.
12. Scholbrock A., Fleming P., Wright A., Slinger C., Medley J., Harris M. *Field test results from lidar measured yaw control for improved yaw alignment with the NREL controls advanced research turbine*, To be presented at the AIAA Science and Technology Forum and Exposition, 2015, 9 pp. https://www.nrel.gov/docs/fy15osti/63202.pdf.
13. *Wind power plant Siemens: SWT–3.6–120, Technical documentation.* https://pdf.archiexpo.com/pdf/siemens-gamesa/swt-36-120/88089-134487.html.
14. Wilcox D. C. *Turbulence Modeling for CFD.* California, DCW Industries, 1998, 460 pp.
15. Chung T. J. *Computational Fluid Dynamics.* London, Cambridge Univ. Press, 2010, xxii+1034 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511780066.
16. Versteeg H., Malalasekra W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method.* London, Prentice Hall, 2007, xiii+503 pp.
17. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Berlin, Springer-Verlag, 2002, xiv+426 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2.
18. Hassid S., Poreh M. A turbulent energy dissipation model for flows with drag reduction, *J. Fluids Eng.*, 1978, vol. 100, no. 1, pp. 107–112. https://doi.org/10.1115/1.3448580.
19. Wolfshtein M. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1969, vol. 12, no. 3, pp. 301–318. https://doi.org/10.1016/0017-9310(69)90012-x.

20. Troshko A. A, Hassan Y. A. A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows, *Int. J. Multiphase Flow*, 2001, vol. 27, no. 11, pp. 1965–2000. https://doi.org/10.1016/s0301-9322(01)00043-x.
21. Yakhot V, Orszag S. A. Renormalization group analysis of turbulence. I. Basic theory, *J. Sci. Comput.*, 1986, vol. 1, no. 1, pp. 3–51. https://doi.org/10.1007/bf01061452.
22. Yakhot V., Orszag S. A., Thangam S., Gatski T. B., Speziale C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Phys. Fluids A*, 1992, vol. 4, no. 7, pp. 1510–1520. https://doi.org/10.1063/1.858424.
23. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605. https://doi.org/10.2514/3.12149.
24. Roshko A. *On the development of turbulent wakes from vortex streets*, Technical Report no. 1191. Washington, D.C., National Advisory Committee for Aeronautics, 1954, 25 pp. https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:ROSnacarpt1191.
25. Shlikhting G. *Teoriia pogranichnogo sloia* [Boundary Layer Theory]. Moscow, Nauka, 1974, 637 pp. (In Russian)
26. Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flows, In: *39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV, 2001. https://doi.org/10.2514/6.2001-879.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 381–392
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1843

Short Communications

MSC: 35A25, 35C10, 35A35

Exact boundaries for the analytical approximate solution of a class of first-order nonlinear differential equations in the real domain

© *V. N. Orlov, O. A. Kovalchuk*

National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoye shosse, Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

The paper gives a solution to one of the problems of the analytical approximate method for one class first order nonlinear differential equations with moving singular points in the real domain. The considered equation in the general case is not solvable in quadratures and has movable singular points of the algebraic type. This circumstance requires the solution of a number of mathematical problems.

Previously, the authors have solved the problem of the influence of a moving point perturbation on the analytical approximate solution. This solution was based on the classical approach and, at the same time, the area of application of the analytic approximate solution shrank in comparison with the area obtained in the proved theorem of existence and uniqueness of the solution.

Therefore, the paper proposes a new research technology based on the elements of differential calculus. This approach allows to obtain exact boundaries for an approximate analytical solution in the vicinity of a moving singular point.

New a priori estimates are obtained for the analytical approximate solution of the considered class of equations well in accordance with the known ones for the common area of action. These results complement the previously obtained ones, with the scope of the analytical approximate solution in the vicinity of the movable singular point being significantly expanded.

These estimates are consistent with the theoretical positions, as evidenced by the experiments carried out with a non-linear differential equation having the exact solution. A technology for optimizing a priori error

Short Communication

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Exact boundaries for the analytical approximate solution of a class of first-order nonlinear differential equations in the real domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 381–392. https://doi.org/10.14498/vsgtu1843.

Authors' Details:

Victor N. Orlov https://orcid.org/0000-0001-7606-5490
Dr. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: orlovvn@mgsu.ru

Oleg A. Kovalchuk https://orcid.org/0000-0001-8942-4245
Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: kovalchuk@mgsu.ru

estimates using a posteriori estimates is provided. The series with negative fractional powers are used.

Keywords: moving singular points, nonlinear differential equation, Cauchy problem, exact boundaries of a domain, a priori and a posteriori errors, analytical approximate solution.

Received: 12th January, 2021 / Revised: 30th April, 2021 / Accepted: 11th May, 2021 / First online: 1st June, 2021

1. Introduction

In many areas of the problem: building optimal filters [1, 2], mathematical physics, nonlinear optics [3, 4], theory of evolutionary processes [5–10], the theory of elasticity [11], nonlinear diffusion [12], in the theory of sustainability of building structures' elements and in the analysis of buildings' vitality [13–15] (both of applied nature), are solved with the help of mathematical models, which are differential equations. The latter have a problem in finding a solution associated with the presence of movable singular points, which refer such equations to the class of equations in the general case not solvable in quadratures.

Significant results in solving this problem have been achieved by the Belarusian School of Analytical Theory of Differential Equations [16,17]. A great contribution has been made by such well-known scientists as N. P. Erugin, A. I. Yablonskii, N. A. Lukashevich, as well as their students A. V. Chichurin, A. A. Samodurov, etc. However, it should be noted that the results were obtained only for special cases of solvability in quadratures of nonlinear differential equations, as in the works [18–20]. The lack of exact methods actualizes the development of analytical approximate methods for solving this category of nonlinear differential equations.

In the works [21, 22], the disadvantage of the classical theorem of existence and uniqueness of the solution of differential equations was pointed out, the elimination of which develops a new approach, which made it possible to construct an analytical approximate method for solving nonlinear differential equations. This paper presents a solution to one of six problems of an analytical approximate method for solving one class of nonlinear differential equations of the first order, with a polynomial part of the fourth degree. In [23], the problem was solved — the study of the influence of the perturbation of moving singular points on the analytical approximate solution. As a result, the domain of representation of the analytical approximate solution near the approximate value of the moving singular point was obtained, which significantly decreased in comparison with the result of the previously proved existence and uniqueness theorem for the solution of the considered nonlinear differential equation. The investigations in this work made it possible to significantly expand the area of application of the approximate solution near the moving singular point, due to the constructiveness of the method for obtaining a priori estimates. The results obtained not only supplement the studies in [23], but also allow to obtain the exact boundaries of the application area of the approximate solution near the approximate value of the moving singular point. Theoretical results are illustrated by calculations characterizing their consistency with theoretical studies and adequacy with an exact solution.

2. Methodology

Non-linear differential equation

$$Y'(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i(x) Y^i(x),$$

where $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$ are functions of a real variable in a certain domain, with the help of some transformations [23], is reduced to the normal form.

Consider the Cauchy problem

$$Y'(x) = Y^4(x) + r(x), \tag{1}$$

$$Y(x_0) = Y_0. \tag{2}$$

The perturbed value $\tilde{x}^*$ of the mobile singular point affects the structure of the analytical approximate solution, which takes the form

$$\tilde{Y}_N(x) = (x - \tilde{x}^*)^{-1/3} \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (x - \tilde{x}^*)^{n/3}, \quad \tilde{C}_0 \neq 0, \tag{3}$$

where $\tilde{C}_n$ are the perturbed values of the coefficients [23].

Theorem. *Let us suppose that*:

1) $r(x) \in C^\infty$ *in the area* $\{x : |x - \tilde{x}^*| < r_1\}$, *in which* $\tilde{x}^*$ *is the perturbed value of the movable singular point of solving the Cauchy problem* (1), (2), $\rho_1 = \text{const} > 0$;
2) $\exists M_n : \left| \dfrac{r^{(n)}(\tilde{x}^*)}{n!} \right| \leqslant M_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $M_n = \text{const}$;
3) $\tilde{x}^* \leqslant x^*$;
4) *known is the error estimate of the value* $\tilde{x}^*$: $|x^* - \tilde{x}^*| \leqslant \Delta\tilde{x}^*$;
5) $\Delta\tilde{x}^* < 1/\sqrt[4]{3^6(1 + M + \Delta M)^3}$.

Then for the approximate solution (3) *of the problem* (1)–(2) *in the area*

$$F = F_1 \cap F_2 \cap F_3,$$

true is the estimate

$$\Delta\tilde{Y}_N(x) \leqslant \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

in which

$$\Delta_0 = \frac{\Delta\tilde{x}^*}{\sqrt[3]{3}|x - \tilde{x}_1^*|^{4/3}},$$

in case $N + 1 = 4n$,

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{(N-3)/4}(M+1)^{(N+1)/4}|x - \tilde{x}^*|^{N/3}}{1 - 3(M+1)|x - \tilde{x}^*|^{4/3}} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{N+4} + \frac{|x - \tilde{x}^*|^{1/3}}{N+5} + \frac{|x - \tilde{x}^*|^{2/3}}{N+6} + \frac{|x - \tilde{x}^*|}{N+7} \right);$$

for the variants $N + 1 = 4n + 1$, $N + 1 = 4n + 2$, $N + 1 = 4n + 3$, *respectively*:

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{N/4-1}(M+1)^{N/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}} \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{N+4} + \frac{|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+5} + \frac{|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+6} + \frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|}{N+7}\Big),$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{(N-5)/4}(M+1)^{(N-1)/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}} \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{N+4} + \frac{|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+5} + \frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+6} + \frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|}{N+7}\Big),$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{(N-6)/4}(M+1)^{(N-2)/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}} \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{N+6} + \frac{9|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+7} + \frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+8} + \frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|}{N+9}\Big);$$

$$\Delta_2 = \frac{3^{-1}\Delta\tilde{x}^*(1+M+\Delta M)^{N/4}|x-\tilde{x}_2^*|^{1/3}}{1-3(1+M+\Delta M)|x-\tilde{x}_2^*|^{4/3}} \times$$
$$\times \big(1 + |x-\tilde{x}_2^*|^{1/3} + |x-\tilde{x}_2^*|^{2/3} + |x-\tilde{x}_2^*|\big);$$

$$\Delta_3 = \frac{\Delta M(1+M+\Delta M)|x-\tilde{x}_2^*|}{1-9(1+M+\Delta M)|x-\tilde{x}_2^*|^{4/3}} \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{21} + \frac{1}{24}|x-\tilde{x}_2^*|^{1/3} + \frac{1}{27}|x-\tilde{x}_2^*|^{2/3} + \frac{1}{30}|x-\tilde{x}_2^*|\Big)$$

under the condition

$$\Delta M = \Delta\tilde{Y}_0 = \sup_{n,G}\Big|\frac{r^{(n+1)}(x)}{n!}\Big|\Delta\tilde{x}^*,$$
$$M = \max\left|\,|y_0|, \sup_n\Big|\frac{r^{(n)}(\tilde{x}^*)}{n!}\Big|\right|, \quad where \quad n = 0,1,2,3,\ldots,$$
$$F_1 = \{x : \tilde{x}^* - \rho_2 < x < \tilde{x}^*\}, \quad F_2 = \{x : \tilde{x}_1^* - \rho_3 < x < \tilde{x}_1^*\},$$
$$F_3 = \{x : \tilde{x}_2^* - \rho_4 < x < \tilde{x}_2^*\}, \quad \rho_2 = \min\Big\{\rho_1, 1/\sqrt[4]{27(M+1)^3}\Big\},$$
$$\rho_3 = \min\Big\{\rho_1, 1/\sqrt[4]{27(M+\Delta M+1)^3}\Big\},$$
$$\rho_4 = \min\Big\{\rho_1, 1/(3\sqrt[4]{9(M+\Delta M+1)^3})\Big\},$$
$$\tilde{x}_1^* = \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*, \quad \tilde{x}_2^* = \tilde{x}^* + \Delta\tilde{x}^*, \quad G = \{x : |x-\tilde{x}^*| \leqslant \Delta\tilde{x}^*\}.$$

Proof. When estimating the error of the analytical approximate solution (3)

$$\Delta\tilde{Y}_N(x) = |Y(x) - \tilde{Y}_N(x)| \leqslant |Y(x) - \tilde{Y}(x)| + |\tilde{Y}(x) - \tilde{Y}_N(x)|,$$

for the expression we shall use the elements of differential calculus [24]:

$$|Y(x)-\tilde{Y}(x)| \leqslant \sup_G \Big|\frac{\partial \tilde{Y}(x)}{\partial \tilde{x}^*}\Big|\Delta\tilde{x}^* + \sum_{n=0}^{\infty}\Big|\frac{\partial \tilde{Y}(x)}{\partial \tilde{C}_n}\Big|\Delta\tilde{C}_n,$$

in which $G=\{x : |x-\tilde{x}| \leqslant \Delta\tilde{x}\}$. We denote:

$$\Delta M = \Delta\tilde{Y}_0 = \sup_{n,G}\Big(\frac{r^{(n+1)}(x)}{n!}\Big)\Delta\tilde{x}, \quad M = \max\left|\,|y_0|, \sup_n\Big|\frac{r^{(n)}(\tilde{x})}{n!}\Big|\right|,$$

where $n=0,1,2,\dots$. Further

$$\sup_G\Big|\frac{\partial \tilde{Y}(x)}{\partial \tilde{x}^*}\Big| = \sup_G\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{C}_n\frac{n-1}{3}(x-\tilde{x}^*)^{(n-4)/3}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\Big|\frac{n-1}{3}\Big|\sup_G\big|\tilde{G}_n\big|\sup_G\big|(x-\tilde{x}^*)^{(n-4)/3}\big|.$$

In this case, we have:

$$\sup_G\big|(x-\tilde{x}^*)^{(n-4)/3}\big| = \begin{cases} |x-\tilde{x}_1^*|^{(n-4)/3}, & n=0,1,2,3;\\ |x-\tilde{x}_2^*|^{(n-4)/3}, & n=4,5,\dots\end{cases}$$

and

$$\sup_G\Big|\frac{\partial \tilde{Y}(x)}{\partial \tilde{C}_n}\Big| = \sup_G\big|(x-\tilde{x}^*)^{(n-4)/3}\big| = \begin{cases} |x-\tilde{x}_1^*|^{(n-4)/3}, & n=0;\\ |x-\tilde{x}_2^*|^{(n-4)/3}, & n=1,2,3,\dots,\end{cases}$$

where $\tilde{x}_1^* = \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*$, $\tilde{x}_2^* = \tilde{x}^* + \Delta\tilde{x}^*$. As

$$\sup_G|\tilde{C}_n| \leqslant \tilde{C}_n(|A_0+\Delta\tilde{A}_0|, |A_1+\Delta\tilde{A}_1|, |A_2+\Delta\tilde{A}_2|,\dots) \leqslant \tilde{C}_n(1+M+\Delta M) = \tilde{\vartheta}_n,$$

in which A_n are the expansion coefficients of $r(x)$ function in the regular series, then

$$\big|Y(x)-\tilde{Y}(x)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta\tilde{x}^*\sum_{n=0}^{\infty}\Big|\frac{n-1}{3}\Big|\tilde{\vartheta}^*\sup_G\big|(x-\tilde{x}^*)^{(n-4)/3}\big| + \sum_{n=0}^{\infty}\Delta\tilde{C}^*\sup_G\big|(x-\tilde{x}^*)^{(n-1)/3}\big|.$$

Taking into account

$$C_0 = \tilde{C}_0 = -1/\sqrt[3]{3},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = \tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = \tilde{C}_5 = \tilde{C}_6 = 0,$$

$$\Delta\tilde{C}_n = |C-\tilde{C}_n|,$$

this results in

$$\Delta\tilde{C}_1 = \Delta\tilde{C}_2 = \Delta\tilde{C}_3 = \Delta\tilde{C}_5 = \Delta\tilde{C}_6 = 0.$$

Hence

$$|Y(x)-\tilde{Y}_N(x)| \leqslant \frac{\Delta\tilde{x}^*}{\sqrt[3]{3}|x-\tilde{x}_1^*|^{4/3}} + \\ + \Delta\tilde{x}^* \sum_{n=4}^{\infty}\Big|\frac{n-1}{3}\Big||x-\tilde{x}_2^*|^{(n-4)/3} + \sum_{n=4}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-\tilde{x}_2^*|^{(n-1)/3}$$

or

$$\Delta\tilde{Y}_N(x) = |Y(x)-\tilde{Y}_N(x)| \leqslant \frac{\Delta\tilde{x}^*}{\sqrt[3]{3}|x-\tilde{x}_1^*|^{4/3}} + \\ + \sum_{n=N+1}^{\infty}|\tilde{C}_n||x-\tilde{x}^*|^{(n-1)/3} + \Delta\tilde{x}^*\sum_{n=4}^{\infty}\left|\frac{n-1}{3}\right||x-\tilde{x}_2^*|^{(n-4)/3} + \\ + \sum_{n=4}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-\tilde{x}_2^*|^{(n-1)/3} = \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3,$$

in which $\Delta_0 = \Delta\tilde{x}^*/(\sqrt[3]{3}|x-\tilde{x}_1^*|^{4/3})$. Next, we use the estimate of the coefficients $\tilde{C}_n$ [23]:

$$C_{4n} \leqslant \frac{3^{n-1}(M+1)^n}{4n+3} = \vartheta_{4n}, \quad C_{4n+1} \leqslant \frac{3^{n-1}(M+1)^n}{4n+4} = \vartheta_{4n+1},$$

$$C_{4n+2} \leqslant \frac{3^{n-1}(M+1)^n}{4n+5} = \vartheta_{4n+2}, \quad C_{4n+3} \leqslant \frac{3^{n-1}(M+1)^n}{4n+6} = \vartheta_{4n+3}.$$

When $N+1=4n$, according to the result of [23], we have

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{(N-3)/4}(M+1)^{(N+1)/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}}\times \\ \times\Big(\frac{1}{N+4}+\frac{|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+5}+\frac{|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+6}+\frac{|x-\tilde{x}^*|}{N+7}\Big).$$

For cases $N+1=4n+1$, $N+1=4n+2$, and $N+1=4n+3$, respectively:

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{N/4-1}(M+1)^{N/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}}\times \\ \times\Big(\frac{1}{N+4}+\frac{|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+5}+\frac{|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+6}+\frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|}{N+7}\Big),$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{(N-5)/4}(M+1)^{(N-1)/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}}\times \\ \times\Big(\frac{1}{N+4}+\frac{|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+5}+\frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+6}+\frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|}{N+7}\Big),$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{3^{(N-6)/4}(M+1)^{(N-2)/4}|x-\tilde{x}^*|^{N/3}}{1-3(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{4/3}}\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{N+6}+\frac{9|x-\tilde{x}^*|^{1/3}}{N+7}+\frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|^{2/3}}{N+8}+\frac{9(M+1)|x-\tilde{x}^*|}{N+9}\Big).$$

Moving on to the assessment Δ_2:

$$\Delta_2 = \Delta\tilde{x}^*\sum_{n=4}^{\infty}\left|\frac{n-1}{3}\right|\vartheta_n|x-\tilde{x}_2^*|^{(n-4)/3} = \Delta\tilde{x}^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3}\vartheta_{4n}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n-4)/3}+$$
$$+\Delta\tilde{x}^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{3}\vartheta_{4n+1}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n-3)/3}+\Delta\tilde{x}^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{3}\vartheta_{4n+2}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n-2)/3}+$$
$$+\Delta\tilde{x}^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+2}{3}\vartheta_{4n+3}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n-1)/3}.$$

Or given the expressions for ϑ_{4n}, ϑ_{4n+1}, ϑ_{4n+2}, ϑ_{4n+3} finally we get

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\Delta\tilde{x}^*(M+\Delta M+1)}{3(1-3(M+\Delta M+1)|x-\tilde{x}_2^*|^{4/3})}\times$$
$$\times\big(1+|x-\tilde{x}_2^*|^{1/3}+|x-\tilde{x}_2^*|^{2/3}+|x-\tilde{x}_2^*|\big).$$

Based on the estimates $\Delta\tilde{C}_n$ [23]

$$|\Delta\tilde{C}_{4n}| \leqslant \frac{3^{n-1}\Delta M(1+M+\Delta M)^n}{4n+3},\quad |\Delta\tilde{C}_{4n+1}| \leqslant \frac{3^{n-1}\Delta M(1+M+\Delta M)^n}{4n+4},$$
$$|\Delta\tilde{C}_{4n+2}| \leqslant \frac{3^{n-1}\Delta M(1+M+\Delta M)^n}{4n+5},\quad |\Delta\tilde{C}_{4n+3}| \leqslant \frac{3^{n-1}\Delta M(1+M+\Delta M)^n}{4n+6}$$

we get

$$\Delta_3 = \sum_{n=4}^{\infty}\Delta\tilde{C}_n|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n-1)/3} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{4n}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n-1)/3}+\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{4n+1}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n)/3}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{4n+2}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n+1)/3}+\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\tilde{C}_{4n+3}|x-\tilde{x}_2^*|^{(4n+2)/3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\Delta M(1+M+\Delta M)|x-\tilde{x}_2^*|}{1-9(1+M+\Delta M)|x-\tilde{x}_2^*|^{4/3}}\times$$
$$\times\Big(\frac{1}{21}+\frac{1}{24}|x-\tilde{x}_2^*|^{1/3}+\frac{1}{27}|x-\tilde{x}_2^*|^{2/3}+\frac{1}{30}|x-\tilde{x}_2^*|\Big).$$

The estimate for Δ_1 is valid in the region $F_1 = \{x : \tilde{x}^* - \rho_2 < x < \tilde{x}^*\}$, where $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1/\sqrt[4]{27(M+1)^3}\}$. The estimate for Δ_2 is valid in the region

$F_2 = \{x : \tilde{x}_1^* - \rho_3 < x < \tilde{x}_1^*\}$, where $\rho_3 = \min\{\rho_1, 1/\sqrt[4]{27(M + \Delta M + 1)^3}\}$. And the estimate for Δ_3 is valid in the region $F_3 = \{x : \tilde{x}_2^* - \rho_4 < x < \tilde{x}_2^*\}$, where $\rho_4 = \min\{\rho_1, 1/(3\sqrt[4]{27(M + \Delta M + 1)^3})\}$. Therefore, the estimate for $\Delta\tilde{Y}_N(x)$ is valid in the region $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$, which proves the theorem. □

3. Results

Example 1. We shall consider the Cauchy problem for the equation $Y'(x) = Y^4(x) + r(x)$, in which $Y(1) = 1$, $r(x) = 0$ and find an approximate solution of the problem (1), (2), near the movable singular point. The Cauchy problem has the exact solution $Y = 1/\sqrt[3]{4 - 3x}$. The radius of the vicinity of the movable singular point, given the initial conditions of the Cauchy problem, is $\rho_4 = 0.114432$. The perturbed value of the movable singular point is $\tilde{x}^* = 1.3334$. The disturbance value is $\Delta\tilde{x}^* = 0.0001$. $M = 1$, we shall choose the value of $x = 1.2375$ from the vicinity of the movable singular point, its radius is ρ_4. The value of the argument is considered, for which, when obtaining an estimate of the error of the approximate solution, one can use both the results of this study and the work [23]. The calculations are presented in Table 1.

Table 1

The comparative variant of the approximate solutions' characteristics

x	$Y(x)$	$\tilde{Y}_7(x)$	Δ	Δ'_{11}	Δ''_{21}	Δ''_1
1.2375	1.515144	1.514793	0.000351	0.00456	0.00368	0.0008

Here, $Y(x)$ is the exact solution; $\tilde{Y}_7(x)$ is the analytical approximate solution; Δ is the absolute error; Δ'_{11} is the a priori error obtained by this theorem; Δ''_{12} is the a priori error obtained by the theorem from [23], Δ''_1 is the a posteriori error. The theorem in [23] allows solving the inverse problem of the theory of error, determining the N value for the given accuracy of the approximate solution ε. The case $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$ results in the value $N = 17$. For $N = 8 \div 17$ we obtain the clarification of the approximate solution, which in total does not exceed the required accuracy $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$.

Thus, we can restrict ourselves to the value of $N = 7$ in the structure of the approximate solution. Thus, we obtain the value of the error for the approximate solution $\tilde{Y}_7(x)$ equal to $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-4}$. Note that the a priori estimates obtained by the theorem of this paper and the theorem from [23] have values of the same order.

Example 2. Let us find an approximate solution to the Cauchy problem (1), (2) with the conditions of Example 1 in the case $\tilde{x}^* = 1.33334$, $\Delta\tilde{x}^* = 0.00001$. Calculated value $\rho_4 = 0.114432$. The magnitude of the disturbance does not exceed the value $\varepsilon = 0.000050$. A point is considered, the value of which falls only under the results of this work. The calculations are presented in Table 2.

Table 2

Calculation of the characteristics for the approximate solution of the nonlinear differential equation on the theorem

x	$Y(x)$	$\tilde{Y}_7(x)$	Δ	Δ'_1	Δ''_1
1.21901	1.428613	1.428585	0.000028	0.003564	0.000067

Here, Y is the exact value of the equation's solution; $\tilde{Y}_7$ is the approximate solution; Δ is the absolute error; Δ_1' is the a priori error obtained by the theorem, Δ_1'' is the a posteriori error.

Solving the inverse problem of the theory of error, we determine the value of N for a given accuracy of the approximate solution ε. For the case $\varepsilon = 0.67 \cdot 10^{-4}$, the resulting value is $N = 20$. For $N = 8 \div 20$, we obtain a more accurate approximate solution, which in total does not exceed the required accuracy $\varepsilon = 8.99 \cdot 10^{-4}$.

Limiting in the structure of the approximate solution to the value $N = 7$, we get the error value for the approximate solution $\tilde{Y}_7(x)$ equal to the value $\varepsilon = 0.67 \cdot 10^{-4}$.

4. Discussion

The theorem proved in the study allows to significantly expand the area of application of the analytical approximate solution, which was obtained due to the constructiveness of the proof technology. The presented theoretical provisions of this study supplement the results of [23]. Calculations in Table 1 confirm that in the general area of validity of the proved theorem and work [23] we have values with an error of the same order of magnitude. The research used series with negative fractional powers.

5. Conclusion

The results of this work are the completion of research on the analytical approximate solution of a nonlinear differential equation near a movable singular point of algebraic type in a real domain. The obtained theoretical results are tested on model problems.

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Bacy R. S. Optimal filtering for correlated noise, *J. Math. Analysis. Appl.*, 1967, vol. 20, no. 1, pp. 1–8. `https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90101-1`.
2. Kalman R. E., Bacy R. S. Nev results in linear filtering and predication theory, *J. Basic Eng.*, 1, vol. 83, pp. 95–108. `https://doi.org/10.1115/1.3658902`.
3. Graffi D. *Nonlinear partial differential equations in physical problems*, Research Notes in Mathematics, vol. 42. Boston, London, Melbourne, Pitman Publ. Inc., 1980, v+105 pp.
4. Samodurov A. A., Chudnovsky V. M. A simple method for the determination of the delay time of a super radiant boson avalanche, *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 1985, vol. 29, no. 1, pp. 9–10 (In Russian).
5. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevè type, *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, vol. 23, no. 9, pp. 333–338. `https://doi.org/10.1007/BF02824479`.
6. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, *J. Mat. Phys.*, 1980, vol. 21, no. 4, pp. 715–721. `https://doi.org/10.1063/1.524491`.

7. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II, *J. Mat. Phys.*, 1980, vol. 21, no. 9, pp. 1006–1015. https://doi.org/10.1063/1.524548.
8. Airault H. Rational solutions of Painlevè equations, *Stud. Appl. Math.*, 1979, vol. 61, no. 1, pp. 31–53. https://doi.org/10.1002/sapm197961131.
9. Dawson S. P., Fortán C. E. Analytical properties and numerical solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation, *J. Plasma Phys.*, 1998, vol. 40, no. 3, pp. 585–602. https://doi.org/10.1017/s0022377800013544.
10. Clarkson P. Special polynomials associated with rational solutions of the Painlevé equations and applications to soliton equations, *Comput. Methods Funct. Theory*, 2006, vol. 6, no. 2, pp. 329–401. https://doi.org/10.1007/bf03321618.
11. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings, *Int. J. Solids Struct.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 93–104. https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90125-1.
12. Axford R. A. *Differential equations invariant under two-parameter Lie groups with applications to nonlinear diffusion*, Technical Report LA-4517; Contract Number W-7405-ENG-36. N. Mex., Los alamos Scientific Lab., 39 pp. https://fas.org/sgp/othergov/doe/lanl/lib-www/la-pubs/00387291.pdf
13. Orlov V., Zheglova Y. Mathematical modeling of building structures and nonlinear differential equations, *Int. J. Model. Simul. Sci. Comput.*, 2020, vol. 11, no. 3, 2050026. https://doi.org/10.1142/s1793962320500269.
14. Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Mathematical problems of reliability assurance the building constructions, *E3S Web Conf.*, 2019, vol. 97, 03031. https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199703031.
15. Orlov V., Kovalchuk O. An analytical solution with a given accuracy for a nonlinear mathematical model of a console-type construction, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1425, 012127. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012127.
16. Erugin N. P. Analytic theory of nonlinear systems of ordinary differential equations, *Prikl. Mat. Mekh.*, 1952, vol. 16, no. 4, pp. 465–486 (In Russian).
17. Yablonskii A. I. Systems of differential equations whose critical singular points are fixed, *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 3, pp. 468–478 (In Russian).
18. Hill J. M. Abel's differential equation, *Math. Sci.*, 1982, vol. 7, no. 2, pp. 115–125.
19. Umemura H. Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painlevé, *Nagoya Math. J.*, 1990, vol. 117, pp. 125–171. https://doi.org/10.1017/s0027763000001835.
20. Chichurin A. V. Using of Mathematica system in the search of constructive methods of integrating the Abel's equation, *Proc. of Brest State Univ.*, 2007, vol. 3, no. 2, pp. 24–38 (In Russian).
21. Orlov V. N. *Metod priblizhennogo resheniia pervogo, vtorogo differentsial'nykh uravnenii Penleve i Abelia* [Method of Approximate Solution of Painlevé and Abelian First and Second Differential Equations]. Simferopol', Arial, 2016, 183 pp. (In Russian)
22. Orlov V. N., Fil'chakova V. P. On a constructive method of construction of first and the second meromorphic Painlevé transcendents, In: *Symmetric and Analytic Methods in Mathematical Physics, Ser. Mathematical Physics*, vol. 19. Kiev, 1998, pp. 155–165 (In Russian).
23. Orlov V. N., Guz' M. P. Approximate solution of the cauchy one nonlinear differential equations in the neighborhood movable singularities, In: *Fundamental'nye i prikladnye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovaniia i informatsionnykh tekhnologii* [Fundamental and Applied Problems of Solid Mechanics, Mathematical Modeling, and Information Technologies], vol. 2. Cheboksary, 2013, pp. 36–46 (In Russian).
24. Bakhvalov N. S. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1970, 632 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 381–392
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1843

УДК 517.911

О точных границах области для аналитического приближенного решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности приближенного значения подвижной особой точки для вещественной области

© *В. Н. Орлов, О. А. Ковальчук*

Национальный исследовательский
Московский государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26.

Аннотация

Дано решение одной из задач аналитического приближенного метода для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с подвижными особыми точками в вещественной области. Рассматриваемое уравнение в общем случае не разрешимо в квадратурах и имеет подвижные особые точки алгебраического типа. Это обстоятельство требует решение ряда математических задач.

Ранее авторами была решена задача влияния возмущения подвижной особой точки на аналитическое приближенное решение. Это решение основывалось на классическом подходе и, при этом, существенно уменьшилась область применения аналитического приближенного решения, по сравнению с областью, полученной в доказанной теореме существования и единственности решения.

Поэтому в статье предлагается новая технология исследования, основанная на элементах дифференциального исчисления. Этот подход позволяет получить точные границы для аналитического приближенного решения в окрестности подвижной особой точки.

Получены новые априорные оценки для аналитического приближенного решения рассматриваемого класса уравнений, хорошо согласующиеся с известными для общей области действия. При этом, представленные результаты дополняют ранее полученные, существенно расширена область применения аналитического приближенного решения в окрестности подвижной особой точки.

Краткое сообщение

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Orlov V. N., Kovalchuk O. A. Exact boundaries for the analytical approximate solution of a class of first-order nonlinear differential equations in the real domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 381–392. https://doi.org/10.14498/vsgtu1843.

Сведения об авторах

Виктор Николаевич Орлов https://orcid.org/0000-0001-7606-5490
доктор физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: orlovvn@mgsu.ru

Олег Александрович Ковальчук https://orcid.org/0000-0001-8942-4245
кандидат технических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: kovalchuk@mgsu.ru

Приведенные расчеты согласуются с теоретическими положениями, о чем свидетельствуют эксперименты, проведенные с нелинейным дифференциальным уравнением, обладающим точным решением. Дана технология оптимизации априорных оценок погрешности с помощью апостериорных оценок. В исследованиях применялись ряды с дробными отрицательными степенями.

Ключевые слова: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, точные границы области, априорная и апостериорная погрешности, аналитическое приближенное решение.

Получение: 12 января 2021 г. / Исправление: 30 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 1 июня 2021 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 393–401
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1851

MSC: 81S40, 58D30

Quantum evolution in terms of mechanical motion

© *A. Yu. Samarin*

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Quantum tunneling is considered from the point of view of local realism. It is concluded that a quantum object tunneling through a potential barrier cannot be interpreted as a point-like particle because such an interpretation generates a contradiction with the impossibility of faster-than-light motion. Such a contradiction does not arise if a quantum object is considered as a continuous medium formed by the fields of matter. The dynamics law of the mechanical motion of these matter fields is derived from the quantum evolution law in the path integral form. The analysis of tunneling shows that this dynamics law has a form of the principle of least action on a complex time variable. The approach used here is not only a physical interpretation of quantum tunneling consistent with special relativity but is also applicable to the description of a wide range of quantum phenomena for which traditional research methods are impracticable.

Keywords: local realism, quantum evolution, tunneling, traversal time, matter field, complex time.

Received: 12th March, 2021 / Revised: 23rd April, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 19th May, 2021

1. Introduction

The phrase "the tunneling of a quantum particle" contains the interpretation of a quantum object as a point-like particle. To avoid ambiguity, instead of the term "quantum particle" the term "quantum object" will be used to mean something material and homogeneous described by the wave function depending on the radius vector in the physical space, and the term "corpuscle" — a point-like particle. The fact that a local external effect on a quantum object instantly changes its wave function throughout space creates difficulties in the interpretation of the wave function as a characteristic of a corpuscle in terms of local realism [1] (all phenomena are considered here from the point of view of local realism). This impossibility becomes apparent when considering the phenomena associated with

Short Communication

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Please cite this article in press as:
Samarin A. Yu. Quantum evolution in terms of mechanical motion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 393–401. https://doi.org/10.14498/vsgtu1851.

Author's Details:
Alexey Yu. Samarin https://orcid.org/0000-0001-7640-3875
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of General Physics and Physics of Oil and Gas Production; e-mail: samarin.ay@yahoo.com

the reduction of the wave function [2]. Acceptance of the corpuscle concept, when describing the reduction of a multipartite quantum system, causes a contradiction between quantum mechanics, considered as a local realistic theory, and special relativity [1]. This contradiction has been verified experimentally [3–7] in accordance with the scheme proposed in [8], and a lot of efforts have been made to eliminate it, e.g. [9–11]. All of them are based on the assertion that, since the result of the collapse is probabilistic, then the transfer of information in this process is impossible. Then, the term "information transfer" is given the meaning of signal transmission, and, based on this, it is concluded that there is no faster-than-light motion in the reduction process. The question of the nonlocal nature of the causal relationship between the effect of one particle and the instantaneous change of the state of another one, remote in space, remains unanswered. However, the questionable rigor of such deductive reasoning is not the subject of this study.

The concept of a corpuscle is clearly unacceptable when considering tunneling. In accordance with [12], there is no appreciable delay in the transmission of a wave packet through a barrier. The transmission time does not depend on the barrier thickness (the Hartman effect) [13]. Thus, if we consider a wave packet as a mathematical object describing the possible positions of the corpuscle, then the speed of this corpuscle can exceed the speed of light. The experimental studies [14, 15] report that the ionization time of the hydrogen atom in the tunneling process is close to zero. The paper [15] puts an upper bound on the tunnelling time, which is less than the value of any time which can theoretically be considered as the tunnelling time of a corpuscle [16, 17]. This is consistent with the theoretical findings [12, 13] and adds confidence that the tunneling time is zero. There is disagreement about the definition of traversal time. The quantum mechanics postulate corresponding to the Borne rule [18] determines the probability of the measurement result [2]. That is, with respect to the measurement of the position of a quantum object, it gives the probability of the detector triggering in a small volume near a certain point in space, but does not give the probability of finding a corpuscle in this volume. Orthodox quantum mechanics, the mathematical structure of which does not contain the concept of a corpuscle, forces us to define this term as the time delay between equal values of the phases of stationary wave functions on opposite sides of the barrier. If the total energy is less than the potential energy in the barrier region, then the stationary wave functions do not have a phase factor depending on the space coordinates and the phase relationships between them are the same throughout the barrier region. Thus, the tunneling time defined in this way is zero. This fact does not contradict special relativity until we interpret a quantum object as a corpuscle. If such an object is a corpuscle, then, taking into account the Born rule and the statistical definition of probability, we are forced to admit that some of the particles falling on the barrier from one side instantly shift to the other one. This is a direct inadmissible contradiction with special relativity, which indicates that the concept of a point-like particle cannot be used to interpret quantum mechanics phenomena.

To escape this contradiction, a homogeneous quantum object has to be considered as a continuous medium. The possibility of its identification with the wave function is doubtful. This is due to the property of a substance to change its position in space exclusively as a result of motion (this property is mathematically expressed by the continuity equation). The wave function does not have such a property (this is obvious when the wave function collapses). In addition, since vacuum has physical characteristics, matter is also present where the wave functions of all material objects are zero.

The properties of this continuous medium should determine all properties of the wave function considered as its physical characteristics [19,20]. Then it seems logical to imagine the material support of the wave function in the form of a continuous medium, the mechanical motion of which should generate the orthodox dynamics of the wave function. This was done in the articles [21, 22] where both unitary dynamics and the dynamics of the collapse of quantum states were obtained from the mechanical motion of a peculiar continuous medium. However, it is simpler and clearer to do the opposite, namely, to extract the properties of the material support of the wave function from the orthodox law of quantum evolution.

2. Real Paths

This procedure can be directly realized for the one-dimensional integral wave equation of non-relativistic quantum mechanics in the form [23, 24]:

$$\Psi_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{t,t_0}(x, x_0)\Psi_{t_0}(x_0)\, dx_0, \tag{1}$$

where the kernel of the integral evolution operator (transition amplitude) $K_{t,t_0}(x, x_0)$ is determined by the path integral:

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]\right) [dx(\tau)], \tag{2}$$

All virtual paths $x(\tau)$ have the same end points $x_0 = x(t_0)$ and $x = x(t)$ (the current time variable in the paths is hereinafter referred to as the Greek letter τ, while the instants of time corresponding to the end points of the paths are referred to as the Latin letter t).

Following the proposed approach, we should assume that the transition amplitude $K_{t,t_0}(x, x_0)$ connects the time dependence of the wave function with the change of the material support position in time. The latter must be uniquely determined by the external and initial conditions. The initial conditions for material points of a continuous medium can be uniquely determined only if this continuous medium is a matter field. In accordance with [22], this means that all individual particles must have the same energy and the same direction of velocity. Let a continuous medium be a matter field, then, taking into account the fact that the support is localized in space when $t \to t_0$ at any time t_0, we can derive the law of the mechanical motion of the matter field from the functional equation:

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = F_{t,t_0}[x^m(\tau), x, x_0],$$

where $x^m(t)$ is a unique path defined by this equation; $F_{t,t_0}[x^m(\tau), x, x_0]$ is the sought functional. If we could express the transition amplitude in the form of the functional $F[x^m(t)]$, then the path $x^m(t)$ could be considered as a real path of the material point of the continuous medium. Taking into account the form of the integrand in (2), the functional $F[x^m(t)]$ is sought in the form

$$F_{t,t_0}[x^m(\tau), x, x_0] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S^m_{t,t_0}[x(\tau), x, x_0]\right).$$

To find the real path $x^m(\tau)$, the path integral (2) has to be taken. It can be done for the path integral in real form. The quantum path integral can be formally

converted into real form by replacing the real time τ with the imaginary negative time $-i\tau$ [25] in the expression for the classical action S (The replacement here is only a mathematical procedure and has no physical meaning). In this form, the quantum path integral is similar to the functional integral for the Brownian motion [26]. However, there is a fundamental difference between them. Brownian paths are non-differentiable time functions (due to random collisions), while quantum virtual paths are differentiable (and deterministic). Due to this, the quantum path integral (2) can be represented in the form [25]

$$K_{t,t_0}(x,x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\Big)^{n/2}\int\cdots\int \exp\Big(-\frac{1}{\hbar}S(x_0,\ldots,x_n,\varepsilon)\Big)\prod_{k=1}^{n-1}dx_k, \qquad (3)$$

where the action $S(x_0,\ldots,x_n,\varepsilon)$ for $n=(t-t_0)/\varepsilon$ on the successive infinitesimal time intervals ε is

$$S(x_0,\ldots,x_n,\varepsilon) = \exp\sum_{k=0}^{k=n-1}\Big(\frac{m}{2}\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon}\Big)^2 + V\Big(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\Big)\Big)\varepsilon.$$

Thus, the quantum path integral can be represented as the limit of the set of Gaussian integrals (such a limit has no physical meaning for the Brownian functional integral, since, in this case, the time interval ε cannot be less than the ratio λ/v, where λ is the free length, v — the thermal speed of a Brownian particle). If the linear pieces are small enough to consider $\partial V(x_k)/\partial x_k$ as constants, then each of the Gaussian integrals in (3) can be taken:

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}}\int \exp\Big(-\frac{1}{\hbar}S(x_k,x_{k-1})\Big)\,dx_k = \exp\Big(-\frac{1}{\hbar}S(x_k^m,x_{k-1})\Big),$$

where x_k^m is the coordinate defined by the expression

$$x_k^m = x_{k-1} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\varepsilon^2}{2m}.$$

On the other hand, this is the coordinate of the maximum of the Gaussian function and, therefore, satisfies the condition

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\exp\Big(-\frac{1}{\hbar}S(x_k,x_{k-1})\Big)\Big|_{x_k=x_k^m} = 0$$

As ε tends to zero, the normalized Gaussian curve of the form

$$\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\exp\Big(-\frac{ax_k^2}{2}+bx_k\Big),$$

narrows, while maintaining the position of the maximum and the area, and in the limit transform into the Dirac delta function (a and b do not depend on k). Thus, we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{m}{2\hbar\varepsilon}(x_k-x_{k-1})^2 - \frac{\varepsilon}{\hbar}V\Big(\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\Big)\Big)\,dx_k =$$
$$= \int \exp\big(dS(x_k)\big)\delta(x_k-x_k^m)\,dx_k,$$

where

$$dS(x_k) = \frac{\partial S(x_k, x_{k-1})}{\partial(x_k - x_{k-1})} d(x_k - x_{k-1}).$$

Returning to real time for the transition amplitude (2), we get

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta\big(x(t) - x^m(t)\big) \exp \frac{i}{\hbar} S[x^m(\tau)], \tag{4}$$

where the path $x^m(\tau)$ corresponds to the least action. Thus, the path integral (2) in the integral wave equation (1) is just another mathematical representation of the transition amplitude (4) for the path corresponding to the classical motion of a material particle. This path depends on external conditions, the initial position, and velocity. Furthermore, we assume that the energies of all individual particles of the continuous medium are the same. This means that a quantum object is in a stationary state, and the continuous medium is a matter field [22]. The end points of the paths are indicated in the transition amplitude; they uniquely determine the real paths of material particles. For these reasons, the end points of the paths and energy will only be specified if necessary, and, in general, we will mean $x^m(\tau) \equiv x^m(\tau, x_0, t_0, E)$. The path $x^m(\tau)$ can be found from the condition

$$\delta S[x^m(\tau)] = 0. \tag{5}$$

The set of Gaussian integrals in (3) does not contain an integral over the position of the end point x_n (the positions of the end points are fixed). The formal result of this is that after integrating the expression (3), the delta function $\delta(x_n - x_n^m)$ is preserved. Physically, this means that the transition amplitude of a material particle differs from zero only at that point in the space where this particle is currently located.

3. The Mechanical Motion Law

The time-independent Schrödinger equation for the infinite motion has stationary solutions which are the superposition of waves moving in opposite directions for each value of the total energy. It is necessary that the wave function and its spatial derivative should both be continuous. Physically, this means that in the region where $\partial V/\partial x \neq 0$, the incident wave generates a reflected wave, even if $E > V$. Thus, a continuous medium can be formed by one matter field only if the field of potential energy is uniform throughout all space. Otherwise, another matter field is generated, moving in the opposite direction. This is a direct consequence of the necessity to satisfy both the continuity equation and the expression for the transition amplitude (4). Really, if $\partial V/\partial x \neq 0$, then the particle velocity is a coordinate function, and it follows from the usual continuity equation that the density distribution of matter should be the corresponding function of spatial coordinates. However, as follows from [22], an individual point of the material cannot be considered as an infinitesimal volume of matter and thus has no density at all and the continuity equation cannot be satisfied in this case. The problem of conservation of the substance is solved by itself if we assume the simultaneous existence of two material fields having the same energy and moving in opposite directions.

Thus, there are simultaneously two opposite paths corresponding to the principle of least action in the region of space, where $\partial V/\partial x \neq 0$. The fundamental

difference from classical mechanics is that both of these paths are realised simultaneously. The proportion of the substance of the medium moving in each direction is defined by the principle of conservation of this substance. The dynamics of the motion of the "reflected" matter field can be provided by a simple replacement of $\tau \to -\tau$ in (5). Thus, the appearance of this field and its motion obey the principle of least action in the form:

$$\delta S[x^m(-\tau)] = 0.$$

The principle of least action has two solutions: $x(\tau)$ and $x(-\tau)$. Classical mechanics considers the solution $x(\tau)$, that does not change the direction of the initial velocity, as unique. Here we have to consider both dynamic laws as a whole. This can be done using a single complex expression

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\big(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau\big)\,\big(1 - i\big) d\tau = 0, \tag{6}$$

where τ is ordinary physical time. By the principle of least action, we have

$$\delta\big(S[x(\tau)] + iS[x(-\tau)]\big) = 0.$$

If the kinetic energy $T > 0$ $(E > V)$, then

$$S^+(x,\tau) = \int p\,dx - E\tau, \quad S^-(x,\tau) = -\int p\,dx - E\tau, \tag{7}$$

where $S^+(x,\tau)$ is the action field for the matter field moving along the positive direction of the axis x, $S^-(x,\tau)$ — in the opposite direction. For the momentum to become an imaginary quantity, and the kinetic energy to become negative, it is necessary to replace $\tau \to -i\tau$ in the Lagrangian in (6). Such a substitution corresponds to the tunneling phenomenon (i.e., in this case the replacement $\tau \to -i\tau$ is not just a formal mathematical procedure). If $T < 0$, then

$$S^+(x,\tau) = i\int p\,dx - E\tau, \quad S^-(x,\tau) = -i\int p\,dx - E\tau, \tag{8}$$

where

$$p = m\frac{dx}{d\tau}$$

is an ordinary mechanical momentum. Taking into account the property of additivity of the transition amplitude, for the case of transmitted and reflected waves, we have

$$\psi(x) = A(x)\exp\frac{i}{\hbar}S^-(x,\tau) + B(x)\exp\frac{i}{\hbar}S^+(x,\tau), \tag{9}$$

where $A(x)$ and $B(x)$ are the functions determined by the principle of conservation of the substance.

4. Conclusions

It is easy to make sure that, for a rectangular potential barrier, the wave function of a tunneling particle is obtained using the general expressions (9), (7) and (8) is the same as the wave function calculated using the Schrödinger equation.

This coincidence necessarily follows from the fact that the dynamics law (6) is directly derived from the law of quantum evolution (4). However, the first approach makes it possible to unambiguously determine the speeds of the material supports (material particles of a continuous medium) by the wave function, and the second one requires an additional interpretation to do this. As mentioned above, the concept of a corpuscle cannot underlie such an interpretation. The concept of a continuous medium as a set of matter fields uniquely interprets quantum evolution in terms of the mechanical motion of matter. Clearly, such a motion, in principle, cannot contradict special relativity, including the situation of tunneling through a potential barrier. As for the principle of locality, it is realized due to the absence of empty space and, consequently, the distance between the material particles of the considered continuous medium. In other words, the continuous medium of a quantum object is a physical reality, while the classical continuous medium is a mathematical abstraction.

The presented analysis of the passage of a quantum object through a potential barrier was carried out to find the material support of its quantum properties and to express the evolution of a quantum state through its mechanical motion. However, the results obtained are not limited only to the interpretation of either the tunneling process or quantum effects in general. These results do not fit within the framework of orthodox quantum mechanics. In particular, the proposed approach does not contain the concept of "observable" at all, which makes it possible to use the presented method to study processes that are inaccessible for investigation by traditional methods of quantum mechanics.

And, finally, from a practical point of view, the application of the proposed approach greatly simplifies the problem of calculating the transition amplitude (2), since it allows to avoid path integrating and directly to use the expression (9). Moreover, using it in many physical situations of interest, one can obtain an analytical expression for the transition amplitude.

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript for print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum mechanics description of physical reality be considered complete?, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 47, no. 10, pp. 777–780. `https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777`.
2. von Neumann J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Berlin, Springer, 1996, x+262 pp. `https://doi.org/10.1007/978-3-642-61409-5`.
3. Clouser J. F., Shimony A. Bell's theorem. Experimental tests and implications, *Rep. Prog. Phys.*, 1978, vol. 41, no. 12, pp. 1881–1927. `https://doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002`.
4. Clauser J. F., Hornen M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, 1969, vol. 23, no. 15, pp. 880–884. `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880`.
5. Freedman S. J., Clauser J. F. Experimental test of local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 28, no. 14, pp. 938–941. `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938`.
6. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental realization of Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 49, no. 2, pp. 91–94. `https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91`.

7. Aspect A. Bell's inequality test: More ideal than ever, *Nature*, 1999, vol. 398, no. 6724, pp. 189–190. https://doi.org/10.1038/18296.
8. Bell J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox, *Physics*, 1964, vol. 1, no. 3, pp. 195–200. https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.
9. Eberhard P. H. Bell's theorem and the different concepts of locality, *Nuov. Cim. B*, 1978, vol. 46, no. 2, pp. 392–419. https://doi.org/10.1007/bf02728628.
10. Ghirardi G. C., Weber T. Quantum mechanics and faster-than-light communication: Methodological considerations, *Nuov. Cim. B*, 1983, vol. 78, no. 1, pp. 9–20. https://doi.org/10.1007/BF02721378.
11. Gisin N. Stochastic quantum dynamics and relativity, *Helvetica Physica Acta*, 1989, vol. 62, no. 4, pp. 363–371. https://doi.org/10.5169/seals-116034.
12. MacColl L. A. Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers, *Phys. Rev.*, 1932, vol. 40, no. 4, pp. 621–626. https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621.
13. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet, *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 12, pp. 3427–3433. https://doi.org/10.1063/1.1702424.
14. Ni H., Saalmann U., Rost J.-M. Tunneling ionization time resolved by backpropagation, *Phys. Rev. Lett*, 2016, vol. 117, no. 2, 02300. https://doi.org/10.1103/physrevlett.117.023002.
15. Satya Sainadh U., et al. Attosecond angular streaking and tunnelling time in atomic hydrogen, *Nature*, 2019, vol. 568, no. 7750, pp. 75–77. https://doi.org/10.1038/s41586-019-1028-3.
16. Steinberg A. M. How much time does a tunneling particle spend in the barrier region?, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 74, no. 13, pp. 2405–2409. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2405.
17. Zimmermann T., Mishra S., Doran B. R., Gordon D. F., Landsman A. S. Tunneling time and weak measurement in strong field ionization, *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 116, no. 23, 233603. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.233603.
18. Born M. Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge, *Z. Phys.*, 1926, vol. 37, no. 2, pp. 863–867 (In German). https://doi.org/10.1007/BF01397477.
19. Schrödinger E. Der stetige Ubergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften*, 1926, vol. 14, no. 28, pp. 664–666 (In German). https://doi.org/10.1007/BF01507634.
20. Bell J. S. Against 'measurement', *Phys. World*, 1990, vol. 3, no. 8, pp. 33–40. https://doi.org/10.1088/2058-7058/3/8/26.
21. Samarin A. Yu. Nonlinear dynamics of open quantum systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 214–224, arXiv: 1706.09405 [quant-ph]. https://doi.org/10.14498/vsgtu1582.
22. Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 7–21. https://doi.org/10.14498/vsgtu1724.
23. Feynman R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, 1948, vol. 20, no. 2, pp. 367–387. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367.
24. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals.* Mineola, NY, Dover Publ., 2010, xii+371 pp.
25. J. Zinn-Justin *Path Integrals in Quantum Mechanics.* Oxford, Oxford Univ. Press, 2005, xiii+318 pp.
26. Kac M. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*, Lectures in Applied Mathematics, vol. 1A. London, New York, Interscience Publ., 1959, xiii+266 pp.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 2. С. 393–401
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1851

УДК 517.958:530.145

Квантовая эволюция в терминах механического движения

© ***А. Ю. Самарин***

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Туннельный эффект рассматривается с точки зрения локального реализма. Сделан вывод о том, что квантовый объект, туннелирующий через потенциальный барьер, нельзя интерпретировать как материальную точку, потому что такая интерпретация противоречит невозможности движения быстрее скорости света в вакууме. Такого противоречия не возникает, если квантовый объект рассматривать как сплошную среду, образованную материальными полями. Показано, что закон динамики механического движения этих полей материи может быть выведен из закона квантовой эволюции в форме интеграла по траекториям. Анализ процесса туннелирования показывает, что этот закон динамики имеет форму принципа наименьшего действия с комплексной временной переменной. Используемый здесь подход позволяет не только придать физическую интерпретацию туннельному эффекту, согласующуюся со специальной теорией относительности, но также описать широкий круг квантовых явлений, для которых традиционные методы исследования неосуществимы.

Ключевые слова: локальный реализм, квантовая эволюция, туннелирование, время под барьером, материальное поле, комплексное время.

Получение: 12 марта 2021 г. / Исправление: 23 апреля 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 19 мая 2021 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант рукописи.

Финансирование. Финансирование работы отсутствовало.

Краткое сообщение

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования
Samarin A. Yu. Quantum evolution in terms of mechanical motion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 393–401. https://doi.org/10.14498/vsgtu1851.

Сведения об авторе
Алексей Юрьевич Самарин https://orcid.org/0000-0001-7640-3875
кандидат физико-математических наук, доцент; каф. общей физики и физики нефтегазового производства; e-mail: samarin.ay@yahoo.com