ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 25, № 3 – 2021

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)

ISSN 2310–7081 (online)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Сентябрь — 2021

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 25, № 3 – 2021)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 25, № 3 – 2021)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен на кафедре прикладной математики и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 30 сентября 2021 г.
Дата выхода в свет 15 ноября 2021 г.
Формат 70×108 $1/16$.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 185/21.
Заказ № 657.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
• 01.01.02 (1.1.2) – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
• 01.02.04 (1.1.8) – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
• 05.13.18 (1.2.2) – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «Эко-Вектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
September — 2021

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2021, vol. 25, no. 3

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i3

Содержание

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i3

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Mechanics of Solids

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Short Communications

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 407–422
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1822

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.956.6

Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа

© *Б. И. Исломов*[1], *Ж. А. Холбеков*[2]

[1] Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4.
[2] Ташкентский государственный технический университет им. И. Каримова,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 2.

Аннотация

Приводится доказательство единственности и существования решения одной нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа. Единственность решения доказана с помощью представления общего решения, существование решения доказано методом интегральных уравнений. Установлены необходимые условия на параметры и заданные функции для однозначной разрешимости интегральных уравнений Вольтерра второго рода со сдвигом, эквивалентным исследуемой задаче.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, нелокальная задача, интегральное уравнение Вольтерра со сдвигом, функция Грина, единственность и существование решения.

Получение: 22 августа 2020 г. / Исправление: 15 мая 2021 г. / Принятие: 28 июня 2021 г. / Публикация онлайн: 20 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Исломов Б. И., Холбеков Ж. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 407–422. https://doi.org/10.14498/vsgtu1822.

Сведения об авторах

Бозор Исломович Исломов https://orcid.org/0000-0002-4372-395X
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; каф. дифференциальных уравнений и математической физики; e-mail: islomovbozor@yandex.ru

Журат Абдинабиевич Холбеков https://orcid.org/0000-0002-1495-2761
ассистент; каф. высшей математики; e-mail: xolbekovja@mail.ru

Введение

Многие задачи математической физики и биологии, в том числе задачи регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, задачи движения малосжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений с частными производными [1, 2].

В 1969 году А. М. Нахушев предложил ряд задач нового типа, вошедших в математическую литературу под названием краевых задач со смещением, которые тесно связаны с нагруженными дифференциальными уравнениями [3].

Краевые задачи для нагруженных уравнений второго порядка гиперболического, параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов достаточно хорошо изучены [4–15]. Отметим работу [16], в которой изучена задача с условием типа Бицадзе—Самарского для парабол-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа.

Заметим, что локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка с тремя линиями изменения типа [17, 18] изучены мало. Это связано, с одной стороны, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом.

Настоящая работа посвящена постановке и изучению одной нелокальной краевой задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа, содержащей в себе след искомой функции.

1. Постановка задачи

В некоторой области Ω, которая определяется ниже, рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \mu_j \operatorname{sign} y H_j[u(x,y)], & (x,y) \in \Omega_j,\ j = 1,2,3. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь μ_j — заданные действительные числа, причем

$$\mu_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3; \tag{2}$$

$$H_j[u(x,y)] = \begin{cases} u(x,0), & j = 1, \\ u(0,\xi), & j = 2, \quad \xi = x + y, \\ u(1,\eta), & j = 3, \quad \eta = y - x + 1; \end{cases}$$

Ω_0 — область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ соответственно;

Ω_1 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси Ox и двумя характеристиками $AN: x + y = 0$, $BN: x - y = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$ и пересекающимися в точке $N(1/2, -1/2)$;

Ω_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AD оси Oy и двумя характеристиками $AK: x + y = 0$, $DK: y - x = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$ и пересекающимися в точке $K(-1/2, 1/2)$;

Ω_3 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком BC и двумя характеристиками $CM : x+y=2$, $BM : x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точек $B(1,0)$ и $C(1,1)$ и пересекающимися в точке $M(3/2,1/2)$;

$$\Omega=\sum_{j=0}^{3}\Omega_j\cup AB\cup BC\cup DA,\quad J_1=\{(x,y):0<x<1, y=0\};$$

$$J_2=\{(x,y):0<y<1, x=0\},\quad J_3=\{(x,y):0<y<1, x=1\};$$

$$\Omega_1^*=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_0,\quad \Omega_2^*=\Omega_2\cup AD\cup\Omega_0\cup BC\cup\Omega_3.$$

Задача. *Найти решение уравнения* (1) *в классе функций*

$$\begin{gathered}W=\big\{u:u(x,y)\in C(\bar\Omega)\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2\cap\Omega_3),\\ u_y\in C(\Omega_2^*)\cap C(\Omega_0\cup AB)\cap C(\Omega_1\cup AB),\\ u_x\in C(\Omega_1^*)\cap C(\Omega_0\cup AD\cup BC)\cap C(\Omega_2\cup AD)\cap C(\Omega_3\cup BC)\big\},\end{gathered}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$a(x)\frac{d}{dx}u\Big(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\Big)+b(x)\frac{d}{dx}u\Big(\frac{1+x}{2},\frac{x-1}{2}\Big)= \\ =m(x)u(x,0)+n(x)u_y(x,0)+c(x),\quad (x,0)\in J_1,\tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{AK}=\varphi_1(y),\quad 0\leqslant y\leqslant\frac12,\tag{4}$$

$$u(x,y)\big|_{MC}=\varphi_2(y),\quad \frac12\leqslant y\leqslant 1,\tag{5}$$

а на линиях изменения типа условиям склеивания

$$u_y(x,+0)=\alpha_1u_y(x,-0),\quad (x,0)\in J_1,\tag{6}$$

$$u_x(+0,y)=\alpha_2u_x(-0,y),\quad (0,y)\in J_2,\tag{7}$$

$$u_x(1+0,y)=\alpha_3u_x(1-0,y),\quad (1,y)\in J_3,\tag{8}$$

где $a(x)$, $b(x)$, $m(x)$, $n(x)$, $c(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ — *заданные функции;* α_j — *известные постоянные, причем*

$$\varphi_1(0)=0,\ \varphi_2(1)=0;\quad \alpha_1>0,\ \alpha_2,\alpha_3\in(-\infty;\ +\infty)\setminus\{0\};\tag{9}$$

$$a^2(x)+b^2(x)\neq0,\quad m^2(x)+n^2(x)\neq0,\quad \forall x\in\overline{J}_1;\tag{10}$$

$$a(x),\ b(x),\ m(x),\ n(x)\in C^1(\overline{J}_1)\cap C^2(J_1),\quad c(x)\in C^2(J_1);\tag{11}$$

$$\varphi_1(y)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2),\quad \varphi_2(y)\in C^1[1/2,1]\cap C^2(1/2,1).\tag{12}$$

Отметим, что аналог задачи Трикоми для уравнения (1) в случае, когда $a(x)=1$, $b(x)=m(x)=n(x)=0$, изучен в работах [17,18].

2. Вывод основных функциональных соотношений

Решение задачи Коши с условиями

$$u(x,-0)=\tau_1(x),\quad (x,0)\in\overline{J}_1;\quad u_y(x,-0)=\nu_1^-(x),\quad (x,0)\in J_1,$$

для уравнения (1) в области Ω_1 имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1^-(\xi)\,d\xi+ \\ +\frac{\mu_1}{4}\int_{x-y}^{x+y}d\xi\int_{\xi}^{x-y}\tau_1\Big(\frac{\xi+\eta}{2}\Big)\,d\eta. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (3), получим

$$[a(x)-b(x)+2n(x)]\nu_1^-(x)=[a(x)+b(x)]\tau_1'(x)-2m(x)\tau_1(x)- \\ -\mu_1 a(x)\int_{x/2}^{x}\tau_1(t)\,dt+\mu_1 b(x)\int_{x}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt-2c(x),\quad (x,0)\in J_1. \quad (14)$$

Рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $a(x)=-b(x)\neq -n(x)$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) имеем

$$2[n(x)-b(x)]\nu_1^-(x)=-2m(x)\tau_1(x)+ \\ +\mu_1 b(x)\int_{x/2}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt-2c(x),\quad (x,0)\in J_1.$$

II. Пусть $a(x)=-b(x)=-n(x)$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) получим

$$2m(x)\tau_1(x)-\mu_1 b(x)\int_{x/2}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt=-2c(x),\quad (x,0)\in J_1.$$

III. Пусть $a(x)-b(x)+2n(x)=0$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) имеем

$$2[n(x)-b(x)]\tau_1'(x)+2m(x)\tau_1(x)+ \\ +\mu_1 b(x)\Big(\int_{x/2}^{x}\tau_1(t)\,dt-\int_{x}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt\Big)=2c(x),\quad (x,0)\in J_1.$$

IV. Пусть $\tilde a(x)=a(x)-b(x)+2n(x)\neq 0$, $\forall x\in\overline{J}_1$, тогда из (14) имеем

$$\nu_1^-(x)=a_1(x)\tau_1'(x)-a_2(x)\tau_1(x)- \\ -a_3(x)\int_{x/2}^{x}\tau_1(t)\,dt+a_4(x)\int_{x}^{(x+1)/2}\tau_1(t)\,dt-a_5(x),\quad (x,0)\in J_1, \quad (15)$$

где

$$a_1(x)=\frac{a(x)+b(x)}{\tilde a(x)},\quad a_2(x)=\frac{2m(x)}{\tilde a(x)},\quad a_3(x)=\frac{\mu_1 a(x)}{\tilde a(x)}, \\ a_4(x)=\frac{\mu_1 b(x)}{\tilde a(x)},\quad a_5(x)=\frac{2c(x)}{\tilde a(x)}.$$

Аналогичным образом, используя решение задачи Коши [17, 18] с начальными данными

$$u(-0,y)=\tau_2(y),\quad (0,y)\in \overline{J}_2;\quad u_x(-0,y)=\nu_2^-(y),\quad (0,y)\in J_2 \tag{16}$$

$$\big(u(1-0,y)=\tau_3(y),\quad (1,y)\in \overline{J}_3;\quad u_x(1-0,y)=\nu_3^-(y),\quad (1,y)\in J_3\big), \tag{17}$$

для уравнения (1) в области Ω_2 (Ω_3) с учетом (4) и (5), получаем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ ($\tau_3(x)$) и $\nu_2^-(x)$ ($\nu_3^-(x)$), принесенное из области Ω_2 (Ω_3) на J_2 (J_3):

$$\nu_2^-(y)-\tau_2'(y)+\frac{\mu_2}{2}\int_0^y \tau_2(t)\,dt=-\varphi_2'(y/2) \tag{18}$$

$$\left(\nu_3^-(y)-\tau_3'(y)-\frac{\mu_3}{2}(1-y)\tau_3(y)=-\varphi_2'\Big(\frac{y+1}{2}\Big)\right). \tag{19}$$

Переходя к пределу при $y\to+0$ в уравнении (1) с учетом условия $\tau_1(1)=0$, получим функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1^+(x)$, принесенное из области Ω_0 на J_1:

$$\tau_1(x)=\int_x^1 dt\int_t^1 \nu_1^+(z)\,dz+\tau_1'(1)\,(x-1), \tag{20}$$

где $\tau_1'(1)$ — неизвестная константа, подлежащая определению.

Решение первой краевой задачи с условиями

$$u(x,+0)=\tau_1(x),\quad (x,0)\in\overline{J}_1;\quad u(+0,y)=\tau_2(y),\quad (0,y)\in\overline{J}_2;$$
$$u(1+0,y)=\tau_3(y),\quad (1,y)\in\overline{J}_3$$

для уравнения (1) в области Ω_0 имеет вид

$$u(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)\,d\eta+\int_0^y G_\xi(x,y;1,\eta)\tau_3(\eta)\,d\eta+ \\ +\int_0^1 G(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)\,d\xi, \tag{21}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)-\right. \\ \left.-\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\right\}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения $u_{xx}-u_y=0$.

Дифференцируя (21) по x, получим

$$u_x(x,y)=\int_0^y G_{\xi x}(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)\,d\eta+\int_0^y G_{\xi x}(x,y;1,\eta)\tau_3(\eta)\,d\eta+ \\ +\int_0^1 G_x(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)\,d\xi. \tag{22}$$

Здесь

$$G_{\xi x}(x,y;0,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\Big[\frac{1}{y-\eta}-\frac{(x+2n)^2}{2(y-\eta)^2}\Big]\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)=\frac{d}{d\eta}\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)^2}\Big)\Big],\quad(23)$$

$$G_{\xi x}(x,y;1,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\times$$

$$\times\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\Big[\Big(\frac{1}{2(y-\eta)}-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)^2}\Big)\exp\Big(-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{1}{2(y-\eta)}-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)^2}\Big)\exp\Big(-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{d}{d\eta}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\Big(-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\Big]+$$

$$+\frac{d}{d\eta}\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\exp\Big(-\frac{(x+1)^2}{4(y-\eta)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)\Big],\quad(24)$$

$$G_x(x,y;\xi,0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(x+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(x+2n)-\frac{x+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(x+2n)\Big).$$

Применяя формулу интегрирования по частям к (22) с учетом (23) и (24), а затем, принимая во внимание

$$\varphi_1(0)=\tau_2(0)=0,\quad \tau_1(1)=\tau_3(0)=0,$$

$$\lim_{z\to 0}z^{-\chi}\exp(-z^{-1})=0,\quad \chi>0,$$

имеем

$$u_x(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4(y-\eta)}\Bigr)\,d\eta -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x+2n)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Bigl(-\frac{(x-1)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x-1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Bigl(-\frac{(x+1)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x+1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)\,d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x+2n)^2+\xi^2}{4y}\Bigr)\times$$
$$\times\Bigl(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(x+2n)-\frac{x+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(x+2n)\Bigr)\tau_1(\xi)\,d\xi. \quad (25)$$

В равенстве (25), устремляя $x\to 0$ $(x\to 1)$, с учетом тождеств

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(2n-1)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(2n+1)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)=$$
$$=\exp\Bigl(-\frac{1}{4(y-\eta)}\Bigr)+2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(2n+1)^2}{4(y-\eta)}\Bigr),$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(2n)^2}{4(y-\eta)}\Bigr)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{n^2}{y-\eta}\Bigr),$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(1+n)^2}{(y-\eta)}\Bigr)=1+\exp\Bigl(-\frac{1}{y-\eta}\Bigr)+2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Bigl(-\frac{(n+1)^2}{y-\eta}\Bigr)$$

получим соответственно функциональное соотношение между $\tau_2(y)$ $(\tau_3(y))$ и $\nu_2^+(y)$ $(\nu_3^+(y))$, принесенное из области Ω_0 на J_2 (J_3):

$$\nu_2^+(y)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{K_2(y,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\tau_2'(\eta)\,d\eta+F_2(y,\tau_3',\tau_1) \qquad (26)$$

$$\left(\nu_3^+(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{K_3(y,\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\tau_3'(\eta)\,d\eta + F_3(y,\tau_2',\tau_1)\right), \quad (27)$$

где

$$u_x(+0,y) = \nu_2^+(y), \quad (0,y)\in J_2; \quad u_x(1+0,y) = \nu_3^+(y), \quad (1,y)\in J_3;$$

$$K_2(y,\eta) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{n^2}{y-\eta}\Big),$$

$$K_3(y,\eta) = \exp\Big(-\frac{1}{y-\eta}\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(n+1)^2}{y-\eta}\Big) + \frac{1}{2}K_2(y,\eta);$$

$$F_2(y,\tau_3',\tau_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{1}{4(y-\eta)}\Big)d\eta +$$
$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_3'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{4n^2+\xi^2}{4y}\Big)\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}4\xi n - \frac{n}{y}\operatorname{sh}4\xi n\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi,$$

$$F_3(y,\tau_2',\tau_1) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\Big(-\frac{1}{4(y-\eta)}\Big)d\eta -$$
$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \frac{\tau_2'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(1+2n)^2}{4(y-\eta)}\Big)d\eta +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\ \frac{(1+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(1+2n) - \frac{1+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(1+2n)\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi.$$

3. Исследование задачи

Теорема. *Если выполнены условия* (2), (9)–(12) *и*

$$\frac{a(x)+b(x)}{\tilde a(x)} \leqslant 0, \ \Big(\frac{a(x)+b(x)}{\tilde a(x)}\Big)' \leqslant 0, \ \frac{2m(x)}{\tilde a(x)} \leqslant 0, \ \frac{\mu_1 a(x)}{\tilde a(x)} \leqslant 0, \ \frac{\mu_1 b(x)}{\tilde a(x)} \geqslant 0, \quad (28)$$

то в области Ω существует единственное регулярное решение поставленной задачи.

Пример. Функции $a(x)=2x+1$, $b(x)=-x$, $n(x)=-x/2-1$, $m(x)=x^2$, $x\in[0,1]$, удовлетворяют всем условиям (28).

Доказательство. Рассмотрим случай **IV**. Пусть

$$\tilde a(x) = a(x) - b(x) + 2n(x) \neq 0, \quad \forall x\in \bar J_1,$$

тогда, исключив $\nu_1^-(x)$ из соотношений (15) и (20), с учетом (6) после некоторых вычислений получим интегральное уравнение относительно $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) + \int_x^1 K_1(x,t)\tau_1(t)dt = \tau_1'(1)(x-1) + \Phi_1(x), \quad (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{29}$$

где

$$K_1(x,t) = \alpha_1 \cdot \Big[a_1(t) + (a_1'(t) + a_2(t))(t-x) + \\ + \int_t^{2t} (z-x)a_3(z)\,dz - \int_{2t-1}^{t} (z-x)a_4(z)\,dz\Big], \tag{30}$$

$$\Phi_1(x) = -\alpha_1 \int_x^1 (z-x)a_5(z)\,dz. \tag{31}$$

В силу (2), (9), (11) из (30) и (31) с учетом класса W следует, что

$$|K_1(x,t)| \leqslant C_1 \text{ при любых } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1; \tag{32}$$

и

$$\Phi_1(x) \in C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1). \tag{33}$$

Таким образом, в силу (32) и (33) уравнение (29) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [19] заключаем, что интегральное уравнение (29) однозначно разрешимо в классе $C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1)$ и его решение дается формулой

$$\tau_1(x) = \tau_1'(1)(x-1) + \Phi_1(x) - \\ - \int_x^1 \tilde{K}_1(x,t)[\tau_1'(1)(t-1) + \Phi_1(t)]\,dt, \quad (x,0) \in \bar{J}_1, \tag{34}$$

где $\tilde{K}_1(x,t)$ — резольвента ядра $K_1(x,t)$. Она имеет вид

$$\tilde{K}_1(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} K_{1m}(x,t), \quad K_{11}(x,t) = K_1(x,t),$$

$$K_{1m}(x,t) = \int_t^x K_1(x,s)K_{1\,m-1}(s,t)\,ds, \quad m = 2,3,\ldots.$$

Дифференцируя (34) по x, получим

$$\tau_1'(x) = \tau_1'(1) + \Phi_1'(x) + \tilde{K}_1(x,x)[\tau_1'(1)(x-1) + \Phi_1(x)] - \\ - \int_x^1 \tilde{K}_1'(x,t)[\tau_1'(1)(t-1) + \Phi_1(t)]\,dt, \quad (x,0) \in \bar{J}_1. \tag{35}$$

В силу (32), (33) из (34) и (35) с учетом (11) заключаем, что

$$\tau_1(x) \in C^1(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1), \quad \tau_1'(x) \in C(\overline{J}_1) \cap C^2(J_1). \tag{36}$$

Подставляя (34) и (35) в (15), с учетом (9), (36) определим функцию $\nu_1^-(x) \in C(\bar{J}_1) \cap C^1(J_1)$.

Теперь, положив в (34) $x = 0$, с учетом $\varphi_1(0) = \tau_1(0) = 0$ находим неизвестную константу ${\tau'}_1(1)$:

$$
{\tau'}_1(1) = \frac{\Phi_1(0) - \displaystyle\int_0^1 \tilde{K}_1(0,t)\Phi_1(t)\,dt}{1 - \displaystyle\int_0^1 (1-t)\tilde{K}_1(0,t)\,dt}. \tag{37}
$$

В силу (28) из (30) следует, что ядра $K_1(0,t) \leqslant 0$ и резольвента $\tilde{K}_1(0,t) \leqslant 0$, $\forall x, t \in [0,1]$. Значит, знаменатель формулы (37) для любых $0 \leqslant t \leqslant 1$ не обращается в нуль, т.е.

$$
1 - \int_0^1 (1-t)\tilde{K}_1(0,t)\,dt > 0.
$$

Если в (34) положим $x = 1$, то с учетом (31) получим

$$
\tau_1(1) = \Phi_1(1) = \tau_3(0) = 0.
$$

Исключив $\nu_j^-(y)$ и $\nu_j^+(y)$ из соотношений (18), (26) и (19), (27), с учетом (7), (8) получим системы интегральных уравнений относительно $\tau_j'(y)$, ($j = 2, 3$):

$$
\tau_2'(y) - \int_0^y M_2(y,t)\tau_2'(t)\,dt = \int_0^y N_2(y,t)\tau_3'(t)\,dt + \Phi_2(y,\tau_1), \tag{38}
$$

$$
\tau_3'(y) - \int_0^y M_3(y,t)\tau_3'(t)\,dt = \int_0^y N_3(y,t)\tau_2'(t)\,dt + \Phi_3(y,\tau_1), \tag{39}
$$

где

$$
M_2(y,t) = \frac{\mu_2}{2}(y-t) - \frac{1 + K_2(y,t)}{\sqrt{\alpha_2}\sqrt{\pi(y-t)}},
$$

$$
M_3(y,t) = -\frac{\mu_3}{2}(1-y) + \frac{1 + K_3(y,t)}{\sqrt{\alpha_3}\sqrt{\pi(y-t)}},
$$

$$
N_j(y,t) = \left[\exp\Bigl(-\frac{1}{4(y-t)}\Bigr) + \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\Bigl(-\frac{(1+2n)^2}{4(y-t)}\Bigr)\right] \times
$$

$$
\times \begin{cases} \dfrac{2}{\alpha_2\sqrt{\pi(y-t)}}, & j = 2, \\ -\dfrac{2(y-t)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}\alpha_3\left[1 + \frac{\mu_3}{2}(1-y)\right]}, & j = 3, \end{cases}
$$

$$
\Phi_2(y,\tau_1) = \varphi_1'\Bigl(\frac{y}{2}\Bigr) + \frac{1}{2\alpha_2\sqrt{\pi y}} \times
$$

$$\times \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{4n^2+\xi^2}{4y}\Big)\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}4\xi n - \frac{n}{y}\operatorname{sh}4\xi n\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi,$$

$$\Phi_3(y,\tau_1) = \frac{1}{2\alpha_3\sqrt{\pi y}}\int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(1+2n)^2+\xi^2}{4y}\Big)\times$$
$$\times\Big(\frac{\xi}{y}\operatorname{ch}2\xi(1+2n) - \frac{1+n}{y}\operatorname{sh}2\xi(1+2n)\Big)\tau_1(\xi)\,d\xi + \varphi_2'\Big(\frac{y+1}{2}\Big),$$

а известная функция $\tau_1(x)$ определяется из (34) и (37).

Принимая во внимание, что

$$\lim_{z\to 0} z^{-\sigma}\exp\Big(-\frac{1}{z}\Big) = 0,$$

для любых фиксированных $\sigma > 0$ с учетом (12), (36) заключаем следующее:

1) ядра $M_j(y,t)$, $j = 2,3$, непрерывны в $\{(y,t) : 0 \leqslant t < y \leqslant 1\}$ и при $y \to t$ допускают оценку
$$|M_j(y,t)| \leqslant c_2(y-t)^{-1/2}; \tag{40}$$

2) ядра $N_j(y,t)$, $j = 2,3$, непрерывны и ограничены в $\{(y,t) : 0 \leqslant t \leqslant y \leqslant 1\}$, т.е.
$$|N_j(y,t)| \leqslant c_3; \tag{41}$$

3) для функций $\Phi_j(y,\tau_1)$, $j = 2,3$, имеет место следующая принадлежность:
$$\Phi_j(y,\tau_1) \in C[0,1]\cap C^2(0,1). \tag{42}$$

Таким образом, интегральные уравнения (38) и (39) являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода со слабой особенностью.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода заключаем, что интегральное уравнение (38) однозначно разрешимо в классе $C[0,1]\cap C^2(0,1)$ и его решение дается формулой

$$\tau_2'(y) = \Phi_2(y,\tau_1) + \int_0^y N_2(y,t)\tau_3'(t)\,dt +$$
$$+\int_0^y M_2^*(y,t)\Big[\Phi_2(t,\tau_1) + \int_0^t N_2(t,z)\tau_3'(z)\,dz\Big]\,dt, \quad (0,y)\in \bar{J}_2, \tag{43}$$

где $M_2^*(y,t)$ — резольвента ядра $M_2(y,t)$.

Подставляя (43) в (39), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $\tau_3'(y)$:

$$\tau_3'(y) - \int_0^y M_4(y,t)\tau_3'(t)\,dt = \Phi_4(y,\tau_1), \quad y\in\bar{J}_3, \tag{44}$$

где

$$M_4(y,t) = M_3(y,t) + \int_t^y N_3(y,z)N_2(z,t)\,dz + \\ + \int_t^y N_3(y,z)\,dz \int_t^z M_2^*(z,s)N_2(s,t)\,ds, \quad (45)$$

$$\Phi_4(y,\tau_1) = \int_0^y N_3(y,t)\Phi_2(t,\tau_1)\,dt + \\ + \int_0^y N_3(y,t)\,dt \int_0^t M_2^*(t,z)\Phi_2(z,\tau_1)\,dz + \Phi_3(y,\tau_1). \quad (46)$$

В силу (9), (12), (42) из (45) и (46) следует, что

$$|M_4(y,t)| \leqslant c_4(y-t)^{-1/2}, \quad 0 \leqslant t < y \leqslant 1,$$

а для функции $\Phi_4(y,\tau_1)$ имеет место следующая принадлежность:

$$\Phi_4(y,\tau_1) \in C[0,1] \cap C^2(0,1). \quad (47)$$

Интегральное уравнение (44) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью, его решение будем искать в классе $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [19] решение уравнения (44) запишем в виде

$$\tau_3'(y) = \int_0^y M_4^*(y,t)\Phi_4(t,\tau_1)\,dt + \Phi_4(y,\tau_1), \quad (0,y) \in \bar{J}_3, \quad (48)$$

где $M_4^*(y,t)$ — резольвента ядра $M_4(y,t)$ уравнения (44).

В силу $\tau_2(0) = \tau_3(0) = 0$ из (43) и (48) соответственно находим функцию $\tau_2(y)$ и $\tau_3(y)$:

$$\tau_2(y) = \int_0^y \Big\{ \Phi_2(\omega,\tau_1) + \int_0^\omega N_2(\omega,t)\,dt \int_0^t M_4^*(t,z)\Phi_4(z,\tau_1)\,dz + \\ + \int_0^\omega N_2(\sigma,t)\Phi_4(t,\tau_1)dt + \\ + \int_0^\omega M_2^*(\omega,t)\Big[\Phi_2(t,\tau_1) + \int_0^t N_2(t,z)\Phi_4(z,\tau_1)\,dz\Big]dt + \\ + \int_0^\omega M_2^*(\omega,t)\Big[\Phi_2(t,\tau_1) + \\ + \int_0^t N_2(t,z)\,dz \int_0^z M_4^*(z,s)\Phi_4(s,\tau_1)\,ds\Big]\,dt\Big\}\,d\omega, \quad (0,y) \in \bar{J}_2, \quad (49)$$

$$\tau_3(y) = \int_0^y \left[\int_0^t M_4^*(t,z)\Phi_4(z,\tau_1)\,dz + \Phi_4(t,\tau_1)\right] dt, \quad (0,y) \in \bar{J}_3. \qquad (50)$$

Поставляя (34), (49), (50) в (26) и (27), с учетом (7), (8), (16), (17), (36), (40)–(42) и (47) определим функции $\nu_j^-(y)$ и $\nu_j^+(y)$ из класса $C[0,1] \cap C^1(0,1)$.

Таким образом, решение поставленной задачи можно восстановить в области Ω_0 как решение первой краевой задачи для уравнения (1) (см. (21)), а в областях Ω_j, $j = 1,2,3,$ — как решение задачи Коши для уравнения (1) (см. (13)). Следовательно, задача однозначно разрешима. □

Замечание. Аналогично можно доказать однозначную разрешимость поставленной задачи в случаях **I–III**.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006. 288 с.
4. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995. vol. 18, no. 2. pp. 209–228. https://doi.org/10.1155/S0161171295000275.
5. Исломов Б., Курьязов Д. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // *ДАН РУз*, 1996. № 1–2. С. 3–6.
6. Дженалиев М. Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // *Диффер. уравн.*, 2001. Т. 37, № 1. С. 48–54.
7. Пулькина Л. С. Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения / *Дифференциальные уравнения и динамические системы*: Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко / Труды МИАН, Т. 236. М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2002. С. 298–303.
8. Кожанов А. И. Об одном нелинейным нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // *Матем. заметки*, 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853. https://doi.org/10.4213/mzm156.
9. Алиханов А. А. Априорные оценки для параболических уравнений с подвижной нагрузкой / *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2006. С. 22–25.
10. Балтаева У. И., Исломов Б. И. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 3. С. 15–25.
11. Сабитов К. Б., Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2013. № 7. С. 62–76.
12. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // *Изв. вузов. Матем.*, 2015. № 6. С. 31–42.

13. Islomov B., Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients // *Electron. J. Diff. Equ.*, 2015. vol. 2015, no. 221. pp. 1–10. https://ejde.math.unt.edu/Volumes/2015/221/abstr.html.
14. Sadarangani K. B., Abdullaev O. Kh. About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives // *Int. J. Diff. Equ.*, 2016. vol. 6, 9815796. https://doi.org/10.1155/2016/9815796.
15. Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle // *Uzbek Math. J.*, 2018. no. 3. pp. 63–72. https://doi.org/10.29229/uzmj.2018-3-6.
16. Бердышев А. С., Рахматуллаева Н. А. Задача с условиям типа Бицадзе–Самарского для параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа // *ДАН РУз*, 2010. №4. С. 8–12.
17. Исломов Б., Холбеков Ж. А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – I // *Узбек. мат. ж.*, 2015. №4. С. 47–56.
18. Исломов Б., Холбеков Ж. А. Аналог задачи Трикоми для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с тремя линиями изменения типа – II // *Узбек. мат. ж.*, 2016. №1. С. 49–56.
19. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 407–422
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1822

MSC: 35M10

On a nonlocal boundary-value problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy

© ***B. I. Islomov***[1]***, J. A. Xolbekov***[2]

[1] National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, 4, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.
[2] Tashkent State Technical University named after I. Karimov, 2, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

The work is devoted to the proof of the uniqueness and existence of a solution of a nonlocal problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of change of type. Using the representation of the general solution, the uniqueness of the solution is proved, and the existence of the solution is proved by the method of integral equations. Necessary conditions for the parameters and specified functions are established for the unique solvability of Volterra integral equations of the second kind with a shift equivalent to the problem under study.

Keywords: loaded equation, nonlocal problem, Volterra integral equation with a shift, Green's function, uniqueness and existence of a solution.

Received: 22nd August, 2020 / Revised: 15th May, 2021 / Accepted: 28th June, 2021 / First online: 20th September, 2021

Competing interests. We declare that we have no actual and potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Research Article

Please cite this article in press as:
Islomov B. I., Xolbekov J. A. On a nonlocal boundary-value problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 407–422. https://doi.org/10.14498/vsgtu1822 (In Russian).

Authors' Details:

Bozor I. Islomov https://orcid.org/0000-0002-4372-395X
Dr. Phys.& Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Dept. of Differential Equations and Mathematical Physics; e-mail: islomovbozor@yandex.ru

Jurat A. Xolbekov https://orcid.org/0000-0002-1495-2761
Assistant; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: xolbekovja@mail.ru

References

1. Nakhushev A. M. Loaded equations and their applications, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 86–94 (In Russian).
2. Nakhushev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. Shk., 1995, 301 pp. (In Russian)
3. Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shift for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 288 pp. (In Russian)
4. Wiener J., Debnath L. A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1995, vol. 18, no. 2, pp. 209–228. `https://doi.org/10.1155/S0161171295000275`.
5. Islamov B. I., Kuryazov D. M. On a boundary value problem for loaded equation of the second order, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 1996, no. 1–2, pp. 3–6 (In Russian).
6. Dzhenaliev M. T. Loaded equations with periodic boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 1, pp. 51–57. `https://doi.org/10.1023/A:1019268231282`.
7. Pul'kina L. S. A nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, vol. 236, pp. 285–290.
8. Kozhanov A. I. A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem, *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 6, pp. 784–795. `https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000049678.16540.a5`.
9. Alikhanov A. A. A priori estimates for parabolic equations with a movable load, In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference* (29–31 May 2006). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2006, pp. 22–25 (In Russian).
10. Baltayeva U. I., Islomov B. I. Boundary value problems for the loaded third order equations of the hyperbolic and mixed types, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 15–25 (In Russian).
11. Sabitov K. B., Melisheva E. P. The Dirichlet problem for a loaded mixed-type equation in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 7, pp. 53–65. `https://doi.org/10.3103/S1066369X13070062`.
12. Sabitov K. B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 23–33. `https://doi.org/10.3103/S1066369X15060055`.
13. Islomov B., Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients, *Electron. J. Diff. Equ.*, 2015, vol. 2015, no. 221, pp. 1–10. `https://ejde.math.unt.edu/Volumes/2015/221/abstr.html`.
14. Sadarangani K. B., Abdullaev O. Kh. About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives, *Int. J. Diff. Equ.*, 2016, vol. 6, 9815796. `https://doi.org/10.1155/2016/9815796`.
15. Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R. On a nonlocal boundary-value problem for second kind second-order mixed type loaded equation in a rectangle, *Uzbek Math. J.*, 2018, no. 3, pp. 63–72. `https://doi.org/10.29229/uzmj.2018-3-6`.
16. Berdyshev A. S., Rakhmatullaeva N. A. A problem with Bitsadze–Samarskiy type conditions for a parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy, *Dokl. Akad. Nauk Resp. Uzb.*, 2010, no. 4, pp. 8–12 (In Russian).
17. Islomov B., Kholbekov Zh. A. An analogue of the Tricomi problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy – I, *Uzbek Math. J.*, 2015, no. 4, pp. 47–56 (In Russian).
18. Islomov B., Kholbekov Zh. A. An analogue of the Tricomi problem for a loaded parabolic-hyperbolic equation with three lines of degeneracy – II, *Uzbek Math. J.*, 2016, no. 1, pp. 49–56 (In Russian).
19. Mikhlin S. G. *Linear Integral Equations*, International Monographs on Advanced Mathematics and Physics. Delhi, Hindustan Publ., 1960, vii+223 pp.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1859

УДК 517.953

Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка

© ***А. И. Кожанов***[1], ***А. В. Дюжева***[2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Изучается разрешимость некоторых нелокальных аналогов второй начально-краевой задачи для многомерных гиперболических и параболического уравнений второго порядка. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все суммируемые с квадратом обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений. Приводятся также некоторые обобщения и усиления полученных результатов.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, параболические уравнения, граничные условия интегрального вида, нелокальные задачи, интегральные условия, регулярные решения, единственность, существование.

Получение: 26 марта 2021 г. / Исправление: 20 мая 2021 г. /
Принятие: 25 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 7 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Кожанов А. И., Дюжева А. В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434. https://doi.org/10.14498/vsgtu1859.

Сведения об авторах
Александр Иванович Кожанов https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. дифференциальных и разностных уравнений; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Александра Владимировна Дюжева https://orcid.org/0000-0002-3284-5302
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: aduzheva@rambler.ru

Введение

Целью настоящей работы является получение новых результатов исследований разрешимости пространственно нелокальных краевых задач с условиями интегрального вида для гиперболических и параболических уравнений второго порядка.

Направление в теории дифференциальных уравнений, связанное с исследованием разрешимости нелокальных задач с граничными условиями интегрального вида, берет свое начало, по-видимому, с работ [1, 2], опубликованных в 1963 и 1964 годах соответственно. Важную роль в развитии данного направления сыграла работа [3], опубликованная в 1977 году. Среди последующих работ (в целом весьма многочисленных) выделим наиболее близкие к методам настоящей статьи [4–16, 18].

Заметим, что большинство работ, посвященных исследованию разрешимости краевых задач с граничными условиями интегрального вида, относится к одномерному по пространственным переменным случаю.

В работе [10] был предложен новый подход к многомерным задачам с граничными условиями интегрального вида, позволивший изучить разрешимость нелокальных краевых задач для различных классов интегральных дифференциальных уравнений (см. также работы [11, 15]). Этот подход связывал разрешимость той или иной нелокальной задачи со взаимной однозначностью некоторого оператора Фредгольма второго рода, построенного по изучаемой задаче. А в работе [17] было показано, что для нелокального аналога второй начально-краевой задачи для многомерных параболических уравнений второго порядка с граничным смещением интегрального вида условие взаимной однозначности не требуется, но при этом возникают условия финитности начальной функции и свободного члена.

В настоящей работе показано, что и в случае многомерных гиперболических уравнений второго порядка для разрешимости нелокальных аналогов второй начально-краевой задачи с граничным смещением интегрального вида условие взаимной однозначности соответствующего оператора Фредгольма не потребуется. Кроме того, показано, что как в гиперболическом случае, так и в параболическом, условия финитности начальных функций и свободного члена не требуются. Приводятся примеры других уравнений, для которых разрешимость некоторых нелокальных аналогов второй начально-краевой задачи может быть установлена без соответствующего условия взаимной однозначности.

Уточним, что метод настоящей работы существенно отличается от метода работы [17]. Кроме этого, сделаем еще два замечания:

– в работе [19] приведено обоснование использования понятия нелокальности в изучении физических, химических и т. п. процессов; именно эффекты нелокальности и приводят к задачам математического моделирования с граничными условиями интегрального вида;
– все построения и рассуждения в настоящей работе проводятся на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l; свойства функций из этих пространств можно найти в монографиях [20–22].

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $c(x,t)$, $f(x,t)$ и $N(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$; L_1 и L_2 — дифференциальные операторы, действия которых определяются равенствами

$$L_1 v = v_{tt} - \Delta v + c(x,t)v, \quad L_2 v = v_t - \Delta v + c(x,t)v$$

(Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_2, ..., x_n).

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_1 u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} - \int_\Omega N(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_2 u = f(x,t) \tag{5}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3).

В изучаемых задачах условие (2) является нелокальным аналогом граничного условия второй начально-краевой задачи для гиперболических или параболических уравнений. Именно это условие и определяет интегральный оператор Фредгольма, использованный в работе [10].

2. Разрешимость нелокальных задач I и II

Определим функцию $N_1(x,y)$ как решение задачи

$$\Delta_x N_1(x,y) - N_1(x,y) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial N_1(x,y)}{\partial \nu} = N(x,y) \quad \text{при } x \in \Gamma,\ y \in \Omega$$

(переменная y в этой задаче является параметром).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad N(x,y) \in C^3(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$ такое, что

$$u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), \quad u_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)),$$

$$u_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)).$$

Доказательство. Пусть M — оператор, определенный на пространстве $L_2(\Omega)$ и ставящий в соответствие функции $v(x)$ функцию $(Mv)(x)$:

$$(Mv)(x) = \int_\Omega N_1(x,y)v(y)dy.$$

Возможны два случая:

1) число 1 не является собственным числом оператора M;

2) число 1 является собственным числом оператора M.

В первом случае оператор $I-M$ будет непрерывно обратимым оператором из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, и тем самым для нелокальной задачи I будут выполняться все условия работы [10]. Следовательно, эта задача будет иметь решение, принадлежащее требуемому в теореме классу.

Пусть теперь имеет место второй случай.

Как известно [23, гл. VI, § 24], спектр оператора M состоит из не более чем счетного множества собственных чисел, причем это множество может иметь своей предельной точкой лишь число 0. Следовательно, существует число ε_0 такое, что $\varepsilon_0 \in (0,1)$, и на интервале $(1-\varepsilon_0, 1)$ нет собственных чисел оператора M.

Для числа ε из интервала $(1-\varepsilon_0, 1)$ рассмотрим следующую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (3) *и* (4), *а также условие*

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial u(x,y)}{\partial \nu} - \int_\Omega N(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S} = 0. \tag{7}$$

Этой задаче соответствует оператор $(1-\varepsilon)I - M$ (см. [10]). Поскольку число $1-\varepsilon$ не является собственным числом оператора M, согласно [10], нелокальная задача (1), (3), (4), (7) имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что $u^\varepsilon \in$ $\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t^\varepsilon \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ имеют место априорные оценки, достаточные для осуществления процедуры предельного перехода.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega L_1 u^\varepsilon u_\tau^\varepsilon dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau^\varepsilon dx d\tau.$$

С помощью интегрирования по частям и использования условий (3), (4), (7) данное равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2}\int_\Omega [u_t^\varepsilon(x,t)]^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega [u_{x_i}^\varepsilon(x,t)]^2 dx =$$
$$= \frac{1}{1-\varepsilon}\int_0^t \int_\Gamma \left(\int_\Omega N(x,y)u_\tau^\varepsilon(y,\tau)dy\right)u^\varepsilon(x,\tau)ds d\tau -$$
$$- \frac{1}{1-\varepsilon}\int_\Gamma \left(\int_\Omega N(x,y)u^\varepsilon(y,t)dy\right)u^\varepsilon(x,t)ds -$$

$$-\int_0^t\int_\Omega cu^\varepsilon u^\varepsilon_\tau dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega fu^\varepsilon_\tau dxd\tau. \quad (8)$$

Для функции $u^\varepsilon(x,t)$ имеют место неравенства

$$\int_\Gamma [u^\varepsilon(x,t)]^2 ds\leqslant\delta\sum_{i=1}^n\int_\Omega [u^\varepsilon_{x_i}(x,t)]^2dx+c(\delta)\int_\Omega [u^\varepsilon(x,t)]^2dx, \quad (9)$$

$$\int_\Omega [u^\varepsilon(x,t)]^2ds\leqslant T\int_0^t\int_\Omega [u^\varepsilon_\tau(x,\tau)]^2dxd\tau. \quad (10)$$

В первом из этих неравенств δ — произвольное положительное число; само по себе это неравенство является следствием теоремы вложения [21, гл. II, § 2]. Второе неравенство элементарно доказывается с помощью формулы Ньютона—Лейбница.

Используя неравенства (9) и (10), подбирая число δ малым, применяя неравенство Юнга и, наконец, используя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (8) будет априорная оценка

$$\int_\Omega [u^\varepsilon_t(x,t)]^2dx+\sum_{i=0}^n\int_\Omega [u^\varepsilon_{x_i}(x,t)]^2dx\leqslant R_1\int_Q f^2dxdt, \quad (11)$$

постоянная R_1 в которой определяется лишь функциями $c(x,t)$ и $N(x,y)$, а также числом T и областью Ω.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega (L_1u^\varepsilon)_\tau u^\varepsilon_{\tau\tau}dxdt=\int_0^t\int_\Omega f_\tau u^\varepsilon_{\tau\tau}dxd\tau.$$

Фактически повторяя предыдущие рассуждения, но при этом используя оценку (11) и учитывая, что имеет место равенство $u^\varepsilon_{tt}(x,0)=f(x,0)$, получим, что для функций $u^\varepsilon(x,t)$ имеет место вторая априорная оценка

$$\int_\Omega [u^\varepsilon_{tt}(x,t)]^2dx+\sum_{i=2}^n\int_\Omega [u^\varepsilon_{x_it}(x,t)]^2dx\leqslant R_2\int_Q (f^2+f_t^2)dxdt, \quad (12)$$

с постоянной R_2, определяющейся лишь функциями $c(x,t)$ и $N(x,t)$, а также числом T и областью Ω.

С помощью неравенств (11) и (12) нетрудно показать, что для функции $u^\varepsilon(x,t)$ имеет место третья априорная оценка

$$\int_\Omega [\Delta u^\varepsilon(x,t)]^2dx\leqslant R_3\int_Q (f^2+f_t^2)dxdt, \quad (13)$$

постоянная R_3 в которой вновь определяется лишь функциями $c(x,t)$ и $N(x,t)$, числом T и областью Ω.

Определим функцию

$$w^\varepsilon(x,t)=(1-\varepsilon)u^\varepsilon(x,t)-\int_\Omega N_1(x,y)u^\varepsilon(y,t)dy.$$

Имеют место равенства

$$L_1 w^\varepsilon(x,t) = (1-\varepsilon)f - \int_\Omega N(x,y)u^\varepsilon_{tt}(y,t)dy + \\ + \int_\Omega [\Delta_x N(x,y) - c(x,t)N(x,y)]u^\varepsilon(y,t)dy,$$

$$\frac{\partial w^\varepsilon(x,t)}{\partial \nu}\Big|_{(x,t)\in S} = 0.$$

Умножая первое из этих равенств на функцию $w^\varepsilon_t(x,t) - \Delta w^\varepsilon_t(x,t)$, интегрируя по цилиндру с переменной высотой (переменным верхним пределом), используя второе равенство и неравенства (11)–(13), получим, что для функций $w^\varepsilon(x,t)$ имеют место оценки, аналогичные полученным выше оценкам для функций $u^\varepsilon(x,t)$, но с другими постоянными R'_1, R'_2, R'_3 в правой части.

Из доказанных оценок для функции $w^\varepsilon(x,t)$, а также из обращения производной $\frac{\partial w^\varepsilon(x,t)}{\partial \nu}$ в нуль на границе S и второго основного неравенства для эллиптических операторов [21, гл. III, § 8] следует, что для функции $w^\varepsilon(x,t)$ выполняются включения

$$w^\varepsilon(x,t) \in L_\infty(0,T;W^2_2(\Omega)), \quad w^\varepsilon_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W^1_2(\Omega)),$$

$$w^\varepsilon_{tt}(x,t) \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$

причем нормы функций $w^\varepsilon(x,t)$, $w^\varepsilon_t(x,t)$, $w^\varepsilon_{tt}(x,t)$ в соответствующих пространствах будут ограничены равномерно по ε. Но тогда и для функций $u^\varepsilon(x,t)$, $u^\varepsilon_t(x,t)$, $u^\varepsilon_{tt}(x,t)$ будут выполняться те же включения, и нормы этих функций в пространствах $L_\infty(0,T;W^2_2(\Omega))$, $L_\infty(0,T;W^1_2(\Omega))$, $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ будут ограничены равномерно по ε.

Установленные оценки и включения позволяют осуществить стандартную процедуру предельного перехода.

Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ так, чтобы $\varepsilon_m \in (1-\varepsilon_0, 1)$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. Пусть $u_m(x,t)$ — решение задачи (1), (3), (4), (7) в случае $\varepsilon = \varepsilon_m$. Семейства $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^\infty$, $\{u_{mt}(x,t)\}_{m=1}^\infty$, $\{u_{mtt}(x,t)\}_{m=1}^\infty$ ограничены равномерно по m в пространствах $L_\infty(0,T;W^2_2(\Omega))$, $L_\infty(0,T;W^1_2(\Omega))$, $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ соответственно. Из этих оценок и теорем вложения [20–22] следует, что существуют последовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ натуральных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{слабо в пространстве } W^2_2(Q),$$

$$u_{m_k}(x,t) \to u(x,t) \quad \text{сильно в пространстве } W^1_2(Q),$$

$$u_{m_k x_i}(x,t) \to u_{x_i}(x,t) \quad \text{сильно в пространстве } L_2(S),\ i = 1,\dots,n,$$

$$\varepsilon_{m_k}\frac{\partial u_{m_k}(x,t)}{\partial \nu} \to 0 \quad \text{сильно в пространстве } L_2(S).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением из пространства $W^2_2(Q)$ нелокальной задачи I. Более того, для функции $u(x,t)$ сохранятся оценки (11)–(13), а также оценки производных $u_{x_i x_j}(x,t)$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. А это означает, что функция $u(x,t)$ будет решением нелокальной задачи I из требуемого класса. $\square$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$c(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad N(x,y) \in C^2(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$ такое, что

$$u(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)), \quad u_t(x,t) \in L_2(Q).$$

Доказательство. Вновь обратимся к оператору M. Если число 1 не является собственным значением оператора M, то нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее требуемому классу. Это нетрудно доказать, используя методы работы [10]. Если же число 1 является собственным значением оператора M, то можно вновь воспользоваться методом регуляризации. Необходимые для осуществления процедуры предельного перехода априорные оценки нетрудно получить, анализируя последовательно равенства

$$\int_0^t \int_\Omega L_2 u^\varepsilon u^\varepsilon dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u^\varepsilon dx d\tau,$$
$$\int_0^t \int_\Omega L_2 u^\varepsilon u_\tau^\varepsilon dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau^\varepsilon dx d\tau$$

($u^\varepsilon(x,t)$ — решение уравнения (5) при выполнении регуляризованного уловия (6)), а также условия (3). Теоремы вложения позволяют с помощью полученных оценок выбрать последовательность из семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$, сходящуюся к решению нелокальной задачи II. □

3. Замечания и дополнения

1. Для решения нелокальных задач I и II при выполнении условий теоремы 1 и 2 имеет место свойство единственности. Это свойство нетрудно доказать, анализируя равенства

$$\int_0^t \int_\Omega L_1 u u_\tau dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau^\varepsilon dx d\tau,$$

$$\int_0^t \int_\Omega L_2 u u dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u^\varepsilon dx d\tau$$

($u(x,t)$ — решение нелокальных задач I или II из указанных в теоремах существования классов). Заметим, что обратимость или необратимость оператора M здесь не играет никакой роли.

2. В нелокальных задачах I и II оператор Лапласа можно заменить более общим линейным эллиптическим оператором второго порядка, а граничные условия (2) нелокальных задач I и II можно заменить условием третьей краевой задачи

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \sigma(x)u(x,t) - \int_\Omega N(x,y)u(y,t)dy\Big|_{(x,t)\in S} = 0.$$

3. Комбинируя метод настоящей работы и работы [10], можно получить новые условия разрешимости интегральных аналогов второй или третьей краевых задач для некоторых других классов дифференциальных уравнений, например, для уравнения

$$u_{ttt} + \alpha u_{tt} - \beta \Delta u_t - \Delta u = f,$$

моделирующего звуковые волны высокой плотности [24] (здесь α и β — положительные постоянные).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 0778–2020–0005.

Библиографический список

1. Cannon J. R. The solution of heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. vol. 21, no. 2. pp. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437.
2. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024.
3. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
4. Bouziani A., Benouar N.-E. Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation // *Kobe J. Math.*, 1998. vol. 15, no. 1. pp. 47–58.
5. Bouziani A. On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition // *Bull. Cl. Sci., Acad. R. Belg.*, 1999. vol. 10, no. 1. pp. 61–77. https://doi.org/10.3406/barb.1999.27977.
6. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Матем. моделирование*, 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103.
7. Ионкин Н. И., Морозова В. А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // *Диффер. уравн.*, 2000. Т. 36, № 7. С. 884–888.
8. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.
9. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564.
10. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
11. Абдрахманов А. М., Кожанов А. И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 5. С. 3–12.
12. Кожанов А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальными и интегральными условиями для параболических уравнений // *Нелинейные граничные задачи*, 2010. Т. 20. С. 54–76. http://iamm.su/upload/iblock/e5f/54_76.pdf.
13. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // *Математический журнал (Алматы)*, 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.

14. Кожанов А. И. О разрешимости пространственно-нелокальных задач с условиями интегрального вида для некоторых классов нестационарных уравнений // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 8. С. 1048–1055. https://doi.org/10.1134/S0374064115080087.
15. Попов Н. С. Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, № 3. С. 359–372. https://doi.org/10.1134/S0374064115030073.
16. Попов Н. С. О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // *Математические заметки СВФУ*, 2016. Т. 23, № 1. С. 79–86.
17. Данилюк И. М., Данилюк А. О. Задача Неймана с интегро-дифференциальным оператором в краевом условии // *Матем. заметки*, 2016. Т. 100, № 5. С. 701–709. https://doi.org/10.4213/mzm11013.
18. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions // *Electron. J. Differential Equations*, 2020. vol. 2020, no. 28. pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html.
19. Bažant Z. P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress // *J. Eng. Mech.*, 2002. vol. 128, no. 1. pp. 1119–1149. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
20. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988. 334 с.
21. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М.: Наука, 1973. 736 с.
22. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* / North-Holland Mathematical Library. vol. 18. Amsterdam: North-Holland, 1978. 528 pp. https://doi.org/10.1016/s0924-6509(09)x7004-2
23. Треногин В. А. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1980. 495 с.
24. Liu S., Triggiani R. An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement // *J. Inv. Ill-posed Problems*, 2013. no. 6. pp. 825–869. https://doi.org/10.1515/jip-2012-0096.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1859

MSC: 35M13

The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations

© ***A. I. Kozhanov***[1]***, A. V. Dyuzheva***[2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4, Acad. Koptyug pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In this paper, we study the solvability of some non-local analogs of the second initial-boundary value problem for multidimensional hyperbolic and parabolic equations of the second order. We prove the existence and uniqueness theorems of regular solutions (which have all Sobolev generalized derivatives that are summable with a square and are included in the equation). Some generalization and amplification of the obtained results are also given.

Keywords: hyperbolic equations, parabolic equations, integral boundary conditions, nonlocal problems, integral conditions, regular solutions, uniqueness, existence.

Received: 26th March, 2021 / Revised: 20th May, 2021 /
Accepted: 25th August, 2021 / First online: 7th September, 2021

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The work was carried out with the financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of state task no. 0778–2020–0005.

Research Article

Please cite this article in press as:
Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434. https://doi.org/10.14498/vsgtu1859 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander I. Kozhanov https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Differential and Difference Equations; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Alexandra V. Dyuzheva https://orcid.org/0000-0002-3284-5302
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: aduzheva@rambler.ru

References

1. Cannon J. R. The solution of heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437.
2. Kamynin L. I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 33–59. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1.
3. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 (In Russian).
4. Bouziani A., Benouar N.-E. Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation, *Kobe J. Math.*, 1998, vol. 15, no. 1, pp. 47–58.
5. Bouziani A. On a class of parabolic equations with a nonlocal boundary condition, *Bull. Cl. Sci., Acad. R. Belg.*, 1999, vol. 10, no. 1, pp. 61–77. https://doi.org/10.3406/barb.1999.27977.
6. Gordeziani D. G., Avalishvili G. A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103 (In Russian).
7. Ionkin N. I., Morozova V. A. The two-dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions, *Differ. Equ.*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 982–987. https://doi.org/10.1007/BF02754498.
8. Pul'kina L. S. A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 947–953. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16.
9. Ivanchov N. I. Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 4, pp. 591–609. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44.
10. Kozhanov A. I., Pul'kina L. S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. https://doi.org/10.1134/S0012266106090023.
11. Abdrakhmanov A. M., Kozhanov A. I. A problem with a nonlocal boundary condition for one class of odd-order equations, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 5, pp. 1–10. https://doi.org/10.3103/S1066369X07050015.
12. Kozhanov A. I. On the solvability of boundary value problems with nonlocal and integral conditions for parabolic equations, *Nonlinear Boundary-Value Problems*, 2010, vol. 20, pp. 54–76 (In Russian). http://iamm.su/upload/iblock/e5f/54_76.pdf.
13. Kozhanov A. I., Pulkina L. S. On the solvability of some boundary value problems with a shift for linear hyperbolic equations, *Mathematical Journal (Almaty)*, 2009, vol. 9, no. 2, pp. 78–92 (In Russian).
14. Kozhanov A. I. On the solvability of spatially nonlocal problems with conditions of integral form for some classes of nonstationary equations, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1043–1050. https://doi.org/10.1134/S001226611508008X.
15. Popov N. S. Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions, *Differ. Equ.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 362–375. https://doi.org/10.1134/S0012266115030076.
16. Popov N. S. On the solvability of boundary value problems for multidimensional parabolic equations of fourth order with nonlocal boundary condition of integral form, *Mathematical notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 79–86 (In Russian).
17. Danyliuk I. M., Danyliuk A. O. Neumann problem with the integro-differential operator in the boundary condition, *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 5, pp. 687–694. https://doi.org/10.1134/S0001434616110055.
18. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions, *Electron. J. Differential Equations*, 2020, vol. 2020, no. 28, pp. 1–20. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html.

19. Bažant Z. P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: Survey of progress, *J. Eng. Mech.*, 2002, vol. 128, no. 1, pp. 1119–1149. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).
20. Sobolev S. L. *Nekotorye primeneniia funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1988, 334 pp. (In Russian)
21. Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973, 736 pp. (In Russian)
22. Triebel H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 18. Amsterdam, North-Holland, 1978, 528 pp. https://doi.org/10.1016/s0924-6509(09)x7004-2
23. Trinogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 495 pp. (In Russian)
24. Liu S., Triggiani R. An inverse problem for a third order PDE arising in high-intensity ultrasound: Global uniqueness and stability by one boundary measurement, *J. Inv. Ill-posed Problems*, 2013, no. 6, pp. 825–869. https://doi.org/10.1515/jip-2012-0096.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 435–456
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1873

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.372

Численное моделирование процесса ползучести титанового сплава ВТ6 при многоосном напряженном состоянии с учетом влияния агрессивной среды

© *Л. А. Игумнов*[1,2], *И. А. Волков*[2,3], *Д. А. Казаков*[1,2], *Д. Н. Шишулин*[1,2], *И. А. Модин*[1,2]

[1] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
[2] Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,
Россия, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.
[3] Волжский государственный университет водного транспорта,
Россия, 603600, Нижний Новгород, ул. Нестерова, 5.

Аннотация

Рассматривается проблема оценки прочности и ресурса ответственных инженерных объектов, условия эксплуатации которых характеризуются высокотемпературными нестационарными термомеханическими воздействиями, приводящими к деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов (металлов и их сплавов) по механизму длительной прочности.

С позиции механики поврежденной среды развита математическая модель, описывающая кинетику напряженно-деформированного состояния и накопления повреждений при деградации материала по механизму длительной прочности в условиях сложного многоосного напряженного состояния.

Предложена экспериментально-теоретическая методика нахождения материальных параметров и скалярных функций определяющих соотношений механики поврежденной среды по результатам специально поставленных экспериментов на лабораторных образцах.

Научная статья

Образец для цитирования

Игумнов Л. А., Волков И. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А. Численное моделирование процесса ползучести титанового сплава ВТ6 при многоосном напряженном состоянии с учетом влияния агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 435–456. https://doi.org/10.14498/vsgtu1873.

Сведения об авторах

Леонид Александрович Игумнов https://orcid.org/0000-0003-3035-0119
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; главный научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов[2]; e-mail: igumnov@mech.unn.ru

Приводятся результаты экспериментальных исследований и численного моделирования процесса кратковременной высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 при одноосных и многоосных напряженных состояниях. Численные результаты сравниваются с данными натурных экспериментов. Особое внимание уделяется вопросам моделирования процесса нестационарной ползучести для сложных режимов деформирования, сопровождающихся вращением главных площадок тензоров напряжений, деформаций и деформаций ползучести с учетом воздействия агрессивной среды, которая имитируется путем предварительного наводораживания лабораторных образцов до различной концентрации водорода по массе.

Показано, что развитый вариант определяющих соотношений механики поврежденной среды позволяет с достаточной для инженерных расчетов точностью описывать процессы нестационарной ползучести и длительной прочности конструкционных сплавов при многоосных напряженных состояниях с учетом воздействия агрессивной среды (водородной коррозии).

Ключевые слова: нестационарная ползучесть, длительная прочность, повреждение, ресурс, математическое моделирование, базовый эксперимент, материальные параметры, численный и натурный эксперимент, агрессивная среда, наводораживание.

Получение: 27 июня 2021 г. / Исправление: 9 сентября 2021 г. /
Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Особенностью работы элементов конструкций, разрушающихся в результате высокотемпературной ползучести, является нестационарность теплового и силового воздействий, которые определяют характер процесса деформирования материала в зонах концентрации напряжений и включают выдержки различной длительности при различных уровнях напряжений и температуры [1–4].

Многочисленные результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что при термоциклическом нагружении с различной длительно-

---

Иван Андреевич Волков https://orcid.org/0000-0003-1176-4906
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов[2]; заведующий кафедрой; каф. подъемно-транспортных машин и машиноремонта[3]; e-mail: pmptmvgavt@yandex.ru

Дмитрий Александрович Казаков https://orcid.org/0000-0002-9316-4105
кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов[2];
e-mail: kazakov@mech.unn.ru

Денис Николаевич Шишулин https://orcid.org/0000-0002-6527-557X
кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; научный сотрудник; лаб. физико-механических испытаний материалов[2];
e-mail: shishulindn@gmail.com

Иван Александрович Модин 🖂 https://orcid.org/0000-0002-3561-4606
кандидат технических наук; научный сотрудник; каф. прикладной математики и информатики[1]; научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов[2];
e-mail: mianet@mail.ru

стью циклов нагружения характер разрушения различается вследствие различия комбинаций двух основных видов повреждения: процесса повреждения, вызванного деформацией ползучести и развивающегося в основном по границам зерен (межкристаллитное разрушение), и процесса повреждения, вызванного пластической деформацией по плоскостям скольжения дислокаций (транскристаллитное разрушение).

Вследствие того, что процессы накопления повреждений зависят от кинетики напряженно-деформированного состояния (НДС), точность расчетных оценок прочности и ресурса конструктивных элементов будет зависеть от того, насколько используемая математическая модель механики поврежденной среды (МПС) достоверно описывает процессы деформирования и повреждения опасных зон элементов конструкции в заданных условиях эксплуатации и насколько точно определены параметры материала, входящие в используемую математическую модель.

Ресурс элементов конструкций, работающих в условиях повышенных температур и механических воздействий, имеющих циклический характер, определяется в основном физическими процессами малоцикловой усталости и накоплением повреждений в результате процесса ползучести, которые приводят к одному из наиболее опасных типов разрушения — хрупкому разрушению конструкций, изначально изготовленных из пластичных материалов.

Для описания стандартных кривых ползучести предложено много упрощенных одномерных определяющих уравнений. Однако эти формулы пригодны только для случая постоянных напряжений и представляют собой попытку математической формализации первой и второй стадий процесса ползучести [5–10].

При переменных напряжениях получили развитие модели временного и деформационного упрочнения [9, 10]. Однако определяющие соотношения ползучести, представленные в форме моделей временного и деформационного упрочнения, предназначены лишь для описания первой и второй стадий процесса ползучести. Они не охватывают всех стадий процесса ползучести, а также не описывают важного явления обратной ползучести при разгрузке материала. Поэтому в ряде случаев необходимо строить более сложные определяющие соотношения ползучести и длительной прочности [11–24]. В работах отечественных и зарубежных исследователей, которые можно найти в [9], предложено большое количество разных формулировок моделей ползучести. Можно утверждать, что соотношения, основанные на обобщении моделей упрочнения путем применения концепции «скрытых» или «внутренних» параметров состояния, позволяют описывать численно в хорошем согласии с экспериментальными данными многоосные напряженные состояния. Такие соотношения обладают двумя важными преимуществами: позволяют охватить широкий диапазон поведения материалов, включая определение склерономной пластической деформации и реономной деформации ползучести, и в то же время очень удобны для анализа действующих эффективных напряжений.

Особое внимание необходимо уделять экспериментальным исследованиям процессов высокотемпературной ползучести при многоосном нагружении, так как данная экспериментальная информация является базисом для построения достоверной математической модели, позволяющей учитывать эффекты, возникающие при сложных непропорциональных нагружениях и существенным образом влияющих на точность расчетов длительной прочности конструкций.

В настоящей работе на базе работ отечественных и зарубежных исследователей [1,11–18] развита математическая модель МПС, предназначенная для описания процессов нестационарной ползучести и длительной прочности поликристаллических конструкционных сплавов. Проведена оценка достоверности предложенных определяющих соотношений МПС путем сравнения с опытными данными численных результатов процесса кратковременной высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 при одноосном и многоосном напряженных состояниях с учетом воздействия агрессивной среды (наводораживания).

1. Экспериментальное оборудование и программа испытаний. Возможности испытательного оборудования [26–30] с интегрированным математическим обеспечением позволяют создать различные программы испытаний. В работе [26] представлены результаты экспериментальных исследований кратковременной высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6, полученные на лабораторных трубчатых образцах в условиях одноосного и многоосного напряженных состояний по схеме «мягкого» нагружения при температуре 600 °C. Часть испытаний проводилась на образцах из исследуемого материала в состоянии поставки. Для исследования влияния водородной коррозии на механические характеристики сплава ВТ6 ряд образцов был подвергнут влиянию агрессивной среды (наводораживанию при концентрациях водорода по массе 0.15 % и 0.3 %).

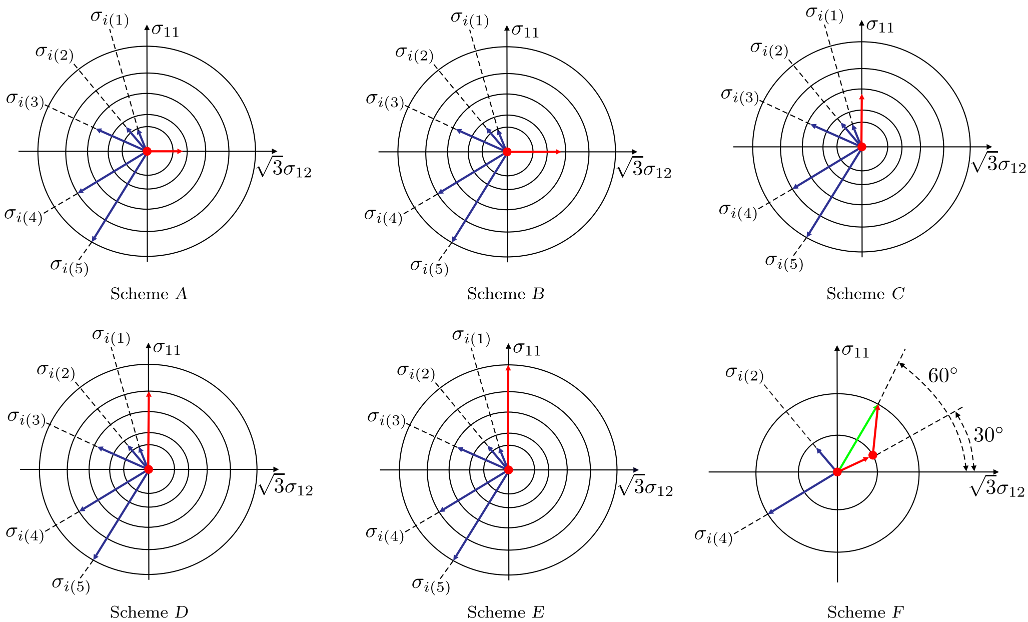
Эксперименты получены при кручении образцов (рис. 1, схемы A, B) с интенсивностями действующих напряжений $\sigma_i = 50$ и 66 МПа, при одноосном растяжении (рис. 1, схемы C–F) с интенсивностями напряжений $\sigma_i = 30$, 66, 78 и 90 МПа и при многоосном нагружении при двух уровнях интенсивности напряжений $\sigma_i = 50$ и 78 МПа и углах между компонентами тензора напряжений σ_{11} и σ_{12}, равных 30° и 60° соответственно (рис. 1, схема J).

На рис. 1 графически представлены программы нагружения, где красной стрелкой указан вектор действующего напряжения в экспериментальных исследованиях процесса ползучести, а указанные радиусы окружностей равны следующим значениям: $\sigma_{i(1)} = 30$ МПа, $\sigma_{i(2)} = 50$ МПа, $\sigma_{i(3)} = 66$ МПа, $\sigma_{i(4)} = 78$ МПа, $\sigma_{i(5)} = 90$ МПа.

По результатам проведенных экспериментальных исследований построены кривые ползучести — зависимости деформаций ползучести от времени ($e^c_{11}(t)$, $e^c_{12}(t)$) для указанных выше программ нагружения (рис. 5–22).

2. Определяющие соотношения механики поврежденной среды. Модель поврежденной среды, развитая для описания деградации начальных прочностных свойств материала по механизму длительной прочности, состоит из трех взаимосвязанных составных частей:

- соотношений, описывающих вязкопластическое поведение материала с учетом зависимости процесса разрушения;
- эволюционных уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений;
- критерия прочности поврежденного материала.



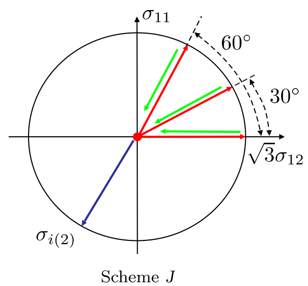


Рис. 1. Программы нагружения лабораторных образцов в пространстве напряжений [Figure 1. Loading schemes for laboratory specimens in stress space]

2.1. Определяющее соотношение термоползучести. Для проведения расчетных оценок процесса ползучести использовалась математическая модель, где предполагается, что закономерности изменения внутренних параметров состояния материала определяются двумя физическими механизмами: упрочнением и разупрочнением материалов. Такой подход имеет аналог в математической теории пластичности (теории течения).

Основные положения используемого варианта соотношений нестационарной ползучести, предложенного Ю. Г. Коротких и развитого в работах его учеников (И. А. Волков, Д. А. Казаков, Д. Н. Шишулин), заключаются в следующем [1, 11, 21, 25].

1. Рассматриваются начально изотропные среды.
2. Тензоры деформаций и скоростей деформаций представляют собой сумму «мгновенной» и «временной» составляющих. «Мгновенная» составляющая состоит из упругой компоненты, не зависящей от истории деформирования и определяющей конечное состояние процесса, и пластической компоненты, зависящей от истории процесса деформирования. Временная составляющая (деформаций ползучести) описывает временную зависимость процессов деформирования при низких скоростях нагружения.

3. В пространстве напряжений существует семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести радиуса C_c и координат общего центра ρ_{ij}^c, векторы скоростей деформаций ползучести к которой направлены по нормали.
4. Изменение объема элемента тела упругое, т.е. $e_{ii}^p = e_{ii}^c = 0$.
5. Рассматриваются процессы деформирования, характеризующиеся малыми деформациями.

Принимается, что компоненты тензора деформаций e_{ij} и их скоростей $\dot{e}_{ij}$ являются суммами упругих составляющих e_{ij}^e, $\dot{e}_{ij}^e$, пластических составляющих e_{ij}^p, $\dot{e}_{ij}^p$ и деформаций ползучести e_{ij}^c, $\dot{e}_{ij}^c$:

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p + e_{ij}^c, \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p + \dot{e}_{ij}^c, \quad i,j = 1,2,3. \tag{1}$$

Связь между тензором напряжений и тензором упругих деформаций на базе уравнений термоупругости определяется зависимостями

$$\sigma = 3K[e - \alpha T], \quad \dot{\sigma} = 3K\big[\dot{e} - \dot{\alpha}T - \alpha\dot{T}\big] + \frac{\dot{K}}{K}\sigma, \tag{2}$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge'^e_{ij}, \quad \dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{e}'^e_{ij} + \frac{\dot{G}}{G}\sigma'_{ij}, \quad e'^e_{ij} = e'_{ij} - e^c_{ij} - e^p_{ij}, \tag{3}$$

где σ, e — шаровые, а σ'_{ij}, e'_{ij} — девиаторные компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} соответственно; $G = G(T)$ — модуль сдвига; $K = K(T)$ — объемный модуль упругости; $\alpha = \alpha(T)$ — коэффициент температурного расширения, T — температура.

Для описания процессов ползучести вводим в пространстве напряжений эквипотенциальные поверхности ползучести F_c, имеющие общий центр ρ_{ij}^c и различные радиусы C_c, определяемые текущим напряженным состоянием

$$F_c^{(i)} = S_{ij}^c S_{ij}^c - C_c^2 = 0, \quad S_{ij}^c = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}^c, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{4}$$

согласно ассоциированному закону

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c \frac{\partial F_c^{(i)}}{\partial S_{ij}^c} = \lambda_c S_{ij}^c, \tag{5}$$

где λ_c соответствует текущей поверхности $F_c^{(i)}$, определяющей текущее напряженное состояние S_{ij}^c.

Среди этих эквипотенциальных поверхностей можно выделить поверхность с радиусом $\bar{C}_c$, соответствующую нулевой скорости ползучести:

$$F_c^{(0)} = \bar{S}_{ij}^c \bar{S}_{ij}^c - \bar{C}_c^2 = 0, \quad \bar{S}_{ij}^c = \bar{\sigma}'_{ij} - \rho_{ij}^c, \tag{6}$$

где $\bar{S}_{ij}^c$ и $\bar{\sigma}'_{ij}$ — совокупность напряженных состояний, отвечающих (с определенным допуском) нулевой скорости ползучести, C_c — экспериментально определяемая функция температуры T и χ_c:

$$\chi_c = \int_0^t \dot{\chi}_c\,dt, \quad \dot{\chi}_c = \left(\frac{2}{3}\dot{e}_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Эволюционное уравнение для изменения координат центра поверхности ползучести имеет вид [1, 11]

$$\dot{\rho}_{ij}^c = g_1^c \dot{e}_{ij}^c - g_2^c \rho_{ij}^c \dot{\chi}_c, \tag{8}$$

где g_1^c и $g_2^c > 0$ — экспериментально определяемые материальные параметры.

Конкретизируя соотношение (5), закон градиентальности можно представить в виде

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c(\psi_c, T) S_{ij}^c = \lambda_c \psi_c S_{ij}^c = \frac{\lambda_c}{C_c}\bigl(\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c\bigr) S_{ij}^c, \tag{9}$$

$$\psi_c = \frac{1}{C_c}\bigl(\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c\bigr). \tag{10}$$

В выражении (9) $\lambda_c = \lambda_c(\sigma_i)$ — экспериментально определяемая функция.

Длина траектории деформаций ползучести примет вид

$$\dot{\chi}_c = \sqrt{2/3}\,\lambda_c\bigl(\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c\bigr). \tag{11}$$

Зависимость χ_c от времени t при $S_i^c = \mathrm{const}$ для многоосного деформирования по лучевой траектории имеет вид, представленный на рис. 2.

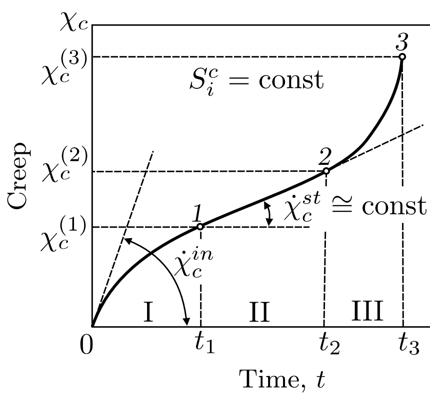


Рис. 2. Обобщенная кривая ползучести

[Figure 2. Typical creep curve]

На кривой $\chi_c(t)$ с определенной долей условности можно выделить три участка:

I — участок неустановившейся ползучести от 0 до $\chi_c^{(1)}$, скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ убывает;

II — участок установившейся ползучести от $\chi_c^{(1)}$ до $\chi_c^{(2)}$, скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ приблизительно постоянна, то есть $\dot{\chi}_c = \dot{\chi}_c^{st} \cong \mathrm{const}$;

III — участок неустановившейся ползучести $\chi_c > \chi_c^{(2)}$, деформации ползучести быстро растут (участок предшествует разрушению), $\dot{\chi}_c$ резко возрастает.

Длины участков существенным образом зависят от величины S_i^c.

В случае многоосного нагружения будем иметь

$$\lambda_c = \begin{cases} 0, & \psi_c \leqslant 0 \ \vee \ \chi_c = 0, \\ \lambda_c^{\mathrm{I}}, & 0 \leqslant \chi_c \leqslant \chi_c^{(1)}, \\ \lambda_c^{\mathrm{II}}, & \chi_c^{(1)} \leqslant \chi_c \leqslant \chi_c^{(2)}, \\ \lambda_c^{\mathrm{III}}, & \chi_c^{(2)} \leqslant \chi_c \leqslant \chi_c^{(3)}. \end{cases} \tag{12}$$

Выражение для λ_c^{I} на первом участке кривой ползучести можно представить в виде

$$\lambda_c^{\mathrm{I}} = \lambda_c^{(0)}\Big(1 - \frac{\chi_c}{\chi_c^{(1)}}\Big) + \lambda_c^{\mathrm{II}} \frac{\chi_c}{\chi_c^{(1)}}, \tag{13}$$

где $\lambda_c^{(0)}$ и λ_c^{II} — значения λ_c в начальной и конечной точках первого участка кривой ползучести материала.

На стадии активного развития и слияния дефектов в объеме материала наблюдается влияние степени повреждения на физико-механические характеристики. В первом приближении этот эффект можно описать, основываясь на концепции деградирующего континуума, путем введения эффективных напряжений [1, 20]:

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = F_1(\omega)\sigma'_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}}\,\sigma'_{ij}, \quad \tilde{\sigma} = F_2(\omega)\sigma = \frac{K}{\tilde{K}}\,\sigma, \tag{14}$$

где эффективные модули упругости определяются формулами Маккензи [20]:

$$\tilde{G} = G\Big(1 - \frac{6K + 12G}{9K + 8G}\,\omega\Big)(1-\omega), \quad \tilde{K} = \frac{4GK}{4G + 3K\omega}(1-\omega). \tag{15}$$

Аналогичным образом определяется эффективный тензор микронапряжений $\tilde{\rho}^c_{ij}$:

$$\tilde{\rho}^c_{ij} = F_1(\omega)\rho^c_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}}\,\rho^c_{ij}. \tag{16}$$

2.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений. Постулируем, что эволюционное уравнение накопления повреждений при ползучести можно представить в виде [1, 21]

$$\dot{\omega} = f_1(\beta) f_2(\omega) f_3\big(W_c\big) f_4\big(\dot{W}_c\big), \tag{17}$$

где $f_1(\beta)$ — функция влияния объемности НДС; $f_2(\omega)$ — функция влияния уровня накопленной поврежденности; $f_3(W_c)$ — функция, учитывающая уровень накопленной относительной энергии, идущей на образование микродефектов; $f_4(\dot{W}_c)$ — функция скорости изменения энергии, идущей на образование микродефектов. Предлагается следующая конкретизация введенных функций:

$$
\begin{aligned}
&f_1(\beta) = \exp(k\beta),\\
&f_2(\omega) = \begin{cases} 0, & W_c \leqslant W_c^a,\\ \omega^{1/3}(1-\omega)^{2/3}, & W_c > W_c^a \wedge \omega \leqslant 1/3,\\ (\sqrt[3]{16}/9)\omega^{-1/3}(1-\omega)^{-2/3}, & W_c > W_c^a \wedge \omega > 1/3, \end{cases}\\
&f_3(W_c) = \frac{W_c - W_c^a}{W_c - W_c^f}, \qquad f_4(\dot W_c) = \frac{\dot W_c}{W_c - W_c^f},\\
&\dot W_c = \rho_{ij}^c \dot e_{ij}^c, \qquad W_c = \int_0^t \dot W_c\, dt,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $\beta = \sigma/\sigma_i$ — параметр объемности НДС; W_c^a — значение энергии в конце стадии зарождения микродефектов в объеме материала; W_c^f — значение энергии при образовании макроскопической трещины; W_c^a, k — параметры материала. Эволюционное уравнение накопления повреждений (17) включает в себя двухстадийность кинетики накопления рассеянных по объему повреждений: первая стадия — зарождение и рост микродефектов, вторая стадия — слияние и дальнейший рост микродефектов со значительным влиянием поврежденности на физико-механические свойств материала.

2.3. Критерий прочности поврежденного материала. Критерием окончания фазы развития рассеянных микродефектов (началом стадии образования макротрещины) считается условие достижения поврежденностью критического значения:

$$\omega = \omega_f = 1. \tag{19}$$

3. Определение материальных параметров соотношений термоползучести. Для практического применения уравнений термоползучести (1)–(9) необходимо иметь следующие зависимости от температуры T:

– зависимости $G = G(T)$, $K = K(T)$, $\alpha = \alpha(T)$;
– зависимость текущего радиуса поверхности ползучести нулевого уровня (нулевой скорости ползучести) $\bar C_c = \bar C_c(\chi_c, T)$;
– зависимости параметров $\lambda_c^{(0)} = \lambda_c^{(0)}(T)$, $\lambda_c^{\mathrm{II}} = \lambda_c^{\mathrm{II}}(T)$ для различных участков кривой ползучести;
– зависимости модулей кинематического упрочнения $g_1^c = g_1^c(T)$, $g_2^c = g_2^c(T)$.

Материальные параметры уравнений термоползучести определяются из базовых экспериментов [1,11,21]. В качестве основных базовых экспериментов принимаются эксперименты на одноосное растяжение–сжатие цилиндрических лабораторных образцов. Основные типы базовых экспериментов — изотермические эксперименты при постоянных базовых температурах T_j ($j = 1, 2, \ldots$). Типы образцов — цилиндрический сплошной и цилиндрический трубчатый. Выбранные типы образцов обеспечивают однородное распределение полей напряжений деформаций и температур в пределах рабочей части, что исключает возможность потери устойчивости и формоизменения образца при знакопеременном нагружении, а также максимально исключает влияние концентраторов на НДС при переходе от рабочей части образца к утолщенным местам [11].

Для определения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения g_1^c и g_2^c и зависимости для радиуса поверхности ползучести, соответствующего нулевой скорости ползучести, образец нагревается до значения температуры базового эксперимента $T_j = \mathrm{const}$ и проводятся испытания на кратковременную ползучесть при одноосном растяжении по схеме «мягкого» нагружения.

Сначала образец нагружается до величины напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$ в точке *1* (рис. 3). Этот уровень напряжений выбирается из анализа имеющегося веера кривых ползучести, полученных при базовой температуре T_j (кривая ползучести, соответствующая нулевой скорости ползучести). В результате релаксации процесс заканчивается в точке *2* (напряжение $\sigma_{11}^{(2)}$), где скорость деформации ползучести стремится к нулю.

Далее образец нагружается до напряжения обратного знака $\sigma_{11}^{(3)}$ (точка *3* на рис. 3) и в результате процесса релаксации оказывается в точке *4*. Таким образом, напряжения $\bar{\sigma}_{11}^{(0)+}$ (точка *2*) и $\bar{\sigma}_{11}^{(0)-}$ (точка *4*) характеризуют (с определенным допуском на остаточную деформацию) начальные верхнюю и нижнюю границы поверхности ползучести, соответствующие нулевой скорости ползучести.

Для определения трансформации поверхности ползучести на том же самом образце при заданном напряжении $\sigma_{11}^* = \mathrm{const}$ проводится ряд аналогичных действий после достижения назначенных уровней деформаций ползучести $e_{11}^{c(1)}$, $e_{11}^{c(2)}$, ..., $e_{11}^{c(m)}$. Полученный таким образом набор точек *2*, *7*, *12*, *17* и т.д. характеризует изменение верхней (при растяжении) границы поверхности ползучести в зависимости от накопленной деформации ползучести. Точки *4*, *8*, *13*, *19* и т.д. характеризуют изменение нижней (при сжатии) границы поверхности ползучести.

Таким образом, по результатам эксперимента при базовых постоянных температурах T_j определяются:

– геометрическое место пределов ползучести при растяжении с заданным допуском на остаточную деформацию;
– геометрическое место обратных пределов ползучести при сжатии (рис. 4).

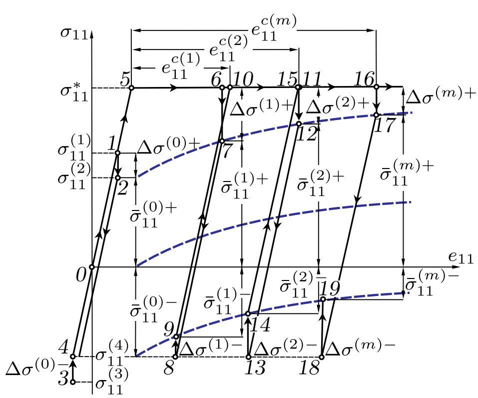


Рис. 3. Базовый эксперимент по схеме мягкого нагружения

[Figure 3. Soft loading experiment]

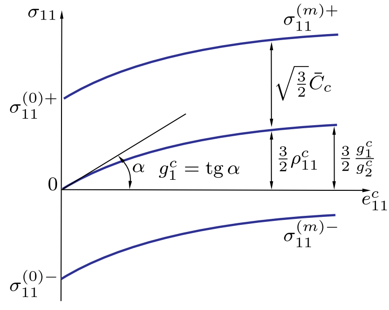


Рис. 4. Геометрическое место пределов ползучести при растяжении и сжатии

[Figure 4. The geometric value of the tensile and compressive creep limits]

Зависимость радиуса поверхности ползучести, соответствующей нулевой скорости деформации ползучести, определяется формулой

$$\bar{C}_c = \sqrt{1/6}(\sigma_{11}^{(m)+} + \sigma_{11}^{(m)-}).$$

Для определения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения $g_1^c(T)$ и $g_2^c(T)$ необходимо проинтегрировать соотношение (8) при температуре $T_j = \text{const}$:

$$\rho_{11}^c = \frac{g_1^c}{g_2^c}\big(1 - \exp(-g_2^c e_{11}^c)\big), \tag{20}$$

где g_1^c — тангенс угла наклона касательной к кривой $\rho_{11}^c \tilde{e}_{11}^c$ в начале координат (рис. 4), $\rho_{\max}^c = g_1^c/g_2^c$ — предельное асимптотическое значение ρ_{11}^c при данной температуре T_j. Отсюда определяются модули g_1^c и g_2^c анизотропного (кинематического) упрочнения.

При одноосном напряженном состоянии лабораторного образца соотношения (1)–(18) принимают вид

$$\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(\sigma'_{11} - \frac{3}{2}\rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c\Big); \tag{21}$$
$$\dot{e}_{11}^c = \frac{2}{3}\lambda_c\Big(\sigma'_{11} - \frac{3}{2}\rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c\Big),$$

где $\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_c(e_{11}^c, T)$ — предел ползучести материала, соответствующий нулевой скорости ползучести;

$$\dot{\chi}_c = \dot{e}_{11}^c, \quad \chi_c = \dot{e}_{11}^c;$$
$$\bar{C}_c = \sqrt{2/3}\bar{\sigma}_c.$$

Параметры $\lambda_c^{(0)}$ и λ_c^{II} определяются из соотношений (20) и (21) соответственно:

$$\lambda_c^{(0)} = \frac{3}{2}\frac{\dot{e}_{11}^{c\,in}}{\sigma'_{11} - \bar{\sigma}_c}, \quad \lambda_c^{\mathrm{II}} = \frac{3}{2}\frac{\dot{e}_{11}^{c\,st}}{\sigma'_{11} - (3/2)\rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c},$$

где $\dot{e}_{11}^{c\,in}$ — начальная скорость деформации ползучести в точке $e_{11}^c = 0$ на кривой $e_{11}^c(t)$, $\dot{e}_{11}^{c\,st}$ — скорость деформации ползучести на участке установившейся ползучести (участок II на рис. 2).

Экспериментальное определение материальных параметров эволюционных уравнений накопления повреждений проводится на второй стадии процесса накопления повреждений, с которой начинается значимое влияние поврежденности на физико-механические характеристики материала, при одновременном расчете экспериментальных процессов деформирования на этой стадии с использованием определяющих соотношений МПС. Метод заключается в том, что все отклонения результатов численного моделирования процессов деформирования без учета влияния поврежденности от экспериментальных на второй стадии процесса накопления повреждений приписываются влиянию поврежденности ω (уменьшение модуля упругости, падение амплитуды напряжений при постоянной амплитуде деформаций, увеличение амплитуды деформаций при постоянной амплитуде напряжений и т.п.).

Приближенно границы W_c^a и W_c^f могут быть определены из испытаний на ползучесть при заданной амплитуде напряжений по моменту начала разупрочнения материала (W_c^a определяются по началу второго участка кривой ползучести, а W_c^f — по моменту образования макроскопической трещины).

В табл. 1, 2 и 3 приведены материальные параметры титанового сплава ВТ6 в зависимости от уровня наводораживания при температуре 600 °C.

Таблица 1

Материальные параметры математической модели ползучести [Material parameters of the mathematical creep model]

Материальные параметры модели [Material model parameters]	исходное состояние сплава [initial state of alloy]	уровень наводораживания [hydrogen saturation level], %	
		0.15	0.3
Модуль объемной упругости K, МПа [Module of volumetric elasticity K, MPa]	62 855		
Модуль сдвига G, МПа [Shear modulus G, MPa]	29 010		
Длина участка неустановившейся ползучести $\chi_c^{(1)}$ [Length of the unsteady creep area $\chi_c^{(1)}$]	0.005		0.003
Модуль кинематического упрочнения g_1^c, МПа [Kinematic hardening module g_1^c, MPa]	3 500		
Модуль кинематического упрочнения g_2^c [Kinematic hardening module g_2^c]	157.7	330.0	340.0
Энергия окончания первой стадии накопления повреждений W_c^a, МДж/м^3 [Energy of the first level of damage accumulation W_c^a, MJ/m^3]	4.00	3.00	0
Энергия разрушения при ползучести W_c^f, МДж/м^3 [Energy of damage during creep W_c^f, MJ/m^3]	19.0	10.0	8.50
Начальный радиус поверхности ползучести нулевого уровня C_c, МПа [Initial radius of the zero-level creep surface C_c, MPa]	15.0	14.0	12.0

Таблица 2

Зависимость радиуса C_c (МПа) поверхности ползучести нулевого уровня от длины пути χ_c пластического деформирования [Dependence of the radius of the zero-level creep surface (C_c, MPa) on the length of the plastic deformation path (χ_c)]

		Длина пути χ_c пластического деформирования Length of the plastic deformation path (χ_c)									
		0	0.03	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.20
исходное состояние сплава [initial state of alloy]		15.0		14.9	14.7	14.3	13.0	8.50	3.75	2.00	
уровень наводораживания [hydrogen saturation level], %	0.15	14.0	13.95	13.9	13.7	13.3	12	7.50	2.75		
	0.3	12.0	11.0	8.00	5.50	3.60	2.00	1.45	1.20	1.00	

Таблица 3

Зависимость коэффициентов пропорциональности λ_c^0 и λ_c^{II} (1/МПа·ч) от интенсивности напряжения σ_i (МПа) [Dependence of the proportionality coefficients λ_c^0 and λ_c^{II} (1/MPa·h) on the stress intensity σ_i (MPa)]

		Интенсивности напряжения σ_i (МПа) [Stress intensity σ_i (MPa)]					
		0	20	40	50	70	80
Коэффициент λ_c^0 (1/МПа·ч) [Coefficient λ_c^0 (1/MPa·h)]							
исходное состояние сплава [initial state of alloy]		0.00100					
уровень наводораживания [hydrogen saturation level], %	0.15	0.00075					
	0.3	0.00040			0.00075	0.00120	0.00170
Коэффициент λ_c^{II} (1/МПа·ч) [Coefficient λ_c^{II} (1/MPa·h)]							
исходное состояние сплава [initial state of alloy]		0.00041					
уровень наводораживания [hydrogen saturation level], %	0.15						
	0.3	0.00015			0.00024	0.00045	0.00065

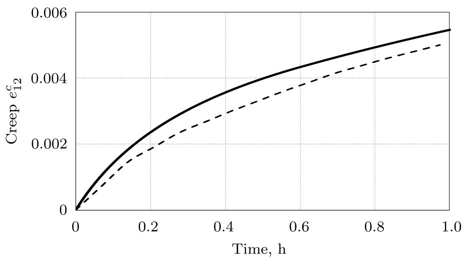


Рис. 5. Кривые ползучести при кручении (схема нагружения A, исходное состояние)

[Figure 5. Torsional creep curves (loading scheme A, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

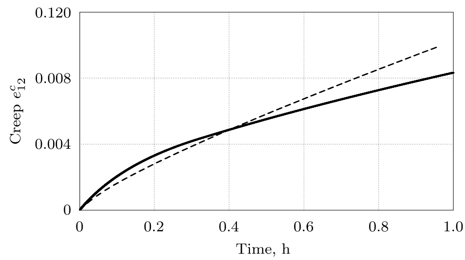


Рис. 6. Кривые ползучести при кручении (схема нагружения B, исходное состояние)

[Figure 6. Torsional creep curves (loading scheme B, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

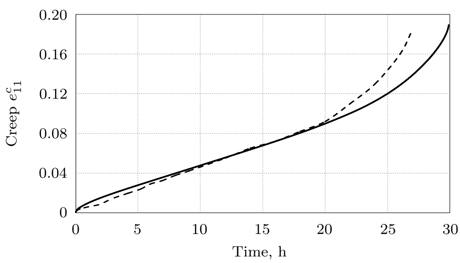


Рис. 7. Кривые ползучести при растяжении (схема нагружения C, исходное состояние)

[Figure 7. Tensile creep curves (loading scheme C, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

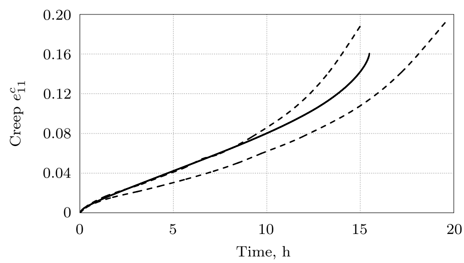


Рис. 8. Кривые ползучести при растяжении (схема нагружения D, исходное состояние)

[Figure 8. Tensile creep curves (loading scheme D, initial state; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

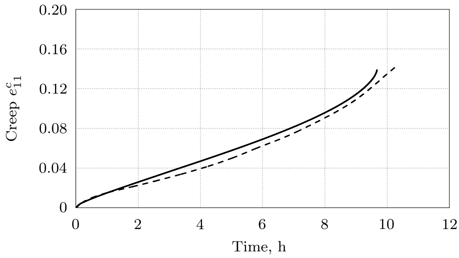


Рис. 9. Кривые ползучести при растяжении (схема нагружения E, исходное состояние)

[Figure 9. Tensile creep curves (loading scheme E, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

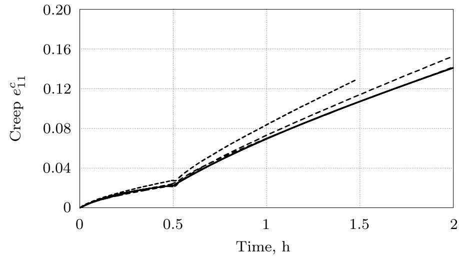


Рис. 10. Зависимость осевой деформации e^c_{11} от времени (схема нагружения F, исходное состояние)

[Figure 10. Dependence of axial deformation e^c_{11} on the time (loading scheme F, initial state; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

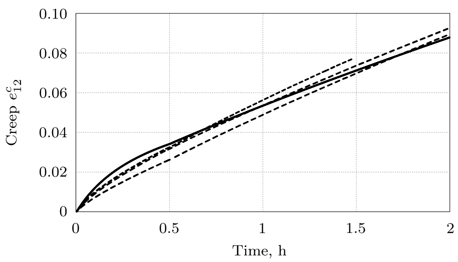


Рис. 11. Зависимость осевой деформации e^c_{12} от времени (схема нагружения F, исходное состояние)

[Figure 11. Dependence of axial deformation e^c_{12} on the time (loading scheme F, initial state; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

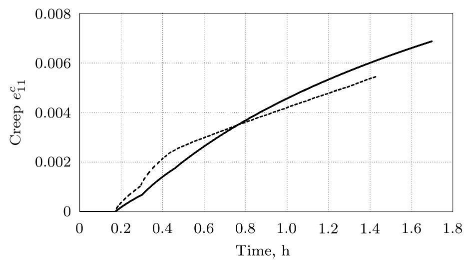


Рис. 12. Зависимость сдвиговой деформации e^c_{11} от времени (схема нагружения J, исходное состояние)

[Figure 12. Dependence of the shear deformation e^c_{11} on the time (loading scheme J, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

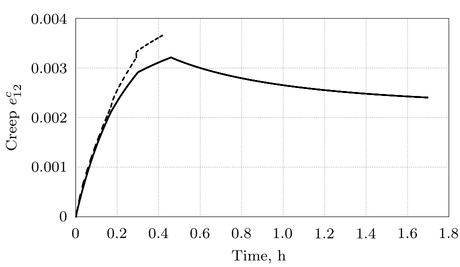


Рис. 13. Зависимость сдвиговой деформации e^c_{12} от времени (схема нагружения J, исходное состояние)

[Figure 13. Dependence of the shear deformation e^c_{12} on the time (loading scheme J, initial state; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

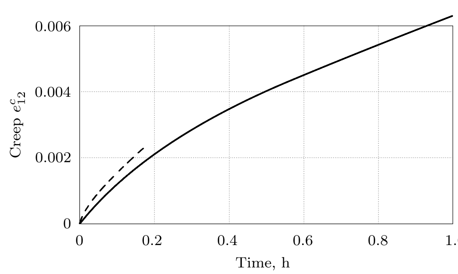


Рис. 14. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения A, уровень наводораживания — 0.15 %)

[Figure 14. Torsional creep curve (loading scheme A, hydrogen saturation level — 0.15 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

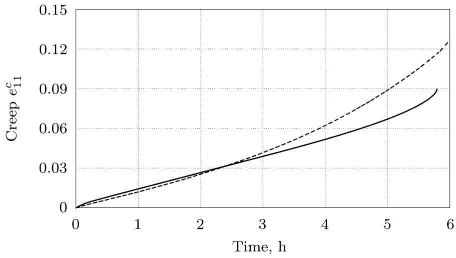


Рис. 15. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения D, уровень наводораживания — 0.15 %)

[Figure 15. Torsional creep curve (loading scheme D, hydrogen saturation level — 0.15 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

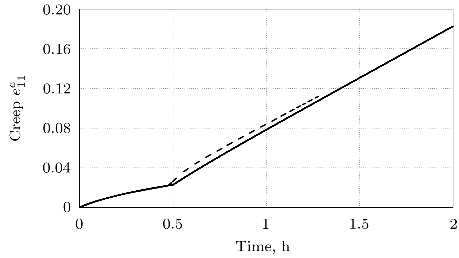


Рис. 16. Зависимость осевой деформации e_{11}^c от времени (схема нагружения F, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 16. Dependence of axial deformation e_{11}^c on the time (loading scheme F, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

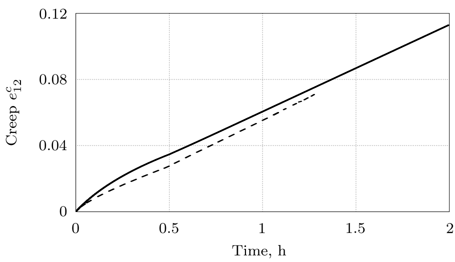


Рис. 17. Зависимость осевой деформации e_{11}^c от времени (схема нагружения F, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 17. Dependence of axial deformation e_{11}^c on the time (loading scheme F, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

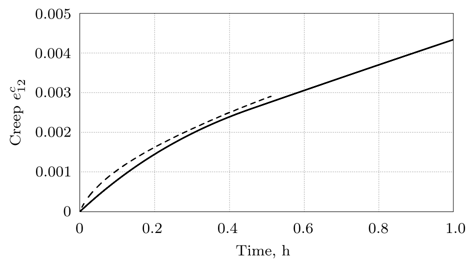


Рис. 18. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения A, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 18. Torsional creep curve (loading scheme A, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

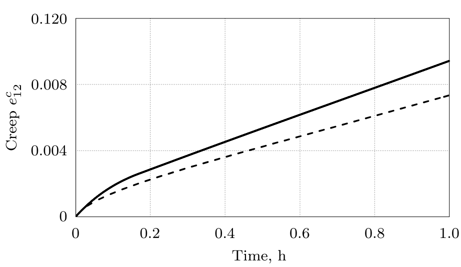


Рис. 19. Кривая ползучести при кручении (схема нагружения B, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 19. Torsional creep curve (loading scheme B, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

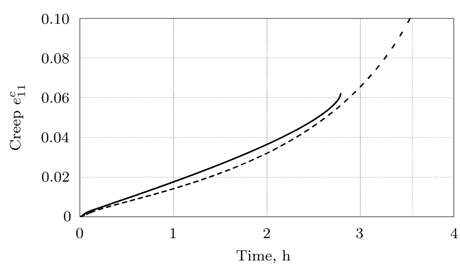


Рис. 20. Кривая ползучести при растяжении (схема нагружения D, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 20. Tensile creep curve (loading scheme D, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed line — experimental data)]

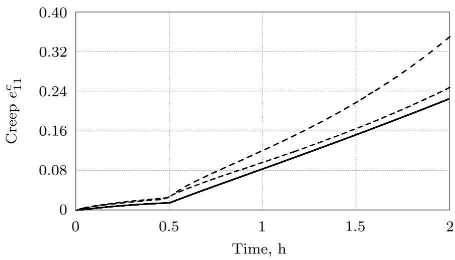


Рис. 21. Зависимость осевой деформации e^c_{11} от времени (схема нагружения F, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 21. Dependence of axial deformation e^c_{11} on the time (loading scheme F, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

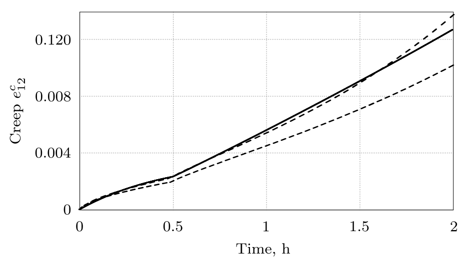


Рис. 22. Зависимость осевой деформации e^c_{12} от времени (схема нагружения F, уровень наводораживания — 0.3 %)

[Figure 22. Dependence of axial deformation e^c_{12} on the time (loading scheme F, hydrogen saturation level — 0.3 %; solid line — calculation; dashed lines — experimental data)]

4. Численные результаты и сравнение с опытными данными. На рис. 5–22 представлены результаты расчетов процесса ползучести при растяжении и кручении по программе испытаний, приведенной на рис. 1. Здесь сплошными линиями приведены результаты численного моделирования экспериментальных процессов с использованием определяющих соотношений МПС (1)–(19), а пунктирными — соответствующие экспериментальные данные.

Сравнивая экспериментальные данные с результатами численного моделирования экспериментальных процессов, можно отметить качественное и количественное совпадение результатов. Некоторые отличия расчетных данных от экспериментальных могут быть объяснены неточностью при задании материальных параметров и скалярных функций.

Заключение. Развита математическая модель МПС, описывающая процессы высокотемпературной нестационарной ползучести и длительной прочности конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при многоосных напряженных состояниях и произвольных сложных режимах комбинированного термомеханического нагружения.

Разработана экспериментально-теоретическая методика определения материальных параметров и скалярных функций предложенных определяющих соотношений МПС. Получены материальные параметры и скалярные функции математической модели МПС для титанового сплава ВТ6 при температуре 600 °C в исходном состоянии и при уровнях наводораживания 0.15 и 0.3 %.

Проведены численные исследования процессов высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 при одноосных и многоосных напряженных состояниях. Численные результаты сопоставлялись с экспериментальными данными, что позволило сделать выводы о достаточной для инженерных расчетов точности описания процессов нестационарной ползучести и длительной прочности конструкционных сплавов при одноосных и многоосных напряженных состояниях с учетом влияния агрессивной среды.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Л.А. Игумнов — визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. И.А. Волков — формулировка целей и задач исследования, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.А. Казаков — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Д.Н. Шишулин — проведение численных расчетов, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. И.А. Модин — проведение численных расчетов и экспериментальных исследований, обработка и анализ результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Самарский государственный технический университет).

Библиографический список

1. Волков И. А., Коротких Ю. Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями.* М.: Физматлит, 2008. 424 с.
2. Collins J. A. *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention.* New York: John Wiley and Sons, 1981.
3. Дульнев Р. А., Котов П. И. *Термическая усталость металлов.* М.: Машиностроение, 1980. 200 с.
4. Казанцев А. Г. Исследование взаимодействия малоцикловой усталости и использования при неизотермическом нагружении // *Проблемы прочности*, 1985. №5. С. 25–31.
5. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* Наука, 1966. 752 с.
6. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. *Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях.* М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
7. Дегтярев В. П. *Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций.* М.: Машиностроение, 1967. 130 с.
8. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести.* М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
9. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 504 с.
10. Boyle J. T., Spence J. *Stress Analysis for Creep.* London: Butterworth, 1980. viii+283 pp. `https://doi.org/10.1016/C2013-0-00873-0`.
11. Волков И. А., Игумнов Л. А., Коротких Ю. Г. *Прикладная теория вязкопластичности.* Н. Новгород: Нижегородск. гос. ун-т, 2015. 318 с.
12. Бондарь В. С. *Неупругость. Варианты теории.* М.: Физматлит, 2004. 144 с.
13. Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity // *Advances in Applied Mechanics*, 1966. vol. 9. pp. 243–377. `https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70009-7`.
14. Шевченко Ю. Н., Терехов Р. Г. *Физические уравнения термовязкопластичности.* Киев: Наук. думка, 1982. 240 с.
15. Chaboche J. L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // *Int. J. Plasticity*, 1989. vol. 5, no. 3. pp. 247–302. `https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90015-6`.
16. Malinin N. N., Khadjinsky G. M. Theory of creep with anisotropic hardening // *Int. J. Mech. Sci.*, 1972. vol. 14, no. 4. pp. 235–246. `https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90065-3`.
17. Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part I—Equations development and analytical procedures // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1976. vol. 98, no. 2. pp. 97–105. `https://doi.org/10.1115/1.3443367`.

18. Krieg R. D., Swearengen J. C., Jones W. B. A physically-based internal variable model for rate-dependent plasticity / *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*. Dordrecht: Springer, 1978. pp. 245–271. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3439-9_5.
19. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading // *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982. vol. 104, no. 3. pp. 155–164. https://doi.org/10.1115/1.3225059.
20. Волков И. А., Игумнов Л. А. *Введение в континуальную механику поврежденной среды*. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
21. Волков И. А., Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Миронов А. А., Тарасов И. С., Шишулин Д. Н., Сметанин И. В. Модель поврежденной среды для описания длительной прочности конструкционных материалов (металлов и их сплавов) // *Проблемы прочности и пластичности*, 2017. Т. 79, № 3. С. 285–300. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300.
22. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: Куйб. гос. ун-т, 1979. 84 с.
23. Радченко В. П., Самарин Ю. П, Хренов С. М. Определяющие уравнения для материалов при наличии трех стадий ползучести // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 288, № 3. С. 571–574.
24. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 263 с.
25. Казаков Д. А., Капустин С. А., Коротких Ю. Г. *Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций*. Н. Новгород: Нижегородск. гос. ун-т, 1994. 226 с.
26. Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А., Жегалов Д. В. Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 286–302. https://doi.org/10.14498/vsgtu1850.
27. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1214, 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004.
28. Igumnov L. A., Vlasov S. Y., Kazakov D. A., Zhegalov D. V., Modin I. A. Experimental studies of elastic-plastic deformation of structural materials under conditions of triaxial loading / *Multiscale Solid Mechanics* / Advanced Structured Materials, 141. Cham: Springer, 2021. pp. 203–212. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_16.
29. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А., Савихин А. О. Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток // *Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2018. № 52. С. 53–62. https://doi.org/10.17223/19988621/52/6.
30. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer // *AIP Conference Proceedings*, 2019. vol. 2116, no. 1, 270003. https://doi.org/10.1063/1.5114277.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 435–456
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1873

MSC: 74-05, 74C99

Numerical simulation of the creep process of titanium alloy VT6 under a multi-axis stress state taking into account the influence of an aggressive environment

© *L. A. Igumnov*[1,2], *I. A. Volkov*[2,3], *D. A. Kazakov*[1,2], *D. N. Shishulin*[1,2], *I. A. Modin*[1,2]

[1] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
[2] Research Institute of Mechanics,
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23, korp. 6, pr. Gagarina, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation.
[3] Volga State University of Water Transport,
5, Nesterova str., Nizhny Novgorod, 603600, Russian Federation.

Abstract

The problem of assessing the strength and resource of critical engineering objects is considered. The operating conditions of objects are characterized by high-temperature non-stationary thermomechanical effects, which lead to degradation of the initial strength properties of structural materials by the mechanism of long-term strength.

From the standpoint of the mechanics of a damaged medium, a mathematical model has been developed that describes the kinetics of the stress-strain state and the accumulation of damage during material degradation by the mechanism of long-term strength under conditions of a complex multiaxial stress state.

An experimental-theoretical method for finding the material parameters and scalar functions of the constitutive relations of the mechanics of a damaged medium based on the results of specially set experiments on laboratory samples is proposed.

The results of experimental studies and numerical modeling of the short-term high-temperature creep of VT6 titanium alloy under uniaxial and multiaxial stress states are presented. The numerical results are compared with the data of field experiments. Particular attention is paid to the issues of modeling the process of unsteady creep for complex deformation modes, accompanied by the rotation of the main areas of stress tensors, deformations and creep deformations, taking into account the effect of an aggressive environment, which is simulated by preliminary hydrogenation of laboratory samples to various hydrogen concentrations by mass.

Research Article

Please cite this article in press as:
Igumnov L. A., Volkov I. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A. Numerical simulation of the creep process of titanium alloy VT6 under a multi-axis stress state taking into account the influence of an aggressive environment, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 435–456. https://doi.org/10.14498/vsgtu1873 (In Russian).

Authors' Details:

Leonid A. Igumnov https://orcid.org/0000-0003-3035-0119
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Chief Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes[2]; e-mail: igumnov@mech.unn.ru

It is shown that the developed version of the constitutive relations of the mechanics of a damaged medium allows, with sufficient accuracy for engineering calculations, to describe unsteady creep and long-term strength of structural alloys under multiaxial stress states, taking into account the effect of an aggressive medium (hydrogen corrosion).

Keywords: unsteady creep, long-term strength, damage, resource, mathematical modeling, basic experiment, material parameters, numerical and full-scale experiment, aggressive environment, hydrogen saturation.

Received: 27th June, 2021 / Revised: 9th September, 2021 /
Accepted: 20th September, 2021 / First online: 30th September, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. L.A. Igumnov: Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. I.A. Volkov: Formulation of research goals and aims; Writing — original draft and review & editing. D.A. Kazakov: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. D.N. Shishulin: Numerical calculations; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. I.A. Modin: Numerical calculations; Experimental research; Processing and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Samara State Technical University).

References

1. Volkov I. A., Korotkikh Yu. G. *Uravneniia sostoianiia viazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniiami* [Equations of State of Damaged Viscoelastoplastic Media]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 424 pp. (In Russian)
2. Collins J. A. *Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention.* New York, John Wiley and Sons, 1981.

Ivan A. Volkov https://orcid.org/0000-0003-1176-4906
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials[2]; Head of Dept.; Dept of Hoisting-and-transport Machines and Machine Repair[3]; e-mail: pmptmvgavt@yandex.ru

Dmitriy A. Kazakov https://orcid.org/0000-0002-9316-4105
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials[2]; e-mail: kazakov@mech.unn.ru

Denis N. Shishulin https://orcid.org/0000-0002-6527-557X
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Researcher; Lab. of Physical and Mechanical Testing of Materials[2]; e-mail: shishulindn@gmail.com

Ivan A. Modin https://orcid.org/0000-0002-3561-4606
Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science[1]; Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes[2]; e-mail: mianet@mail.ru

3. Dul'nev R. A., Kotov P. I. *Termicheskaia ustalost' metallov* [Thermal Fatigue of Metals]. Moscow, Mashinostroenie, 1980, 200 pp. (In Russian)
4. Kazantsev A. G. Interaction of low-cycle fatigue and creep in nonisothermal loading, *Strength Mater.*, 1985, vol. 17, no. 5, pp. 610–617. https://doi.org/10.1007/BF01524181.
5. Rabotnov Yu. N. *Creep of Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1969, ix+822 pp.
6. Gokhfeld D. A., Sadakov O. S. *Plastichnost' i polzuchest' elementov konstruktsii pri povtornykh nagruzheniiakh* [Plasticity and Creep of Structural Elements under Repeated Loading]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 256 pp. (In Russian)
7. Degtyarev V. P. *Plastichnost' i polzuchest' mashinostroitel'nykh konstruktsii* [Plasticity and Creep of Mechanical-Engineering Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1967, 130 pp. (In Russian)
8. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [The Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 400 pp. (In Russian)
9. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp. https://doi.org/10.1201/b22242.
10. Boyle J. T., Spence J. *Stress Analysis for Creep*. London, Butterworth, 1980, viii+283 pp. https://doi.org/10.1016/C2013-0-00873-0.
11. Volkov I. A., Igumnov L. A., Korotkikh Yu. G. *Prikladnaia teoriia viazkoplastichnosti* [Applied Theory of Viscoplasticity]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 2015, 318 pp. (In Russian)
12. Bondar' V. S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Theory Variants]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 144 pp. (In Russian)
13. Perzyna P. Fundamental problems in viscoplasticity, *Advances in Applied Mechanics*, 1966, vol. 9, pp. 243–377. https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70009-7.
14. Shevchenko Iu. N., Terekhov R. G. *Fizicheskie uravneniia termoviazkoplastichnosti* [Physical Equations of Thermoviscoplasticity]. Kiev, Nauk. dumka, 1982, 240 pp. (In Russian)
15. Chaboche J. L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, *Int. J. Plasticity*, 1989, vol. 5, no. 3, pp. 247–302. https://doi.org/10.1016/0749-6419(89)90015-6.
16. Malinin N. N., Khadjinsky G. M. Theory of creep with anisotropic hardening, *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, vol. 14, no. 4, pp. 235–246. https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90065-3.
17. Miller A. An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic, and creep deformation: Part I—Equations development and analytical procedures, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1976, vol. 98, no. 2, pp. 97–105. https://doi.org/10.1115/1.3443367.
18. Krieg R. D., Swearengen J. C., Jones W. B. A physically-based internal variable model for rate-dependent plasticity, In: *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*. Dordrecht, Springer, 1978, pp. 245–271. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3439-9_5.
19. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading, *J. Eng. Mater. Technol.*, 1982, vol. 104, no. 3, pp. 155–164. https://doi.org/10.1115/1.3225059.
20. Volkov I. A., Igumnov L. A. *Vvedenie v kontinual'nuiu mekhaniku povrezhdennoi sredy* [Introduction to the Continuum Mechanics of a Damaged Medium]. Moscow, Fizmatlit, 2017, 304 pp. (In Russian)
21. Volkov I. A., Igumnov L. A., Kazakov D. A., Mironov A. A., Tarasov I. S., Shishulin D. N., Smetanin I. V. A damaged medium model for describing the processof long-term strength of structural materials (metals and their alloys), *Problems of Strength and Plasticity*, 2017, vol. 79, no. 3, pp. 285–300 (In Russian). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-285-300.
22. Samarin Yu. P. *Uravneniya sostoyaniya materialov so slozhnymi reologicheskimi svoystvami* [Equations of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)

23. Radchenko V. P., Samarin Yu. P., Khrenov S. M. Determining equations for the materials in the presence of three stages of creep, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 288, no. 3, pp. 571–574 (In Russian).
24. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Destruction of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 263 pp. (In Russian)
25. Kazakov D. A., Kapustin S. A., Korotkikh Yu. G. *Modelirovanie protsessov deformirovaniia i razrusheniia materialov i konstruktsii* [Modeling the Processes of Deformation and Destruction of Materials and Structures]. Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod State Univ., 1994, 226 pp. (In Russian)
26. Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A., Zhegalov D. V. Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 286–302 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1850`.
27. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1214, 012004. `https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004`.
28. Igumnov L. A., Vlasov S. Y., Kazakov D. A., Zhegalov D. V., Modin I. A. Experimental studies of elastic-plastic deformation of structural materials under conditions of triaxial loading, In: *Multiscale Solid Mechanics*, Advanced Structured Materials, 141. Cham, Springer, 2021, pp. 203–212. `https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_16`.
29. Kochetkov A. V., Leont'ev N. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids, *Vestn. Tomsk. Gosud. Univ. Matem. Mekh.* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2018, no. 52, pp. 53–62 (In Russian). `https://doi.org/10.17223/19988621/52/6`.
30. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer, *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2116, no. 1, 270003. `https://doi.org/10.1063/1.5114277`.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1870

УДК 539.3

Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах

© *Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Обсуждаются определяющие псевдоскаляры, связанные с теорией гемитропного микрополярного континуума. Приводятся основные понятия алгебры псевдотензоров. Определяется псевдотензорная форма гемитропного микрополярного упругого потенциала, основанная на 9 определяющих псевдоскалярах (из них 3 псевдоскаляра и 6 абсолютных скаляров). Вычисляются веса определяющих псевдоскаляров. С помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра веса $+1$ формулируются правила преобразования определяющих псевдоскаляров. Выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного упругого континуума. Обсуждаются уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров в право- и левоориентированных декартовых системах координат. Показано наличие инверсных мод наряду с прямыми при распространении волн по гемитропному микрополярному континууму.

Ключевые слова: микрополярный гемитропный континуум, микроповорот, псевдоскаляр, относительный тензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, определяющее уравнение, инверсия пространства, поляризация.

Получение: 23 июня 2021 г. / Исправление: 29 июля 2021 г. /
Принятие: 25 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 27 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. https://doi.org/10.14498/vsgtu1870.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин https://orcid.org/0000-0002-3267-4742
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@google.com

Юрий Николаевич Радаев https://orcid.org/0000-0002-0866-2151
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Введение. Современные конструкционные и метаматериалы обладают такими физико-механическими свойствами, о существовании которых нельзя было даже подозревать еще несколько десятилетий назад: отрицательный коэффициент Пуассона (ауксетические материалы), отрицательное тепловое расширение, отрицательная электрическая и магнитная проницаемость. Метаматериал демонстрирует характеристики отклика, которые либо не наблюдаются, либо усиливаются по сравнению с индивидуальными откликами составляющих его материалов. Сотовые конструкции являются системами из хорошо известных конструкционных элементов, в целом могут проявлять нестандартное поведение в ответ на механические воздействия. Биологические ткани животного происхождения (мышечная ткань, длинные (трубчатые) кости, стенки кровеносных сосудов) проявляют ярко выраженные гемитропные свойства, что подтверждается многочисленными исследованиями [1–3]. Поэтому при математическом моделировании процессов деформирования и роста таких материалов необходимо понимать, что классические модели механики сплошных сред будут накладывать чрезмерные ограничения. При построении таких моделей важно соблюдать геометрическую и термодинамическую непротиворечивость. Механические свойства материалов, проявляющих гемитропные свойства, зависят от зеркальных отражений микроструктурного состояния микрополярного упругого тела. Последовательное применение принципа виртуальных перемещений и алгебры псевдотензоров [4–10] в механике микрополярного континуума приводит к физически и геометрически корректным формулировкам определяющих уравнений.

Отметим, что построение определяющего упругого потенциала для гемитропного континуума возможно исключительно при использовании псевдотензорных формулировок, только после этого возможен корректный переход к абсолютным тензорам и вывод всех основных уравнений механики гемитропных тел. Еще одним существенным аспектом оперирования с уравнениями гемитропного тела является необходимость постоянно согласовывать баланс весов, особенно при использовании символов перестановок, которые можно трактовать одновременно как псевдотензоры весов $+1$ и -1. Для этих же символов (как хорошо известно [9]) нарушается стандартное правило жонглирования индексами.

Многочисленные руководства по тензорному исчислению чаще всего обходят стороной вопросы, связанные с алгеброй псевдотензоров [11]. Ранее в работах авторов [12–14] обсуждались вопросы применения алгебры псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. В настоящей работе обсуждаются вопросы задания определяющих псевдоскаляров теории гемитропного континуума. Приводятся правила преобразования определяющих псевдоскаляров при изменении системы координат. Выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного упругого континуума. Обсуждаются уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров для прямых и зеркальных мод. С целью компактности изложения используемые термины и обозначения сведены в табл. 1–3.

1. Основные сведения из алгебры псевдотензоров. Рассмотрим в n-мерном пространстве две системы координат x^k и $\overline{x}^k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$. Преобразование относительного тензора веса W (псевдотензора веса W) от системы координат x^k к новой системе координат $\overline{x}^k$ осуществляется по закону [15,16]

$$\overline{T}^{lm\cdots n}_{ij\cdots k} = \Delta^W(\partial_p\overline{x}^l)(\partial_q\overline{x}^m)\cdots(\partial_s\overline{x}^n)(\overline{\partial}_i x^a)(\overline{\partial}_j x^b)\cdots(\overline{\partial}_k x^c)T^{pq\cdots s}_{ab\cdots c}, \tag{1}$$

где

$$\Delta = \det(\overline{\partial}_j x^i), \qquad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \qquad \overline{\partial_p} = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}.$$

Здесь черта сверху указывает на значение величины в новой системе координат $\overline{x}^k$ ($k = 1, 2, \ldots n$), Δ — якобиан преобразования, W — вес псевдотензора. Отметим, что закон преобразования псевдотензоров отличается от закона преобразования абсолютных тензоров дополнительным множителем Δ^W; W — целое число, так как в противном случае значение Δ^W не будет однозначным.

Для псевдотензоров справедливы следующие утверждения:

1) сумма двух псевдотензоров одинаковой валентности и веса будет псевдотензором той же валентности и веса:

$$\overset{[W]}{A}{}^{ij}_{kl} = \overset{[W]}{B}{}^{ij}_{kl} + \overset{[W]}{C}{}^{ij}_{kl};$$

2) тензорное произведение псевдотензоров (возможно, различных валентностей) дает псевдотензор с итоговым весом, равным сумме весов сомножителей

$$\overset{[W_1+W_2]}{A}{}^{ijpqs}_{klrtm} = \overset{[W_1]}{B}{}^{ij}_{kl}\overset{[W_2]}{C}{}^{pqs}_{rtm};$$

3) результатом свертки псевдотензора будет псевдотензор того же веса; в том числе, полная свертка псевдотензора веса W будет псевдоскаляром того же веса.

Одним из фундаментальных объектов многомерной геометрии является абсолютный тензор $\delta^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, называемый обобщенной дельтой Кронекера и определяемый в n-мерном пространстве для $k \leqslant n$ по правилу

$$\delta^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{cases} +1, & \text{если } j_1, j_2, \ldots, j_k \text{ — различные натуральные числа } 1, 2, \ldots, n \\ & \text{и если } i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ — четная перестановка } j_1, j_2, \ldots, j_k; \\ -1, & \text{если } j_1, j_2, \ldots, j_k \text{ — различные натуральные числа } 1, 2, \ldots, n \\ & \text{и если } i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ — нечетная перестановка } j_1, j_2, \ldots, j_k; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

С помощью тензора $\delta^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ легко вычисляются символы перестановок:

1) относительный ковариантный n-вектор $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ веса -1:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{12\ldots n}_{i_1 i_2 \ldots i_n};$$

2) относительный контравариантный n-вектор $\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ веса $+1$:

$$\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{12\ldots n}.$$

Определение косого произведения n абсолютных ковариантных векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}}$ в n-мерном пространстве имеет вид [17]

$$\lceil \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \rfloor = e_{i_1 i_2 \cdots i_n} \underset{1}{a}{}^{i_1} \underset{2}{a}{}^{i_2} \cdots \underset{n}{a}{}^{i_n}, \tag{2}$$

где $e_{i_1 i_2 \cdots i_n} = e\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, $e = e_{12\cdots n}$ — псевдоскаляр веса $+1$, позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и разделить правые и левые локальные базисные системы. В самом деле, если в качестве системы векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}}$ принять векторы ковариантного базиса $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}}$ в n-мерном пространстве, то на основании (2) находим

$$\lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = e \det(\underset{a}{\imath}^c).$$

Заметим, что вектор $\underset{a}{\boldsymbol{\imath}}$ может быть разложен по базису $\underset{c}{\boldsymbol{\imath}}$:

$$\underset{a}{\boldsymbol{\imath}} = \underset{a}{\imath}^c \underset{c}{\boldsymbol{\imath}},$$

откуда

$$\underset{a}{\imath}^c = \underset{a}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \overset{c}{\boldsymbol{\imath}} = \overset{c}{\underset{a}{\delta}},$$

откуда

$$\det(\underset{a}{\imath}^c) = \det(\overset{c}{\underset{a}{\delta}}) = 1,$$

т.е.

$$\lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = e.$$

В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов:

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = \underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}),$$

а фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр отрицательного веса -1 есть

$$\frac{1}{e} = \overset{[-1]}{e}{}^{-1} = \lceil \overset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \overset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \overset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = \overset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot (\overset{2}{\boldsymbol{\imath}} \times \overset{3}{\boldsymbol{\imath}}).$$

Здесь $\overset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \overset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \overset{3}{\boldsymbol{\imath}}$ — векторы базиса, взаимного (reciprocal) с базисом $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$.

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры в абсолютные тензоры. Введем тензор $\mathbf{T}$ согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W} \overset{[W]}{\mathbf{T}}. \tag{3}$$

Подсчитывая баланс весов, приходим к заключению, что $\mathbf{T}$ является абсолютным тензором.

Известное в тензорной алгебре уравнение Гамильтона—Кэли остается справедливым для псевдотензоров второго ранга произвольного веса. Для доказательства этого утверждения введем комитанты $\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ и инвариантны $\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}$ псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$, согласно формулам [5]

$$k! \overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = (-1)^k (k+1) \delta^{i_1 i_2 \ldots i_k i}_{j_1 j_2 \ldots j_k j} \overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1} \overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2} \cdots \overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k}, \tag{4}$$

$$k!\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \overset{[W]}{T}{}^{j_1 \cdot}_{\cdot i_1} \overset{[W]}{T}{}^{j_2 \cdot}_{\cdot i_2} \cdots \overset{[W]}{T}{}^{j_k \cdot}_{\cdot i_k}. \tag{5}$$

Можно показать [18], что комитанты (4) выражаются через псевдоинварианты (5) и степени псевдоаффинора зависимостью

$$\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i \cdot}_{\cdot j} = (-1)^k \overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}} \delta^i_j + \overset{[(k-1)W]}{\underset{k-1}{C}}{}^{i \cdot}_{\cdot i_1} \overset{[W]}{T}{}^{i_1 \cdot}_{\cdot j}.$$

В итоге при $k = n$ правая часть равенства (4) содержит операцию альтернирования по $n + 1$ индексу и поэтому равна нулю:

$$\overset{[nW]}{\underset{n}{\mathbf{C}}} = \overset{[nW]}{\mathbf{0}} = \underbrace{\overset{[W]}{\mathbf{T}} \cdots \overset{[W]}{\mathbf{T}}}_{n} - \overset{[W]}{\underset{1}{\mathrm{I}}} \underbrace{\overset{[W]}{\mathbf{T}} \cdots \overset{[W]}{\mathbf{T}}}_{n-1} + \overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}} \underbrace{\overset{[W]}{\mathbf{T}} \cdots \overset{[W]}{\mathbf{T}}}_{n-2} - \cdots + (-1)^n \overset{[nW]}{\underset{n}{\mathrm{I}}} \overset{[0]}{\mathbf{I}}. \tag{6}$$

Соотношение (6) означает справедливость уравнения Гамильтона—Кэли для псевдотензоров в случае n-мерного пространства.

2. Определяющие уравнения гемитропного микрополярного тела. Псевдотензорная формулировка. Динамические уравнения гемитропного микрополярного тела в подавляющем большинстве литературных источников выводятся в терминах абсолютных тензоров [19–21]. Однако, как показали недавние исследования [12,14], геометрически и физически корректная формулировка уравнений *гемитропной* микрополярной теории возможна только в терминах относительных тензоров.

Следствием принципа виртуальных перемещений [14, 22] являются уравнения динамики микрополярной среды, которые примем в форме

$$\nabla_i t^{ik} = \rho\, \partial^2_{\cdot\cdot} u^k, \quad \nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i \cdot}_{\cdot k} - 2 \overset{[-1]}{\tau}_k = \rho \overset{[-2]}{\Im} \partial^2_{\cdot\cdot} \overset{[+1]}{\phi}_k,$$

где $\overset{[-1]}{\tau}_j$ — ассоциированный (сопутствующий) вектор силовых напряжений

$$-\overset{[-1]}{\tau}_j = \frac{1}{2} \epsilon_{jik} t^{[ik]}, \quad t^{[ik]} = -\epsilon^{ikj} \overset{[-1]}{\tau}_j. \tag{7}$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (7):

$$\mu^i = \frac{1}{2} \epsilon^{iks} \overset{[-1]}{\mu}_{[ks]}, \quad \overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = e_{isj} \mu^j.$$

В табл. 1 приведем псевдотензорные величины микрополярной упругости с указанием их веса и преобразования к абсолютным тензорам.

Введем микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$, рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с псевдотензорными аргументами (см. табл. 1):

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(\epsilon_{(ij)}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \kappa_i),$$

Таблица 1

Относительные тензоры микрополярной упругости
[Relative tensors of the micropolar elasticity]

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
elastic potential	$\mathscr{U}$	0	—
mass density	ρ	0	—
displacements vector	u^k	0	—
asymmetric strain tensor	ϵ_{ij}	0	—
small strain tensor	$\varepsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)}$	0	—
force traction vector	$t^k = n_i t^{ik}$	0	—
force stress tensor	t^{ik}, σ^{ik}	0	—
body forces	X^k	0	—
couple traction pseudovector	$m_k = n_i \mu^{i\cdot}_{\cdot k}$	-1	$m_k = e \overset{[-1]}{m_k}$
couple stress pseudotensor	$\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$	-1	$\mu^{i\cdot}_{\cdot k} = e \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$
associated couple stress vector	μ^i	0	—
associated couple stress pseudovector	τ_k	-1	$\tau_k = e \overset{[-1]}{\tau}_k$
body couples	Y_k	-1	$Y_k = e \overset{[-1]}{Y}_k$
coefficient of microinertia	$\Im$	-2	$\Im = e^2 \overset{[-2]}{\Im}$
microrotation tensor	Ω_{ik}	0	—
microrotation pseudovector	ϕ^i	$+1$	$\phi^i = \dfrac{1}{e} \overset{[+1]}{\phi}{}^i$
wryness pseudotensor	$\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}$	$+1$	$\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} = \dfrac{1}{e} \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$
associated wryness vector	κ_i	0	—

где

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}{}^k, \quad \overset{[+1]}{\varphi}{}^i = \overset{[+1]}{\phi}{}^i - \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\nabla_k u_l, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijs} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{[js]}.$$

Обычно аргументами упругого потенциала выступают абсолютные тензоры. Здесь существенным является использование формализма псевдотензоров, обеспечивающего чувствительность определяющих псевдоскаляров к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Упругий потенциал $\mathscr{U}$ по физическому смыслу является объективной величиной и не может меняться при повороте осей системы координат. Поэтому он (так же как и его первая вариация $\delta\mathscr{U}$) является абсолютным скаляром. Первая вариация упругого потенциала представляется сбалансированной по весам суммой

$$\delta\mathscr{U} = t^{(ij)}\delta\varepsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}{}_{(ij)}\delta \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2\overset{[-1]}{\tau}{}_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^i + 2\mu^i\delta\kappa_i,$$

откуда могут быть получены определяющие уравнения:

$$t^{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\varepsilon_{ij}}, \quad \overset{[-1]}{\mu}{}_{(ij)} = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}}, \quad 2\overset{[-1]}{\tau}{}_i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial \overset{[+1]}{\varphi}{}^i}, \quad 2\mu^i = \frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\kappa_i}.$$

В качестве потенциала $\mathscr{U}$, который, как указывалось выше, инвариантен относительно поворотов и переносов пространства, а также относительно преобразований инверсии пространства и зеркальных отражений, в гемитропном случае следует выбрать квадратичную функцию

$$\begin{aligned}\mathscr{U} = \underset{1}{A} g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + \underset{2}{\overset{[-2]}{A}} g_{is}g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{A} g^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)} + \\ + \underset{4}{\overset{[-2]}{A}} g_{is}g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + \underset{5}{\overset{[-2]}{A}} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^i \overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \underset{6}{A} g^{is}\kappa_i\kappa_s + \\ + \underset{7}{\overset{[-1]}{A}} g^{is}g_{lm}\epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{8}{\overset{[-1]}{A}} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + \underset{9}{\overset{[-1]}{A}} \kappa_i \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \quad (8)\end{aligned}$$

где символы $\underset{i}{\overset{[W]}{A}}$ $(i = 1, \ldots, 9)$ с соответствующими весами — определяющие псевдоскаляры гемитропной микрополярной среды (в табл. 2 представлены определяющие псевдоскаляры с указанием их веса), из них $\underset{7}{\overset{[-1]}{A}}$, $\underset{8}{\overset{[-1]}{A}}$, $\underset{9}{\overset{[-1]}{A}}$ чувствительны к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.

Важно отметить, что псевдоскаляры $\underset{2}{\overset{[-2]}{A}}$, $\underset{4}{\overset{[-2]}{A}}$, $\underset{5}{\overset{[-2]}{A}}$, $\underset{7}{\overset{[-1]}{A}}$, $\underset{8}{\overset{[-1]}{A}}$, $\underset{9}{\overset{[-1]}{A}}$, в отличие от абсолютных скаляров $\underset{1}{A}$, $\underset{3}{A}$, $\underset{6}{A}$, меняются при переходе от одной системы координат x^k к другой системе $\overline{x}^k$ $(k = 1, 2, 3)$ в соответствии с правилом (1)

Таблица 2

Веса микрополярных гемитропных определяющих скаляров
[The weights of the micropolar hemitropic constitutive scalars]

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
shear modulus of elasticity	G	0	—
Poisson ratio	ν	0	—
characteristic length of micropolar theory	L	-1	$L = e\,\overset{[-1]}{L}$
first micropolar modulus	c_1	-2	$c_1 = e^2\,\overset{[-2]}{c}_1$
second micropolar modulus	c_2	$+2$	$c_2 = \dfrac{1}{e^2}\,\overset{[+2]}{c}_2$
third micropolar modulus	c_3	0	—
forth micropolar modulus	c_4	0	—
fifth micropolar modulus	c_5	0	—
sixth micropolar modulus	c_6	0	—
first constitutive pseudoscalar	$\underset{1}{A}$	0	—
second constitutive pseudoscalar	$\underset{2}{A}$	-2	$\underset{2}{A} = e^2\,\overset{[-2]}{\underset{2}{A}}$
third constitutive pseudoscalar	$\underset{3}{A}$	0	—
firth constitutive pseudoscalar	$\underset{4}{A}$	-2	$\underset{4}{A} = e^2\,\overset{[-2]}{\underset{4}{A}}$
fifth constitutive pseudoscalar	$\underset{5}{A}$	-2	$\underset{5}{A} = e^2\,\overset{[-2]}{\underset{5}{A}}$
sixth constitutive pseudoscalar	$\underset{6}{A}$	0	—
seventh constitutive pseudoscalar	$\underset{7}{A}$	-1	$\underset{7}{A} = e\,\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}$
eighth constitutive pseudoscalar	$\underset{8}{A}$	-1	$\underset{8}{A} = e\,\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}$
ninth constitutive pseudoscalar	$\underset{9}{A}$	-1	$\underset{9}{A} = e\,\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}$

по формулам

$$\begin{aligned}
&\overset{[-2]}{\underset{2}{\overline{A}}} = \Delta^{-2}\overset{[-2]}{\underset{2}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{4}{\overline{A}}} = \Delta^{-2}\overset{[-2]}{\underset{4}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{5}{\overline{A}}} = \Delta^{-2}\overset{[-2]}{\underset{5}{A}},\\
&\overset{[-1]}{\underset{7}{\overline{A}}} = \Delta^{-1}\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{8}{\overline{A}}} = \Delta^{-1}\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{9}{\overline{A}}} = \Delta^{-1}\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В декартовых системах координат определяющие псевдоскаляры $\overset{[W]}{\underset{i}{A}}$ остаются неизменными, может меняться только их знак. В этом случае соотношения (9) примут вид

$$\begin{aligned}
&\overset{[-2]}{\underset{2}{\overline{A}}} = \overset{[-2]}{\underset{2}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{4}{\overline{A}}} = \overset{[-2]}{\underset{4}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{5}{\overline{A}}} = \overset{[-2]}{\underset{5}{A}},\\
&\overset{[-1]}{\underset{7}{\overline{A}}} = \pm\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{8}{\overline{A}}} = \pm\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{9}{\overline{A}}} = \pm\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}.
\end{aligned}$$

При выводе уравнений стандартной модели гемитропного микрополярного континуума в качестве определяющих постоянных принимаются постоянные абсолютные скаляры. Перейти к абсолютным скалярам в выражении (8) можно согласно правилу (3), тогда

$$\begin{aligned}
&\underset{2}{A} = e^2\overset{[-2]}{\underset{2}{A}}, \quad \underset{4}{A} = e^2\overset{[-2]}{\underset{4}{A}}, \quad \underset{5}{A} = e^2\overset{[-2]}{\underset{5}{A}},\\
&\underset{7}{A} = e\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}, \quad \underset{8}{A} = e\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}, \quad \underset{9}{A} = e\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Воспользовавшись формулой (10), потенциал (8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\mathscr{U} = {}&\underset{1}{A}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(is)}\epsilon_{(lm)} + e^{-2}\underset{2}{A}g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{A}g^{is}g^{lm}\epsilon_{(il)}\epsilon_{(sm)}+\\
&+ e^{-2}\underset{4}{A}g_{is}g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + e^{-2}\underset{5}{A}g_{is}\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}\delta\overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \underset{6}{A}g^{is}\kappa_i\kappa_s+\\
&+ e^{-1}\underset{7}{A}g^{is}g_{lm}\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + e^{-1}\underset{8}{A}\epsilon_{(is)}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + e^{-1}\underset{9}{A}\kappa_i\overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}.
\end{aligned}$$

Выберем систему координат, подчинив ее условию[1]

$$\sqrt{g} = 1,$$

т.е.

$$e = \operatorname{sgn} e.$$

[1]Ограничение $\sqrt{g} = 1$ часто используется не только в теории относительности [23], но и в механике деформируемого твердого тела [24]. На страницах 135–142 монографии [23] условие $\sqrt{g} = 1$ используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве–времени, что существенно упрощает уравнения теории относительности.

В трехмерном пространстве таких систем существует бесконечно много, например декартовы лево- и правоориентированные системы координат. Потенциал (11) для таких систем преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U} = \underset{1}{A} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(is)} \epsilon_{(lm)} + \underset{2}{A} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{A} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(il)} \epsilon_{(sm)} + \\
+ \underset{4}{A} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} + \underset{5}{A} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \underset{6}{A} g^{is} \kappa_i \kappa_s + \\
\pm \underset{7}{A} g^{is} g_{lm} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} \pm \underset{8}{A} \epsilon_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \pm \underset{9}{A} \kappa_i \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}, \quad (11)
\end{aligned}
$$

где “+” соответствует правоориентированной системе координат, а знак “−” — левоориентированной; $\underset{1}{A}, \ldots, \underset{9}{A}$ являются постоянными.

Определяющие уравнения для силовых и моментных напряжений в терминах псевдотензоров в криволинейной системе координат получаются в виде

$$
\begin{aligned}
& t^{(is)} = 2\underset{1}{A} g^{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + 2\underset{3}{A} g^{il} g^{sm} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g^{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}, \\
& \overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2 \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + 2 \overset{[-2]}{\underset{4}{A}} g_{il} g_{sm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g_{is} g^{lm} \epsilon_{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \epsilon_{(is)}, \quad (12) \\
& 2 \overset{[-1]}{\tau}_i = 2 \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \kappa_i, \qquad 2\mu^i = 2\underset{6}{A} g^{is} \kappa_s + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}.
\end{aligned}
$$

Вместо девяти определяющих псевдоскаляров $\underset{i}{A}$, появляющихся в выражении для упругого потенциала (8), удобнее ввести другие определяющие псевдоскаляры:

$$
\begin{array}{lll}
\underset{1}{A} = G\nu(1-2\nu)^{-1}, & \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c_3, & \underset{3}{A} = G, \\
\overset{[-2]}{\underset{4}{A}} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L}, & \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} = 2G \overset{[-2]}{c}_1, & \underset{6}{A} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c}_2, \\
\overset{[-1]}{\underset{7}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_4, & \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_5, & \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_6,
\end{array}
$$

с тем чтобы в итоге пришлось иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными параметрами:

– G — модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений);
– ν — коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности);
– $\overset{[-1]}{L}$ — характеристическая микродлина;
– $\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, c_3, c_4, c_5, c_6 — не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

В результате вместо (12) приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$
\begin{aligned}
&t^{(is)} = 2G\big(\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}\big)\epsilon_{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}\big(c_4 g^{is} g_{lm}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\big),\\
&\overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm})\overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + G\overset{[-1]}{L}(c_4 g_{is} g^{lm}\epsilon_{(lm)} + c_5\epsilon_{(is)}),\\
&\overset{[-1]}{\tau}_i = 2G\overset{[-2]}{c}_1 g_{is}\overset{[+1]}{\varphi}{}^s + \frac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\kappa_i, \qquad \mu^i = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c}_2 g^{is}\kappa_s + \frac{1}{2}G\overset{[-1]}{L}c_6\overset{[+1]}{\varphi}{}^i.
\end{aligned}
$$

3. Уравнения динамики гемитропного микрополярного тела. Псевдотензорная формулировка. Уравнения динамики гемитропного микроплярного упругого континуума в криволинейных координатах, используя обозначения для дифференциальных операторов $\mathscr{L}^i$ и $\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i$ и для определяющих постоянных

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6,
$$

запишем в форме

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^i\big(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k\big) = G\Big[&\big(1 + e^2\overset{[-2]}{c}_1\big)\nabla^s\nabla_s u^i +\\
&+ \big(1 - e^2\overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1}\big)\nabla^i\nabla_k u^k +\\
&+ 2\overset{[-2]}{c}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l + \overset{[-1]}{L}c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k +\\
&\qquad\qquad + \overset{[-1]}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i\Big] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot}u^i = 0,\\
\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i\big(\partial_{\cdot}, \nabla_k, u^k, \overset{[+1]}{\phi}{}^k\big) = G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\Big[&\big(1 + e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2\big)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}_i +\\
&+ \big(1 - e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2 + 2c_3\big)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla_i\nabla^k u_k +\\
&+ \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\nabla^s\overset{[+1]}{\phi}{}^l\Big] -\\
&- 2G\overset{[-2]}{c}_1\big(2\overset{[+1]}{\phi}_i - e^2\epsilon_{ikl}g^{ks}\nabla_s u^l\big) - \rho\overset{[-2]}{\mathfrak{J}}\partial^2_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\phi}_i = \overset{[-1]}{0}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

На основании данных выше определений дифференциальный оператор $\mathscr{L}^i$ имеет нулевой вес, а оператор $\overset{[-1]}{\mathscr{M}}_i$ имеет вес -1. Для правоориентированной декартовой системы координат уравнения (13) запишутся в виде (см. также табл. 3[2])

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_i(\partial_{\cdot},\partial_k,u_k,\mho_k) &= G\big[(1+c_1)\partial_s\partial_s u_i + \big(1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1}\big)\partial_i\partial_k u_k + \\
&\quad + 2c_1\epsilon_{ikl}\partial_k\mho_l + Lc_4'\partial_i\partial_k\mho_k + Lc_5'\partial_k\partial_k\mho_i\big] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot}u_i = 0,\\
\mathscr{M}_i(\partial_{\cdot},\partial_k,u_k,\mho_k) &= GL^2\big[(1+c_2)\partial_s\partial_s\mho_i + (1-c_2+2c_3)\partial_i\partial_k\mho_k + \\
&\quad + L^{-1}c_4'\partial_i\partial_k u_k + L^{-1}c_5'\partial_k\partial_k u_i + L^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\partial_s\mho_l\big] - \\
&\quad - 2Gc_1(2\mho_i - \epsilon_{ikl}\partial_k u_l) - \rho\mathfrak{I}\partial^2_{\cdot\cdot}\mho_i = 0.
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Рассмотрим преобразование инверсии пространства ($x_k \to \underset{*}{x}_k$). Величины в новой системе координат обозначим звездочкой снизу. В табл. 3 укажем объекты в правоориентированной декартовой системе координат, инверсной к ней системе координат и формулы связи. На основании уравнений (13), заменяя материальные постоянные в соответствии с табл. 3, получаем

$$
\begin{aligned}
\underset{*}{\mathscr{L}}_i(\partial_{\cdot},\underset{*}{\partial}_k,\underset{*}{u}_k,\underset{*}{\mho}_k) &= G[(1+c_1)\underset{*}{\partial}_s\underset{*}{\partial}_s\underset{*}{u}_i + (1-c_1+2\nu(1-2\nu)^{-1})\underset{*}{\partial}_i\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{u}_k + \\
&\quad + 2c_1\epsilon_{ikl}\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{\mho}_l - Lc_4'\underset{*}{\partial}_i\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{\mho}_k - Lc_5'\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{\mho}_i] - \rho\,\partial^2_{\cdot\cdot}\underset{*}{u}_i = 0,\\
\underset{*}{\mathscr{M}}_i(\partial_{\cdot},\underset{*}{\partial}_k,\underset{*}{u}_k,\underset{*}{\mho}_k) &= GL^2\big[(1+c_2)\underset{*}{\partial}_s\underset{*}{\partial}_s\underset{*}{\mho}_i + (1-c_2+2c_3)\underset{*}{\partial}_i\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{\mho}_k - \\
&\quad - L^{-1}c_4'\underset{*}{\partial}_i\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{u}_k - L^{-1}c_5'\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{u}_i - L^{-1}c_6'\epsilon_{isl}\underset{*}{\partial}_s\underset{*}{\mho}_l\big] - \\
&\quad - 2Gc_1(2\underset{*}{\mho}_i - \epsilon_{ikl}\underset{*}{\partial}_k\underset{*}{u}_l) - \rho\mathfrak{I}\partial^2_{\cdot\cdot}\underset{*}{\mho}_i = 0.
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Производя в дифференциальных операторах замены в соответствии с третьим столбцом табл. 3, находим

$$
\begin{aligned}
\underset{*}{\mathscr{L}}_i(\partial_{\cdot},\underset{*}{\partial}_k,\underset{*}{u}_k,\underset{*}{\mho}_k) &= -\mathscr{L}_i(\partial_{\cdot},\partial_k,u_k,\mho_k),\\
\underset{*}{\mathscr{M}}_i(\partial_{\cdot},\underset{*}{\partial}_k,\underset{*}{u}_k,\underset{*}{\mho}_k) &= \mathscr{M}_i(\partial_{\cdot},\partial_k,u_k,\mho_k).
\end{aligned}
$$

Откуда следует, что если выполняются уравнения (14) для исходной правоориентированной декартовой системы координат, то выполняются (в силу выполнимости (14)) и уравнения (15) в инверсной координатной системе[3]. Указанное обстоятельство влечет за собой, например, наличие прямых и зеркальных мод при распространении волн по гемитропному микрополярному упругому континууму. В случае распространения гармонических волн по гемитропной микрополярной среде оператор дифференцирования по времени в указанных выше уравнениях преобразуется по правилу $\partial^2_{\cdot\cdot} \to -\omega^2$, где ω — циклическая частота гармонической волны.

Заключение. В статье обсуждаются определяющие псевдоскаляры, связанные с теорией гемитропного микрополярного континуума.

1. Приводятся основные понятия алгебры псевдотензоров, включая обобщение теоремы Гамильтона—Кэли.

[2] $\mho^k$ — специальный символ, вес которого мы не будем указывать, точно так же как это имеет место для ϵ-символов.

[3] Справедливо и обратное утверждение.

Таблица 3

Таблица соответствия для прямой и инверсной декартовых координатных систем
[Correspondence table for straight and inverse Cartesian coordinate systems]

Curvilinear coordinate system	Right-handed Cartesian coordinate system	Inverse coordinate system	Conversion formulae
x^k	x^k	$\underset{*}{x}^k$	$\underset{*}{x}^k = -x^k$
e	1	-1	$\underset{*}{e} = -e$
g_{ij}	δ_{ij}	δ_{ij}	—
ϵ^{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	—
ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	ϵ_{ijk}	—
u^i	u_i	$\underset{*}{u}_i$	$\underset{*}{u}_i = -u_i$
$\overset{[+1]}{\phi}{}^k$	$\mho_k$	$\underset{*}{\mho}_k$	$\underset{*}{\mho}_k = \mho_k$
∇_i	∂_i	$\underset{*}{\partial}_i$	$\underset{*}{\partial}_i = -\partial_i$
$\partial.$	$\partial.$	$\underset{*}{\partial}.$	—
$\mathscr{L}^i(\partial.,\nabla_k, u^k,\mho^k)$	$\mathscr{L}_i(\partial., \partial_k, u_k,\mho_k)$	$\underset{*}{\mathscr{L}}_i(\partial., \underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k,\underset{*}{\mho}_k)$	$\underset{*}{\mathscr{L}}_i(\partial., \underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = -\mathscr{L}_i(\partial., \partial_k, u_k,\mho_k)$
$\overset{[-1]}{\mathscr{M}}{}_i(\partial.,\nabla_k, u^k,\mho^k)$	$\mathscr{M}_i(\partial., \partial_k, u_k,\mho_k)$	$\underset{*}{\mathscr{M}}_i(\partial., \underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k,\underset{*}{\mho}_k)$	$\underset{*}{\mathscr{M}}_i(\partial., \underset{*}{\partial}_k, \underset{*}{u}_k, \underset{*}{\mho}_k) = \mathscr{M}_i(\partial., \partial_k, u_k,\mho_k)$
$\overset{[-1]}{L}$	L	$\underset{*}{L}$	$\underset{*}{L} = -L$
$\overset{[-2]}{c}_1$	c_1	c_1	—
$\overset{[+2]}{c}_2$	c_2	c_2	—
$\overset{[-2]}{\mathfrak{J}}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{J}$	—

2. Определяется псевдотензорная форма гемитропного микрополярного потенциала упругой деформации, основанная на 9 определяющих псевдоскалярах (из них 3 псевдоскаляра и 6 абсолютных скаляров).
3. Вычисляются веса определяющих псевдоскаляров.
4. Продемонстрировано, что упругий потенциал инвариантен относительно поворотов и переносов пространства, а также относительно преобразований инверсии пространства и зеркальных отражений, а определяющие псевдоскаляры $\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}$, $\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}$, $\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}$ чувствительны к преобразованиям инверсии пространства и зеркальным отражениям.
5. Выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного упругого континуума. С помощью фундаментального ориентирующего скаляра веса +1 формулируются правила преобразования определяющих псевдоскаляров.
6. Обсуждаются уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров для прямых и зеркальных мод.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА–А20–120011690132–4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19–51–60001, № 20–01–00666.

Библиографический список

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // *Int. J. Mech. Sci.*, 2001. vol. 43, no. 7. pp. 1579–1589. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4.
2. Mackay T., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review // *SPIE Reviews*, 2010. vol. 1, no. 1, 018003. https://doi.org/10.1117/6.0000003.
3. Tomar S., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // *Appl. Math. Model.*, 2013. vol. 37, no. 22. pp. 9409–9418. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029.
4. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories / *Principles of Classical Mechanics and Field Theory* / Encyclopedia of Physics, III/1; ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–902. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
5. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
6. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publ., 1957. xii+318 pp.
7. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicists*. Oxford: Clarendon Press, 1954. xii+277 pp.
8. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua* / Applied Mathematics Series. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. xii+361 pp.
9. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus* / Dover Books on Advanced Mathematics. vol. 5. New York: Courier Corporation, 1978. ix+324 pp.
10. Векуа И. Н. *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*. М.: Наука, 1978. 411 с.
11. Кочин Н. Е. *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления*. М.: Наука, 1951. 427 с.

12. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
13. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. https://doi.org/10.14498/vsgtu1792.
14. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 4. pp. 752–761. https://doi.org/10.14498/vsgtu1799.
15. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924. vol. 26, no. 3. pp. 373–377. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6.
16. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms* / Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. vol. 24. Cambridge: Univ. Press, 1927. viii+102 pp.
17. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства.* М.: Наука, 1966. 647 с.
18. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 6 (в печати).
19. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine* / International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9.
20. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity.* Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
21. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat–Kontinuums [A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat–continuum] // *Acta Mechanica*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131 (In German). https://doi.org/10.1007/BF01374965.
22. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. https://doi.org/10.14498/vsgtu1635.
23. Kopff A. *The Mathematical Theory of Relativity.* London: Methuen, 1923. viii+214 pp.
24. Радаев Ю. Н. *Пространственная задача математической теории пластичности.* Самара: Самар. ун-т, 2006. 340 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 457–474
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1870

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames

© ***E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev***

Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to the constitutive pseudoscalars associated with the theory of hemitropic micropolar continuum. The basic concepts of pseudotensor algebra are presented. The pseudotensor form of the hemitropic micropolar elastic potential is given, based on 9 constitutive pseudoscalars (3 are pseudoscalars and 6 are absolute scalars). The weights of the constitutive pseudoscalars are calculated. The fundamental orienting pseudoscalar of weight +1 is used to formulate transformation rules for constitutive pseudoscalars. The governing equations of the hemitropic micropolar elastic continuum are derived. The equations of the dynamics of the hemitropic micropolar continuum are discussed in terms of pseudotensors in right- and left-handed Cartesian coordinate systems. The presence of inverse modes along with normal ones is shown for wave propagation across the hemitropic micropolar continuum.

Keywords: micropolar hemitropic continuum, microrotation, pseudoscalar, relative tensor, fundamental orienting pseudoscalar, inversion of space, polarisation.

Received: 23rd June, 2021 / Revised: 29th July, 2021 /
Accepted: 25th August, 2021 / First online: 27th September, 2021

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Research Article

Please cite this article in press as:
Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 457–474. https://doi.org/10.14498/vsgtu1870 (In Russian).

Authors' Details:
Evgenii V. Murashkin https://orcid.org/0000-0002-3267-4742
Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev https://orcid.org/0000-0002-0866-2151
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Funding. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA–A20–120011690132–4) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 18–01–00844, 20–01–00666).

References

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials, *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4.
2. Mackay T., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: a review, *SPIE Reviews*, 2010, vol. 1, no. 1, 018003. https://doi.org/10.1117/6.0000003.
3. Tomar S., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium, *Appl. Math. Model.*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9409–9418. https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029.
4. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, III/1; ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
5. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
6. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York, Dover Publ., 1957, xii+318 pp.
7. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicists*. Oxford, Clarendon Press, 1954, xii+277 pp.
8. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Applied Mathematics Series. New York, John Wiley & Sons Inc, 1964, xii+361 pp.
9. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, Dover Books on Advanced Mathematics, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, ix+324 pp.
10. Vekua I. N. *Osnovy tenzornogo analiza i teorii kovariantov* [Foundations of Tensor Analysis and the Theory of Covariants]. Moscow, Nauka, 1978, 411 pp. (In Russian)
11. Kochin N. E. *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya* [Foundations of Tensor Analysis and Covariant Theory]. Moscow, Nauka, 1951, 427 pp. (In Russian)
12. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
13. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. https://doi.org/10.14498/vsgtu1792.
14. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. https://doi.org/10.14498/vsgtu1799.
15. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1924-1501284-6.
16. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 24. Cambridge, Univ. Press, 1927, viii+102 pp.
17. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
18. Murashkin E. V., Radaev Yu. N. On a generalization of the algebraic Hamilton–Cayley theory, *Mech. Solids*, 2021, vol. 55, no. 6 (to appear).
19. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine*, International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures, vol. 25. Wien, New York, Springer, 1972, 286 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9.
20. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
21. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat–Kontinuums [A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat–continuum], *Acta Mechanica*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131 (In German). https://doi.org/10.1007/BF01374965.

22. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1635`.
23. Kopff A. *The Mathematical Theory of Relativity*. London, Methuen, 1923, viii+214 pp.
24. Radayev Yu. N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti* [The Spatial Problem of the Mathematical Theory of Plasticity]. Samara Univ., Samara, 2006, 340 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 475–490
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1864

УДК 539.3

Строгое решение задачи о состоянии линейно-упругого изотропного тела под воздействием полиномиальных объемных сил

© *В. Б. Пеньков, Л. В. Левина, Е. А. Новиков*

Липецкий государственный технический университет,
Россия, 398055, Липецк, ул. Московская, 30.

Аннотация

При решении краевых задач о построении напряженно-деформированного состояния линейно-упругого изотропного тела важным шагом является отыскание внутреннего состояния, порожденного силами, распределенными по занятой телом области. В классическом варианте существует численный способ оценки состояния в любой точке тела, базирующийся на сингулярно-интегральном представлении Чезаро. В варианте консервативных объемных сил возможно выписывание решений в аналитической форме. При произвольных регулярных воздействиях механической и иной физической природы силы потенциальными не являются и подходы Папковича–Нейбера и Аржаных–Слободянского оказываются бессильными. Кроме этого, решение нелинейных задач эластостатики средствами метода возмущений, а также использование при решении задач для исследования многополостных тел алгоритма Шварца приводят к необходимости решения последовательности линейных задач. При этом в обязательном порядке зарождаются фиктивные объемные силы, имеющие, как правило, полиномиальный характер.

Разработанный авторами ранее метод оценки напряженно-деформированного состояния тела, вызванного воздействием полиномиальных объемных сил, представляемых в декартовых координатах, получил развитие. Внутреннее состояние восстанавливается в строгом соответствии с силами, статически воздействующими на односвязное ограниченное линейно-упругое тело. Предложены и описаны эффективный метод построения решения и алгоритм его компьютерной реализации. Продемонстрированы тестовые расчеты. Выполнен анализ состояния шара, находящегося под воздействием суперпозиции объемных сил различного

Научная статья

Образец для цитирования

Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новиков Е. А. Строгое решение задачи о состоянии линейно-упругого изотропного тела под воздействием полиномиальных объемных сил // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 475–490. https://doi.org/10.14498/vsgtu1864.

Сведения об авторах

Виктор Борисович Пеньков https://orcid.org/0000-0002-6059-1856
доктор физико-математических наук; профессор; каф. общей механики;
e-mail: vbpenkov@mail.ru

Любовь Владимировна Левина https://orcid.org/0000-0002-7441-835X
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Евгений Александрович Новиков ✉ https://orcid.org/0000-0001-5606-5207
аспирант; кафедра общей механики; e-mail: 89513027802@mail.ru

характера при различных соотношениях параметров, подчеркивающих уровень влияния этих факторов. Результаты оформлены графически. Сделаны следующие выводы:
а) обоснована процедура выписывания напряженно-деформированного состояния от объемных сил, представляемых полиномами от декартовых координат;
б) алгоритм реализован в вычислительной системе Mathematica и проведено тестирование на многочленах высокого порядка;
в) проведен анализ квазистатического состояния линейно-упругого изотропного шара, подверженного воздействию сил гравитации и инерции при различных сочетаниях параметров, отвечающих вариантам медленного, быстрого, компенсационного (инерционные силы соразмерны с гравитационными) вращений.

Отмечены перспективы развития нового подхода на класс ограниченных и неограниченных тел, содержащих произвольное число полостей.

Ключевые слова: объемные силы, частное решение, напряженно-деформированное состояние от объемных сил, линейная эластостатика, теория упругости, частное решение уравнений Ламе.

Получение: 22 апреля 2021 г. / Исправление: 7 сентября 2021 г. / Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Восстановление полей напряженно-деформированного состояния эластостатических тел, обусловленных объемными силами, относится к теме построения частного решения задач математической физики для объектов, описываемых системой соотношений, определяющих упругую среду:
1) соотношений Коши, выражающих тензор деформаций через вектор перемещений точек;
2) обобщенного закона Гука, связывающего между собой компоненты тензоров напряжений и деформаций;
3) уравнений равновесия, в которых объемные силы согласуются с полем тензора напряжений.

Последние уравнения как раз и характеризуют систему уравнений как неоднородную и требуют при построении решения краевой задачи предварительно восстанавливать в форме частного решения внутреннее состояние, отвечающее объемному силовому воздействию.

Классические положения о возможностях реализации такой процедуры известны [1–6]. В общем случае за частное решение отвечает интегральное представление Чезаро [1–3], выражающее поле вектора перемещения через сингулярный интеграл пространственного типа, но не позволяющее получить для тел произвольной формы даже приближенное аналитическое выражение. Использование точечного численного подхода при применении способов в построении численно-аналитических решений, форма представления которых имеет вид аналитических выражений, весьма неудобно.

Приведение совокупности определяющих соотношений к системе трех дифференциальных уравнений (каждое второго порядка) относительно трех дважды дифференцируемых функций, описывающих перемещение точек тела в форме Ламе [2, 3], позволило П. Ф. Папковичу и Г. Ф. Нейберу [7] выписать общее решение, но с существенным ограничением на класс допускаемых к рассмотрению объемных сил — они должны быть потенциальными. Эффективному развитию такого подхода служат общие решения И. С. Аржаных, М. Г. Слободянского [2, 3], записанные как для односвязного ограниченного тела, так и для внешности ограниченной полости. Их суперпозиция позволяет строить решения для произвольных многополостных тел.

Отметим, что традиционные силы, порожденные причинами чисто механического характера (силы тяжести, силы инерции при равномерном вращении тел, силы гравитационного взаимодействия), обладают именно такими свойствами [8–11]. В современных условиях развития науки и техники возникли новые причины зарождения сил, распределенных по области, занятой упругим телом. Обнаружены причины нарушения межмолекулярного взаимодействия на наноуровне [12]. Обеспечение специфически направленных потоков заряженных частиц сквозь упругое тело, помещенное во внешнее магнитное поле, порождает силы электромагнитного взаимодействия Лоренца [13]. Эти силы уже не относятся к классу консервативных, но на упругое состояние тела оказывают прямое воздействие.

Еще одна причина, порождающая формальные объемные силы, связана со средствами решения неоднородных и термоупругих [14], геометрически [15] и физически [16,17] нелинейных задач средствами метода возмущений. Здесь решение нелинейной проблемы сводится к последовательности шагов, на каждом из которых решается задача линейного типа для соотношений классического характера, но обязательно содержащая фиктивную объемную силу, как правило, полиномиального характера [14].

Способ определения частного решения для такого случая построен — доказана теорема о существовании базиса пространства полиномиальных объемных сил, указаны эффективные алгоритмы выписывания частного решения [18–20]. Приведены примеры их эффективного применения. Эти алгоритмы связаны с необходимостью вычисления скалярных произведений элементов базиса, что при высоких размерностях полиномов, описывающих внутреннее состояние, требует существенных затрат времени счета.

Разработка более эффективного способа выписывания внутреннего состояния, порождаемого полиномиальными объемными силами, является темой *актуальной*, ресурсосберегающей.

Цель соответствующего исследования заключается в создании метода, позволяющего выписывать напряженно-деформированное состояние от полиномиальных объемных сил, минуя необходимость вычисления кратных интегралов при решении задачи. Эта цель достигнута, о чем свидетельствует изложенное ниже.

1. Полиномиальные базисы объемных сил. Полиномиальным называем континуальное пространство X_p объемных сил, описываемое многочленами. Это определение характеризует его как линейное. Будем полагать тело односвязным, ограниченным, занимающим область V с границей ∂V. Это пространство имеет сепарабельный базис [19], полнота которого и линейная независимость его элементов строго доказаны [20]. Описаны два способа формирования отрезков базиса X_k произвольного порядка k:

1) обеспечивающий алгоритм, одновременно служащий конструктивным доказательством упомянутых обязательных свойств элементов базиса;
2) сортировочный алгоритм, ведущий к достижению цели ресурсосберегающими средствами.

Реально построенный любым способом исходный базис X_k будем называть опорным базисом.

В любом варианте организации опорного базиса исходим из того, что произвольный моном $w = x^\alpha y^\beta z^\gamma$, $\{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$ порождает в соответствии с определяющими соотношениями линейной однородной эластостатической среды (изотропной, анизотропной) три варианта полиномиальных сил в соответствии с цепочкой действий

$$\mathbf{u} \to \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \to \hat{\boldsymbol{\sigma}} \to \mathbf{X}, \quad \mathbf{u} \in \big\{\{w, 0, 0\}, \{0, w, 0\}, \{0, 0, w\}\big\}, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{X}$ — векторы перемещений и сил; $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — тензоры деформаций и напряжений. Если через k обозначить порядок полиномиального вектора $\mathbf{X}$, то $\alpha + \beta + \gamma - 2 = k$. Каждому полиномиальному внутреннему состоянию $\xi_p = \{\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}\}$ соответствует вектор $\mathbf{X}_p$, компонентами которого являются однородные полиномы порядка k.

Например, изотропной эластостатической цепочке (1) соответствуют определяющие соотношения [3]:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tfrac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})^\top + \nabla \mathbf{u}], \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda \boldsymbol{\Theta} \hat{\mathbf{E}} + 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{X} = -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}},$$

где $\hat{\mathbf{E}}$ — единичный тензор; $\boldsymbol{\Theta} = I_1(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ — первый инвариант тензора деформаций (объемная деформация); λ, μ — параметры Ламе ($\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}$, ν — коэффициент Пуассона).

Ранее используемые подходы к разложению вектора $\mathbf{X}$ по элементам отрезка базиса $\{\mathbf{X}_k\}$ максимального порядка K, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, K\}$, опирались на применение метода наименьших квадратов или рядов Фурье. В обоих случаях использовалось скалярное произведение

$$(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_j) = \int_{V_0} \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_j \, dV,$$

где V_0 не обязано совпадать с V и может иметь более тривиальную форму для цели экономии ресурсов, например, куб:

$$V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ -1 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}.$$

Это обстоятельство обусловлено регулярностью элементов базиса не только внутри V, но также и в любой ограниченной области благодаря именно полиномиальному характеру представления.

Практика проведения расчетов показала, что в некоторых задачах (нелинейные среды, декомпозируемые применением метода возмущений в последовательность линейных, но содержащих искусственно порожденную полиномиальную объемную нагрузку) для удовлетворительного приближения частного решения относительно состояний от объемных сил требуется достаточно большой порядок K аппроксимирующих многочленов, из-за чего вычисление K^2 интегралов даже в «канонических» областях требует приличных затрат времени. Проблема была бы снята, если бы опорный базис имел не полиномиальный, а более узкий, мономный характер. Это предполагает, что вектор $\mathbf{X}^k$ содержит моном порядка k ровно в одной позиции:

$$\mathbf{X}^k \in \big\{\{w_X, 0, 0\}, \{0, w_X, 0\}, \{0, 0, w_X\}\big\}, \quad w_X = x^a y^b z^c, \quad a + b + c = k.$$

Действительно, любой однородный полиномиальный вектор $\mathbf{X}$ является заданной линейной комбинацией элементов базиса $\{\mathbf{X}^k\}$:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=0}^{K} \chi_k \mathbf{X}^k. \tag{2}$$

Если при этом каждому элементу $\mathbf{X}^k$ соответствует состояние ξ^k (которое надо построить), то можно предположить аналогичное разложение для внутреннего состояния ξ^* от объемных сил:

$$\xi^* = \sum_{k=0}^{K} \chi_k \xi^k.$$

Предположение не оказывается ограничивающим, его доказывать нет необходимости, поскольку расчетчика устраивает любое частное решение ξ^*, лишь бы выполнялось линейное отображение $\xi^* \to \mathbf{X}$. Последнее гарантировано цепочкой (1).

Таким образом, возникла задача о формировании мономного базиса $\{\mathbf{X}^k\}$ на основе опорного однородно-полиномиального базиса $\{\mathbf{X}_k\}$.

2. Алгоритм формирования внутренних состояний для мономного базиса объемных сил. Совокупность мономов порядка k будем называть «кластером k». Число различных мономов $w_k = x^a y^b z^c$, $a + b + c = k$ определяет мощность этого кластера

$$n_k = \tfrac{1}{2}(k+1)(k+2).$$

Поскольку каждый из мономов может быть помещен в любую позицию трехмерного вектора $\mathbf{X}^k$, количество различных векторов этого порядка оценивается как $N_k = 3n_k = \frac{3}{2}(k+1)(k+2)$. Каким-либо способом введем индивидуальную нумерацию всех элементов мономного отрезка базиса векторов $\mathbf{X}^k$, например, в соответствии с табл. 1. После этого множество номеров элементов кластера принадлежит списку $i \in \{1, 2, \ldots, N_k\}$.

При формировании отрезка опорного базиса $\{\mathbf{X}_k\}$ в соответствии с принятым обозначением (табл. 1) каждый элемент опорного базиса приобретает свой индекс i и представляется линейной комбинацией

$$\mathbf{X}_i = \sum_{j=1}^{N_K} c_{i\,j} \mathbf{X}^j \tag{3}$$

Таблица 1

Внутрикластерная нумерация элементов мономного базиса
[Intracluster numbering of elements of a monomic basis]

position of w_k	x^k	$x^{k-1}y$	$x^{k-2}y^2$	...	z^k
1	1	2	3	...	n_k
2	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$2n_k$
3	$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	...	$3n_k$

или в матричной форме (индексом k матрицу C помечать нет необходимости: она используется внутрикластерно):

$$\{\mathbf{X}_i\} = C\{\mathbf{X}^j\}, \quad C = [c_{ij}], \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, N_k\}.$$

Все коэффициенты матрицы C определены, причем $\det C \neq 0$ в силу линейной независимости элементов опорного базиса. Обращение матрицы C позволяет получить выражение элементов мономного базиса $\{\mathbf{X}^j\}$ через уже известное представление опорного базиса в виде

$$\{\mathbf{X}^j\} = C^{-1}\{\mathbf{X}_i\},$$

что нам и требовалось.

Эти же схемы позволяют назначить базис полиномиальных внутренних состояний:

$$\xi^j = \sum_{i=1}^{N_K} d_{ji}\xi_i,$$

где d_{ji} — элементы матрицы $D = C^{-1} = [d_{ji}]$.

Перебирая поочередно кластеры до их максимального значения, накапливаем последовательность внутренних состояний $\{\xi^l\}$. Поскольку полиномиальный вектор объемных сил $\mathbf{X}^*$ известен и является линейной комбинацией элементов базиса

$$\mathbf{X}^* = \sum_l \chi_l \mathbf{X}^l, \tag{4}$$

ему соответствующее внутреннее состояние определяется аналогично:

$$\xi^* = \sum_l \chi_l \xi^l. \tag{5}$$

В выражениях (4), (5) нумерация элементов базиса изменена в соответствии с фактом накопления базиса списками $\{\mathbf{X}^j\}$; таких списков столько же, сколько имеется различных кластеров.

Ниже приводится более детальное описание алгоритма формирования внутреннего состояния, строго соответствующее полиномиальной объемной силе $\mathbf{X}$.

А. Внутрикластерные операции. Входной информацией для блока служит порядок кластера k и однородный полиномиальный вектор $\mathbf{X}$.

А.1. Определяются мощность n_k множества мономов порядка k и размерность N_k матрицы C.

А.2. Перебираются позиции $p \in \{1, 2, 3\}$ для формирования мономного базиса $\{\mathbf{X}^j\}$. Полагаем $j = 0$. Осуществляется перебор порядков степеней переменных x, y, z в соответствии с табл. 1:

$$\forall c \in \{0, 1, \ldots, n_k\} : \forall b \in \{0, 1, \ldots, n_k - c\} : a = n_k - c - b; j := j + 1. \tag{6}$$

Формируется моном $w_x = x^a y^b z^c$ и вектор $\mathbf{X}^j$ в соответствии с позицией p.

Использование «сортировочного алгоритма» [20] позволяет для каждого набора параметров a, b, c, p указать значения α, β, γ и сформировать вектор $\mathbf{X}_i$, являющийся линейной комбинацией (3) элементов мономного базиса. Определяются все коэффициенты c_{ij} строки i матрицы C. По завершении перебора (6) матрица C сформирована.

A.3. Выполняется обращение матрицы C: $C^{-1} = D = [d_{ji}]$; тем самым список элементов опорного базиса $\{\mathbf{X}_i\}$ представляется линейной комбинацией элементов мономного базиса $\{\mathbf{X}^j\}$:

$$\{\mathbf{X}_i\} = D\{\mathbf{X}^j\}, \quad \mathbf{X}_i = \sum_j x_{ji}\mathbf{X}^j.$$

A.4. Входной кластерный вектор объемных сил $\mathbf{X}$ представляется линейной комбинацией элементов мономного базиса

$$\mathbf{X} = H\{\mathbf{X}^j\}, \quad \mathbf{X} = \sum_j \chi_j \mathbf{X}^j.$$

Здесь $H = \{\chi_j\}$ — вектор-строка коэффициентов разложения (2) размерности N_k.

A.5. Осуществляется перебор элементов мономного базиса. Изначально полагается значение внутреннего состояния среды нулевым: $\xi^* = 0$.
Номеру j элемента мономного базиса соответствуют номер $i = j$ элемента опорного базиса и отвечающие ему значения α, β, γ. «Сортировочный алгоритм» формирует состояние $\xi^*_i = \{\mathbf{u}_i, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i\}$, причем такую процедуру необходимо делать в том случае, если коэффициент $b_i = \sum_j \chi_j x_{ji}$ матрицы $B = HK = \{b_i\}$ не равен нулю (экономия ресурсов).
В процессе перебора осуществляется накопление внутреннего состояния ξ^* для кластера k:

$$\xi^* := \xi^* + \xi^*_i.$$

По окончании цикла внутреннее состояние ξ^*, отвечающее однородному полиномиальному вектору $\mathbf{X}$, построено.

B. Внекластерные операции.

B.0. Определяется максимальный порядок $K_{\max}$ полиномов вектора объемных сил $\mathbf{F}_0$. Приводится его представление $\mathbf{F}_0$ в форме линейной комбинации однородных полиномиальных векторов $\mathbf{f}_k$:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{k=0}^{K_{\max}} \mathbf{f}_k,$$

где k далее обозначает порядок кластера.
Устанавливается нулевое значение для накапливаемых внутреннего состояния $\xi = 0$ вектора сил ($\mathbf{F} = 0$).

B.1. Осуществляется перебор кластеров в порядке возрастания: $\forall k \in \{0, 1, \ldots, K_{\max}\}$; выделяется вектор $\mathbf{X} = \mathbf{f}_k$ и выполняются внутрикластерные операции пункта A.
Результаты внутрикластерных операций накапливаются:

$$\xi := \xi + \xi^*, \quad \mathbf{F} := \mathbf{F} + \mathbf{X}.$$

В.2. Выполняется проверка точности построения внутреннего состояния, отвечающего приложенным объемным силам. Это легче всего сделать на основе оценки нормы вектора:

$$\|\mathbf{F}_0 - \mathbf{F}\| \to \min .$$

Процесс построения напряженно-деформированного состояния, отвечающего внешним объемным силам, завершен.

Замечание. Все операции в алгоритме дают однозначное представление результата. Если описывать исходную числовую информацию в рациональной форме, то окончательный результат также имеет однозначно определяемую рациональную форму. Следовательно, для заданного вектора объемных сил указывается строго соответствующее ему внутреннее состояние ξ^*.

3. Примеры построения напряженно-деформированных состояний тел от объемных сил. Ниже приведены примеры восстановления напряженно-деформированного состояния односвязных эластостатических тел, порожденного объемными силами полиномиального характера.

3.1. Тестирование алгоритма восстановления напряженно-деформированного состояния, строго соответствующего объемной силе. Процедура восстановления строгого решения задачи о напряженно-деформированном состоянии односвязного линейно-упругого тела, вызванном полиномиальными силами, была успешно проверена на объектах довольно высокого 13-го порядка полиномов и убедила в факте строгого построения соответствующего внутреннего состояния.

В качестве примера приводим вариант задачи, результаты решения которой имеют компактный характер. Пусть односвязное тело находится под воздействием объемной силы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 + xy \\ -6x^2 z \\ 2xyz \end{pmatrix}, \tag{7}$$

разложенной в сумму слагаемых четырех кластеров $\mathbf{X}^{\langle k\rangle}$:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=0}^{3} \mathbf{X}^{\langle k\rangle},$$

$$\mathbf{X}^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6x^2 z \\ 2xyz \end{pmatrix}.$$

С каждым слагаемым этой суммы выполнялись внутрикластерные операции, рационально строились соответствующие внутренние состояния. Накопленное суммарно внутреннее состояние $\xi = \sum_k \xi^{*\langle k\rangle}$ дало результат

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}x^3 y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{18}yz^4 \\ \frac{1}{36}x^4 + \frac{1}{2}x^4 z + \frac{1}{18}xz^4 \\ -\frac{1}{9}xyz^3 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}x^2y & \frac{1}{36}x^3 + x^3z + \frac{1}{18}z^4 & -\frac{1}{2}z + \frac{1}{18}yz^3 \\ \frac{1}{36}x^3 + x^3z + \frac{1}{18}z^4 & 0 & \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{18}xz^3 \\ -\frac{1}{2}z + \frac{1}{18}yz^3 & \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{18}xz^3 & -\frac{1}{3}xyz^2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}xyz^2 & \frac{1}{18}x^3 + 2x^3z + \frac{1}{9}z^4 & -z + \frac{1}{9}yz^3 \\ \frac{1}{18}x^3 + 2x^3z + \frac{1}{9}z^4 & -\frac{1}{6}x^2y - \frac{1}{3}xyz^2 & \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{9}xz^3 \\ -z + \frac{1}{9}yz^3 & \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{9}xz^3 & -\frac{1}{6}x^2y - xyz^2 \end{pmatrix}.$$

При этом цепочка действий (1) привела в точности к состоянию (7), что подчеркнуло строгий характер полученного решения.

3.2. Состояние шара, находящегося под действием центральных сил и сил инерции. В качестве расчетного примера рассматривается однородный шар безразмерного радиуса 1, находящегося под действием центральных сил (силы типа удельного веса в плоти Земли) и сил инерции, вызванных вращением шара вокруг оси SN (см. рисунок, ω — угловая скорость).

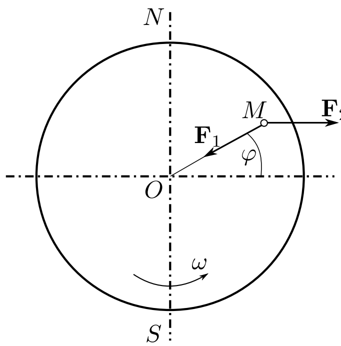


Схема нагружения однородного шара объемными силами
[Scheme of loading a homogeneous ball with bulk forces]

Будем полагать положение точки M описываемым радиус-вектором $\mathbf{r}$ в центральной системе координат $Oxyz$. Величины сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ зависят от физико-геометрических параметров объекта. После обезразмеривания считаем их характеризуемыми константами f_1, f_2 соответственно:

$$\mathbf{F}_1 = -f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

так что их сумма

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} (f_2 - f_1)x \\ (f_2 - f_1)y \\ -f_1 z \end{pmatrix}$$

и определяет внутреннюю объемную силу шара.

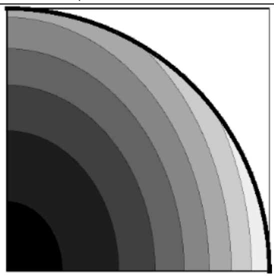
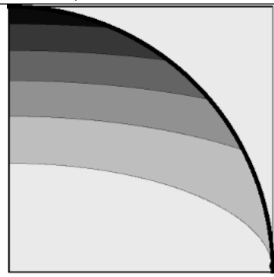
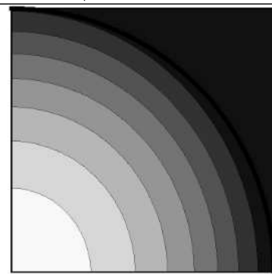
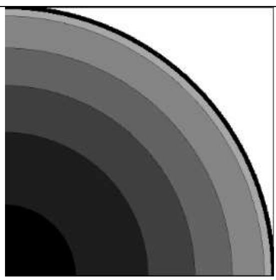
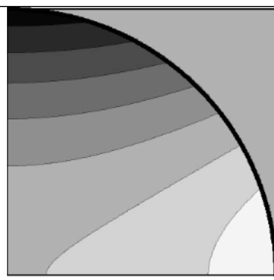
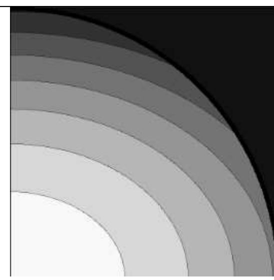
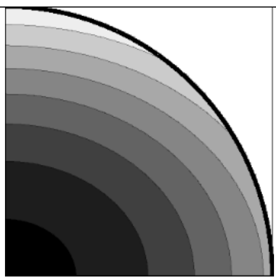
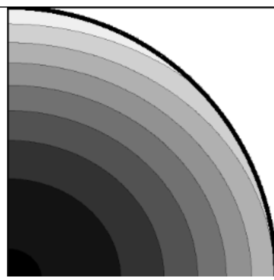
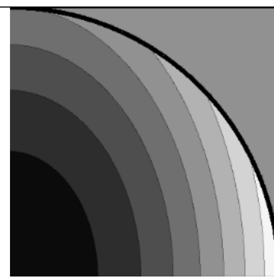
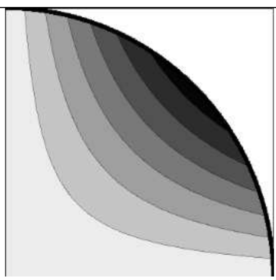
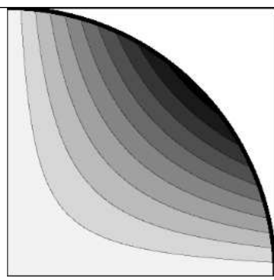
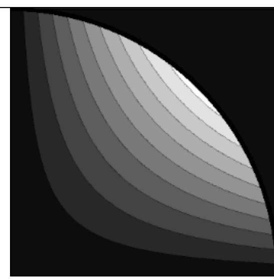
Интерес представляет модификация внутреннего состояния при различных соотношениях параметров f_1, f_2. В табл. 2 приведены результаты обследования трех ярко выраженных состояний:

1) медленное вращение: $f_2 \ll f_1$ (положено $f_2 = 0$);
2) компенсационное вращение: $f_2 \approx f_1$ (положено $f_2 = f_1$);
3) быстрое вращение $f_2 \gg f_1$ (положено $f_1 = 0$).

В табл. 2 приведены качественные картины распределения напряжений в радиальном сечении однородного упругого тела с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/4$ (первый квадрант сечения в плоскости $Oxyz$). Фон за пределами четверти круга соответствует нулевому уровню соответствующих напряжений, более светлые тона отвечают большим напряжениям (при растяжении соответствующих волокон — нормальным напряжениям; при сужении

Таблица 2

Напряженное состояние гравитационного вращающегося тела
[Stress state of a gravitational rotating body]

	Slow rotation $f_2 \ll f_1$ (supposed to $f_2 = 0$)	Compensation rotation $f_2 \approx f_1$ (supposed to $f_2 = f_1$)	Fast rotation $f_2 \gg f_1$ (supposed to $f_1 = 0$)
σ_{xx}			
σ_{yy}			
σ_{zz}			
σ_{xz}			

угла xOz — напряжениям сдвига σ_{xz}). При комментировании рисунков будем употреблять термины, принятые при описании геометрии Земного шара — экваториальное сечение, полярная ось SN, широта. Вследствие непрерывной зависимости решения от значения коэффициента ν будем допускать прогнозы при его малой вариации.

При медленном вращении шара наибольшее сжатие материала тела происходит в его центре. Расширение углов сдвиговых деформаций наибольшее в средних широтах на поверхности шара. В реальности для слабо сжимаемых тел здесь следует ожидать эффектов, ориентирующихся на хрупкое разрушение, образование трещин (то же при компенсационном вращении).

При компенсационном вращении, когда силы инерции частично уравновешивают гравитационные силы, радиальные волокна вблизи экваториальной плоскости практически не деформируются, а при приближении к полюсам SN ожидается их сжатие. Вблизи полюсов также сжимаются окружные волокна, а вот вблизи поверхности шара в «граничных» зонах они, наоборот, растягиваются.

При быстром вращении радиальные и окружные волокна значительно растягиваются вблизи центра шара, в то время как осевые волокна в этой области, наоборот, укорачиваются. На большей части поверхности (чем ближе к экватору, тем сильнее) осевые волокна, напротив, удлиняются. При очень быстром вращении «мягких» материалов это может служить причиной их стремления к образованию тороидальных тел (на геометрически линейном уровне это констатировать не удается). В средних широтах поверхности шара происходит сужение межволоконных углов, что препятствует образованию радиальных трещин хрупких сред в этих местах. В этом состоит принципиальное отличие от медленных и компенсационных вращений.

Выводы.

1. Теоретически обеспечены процедуры восстановления внутреннего состояния односвязного линейно-упругого тела при квазистатическом нагружении полиномиальными объемными силами произвольного физического смысла.
2. Построен и реализован в системе Mathematica эффективный алгоритм весьма быстрого восстановления напряженно-деформированного состояния, отвечающего объемным силам. Время счета измеряется минутами; при использовании энергетических методов затрачиваются часы.
3. Выполнено тестирование указанных процедур для полиномиальных объемных сил высокой степени многочленов, что гарантирует его эффективное применение даже в задачах нелинейной теории упругости, в которых нелинейные соотношения раскладываются средствами метода возмущений в последовательность линейных с традиционно искусственно порождаемыми объемными силами именно полиномиального характера.
4. Эффективность алгоритма продемонстрирована на задаче о вращении однородного гравитационного шара при различных соотношениях параметров гравитации и вращения. Это позволило сделать ряд качественных выводов о состоянии тела.

Ближайшей перспективой развития подхода к восстановлению напряженно-деформированного состояния от объемных сил является расширение области его применения на однополостные и многополостные ограниченные и неограниченные тела. Технически такой приближенный подход уже реализуется [21], но соответствующее обоснование еще не выполнено. Еще более весомым явился бы результат, дающий строгое решение таких задач.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19–41–480003 р_а.

Библиографический список

1. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics. Vol. 1: General Concepts* / Pure and Applied Mathematics. vol. 71. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977. xxiii+280 pp.
2. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела.* М.: Наука, 1988. 712 с.
3. Лурье А. И. *Теория упругости.* М.: Наука, 1970. 940 с.
4. Мусхелишвили Н. И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966. 707 с.
5. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity.* New York: Dover Publications, 1992. xvi+457 pp.
6. Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists.* Amsterdam: Elsiver/Academic Press, 2005. xii+1182 pp.
7. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel // *ZAMM*, 1934. vol. 14, no. 4. pp. 203–212. https://doi.org/10.1002/zamm.19340140404.
8. Матвеенко В. П., Шевелев Н. А. Аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния тел вращения, находящихся под действием массовых сил / *Напряженно-деформированное состояние конструкций из упругих и вязкоупругих материалов.* Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. С. 54–60.
9. Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В. Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объемных сил // *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2016. Т. 71, № 4. С. 48–54.
10. Шарафутдинов Г. З. Функции комплексного переменного в задачах теории упругости при наличии массовых сил // *ПММ*, 2009. Т. 73, № 1. С. 69–87.
11. Зайцев А. В., Фукалов А. А. Точные аналитические решения задач о равновесии упругих анизотропных тел с центральной и осевой симметрией, находящихся в поле гравитационных сил, и их приложения к задачам геомеханики // *Математическое моделирование в естественных науках*, 2015. Т. 1. С. 141–144.
12. Пикуль В. В. К аномальному деформированию твердых тел // *Физическая мезомеханика*, 2013. Т. 16, № 2. С. 93–100.
13. Козлов В. В. Сила Лоренца и ее обобщения // *Нелинейная динам.*, 2011. Т. 7, № 3. С. 627–634.
14. Саталкина Л. В. *Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости*: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Липецк, 2010. 108 с.
15. Penkov V. B., Novikov E. A., Novikova O. S., Levina L. V. Combining the method of boundary states and the Lindstedt–Poincaré method in geometrically nonlinear elastostatics // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020. vol. 1479, 012135. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012135.

16. Иванычев Д. А., Новиков Е. А. Решение физически нелинейных задач для изотропных тел методом граничных состояний / *Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела.* Тверь: ТвГТУ, 2021. С. 43–47.
17. Penkov V. B., Ivanychev D. A., Levina L. V., Novikov E. A. Using the method of boundary states with perturbations to solve physically nonlinear problems of the theory of elasticity // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020. vol. 1479, 012134. `https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012134`.
18. Кузьменко В. И., Кузьменко Н. В., Левина Л. В., Пеньков В. Б. Способ решения задач изотропной теории упругости с объемными силами в полиномиальном представлении // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 1. С. 84–94. `https://doi.org/10.1134/S0032823519010053`.
19. Пеньков В. Б., Левина Л. В., Новикова О. С. Аналитическое решение задач эластостатики односвязного тела, нагруженного неконсервативными объемными силами. Теоретическое и алгоритмическое обеспечение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 56–73. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1711`.
20. Иванычев Д. А. Метод граничных состояний при решении смешанной задачи теории анизотропной упругости с массовыми силами // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2021. № 71. С. 63–77. `https://doi.org/10.17223/19988621/71/6`.
21. Пеньков В. Б., Рыбакова М. Р., Саталкина Л. В. Применение алгоритма Шварца к пространственным задачам теории упругости // *Вести вузов Черноземья*, 2015. № 2 (40). С. 23–31.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 475–490
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1864

MSC: 74A10

Rigorous solution of the problem of the state of a linearly elastic isotropic body under the action of polynomial bulk forces

© *V. B. Penkov, L. V. Levina, E. A. Novikov*

Lipetsk State Technical University,
30, Moskovskaya st., 398055, Russian Federation.

Abstract

When solving boundary value problems about the construction of the stress-strain state of an linearly elastic, isotropic body, an important step is finding the internal state generated by the forces, distributed over the area occupied by the body. In the classical version, there is a numerical method for estimating the state at any point of the body based on the singular-integral representation of Cesaro. In the variant of conservative bulk forces, it is possible to construct solutions in an analytical form. With arbitrary regular effects of mechanical and other physical nature the force is not potential and the approaches of Papkovich–Neiber and Arzhanykh–Slobodyansky are powerless. In addition, the solution of nonlinear problems of elastostatics by means of the perturbation method, as well as the use of the Schwarz algorithm in solving problems for the study of multi-cavity solids, lead to the need to solve a sequence of linear problems. At the same time, fictitious bulk forces are necessarily generated, which as a rule have a polynomial nature.

The method proposed by the authors earlier for estimating the stress-strain state of a solid caused by the action of polynomial bulk forces represented in Cartesian coordinates has been improved. The internal state is restored in strict accordance with the forces statically acting on a simply connected bounded linear-elastic body. An effective method for constructing a solution and an algorithm for its computer implementation are proposed and described. Test calculations are demonstrated. The analysis of the state of the ball under the action of a superposition of bulk forces of different nature at different ratios of parameters that emphasize the level of influence of

Research Article

Please cite this article in press as:
Penkov V. B., Levina L. V., Novikov E. A. Rigorous solution of the problem of the state of a linearly elastic isotropic body under the action of polynomial bulk forces, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 475–490. https://doi.org/10.14498/vsgtu1864 (In Russian).

Authors' Details:

Viktor B. Penkov https://orcid.org/0000-0002-6059-1856
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of General Mechanics; e-mail: vbpenkov@mail.ru

Lyubov V. Levina https://orcid.org/0000-0002-7441-835X
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

Evgeny A. Novikov https://orcid.org/0000-0001-5606-5207
Postgraduate Student; Dept. of General Mechanics; e-mail: 89513027802@mail.ru

these factors is performed. The results are presented graphically. Conclusions are drawn:

a) the procedure for writing out the stress-strain state on the volume forces represented by polynomials from Cartesian coordinates is justified;
b) the algorithm is implemented in the Mathematica computing system and tested on high-order polynomials;
c) the analysis of the quasi-static state of a linear-elastic isotropic ball exposed to the forces of gravity and inertia at various combinations of parameters corresponding to the variants of slow, fast, compensatory (inertial forces are proportional to the gravitational) rotations is carried out.

The prospects for the development of a new approach to the class of bounded and unbounded bodies containing an arbitrary number of cavities are noted.

Keywords: bulk forces, partial solution, stress-strain state from bulk forces, linear elastostatics, elasticity theory, partial solution of the Lame equations.

Received: 22nd April, 2021 / Revised: 7th September, 2021 / Accepted: 20th September, 2021 / First online: 30th September, 2021

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Lipetsk Region (grant no. 19–41–480003 r_a).

References

1. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics. Vol. 1: General Concepts*, Pure and Applied Mathematics, vol. 71. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1977, xxiii+280 pp.
2. Rabotnov Yu. N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a Deformable Rigid Body]. Moscow, Nauka, 1988, 712 pp. (In Russian)
3. Lurie A. I. *Theory of Elasticity*, Foundations of Engineering Mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 2005, iv+1050 pp. `https://doi.org/10.1007/978-3-540-26455-2`.
4. Muskhelishvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 707 pp. (In Russian)
5. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. New York, Dover Publications, 1992, xvi+457 pp.
6. Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Amsterdam, Elsiver/Academic Press, 2005, xii+1182 pp.
7. Neuber H. Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, *ZAMM*, 1934, vol. 14, no. 4, pp. 203–212. `https://doi.org/10.1002/zamm.19340140404`.
8. Matveenko V. P., Schevelev N. A. Analytical study of the stress-strain state of rotation bodies under the action of mass forces, In: *Stress-Strain State of Structures Made of Elastic and Viscoelastic Materials*. Sverdlovsk, 1977, pp. 54–60 (In Russian).
9. Vestyak V. A., Tarlakovsky D. V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic space with a spherical cavity under the action of bulk forces, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 4, pp. 87–92. `https://doi.org/10.3103/S0027133016040038`.

10. Sharafutdinov G. Z. Functions of a complex variable in problems in the theory of elasticity with mass forces, *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 69–87. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.03.008.
11. Zaytsev A. V, Fukalov A. A. Exact analytical solutions of equilibrium problems for elastic anisotropic bodies with central and axial symmetry, which are in the field of gravitational forces, and their applications to the problems of geomechanics, *Matemat. Model. Estestv. Nauk.*, 2015, vol. 1, pp. 141–144 (In Russian).
12. Pikul V. V. To anomalous deformation of solids, *Physical Mesomechanics*, 2013, no. 2, pp. 93–100 (In Russian).
13. Kozlov V. V. The Lorentz force and its generalizations, *Nelin. Dinam.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 627–634 (In Russian).
14. Satalkina L. V. *The method of boundary states in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies and thermoelasticity*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Lipetsk, 2010, 108 pp. (In Russian)
15. Penkov V. B., Novikov E. A., Novikova O. S., Levina L. V. Combining the method of boundary states and the Lindstedt–Poincaré method in geometrically nonlinear elastostatics, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1479, 012135. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012135.
16. Ivanychev D. A., Novikov E. A. The solution of physically nonlinear problems for isotropic bodies by the method of boundary states, In: *Problems of Strength, Plasticity, and Stability in Solid Mechanics*. Tver, Tver State Techn. Univ., 2021, pp. 43–47 (In Russian).
17. Penkov V. B., Ivanychev D. A., Levina L. V., Novikov E. A. Using the method of boundary states with perturbations to solve physically nonlinear problems of the theory of elasticity, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1479, 012134. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012134.
18. Kuzmenko V. I., Kuzmenko N. V., Levina L. V., Penkov V. B. A method for solving problems of the isotropic elasticity theory with bulk forces in polynomial representation, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 5, pp. 741–749. https://doi.org/10.3103/S0025654419050108.
19. Penkov V. B., Levina L. V., Novikova O. S. Analytical solution of elastostatic problems of a simply connected body loaded with nonconservative volume forces: theoretical and algorithmic support, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 56–73 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1711.
20. Ivanychev D. A. A boundary state method for solving a mixed problem of the theory of anisotropic elasticity with mass forces, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, no. 71, pp. 63–77 (In Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/71/6.
21. Penkov V.B., Rybakova M. R., Satalkina L. V. Application of the Schwarz algorithm to spatial problems of elasticity theory, *Vesti Vuzov Chernozemya*, 2015, no. 2 (40), pp. 23–31 (In Russian).

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 491–507
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1860

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

MSC: 35C10, 76D05, 35G20

Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows

© *N. V. Burmasheva*[1,2], *E. Yu. Prosviryakov*[1,2]

[1] Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.
[2] Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin,
19, Mira st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation.

Abstract

The paper considers the necessity of constructing exact solutions to the equations of dynamics of a viscous fluid stratified in terms of several physical characteristics, with density and viscosity taken as an example. The application of the families of exact solutions constructed for stratified fluids to modeling various technological processes dealing with moving viscous fluid media is discussed. Based on Lin's exact solutions, linear in some coordinates, a class of exact solutions to the Navier–Stokes equations is constructed for viscous multilayer media in a mass force field. The class is then extended to the case of the arbitrary relation of kinetic force fields to all three Cartesian coordinates and time. The issues of overdetermination and solvability of the reduced (based on the families under study) Navier–Stokes equation system supplemented by the incompressibility equation are discussed. The case of isobaric shearing flow outside the mass force field is considered in detail as an illustration. Three approaches to obtaining consistency conditions for the overdetermined reduced system of motion equations are discussed, and their interrelation is shown.

Keywords: Navier–Stokes equations, exact solution, stratified fluid, mass force field, overdetermined reduced system.

Received: 26th March, 2021 / Revised: 15th July, 2021 /
Accepted: 31st August, 2021 / First online: 30th September, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:
Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 491–507. https://doi.org/10.14498/vsgtu1860.

Authors' Details:
Natalya V. Burmasheva https://orcid.org/0000-0003-4711-1894
Cand. Tech. Sci.; Senior Researcher; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[1]; Associate Professor; Dept. of Theoretical Mechanics[2]; e-mail: nat_burm@mail.ru

Introduction. When exact solutions to the Navier–Stokes equations are sought, the main attention is given to homogeneous incompressible fluids with a constant density [1–12]. These theoretical results describe a very wide class of hydrodynamic phenomena for various time and spatial scales and enable viscometers and chemical engineering devices to be designed [13–18]. The construction of mathematical models of film flows [19–23], the analysis of processes in chemical engineering devices [19, 24, 25], and the solution of problems in astrophysics, aerophysics and geophysical hydrodynamics are based on the use of stratified fluids [26–32].

Multilayer structures in isothermal flows of viscous incompressible fluids arise from density stratification. Fluid incompressibility means that density is a Lagrangian invariant [32–35]. In other words, the characteristics of velocity field distribution vary in time and space. The most essential variation of fluid flow at a constant temperature manifests itself with respect to the vertical (transverse) coordinate. Density stratification along the vertical coordinate affects the dynamics of large structures and the energy exchange between vortices of different magnitudes, and it generates the appearance of internal waves [32, 36–39]. Note that the presence of density gradients with respect to the horizontal (longitudinal) coordinates induces various convections [1, 4–7]. Undoubtedly, the density stratification is determined by a continuous time and coordinate function. However, this dependence may prove unknown, or its value may be obtained rather approximately, and this may eventually lead to studying ill-defined problems of hydrodynamics and mathematical physics. In this case, researchers use models of a step density function; i.e., density and, strictly speaking, the coefficient of dynamic viscosity are specified for each fluid flow layer. This approach is applied, e.g., to study the instability of large-scale circulation. The study of hydrodynamic instability is in this case associated with the substitution of continuous stratification by multilayer models, two-layer ones being the most widespread [36, 40–44]. Another example of using two-layer and three-layer fluids is their application to the description of equatorial flows [31, 32, 45, 46]. The discussion found in [47–58] is based on the numerical integration of motion equations.

Thus, it seems urgent to construct a class of exact solutions to the Navier–Stokes problems for describing stratified fluid flows with a step density function. This paper constructs several families of exact solutions.

1. Problem statement. We consider a flowing fluid consisting of n layers (Fig. 1). Each i-th layer is characterized by density ρ_i, dynamic viscosity η_i, and thickness h_i. The motion equations for each layer can then be written in the invariant form as

$$\rho_i \frac{d\vec{V}^{(i)}}{dt} = -\nabla P^{(i)} + \eta_i \triangle \vec{V}^{(i)} + \vec{F}^{(i)}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{V}^{(i)} = 0. \tag{2}$$

Here, the velocity vector $\vec{V}^{(i)}$ has the coordinates $\vec{V}^{(i)} = \left(V_x^{(i)}, V_y^{(i)}, V_z^{(i)}\right)$, and the mass force vector $\vec{F}^{(i)}$ has the coordinates $\vec{F}^{(i)} = \left(F_x^{(i)}, F_y^{(i)}, F_z^{(i)}\right)$. The differential

Evgeniy Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[1]; Professor; Dept. of Theoretical Mechanics[2]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

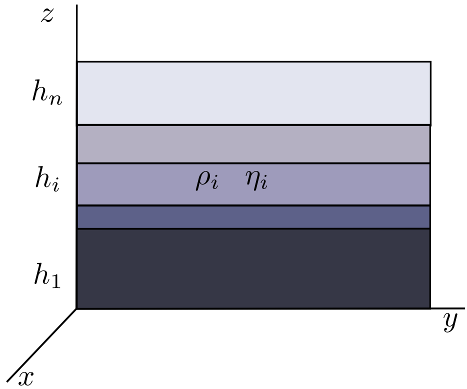


Figure 1. Schematic flow of a stratified fluid

operator $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}^{(i)} \cdot \nabla\right)$. Note that the equation system (1), (2) is closed since the number of equations in it coincides with the number of required functions which here are the projections of the velocity vector $\vec{V}^{(i)}$ and pressure $P^{(i)}$. Note that the function $P^{(i)}$ is introduced for the convenience of the analytical and numerical integration of the system (1), (2), which consists of the Navier–Stokes equation (1) and the incompressibility equation (2).

2. The families of exact solutions for describing three-dimensional flows. To study the properties of stratified fluid flows, it is necessary to have a store of exact solutions to the Navier–Stokes equations satisfying the incompressibility equation. The exact solution to the system (1), (2) will be sought within the Lin–Sidorov–Aristov family [1]. For each layer ($i = 1, \dots, n$) the velocity field is representable as

$$\begin{aligned} V_x^{(i)} &= U^{(i)}(z,t) + u_1^{(i)}(z,t)x + u_2^{(i)}(z,t)y, \\ V_y^{(i)} &= V^{(i)}(z,t) + v_1^{(i)}(z,t)x + v_2^{(i)}(z,t)y, \\ V_z^{(i)} &= w^{(i)}(z,t). \end{aligned} \tag{3}$$

Note that Eqs. (3) can be treated as a Taylor series expansion of the velocity vector components, restricted to only linear terms.

The structure of Eq. (1) suggests that the pressure $P^{(i)}$ and some projections of the mass force vector $\vec{F}^{(i)}$ needs to be treated as quadratic forms of the same spatial coordinates,

$$\begin{aligned} P^{(i)} = P_0^{(i)}(z,t) + P_1^{(i)}(z,t)x + P_2^{(i)}(z,t)y + \\ + P_{11}^{(i)}(z,t)\frac{x^2}{2} + P_{12}^{(i)}(z,t)xy + P_{22}^{(i)}(z,t)\frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x^{(i)} &= A_0^{(i)}(z,t) + A_1^{(i)}(z,t)x + A_2^{(i)}(z,t)y, \\ F_y^{(i)} &= B_0^{(i)}(z,t) + B_1^{(i)}(z,t)x + B_2^{(i)}(z,t)y, \end{aligned} \tag{4}$$

$$F_z^{(i)} = C_0^{(i)}(z,t) + C_1^{(i)}(z,t)x + C_2^{(i)}(z,t)y + \\ + C_{11}^{(i)}(z,t)\frac{x^2}{2} + C_{12}^{(i)}(z,t)xy + C_{22}^{(i)}(z,t)\frac{y^2}{2}.$$

Substitute the representations (3), (4) in turns into each scalar equation of the system (1), (2), starting with the projection of the Navier–Stokes equation (1) onto the Ox axis:

$$\rho_i\Big(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x^{(i)}\frac{\partial V_x^{(i)}}{\partial x} + V_y^{(i)}\frac{\partial V_x^{(i)}}{\partial y} + V_z^{(i)}\frac{\partial V_x^{(i)}}{\partial z}\Big) = \\ = -\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x} + \eta_i\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)V_x^{(i)} + F_x^{(i)}.$$

Substituting the expressions for velocity, pressure, and mass forces into the latter equation, we obtain

$$\rho_i\Big[\frac{\partial(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y)}{\partial t} + \big(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y\big)\frac{\partial(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y)}{\partial x} + \\ + \big(V^{(i)} + v_1^{(i)}x + v_2^{(i)}y\big)\frac{\partial(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y)}{\partial y} + w^{(i)}\frac{\partial(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y)}{\partial z}\Big] = \\ = -\frac{\partial(P_0^{(i)} + P_1^{(i)}x + P_2^{(i)}y + P_{11}^{(i)}\frac{x^2}{2} + P_{12}^{(i)}xy + P_{22}^{(i)}\frac{y^2}{2})}{\partial x} + \\ + \eta_i\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\big(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y\big) + \big(A_0^{(i)} + A_1^{(i)}x + A_2^{(i)}y\big).$$

Then, by calculating the partial derivatives involved in this equation, we can simplify the latter relationship as follows:

$$\rho_i\Big[\Big(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t}x + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}y\Big) + \big(U^{(i)} + u_1^{(i)}x + u_2^{(i)}y\big)u_1^{(i)} + \\ + \big(V^{(i)} + v_1^{(i)}x + v_2^{(i)}y\big)u_2^{(i)} + w^{(i)}\Big(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z}x + \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z}y\Big)\Big] = \\ = -\big(P_1^{(i)} + P_{11}^{(i)}x + P_{12}^{(i)}y\big) + \eta_i\Big(\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial z^2}x + \frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial z^2}y\Big) + \\ + \big(A_0^{(i)} + A_1^{(i)}x + A_2^{(i)}y\big).$$

Note that both the left- and right-hand sides of this equation are linear forms in the x- and y-coordinates. Taking into account that these coordinates are independent parameters and applying the principle of undetermined coefficients, we arrive at the following partial differential system:

$$\rho_i\Big(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + U^{(i)}u_1^{(i)} + V^{(i)}u_2^{(i)} + w^{(i)}\frac{\partial U^{(i)}}{\partial z}\Big) = -P_1^{(i)} + \eta_i\frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial z^2} + A_0^{(i)},$$

$$\rho_i\Big(\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t} + (u_1^{(i)})^2 + v_1^{(i)}u_2^{(i)} + w^{(i)}\frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial z}\Big) = -P_{11}^{(i)} + \eta_i\frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial z^2} + A_1^{(i)}, \qquad (5)$$

$$\rho_i\Big(\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial t}+u_2^{(i)}u_1^{(i)}+v_2^{(i)}u_2^{(i)}+w^{(i)}\frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial z}\Big)=-P_{12}^{(i)}+\eta_i\frac{\partial^2 u_2^{(i)}}{\partial z^2}+A_2^{(i)}.$$

The functions involved in the equations of system (5) depend only on the vertical variable z and time t, with respect to which the differentiation is performed. In the case of steady-state flows, system (5) becomes an ordinary differential system preserving nonlinearity and inhomogeneity.

Acting the same way, we obtain the following consequences from the second and third Navier–Stokes equations (1). Having substituted Eqs. (3) and (4) into these equations and calculated the corresponding derivatives, we arrive at the following two equations:

$$\begin{aligned}\rho_i\Big[\Big(\frac{\partial V^{(i)}}{\partial t}+\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial t}x+\frac{\partial v_2^{(i)}}{\partial t}y\Big)+\big(U^{(i)}+u_1^{(i)}x+u_2^{(i)}y\big)v_1^{(i)}+\\+\big(V^{(i)}+v_1^{(i)}x+v_2^{(i)}y\big)v_2^{(i)}+w^{(i)}\Big(\frac{\partial V^{(i)}}{\partial z}+\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial z}x+\frac{\partial v_2^{(i)}}{\partial z}y\Big)\Big]=\\=-\big(P_2^{(i)}+P_{12}^{(i)}x+P_{22}^{(i)}y\big)+\eta_i\Big(\frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v_1^{(i)}}{\partial z^2}x+\frac{\partial^2 v_2^{(i)}}{\partial z^2}y\Big)+\\+\big(B_0^{(i)}+B_1^{(i)}x+B_2^{(i)}y\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_i\Big(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial t}+w^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}\Big)=\\=-\Big(\frac{\partial P_0^{(i)}}{\partial z}+\frac{\partial P_1^{(i)}}{\partial z}x+\frac{\partial P_2^{(i)}}{\partial z}y+\frac{\partial P_{11}^{(i)}}{\partial z}\frac{x^2}{2}+\frac{\partial P_{12}^{(i)}}{\partial z}xy+\frac{\partial P_{22}^{(i)}}{\partial z}\frac{y^2}{2}\Big)+\\+\eta_i\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z^2}+\Big(C_0^{(i)}+C_1^{(i)}x+C_2^{(i)}y+C_{11}^{(i)}\frac{x^2}{2}+C_{12}^{(i)}xy+C_{22}^{(i)}\frac{y^2}{2}\Big).\end{aligned}$$

By equating the coefficients of identical powers of the variables x and y in these equations, as well as their various nonlinear combinations, we arrive at the following relationships:

$$\begin{aligned}&\rho_i\Big(\frac{\partial V^{(i)}}{\partial t}+V^{(i)}v_1^{(i)}+V^{(i)}v_2^{(i)}+w^{(i)}\frac{\partial V^{(i)}}{\partial z}\Big)=-P_2^{(i)}+\eta_i\frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial z^2}+B_0^{(i)},\\&\rho_i\Big(\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial t}+u_1^{(i)}v_1^{(i)}+v_1^{(i)}v_2^{(i)}+w^{(i)}\frac{\partial v_1^{(i)}}{\partial z}\Big)=-P_{12}^{(i)}+\eta_i\frac{\partial^2 v_1^{(i)}}{\partial z^2}+B_1^{(i)},\\&\rho_i\Big(\frac{\partial v_2^{(i)}}{\partial t}+u_2^{(i)}v_1^{(i)}+(v_2^{(i)})^2+w^{(i)}\frac{\partial v_2^{(i)}}{\partial z}\Big)=-P_{22}^{(i)}+\eta_i\frac{\partial^2 v_2^{(i)}}{\partial z^2}+B_2^{(i)},\\&\rho_i\Big(\frac{\partial w^{(i)}}{\partial t}+w^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial z}\Big)=-\frac{\partial P_0^{(i)}}{\partial z}+\eta_i\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial z^2}+C_0^{(i)};\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P_1^{(i)}}{\partial z}=C_1^{(i)},\quad \frac{\partial P_2^{(i)}}{\partial z}=C_2^{(i)},\\&\frac{\partial P_{11}^{(i)}}{\partial z}=C_{11}^{(i)},\quad \frac{\partial P_{12}^{(i)}}{\partial z}=C_{12}^{(i)},\quad \frac{\partial P_{22}^{(i)}}{\partial z}=C_{22}^{(i)}.\end{aligned}\tag{7}$$

Consideration of Eqs. (3) and (4) in the incompressibility equation (2) results in the following conditions:

$$u_1^{(i)} + v_2^{(i)} + \frac{\partial w^{(i)}}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

System (5)–(8) contains thirteen equations with respect to thirteen coefficients in Eqs. (3) and (4) for the velocity field and the pressure field in the i-th layer under study. Thus, the reduced system (5)–(8) inherits nonlinearity and closedness from system (1), (2).

Besides, in view of system (7), the linear and nonlinear terms in the representation of pressure in Eq. (4) can be considered unknown functions uniquely determined from the boundary condition for pressure and the boundary conditions at the layer boundaries. The constant term in Eqs. (4) (background pressure $P_0^{(i)}$) is determined by the integration of the first equation in system (7) after the vertical velocity $w^{(i)}$ is found.

The formulae in system (5)–(8) determine the class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocities on the spatial coordinates x and y. These variables are often referred to as horizontal in applied research. Recall that the pressure field (4) is a quadratic form. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for the velocity field quadratically dependent on two spatial variables were presented in [59] as

$$\begin{aligned}
&V_x = U_1(z,t) + xU_2(z,t) + yU_3(z,t) + \frac{x^2}{2}U_4(z,t) + xyU_5(z,t) + \frac{y^2}{2}U_6(z,t),\\
&V_y = V_1(z,t) + xV_2(z,t) + yV_3(z,t) + \frac{x^2}{2}V_4(z,t) + xyV_5(z,t) + \frac{y^2}{2}V_6(z,t),\\
&V_z = W_1 + xW_2 + yW_3.
\end{aligned}$$

In this case, the pressure field and the mass force field are described by a polynomial relationship as

$$\begin{aligned}
P = {} & P_1(z,t) + xP_2(z,t) + yP_3(z,t) + \frac{x^2}{2}P_4(z,t) + xyP_5(z,t) + \\
&+ \frac{y^2}{2}P_6(z,t) + \frac{x^3}{6}P_7(z,t) + \frac{x^2y}{2}P_8(z,t) + \frac{xy^2}{2}P_9(z,t) + \frac{y^3}{6}P_{10}(z,t) + \\
&+ \frac{x^4}{24}P_{11}(z,t) + \frac{x^3y}{6}P_{12}(z,t) + \frac{x^2y^2}{4}P_{13}(z,t) + \frac{xy^3}{6}P_{14}(z,t) + \frac{y^4}{24}P_{15}(z,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A = {} & A_1(z,t) + xA_2(z,t) + yA_3(z,t) + \frac{x^2}{2}A_4(z,t) + xyA_5(z,t) + \frac{y^2}{2}A_6(z,t) + \\
&+ \frac{x^3}{6}A_7(z,t) + \frac{x^2y}{2}A_8(z,t) + \frac{xy^2}{2}A_9(z,t) + \frac{y^3}{6}A_{10}(z,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = {} & B_1(z,t) + xB_2(z,t) + yB_3(z,t) + \frac{x^2}{2}B_4(z,t) + xyB_5(z,t) + \frac{y^2}{2}B_6(z,t) + \\
&+ \frac{x^3}{6}B_7(z,t) + \frac{x^2y}{2}B_8(z,t) + \frac{xy^2}{2}B_9(z,t) + \frac{y^3}{6}B_{10}(z,t),
\end{aligned}$$

$$C = C_1(z,t) + xC_2(z,t) + yC_3(z,t) + \frac{x^2}{2}C_4(z,t) + xyC_5(z,t) + \frac{y^2}{2}C_6(z,t) +$$
$$+ \frac{x^3}{6}C_7(z,t) + \frac{x^2 y}{2}C_8(z,t) + \frac{xy^2}{2}C_9(z,t) + \frac{y^3}{6}C_{10}(z,t) +$$
$$+ \frac{x^4}{24}C_{11}(z,t) + \frac{x^3 y}{6}C_{12}(z,t) + \frac{x^2 y^2}{4}C_{13}(z,t) + \frac{xy^3}{6}C_{14}(z,t) + \frac{y^4}{24}C_{15}(z,t).$$

The equation system describing the unknown functions consists of thirty-eight equations for the determination of thirty unknown functions [59]. Thus, there is great arbitrariness in the construction of exact solutions to the Navier–Stokes equations. The route of finding "excess" equations when obtaining a partial differential system of the heat-conduction type was shown in [59].

By analogy, other solutions with an arbitrary dependence of the velocity field on the horizontal coordinates can be constructed. System (1), (2) is linear in this case; therefore, the following exact solution is valid:

$$V_x = \sum_{k=0}^{n} U_k, \quad V_y = \sum_{k=0}^{n} V_k, \quad V_z = \sum_{k=0}^{n-1} W_k,$$

$$A = \sum_{k=0}^{n^2-n} A_k, \quad B = \sum_{k=0}^{n^2-n} B_k, \quad C = \sum_{k=0}^{n^2-n+1} C_k, \quad P = \sum_{k=0}^{n^2-n+1} P_k.$$

Here, the forms U_k, V_k, W_k, A_k, B_k, C_k, and P_k are determined by the expressions

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i U_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i}, & V_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i V_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i},\\
W_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i W_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i}, & A_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i A_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i},\\
B_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i B_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i}, & C_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i C_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i},\\
P_k &= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i P_{i(k-i)}\,(z;t)\,x^i y^{k-i}, & &
\end{aligned} \tag{9}$$

where C_k^i is the number of combinations without repetition. Note that, if the crawling (slow) flow of a viscous incompressible fluid is considered, the exact solution is transformed as follows:

$$V_x = \sum_{k=0}^{n} U_k, \quad V_y = \sum_{k=0}^{n} V_k, \quad V_z = \sum_{k=0}^{n-1} W_k,$$

$$A = \sum_{k=0}^{n+1} A_k, \quad B = \sum_{k=0}^{n+1} B_k, \quad C = \sum_{k=0}^{n+1} C_k, \quad P = \sum_{k=0}^{n+1} P_k.$$

3. Exact solutions for shearing flows. Let us now consider shearing flows outside the mass force field, i.e., an important particular case of isothermal flows of stratified fluids defined by Eqs. (3)–(8). Assume further that $V_z^{(i)} = 0$, $P^{(i)} = 0$, $\vec{F}^{(i)} = 0$. System (5)–(8) then becomes

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial {u_1}^{(i)}}{\partial t} + ({u_1}^{(i)})^2 + {v_1}^{(i)}{u_2}^{(i)} = \nu_i \frac{\partial^2 {u_1}^{(i)}}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial {u_2}^{(i)}}{\partial t} + {u_2}^{(i)}({u_1}^{(i)} + {v_2}^{(i)}) = \nu_i \frac{\partial^2 {u_2}^{(i)}}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial {v_1}^{(i)}}{\partial t} + ({u_1}^{(i)} + {v_2}^{(i)}){v_1}^{(i)} = \nu_i \frac{\partial^2 {v_1}^{(i)}}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial {v_2}^{(i)}}{\partial t} + {u_2}^{(i)}{v_1}^{(i)} + \left({v_2}^{(i)}\right)^2 = \nu_i \frac{\partial^2 {v_2}^{(i)}}{\partial z^2},\\
&{u_1}^{(i)} + {v_2}^{(i)} = 0;
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + U^{(i)}{u_1}^{(i)} + V^{(i)}u_2 = \nu_i \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial V^{(i)}}{\partial t} + U^{(i)}{v_1}^{(i)} + V^{(i)}{v_2}^{(i)} = \nu_i \frac{\partial^2 V^{(i)}}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Here $\nu_i = \eta_i/\rho_i$ is the kinematic viscosity of the i-th layer.

These flows are of interest due to the fact that the equations of system (10), (11) enable one to study the balance of convective and viscous forces. This is why incompressible fluid flows under constant pressure arouse great interest when they occur in large currents [1].

The slope of isobaric surfaces relative to isopotential (sea-level) surfaces generates gradient flows in the global ocean. In a rotating fluid, the Coriolis force makes the gradient flow deviate from the direction of gradient pressure, the direction of this deviation being different in different hemispheres. Thus, we have something like the geostrophic wind studied in meteorology [60]. The study of these flows is necessitated by practical considerations.

Note that changing to shearing flows, on the one hand, facilitates the problem due to a reduced number of unknown functions to be determined and, on the other hand, complicates it since the system of constitutive relations (10), (11) becomes overdetermined. The overdetermination lies in system (10). If the latter system is solved, i.e. if a nontrivial simultaneous solution is found, a single integration of the equations in system (11) will yield the homogeneous components of Eq. (1) for the velocity field.

Let us now discuss three ways of deriving consistency conditions for constructing exact solutions to the Navier–Stokes equations (1) and the incompressibility equation (2).

Approach I is the most general [2]. It allows us to obtain consistency conditions without reference to the solution structure (without using Eqs. (3) and (4). We write the Navier–Stokes equation (1) for isobaric shearing flows in the coordinate form as

$$\frac{\partial {V_x}^{(i)}}{\partial t} + {V_x}^{(i)}\frac{\partial {V_x}^{(i)}}{\partial x} + {V_y}^{(i)}\frac{\partial {V_x}^{(i)}}{\partial y} = \nu_i\Big(\frac{\partial^2 {V_x}^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 {V_x}^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 {V_x}^{(i)}}{\partial z^2}\Big), \tag{12}$$

$$\frac{\partial {V_y}^{(i)}}{\partial t} + {V_x}^{(i)}\frac{\partial {V_y}^{(i)}}{\partial x} + {V_y}^{(i)}\frac{\partial {V_y}^{(i)}}{\partial y} = \nu_i\Big(\frac{\partial^2 {V_y}^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 {V_y}^{(i)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 {V_y}^{(i)}}{\partial z^2}\Big). \quad (13)$$

Equations (12) and (13) close with the continuity equation

$$\frac{\partial {V_x}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial {V_y}^{(i)}}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

We now differentiate Eqs. (12) and (13) with respect to the variables x and y, respectively, and stratify the obtained expressions. Some simple transformations and the use of the incompressibility equation (14) result in the following relationship (consistency condition):

$$\frac{\partial {V_x}^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial {V_y}^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial {V_x}^{(i)}}{\partial y}\frac{\partial {V_y}^{(i)}}{\partial x}. \quad (15)$$

Approach II to the derivation of the consistency condition for the overdetermined system (12)–(14) is also general (i.e. not tied to the selected solution structure) and based on the use of the stream function and Eq. (15) [2]. Let us now consider the scalar stream function $\psi^{(i)} = \psi^{(i)}(x, y, z, t)$ has the following property:

$${V_x}^{(i)} = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial y}, \quad {V_y}^{(i)} = -\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x}. \quad (16)$$

Note that, substituting Eqs. (16) into the incompressibility equation (14), due to the commutativity of the derivatives with respect to the spatial variables x, y, we arrive at a correct identity.

The expressions of Eqs. (16) are also substituted into the consistency condition (15),

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial y}\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x}\Big).$$

Again, due to the commutativity of the derivatives, the consistency condition (15) acquires the form of the homogeneous Monge–Ampère equation

$$\Big(\frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x \partial y}\Big)^2 = \frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi^{(i)}}{\partial y^2}. \quad (17)$$

Approach III appeals to the structure of the exact solution (3). We decrease the number of unknowns in system (10), express the spatial acceleration $v_2^{(i)} = -u_1^{(i)}$ from the equation $u_1^{(i)} + v_2^{(i)} = 0$ in system (10) and substitute it into the other equations of this system. Some simple transformations result in the following system:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial {u_1}^{(i)}}{\partial t} + \big({u_1}^{(i)}\big)^2 + {v_1}^{(i)}{u_2}^{(i)} = \nu_i\frac{\partial^2 {u_1}^{(i)}}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial {u_1}^{(i)}}{\partial t} - \Big({u_2}^{(i)}{v_1}^{(i)} + \big({u_1}^{(i)}\big)^2\Big) = \nu_i\frac{\partial^2 {u_1}^{(i)}}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial {u_2}^{(i)}}{\partial t} = \nu_i\frac{\partial^2 {u_2}^{(i)}}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial {v_1}^{(i)}}{\partial t} = \nu_i\frac{\partial^2 {v_1}^{(i)}}{\partial z^2}.
\end{gathered} \quad (18)$$

The comparison of the first two equations in system (18) infers that

$$\left(u_1{}^{(i)}\right)^2 + v_1{}^{(i)} u_2{}^{(i)} = 0. \tag{19}$$

The algebraic condition (19) is the consistency condition for the nontrivial solutions of the overdetermined system (10). In view of Eq. (19), we rewrite Eqs. (18) in the operator form as

$$L^{(i)} u_1{}^{(i)} = 0 = -L^{(i)} v_2{}^{(i)}, \quad L^{(i)} u_2{}^{(i)} = 0, \quad L^{(i)} v_1{}^{(i)} = 0. \tag{20}$$

Here, the linear operator $L^{(i)}$ is determined by the expression $L^{(i)} = \frac{\partial}{\partial t} - \nu_i \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. The solution of system (20) can be written as

$$\begin{aligned} u_1^{(i)} &= u^{(i)}(z,t) \cos\vartheta^{(i)} \sin\vartheta^{(i)}, & u_2^{(i)} &= u^{(i)}(z,t)\cos^2\vartheta^{(i)}, \\ v_1^{(i)} &= -u^{(i)}(z,t)\sin^2\vartheta^{(i)}, & v_2^{(i)} &= -u^{(i)}(z,t)\cos\vartheta^{(i)}\sin\vartheta^{(i)}. \end{aligned} \tag{21}$$

The angle $\vartheta^{(i)}$ is an arbitrary constant, and the function $u^{(i)} = u^{(i)}(z,t)$ satisfies the linear operator equation of the heat-conduction type

$$L^{(i)} u = 0.$$

Note that, if the flow under study is steady-state, the linear operator $L^{(i)}$ degenerates simply into the operation of double differentiation with respect to the variable z, and the function u in the general solution (21) becomes simply a z-linear function with constant coefficients.

Additionally, note that the consistency condition (19) for class (3) can be easily obtained from Eq. (17). To do this, it would suffice to find the form of the stream function $\psi^{(i)}$ for class (3) from Eqs. (16),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial y} &= V_x^{(i)} = U^{(i)} + u_1^{(i)} x + u_2^{(i)} y, \\ \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x} &= -V_y^{(i)} = -\big(V^{(i)} + v_1^{(i)} x + v_2^{(i)} y\big). \end{aligned} \tag{22}$$

The independent integration of Eqs. (22) yields the following expressions:

$$\begin{aligned} \psi^{(i)} &= U^{(i)} y + xy u_1^{(i)} + \tfrac{y^2}{2} u_2^{(i)} + \Psi_1^{(i)}(x,z), \\ \psi^{(i)} &= -V^{(i)} x - xy v_2^{(i)} - \tfrac{x^2}{2} v_1^{(i)} + \Psi_2^{(i)}(y,z). \end{aligned}$$

Equating these relationships and taking into account the relation $u_1 = -v_2$ between the velocity gradients V_x and V_y, we arrive at a quadratic (in terms of the variables x, y) representation with the coefficients determined by the z, t dependences of an arbitrary form

$$\begin{aligned} \psi^{(i)} = U^{(i)} y + xy u_1^{(i)} + \frac{y^2}{2} u_2^{(i)} - V^{(i)} x - \frac{x^2}{2} v_1^{(i)} = \\ = U^{(i)} y - xy v_2^{(i)} + \frac{y^2}{2} u_2^{(i)} - V^{(i)} x - \frac{x^2}{2} v_1^{(i)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Then, Eq. (23) is substituted into the consistency condition (17),

$$\left(u_1{}^{(i)}\right)^2 = (-v_1{}^{(i)})u_2{}^{(i)}.$$

This expression coincides with the consistency condition (19) obtained from absolutely different reasonings. Note that the operator equations (20) are solved by standard methods, e.g., by variable separation. After finding their solution and satisfying the consistency condition (19), the nonlinear equations (11) are integrated.

The class of exact solutions (3) for system (10), (11) can be extended similarly to the results reported in [2]. It can be easily shown that the velocity field

$$V_x^{(i)} = \sum_{k=0}^{n} U_k^{(i)}(z,t)\frac{y^k}{k!}, \quad V_y^{(i)} = V^{(i)}(z,t)$$

satisfies the reduced Navier–Stokes equation system and the incompressibility equation (system (10), (11)). By rotational transformation of the coordinates and velocities

$$x \to x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y \to x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

$$V_x^{(i)} \to V_x^{(i)}\cos\varphi - V_y^{(i)}\sin\varphi, \quad V_y^{(i)} \to V_x^{(i)}\sin\varphi + V_y^{(i)}\cos\varphi,$$

we obtain a family of exact solutions of the form (9) with a nonlinear dependence on two coordinates.

Conclusion. The paper discusses a family of exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing flows of stratified viscous fluids in various force fields. The reported solutions are based on the known Lin–Sidorov–Aristov family of exact solutions, and they enable us to take into account the difference of the physical characteristics of the stratified fluid layers (viscosity, density) from the geometrical ones (thickness). An algorithm for a subsequent extension of the family to the case of arbitrary dependence of the velocity field on the horizontal coordinates has been shown.

A particular case of the family has been separately discussed, namely, the class of solutions for describing shearing isothermal flows of stratified fluids outside the mass force field. It has been demonstrated that the reduced overdetermined Navier–Stokes equation system has a simultaneous solution determined by the integration of a system of operator equations like the nonstationary heat conduction equation.

Besides, the paper has shown the transformation undergone by the discussed families of exact solutions when the coordinate system is rotated. This is a key issue, e.g., in the description of stratified fluid flow in an inclined layer, where gravitation affects the flow structure in all three orthogonal directions determined by the magnitude of the flow surface slope.

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Y., Burmasheva N. V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations, *Fluid Dyn. Res.*, 2021, vol. 53, no. 4, 044501. `https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0`.
2. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Y. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid, *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 6, pp. 1031–1037. `https://doi.org/10.1134/S0021894419060075`.
3. Ryzhkov I. I. *Thermal Diffusion in Mixtures: Equations, Symmetries, Solutions and Their Stability*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Novosibirsk, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2013, 199 pp. (In Russian)
4. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1670`.
5. Burmasheva N. V.,Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition, *Sãdhanã*, 2021, vol. 46, no. 1, 55. `https://doi.org/10.1007/s12046-021-01585-5`.
6. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect, *J. King Saud Univ. — Science*, 2020, vol. 32, no. 8, pp. 3364–3371. `https://doi.org/10.1016/j.jksus.2020.09.023`.
7. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for stable convective concentration flows of a Couette type, *Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 337–349 (In Russian). `https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.27`.
8. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87 (In Russian). `https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87`.
9. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A class of exact solutions for two–dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 32, pp. 33–48 (In Russian). `https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33`.
10. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Investigation of a velocity field for the Marangoni shear convection of a vertically swirling viscous incompressible fluid, *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2053, no. 1, 040011. `https://doi.org/10.1063/1.5084449`.
11. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for the layered convection of a viscous incompressible fluid at specified temperature gradients and tangential forces on the free boundary, *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1915, no. 1, 040005. `https://doi.org/10.1063/1.5017353`.
12. Aristov S. N., Prosviryakov E. Y. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Technol.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. `https://doi.org/10.1134/S0040579516030027`.
13. Davidson J. F., Harrison D. *Fluidised Particles.* New York, Cambridge Univ. Press, 1963, 155 pp.
14. Tanford C. *Physical Chemistry of Macromolecules.* New York, John Wiley and Sons, 1961, xiv+710 pp.

15. Sherman Ph. *Emulsion Science.* New York, Academic Press, 1968, x+496 pp.
16. Barr G. *A Monograph of Viscometry.* London, Oxford Univ. Press, 1931, xiv+318 pp.
17. Malkin A. Ya., Chalykh A. E. *Diffuziia i viazkost' polimerov. Metody izmereniia* [Diffusion and Viscosity of Polymers. Methods of Measurement]. Moscow, Khimiya, 1979, 304 pp. (In Russian)
18. Fuks G. I. *Viazkost' i plastichnost' nefteproduktov* [Viscosity and Plasticity of Petroleum Products]. Moscow, Leningrad, Gostoptekhizdat, 1951, 272 pp. (In Russian)
19. Sokolov V. N., Domanskii I. V. *Gazozhidkostnye reaktory* [Gas-Liquid Reactors]. Leningrad, Mashinostroenie, 1976, 216 pp. (In Russian)
20. Kapitza P. L. Wave flow of thin layers of a viscous liquid, *Zh. Eksperim. Teor. Fiz.*, 1948, vol. 18, no. 1, pp. 3–28 (In Russian); Kapitza P. L. Wave flow of thin layers of a viscous liquid, In: *Collected Papers of P.L. Kapitza*, vol. 2. Oxford, Pergamon Press, 1965, pp. 662–708. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-010973-2.50013-6.
21. Gogonin I. I., Shemagin I. A., Budov V. M., Dorokhov A. R. *Teploobmen pri plenochnoy kondensatsii i plenochnom kipenii v elementakh oborudovaniya AES* [Heat Transfer during Film Condensation and Film Boiling in Elements of Equipment at Nuclear Power Plants]. Moscow, Energoizdat, 1993, 208 pp. (In Russian)
22. Hirshburg R. I., Florschuetz L. W. Laminar wavy-film flow: Part II, Condensation and evaporation, *J. Heat Transfer*, 1982, vol. 104, no. 3, pp. 459–464. https://doi.org/10.1115/1.3245115.
23. Trifonov Yu. Ya. Wavy flow of a liquid film in the presence of a cocurrent turbulent gas flow, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 5, pp. 762–772. https://doi.org/10.1134/S002189441305009X.
24. Domanskii I. V., Isakov V. P., Ostrovsky G. M., Reshanov A. S., Sokolov V. N. *Mashiny i apparaty khimicheskikh proizvodstv: primery i zadachi* [Machines and Devices for Chemical Production: Examples and Tasks]. Moscow, Mashinostroenie, 1982, 384 pp. (In Russian)
25. Romankov P. G., Kurochkina M. I., Morzherin Yu. Ya., Smirnov N. N. *Protsessy i apparaty khimicheskoi promyshlennosti* [Processes and Devices of Chemical Industry]. Moscow, Khimiya, 1989, 554 pp. (In Russian)
26. Koskov V. N. *Geofizicheskoe issledovanie skvazhin* [Geophysical Well Logging]. Perm, Perm State Techn. Univ., 2004, 122 pp. (In Russian)
27. Vakhromeev G. S., Davydenko A. Yu. *Modelirovanie v razvedochnoi geofizike* [Modeling in Exploration Geophysics]. Moscow, Nedra, 1987, 192 pp. (In Russian)
28. Kostitsyn V. I., Khmelevskoi V. K. *Geofizika* [Geophysics]. Perm, Perm State National Research Univ., 2018, 428 pp. (In Russian)
29. Barrenblatt G. E., Zheltov I. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata], *J. Appl. Math. Mech.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303. https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6.
30. Dietrich P., Helmig R., Sauter M., Hötzl H., Köngeter J., Teutsch G. *Flow and Transport in Fractured Porous Media.* Berlin, Springer-Verlag, 2005, xviii+447 pp. https://doi.org/10.1007/b138453.
31. Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics.* New York, Springer, 1987, xiv+710 pp. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4650-3.
32. Dolzhanskii F. V. *Lektsii po geofizicheskoi gidrodinamike* [Lectures on Geophysical Fluid Dynamics]. Moscow, Inst. Vychisl. Mat. Ross. Akad. Nauk, 2006, 377 pp. (In Russian)
33. Bogolyubov N. N., Shirkov D. V. *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience Monographs in Physics and Astronomy, vol. 3. New York, Interscience Publ., 1959, xvi+720 pp.
34. Ruban V. P. Motion of magnetic flux lines in magnetohydrodynamics, *J. Exp. Theor. Phys.*, 1999, vol. 89, no. 2, pp. 299–310. https://doi.org/10.1134/1.558984.
35. Kochin N. K., Kibel I. A., Roze N. V. *Theoretical Hydromechanics.* New York, John Wiley and Sons, 1964, v+577 pp.

36. Talipova T. G., Pelinovsky E. N., Kurkina O. E., Rouvinskaya E. A., Giniyatullin A. R., Naumov A. A. Nonreflective propagation of internal waves in a channel of variable cross-section and depth, *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 46–53 (In Russian).
37. Smith N. R. Ocean modeling in a global ocean observing system, *Rev. Geophys.*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 281–317. `https://doi.org/10.1029/93RG00134`.
38. Lighthill J. *Waves in Fluids*, Cambridge Mathematical Library. New York, Cambridge Univ. Press, 1978, xv+504 pp.
39. Miropolsky Yu. Z. *Dynamics of Internal Gravity Waves in the Ocean*, Atmospheric and Oceanographic Sciences Library, vol. 24. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2001, xviii+406 pp. `https://doi.org/10.1007/978-94-017-1325-2`.
40. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 2008, vol. 102, no. 2, pp. 179–194. `https://doi.org/10.1080/03091920701640115`.
41. Chesnokov A. A. Properties and exact solutions of the rotating shallow-water equations for stratified multilayered flows, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4 (3), pp. 1252–1254 (In Russian).
42. Pozhalostin A. A., Goncharov D. A. Free axisymmetric oscillations of two-layered liquid with the elastic separator between layers in the presence of surface tension forces, *Engineering Journal. Science and Innovation*, 2013, no. 12 (24), 1147, 8 pp. (In Russian). `https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-12-1147`.
43. Pozhalostin A. A., Goncharov D. A., Kokushkin V. V. Small oscillations of two-layer liquid in view permeability of separator, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University*, 2014, no. 5 (56), pp. 109–116 (In Russian).
44. Shiryaeva S. O., Grigor'ev A. I., Yakovleva L. S. Effect of initial conditions on wave motion in density-stratified three-layer liquid with free surface, *Tech. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 3, pp. 374–379. `https://doi.org/10.1134/s1063784217030203`.
45. Pedlosky J. *Ocean Circulation Theory.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1996, xi+455 pp. `https://doi.org/10.1007/978-3-662-03204-6`.
46. Shtokman V. B. *Ekvatorial'nye protivotecheniia v okeanakh. Osnovy teorii* [Theory of the Equatorial Countercurrent. Fundamentals of Theory]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1948, 156 pp. (In Russian)
47. Sarkisyan A. S. *Chislennyi analiz i prognoz morskikh techenii* [Numerical Analysis and Sea Current Prediction]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1977, 182 pp. (In Russian)
48. Zhukov V. T., Feodoritova O. B., Duben A. P., Novikova N. D. Explicit time integration of the Navier–Stokes equations using the local iteration method, *KIAM Preprint*, 2019, no. 12, 32 pp (In Russian). `https://doi.org/10.20948/prepr-2019-12`.
49. Kozelkov A. S., Meleshkina D. P., Kurkin A. A., Tarasova N. V., Lashkin S. V., Kurulin V. V. Fully implicit method for solution of Navier—Stokes equations for simulation of multiphase flows with free surface, *Vychisl. Tekhn.*, 2016, vol. 21, no. 5, pp. 54–76 (In Russian).
50. Anderson D., Tannehill J. C., Pletcher R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Washington, DC, Taylor and Francis, 2016, 774 pp. `https://doi.org/10.1201/b12884`.
51. Temam R. *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, vol. 2, Studies in Mathematics and Its Applications. Amsterdam, North-Holland Publ., 1977, vi+500 pp. `https://doi.org/10.1016/s0168-2024(09)x7004-9`.
52. Taylor T. D., Ndefo E. Computation of viscous flow in a channel by the method of splitting, In: *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, 8. Berlin, Heidelberg, Springer, 1971, pp. 356–364. `https://doi.org/10.1007/3-540-05407-3_51`.
53. Roache P. J. *Computational Fluid Dynamics.* Albuquerque, Hermosa, 1972, vii+434 pp.
54. Soboleva E. B. Onset of Rayleigh–Taylor convection in a porous medium, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 2, pp. 200–210. `https://doi.org/10.1134/S0015462821020105`.

55. Demyshev S. G., Evstigneeva N. A., Alekseev D. V., Dymova O. A., Miklashevskaya N. A. Analysis of the dynamic and energy characteristics of water circulation near the Western Crimea coast and in the Sevastopol region based on the observational data assimilation in the numerical model of the Black sea dynamics, *Morskoy Gidrofizicheskiy Zhurnal* [Physical Oceanography], 2021, vol. 37, no. 1, pp. 23–40 (In Russian). https://doi.org/10.22449/0233-7584-2021-1-23-40.
56. Tarasevich S. E., Giniyatullin A. A. CFD investigation of flow behavior and heat transfer in tubes with ribbed twisted tape inserts, *Tepl. Prots. Tekhn.*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 78–84 (In Russian). https://doi.org/10.34759/tpt-2021-13-2-78-84.
57. Belokon A. Yu., Fomin V. V. Simulation of tsunami wave propagation in the Kerch strait, *Fund. Prikl. Gidrofizika*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 67–78 (In Russian). https://doi.org/10.7868/S207366732101007X.
58. Gataulin Ya. A., Smirnov E. M. A flow in the blood vessel with a one-side stenosis: numerical study of the structure and local turbulization, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 72–84. https://doi.org/10.18721/JPM.14105.
59. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2019, vol. 53, no. 1, pp. 107–114. https://doi.org/10.1134/S0040579518060088.
60. Stewart R. H. *Introduction to Physical Oceanography*, 2008, viii+346 pp. https://github.com/introocean/introocean-en.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 491–507
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1860

УДК 532.51, 517.958:531.3-324

Точные решения уравнений Навье–Стокса для описания течений многослойных жидкостей

© *Н. В. Бурмашева*[1,2], *Е. Ю. Просвиряков*[1,2]

[1] Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.
[2] Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
Россия, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.

Аннотация

Статья посвящена рассмотрению вопросов необходимости построения точных решений для уравнений динамики вязкой жидкости, стратифицированной по нескольким физическим характеристикам (на примере плотности и вязкости). Обсуждаются вопросы применения семейств точных решений, построенных для многослойных жидкостей, при моделировании различных технологических процессов, имеющих дело с движущимися вязкими жидкими средами. В работе на основе точных решений Линя, линейных по части координат, построен класс точных решений уравнений Навье–Стокса для вязких многослойных сред в поле массовых сил. Далее производится обобщение приведенного класса на случай произвольной зависимости кинетико-силовых полей от всех трех декартовых координат и времени. Обсуждаются вопросы переопределенности и разрешимости редуцированной (на основе данных семейств) системы уравнений Навье–Стокса, дополненных уравнением несжимаемости. В качестве наглядной иллюстрации подробно разбирается случай изобарических сдвиговых течений вне поля массовых сил. Обсуждаются три подхода к получению условий совместности переопределенной редуцированной системы уравнений движения, показывается их взаимосвязь.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, точное решение, многослойная жидкость, поле массовых сил, переопределенная приведенная система.

Получение: 26 марта 2021 г. / Исправление: 15 июля 2021 г. / Принятие: 31 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 491–507. https://doi.org/10.14498/vsgtu1860.

Сведения об авторах

Наталья Владимировна Бурмашева https://orcid.org/0000-0003-4711-1894
кандидат технических наук; старший научный сотрудник; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[1]; доцент; каф. теоретической механики[2]; e-mail: nat_burm@mail.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[1]; профессор; каф. теоретической механики[2]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 508–518
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1854

MSC: 93E12, 15A29

Identification of linear dynamic systems of fractional order with errors in variables based on an augmented system of equations

© ***D. V. Ivanov***

Samara State Transport University,
2 V, Svobody st., Samara, 443066, Russian Federation.

Abstract

Equations with derivatives and fractional order differences are widely used to describe various processes and phenomena. Currently, methods of identification of systems described by equations with fractional order differences are actively developing. The paper is devoted to the identification of discrete dynamical systems described by equations with fractional order differences with errors in variables. The problems of identifying systems with errors in variables are often ill-conditioned. The paper proposes an algorithm that uses the representation of a normal biased system as an augmented equivalent system. This representation allows to reduce the number of conditionality of the problem to be solved. Test examples have shown that the proposed algorithm has a higher accuracy than the algorithms based on the decomposition of Cholesky and the minimization of the generalized Rayleigh quotient.

Keywords: fractional difference, total least square, errors-in-variables, ill-conditioning.

Received: 20th March, 2021 / Revised: 24th June, 2021 /
Accepted: 28th June, 2021 / First online: 27th September, 2021

Introduction. Equations with fractional-order derivatives and differences are widely used to describe various processes and phenomena. Models based on equations with fractional-order derivatives and differences find wide application in hydrology, economics, and forecasts of network data usage [1–3]. Besides, the branch of management theory dealing with the synthesis of fractional order regulators is developing actively. Mechanics was one of the first fields to use equations with fractional order derivatives. A large amount of research deals with viscoelasticity models [4–7].

Research Article

Please cite this article in press as:
I v a n o v D. V. Identification of linear dynamic systems of fractional order with errors in variables based on an augmented system of equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 508–518. https://doi.org/10.14498/vsgtu1854.

Author's Details:
Dmitriy V. Ivanov https://orcid.org/0000-0002-5021-5259
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechatronics, Automation, and Transport Control; e-mail: dvi85@list.ru

Generally, the creep and relaxation processes for actual nonuniform media are nonlinear both in space and in time. As a result, using fractional-order derivatives in the state equations for viscoelastic media makes it possible to display and factor in the nonuniform structures of viscous and elastic elements and the nonuniformity of mechanical processes in time.

Because equations with fractional order derivatives and differences are actively being developed and used for forecast and modeling problems, methods for identifying systems described by fractional-order equations and differences are actively being developed as well. Noise-free identification methods have been treated for ordinary differential equations with fractional order derivatives [8] and for partial differential equations with fractional order derivatives [9].

Most of the research in the field deals with parameter identification of fractional order differential equations by using the error in an equation or in an output signal. References [10, 11] describe time domain identification methods based on the least-square technique. Reference [12] presents an overview of different methods for identifying systems with fractional-order derivatives.

It is noteworthy that a fairly large amount of research addresses the problem of identifying viscoelasticity models [13–16]. That research deals with identifying fractional order models such as a generalized model with a fixed number of parameters. Results generalization for the case of an arbitrary number of parameters is a nontrivial operation. Most of the methods we considered disregard the presence of measurement errors.

The problem of identifying systems that have errors in input and output signals is much more complicated. Reference [17] gives an overview of the contemporary state of this problem. A relatively small amount of research attention has been given to identifying systems with fractional order derivatives and differences in the presence of those errors. Methods based on higher statistics have been proposed in [18, 19]; methods based on minimizing the generalized Rayleigh ratio have been treated in [20] (for white noise) and in [22] (for fractional white noise).

This paper proposes generalizing the identification algorithm [23] for equations with fractional order differences. The proposed algorithm makes it possible to achieve more accurate estimates than those in [20] for ill-conditioned systems.

1. Problem statement. Fractional-order systems can be represented by the fractional difference equation given by

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i, \quad y_i = z_i + \xi_i, \quad w_i = x_i + \zeta_i, \qquad (1)$$

where $b_0^{(m)}$, $a_0^{(m)}$ are coefficients; $0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r$, $0 < \beta_1 \ldots < \beta_{r_1}$;

$$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}, \quad \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j}$$

are fractional differences [1];

$$\binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m - j + 1)}, \quad \binom{\beta_m}{j} = \frac{\Gamma(\beta_m + 1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m - j + 1)}$$

are the generalized binomial coefficients; the Euler's function Γ is defined as

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Autoregressions with fractional differences are widely used in the analysis of time series with long memory [24, 25]. In [26], a discrete Kalman filter with fractional differences is proposed. Equations with fractional order differences of the form (1) are also used to approximate differential equations with Grunfeld–Letnikov derivatives; the identification of such systems is considered in [27]. Modeling of various physical processes based on equations with fractional-order differences is considered in [28, 29].

The following assumptions are introduced:

1. The dynamic system (1) is asymptotically stable. Results on the asymptotic stability of discrete-time fractional difference systems in [30, 31].
   If system (1) is unstable, then the output signal increases indefinitely. This leads to overflow of the bit grid. Therefore, obtaining a solution for unstable systems has additional computational difficulties that are not considered in this paper. There is also no theoretical proof of strong consistency for discrete fractional systems with errors in variables.
2. Noises $\{\xi_i\}$ and $\{\zeta_i\}$ are statistically independent sequences with $\mathrm{E}\{\xi_i\} = 0$, $\mathrm{E}\{\zeta_i\} = 0$, $\mathrm{E}\{\xi_i^2\} = \sigma_\xi^2 < \infty$, $\mathrm{E}\{\zeta_i^2\} = \sigma_\zeta^2 < \infty$ a.s., where E is the expectation operator.
3. The sequences $\{\xi_i\}$ and $\{\zeta_i\}$ are mutually uncorrelated and uncorrelated with sequences $\{z_i\}$, $\{x_i\}$.
4. The noise-free input sequence $\{x_i\}$ is persistently exciting of sufficiently high order.
5. Noise ratio $\gamma = \sigma_\xi^2/\sigma_\zeta^2$ is known.

It is required to estimate the unknown coefficients linear fractional order dynamical system, described by the equation (1) in observable sequences $\{y_i\}$, $\{w_i\}$.

2. Criteria for parameter estimation. In [20] the following criterion was proposed for estimating the parameters of a system described by equations

$$\min_{\theta \in \tilde{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \varphi_i^\top \theta)^2}{1 + b^\top H_\xi b + \gamma a^\top H_\zeta a}, \tag{2}$$

where

$$H_\xi^{(mk)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\alpha_k}{j} \cdot \frac{N-j}{N} \right), \quad m = \overline{1,r}, \quad k = \overline{1,r};$$

$$H_\zeta^{(mk)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \binom{\beta_m}{j} \binom{\beta_k}{j} \cdot \frac{N-j}{N} \right), \quad m = \overline{1,r_1}, \quad k = \overline{1,r_1};$$

$$\theta = \left(\; b^{(1)}, \; \ldots, \; b^{(r)} \; \middle| \; a^{(1)}, \; \ldots, \; a^{(r_1)} \; \right)^\top,$$

$$\varphi_i = \left(\; \Delta^{\alpha_1} z_{i-j-1}, \; \ldots, \; \Delta^{\alpha_r} z_{i-j-1} \; \middle| \; \Delta^{\beta_1} x_{i-j}, \; \ldots, \; \Delta^{\beta_{r_1}} x_{i-j} \; \right)^\top.$$

We transform the criterion (2) in the following form

$$\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}} \frac{\|d - C\theta\|_2^2}{1+\theta^\top H'_{\xi\zeta}\theta}, \tag{3}$$

$$H_{\xi\zeta} = \left(\begin{array}{c|c} H_\xi & 0 \\ \hline 0 & \gamma H_\zeta \end{array}\right), \quad d = \begin{pmatrix} y_1, & \ldots, & y_N \end{pmatrix}^\top, \quad C = \begin{pmatrix} \varphi_1^\top, & \ldots, & \varphi_N^\top \end{pmatrix}^\top.$$

Theorem. *Suppose that the dynamical system is described by equation* (1) *with initial zero conditions and that assumptions* 1–5 *are satisfied. Then the estimate for coefficients* $\hat{\theta}(N)$ *determined by expression* (2) *exists, is unique, and converges to the true value of the coefficients with a probability of 1—that is,*

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{a.s.} \theta_0.$$

The proof of the theorem is similar to the proof given in [21].

The modeling results show that the accuracy of the algorithm proposed in [20] is not satisfactory for ill-conditioned systems.

One of the approaches used to write numerically stable algorithms is transforming problem (3) into a problem of total least squares for which stable numerical implementations exist.

Let us transform problem (3) into a problem of total least squares. According to condition 4, the matrix $H_{\xi\zeta}$ is positively definite, and so we will express it as the Cholesky decomposition

$$H_{\xi\zeta} = U_{\xi\zeta}^\top U_{\xi\zeta}.$$

Let us introduce a new variable

$$\vartheta = U_{\xi\zeta}\theta.$$

Then criterion (3) can be written as

$$\min_{\vartheta\in\mathrm{B}'} \frac{\|d - CU_{\xi\zeta}^{-1}\vartheta\|_2^2}{1+\vartheta^\top\vartheta}. \tag{4}$$

3. Numerical methods for the problem of total least squares. There are several approaches to minimizing (4). One of them is based on the fact that solving problem (4) requires calculating the minimal singular value for the extended matrix $\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}, d\right)$ and the right singular vector corresponding to that value.

The problem of finding the singular vector is a nonlinear vector problem. Solving that problem numerically involves significant difficulties [32] related to convergence issues, high computational complexity, and the stability of search algorithms.

Another approach is based on solving a biased normal system. Reference [33] shows that given the satisfaction of the condition

$$\lambda = \lambda_{\min}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}, d\right) < \lambda_{\min}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right), \tag{5}$$

solution to problem (4) is obtainable from the system ofequations

$$\left(\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top}CU_{\xi\zeta}^{-1}-\lambda^{2}I\right)\vartheta=\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top}d. \tag{6}$$

When system (6) is solved, only the scalar problem of finding the minimal singular value $\lambda_{\min}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1},d\right)$ is remained nonlinear. This problem is always well-conditioned [32]. The vector problem is in turn linear. But system (6) is often ill-conditioned. The condition number of the shifted normal matrix is obtainable from the expression

$$\operatorname{cond}_2\left(\tilde{C}^{\top}\tilde{C}\right)\triangleq\operatorname{cond}_2\left(\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top}CU_{\xi\zeta}^{-1}-\lambda^{2}I\right)=\frac{\lambda_{\max}^{2}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)-\lambda^{2}}{\lambda_{\min}^{2}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)-\lambda^{2}}.$$

There are two reasons why (5) is ill-conditioned: the multiplication $\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top}CU_{\xi\zeta}^{-1}$ and the possible proximity of numbers $\lambda_{\min}^{2}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)$ and λ^2.

The use of the Cholesky method can make the solution more stable. As this method applies to systems of linear equations with symmetrical positively definite matrices, it can also be used for the biased normal system (6). But the Cholesky method suffers from a severe drawback: if the matrix is ill-conditioned, the method yields a solution with unacceptable error.

Reference [23] proposes using an augmented system of equations that is equivalent to the biased normal system:

$$A\bar{\vartheta}=\bar{d},$$

or

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & CU_{\xi\zeta}^{-1} \\ \hline 0 & I & j\lambda I \\ \hline \left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top} & j\lambda I & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} r \\ \hline r_{\xi\zeta} \\ \hline \hat{\vartheta} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} d \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right).$$

The expression for the condition number of matrix A is written as

$$\operatorname{cond}_2(A)=\frac{\sqrt{1+\mu_{\max}+\lambda^2}}{\sqrt{1+\mu_{\min}+\lambda^2}}\left|\frac{\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\mu_{\max}-\lambda^2}{(1+\mu_{\max}+\lambda^2)^{3/2}}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\mu_{\min}-\lambda^2}{(1+\mu_{\min}+\lambda^2)^{3/2}}\right)\right)}\right|, \tag{7}$$

where $\mu_{\max}$ and $\mu_{\min}$ are the maximal and minimal eigenvalues of the matrix $CU_{\xi\zeta}^{-1}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top}$.

An analysis of expression (7) shows that using the augmented system of equations does not always reduce the condition number of the matrix compared to the biased normal system (6).

Let us consider the system

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & kCU_{\xi\zeta}^{-1} \\ \hline 0 & I & jk\lambda I \\ \hline \left(kCU_{\xi\zeta}^{-1}\right)^{\top} & jk\lambda I & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} kr \\ \hline kr_{\xi\zeta} \\ \hline \hat{\vartheta} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} kd \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array}\right), \tag{8}$$

where k is an arbitrary positive variable multiplier.

The condition number of matrix $A(k)$ is written as

$$\operatorname{cond}_2(A(k)) = \frac{\sqrt{1+k^2\mu_{\max}+k^2\lambda^2}}{\sqrt{1+k^2\mu_{\min}+k^2\lambda^2}}\left|\frac{\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{k^2(\mu_{\max}-\lambda^2)}{(1+k^2\mu_{\max}+k^2\lambda^2)^{3/2}}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{k^2(\mu_{\min}-\lambda^2)}{(1+k^2\mu_{\min}+k^2\lambda^2)^{3/2}}\right)\right)}\right|.$$

The problem of finding the minimal condition number can be considered as the problem of selecting the optimal multiplier k:

$$\inf_{k>0}\operatorname{cond}_2(A(k)). \tag{9}$$

Problem (9) does not have an analytical solution but is solvable with numerical methods. In practice, an estimate of k_{opt} can be given by

$$\hat{k}_{\text{opt}} = \frac{\lambda_{\max}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)+\lambda}{\lambda_{\min}\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)+\lambda}\sqrt{\frac{2}{\lambda_{\max}^2\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}\right)+\lambda^2}}. \tag{10}$$

The augmented system of equations (8) is solvable with the standard methods for solving equation systems, such as LU decomposition.

The equation $\hat{\vartheta} = U_{\xi\zeta}\hat{\theta}$ can yield an estimate for the parameter vector $\hat{\theta}$:

$$\hat{\theta} = U_{\xi\zeta}^{-1}\hat{\vartheta}.$$

Algorithm.

Step 1. Decompose

$$H'_{\xi\zeta} = U_{\xi\zeta}^{\top}U_{\xi\zeta}.$$

Step 2. Find the minimal singular value for the matrix $\left(CU_{\xi\zeta}^{-1}, d\right)$.

Step 3. Calculate the multiplier with (9) or (10).

Step 4. Solve equation system (8) with the Gauss method or with algorithm [23].

Step 5. Find an estimate of the coefficient vector by $\hat{\theta} = U_{\xi\zeta}^{-1}\hat{\vartheta}$.

4. Test Examples. The proposed algorithm has been compared with the algorithm based on Cholesky decomposition and the algorithm based on the generalized Rayleigh quotient (GRQ) in [20].

Test cases were compared by the following characteristics:

– the normalized root mean square error (NRMSE) of parameter estimation defined as

$$\delta\theta = \sqrt{\|\hat{\theta}-\theta_0\|^2/\|\theta_0\|^2}\cdot 100\,\%,$$

– and normalized root mean square error of modelling defined as

$$\delta z = \sqrt{\|\hat{z}-z\|^2/\|z\|^2}\cdot 100\,\%.$$

The number of data points N in each simulation was 200.

Example 1. A dynamic system is described by the equation

$$z_i = 0.5\Delta^{0.2} z_{i-1} + 0.3\Delta^{0.1} z_{i-1} + \Delta^{0.2} x_i^{(1)} + 0.9\Delta^{0.15} x_i^{(1)}. \qquad (11)$$

Noise standard deviation ratio

$$\sigma_\xi/\sigma_z = 10^{-3}, \quad \sigma_\zeta/\sigma_x = 0.2.$$

The results are presented in tables 1, 2.

Table 1

Normalized root mean square error for dynamic system (11)

$\mathrm{cond}_2(\tilde{C}^\top \tilde{C})$	$\mathrm{cond}_2(A)$	$\mathrm{cond}_2(A(k))$
$3.143 \cdot 10^5$	$9.55 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^3$

Table 2

Values of condition numbers for a dynamic system (11)

NRMSE	GRQ	Cholesky decomposition	Proposed algorithm
$\delta\theta$, %	4.55	4.55	4.55
δz, %	1.03	1.03	1.03

Example 2. A dynamic system is described by the equation

$$z_i = 0.5\Delta^{0.2} z_{i-1} + 0.3\Delta^{0.19} z_{i-1} + \Delta^{0.2} x_i^{(1)} + 0.9\Delta^{0.15} x_i^{(1)}. \qquad (12)$$

Noise standard deviation ratio

$$\sigma_\xi/\sigma_z = 10^{-10}, \quad \sigma_\zeta/\sigma_x = 0.2.$$

The results are presented in tables 3, 4.

Table 3

Normalized root mean square error for dynamic system (12)

$\mathrm{cond}_2(\tilde{C}^\top \tilde{C})$	$\mathrm{cond}_2(A)$	$\mathrm{cond}_2(A(k))$
$1.03 \cdot 10^{19}$	$1.07 \cdot 10^{15}$	$4.14 \cdot 10^9$

Table 4

Values of condition numbers for a dynamic system (12)

NRMSE	GRQ	Cholesky decomposition	Proposed algorithm
$\delta\theta$, %	1126.45	3.03	3.03
δz, %	241.03	0.67	0.67

Example 3. A dynamic system is described by the equation

$$z_i = 0.5\Delta^{0.2} z_{i-1} + 0.3\Delta^{0.199} z_{i-1} + \Delta^{0.2} x_i^{(1)} + 0.9\Delta^{0.15} x_i^{(1)}. \qquad (13)$$

Noise standard deviation ratio

$$\sigma_\xi/\sigma_z = 10^{-14}, \quad \sigma_\zeta/\sigma_x = 0.2.$$

The results are presented in tables 5, 6.

Table 5

Normalized root mean square error for dynamic system (13)

$\mathrm{cond}_2(\tilde{C}^\top \tilde{C})$	$\mathrm{cond}_2(A)$	$\mathrm{cond}_2(A(k))$
$9.46 \cdot 10^{33}$	$5.01 \cdot 10^{15}$	$5.86 \cdot 10^{9}$

Table 6

Values of condition numbers for a dynamic system (13)

NRMSE	GRQ	Cholesky decomposition	Proposed algorithm
$\delta\theta$, %	6528.96	235.58	0.14
δz, %	162.93	0.77	0.53

Conclusion. The examples show that with relatively small condition numbers, all three algorithms exhibit identical results. The least stable is the algorithm based on minimizing the generalized Rayleigh ratio, while the proposed algorithm is the most stable.

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments. The author is also grateful to the anonymous referee for his careful reading of the manuscript and valuable comments and suggestions.

References

1. Podlubny I. *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 198. San Diego, Academic Press, 1999, xxiv+340 pp. `https://doi.org/10.1016/s0076-5392(99)x8001-5`.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp. `https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5`.
3. Uchaikin V. V. Heredity and nonlocality, In: *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Background and Theory*, vol. 1, Nonlinear Physical Science. Berlin, Springer, 2013, pp. 3–58. `https://doi.org/10.1007/978-3-642-33911-0_1`.
4. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Mir Publ., 1980, 388 pp.
5. Slonimsky G. L. On the laws of deformation of real materials. I. The theories of Maxwell and Boltzmann, *Acta Physicochim. URSS*, 1940, vol. 12, pp. 99–128.
6. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models.* Hackensack, NJ, World Scientific, 2010, xx+347 pp. `https://doi.org/10.1142/p614`.
7. Koeller R. C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, *J. Appl. Mech.*, 1984, vol. 51, no. 2, pp. 299–307. `https://doi.org/10.1115/1.3167616`.
8. Boikov I. V., Krivulin N. P. Parametric identification of hereditary systems with distributed parameters, *University Proceedings. Volga Region. Engineering Sciences*, 2013, vol. 26, no. 2, pp. 120–129 (In Russian).
9. Boykov I. V., Krivulin N. P. Recovery of the parameters of linear systems described by differential equations with variable coefficients, *Meas. Tech.*, 2013, vol. 56, no. 4, pp. 359–356. `https://doi.org/10.1007/s11018-013-0210-5`.
10. Cois O., Oustaloup A., Battaglia E., Battaglia J.-L. Non integer model from modal decomposition for time domain system identification, *IFAC Proc. Vol.*, 2000, vol. 33, no. 15, pp. 989–994. `https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)39882-8`.

11. Cois O., Oustaloup A., Poinot T., Battaglia J.-L. Fractional state variable filter for system identification by fractional model, In: *2001 European Control Conference (ECC)* (4–7 Sept. 2001, Porto, Portugal), 2001, pp. 2481–2486. https://doi.org/10.23919/ECC.2001.7076300.
12. Malti R., Aoun M., Sabatier J., Oustaloup A. Tutorial on system identification using fractional differentiation models, *IFAC Proc. Vol.*, 2006, vol. 39, no. 1, pp. 606–611. https://doi.org/10.3182/20060329-3-AU-2901.00093.
13. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Ungarova L. G. Mathematical modeling of hereditary elastically deformable body on the basis of structural models and fractional integro-differentiation Riemann–Liouville apparatus, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 167–194 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1456.
14. Ungarova L. G. The use of linear fractional analogues of rheological models in the problem of approximating the experimental data on the stretch polyvinylchloride elastron, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 691–706 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1523.
15. Lewandowski R., Chorążyczewski B. Identification of the parameters of the Kelvin–Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Comp. Struct.*, 2009, vol. 88, no. 1–2, pp. 1–17. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.09.001.
16. Shabani R., Jahani K., Di Paola M., Sadeghi M. N. Frequency domain identification of the fractional Kelvin–Voigt's parameters for viscoelastic materials, *Mech. Mater.*, 2019, vol. 137, 103099. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.103099.
17. Söderström T. *Errors-in-Variables Methods in System Identification*, Communications and Control Engineering. Cham, Switzerland, Springer, 2018, xxvii+485 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75001-9.
18. Chetoui M., Malti R., Thomassin M., Aoun M., Najar S., Oustaloup A., Abdelkrim M.N. EIV methods for system identification with fractional models, *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, vol. 45, no. 16, pp. 1641–1646. https://doi.org/10.3182/20120711-3-BE-2027.00270.
19. Chetoui M., Thomassin M., Malti R., Aoun M., Najar S., Abdelkrim M. N., Oustaloup A. New consistent methods for order and coefficient estimation of continuous-time errors-in-variables fractional models, *Comp. Math. Appl.*, 2013, vol. 66, no. 5, pp. 860–872. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.028.
20. Ivanov D. V. Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables, In: *East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2013)* (27–30 Sept. 2013, Rostov on Don, Russia), 2013, pp. 374–377. https://doi.org/10.1109/EWDTS.2013.6673122.
21. Ivanov D. V. Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in the input signal, *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2014, no. 2(27), pp. 30–38 (In Russian).
22. Ivanov D. V., Ivanov A. V. Identification fractional linear dynamic systems with fractional errors-in-variables, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 803, 012058. https://doi.org/10.1088/1742-6596/803/1/012058.
23. Zhdanov A. I., Shamarov P. A. A direct projection method in the problem of complete least squares, *Autom. Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 4, pp. 610–620.
24. Granger C. W. J., Joyeux R. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing, *J. Time Series Anal.*, 1980, vol. 1, no. 1, pp. 15–29. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1980.tb00297.x.
25. Hosking J. R. M. Fractional differencing, *Biometrika*, 1981, vol. 68, no. 1, pp. 165–176. https://doi.org/10.1093/biomet/68.1.165.
26. Sierociuk D., Dzieliński A. Fractional Kalman filter algorithm for the states parameters and order of fractional system estimation, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2006, vol. 16, no. 1, pp. 129–140.

27. Djouambai A., Voda A., Charef A. Recursive prediction error identification of fractional order models, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 2517–2524. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.08.015.
28. Dzieliński A., Sierociuk D. Some applications of fractional order calculus, *Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci.*, 2010, vol. 58, no. 4, pp. 583–592. https://doi.org/10.2478/v10175-010-0059-6.
29. Ivanov D. V., Ivanov A. V., Sandler I., Chertykovtseva N. V. Identification of the heating model plastic injection molding machines, *Zhurnal SVMO*, 2017, vol. 19, no. 3, pp. 82–89 (In Russian). https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.201703.82-90.
30. Ostalczyk P. *Discrete Fractional Calculus. Applications in Control and Image Processing*, Series in Computer Vision, vol. 4. Hackensack, NJ, World Scientific, 2016, xxxi+361 pp. https://doi.org/10.1142/9833.
31. Mozyrska D., Wyrwas M. Stability of discrete fractional linear systems with positive orders, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 8115–8120. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1250.
32. Wilkinson J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Monographs on Numerical Analysis. Oxford Science Publications. Oxford, Clarendon Press, 1988, xviii+682 pp.
33. Zhdanov A. I. The solution of ill-posed stochastic linear algebraic equations by the maximum likelihood regularization method, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1988, vol. 28, no. 5, pp. 93–96. https://doi.org/10.1016/0041-5553(88)90014-6.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 508–518
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1854

УДК 519.254

Идентификация линейных динамических систем дробного порядка с ошибками в переменных на основе расширенной системы уравнений

© *Д. В. Иванов*

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, ул. Свободы, 2 В.

Аннотация

Уравнения с производными и разностями дробного порядка находят широкое применение для описания различных процессов и явлений. В настоящее время активно развиваются методы идентификации систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка. Статья посвящена идентификации дискретных динамических систем, описываемых уравнениями с разностями дробного порядка с ошибками в переменных. Задачи идентификации систем с ошибками в переменных часто бывают плохо обусловленными. В статье предложен алгоритм, использующий представление нормальной смещенной системы в виде расширенной эквивалентной системы. Данное представление позволяет уменьшить число обусловленности решаемой задачи. Тестовые примеры показали, что предложенный алгоритм обладает более высокой точностью по сравнению с алгоритмами на основе разложения Холецкого и минимизации обобщенного отношения Релея.

Ключевые слова: разность дробного порядка, полные наименьшие квадраты, ошибки в переменных, плохая обусловленность.

Получение: 20 марта 2021 г. / Исправление: 24 июня 2021 г. /
Принятие: 28 июня 2021 г. / Публикация онлайн: 27 сентября 2021 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Благодарности. Автор благодарит анонимного рецензента за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Научная статья

Образец для цитирования

I v a n o v D. V. Identification of linear dynamic systems of fractional order with errors in variables based on an augmented system of equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 508–518. https://doi.org/10.14498/vsgtu1854.

Сведения об авторе

Дмитрий Владимирович Иванов https://orcid.org/0000-0002-5021-5259
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. мехатроники, автоматизации, управления на транспорте; e-mail: dvi85@list.ru

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 519–530
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1856

УДК 533.6.011

О месте звуковых точек в критическом течении

© *А. И. Беспорточный, А. Н. Бурмистров*

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

На основе анализа трехмерных уравнений Эйлера исследуются стационарные безвихревые баротропные течения газа. Критическими в статье называются течения, в которых число Маха всюду меньше или равно единице, и при этом хотя бы в одной точке число Маха достигает единицы. В 1954 году Гилбарг и Шифман показали, что если в критическом течении существует внутренняя (не лежащая на обтекаемой поверхности) звуковая точка, то она лежит на плоской звуковой поверхности, которая во всех своих точках перпендикулярна вектору скорости газа и не может заканчиваться внутри потока (теорема о звуковой точке). На основе этой теоремы Гилбарг и Шифман получили важный для задач максимизации критического числа Маха вывод. Он состоит в том, что при критическом обтекании для широкого класса обтекаемых тел звуковые точки могут располагаться только на его поверхности. Этот вывод существенным образом используется при построении форм обтекаемых тел с максимальным значением критического числа Маха (при заданных изопериметрических условиях).

В представляемой статье рассматривается вопрос о кривизне линий тока во внутренних звуковых точках критических течений. Показывается, что эта кривизна равна нулю. В результате получается новое необходимое условие существования внутренней звуковой точки (и звуковой поверхности). Оно состоит в том, что в точке пересечения со звуковой поверхностью нормальная кривизна обтекаемой поверхности в направлении нормали к звуковой поверхности должна равняться нулю. Приводятся примеры обтекаемых тел, для которых теорема Гилбарга и Шифмана (о звуковой точке) не дает ответа на вопрос о месте расположения звуковых точек. При этом новое необходимое условие позволяет доказать, что существование внутренних звуковых точек при критическом обтекании этих тел невозможно.

Научная статья

Образец для цитирования

Беспорточный А. И., Бурмистров А. Н. О месте звуковых точек в критическом течении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 519–530. https://doi.org/10.14498/vsgtu1856.

Сведения об авторах

Александр Иванович Беспорточный https://orcid.org/0000-0002-1677-4604
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: aleksandr787@yandex.ru

Александр Николаевич Бурмистров https://orcid.org/0000-0003-3862-7936
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: a.burmistrov1@gmail.com

Ключевые слова: уравнения Эйлера, дозвуковой принцип максимума, критическое течение, звуковая точка, первая звуковая точка, звуковая линия, звуковая плоскость.

Получение: 25 марта 2021 г. / Исправление: 7 мая 2021 г. / Принятие: 11 мая 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Дозвуковые течения, в каждой точке которых местное число Маха $\mathsf{M} \leqslant 1$ и при этом хотя бы в одной точке число Маха достигает единицы, называются критическими течениями. В задачах обтекания они соответствуют критическому числу Маха M^* набегающего потока, разграничивающему чисто дозвуковые течения и обтекания с местными сверхзвуковыми зонами. Если в набегающем потоке число Маха $\mathsf{M}_\infty > \mathsf{M}^*$, то при обтекании тела возникают местные сверхзвуковые зоны, что может привести к возникновению скачков уплотнения, которые, в свою очередь, могут вызывать отрыв потока. И скачки, и отрыв резко увеличивают сопротивление. Поэтому практически важной является задача максимизации M^*, состоящая в построении форм обтекаемых тел с максимальным значением M^* (при заданных изопериметрических условиях).

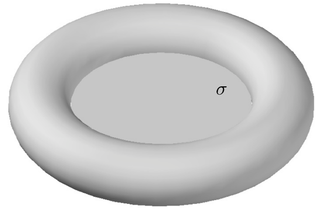
Известен эмпирический факт, что при медленном повышении дозвуковой скорости набегающего потока первые звуковые точки, в которых местное число Маха $\mathsf{M} = 1$, появляются именно на поверхности обтекаемого тела [1]. Из этого эмпирического факта возникло предположение о том, что среди первых звуковых точек обязательно есть точки, которые расположены на поверхности обтекаемого тела. Поэтому при поиске M^* для разных чисел Маха набегающего потока выясняют наличие звуковых точек не во всем течении, а только на поверхности обтекаемого тела. Это существенно упрощает решение задач максимизации M^* [2–7].

Теоретические исследования этого вопроса были проведены в работе [2], где было получено необходимое условие существования внутренних звуковых точек в течениях с $\mathsf{M} \leqslant 1$ (т.е. в критических течениях). Ниже это необходимое условие будет называться *теоремой о звуковой точке*. Согласно этой теореме, если в дозвуковом стационарном безвихревом баротропном течении существует внутренняя звуковая ($\mathsf{M} = 1$) точка, то она лежит на плоской звуковой поверхности (в двумерном случае — на прямой звуковой линии), которая в каждой точке перпендикулярна скорости газа и не может заканчиваться внутри течения. В работе [2] на основе теоремы о звуковой точке для широкого класса конфигураций обтекаемых тел был сделан вывод о том, что первые звуковые точки располагаются только на границе течения. Таким образом, при максимизации M^* в работах [2–7] использовался не только эмпирический, но и теоретически обоснованный факт появления первых звуковых точек именно на поверхности обтекаемого тела. В [2] рассмотрены только такие конфигурации обтекаемых тел, для которых любая плоская поверхность, проходящая через внутренние точки течения и, возможно, имеющая граничные точки на поверхности тела, либо простирается в бесконечность (в частности, это верно для любых выпуклых тел), либо эта поверхность расположена в углублении обтекаемого тела и со всех сторон ограничена поверхностью тела. Для случая, когда плоская поверхность простирается в бесконечность, в [2] использовалось следующее рассуждение. Если во всем течении $\mathsf{M} \leqslant 1$, а в набегающем потоке $\mathsf{M}_\infty < 1$, то существование звуковой поверхности, простирающейся в бесконечность, невозможно вследствие условия затухания возмущений. Поэтому звуковые точки могут находиться только на поверхности таких тел. В [2] также рассмотрен случай, когда плоская звуковая поверхность расположена в углублении обтекаемого тела и со всех сторон ограничена поверхностью тела. Этот случай не противоречит условию $\mathsf{M} = \mathsf{M}_\infty < 1$ на бесконечности, поскольку звуковая поверхность ограничена. Однако в этом случае нарушался бы закон сохранения массы для области, ограниченной звуковой поверхностью и частью поверхности тела в каверне (через звуковую поверхность постоянно со звуковой скоростью двигался бы газ, в то время как оставшаяся часть границы области была бы непроницаема). Поэтому наличие углублений не меняет вывод о том, что звуковые точки могут находиться только на поверхности тел, рассмотренных в [2].

Однако для некоторых тел существование звуковых плоскостей не противоречит условию $\mathsf{M} = \mathsf{M}_\infty < 1$ на бесконечности и закону сохранения массы. Это имеет место, например, в каналах, где существуют плоские поверхности, ограниченные стенками канала. Невозможность существования некоторых таких звуковых поверхностей вытекает из того, что в точках поверхности тела звуковая поверхность и касательная к поверхности тела плоскость должны быть перпендикулярны. Это условие, которое ниже для краткости будем называть *первым геометрическим условием*, вытекает из ортогональности скорости газа к звуковой поверхности и из того, что скорость невязкого газа направлена по касательной к обтекаемой поверхности.

Таким образом, для вывода о появлении первых звуковых точек только на поверхности тела нет необходимости представлять картину течения и учитывать направление набегающего потока. Ответ на этот вопрос для некоторых обтекаемых тел можно получить без специальных знаний в области аэродинамики. Достаточно убедиться, что при любом взаимном расположении плоскости и тела либо часть плоскости, находящаяся в течении, простирается (хотя бы по одной кривой линии, лежащей на этой части плоскости) в бесконечность, либо эта часть ограничена поверхностью тела, но в ней либо нарушено первое геометрическое условие, либо она вместе с частью поверхности тела составляет замкнутую поверхность (нарушение закона сохранения массы). Примером тел, для которых такой подход легко приводит к выводу о появлении первых звуковых точек только на поверхности тела, являются все выпуклые тела, заглушенный цилиндр, полый конус и т.д. Однако для некоторых тел можно найти не простирающуюся в бесконечность плоскую поверхность σ, удовлетворяющую первому геометрическому условию. Например, самое узкое сечение сопла Лаваля. Целое семейство таких поверхностей можно указать для цилиндра с открытыми торцами — это плоские поверхности внутри цилиндра, перпендикулярные его стенкам. Одна поверхность существует для тора — это «перепонка» на самой узкой части отверстия тора (см. рисунок).

Эти примеры показывают, что для достаточно обширного класса обтекаемых тел вопрос о месте возникновения первых звуковых точек остается открытым. Цель данной статьи — сузить этот класс. Для решения некоторых проблем аэрогидродинамики недостаточно использования моделей идеаль-



Расположение звуковой поверхности на круглой части плоскости симметрии тора удовлетворяет первому геометрическому условию

[The location of the sonic surface on the circular part of the plane of symmetry of the torus satisfies the first geometric condition]

ных жидкости и газа (уравнения Эйлера) и требуется учитывать вязкость и другие, более сложные эффекты. Однако, как показывают работы [8–15], потенциал исследования идеальных жидкости и газа до сих пор не исчерпан. Еще одним подтверждением этого будет результат данной статьи, полученный на основе анализа уравнений Эйлера.

1. Баротропное безвихревое течение. Рассмотрим стационарное безвихревое баротропное течение идеального газа в общем пространственном случае. Используем обычные обозначения: $\mathbf{V}$ — скорость; ρ — плотность газа; $p = p(\rho)$ — давление, причем для каждой макрочастицы газа давление $p(\rho)$ является строго возрастающей функцией ρ. Будем считать, что все параметры течения (как функции пространственных координат) и функция $p(\rho)$ имеют необходимую для дальнейшего исследования гладкость.

В баротропном течении местная скорость звука является функцией плотности $c = c(\rho) = \sqrt{p'(\rho)} > 0$. Обозначим

$$g(\rho) = \int \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho, \quad V = |\mathbf{V}|.$$

Из уравнений Эйлера следует, что, поскольку $\mathbf{rot}\,\mathbf{V} = \mathbf{0}$, величина $h_0 = g(\rho) + \frac{V^2}{2}$ постоянна во всем поле течения (закон Бернулли). Так как неопределенный интеграл определяется с точностью до константы, без ограничения общности будем считать, что постоянная $h_0 > 0$. Давление, по предположению, растет с ростом плотности. Следовательно, $g'(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} > 0$, и обратная функция g^{-1} однозначно определена. Поэтому плотность, а вместе с ней и скорость звука, являются однозначными функциями скорости газа — $c = c(\rho(V))$. При этом плотность строго монотонно убывает с ростом V, что следует из выражения для постоянной h_0. Во всех точках дозвукового течения $V \leqslant c(\rho(V))$, а в звуковых точках $V = c(\rho(V))$.

В общем случае из баротропности и монотонности $p = p(\rho)$ не следует монотонность $c = c(\rho)$. Поэтому уравнение $V = c(\rho(V))$ может иметь несколько решений. Однако если дополнительно предположить, что скорость звука возрастает с ростом плотности, решение уравнения $V = c(\rho(V))$ будет единственным. И тогда, если во всем течении $\mathsf{M} \leqslant 1$, звуковые точки будут не только точками максимума числа Маха M, но и точками максимума скорости газа V (и точками максимума безразмерного параметра Чаплыгина $\tau = \frac{V}{\sqrt{2h_0}}$), т.е. можно будет считать, что во всем критическом течении скорость газа не превосходит скорость в звуковой точке.

Предположение о том, что в критическом течении скорость газа не превосходит скорость в звуковой точке, существенным образом использовалось в работе [2]. Однако для общего случая баротропных течений оно не следует из сформулированного в [2] предположения о возрастании функции $p = p(\rho)$. Поэтому в данной работе предлагается принять физически обоснованное дополнительное предположение о росте скорости звука с ростом плотности. Далее, используя в формулировках термин «баротропность», будем подразумевать не только требование роста функции $p = p(\rho)$, но и требование роста функции $c = c(\rho)$ с ростом ρ.

Отметим, что эти требования выполнены, например, при изоэнтропическом течении совершенного газа (подчиняющегося уравнению Менделеева—Клапейрона), для которого баротропность означает $p = s_0\rho^k$, где $k > 1$ — показатель адиабаты, s_0 — энтропийная функция.

2. Кривизна линии тока во внутренней звуковой точке. Поскольку исследуются свойства течений вблизи звуковых точек, без ограничения общности будем считать, что величина скорости $V = |\mathbf{V}|$ отлична от нуля, и поэтому в каждой точке существует единичный вектор, касательный к линии тока $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$. Кроме того, параметр Чаплыгина $\tau = \frac{V}{\sqrt{2h_0}}$ также будет отличен от нуля в окрестности звуковой точки. Представим выражение для h_0 в виде

$$(1-\tau^2)h_0 = \int \frac{p'(\rho)}{\rho}d\rho.$$

Производная по направлению $\mathbf{e}$ от обеих частей этого равенства дает

$$-2h_0\tau(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\tau) = \frac{p'(\rho)}{\rho}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho), \quad \text{или} \quad -2h_0\tau^2(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) = c^2(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho).$$

Отношение $2h_0\tau^2/c^2$ есть квадрат местного числа Маха M. Поэтому

$$-\mathsf{M}^2(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) = (\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\rho). \tag{1}$$

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = \operatorname{div}(\rho\tau\sqrt{2h_0}\mathbf{e}) = 0$$

представляется в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{e} + (\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla})\ln\{\rho\tau\sqrt{2h_0}\} = 0$$

или, с учетом (1),

$$\operatorname{div}\mathbf{e} + (1-\mathsf{M}^2)(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) = 0.$$

Градиент этого равенства с использованием известной формулы векторного анализа

$$\boldsymbol{\nabla}\operatorname{div}\mathbf{b} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

(где Δ — оператор Лапласа) приводит к уравнению

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e} + (1-\mathsf{M}^2)\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau) + (\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nabla}\ln\tau)\boldsymbol{\nabla}(1-\mathsf{M}^2) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Получим выражение для $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e}$ из условия отсутствия завихренности

$$\mathbf{rot}(\sqrt{2h_0}\tau\mathbf{e}) = \mathbf{0},$$

которое, как замечено в [12], равносильно равенству

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{e} = [\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nabla} \ln \tau]. \tag{3}$$

Вычисляя ротор от обеих частей (3) и используя формулу для ротора векторного произведения, получим

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} = (\boldsymbol{\nabla} \ln \tau \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla})\mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau + \mathbf{e}\Delta \ln \tau - (\operatorname{div} \mathbf{e})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau. \tag{4}$$

Рассмотрим внутреннюю звуковую точку A в критическом ($\mathsf{M} \leqslant 1$) течении. Как замечено в разделе 1, в этой точке параметр Чаплыгина τ принимает максимальное значение и, следовательно, выполнено необходимое условие максимума

$$\boldsymbol{\nabla} \ln \tau = \mathbf{0}.$$

Поэтому в звуковой ($\mathsf{M} = 1$) точке A уравнения (2) и (4) упрощаются и принимают соответственно вид

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} + \Delta\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e} = -(\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau + \mathbf{e}\Delta \ln \tau.$$

Исключим вектор $\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{e}$ из этих уравнений, а результат умножим скалярно на вектор $\mathbf{e}$:

$$\Delta \ln \tau - (\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} ((\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla} \ln \tau)) = -(\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} \Delta\mathbf{e}). \tag{5}$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат $Ax_1x_2x_3$ так, чтобы ось Ax_3 совпадала с направлением вектора $\mathbf{e}$ в точке A. В этой системе координат уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_2^2} = -(\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} \Delta\mathbf{e}). \tag{6}$$

Через e_1, e_2, e_3 обозначим координаты вектора $\mathbf{e}$ в системе координат $Ax_1x_2x_3$. Используя координатную запись операторов Δ и $\boldsymbol{\nabla}$, получаем (подробные выкладки можно найти в [12])

$$\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_3)^2 + 2e_1\Delta e_1 + 2e_2\Delta e_2 + 2e_3\Delta e_3,$$

или

$$\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = 2(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + 2(\boldsymbol{\nabla} e_3)^2 + 2(\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} \Delta\mathbf{e}).$$

Из последнего равенства с учетом того, что $\Delta(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \Delta(1) = 0$, имеем

$$(\mathbf{e} \boldsymbol{\cdot} \Delta\mathbf{e}) = -(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 - (\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 - (\boldsymbol{\nabla} e_3)^2,$$

и уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_2^2} = (\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_3)^2. \tag{7}$$

Во внутренней точке A выполнены необходимые условия максимума:

$$\frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_1^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial x_2^2} \leqslant 0.$$

В силу (7) это возможно только в случае

$$(\boldsymbol{\nabla} e_1)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_2)^2 + (\boldsymbol{\nabla} e_3)^2 = 0.$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение. *Пусть в рассматриваемом течении газа* $\mathsf{M} \leqslant 1$ *и есть внутренняя звуковая точка* A. *Тогда в точке* A *пространственные производные всех компонент вектора* $\mathbf{e} = \mathbf{V}/V$ *равны нулю. В частности, это означает, что кривизна линии тока во внутренней звуковой точке равна нулю.*

Замечание. Новизна полученного результата относится только к общему трехмерному случаю. Для плоскопараллельных безвихревых течений давно известно [16], что кривизна линии тока равна нулю в точке на звуковой линии, в которой вектор скорости перпендикулярен данной звуковой линии (такая точка в [16] называется центром околозвукового течения).

3. Второе геометрическое условие. В силу непрерывности на звуковой поверхности кривизна линий тока равна нулю не только во внутренних точках течения, но и в тех точках, которые лежат на пересечении звуковой поверхности с поверхностью обтекаемого тела. Таким образом, *в точке пересечения со звуковой поверхностью нормальная кривизна обтекаемой поверхности в направлении нормали к звуковой поверхности должна равняться нулю.* Это необходимое условие существования звуковой поверхности является основным результатом данной работы. Авторы предлагают называть его *вторым геометрическим условием.*

Использование второго геометрического условия расширяет класс обтекаемых тел, для которых появление первых звуковых точек только на поверхности тела строго обосновано. Так, например, это условие нарушено для поверхности, изображенной на рисунке. Поэтому при обтекании тора (с любого направления) первые звуковые точки будут появляться на поверхности тора, а не во внутренних точках течения. В случае сопла Лаваля существование звуковых поверхностей, доходящих до стенок в сужающейся и в расширяющейся частях канала, противоречит первому геометрическому условию. Что касается самой узкой части сопла Лаваля, где первое геометрическое условие выполнено, то существование звуковой поверхности невозможно, если стенки сопла имеют в самой узкой части ненулевую нормальную кривизну в направлении оси сопла. Следовательно, в таком сопле Лаваля первые звуковые точки будут появляться на стенках, а не во внутренних точках течения. Эти примеры показывают действенность полученного выше второго геометрического условия.

Заключение. В общем пространственном случае на основе анализа полных уравнения Эйлера исследован вопрос о месте расположения звуковых точек при критическом обтекании тела. Рассмотрены баротропные безвихревые стационарные течения с числом Маха $\mathsf{M} \leqslant 1$. Условие $\mathsf{M} \leqslant 1$ соответствует появлению первых звуковых точек при медленном повышении скорости набегающего потока. Ранее было известно, что если в течении существует внутренняя звуковая точка, то существует и плоская звуковая поверхность, на которой лежит эта точка. Плоская звуковая поверхность состоит из звуковых точек, и она в каждой своей точке перпендикулярна скорости газа и не может заканчиваться внутри потока. Также было известно, что в точках поверхности тела звуковая поверхность и касательная к поверхности тела плоскость должны быть перпендикулярны (первое геометрическое условие). В данной работе получено второе геометрическое условие — в точке пересечения со звуковой поверхностью нормальная кривизна обтекаемой поверхности в направлении нормали к звуковой поверхности должна быть равна нулю. Это второе условие расширяет класс тел, для которых появление первых звуковых точек только на поверхности тела строго обосновано.

Результаты могут быть применены для качественного анализа течений, а также при построении пространственных конфигураций с максимальным критическим числом Маха.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Петров К. П. *Аэродинамика элементов летательных аппаратов*. М.: Машиностроение, 1985. 272 с.
2. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I // *Indiana Univ. Math. J.*, 1954. vol. 3, no. 2. pp. 209–230. https://doi.org/10.1512/iumj.1954.3.53010.
3. Брутян М. А., Ляпунов С. В. Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*, 1981. Т. 12, № 5. С. 10–22.
4. Вышинский В. В. Влияние удлинения цилиндрического участка на сопротивление фюзеляжа при околозвуковых скоростях полета // *Учен. зап. ЦАГИ*, 1985. Т. 16, № 3. С. 110–113.
5. Крайко А. Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // *ПММ*, 1987. Т. 51, № 6. С. 941–950.
6. Вышинский В. В., Кузнецов Е. Н. Исследование носовых частей тел вращения с образующей Рябушинского // *Учен. зап. ЦАГИ*, 1992. Т. 23, № 1. С. 3–8.
7. Баринов В. А., Болсуновский А. Л., Бузоверя Н. П., Кузнецов В. Н., Скоморохов С. И., Чернышев И. Л. Исследование обтекания околозвуковым потоком газа модели самолета с носовой частью фюзеляжа в виде полукаверны Рябушинского // *ДАН*, 2007. Т. 416, № 4. С. 474–476.
8. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. https://doi.org/10.1134/S0032823519030135.
9. Петров А. Г., Юдин М. А. К динамике цилиндра в ограниченном потоке идеальной жидкости с постоянной завихренностью // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 393–402. https://doi.org/10.1134/S0032823519020127.
10. Сизых Г. Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2020. Т. 84, № 3. С. 304–310. https://doi.org/10.31857/S0032823520020071.
11. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам.*

гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.

12. Сизых Г. Б. Дозвуковой принцип максимума для неизоэнтропийных течений // *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*, 2017. Т. 20, № 2. С. 74–82.
13. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176.
14. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results / *Smart Modeling for Engineering Systems*: GCM50 2018. Smart Innovation, Systems and Technologies. vol. 133. Cham: Springer, 2019. pp. 228–235. https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_19.
15. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // *Изв. вузов. ПНД*, 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652.
16. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 519–530
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1856

MSC: 76H05

On the place of sonic points in a critical flow

© ***A. I. Besportochny, A. N. Burmistrov***

Moscow Institute of Physics and Technology
(National Research University),
9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russian Federation.

Abstract

Stationary irrotational barotropic gas flows are investigated on the basis of the analysis of three-dimensional Euler equations. Critical flows in the article are those in which the Mach number is everywhere less than or equal to one, and at least at one point the Mach number reaches one. In 1954, D. Gilbarg and M. Shiffman showed that if an internal (not lying on the streamlined surface) sonic point exists in a critical flow, then it lies on a flat sonic surface, which at all its points is perpendicular to the gas velocity vector and cannot end inside the flow (theorem about the sonic point). Using this theorem, D. Gilbarg and M. Shiffman obtained a conclusion that is important for the problems of maximizing the critical Mach number. It consists in the fact that in a critical flow for a wide class of bodies in flow, sonic points can be located only on its surface. This conclusion is essentially used in constructing the shapes of streamlined bodies with the maximum value of the critical Mach number (for given isoperimetric conditions).

In this paper, the question of the curvature of streamlines at the internal sonic points of critical flows is considered. It is shown that this curvature is zero. The result is a new necessary condition for the existence of an interior sonic point (and sonic surface). It consists in the fact that at the point of intersection with the sonic surface, the normal curvature of the streamlined surface in the direction normal to the sonic surface should be equal to zero. Examples of streamlined bodies are given for which the theorem by D. Gilbarg and M. Shiffman (on the sonic point) does not answer the question of the location of the sonic points, at the same time a new necessary condition makes it possible to prove that the existence of internal sonic points in a critical flow around these bodies is impossible.

Keywords: Euler's equations, subsonic maximum principle, critical flow, sonic point, first sonic point, sonic line, sonic plane.

Research Article

Please cite this article in press as:
Besportochny A. I., Burmistrov A. N. On the place of sonic points in a critical flow, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 519–530. https://doi.org/10.14498/vsgtu1856 (In Russian).

Authors' Details:

Aleksandr I. Besportochny https://orcid.org/0000-0002-1677-4604
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: aleksandr787@yandex.ru

Aleksandr N. Burmistrov https://orcid.org/0000-0003-3862-7936
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: a.burmistrov1@gmail.com

Received: 25th March, 2021 / Revised: 7th May, 2021 /
Accepted: 11th May, 2021 / First online: 30th September, 2021

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. The authors are grateful to the referees for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Petrov K. P. *Aerodinamika elementov letatel'nykh apparatov* [Aerodynamics of Aircraft Components]. Moscow, Mashinostroenie, 1985, 272 pp. (In Russian)
2. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I, *Indiana Univ. Math. J.*, 1954, vol. 3, no. 2, pp. 209–230. https://doi.org/10.1512/iumj.1954.3.53010.
3. Brutyan M. A., Lyapunov S. V. Optimization of the shape of symmetric plane bodies with the aim to increase the critical Mach number, *Uchen. Zap. TsAGI*, 1981, vol. 12, no. 5, pp. 10–22 (In Russian).
4. Vyshinsky V. V. Influence of the elongation of the cylindrical section on the drag of the fuselage at transonic flight speeds, *Uchen. Zap. TsAGI*, 1985, vol. 16, no. 3, pp. 110–113 (In Russian).
5. Kraiko A. N. Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical Mach number, *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 6, pp. 723–730. https://doi.org/10.1016/0021-8928(87)90131-6.
6. Vyshinsky V. V., Kuznetsov E. N. Investigation of bow parts of bodies of revolution with the Ryabushinsky generatrix, *Uchen Zap. TsAGI*, 1992, vol. 23, no. 1, pp. 3–8 (In Russian).
7. Barinov V. A., Bolsunovsky A. L., Buzoverya N. P., Kuznetsov E. N., Skomorokhov S. I., Chernyshev I. L. Study on the model of the near-sonic aircraft with the Ryabushinsky nose part of the fuselage, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 4, pp. 553–555. https://doi.org/10.1134/S1028335807100102.
8. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, pp. 907–911. https://doi.org/10.1134/S0015462819070139.
9. Petrov A. G., Yudin M. A. On cylinder dynamics in bounded ideal fluid flow with constant vorticity, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 898–906. https://doi.org/10.1134/S0015462819070127.
10. Sizykh G. B. System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave, *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903. https://doi.org/10.1134/S0015462820070095.
11. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.
12. Sizykh G. B. Maximum principle for subsonic flow with variable entropy, *Civil Aviation High Technologies*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 74–82 (In Russian).
13. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proc. of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian).

14. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. Verification of the calculation of stationary subsonic flows and presentation of results, In: *Smart Modeling for Engineering Systems*, GCM50 2018. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 133. Cham, Springer, 2019, pp. 228–235. https://doi.org/10.1007/978-3-030-06228-6_19.
15. Markov V. V., Sizykh G. B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652 (In Russian). https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652.
16. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the Basics of Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Studies, 2003, 336 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 531–555
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1871

УДК 517.958:532.539.376

Математическое моделирование и численный метод оценки характеристик неизотермической ползучести по результатам эксперимента

© *В. Е. Зотеев*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Стремление к уменьшению массы машин и конструкций при улучшении их качества, а также к наиболее полному использованию механических свойств материалов требует постоянного совершенствования и развития известных методов расчета и анализа напряженно-деформированного состояния материалов в условиях ползучести.

В статье предлагается численный метод оценивания характеристик третьей стадии неизотермической ползучести по совокупности диаграмм ползучести, построенных при обработке результатов испытаний для различных значений номинального напряжения и температур.

В основе метода лежат нелинейные регрессионные модели, среднеквадратичные оценки параметров которых находятся посредством линеаризации, в том числе на основе разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений. Предлагаемый численный метод может быть также использован для оценки параметров третьей стадии ползучести, когда результаты эксперимента в форме совокупности диаграмм испытаний представлены только для одной температуры.

Приведены результаты апробации разработанного численного метода при обработки результатов эксперимента в форме диаграмм ползучести сплава 09Г2С при различных температурах. Достоверность и эффективность представленных в работе алгоритмов вычислений и методов нелинейного оценивания подтверждаются результатами численно-аналитических исследований и построенными на основе экспериментальных данных математическими моделями третьей стадии неизотермической ползучести.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние материала, неизотермическая ползучесть, диаграммы испытаний, нелинейная регрессионная модель, разностные уравнения, среднеквадратичные оценки параметров.

Научная статья

Образец для цитирования

Зотеев В. Е. Математическое моделирование и численный метод оценки характеристик неизотермической ползучести по результатам эксперимента // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 531–555. https://doi.org/10.14498/vsgtu1871.

Сведения об авторе

Владимир Евгеньевич Зотеев https://orcid.org/0000-0001-7114-4894
доктор технических наук, доцент; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Получение: 24 июня 2021 г. / Исправление: 7 сентября 2021 г. /
Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Одна из важнейших проблем современного машиностроения — повышение долговечности и увеличение ресурса элементов конструкций при одновременном снижении их материалоемкости — неразрывно связана с совершенствованием и развитием математических методов расчета и анализа напряженно-деформированного состояния материалов в условиях ползучести. В связи с этим возрастает роль математического моделирования процессов появления и накопления деформации от напряжения, накопления поврежденности и разрушения как материалов, так и элементов конструкций. Все это указывает на актуальность разработки новых численных методов определения параметров моделей реологического деформирования, повышения достоверности оценок этих параметров на основе статистической обработки результатов наблюдений.

Одним из видов неупругой (необратимой) реологической деформации является деформация ползучести. Математическим описанием закономерностей ползучести занимались многие ученые, в том числе Ю. Н. Работнов [1,2], Н. Н. Малинин [3,4], А. М. Локощенко [5,6], О. В. Соснин [7,8], Ю. П. Самарин [9,10], В. П. Радченко [11–13] и другие [14–17]. Однако построение обобщенных моделей деформирования и разрушения элементов конструкций, определяющих соотношений, описывающих зависимости появления и накопления деформации от напряжения, является только первым этапом в реализации триады «модель – алгоритм – программа». Следующим важнейшим этапом математического моделирования является разработка эффективных численных методов и алгоритмов параметрической идентификации, ориентированных на применение современных средств вычислений и математических методов статистической обработки результатов наблюдений.

К особенностям деформационно-прочностного поведения материалов при высоких температурах относятся отсутствие первых двух стадий ползучести (стадий упрочнения) и сравнительно короткая по продолжительности третья стадия (стадия разупрочнения) [8]. Вместе с тем именно третья стадия ползучести, как стадия, предшествующая разрушению, является определяющей при расчете срока службы проектируемого элемента конструкции.

Известные методики расчета параметров третьей стадии ползучести обладают рядом существенных недостатков [8, 12, 14, 15]. Они не используют статистические методы оценивания параметров модели, вследствие чего обладают низкими значениями помехозащищенности и точности результатов расчета. При этом известное математическое описание процессов деформирования и разрушения материалов не учитывает существенной зависимости параметров модели деформации ползучести от температуры [1–12].

1. Постановка задачи исследования и методы ее решения. Целью данной работы является разработка и исследование математической модели и методов оценки параметров третьей стадии деформации неизотермической ползучести, характеристики которой зависят от температуры. Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие основные задачи:

– анализ существующего математического описания процессов деформации ползучести;

– разработка алгоритма нового численного метода оценивания параметров математической модели третьей стадии неизотермической ползучести;
– статистический анализ построенной математической модели и результатов вычислений;
– апробация нового численного метода оценивания характеристик неизотермической ползучести при обработке результатов эксперимента для сплава 09Г2С.

С учетом известного математического описания напряженно-деформированного состояния материалов в условиях ползучести задача оценки параметров модели как неизотермической, так и изотермической ползучести по результатам эксперимента относится к задаче нелинейной регрессии [18,19]. Однако, как показали численно-аналитические исследования, применение классических методов нелинейного оценивания при решении поставленной задачи существенно ограничивается небольшим размером области допустимых начальных приближений в итерационной процедуре уточнения среднеквадратичных оценок характеристик деформации ползучести.

В работах [20,21] сделана попытка решить эту проблему на основе разностных уравнений, коэффициенты которых известным образом связаны с параметрами третьей стадии деформации изотермической ползучести. Описанный в этих работах алгоритм численного метода параметрической идентификации на основе разностных уравнений позволяет строить модели реологического деформирования, отклонение которых от результатов эксперимента, представленных в форме совокупности кривых ползучести при различном напряжении, минимально по евклидовой норме. Однако задача построения моделей температурных зависимостей и достоверная оценка характеристик неизотермической ползучести в этих работах не решалась.

При построении математической модели в форме временной зависимости деформации ползучести можно воспользоваться определяющими уравнениями, полученными на основе энергетического подхода к решению задачи моделирования процесса деформации и разрушения материалов. Этот подход базируется на принципе суперпозиции упругой, пластической деформаций и деформации ползучести, а также на методе разделения деформации ползучести. Основной вариант определяющих соотношений представлен в [12]. Из этих соотношений с учетом отсутствия вязкоупругой и вязкопластической составляющих в деформации ползучести p вытекают следующие уравнения:

$$\frac{dp(t)}{dt} = c\sigma^m(t), \quad \sigma(t) = \sigma_0[1+\omega(t)], \quad \frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha\sigma(t)\frac{dp(t)}{dt}, \tag{1}$$

где σ_0 и $\sigma(t)$ — соответственно номинальное и истинное напряжения ($\sigma_0 \geqslant 0$); $\omega(t)$ — параметр поврежденности; c и m — константы модели, при помощи которых описываются первая и вторая стадии ползучести; α — параметр модели, контролирующий процесс разупрочнения материала на деформации ползучести. Из системы дифференциальных уравнений (1) для нулевых начальных условий ($p(0) = \omega(0) = 0$) можно построить временные зависимости деформации ползучести

$$p(t,\sigma_{0i}) = -\frac{1}{\sigma_{0i}m\alpha}\ln(1-\alpha mc\sigma_{0i}^{m+1}t), \tag{2}$$

которые используются для описания третьей стадии изотермической деформации ползучести при различных постоянных значениях σ_{0i} номинального напряжения.

Одной из важнейших проблем при оценке параметров модели (2) является выбор метрики, описывающей отклонение результатов расчета по модели от результатов наблюдений $(t_{k,i}^{\exp}, p_{k,i}^{\exp})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_i - 1$, $i = \overline{1, L}$, где N_i — число точек эксперимента для i-той кривой ползучести, L — число экспериментальных диаграмм ползучести, построенных для одной температуры. Для третьей стадии деформации ползучести важнейшим временным промежутком является область в окрестности момента разрушения материала, в которой график кривой ползучести приближается к вертикальной асимптоте. Поэтому очевидно, что оценки параметров математической модели (2) следует находить из условия минимизации нормы разности по временной координате:

$$\|t^{\exp} - \hat{t}\| \to \min,$$

где $t^{\exp}$ — вектор данных эксперимента $t_{k,i}^{\exp}$, сформированный по L диаграммам ползучести, в каждой из которых взято по N_i точек; $\hat{t}$ — вектор результатов вычислений $\hat{t}_{k,i}$ по модели (2) при значениях деформации ползучести $p_{ki}^{\exp}$, соответствующих точкам эксперимента $(t_{k,i}^{\exp}, p_{k,i}^{\exp})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_i - 1$, $i = \overline{1, L}$. При этом зависимость $t_{k,i}$ от $p_{k,j}$ в явном виде можно получить из выражения (2):

$$t_{k,i} = \frac{1}{cm\sigma_{0i}^{m+1}\alpha}[1 - \exp(-m\alpha\sigma_{0i}p_{k,i})], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_i - 1, \quad i = \overline{1, L}.$$

При такой постановке для решения этой задачи можно было бы воспользоваться известными методами прикладного регрессионного анализа [18, 19, 22–24]. Однако численно-аналитические исследования эффективности применения классических методов нелинейной регрессии выявили серьезную проблему, связанную с выбором начального приближения вектора оценок, вследствие которой эти методы оказались практически бесполезными. Решить эту проблему при решении задачи параметрической идентификации удалось с помощью численных методов нелинейного оценивания, в основе которых лежат разностные уравнения, описывающие результаты наблюдений [25, 26]. В работах [20, 21] приведены результаты построения математической модели и оценки параметров деформации ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения. Описанные в этих работах алгоритмы нелинейного оценивания и результаты их апробации при обработке четырех экспериментально построенных диаграмм изотермической ползучести алюминиевого сплава подтверждают высокую достоверность полученных оценок и эффективность численного метода на основе разностных уравнений.

В данной работе решается задача параметрической идентификации математической модели вида

$$p(t, \sigma_{0i,j}, T_j) = -\frac{1}{\sigma_{0i,j}m(T_j)\alpha(T_j)} \ln[1 - \alpha(T_j)m(T_j)c(T_j)\sigma_{0i,j}^{m(T_j)+1}t], \qquad (3)$$

описывающей *неизотермическую* деформацию ползучести на основе результатов наблюдений в форме совокупности диаграмм ползучести для разных напряжений и при различной температуре.

Результаты эксперимента после предварительной обработки диаграмм ползучести будем представлять в виде точек $(y_{k,i,j}, p_{k,i,j})$, где $y_{k,i,j} = t^{\exp}_{k,i,j}$ — ордината точки на диаграмме ползучести, абсцисса которой равна $p_{k,i,j}$, причем при равномерной дискретизации каждой кривой ползучести с шагом $h_{i,j}$ имеем $p_{k,i,j} = h_{i,j}k$, где $k = \overline{0, N_{i,j}}$ — номер результата эксперимента для i-той кривой ползучести в j-той совокупности кривых для каждой температуры T_j; $i = \overline{1, L_j}$ — номер кривой ползучести для $\sigma_{0i,j}$ напряжения в j-той совокупности кривых для одной температуры; $j = \overline{1, M}$ — номер совокупности кривых для температуры T_j; L_j — число кривых ползучести в j-той совокупности кривых для температуры T_j; M — число различных температур (совокупностей кривых ползучести); $\sigma_{0i,j}$ — напряжение, соответствующее i-той кривой ползучести в j-той совокупности кривых для одной температуры.

Для решения поставленной задачи предлагается новый численный метод оценки параметров математической модели третьей стадии неизотермической ползучести по всей совокупности экспериментальных диаграмм ползучести для разных напряжений и различной температуры, в основе которого лежит минимизация суммы квадратов отклонения результатов расчета $(\hat{t}_{k,i,j}, p_{k,i,j})$ по формуле

$$\hat{t}_{k,i,j} = \frac{1}{\alpha(T_j)m(T_j)c(T_j)\sigma_{0i,j}^{m(T_j)+1}}[1 - e^{-\alpha(T_j)m(T_j)\sigma_{0i,j}p_{k,i,j}}] \tag{4}$$

от результатов эксперимента $(y_{k,i,j}, p_{k,i,j})$ по совокупности $\sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j}$ точек всех кривых ползучести для всех температур:

$$\|y - \hat{t}\|^2 = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{L_j}\sum_{k=0}^{N_{i,j}-1}(y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \to \min.$$

Основными особенностями предлагаемого численного метода являются:

– применение разностных уравнений при оценке параметров отдельной кривой ползучести при данном напряжении и известной температуре;
– промежуточная оценка параметров изотермической деформации ползучести как один из этапов алгоритма численного метода;
– возможность использования различных математических моделей зависимости параметров третьей стадии деформации ползучести от температуры;
– применение классических методов нелинейной регрессии для уточнения параметров модели неизотермической деформации ползучести.

Алгоритм предлагаемого численного метода включает два основных этапа. На первом этапе решается задача построения моделей изотермической ползучести одновременно для всех совокупностей диаграмм ползучести для разных температур. На втором этапе строятся математические модели температурных зависимостей характеристик модели (3) и уточняются оценки их параметров.

Первый этап. Формирование результатов расчета для оценки параметров математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$.

Шаг 1.1. Параметрическая идентификация на основе разностных уравнений двухпараметрической математической модели кривой ползучести для каждой экспериментально построенной диаграммы ползучести при известных напряжении σ_{0ij} и температуре T_j, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$.

Шаг 1.2. Промежуточная оценка параметров α_j, m_j и c_j модели (2) для каждой j-той совокупности диаграмм ползучести, построенной при одной температуре T_j, $j = \overline{1, M}$.

Шаг 1.3. Уточнение оценок параметров α_j, m_j и c_j модели (2) для каждой j-той совокупности диаграмм ползучести, соответствующей одной температуре T_j, $j = \overline{1, M}$.

Второй этап. Среднеквадратичная оценка параметров математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ на основе результатов расчета, полученных на первом этапе.

Шаг 2.1. Выбор вида математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$.

Шаг 2.2. Предварительная оценка параметров математических моделей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ температурных зависимостей на основе результатов расчета $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$, $\hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$.

Шаг 2.3. Уточнение оценок параметров математических моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ на основе классических методов нелинейного регрессионного анализа.

2. Формирование результатов расчета для построения математических моделей зависимостей параметров $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ от температуры. На первом этапе предлагаемого численного метода параметрической идентификации решается задача оценки параметров α_j, c_j и m_j третьей стадии ползучести для каждой совокупности L_j диаграмм ползучести, построенных для температуры T_j, $j = \overline{1, M}$.

На первом шаге находятся оценки двух параметров $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ математической модели

$$t_{k,i,j} = \frac{1}{u_{i,j} v_{i,j} \sigma_{0i,j}} (1 - e^{-u_{i,j} \sigma_{0i,j} h_{i,j} k}), \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \tag{5}$$

для каждой индивидуальной кривой ползучести, построенной с учетом известных значений напряжения $\sigma_{0i,j}$ и температуры T_j, $h_{i,j}$ — период равномерной дискретизации по переменной p: $p_{k,i,j} = h_{i,j} k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_{i,j} - 1$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$. Эти параметры связаны с характеристиками деформации ползучести соотношениями:

$$u_{i,j} = \alpha_j m_j, \quad v_{i,j} = c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}, \tag{6}$$

где $\alpha_j = \alpha(T_j)$, $m_j = m(T_j)$ и $c_j = c(T_j)$ — параметры модели (3), соответствующие изотермической деформации ползучести при температуре T_j, $i = \overline{1, L_j}$.

Оценки $\hat{u}_{i,j}$ и $\hat{v}_{i,j}$ этих параметров находятся из условия минимизации суммы квадратов отклонения

$$Q_{i,j}(\lambda_{1i,j}, \lambda_{2i,j}) = \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 = \sum_{k=0}^{N_{i,j}} e_{k,i,j}^2 \to \min$$

на основе построенных разностных уравнений

$$\begin{cases} t_{0,i,j} = 0; \\ t_{k,i,j} = \lambda_{1i,j} t_{k-1,i,j} + \lambda_{2i,j}, \quad k = 1, 2, \ldots, N_{i,j} - 1, \end{cases} \tag{7}$$

коэффициенты в которых $\lambda_{1i,j}$ и $\lambda_{2i,j}$ связаны с параметрами $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$ соотношениями

$$\lambda_{1i,j} = e^{-u_{i,j}\sigma_{0i,j}h_{i,j}}, \quad \lambda_{2i,j} = \frac{1 - \lambda_{1i,j}}{u_{i,j}v_{i,j}\sigma_{0i,j}}, \tag{8}$$

где $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$.

С учетом равенства

$$y_{k,i,j} = t_{k,i,j} + \varepsilon_{k,i,j}, \quad k = \overline{0, N_{i,j}}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M},$$

где $y_{k,i,j}$ — результаты наблюдений, $\varepsilon_{k,i,j}$ — случайные величины, описывающие разброс данных эксперимента относительно модели (4), на основе разностных уравнений (7) построена обобщенная регрессионная модель вида

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \tag{9}$$

где $b = (y_{0,i,j}, y_{1,i,j}, \ldots, y_{N_{i,j}-1,i,j})^\top$ — вектор результатов наблюдений; $\lambda = (\lambda_{1i,j}, \lambda_{2i,j})^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов; $\varepsilon = (\varepsilon_{0,i,j}, \varepsilon_{1,i,j}, \ldots, \varepsilon_{N_{i,j}-1,i,j})^\top$ — вектор случайной помехи в результатах наблюдений; F — матрица регрессоров размера $[N_{i,j} \times 2]$, элементы которой описываются формулами

$$f_{1,1} = f_{1,2} = 0, \quad f_{k,1} = y_{k-2,i,j}, \quad f_{k,2} = 1, \quad k = \overline{2, N_{i,j}};$$

P_λ — матрица линейного преобразования вектора случайной помехи ε в результатах наблюдений размера $[N_{i,j} \times N_{i,j}]$, элементы которой описываются формулами

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1, & l = k, & k = \overline{1, N_{i,j}}; \\ -\lambda_{1i,j}, & l = k - 1, & k = \overline{2, N_{i,j}}; \\ 0, & 1 \leqslant l \leqslant k - 2, & k = \overline{3, N_{i,j}}; \\ 0, & k + 1 \leqslant l \leqslant N_{i,j}, & k = \overline{1, N_{i,j} - 1}; \end{cases}$$

$\eta = (\eta_{1,i,j}, \eta_{2,i,j}, \ldots, \eta_{N_{i,j},i,j})^\top$ — вектор эквивалентного случайного возмущения (вектор невязки), элементы которого описываются формулами

$$\eta_{1,i,j} = \varepsilon_{0,i,j}, \quad \eta_{k+1,i,j} = -\lambda_{1i,j}\varepsilon_{k-1,i,j} + \varepsilon_{k,i,j}, \quad k = 1, 2, \ldots, N_{i,j} - 1.$$

Алгоритм оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели (9), обеспечивающий минимизацию суммы квадратов отклонения $Q_{i,j}$ для каждой кривой ползучести, включает итерационную процедуру, которая описывается формулой

$$\hat{\lambda}^{(s+1)} = (F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(s)}} F)^{-1} F^\top \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(s)}} b, \tag{10}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации, $\Omega_{\hat{\lambda}_{ij}^{(s)}} = P_{\hat{\lambda}_{ij}^{(s)}} P^{\top}_{\hat{\lambda}_{ij}^{(s)}}$, начальное приближение: $\hat{\lambda}^{(0)} = (0;0)^{\top}$, $P_{\hat{\lambda}^{(0)}} = \Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}} = \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} = E$ — единичная матрица размера $[N_{i,j} \times N_{i,j}]$.

По найденным оценкам $\hat{\lambda}_{1i,j}$ и $\hat{\lambda}_{2i,j}$ с учетом соотношений (8) для каждой экспериментально построенной диаграммы ползучести при напряжении $\sigma_{0i,j}$ и температуре T_j вычисляются оценки параметров математической модели (5):

$$\hat{u}_{i,j} = -\frac{1}{\sigma_{0i,j} h_{i,j}} \ln \hat{\lambda}_{1i,j}, \quad \hat{v}_{i,j} = \frac{1 - \hat{\lambda}_{1i,j}}{\hat{u}_{i,j} \sigma_{0i,j} \hat{\lambda}_{2i,j}}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}. \tag{11}$$

На втором шаге первого этапа находятся промежуточные оценки параметров α_j, m_j и c_j модели

$$p(t, \sigma_{0i,j}, T_j) = -\frac{1}{\sigma_{0i,j} m_j \alpha_j} \ln[1 - \alpha_j m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j+1} t], \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \tag{12}$$

для каждой j-той совокупности диаграмм ползучести, построенной при одной и той же температуре T_j, $j = \overline{1, M}$. В основе вычисления этих оценок лежат регрессионные модели, построенные с учетом формул (6):

$$\begin{aligned} \hat{v}_{i,j} &= c_j \sigma_{0i,j}^{m_j} + \varepsilon_{i,j}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \\ \hat{u}_{i,j} &= \alpha_j m_j + \xi_{i,j}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\varepsilon_{i,j}$ и $\xi_{i,j}$ — случайные величины, удовлетворяющие предпосылкам классического регрессионного анализа [19, 24].

Среднеквадратичные оценки параметров c_j и m_j, $j = \overline{1, M}$, находятся из условия минимизации

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L_j} (\hat{v}_{i,j} - \hat{c}_j \sigma_{0i,j}^{\hat{m}_j})^2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L_j} e_{i,j}^2 \to \min$$

на основе линеаризации нелинейной модели (13) посредством логарифмирования. С учетом аппроксимации $\ln\bigl(1 + \frac{\varepsilon_{i,j}}{v_{i,j}}\bigr) \approx \frac{\varepsilon_{i,j}}{v_{i,j}}$ нелинейная модель (13) преобразуется к виду

$$\hat{v}_{i,j} \ln \hat{v}_{i,j} = \hat{v}_{i,j} \lambda_j + \hat{v}_{i,j} \ln \sigma_{0i,j} \lambda_{M+j} + \varepsilon_{i,j}, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}, \tag{14}$$

где $\lambda_j = \ln c_j$, $\lambda_{M+j} = L_j$, $j = \overline{1, M}$.

Представив линейную регрессию (14) в матричном виде, имеем

$$b = F\lambda + \varepsilon,$$

где $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_M \end{bmatrix}^{\top}$ — блочная матрица-столбец размера $\bigl[\sum\limits_{j=1}^{M} L_j \times 1\bigr]$, в которой $b_j = (v_{1,j} \ln v_{1,j}, v_{2,j} \ln v_{2,j}, \ldots, v_{L_j,j} \ln v_{L_j,j})^{\top}$ — векторы размера

$[L_j \times 1]$, $j = \overline{1, M}$; $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \cdots & F_M \end{bmatrix}^\top$ — блочная матрица-столбец размера $\Big[\sum\limits_{j=1}^{M} L_j \times 2M\Big]$, в которой

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \hat{v}_{1,j} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \hat{v}_{1,j} \ln \sigma_{01,j} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \hat{v}_{2,j} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \hat{v}_{2,j} \ln \sigma_{02,j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \hat{v}_{L_j,j} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \hat{v}_{L_j,j} \ln \sigma_{0L_j,j} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

— матрицы размера $[L_j \times 2M]$, $j = \overline{1, M}$; $\lambda = (\ln c_1, \ln c_2, \ldots, \ln c_M, m_1, m_2, \ldots, m_M)^\top$ — вектор неизвестных коэффициентов, оценка которого находится по формуле

$$\hat{\lambda} = (F^\top F)^{-1} F^\top b. \tag{15}$$

Оценки параметров c_j и m_j, $j = \overline{1, M}$, модели (12) вычисляются по формулам

$$\hat{c}_j = e^{\hat{\lambda}_j}, \quad \hat{m}_j = \hat{\lambda}_{M+j}, \quad j = \overline{1, M}. \tag{16}$$

С учетом найденных оценок $\hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$, предварительные оценки параметров $\hat{\alpha}_j$, $j = \overline{1, M}$, находятся на основе регрессионной модели

$$b = F\alpha + \xi,$$

где $b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_M \end{bmatrix}^\top$ — блочная матрица-столбец, в которой $b_j = (\hat{u}_{1,j}, \hat{u}_{2,j}, \ldots, \hat{u}_{L_j,j})^\top$, $j = \overline{1, M}$; $F = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_M \end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица размера $\Big[\sum\limits_{j=1}^{M} L_j \times M\Big]$, в которой $f_j = \hat{m}_j (1, 1, \ldots, 1)^\top$ — векторы размера $[L_j \times 1]$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)^\top$. С учетом минимизации остаточной суммы квадратов

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L_j} (\hat{u}_{i,j} - \hat{\alpha}_j \hat{m}_j)^2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L_j} \hat{\xi}_{i,j}^2 \to \min$$

имеем

$$\hat{\alpha} = (F^\top F)^{-1} F^\top b. \tag{17}$$

На последнем шаге первого этапа предварительные оценки параметров $c_j = c(T_j)$, $m_j = m(T_j)$ и $\alpha_j = \alpha(T_j)$ для каждой j-той совокупности кривых при температуре T_j уточняются методом нелинейной регрессии, в основе которого лежит параметрическая линеаризация функциональной зависимости:

$$t_{k,i,j} = \frac{1}{c_j m_j \sigma_{0i,j}^{m_j+1} \alpha_j} \big[1 - \exp(-m_j \alpha_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j})\big],$$
$$k = 0, 1, \ldots, N_{i,j} - 1, \quad i = \overline{1, L_j}, \quad j = \overline{1, M}. \tag{18}$$

Линеаризируя по параметрам в окрестности точки $(\hat{\alpha}_j^{(s)}, \hat{c}_j^{(s)}, \hat{m}_j^{(s)})$ нелинейную зависимость (18), получаем:

$$t_{k,i,j}(\alpha_j, c_j, m_j) \approx \\ \approx t_{k,i,j}^{(s)} + \frac{\partial t_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}(\alpha_j - \hat{\alpha}_j^{(s)}) + \frac{\partial t_{k,i,j}^{(s)}}{\partial c}(c_j - \hat{c}_j^{(s)}) + \frac{\partial t_{k,i,j}^{(s)}}{\partial m}(m_j - \hat{m}_j^{(s)}), \quad (19)$$

где $t_{k,i,j}^{(s)} = t_{k,i,j}(\hat{\alpha}_j^{(s)}, \hat{c}_j^{(s)}, \hat{m}_j^{(s)})$, а частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial t_{k,i,j}}{\partial \alpha} = \frac{e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}(\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j} + 1) - 1}{\alpha_j^2 m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j+1}} = \\ = -\frac{t_{k,i,j}}{\alpha_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial t_{k,i,j}}{\partial c} = -\frac{1 - e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{kij}}}{\alpha_j m_j c_j^2 \sigma_{0i,j}^{m_j+1}} = -\frac{t_{k,i,j}}{c_j}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial t_{k,i,j}}{\partial m} = -\frac{t_{k,i,j}(1 + m_j \ln \sigma_{0i,j})}{m_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}}. \quad (22)$$

С учетом линеаризации (19) и условия минимизации (критерия среднеквадратичного оценивания)

$$\|y - \hat{t}\|^2 = \|\varepsilon\|^2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L_j} \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \to \min$$

сформирована линейная регрессионная модель

$$\Delta t^{(s)} = F^{(s)} \Delta a^{(s)} + \varepsilon, \quad (23)$$

где $\Delta t^{(s)} = \begin{bmatrix} \Delta t_1^{(s)} & \Delta t_2^{(s)} & \cdots & \Delta t_M^{(s)} \end{bmatrix}^\top$ — блочная матрица-столбец размера $\Big[\sum\limits_{j=1}^{M} \sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1\Big]$, состоящая из M блочных матриц-столбцов $\Delta t_j^{(s)} = \begin{bmatrix} \Delta t_{1,j}^{(s)} & \Delta t_{2,j}^{(s)} & \cdots & \Delta t_{L_j,j}^{(s)} \end{bmatrix}^\top$ размера $\Big[\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1\Big]$, $j = \overline{1, M}$, каждая из которых включает вектор $\Delta t_{i,j}^{(s)} = \{y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_{i,j} - 1$, размера $[N_{i,j} \times 1]$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$; $F^{(s)} = \begin{bmatrix} F_1^{(s)} & F_2^{(s)} & F_3^{(s)} \end{bmatrix}$ — блочная матрица-строка регрессоров размера $\Big[\sum\limits_{j=1}^{M} \sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 3M\Big]$, состоящая из трех блочно-диагональных матриц $F_p^{(s)} = \operatorname{diag}\begin{bmatrix} f_{1p}^{(s)} & f_{2p}^{(s)} & \cdots & f_{Mp}^{(s)} \end{bmatrix}$, $p = \overline{1, 3}$, размера

$\Big[\sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j}\times M\Big]$, каждая из которых включает блочные матрицы-столбцы $f_{jp}^{(s)} = \begin{bmatrix} f_{1,j,p}^{(s)} & f_{2,j,p}^{(s)} & \cdots & f_{L_j,j,p}^{(s)} \end{bmatrix}^\top$, $j=\overline{1,M}$, размера $\Big[\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j}\times 1\Big]$, состоящие из векторов размера $[N_{i,j}\times 1]$:

$$f_{i,j,1}^{(s)} = \Big(\frac{\partial \hat t_{0,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat t_{1,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat t_{2,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial \hat t_{N_{i,j}-1,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha}\Big)^\top,$$
$$f_{i,j,2}^{(s)} = \Big(\frac{\partial \hat t_{0,i,j}^{(s)}}{\partial c}, \frac{\partial \hat t_{1,i,j}^{(s)}}{\partial c}, \frac{\partial \hat t_{2,i,j}^{(s)}}{\partial c}, \ldots, \frac{\partial \hat t_{N_{i,j}-1,i,j}^{(s)}}{\partial c}\Big)^\top,$$
$$f_{i,j,3}^{(s)} = \Big(\frac{\partial \hat t_{0,i,j}^{(s)}}{\partial m}, \frac{\partial \hat t_{1,i,j}^{(s)}}{\partial m}, \frac{\partial \hat t_{2,i,j}^{(s)}}{\partial m}, \ldots, \frac{\partial \hat t_{N_{i,j}-1,i,j}^{(s)}}{\partial m}\Big)^\top,$$

элементы которых — частные производные, взятые в точке $(\hat\alpha_j^{(s)}, \hat c_j^{(s)}, \hat m_j^{(s)})$, $j = \overline{1,M}$; $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_M \end{bmatrix}^\top$ — блочная матрица-столбец размера $\Big[\sum\limits_{j=1}^{M}\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j}\times 1\Big]$, состоящая из M блочных матриц-столбцов $\varepsilon_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,j} & \varepsilon_{2,j} & \cdots & \varepsilon_{L_j,j} \end{bmatrix}^\top$ размера $\Big[\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j}\times 1\Big]$, $j = \overline{1,M}$, каждая из которых включает векторы $\varepsilon_{i,j} = (\varepsilon_{0,i,j}, \varepsilon_{1,i,j}, \ldots, \varepsilon_{N_{i,j}-1,i,j})^\top$ размера $[N_{i,j}\times 1]$, $i=\overline{1,L_j}$, $j=\overline{1,M}$, элементы которых — случайные величины, описывающие разброс модели (18) относительно результатов наблюдений; $\hat a^{(s)} = \big(\hat\alpha_1^{(s)}, \hat\alpha_2^{(s)}, \ldots, \hat\alpha_M^{(s)}, \hat c_1^{(s)}, \hat c_2^{(s)}, \ldots, \hat c_M^{(s)}, \hat m_1^{(s)}, \hat m_2^{(s)}, \ldots, \hat m_M^{(s)}\big)^\top$ — матрица-столбец промежуточных оценок размера $[3M\times 1]$;

$$\Delta a^{(s)} = a - \hat a^{(s)} = $$
$$= (\Delta\hat\alpha_1^{(s)}, \ldots, \Delta\hat\alpha_M^{(s)}, \Delta\hat c_1^{(s)}, \ldots, \Delta\hat c_M^{(s)}, \Delta\hat m_1^{(s)}, \ldots, \Delta\hat m_M^{(s)})^\top =$$
$$= (\alpha_1 - \hat\alpha_1^{(s)}, \ldots, \alpha_M - \hat\alpha_M^{(s)}, c_1 - \hat c_1^{(s)}, \ldots, c_M - \hat c_M^{(s)}, m_1 - \hat m_1^{(s)}, \ldots, m_M - \hat m_M^{(s)})^\top$$

— матрица-столбец коэффициентов, подлежащих оценке, размера $[3M\times 1]$.

Алгоритм уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (18) описывается итерационной формулой

$$\hat a^{(s+1)} = \hat a^{(s)} + [F^{(s)\top} F^{(s)}]^{-1} F^{(s)\top} \Delta t^{(s)}, \quad s = 0,1,2,3,\ldots \tag{24}$$

В качестве начального приближения вектора оценок параметров модели (18) $\hat a^{(0)} = (\hat\alpha_1^{(0)}, \hat\alpha_2^{(0)}, \ldots, \hat\alpha_M^{(0)}, \hat c_1^{(0)}, \hat c_2^{(0)}, \ldots, \hat c_M^{(0)}, \hat m_1^{(0)}, \hat m_2^{(0)}, \ldots, \hat m_M^{(0)})^\top$ могут быть приняты промежуточные оценки, полученные на предыдущем шаге алгоритма. Итерационная процедура (24) уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (18) завершается при выполнении условия $\|\Delta a^{(s+1)}\| < \delta$, где δ — некоторое наперед заданное положительное малое число.

При $M = 1$ описанный выше алгоритм первого этапа может быть использован для оценки параметров третьей стадии изотермической ползучести, когда результаты эксперимента в форме совокупности диаграмм ползучести представлены для одной температуры.

3. Среднеквадратичная оценка параметров моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ на основе результатов расчета, полученных на первом этапе. На втором этапе предлагаемого численного метода строятся температурные зависимости параметров $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ математической модели (3). Вид этих зависимостей выбирается на основе анализа совокупностей диаграмм ползучести, построенных для различных температур T_j, $j = \overline{1, M}$. В первом приближении можно использовать полиномиальную форму температурных зависимостей:

$$\begin{aligned} &\alpha(T) = \nu_0 + \nu_1 T + \nu_2 T^2 + \ldots + \nu_n T^n, \\ &c(T) = \mu_0 + \mu_1 T + \mu_2 T^2 + \ldots + \mu_n T^n, \\ &m(T) = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \ldots + \beta_n T^n. \end{aligned} \tag{25}$$

При этом степень n алгебраического многочлена не должна превышать величины $M - 1$: $n \leqslant M - 1$.

Предварительная оценка параметров моделей температурных зависимостей (25) на основе результатов расчета $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$, полученных на первом этапе, реализуется на основе линейных регрессионных моделей вида

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_j = \nu_0 + \nu_1 T + \nu_2 T^2 + \ldots + \nu_n T^n + \varepsilon_{1j}, \\ &\hat{c}_j = \mu_0 + \mu_1 T + \mu_2 T^2 + \ldots + \mu_n T^n + \varepsilon_{2j}, \\ &\hat{m}_j = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \ldots + \beta_n T^n + \varepsilon_{3j}, \quad j = \overline{1, M}, \end{aligned} \tag{26}$$

где случайные величины ε_{1j}, ε_{2j} и ε_{3j} удовлетворяют основным положениям классического регрессионного анализа и не коррелированы между собой.

В матричной форме уравнения (26) можно представить в виде

$$B = FA + \Sigma,$$

где $B = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{c}_1 & \hat{m}_1 \\ \hat{\alpha}_2 & \hat{c}_2 & \hat{m}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\alpha}_M & \hat{c}_M & \hat{m}_M \end{bmatrix}$ — матрица размера $[M \times 3]$ результатов расчетов, полученных на первом этапе; $F = \begin{bmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 & \cdots & T_1^n \\ 1 & T_2 & T_2^2 & \cdots & T_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & T_M & T_M^2 & \cdots & T_M^n \end{bmatrix}$ — матрица регрессоров размера $[M \times (n+1)]$; $A = \begin{bmatrix} v_0 & \mu_0 & \beta_0 \\ v_1 & \mu_1 & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & \mu_n & \beta_n \end{bmatrix}$ — матрица размера $[(n+1) \times 3]$ коэффициентов, подлежащих оценке на основе результатов расчетов, полученных на первом этапе; $\Sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{M1} & \varepsilon_{M2} & \varepsilon_{M3} \end{bmatrix}$ — матрица размера $[M\times 3]$ случайных возмущений в результатах расчетов.

Оценки элементов матрицы A находятся с учетом минимизации суммы квадратов отклонений для каждой из трех моделей (25):

$$\|\varepsilon_i\|^2 = \sum_{j=1}^{M} \varepsilon_{ji}^2 = \sum_{j=1}^{M} \left(b_{ji} - \sum_{p=0}^{n} f_{j,p+1} a_{p+1,i} \right)^2 \to \min, \quad i = \overline{1,3},$$

где $b_{j1} = \hat{\alpha}_j$, $b_{j2} = \hat{c}_j$, $b_{j3} = \hat{m}_j$, $j = \overline{1,M}$ — столбцы матрицы B; $a_{p+1,1} = v_p$, $a_{p+1,2} = \mu_p$, $a_{p+1,3} = \beta_p$, $p = 0,1,2,\ldots,n$ — столбцы матрицы A; $f_{j,p+1} = T_j^p$, $j = \overline{1,M}$, $p = 0,1,2,\ldots,n$ — столбцы матрицы регрессоров F.

Легко убедиться, что в этом случае матрица $\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{v}_0 & \hat{\mu}_0 & \hat{\beta}_0 \\ \hat{v}_1 & \hat{\mu}_1 & \hat{\beta}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{v}_n & \hat{\mu}_n & \hat{\beta}_n \end{bmatrix}$ средне-квадратичных оценок может быть найдена по формуле

$$\hat{A} = (F^\top F)^{-1} F^\top B. \tag{27}$$

4. Уточнение оценок параметров моделей температурных зависимостей $\boldsymbol{\alpha(T)}$, $\boldsymbol{m(T)}$ и $\boldsymbol{c(T)}$, обеспечивающих наименьшее среднеквадратичное отклонение построенной модели от результатов эксперимента. Полученные среднеквадратичные оценки параметров моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$, $m(T)$ и $c(T)$ могут быть уточнены на основе параметрической линеаризации модели (4).

Введем $(n+1)$-мерные векторы $a_1 = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n)^\top$, $a_2 = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)^\top$ и $a_3 = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)^\top$ — столбцы матрицы A.

Линеаризация по параметрам нелинейной зависимости (4) $3(n+1)$-параметрической функции

$$\hat{t}_{k,i,j}(a_1, a_2, a_3) = \hat{t}_{k,i,j}(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$$

имеет вид

$$\hat{t}_{k,i,j}(a_1, a_2, a_3) \approx \hat{t}_{k,i,j}^{(s)} + \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_p} (\nu_p - \hat{\nu}_p^{(s)}) + \\ + \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_p} (\mu_p - \hat{\mu}_p^{(s)}) + \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_p} (\beta_p - \hat{\beta}_p^{(s)}), \tag{28}$$

где $\hat{t}_{k,i,j}^{(s)} = \hat{t}_{k,i,j}(\hat{\nu}_0^{(s)}, \hat{\nu}_1^{(s)}, \ldots, \hat{\nu}_n^{(s)}, \hat{\mu}_0^{(s)}, \hat{\mu}_1^{(s)}, \ldots, \hat{\mu}_n^{(s)}, \hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_1^{(s)}, \ldots, \hat{\beta}_n^{(s)})$, а частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \nu_p} = \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \nu_p} = T_j^p \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \mu_p} = \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial \mu_p} = T_j^p \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c},$$
$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \beta_p} = \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial \beta_p} = T_j^p \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

где производные $\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c}$ и $d\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m}$ описываются соотношениями (20)–(22):

$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial \alpha} = -\frac{\hat{t}_{k,i,j}}{\alpha_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}},$$
$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial c} = -\frac{1 - e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{\alpha_j m_j c_j^2 \sigma_{0i,j}^{m_j+1}} = -\frac{\hat{t}_{k,i,j}}{c_j}$$

и

$$\frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}}{\partial m} = -\frac{\hat{t}_{kij}(1 + m_j \ln \sigma_{0i,j})}{m_j} + \frac{p_{k,i,j} e^{-\alpha_j m_j \sigma_{0i,j} p_{k,i,j}}}{m_j c_j \sigma_{0i,j}^{m_j}},$$

$k = \overline{0, N_{i,j}}$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$, $M > 1$.

С учетом линеаризации (28) и условия минимизации (критерия средне-квадратичного оценивания)

$$\|y - \hat{t}\|^2 = \|\varepsilon\|^2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{L_j} \sum_{k=0}^{N_{i,j}-1} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \to \min$$

сформирована линейная регрессионная модель вида (23):

$$\Delta t^{(s)} = F^{(s)} \Delta a^{(s)} + \varepsilon,$$

где $\Delta t^{(s)} = \begin{bmatrix} \Delta t_1^{(s)} & \Delta t_2^{(s)} & \cdots & \Delta t_M^{(s)} \end{bmatrix}^\top$ — блочная матрица-столбец размера $\left[\sum\limits_{j=1}^{M} \sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1\right]$, состоящая из M блочных матриц-столбцов $\Delta t_j^{(s)} = \begin{bmatrix} \Delta t_{1,j}^{(s)} & \Delta t_{2,j}^{(s)} & \cdots & \Delta t_{L_j,j}^{(s)} \end{bmatrix}^\top$ размера $\left[\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1\right]$, $j = \overline{1, M}$, каждая из которых включает вектор $\Delta t_{i,j}^{(s)} = \{y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N_{i,j} - 1$, размера $[N_{i,j} \times 1]$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$; $F^{(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_0} & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_1} & \cdots & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \nu_n} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_0} & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_1} & \cdots & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \mu_n} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_0} & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \beta_n} \end{bmatrix}$ — матрица регрессоров размера $\left[\sum\limits_{j=1}^{M} \sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 3(n+1)\right]$, столбцы которой образуют частные производные по параметрам моделей температурных зависимостей $\alpha(T)$,

$c(T)$ и $m(T)$, вычисленные в точке $y_{k,i,j}$, $k = 0, 1, \ldots, N_{i,j}$, $i = \overline{1, L_j}$, $j = \overline{1, M}$, при значениях параметров $\hat{\nu}_0^{(s)}$, $\hat{\nu}_1^{(s)}$, $\ldots$, $\hat{\nu}_n^{(s)}$, $\hat{\mu}_0^{(s)}$, $\hat{\mu}_1^{(s)}$, $\ldots$, $\hat{\mu}_n^{(s)}$, $\hat{\beta}_0^{(s)}$, $\hat{\beta}_1^{(s)}$, $\ldots$, $\hat{\beta}_n^{(s)}$, где $s = 0, 1, 2, 3, \ldots$ — номер итерации.

Каждый из $3(n+1)$ столбцов $f_p^{(s)} = \begin{bmatrix} f_{1,p}^{(s)} & f_{2,p}^{(s)} & \cdots & f_{M,p}^{(s)} \end{bmatrix}^\top$, $p = \overline{1, 3(n+1)}$, матрицы $F^{(s)}$ включает M блоков:

$$f_{j,p}^{(s)} = \begin{bmatrix} f_{1,j,p}^{(s)} & f_{2,j,p}^{(s)} & \cdots & f_{L_j,j,p}^{(s)} \end{bmatrix}^\top, \quad j = \overline{1, M},$$

размера $\left[\sum\limits_{i=1}^{L_j} N_{i,j} \times 1\right]$, которые, в свою очередь, содержат L_j векторов $f_{i,j,p}^{(s)}$, $i = \overline{1, L_j}$, размера $[N_{i,j} \times 1]$ вида

$$f_{i,j,p}^{(s)} = T_j^{p-1} \left\{ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial \alpha} \right\}, \quad p = \overline{1, n+1};$$

$$f_{i,j,p}^{(s)} = T_j^{p-1} \left\{ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial c} \right\}, \quad p = \overline{n+2, 2n+2};$$

$$f_{i,j,p}^{(s)} = T_j^{p-1} \left\{ \frac{\partial \hat{t}_{k,i,j}^{(s)}}{\partial m} \right\}, \quad p = \overline{2n+3, 3n+3}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N_{i,j};$$

$\hat{a}^{(s)} = (\hat{\nu}_0^{(s)}, \hat{\nu}_1^{(s)}, \ldots, \hat{\nu}_n^{(s)}, \hat{\mu}_0^{(s)}, \hat{\mu}_1^{(s)}, \ldots, \hat{\mu}_n^{(s)}, \hat{\beta}_0^{(s)}, \hat{\beta}_1^{(s)}, \ldots, \hat{\beta}_n^{(s)})^\top$ — вектор промежуточных оценок параметров модели размера $[3(n+1) \times 1]$;

$$\begin{aligned} &\Delta a^{(s)} = a - \hat{a}^{(s)} = \\ &= (\Delta\hat{\nu}_0^{(s)}, \Delta\hat{\nu}_1^{(s)}, \ldots, \Delta\hat{\nu}_n^{(s)}, \Delta\hat{\mu}_0^{(s)}, \Delta\hat{\mu}_1^{(s)}, \ldots, \Delta\hat{\mu}_n^{(s)}, \Delta\hat{\beta}_0^{(s)}, \Delta\hat{\beta}_1^{(s)}, \ldots, \Delta\hat{\beta}_n^{(s)})^\top = \\ &= (\nu_0 - \hat{\nu}_0^{(s)}, \nu_1 - \hat{\nu}_1^{(s)}, \ldots, \nu_n - \hat{\nu}_n^{(s)}, \mu_0 - \hat{\mu}_0^{(s)}, \mu_1 - \hat{\mu}_1^{(s)}, \ldots, \mu_n - \hat{\mu}_n^{(s)}, \\ &\qquad \beta_0 - \hat{\beta}_0^{(s)}, \beta_1 - \hat{\beta}_1^{(s)}, \ldots, \beta_n - \hat{\beta}_n^{(s)})^\top \end{aligned}$$

— вектор коэффициентов, подлежащих нахождению, размера $[3(n+1) \times 1]$.

Алгоритм уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (4) с учетом температурных зависимостей (25) и среднеквадратичного критерия оценивания

$$\|\varepsilon\|^2 = \|\Delta t^{(s)} - F^{(s)} \Delta a^{(s)}\|^2 \to \min$$

описывается итерационной формулой (24):

$$\hat{a}^{(s+1)} = \hat{a}^{(s)} + [F^{(s)T} F^{(s)}]^{-1} F^{(s)T} \Delta t^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

В качестве начального приближения вектора оценок параметров моделей (25) $\hat{a}^{(0)} = (\hat{\nu}_0^{(0)}, \hat{\nu}_1^{(0)}, \ldots, \hat{\nu}_n^{(0)}, \hat{\mu}_0^{(0)}, \hat{\mu}_1^{(0)}, \ldots, \hat{\mu}_n^{(0)}, \hat{\beta}_0^{(0)}, \hat{\beta}_1^{(0)}, \ldots, \hat{\beta}_n^{(0)})^\top$ могут быть приняты промежуточные оценки, полученные на предыдущем шаге алгоритма. Итерационная процедура (24) уточнения среднеквадратичных оценок параметров модели (4) с учетом температурных зависимостей (25) завершается при выполнении условия $\|\Delta a^{(s+1)}\| < \delta$, где δ — некоторое наперед заданное положительное малое число.

Вопрос о целесообразности уточнения оценок моделей температурных зависимостей (25) на втором этапе предлагаемого алгоритма численного метода оценивания характеристик неизотермической ползучести решается с учетом априорной информации о величине случайной помехи в результатах наблюдений и требований к точности оценок.

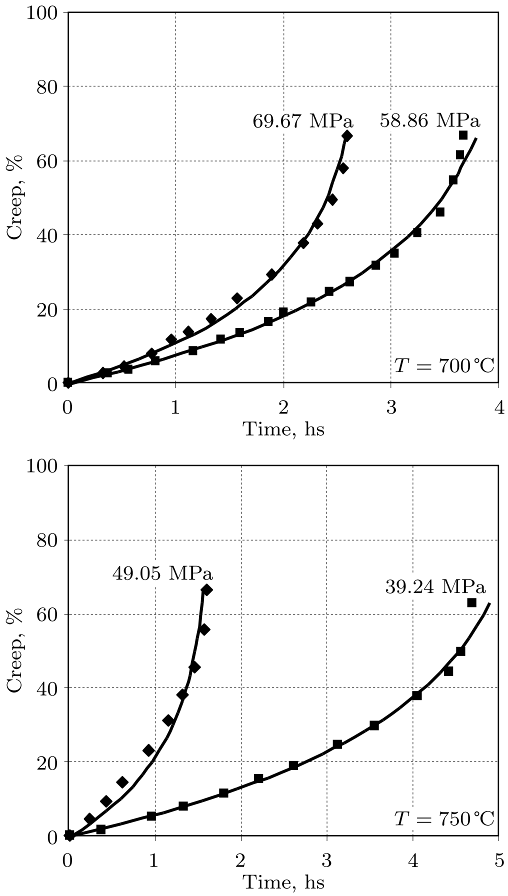
Отметим, что если не ставится промежуточная задача построения моделей изотермической ползучести для каждой из температур T_j, $j = \overline{1, M}$, в отдельности, то в ряде случаев последний шаг первого этапа — уточнение оценок $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$, на основе итерационной процедуры (24) — может быть пропущен. А в качестве результатов расчета в формулах (26) на втором этапе могут быть использованы оценки $\hat{\alpha}_j^{(0)}$, $\hat{c}_j^{(0)}$ и $\hat{m}_j^{(0)}$, $j = \overline{1, M}$.

При степени аппроксимирующих многочленов (26) $n = M - 1$ задача вычисления среднеквадратичных оценок их коэффициентов на основе формулы (27) сводится к задаче построения интерполяционного многочлена. В этом случае оценки параметров $\alpha(T_j)$, $c(T_j)$ и $m(T_j)$ в модели (3), описывающей неизотермическую деформацию ползучести при температурах T_j, $j = \overline{1, M}$, будут совпадать с результатами расчетов $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$, полученными на первом этапе алгоритма. Так как на последнем шаге первого этапа на основе итерационной процедуры уточнения этих оценок обеспечивается минимум суммы квадратов отклонений модели от данных эксперимента, то очевидно, что оценки коэффициентов в моделях температурных зависимостей (26), найденные по формуле (27), будут оптимальными, и их уточнения на основе итерационной процедуры не требуется. Применение последнего шага второго этапа алгоритма — итерационной процедуры уточнения оценок коэффициентов температурных зависимостей параметров модели (3) — при $n = M - 1$ имеет смысл только в том случае, когда не используется итерационная процедура уточнения результатов расчета параметров $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, $j = \overline{1, M}$, на последнем шаге первого этапа.

5. Апробация численного метода оценки параметров третьей стадии неизотермической ползучести по результатам эксперимента. Разработанный численный метод оценки характеристик третьей стадии неизотермической ползучести прошел апробацию при обработке результатов эксперимента, представленных в виде диаграмм испытаний на ползучесть для сплава 09Г2С [27]. На рисунке точками представлены результаты испытаний, проведенных при $M = 3$ температурах: $T_1 = 700\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 730\,^\circ\mathrm{C}$ и $T_3 = 750\,^\circ\mathrm{C}$ и $L_1 = L_2 = L_3 = 2$ напряжениях: $\sigma_{01,1} = 69.67$ МПа, $\sigma_{02,1} = \sigma_{01,2} = 58.86$ МПа, $\sigma_{02,2} = \sigma_{01,3} = 49.05$ МПа и $\sigma_{02,3} = 39.24$ МПа.

В результате предварительной обработки диаграмм испытаний, параметры которых приведены в табл. 1, где $N_{i,j}^{\mathrm{e}}$ — объем первоначальной выборки, были сформированы выборки результатов эксперимента $y_{k,i,j}$, $k = 0, 1, \ldots, 20$, одинакового объема $N_{i,j} = 21$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 3}$, и с шагом равномерной дискретизации $h_{i,j}, \%$ кривой ползучести $p_{i,j}$, %, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 3}$.

В соответствии с описанным выше алгоритмом на первом шаге на основе итерационной процедуры (10) находились оценки коэффициентов обобщенной регрессионной модели (9) $\hat{\lambda}_{1i,j}$ и $\hat{\lambda}_{2i,j}$, а затем на их основе по формулам (11) вычислялись оценки $\hat{u}_{i,j}$ и $\hat{v}_{i,j}$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 3}$, параметров модели (5) для каждой отдельной кривой ползучести (см. табл. 2).



Результаты эксперимента [27] (точки) и кривые ползучести сплава 09Г2С при различных температурах

[Experimental results [27] (points) and creep curves for the 09G2C alloy at different temperatures]

Таблица 1

Исходные данные для построения математической модели на основе результатов экперимента [Initial data for the mathematical model construction based on the experimental results]

	i	j		
		1	2	3
T_j, °C	—	700	730	750
$\sigma_{0i,j}$, MPa	1 2	69.67 58.86	58.86 49.05	49.05 39.24
$N^{\mathrm{e}}_{i,j}$	1 2	14 19	9 14	10 13
$N_{i,j}$	1 2	21 21	21 21	21 21
$h_{i,j}, \%$	1 2	3.33 3.33	3.59 3.57	3.32 3.15

Таблица 2

Результаты промежуточных расчетов параметров по каждой кривой ползучести (первый шаг первого этапа алгоритма) [Results of intermediate calculations of parameters for each creep curve (the first step of the first stage of the algorithm)]

	i	j		
		1	2	3
T_j, °C	—	700	730	750
$\sigma_{0i,j}$, MPa	1 2	69.67 58.86	58.86 49.05	49.05 39.24
$\hat{\lambda}_{1i,j}$	1 2	0.887 0.881	0.922 0.894	0.912 0.893
$\hat{\lambda}_{2i,j}$	1 2	0.329 0.487	0.116 0.384	0.173 0.579
$\hat{u}_{i,j}$	1 2	$5.14 \cdot 10^{-4}$ $6.44 \cdot 10^{-4}$	$3.82 \cdot 10^{-4}$ $6.41 \cdot 10^{-4}$	$5.63 \cdot 10^{-4}$ $9.13 \cdot 10^{-4}$
$\hat{v}_{i,j}$	1 2	9.557 6.436	29.862 8.789	18.304 5.140
$s_{i,j}$, %	1 2	1.7 1.7	1.7 1.5	2.3 1.7

В последней строке табл. 2 представлены оценки адекватности построенных моделей экспериментальным данным в форме их среднеквадратичных отклонений от результатов наблюдений в относительных единицах:

$$s_{i,j},\ \% = \frac{\|y - \hat{t}\|}{\|y\|} \cdot 100\% = \sqrt{\sum_{k=0}^{20} (y_{k,i,j} - \hat{t}_{k,i,j})^2 \Big/ \sum_{k=0}^{20} y_{k,i,j}^2} \cdot 100\,\%.$$

В табл. 3 приведены результаты вычислений оценок параметров моделей деформации ползучести, описывающих совокупности диаграмм при различных напряжениях $\sigma_{0i,j}$ для каждой из температур T_j, $j = \overline{1,3}$.

В третьем, четвертом и пятом столбцах табл. 3 приведены значения предварительных оценок параметров $\hat{\alpha}_j^{(0)}$, $\hat{c}_j^{(0)}$ и $\hat{m}_j^{(0)}$, $j = \overline{1,3}$, полученные на основе формул (15)–(17). А в столбцах седьмом, восьмом и девятом этой же таблицы — оценки параметров $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, уточненные на основе итерационной процедуры (24) и минимизирующие среднеквадратичное отклонение

Таблица 3

Оценки параметров моделей третьей стадии ползучести при различных температурах (второй и третий шаги первого этапа алгоритма) [Estimates of the model parameters for the third creep stage at different temperatures (the second and third steps of the first stage of the algorithm)]

j	T_j,°C	$\hat{\alpha}_j^{(0)}$	$\hat{c}_j^{(0)}$	$\hat{m}_j^{(0)}$	$s_j^{(0)}$,%	$\hat{\alpha}_j$	$\hat{c}_j$	$\hat{m}_j$	s_j,%
1	700	$2.47 \cdot 10^{-4}$	$4.56 \cdot 10^{-4}$	2.345	7.0	$3.88 \cdot 10^{-4}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$	1.537	2.4
2	730	$7.62 \cdot 10^{-5}$	$4.01 \cdot 10^{-11}$	6.708	13.3	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$1.48 \cdot 10^{-8}$	5.197	2.7
3	750	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$4.36 \cdot 10^{-9}$	5.692	12.7	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$3.96 \cdot 10^{-7}$	4.472	2.8

моделей от результатов эксперимента по каждой совокупности T_j, $j = \overline{1,3}$, диаграмм ползучести. Полученные на данном шаге алгоритма результаты могут быть использованы при построении математических моделей (2) третьей стадии изотермической ползучести для известной температуры T_j, $j = \overline{1,3}$:

$$p(t,\sigma_{0i}) = -\frac{1}{5.964\cdot 10^{-4}\sigma_{0i}}\ln(1-7.633\cdot 10^{-6}\sigma_{0i}^{2.537}t) \text{ для } T = 700\,^\circ\mathrm{C}; \quad (29)$$

$$p(t,\sigma_{0i}) = -\frac{1}{6.029\cdot 10^{-4}\sigma_{0i}}\ln(1-8.922\cdot 10^{-12}\sigma_{0i}^{6.197}t) \text{ для } T = 730\,^\circ\mathrm{C}; \quad (30)$$

$$p(t,\sigma_{0i}) = -\frac{1}{8.631\cdot 10^{-4}\sigma_{0i}}\ln(1-34.18\cdot 10^{-11}\sigma_{0i}^{5.472}t) \text{ для } T = 750\,^\circ\mathrm{C}. \quad (31)$$

В шестом и последнем столбцах табл. 3 приведены оценки адекватности построенных моделей в форме их среднеквадратичных отклонений от результатов наблюдений в относительных единицах:

$$s_j,\,\% = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{20}(y_{k,i,j}-\hat{t}_{k,i,j})^2 \Big/ \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=0}^{20} y_{k,i,j}^2}\cdot 100\,\%.$$

В шестом столбце табл. 3 оценки адекватности соответствуют моделям, параметры которых $\hat{\alpha}_j^{(0)}$, $\hat{c}_j^{(0)}$ и $\hat{m}_j^{(0)}$, $j = \overline{1,3}$, получены на основе формул (15)–(17). В последнем столбце этой же таблицы приведены оценки адекватности моделей, построенных на основе итерационной процедуры (24) уточнения оценок параметров $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, минимизирующих величину s_j, %, $j = \overline{1,3}$. Очевидно, что применение итерационной процедуры уточнения оценок параметров модели изотермической ползучести (2) позволило существенно повысить адекватность построенных моделей (29)–(31) результатам испытаний.

При апробации разработанного численного метода на втором этапе алгоритма в качестве математических моделей, описывающих температурные зависимости $\alpha(T)$, $c(T)$ и $m(T)$ параметров математической модели неизотермической деформации ползучести (3), с учетом соотношения $n \leqslant M-1$ были выбраны алгебраические многочлены второй степени $n = 2$:

$$\alpha(T) = \nu_0+\nu_1 T+\nu_2 T^2,\quad c(T) = \mu_0+\mu_1 T+\mu_2 T^2,\quad m(T) = \beta_0+\beta_1 T+\beta_2 T^2. \quad (32)$$

Предварительная оценка параметров моделей температурных зависимостей (32) на основе результатов расчета $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, $j = \overline{1,M}$, полученных на первом этапе, выполнялась на основе формулы (27):

$$\hat{A} = (F^\top F)^{-1}F^\top B,$$

в которой матрицы F и B имеют вид

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 700 & 490000\\ 1 & 730 & 532900\\ 1 & 750 & 562500\end{bmatrix},\qquad B = \begin{bmatrix} 3.88\cdot 10^{-4} & 1.28\cdot 10^{-2} & 1.537\\ 1.16\cdot 10^{-4} & 1.48\cdot 10^{-8} & 5.197\\ 1.93\cdot 10^{-4} & 3.96\cdot 10^{-7} & 4.472\end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$F^\top F = \begin{bmatrix} 3 & 2.18\cdot 10^3 & 1.59\cdot 10^6 \\ 2.18\cdot 10^3 & 1.59\cdot 10^6 & 1.15\cdot 10^9 \\ 1.59\cdot 10^6 & 1.15\cdot 10^9 & 8.40\cdot 10^{11} \end{bmatrix},$$

$$F^\top B = \begin{bmatrix} 6.98\cdot 10^{-4} & 0.0128 & 11.21 \\ 0.501 & 8.991 & 8223.6 \\ 360.83 & 6293.8 & 6.04\cdot 10^6 \end{bmatrix},$$

$$(F^\top F)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.16\cdot 10^6 & -3.21\cdot 10^3 & 2.213 \\ -3.21\cdot 10^3 & 8.859 & -6.12\cdot 10^{-3} \\ 2.213 & -6.12\cdot 10^{-3} & 4.22\cdot 10^{-6} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.139 & 4.688 & -1701.7 \\ -3.78\cdot 10^{-4} & -1.27\cdot 10^{-2} & 4.649 \\ 2.58\cdot 10^{-7} & 8.56\cdot 10^{-6} & -3.17\cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Полученные на основе результатов расчетов $\hat{\alpha}_j$, $\hat{c}_j$ и $\hat{m}_j$, $j = \overline{1,3}$, представленных в табл. 3, предварительные оценки параметров моделей температурных зависимостей (32) приведены во второй строке табл. 4.

Таблица 4

Оценки параметров моделей температурных зависимостей характеристик неизотермической ползучести (второй и третий шаги второго этапа алгоритма) [Estimates of the model parameters for the temperature dependence of the non-isothermal creep characteristics (the second and third steps of the second stage of the algorithm)]

	$\hat{\nu}_0$	$\hat{\nu}_1\cdot 10^4$	$\hat{\nu}_2\cdot 10^7$	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1\cdot 10^2$	$\hat{\mu}_2\cdot 10^6$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2\cdot 10^3$	$s,\%$
Preliminary estimates	0.139	−3.78	2.58	4.69	−1.27	8.56	−1701.7	4.65	−3.17	2.93
Revised estimates	0.141	−3.86	2.63	4.69	−1.27	8.56	−1752.1	4.79	−3.26	2.89

Уточнение этих оценок проводилось на основе параметрической линеаризации (28) нелинейной зависимости (4), моделей (32) и результатов испытаний $(t_{k,i,j}, p_{k,i,j})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N^{\mathrm{e}}_{i,j}$, $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,3}$. Уточненные оценки параметров моделей температурных зависимостей (32) приведены в третьей строке табл. 4. В последнем столбце табл. 4 приведены оценки адекватности построенных моделей экспериментальным данным в относительных единицах. Очевидно, что уточнение среднеквадратичных оценок параметров температурных зависимостей практически не повлияло на адекватность модели неизотермической ползучести результатам испытаний в форме диаграмм ползучести.

Таким образом, математическая модель третьей стадии неизотермической ползучести, построенная на основе результатов эксперимента, представленных в виде диаграмм испытаний на ползучесть для сплава 09Г2С, имеет вид (3):

$$p(t,\sigma_0,T) = -\frac{1}{\sigma_0 m(T)\alpha(T)} \ln[1 - \alpha(T)m(T)c(T)\sigma_0^{m(T)+1} t], \tag{33}$$

где

$$\alpha(T) = 0.141 - 3.86\cdot 10^{-4}\cdot T + 2.63\cdot 10^{-7}\cdot T^2, \tag{34}$$

$$c(T) = 4.69 - 1.27 \cdot 10^{-2} \cdot T + 8.56 \cdot 10^{-6} \cdot T^2, \tag{35}$$

$$m(T) = -1752.1 + 4.79 \cdot T - 3.26 \cdot 10^{-3} \cdot T^2. \tag{36}$$

Кривые ползучести, построенные по модели (33) с учетом температурных зависимостей (34)–(36) при температурах $T_1 = 700\,^\circ\mathrm{C}$, $T_2 = 730\,^\circ\mathrm{C}$, $T_3 = 750\,^\circ\mathrm{C}$ и напряжениях $\sigma_{01,1} = 69.67$ МПа, $\sigma_{02,1} = 58.86$ МПа, $\sigma_{01,2} = 58.86$ МПа, $\sigma_{02,2} = \sigma_{01,3} = 49.05$ МПа, $\sigma_{02,3} = 39.24$ МПа, приведены на рисунке.

Заключение. Разработан численный метод оценивания характеристик третьей стадии неизотермической ползучести по совокупности диаграмм ползучести, построенных при обработке результатов испытаний для различных значений номинального напряжения и температур. В основе метода лежат нелинейные регрессионные модели, среднеквадратичные оценки параметров которых находятся посредством линеаризации, в том числе на основе разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений. Предлагаемый численный метод может быть также использован для оценки параметров третьей стадии деформации ползучести, когда результаты эксперимента в форме совокупности диаграмм испытаний представлены только для одной температуры. Результаты апробации численного метода при обработке результатов эксперимента в форме диаграмм ползучести сплава 09Г2С при температурах 700, 730 и 750 °C подтвердили достоверность полученных соотношений и выводов, а также высокую эффективность нового численного метода в задачах оценивания параметров моделей третьей стадии неизотермической ползучести.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–01–00550_а).

Библиографический список

1. Работнов Ю. Н. *Избранные труды. Проблемы механики деформируемого тела.* М.: Наука, 1991. 196 с.
2. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Малинин Н. Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести.* М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
4. Малинин Н. Н. *Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций.* М.: Машиностроение, 1981. 220 с.
5. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 504 с.
6. Бойцов Ю. И., Данилов В. Л., Локощенко А. М., Шестериков С. А. *Исследование ползучести металлов при растяжении.* М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 98 с.
7. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. *Энергетический вариант теории ползучести.* Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН СССР, 1986. 95 с.
8. Соснин О. В., Любашевская И. В., Новоселя И. В. Сравнительные оценки высокотемпературной ползучести и разрушения конструкционных материалов // *ПМТФ*, 2008. № 2. С. 123–130.
9. Самарин Ю. П., Клебанов Я. М. *Обобщенные модели в теории ползучести конструкций.* Самара: СамГТУ, 1994. 196 с.

10. Самарин Ю. П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // *Проблемы прочности*, 1974. № 9. С. 24–27.
11. Радченко В. П. Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1996. № 4. С. 43–63. https://doi.org/10.14498/vsgtu237.
12. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций.* М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с.
13. Радченко В. П., Симонов А. В. Разработка автоматизированной системы построения моделей неупругого деформирования металлов на основе методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1999. № 7. С. 51–62. https://doi.org/10.14498/vsgtu208.
14. Катанаха Н. А., Семенов А. С., Гецов Л. Б. Единая модель долгосрочной и краткосрочной ползучести и идентификация ее параметров // *Проблемы прочности*, 2013. № 4. С. 143–157.
15. Belleneger E., Bussy P. Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution // *Int. J. Solids Struct.*, 2001. vol. 38, no. 4. pp. 577–604. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00042-1.
16. Besseling J. F. Plasticity and creep theory in engineering mechanics / *Topics in Applied Continuum Mechanics.* Vienna: Springer, 1974. pp. 115–135. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-4188-5_6.
17. Benedetti M., Fontanari V., Scandi P., Ricardo C.L.A., Bandini M. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation // *Int. J. Fatigue*, 2009. vol. 31, no. 8–9. pp. 1225–1236. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017.
18. Draper N. R., Smith H. Applied Regression Analysis / Wiley Series in Probability and Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1998. xix+716 pp. https://doi.org/10.1002/9781118625590.
19. Демиденко Е. З. *Линейная и нелинейная регрессии.* М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с. [Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow: Finance and Statistics, 1981. 302 pp. (In Russian)]
20. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров модели ползучести разупрочняющегося материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 2. С. 328–341. https://doi.org/10.14498/vsgtu1488.
21. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод оценки параметров деформации ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*, 2016. № 3 (51). С. 18–25.
22. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях.* Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
23. Себер Дж. *Линейный регрессионный анализ.* М.: Мир, 1980. 456 с.
24. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков О. *Прикладной линейный регрессионный анализ.* М.: Финансы и статистика, 1987. 238 с.
25. Зотеев В. Е. *Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений.* М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
26. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. https://doi.org/10.14498/vsgtu1643.
27. Бойко С. В. *Моделирование формообразования элементов конструкций в условиях нестационарной ползучести*: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 2020. 133 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 531–555
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1871

MSC: 74C10

Mathematical modeling and numerical method for estimating the characteristics of non-isothermal creep based on the experimental data

© ***V. E. Zoteev***

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The desire to reduce the mass of machines and structures while improving their quality, as well as to make the most complete use of the mechanical properties of materials, requires permanent improvement and development of known methods for calculating and analyzing the stress-strain state of materials under creep conditions.

The article proposes a numerical method for estimating the characteristics of the third stage of non-isothermal creep based on a set of creep diagrams constructed when processing test results for various values of nominal stress and temperature.

The method is based on the nonlinear regression model, the root-mean-square estimates of the parameters of which are found by linearization, including on the basis of difference equations describing the experimental results. The proposed numerical method can also be used to estimate the parameters of the third creep stage, when the experimental results are presented in the form of a set of test diagrams for only one temperature.

The results of testing the developed numerical method for processing the experimental results in the form of creep diagrams for the 09G2C alloy at different temperatures are presented. The reliability and efficiency of the calculation algorithms and methods of nonlinear estimation presented in the work are confirmed by the results of numerical and analytical studies and mathematical models of the third stage of non-isothermal creep constructed on the basis of experimental data.

Keywords: stress-strain state of the material, non-isothermal creep, test diagrams, nonlinear regression model, difference equations, root-mean-square parameter estimates.

Received: 24th June, 2021 / Revised: 7th September, 2021 /
Accepted: 20th September, 2021 / First online: 30th September, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:

Zoteev V. E. Mathematical modeling and numerical method for estimating the characteristics of non-isothermal creep based on the experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 531–555. https://doi.org/10.14498/vsgtu1871 (In Russian).

Author's Details:

Vladimir E. Zoteev https://orcid.org/0000-0001-7114-4894
Dr. Tech. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science;
e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19–01–00550_a).

References

1. Rabotnov Yu. N. *Izbrannye trudy. Problemy mekhaniki deformiruemogo tela* [Selected Papers. Problems of the Mechanics of a Deformable Rigid Body]. Moscow, Nauka, 1991, 196 pp. (In Russian)
2. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members.* Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
3. Malinin N. N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 pp. (In Russian)
4. Malinin N. N. *Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruktsii* [Creep Calculations of Mechanical Engineering Structure Elements]. Moscow, Mashinostroenie, 1981, 220 pp. (In Russian)
5. Lokoshchenko A. M. *Polzuchest' i dlitel'naia prochnost' metallov* [Creep and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016, 504 pp. (In Russian)
6. Boytsov Yu. I., Danilov V. L., Lokoshchenko A. M., Shesterikov S. A. *Issledovanie polzuchesti metallov pri rastiazhenii* [Study of Tensile Creep of Metals]. Moscow, Bauman Moscow State Technical Univ., 1997, 98 pp. (In Russian)
7. Sosnin O. V., Gorev B. V., Nikitenko A. F. *Energeticheskii variant teorii polzuchesti* [Energy Variant of Creep Theory]. Novosibirsk, Inst. of Hydrodynamics, USSR Acad. of Sci., 1986, 95 pp. (In Russian)
8. Sosnin O. V., Lyubashevskaya I. V., Novoselya I. V. Comparative estimation of high-temperature creep and rupture of structural materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 261–266. `https://doi.org/10.1007/s10808-008-0036-0`.
9. Samarin Yu. P., Klebanov Ya. M. *Obobshchennye modeli v teorii polzuchesti konstruktsii* [Generalized Models in the Theory of Creep of Structures]. Samara, Samara State Techn. Univ., 1994, 196 pp. (In Russian)
10. Samarin Yu. P. Derivation of exponential approximations for creep curves by the method of successive isolation of exponential terms, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1062–1066. `https://doi.org/10.1007/BF01528264`.
11. Radchenko V. P. The mathematical model of inelastic deformation and failure of the metals by energy-type creep, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1996, no. 4, pp. 43–63 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu237`.
12. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktsii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian)
13. Radchenko V. P., Simonov A. V. Development of an automated system for building models of inelastic deformation of metals on the basis of nonparametric alignment method of experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 1999, no. 7, pp. 51–62 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu208`.
14. Katanakha N. A., Semenov A. S., Getsov L. B. Unified model of steady-state and transient creep and identification of its parameters, *Strength Mater.*, 2013, vol. 45, no. 4, pp. 495–505. `https://doi.org/10.1007/s11223-013-9485-7`.
15. Belleneger E., Bussy P. Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution, *Int. J. Solids Struct.*, 2001, vol. 38, no. 4, pp. 577–604. `https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00042-1`.

16. Besseling J. F. Plasticity and creep theory in engineering mechanics, In: *Topics in Applied Continuum Mechanics*. Vienna, Springer, 1974, pp. 115–135. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-4188-5_6.
17. Benedetti M., Fontanari V., Scandi P., Ricardo C.L.A., Bandini M. Reverse bending fatigue of shot peened 7075-T651 aluminium alloy: The role of residual stress relaxation, *Int. J. Fatigue*, 2009, vol. 31, no. 8–9, pp. 1225–1236. https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2008.11.017.
18. Draper N. R., Smith H. Applied Regression Analysis, Wiley Series in Probability and Statistics. New York, John Wiley and Sons, 1998, xix+716 pp. https://doi.org/10.1002/9781118625590.
19. Demidenko E. Z. *Lineinaia i nelineinaia regressii* [Linear and Nonlinear Regressions]. Moscow, Finance and Statistics, 1981, 302 pp. (In Russian)
20. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. A numerical method for the determination of parameters of the strain softening creep model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 2, pp. 328–341 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1488.
21. Zoteev V. E., Makarov R. Yu. Numerical method of estimation of parameters of deformation of creep in the exponential dependency of parametr of weakening from the strain, *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyi analiz. Modelirovanie*, 2016, no. 3 (51), pp. 18–25 (In Russian).
22. Granovskii V. A., Siraya T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods of Processing Experimental Data in Measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
23. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, xvi+565 pp. https://doi.org/10.1002/9780471722199.
24. Vuchkov I., Boyadzhieva L., Solakov O. *Prikladnoi lineinyi regressionnyi analiz* [Applied Linear Regression Analysis]. Moscow, Finance and Statistics, 1987, 238 pp. (In Russian)
25. Zoteev V. E. *Parametricheskaia identifikatsiia dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravnenii* [Parametric Identification of Dissipative Mechanical Systems Based on Difference Equations]. Moscow, Mashinostroenie, 2009, 344 pp. (In Russian)
26. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669–701 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1643.
27. Boyko S. V. *Modeling the shaping of structural elements in nonstationary creep conditions*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Novosibirsk, Lavrentiev Inst. of Hydrodynamics, 2020, 133 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 556–570
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1855

УДК 539.3

Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек

© *Е. А. Коровайцева*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Предложен алгоритм решения задач о нелинейном динамическом поведении осесимметричных неразветвленных мягкооболочечных конструкций, основанный на использовании метода дифференцирования по параметру. Алгоритм не накладывает каких-либо ограничений на диапазон деформаций и перемещений, свойства материала, условия закрепления или форму меридиана конструкции. При этом уравнения движения в частных производных сводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям с использованием метода прямых. Полученная система уравнений дифференцируется по календарному параметру. В результате решение задачи сводится к решению двух взаимосвязанных задач – квазилинейной многоточечной краевой задачи и нелинейной задачи Коши с правой частью специального вида. Особенности использования данного алгоритма применительно к задачам динамики мягких оболочек проявляются при его программной реализации и описаны в работе. Тестирование алгоритма выполнено на примере решения задачи динамического раздувания шарнирно опертой полусферы из неогуковского материала. Отмечено, что хотя формально рассматриваемая в примере оболочка не является составной, для построения численного решения необходимо использование метода сегментации интервала интегрирования по координате, что соответствует анализу составной конструкции. Исследовано влияние выбора шага по времени и схемы аппроксимации ускорения на результаты решения.

Ключевые слова: мягкая оболочка, высокоэластичный материал, динамическое раздувание, метод прямых, метод дифференцирования по параметру, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность.

Получение: 23 марта 2021 г. / Исправление: 17 мая 2021 г. / Принятие: 25 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Коровайцева Е. А. Применение метода дифференцирования по параметру в решении нелинейных задач стационарной динамики осесимметричных мягких оболочек // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 556–570. https://doi.org/10.14498/vsgtu1855.

Сведения об авторе

Екатерина Анатольевна Коровайцева https://orcid.org/0000-0001-6663-8689
кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. динамических испытаний; e-mail: katrell@mail.ru

Введение. Задачи динамического деформирования мягких оболочек в доступной литературе освещены лишь в ограниченном количестве публикаций, а работы зарубежных авторов, по сути, касаются лишь трех частных простейших задач. Очевидно, причиной этого является вычислительная сложность рассматриваемой проблемы. Уравнения динамического деформирования мягких оболочек как систем с распределенной массой сформулированы в работах [1–5]. При этом в [1] рассматриваются лишь стационарные колебания оболочек конкретных форм и условий закрепления, а решения построены в аналитической форме. В работах [2,3] постановки и решения задач даны для оболочек специфической формы — каркасированных абсолютно гибкими дискретно расположенными нитями. Во всех упомянутых работах, несмотря на то, что постановка задачи дается для материала с произвольными нелинейными физическими соотношениями, результаты расчета приводятся лишь для линейного поведения материала оболочек (за исключением тестового примера удара по гибкой нити — квадратичной зависимости усилия от деформации нити). Авторами [2, 3, 5] используются метод конечных разностей и метод конечных элементов. Примечательно, что все расчеты нестационарного динамического поведения мягкооболочечных конструкций указанных авторов являются решениями конкретных прикладных задач парашютостроения. Таким образом, применимость или особенности применения данных методов для случая истинной физической нелинейности материала и истинно больших деформаций остались неизученными.

В зарубежной литературе, за исключением монографии [4], не уделяется внимания построению разрешающих соотношений динамического деформирования мягкооболочечных конструкций в общей математической постановке. Однако множество работ посвящено решению соответствующих частных задач. Принципиальным отличием в подходе к постановке задач динамики от работ отечественных исследователей является отсутствие прикладной направленности задачи. Начиная с первых работ 60-х годов XX века до работ 2020 года зарубежными авторами рассматриваются лишь задачи динамического раздувания цилиндрической и сферической оболочек и плоских мембран [6–16]. Исходные данные задач отличаются формами упругих потенциалов материала, толщиной стенки рассматриваемой оболочки, зависимостью нагрузки от времени. Разрешающие соотношения во всех работах сводятся к уравнению движения системы с одной степенью свободы. В абсолютном большинстве работ получены аналитические решения этого уравнения и исследуются свойства диаграмм нагружения и фазовых кривых. Численное исследование сводится как максимум к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге—Кутта [17], методом конечных разностей [18], методом множественной пристрелки с использованием встроенной процедуры языка программирования ФОРТРАН [19] и методом конечных элементов в комплексе ABAQUS [20, 21]. Подчеркнем, что каждый раз система разрешающих уравнений формулируется для конкретной рассматриваемой задачи, т.е. речь о разработке универсального алгоритма решения задач динамики мягкооболочечных конструкций не идет.

Можно выделить лишь две более сложные постановки задачи, рассмотренные зарубежными исследователями. Одна из них посвящена анализу прыжка мягкого актюатора, надуваемого жидкостью [22]. Однако в указанной работе решение задачи динамики сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для системы с двумя степенями свободы, причем для построения уравнений используются результаты квазистатического решения, полученного с использованием конечноэлементного комплекса ABAQUS, а далее применяется встроенная процедура MATLAB решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений ODE45. В задачах второго типа [23,24] исследуется распространение нестационарных волн в гиперупругом теле. Решения соответствующих систем ищутся в аналитическом виде.

Подводя итог обзора, можно заключить, что несмотря на проводимые исследования задач динамики мягкооболочечных конструкций на протяжении более 60-ти лет, до сих пор не существует ни их математической постановки, ни вычислительного алгоритма, одновременно ориентированных на решение задач максимально широкого класса и удобных для использования в численной реализации. Большие перемещения и деформации в задачах динамики численными методами не получены, а сопутствующие этому вычислительные трудности лишь декларируются отдельными исследователями, но до сих пор не изучены.

В настоящей работе предлагается математическая постановка и алгоритм решения задачи осесимметричного динамического деформирования составной мягкооболочечной конструкции как системы с распределенной массой и исследуются особенности реализации алгоритма на примере тестовой задачи о динамическом раздувании полусферы из неогуковского материала.

1. Математическая постановка и алгоритм решения. Пусть задача динамического деформирования мягкой оболочки описывается системой дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{\partial \vec{y}_i}{\partial x_i} = \vec{f}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i) + M_i \frac{\partial^2 \vec{y}_i}{\partial t^2}, \quad i \in [1, N] \tag{1}$$

и системой дополнительных алгебраических соотношений

$$\vec{\varphi}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i) = \vec{0}. \tag{2}$$

Соотношения (1), (2) дополняются начальными условиями

$$\vec{y}(x,0) = \vec{y}_0, \quad \vec{y}\,'(x,0) = \vec{y}_0',$$

условиями сопряжения сегментов конструкции

$$\vec{y}_j(x_{j,e}) = \vec{y}_{j+1}(x_{j+1,b}) + \vec{d}_{j+1}; \quad j \in [1, N-1]$$

и граничными условиями

$$\vec{\psi}_1(x_1, \vec{y}_1, \vec{q}, \vec{\mu}, t) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2.$$

Здесь $\vec{y}_i$ — вектор-функция n компонентов разрешающих переменных; $\vec{f}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i)$ — вектор-функция n компонентов правых частей системы дифференциальных уравнений; $\vec{z}_i$ — вектор дополнительных переменных, т.е.

переменных, не входящих под знак производной в системе (1), а рассчитываемых из дополнительных алгебраических соотношений (2); $\vec{\varphi}_i(x_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i, \vec{\mu}_i, \vec{q}_i)$ — вектор-функция нелинейных дополнительных алгебраических соотношений; $\vec{q}_i(x, t)$ — вектор-функция из l компонентов поверхностных нагрузок; $\vec{\mu}_i$ — вектор параметров задачи; $\vec{d}_j$ — вектор сосредоточенных нагрузок в точках сопряжения сегментов конструкции; M_i — матрица инерционных свойств элемента конструкции; N — число сегментов краевой задачи.

При построении алгоритма решения задачи (5)–(8) представим нагрузку, действующую на деформируемый элемент, суммой заданных поверхностных нагрузок и инерционных нагрузок:

$$\vec{q}_i^{\,*}(x,t) = \vec{q}_i(x,t) + M_i \frac{\partial^2 \vec{y}_i}{\partial t^2}. \tag{3}$$

При использовании метода дифференцирования по параметру для решения системы (5)–(8) вводится параметр нагрузки α, т.е. нагрузка (3) записывается в виде

$$\vec{q}_i^{\,**}(x,t) = \alpha \vec{q}_i^{\,*}(x,t). \tag{4}$$

Используя m-точечную аппроксимацию вектора ускорений для момента времени $t = t_k$, $k \geqslant m$, запишем

$$\left.\frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^2}\right|_{t=t_k} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{y}_{m+1-j}.$$

Тогда с учетом представления (4) система уравнений (1) для моментов времени $t_1 \leqslant t_k < t_m$ принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d\vec{y}_{i,1}}{dx_i} = \vec{F}_{i,1}(x_i, \vec{y}_{i,1}, \vec{z}_{i,1}, \vec{\mu}_{i,1}, \vec{q}_{i,1}, t_1, \alpha),\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{d\vec{y}_{i,m-1}}{dx_i} = \vec{F}_{i,m-1}(x_i, \vec{y}_{i,m-1}, \vec{y}_{i,m-2}, \ldots, \vec{y}_{i,1}, \vec{z}_{i,m-1}, \vec{\mu}_{i,m-1}, \vec{q}_{i,m-1}, t_{m-1}, \alpha),
\end{aligned}$$

а для моментов времени $t_k \geqslant t_m$ —

$$\frac{d\vec{y}_{i,k}}{dx_i} = \vec{F}_{i,k}(x_i, \vec{y}_{i,k}, \vec{y}_{i,k-1}, \vec{y}_{i,k-2}, \ldots, \vec{y}_{i,k-m+1}, \vec{z}_{i,k}, \vec{\mu}_{i,k}, \vec{q}_{i,k}, t_k, \alpha),$$

где $i \in [1, N]$.

При этом на первых $(m-1)$ шагах по времени для аппроксимации вектора ускорений используются законтурные точки [25]. Таким образом, для k-того регулярного шага по времени полная система уравнений, описывающих динамическое поведение конструкции, имеет вид

$$\frac{d\vec{y}_{i,k}}{dx_i} = \vec{F}_{i,k}(x_i, \vec{y}_{i,k}, \vec{y}_{i,k-1}, \vec{y}_{i,k-2}, \ldots, \vec{y}_{i,k-m+1}, \vec{z}_{i,k}, \vec{\mu}_{i,k}, \vec{q}_{i,k}, t_k, \alpha), \tag{5}$$

$$\vec{\varphi}_{i,k}(x_i, \vec{y}_{i,k}, \vec{z}_{i,k}, \vec{\mu}_{i,k}, \vec{q}_{i,k}, \alpha) = \vec{0}, \quad i \in [1, N] \tag{6}$$

с условиями сопряжения сегментов конструкции

$$\vec{y}_{j,k}(x_{j,e}) = \vec{y}_{j+1,k}(x_{j+1,b}) + \vec{d}_{j+1,k}, \quad j \in [1, N-1] \tag{7}$$

и граничными условиями

$$\vec{\psi}_{1,k}(x_1, \vec{y}_{1,k}, \vec{q}_k, \vec{\mu}_k, \tau_k) = \vec{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \tag{8}$$

Тогда при дифференцировании по некоторому заранее выбранному параметру T системы уравнений (5) получим

$$\frac{d\dot{\vec{y}}_{i,k}}{dx_i} = \frac{\partial \vec{F}_{i,k}}{\partial \vec{y}_{i,k}} \dot{\vec{y}}_{i,k} + \frac{\partial \vec{F}_{i,k}}{\partial \vec{z}_{i,k}} \dot{\vec{z}}_{i,k} + \frac{\partial \vec{F}_{i,k}}{\partial \vec{q}^{\,**}_{i,k}} \frac{\partial \vec{q}^{\,**}_{i,k}}{\partial T},$$

где

$$\frac{\partial \vec{q}^{\,**}_{i,k}}{\partial T} = \dot{\alpha}\left(\vec{q}_{i,k} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{y}_{k+1-j}\right) + \alpha\left(\dot{\vec{q}}_{i,k} + \beta_1 \dot{\vec{y}}_k\right).$$

Точка здесь обозначает дифференцирование по параметру T.

Отметим, что решение задачи проводится последовательно на каждом временном слое, поэтому при дифференцировании по параметру аппроксимированного вектора ускорений скорости векторов разрешающих переменных по параметру предыдущих шагов по времени полагаются равными нулю.

Таким образом, при дифференцировании по параметру T системы (5)–(8), выражая из продифференцированного соотношения (6) скорости дополнительных переменных по параметру $\dot{\vec{z}}_{i,k}$, получим квазилинейную краевую задачу, которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\vec{y}}_{i,k}}{dx_i} &= A_{i,k}(x_i, \vec{y}_{i,k}, \vec{z}_{i,k}, \vec{q}_{i,k}, \vec{\mu}_{i,k}, \alpha)\dot{\vec{y}}_{i,k} + \\ &\quad + \vec{b}_{i,k}(x_i, \vec{y}_{i,k}, \vec{z}_{i,k}, \vec{q}_{i,k}, \vec{\mu}_{i,k}, \vec{y}_{i,k-1}, \ldots, \vec{y}_{i,k-m+1})\dot{\alpha}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\dot{\vec{y}}_{j,k}(x_{j,e}) = \dot{\vec{y}}_{j+1,k}(x_{j+1,b}) + \dot{\vec{d}}_{j+1,k}, \quad j \in [1, N-1], \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &B_{1,k}(x_1, \vec{y}_{1,k}, \vec{z}_{1,k}, \vec{\mu}_{1,k}, \vec{q}_{1,k}, \alpha)\dot{\vec{y}}_1 + \\ &\quad + \vec{b}_{1,k}(x_1, \vec{y}_{1,k}, \vec{z}_{1,k}, \vec{\mu}_{1,k}, \vec{q}_{1,k})\dot{\alpha} = \vec{0}, \quad 1 \rightleftharpoons 2. \end{aligned} \tag{11}$$

Как и обычно, при использовании метода дифференцирования по параметру квазилинейная краевая задача дополняется задачей Коши относительно искомых векторов разрешающих и дополнительных переменных и параметра нагрузки α:

$$\frac{d\vec{y}_{i,j}}{dT} = \dot{\vec{y}}_{i,j}(\vec{y}_{i,j}, x_{i,j}, T), \quad \frac{d\vec{z}_{i,j}}{dT} = \dot{\vec{z}}_{i,j}(\vec{y}_{i,j}, x_{i,j}, T), \quad \frac{d\alpha}{dT} = \dot{\alpha}(\vec{y}_{i,j}, T). \tag{12}$$

Здесь $j \in [1, M_i]$, где M_i — число точек дискретизации i-того сегмента конструкции, а индекс момента времени k опущен.

Алгоритм решения взаимосвязанных задач (9)–(11) и (12) и его особенности, связанные с реализацией применительно к задачам статики мягких оболочек, представлены в [26]. Для задач динамики поиск решения проводится при значениях параметра $\alpha \in [0, 1]$, где решение при $\alpha = 1$ соответствует решению исходной задачи (5)–(8) с точностью до принятой аппроксимации вектора ускорений.

2. Динамическое раздувание шарнирно опертой полусферы из неогуковского материала (пример). Систему уравнений для описания динамического поведения мягкой оболочки получим с использованием принципа наименьшего действия Остроградского—Гамильтона. Она включает в себя следующие соотношения:

– уравнения движения:

$$\frac{\partial T_{1x}}{\partial \alpha} = \frac{A}{R_1} T_{1z} + \frac{1}{A}\frac{dB}{d\alpha} T_{2y} - ABp\vartheta_1(1+e_2) + AB\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial T_{1z}}{\partial \alpha} = -\frac{A}{R_1} T_{1x} - \frac{B}{R_2} T_{2y} + ABp(1+\varepsilon_1)(1+e_2) - AB\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

– геометрические дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = A\varepsilon_1 - \frac{A}{R_1} w, \quad \frac{\partial w}{\partial S} = -A\vartheta_1 + \frac{A}{R_1} u;$$

– дополнительные алгебраические соотношения:

$$e_2 = \frac{1}{AB}\frac{dB}{d\alpha} u + \frac{1}{R_2} w, \quad e_1 + \frac{1}{2} e_1^2 = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \vartheta_1^2);$$
$$T_{1x} = T_1^*(1+\varepsilon_1)B, \quad T_{2y} = T_2^*(1+e_2)A, \quad T_{1z} = T_1^*\vartheta_1 B;$$
$$T_1^* = T_1 \frac{1+e_2}{1+e_1}, \quad T_2^* = T_2 \frac{1+e_1}{1+e_2}$$

– и в общем случае нелинейные физические соотношения:

$$T_1 = T_1(e_1, e_2), \quad T_2 = T_2(e_1, e_2).$$

Все обозначения соответствуют принятым в [30].

Рассмотрим раздувание шарнирно опертой полусферы внезапно приложенным постоянным во времени равномерно распределенным по меридиану давлением. Для определенности примем, что материал оболочки является неогуковским, для которого функция упругого потенциала имеет вид [15]:

$$W = C(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3).$$

Здесь $\lambda_i = 1 + e_i$, $i = 1, 2, 3$, а C — параметр материала оболочки.

Используя связь функции упругого потенциала с напряжениями в несжимаемом изотропном материале [31], можно получить следующие физические соотношения:

$$T_1 = 2Ch_0\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{(\lambda_1\lambda_2)^3}\Big), \quad 1 \rightleftharpoons 2,$$

где h_0 — толщина оболочки в начальном состоянии.

Для аппроксимации ускорения применим четырехточечную схему метода Хуболта [28] и трехточечную схему центральных разностей. Кроме того, при реализации предлагаемого алгоритма необходимо учесть особенности расчета мягких оболочек, указанные в [26]. В частности, необходимо задать малое предварительное давление, действующее на оболочку в начальный момент времени, и выполнить регуляризацию системы уравнений движения оболочки. Численные эксперименты показали, что при решении задачи динамики достаточно провести регуляризацию лишь на первом шаге по времени. Параметр продолжения решения был выбран в форме, предложенной В. И. Шалашилиным [32].

Необходимо также отметить, что в связи с плохой обусловленностью рассматриваемой задачи построение ее решения невозможно без использования метода сегментации. Указанный метод переводит двухточечную краевую задачу, формируемую из системы уравнений динамики мягкой оболочки при применении описанного выше метода прямых, к многоточечной. Таким образом, несмотря на то, что меридиан оболочки представляет собой однородную кривую, для построения численного решения необходимо представление этой кривой совокупностью сегментов с условиями сопряжения, характеризующими неразрывность меридиана.

На рис. 1 показана зависимость прогиба полюса полусферы, раздуваемой равномерно распределенной по меридиану нагрузкой $p^* = 0.02$, отнесенного к ее начальному радиусу, от времени для значений шагов по времени $d\tau = 0.5$, $d\tau = 0.25$, $d\tau = 0.125$, $d\tau = 0.08$ при четырехточечной аппроксимации ускорения; на рис. 2 — аналогичные результаты при трехточечной аппроксимации. Отношение радиуса оболочки к ее толщине в начальном состоянии принято равным $R_0/h_0 = 100$. Безразмерные величины времени и нагрузки связаны с размерными следующими соотношениями:

$$p^* = \frac{p}{C}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{C}{R_0^2\rho}},$$

где ρ — плотность материала оболочки.

В таблице указаны значения периода колебаний оболочки, полученные в результате расчетов. При этом точное значение безразмерного периода колебаний оболочки для данной задачи составляет $T = 2.31$, а величины амплитуды прогиба, отнесенного к начальному радиусу оболочки, — $w_0 = 0.38$ [15].

Как следует из представленных графиков и таблицы, на результаты расчета влияет выбор как шага по времени, так и схемы аппроксимации ускорения. Рис. 1 и 2 демонстрируют особенности численного решения задач динамики, проявляющиеся при использовании конечно-разностной аппроксимации ускорения и отмеченные в работах [25, 29], т.е. затухание амплитуды колебаний при использовании слишком большого шага по времени и уменьшение периода колебаний при уменьшении шага, причем затухание является наиболее выраженным для случая трехточечной аппроксимации. При этом с увеличением шага по времени решение затухает к решению статической задачи при приложении постоянной нагрузки рассматриваемой величины. Такие результаты представляются обоснованными, т.к. в предлагаемом алгоритме инерционные слагаемые в разрешающей системе уравнений рассматриваются как внешняя нагрузка, действующая на оболочку, и, следовательно,

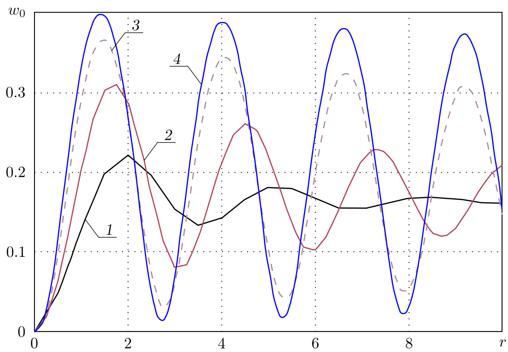


Рис. 1. Зависимость прогиба полюса раздуваемой постоянным давлением полусферы от времени при четырехточечной аппроксимации ускорения: *1* — $d\tau = 0.5$; *2* — $d\tau = 0.25$; *3* — $d\tau = 0.125$; *4* — $d\tau = 0.08$

[Figure 1. Time dependence of inflated by constant pressure hemisphere pole at four-point acceleration approximation: *1* — $d\tau = 0.5$; *2* — $d\tau = 0.25$; *3* — $d\tau = 0.125$; *4* — $d\tau = 0.08$

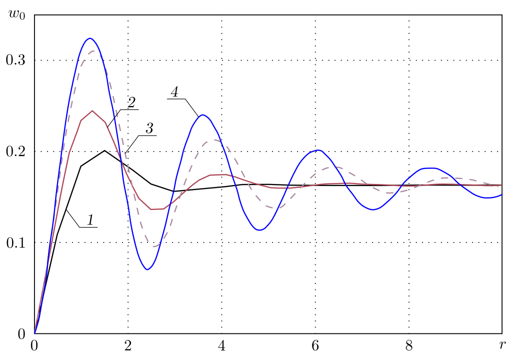


Рис. 2. Зависимость прогиба полюса раздуваемой постоянным давлением полусферы от времени при трехточечной аппроксимации ускорения: *1* — $d\tau = 0.5$; *2* — $d\tau = 0.25$; *3* — $d\tau = 0.125$; *4* — $d\tau = 0.08$

[Figure 2. Time dependence of inflated by constant pressure hemisphere pole at three-point acceleration approximation: *1* — $d\tau = 0.5$; *2* — $d\tau = 0.25$; *3* — $d\tau = 0.125$; *4* — $d\tau = 0.08$

Значения периода колебаний полусферы при различных шагах по времени
[The values of hemisphere vibrations period for different values of time step]

$d\tau$	Значения T для аппроксимации ускорения [Values of T for acceleration approximation]	
	для четырехточечной [for four-point]	для трехточечной [for three-point]
0.5	3	—
0.25	2.75	2.75
0.125	2.625	2.5
0.08	2.56	2.4

вносят вклад в значение амплитуды колебаний. Чем больше выбранная величина шага по времени, тем большая погрешность вносится в аппроксимацию ускорения в сторону уменьшения его величины и, следовательно, тем с большей погрешностью определяется амплитуда также в сторону уменьшения. Решение задачи проводится последовательно на каждом шаге по времени, и, таким образом, с каждым шагом происходит накопление погрешностей расчета, обусловленных аппроксимацией ускорения. Очевидно, что чем больше величина шага по времени, тем быстрее произойдет уменьшение амплитуд колебаний и, как следствие, аппроксимированного значения ускорения вплоть до нуля, что соответствует системе уравнений статического деформирования оболочки.

При этом, как показала практика вычислений, существует некоторое минимально допустимое для расчетов значение шага по времени, определяемое в результате численного эксперимента. Так, для рассматриваемой задачи наиболее близкие к теоретически определенным значения указанных величин получены в результате расчета по четырехточечной схеме аппроксимации ускорения при величине шага по времени $d\tau = 0.08$ и составляют $T = 2.56$, $w_0 = 0.4$ соответственно (амплитуда прогиба определяется на первом периоде колебаний, когда ее затухание, обусловленное особенностями вычислительного алгоритма, минимально). Отметим, что даже при этом значении шага не удается получить незатухающее решение. Однако провести расчеты при значении шага $d\tau < 0.08$ оказалось невозможным вследствие либо потери устойчивости счета, либо отсутствия сходимости итераций. По-видимому, отмеченные особенности являются следствием ухудшения обусловленности матрицы Якоби разрешающей системы уравнений при уменьшении шага по времени. Таким образом, ввиду вычислительной сложности рассматриваемой задачи возможность получения незатухающего решения ограничена ее обусловленностью, а использование предлагаемого алгоритма требует обоснованного выбора шага интегрирования по времени.

Необходимо также подчеркнуть, что результаты аналитического решения задачи о раздувании сферы могут служить лишь для качественной оценки точности численного решения, но их нельзя считать точным решением рассматриваемой в примере задачи, т.к. аналитическое решение получено в предположении отсутствия предварительного напряженного состояния оболочки, а реализация численного алгоритма требует регуляризации решения, т.е., в том числе, задания некоторой величины предварительного давления на первом шаге по времени [26].

Отметим, что предлагаемый алгоритм впервые позволяет определить как временное, так и пространственное распределение компонент напряженно-деформированного состояния оболочки. Для рассматриваемой задачи последнее является простейшим, т.е. зависимость компонент от меридиональной координаты отсутствует, но выбор такой задачи обусловлен лишь необходимостью тестирования алгоритма и сравнения с имеющимися в литературе результатами аналитического решения.

Подчеркнем, что в проведенных расчетах, по-видимому, впервые при численном решении задачи динамического раздувания мягкой оболочки получены значения прогиба оболочки порядка половины ее радиуса. При этом, в отличие от работ большинства исследователей динамики мягкооболочечных конструкций, рассмотренная в качестве примера задача является лишь одной из широкого класса задач, охватываемых предлагаемым алгоритмом, а функция упругого потенциала материала оболочки может быть произвольной.

Заключение. Предложенный в работе подход к решению нелинейных задач динамики мягкооболочечных конструкций отличается от способов решения, разработанных другими авторами, возможностью численного исследования действительно больших перемещений и деформаций с учетом как геометрической, так и физической нелинейности. При этом предлагаемый алгоритм ориентирован на анализ целого класса мягкооболочечных конструкций, динамическое поведение которых может быть описано системой нелинейных уравнений в частных производных с дополнительными нелинейными алгебраическими соотношениями. Наиболее существенным ограничением является лишь предположение о зависимости компонент вектора разрешающих переменных только от одной обобщенной координаты и неразветвленности конструкции. При этом практика расчетов показала, что чем меньше ограничений накладывается на исходные данные решаемой задачи (геометрия конструкции, свойства материала, условия нагружения и закрепления, диапазон исследуемых перемещений и деформаций), тем более тщательным должен быть подбор параметров вычислительного алгоритма решения такой задачи. Это связано с тем, что при получении численного решения в каждом конкретном случае условий работы конструкции могут возникать различные вычислительные сложности. Этим и обусловлены описанные в работе ограничения, связанные с выбором шага по времени, заданием предварительного напряженного состояния, необходимостью использования метода сегментации и т.п., причем характер ограничений можно установить только в процессе проведения расчетов. Однако достоинством такого подхода к решению задач динамики мягких оболочек, в отличие от численных алгоритмов, предложенных другими авторами, является возможность исследования поведения конструкции в диапазоне перемещений, величина которых сопоставима с геометрическими размерами конструкции, а по сравнению с работами, в которых решения подобных задач получены аналитически, здесь имеется возможность анализа распределения компонент напряженно-деформированного состояния конструкции не только во времени, но и по координате.

Конкурирующие интересы. Я заявляю об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Друзь Б. И., Друзь И. Б. *Теория мягких оболочек.* Владивосток: Морской гос. ун-т, 2003. 381 с.
2. Ридель В. В., Гулин Б. В. *Динамика мягких оболочек.* М.: Наука, 1990. 204 с.
3. Гимадиев Р. Ш. *Динамика мягких оболочек парашютного типа.* Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. 208 с.
4. Libai A., Simmonds J. G. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. 560 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511574511.
5. Лялин В. В., Морозов В. И., Пономарев А. Т. *Парашютные системы. Проблемы и методы их решения.* М.: Физматлит, 2009. 576 с.
6. Knowles J. K. On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity // *J. Appl. Mech.*, 1962. vol. 29, no. 2. pp. 283–286. https://doi.org/10.1115/1.3640542.
7. Akkas N. On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1978. vol. 13, no. 3. pp. 177–183. https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90006-9.
8. Calderer C. The dynamical behaviour of nonlinear elastic spherical shells // *J. Elasticity*, 1983. vol. 13. pp. 17–47. https://doi.org/10.1007/bf00041312.
9. Verron E., Khayat R. E., Derdouri A., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes // *J. Rheology*, 1999. vol. 43, no. 5. pp. 1083–1097. https://doi.org/10.1122/1.551017.

10. Yuan X. G., Zhang R. J., Zhang H. W. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models // *Comput. Mater. Continua*, 2008. vol. 7, no. 3. pp. 155–166.
11. Ren J. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load // *Appl. Math. Mech.*, 2008. vol. 29, no. 10. pp. 1319–1327. https://doi.org/10.1007/s10483-008-1007-x.
12. Ren J. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells // *Int. J. Eng. Sci.*, 2009. vol. 47, no. 7–8. pp. 745–753. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.02.001.
13. Yong H., He X., Zhou Y. Dynamics of a thick-walled dielectric elastomer spherical shell // *Int. J. Eng. Sci.*, 2011. vol. 49, no. 8. pp. 792–800. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.006.
14. Ju Y., Niu D. On a class of differential equations of motion of hyperelastic spherical membranes // *Appl. Math. Sci.*, 2012. vol. 6, no. 83. pp. 4133–4136.
15. Rodríguez–Martínez J. A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation // *Int. J. Eng. Sci.*, 2015. vol. 93. pp. 31–45. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004.
16. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads // *Acta Mechanica*, 2019. vol. 230, no. 8. pp. 3003–3018. https://doi.org/10.1007/s00707-019-02467-y.
17. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1978. vol. 13, no. 5–6. pp. 295–301. https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90035-5.
18. Wang A. S. D., Ertepinar A. Stability and vibrations of elastic thick-walled cylindrical and spherical shells subjected to pressure // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1972. vol. 7, no. 5. pp. 539–555. https://doi.org/10.1016/0020-7462(72)90043-1.
19. Akyüz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1999. vol. 34, no. 3. pp. 391–404. https://doi.org/10.1016/s0020-7462(98)00015-8.
20. Zhu Y., Luo X. Y., Wang H. M., Ogden R. W., Berry C. Three-dimensional non-linear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure // *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2013. vol. 48, no. 1. pp. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.06.013.
21. Soares R. M., Gonçalves P. B. Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane // *J. Sound Vibration*, 2014. vol. 333, no. 13. pp. 2920–2935. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.02.007.
22. Gorissen B., Melancon D., Vasios N., Torbati M., Bertoldi K. Inflatable soft jumper inspired by shell snapping // *Science Robotics*, 2020. vol. 5, no. 42, eabb1967. https://doi.org/10.1126/scirobotics.abb1967.
23. Rogers C., Saccomandi G., Vergori L. Helmholtz-type solitary wave solutions in nonlinear elastodynamics // *Ricerche Mat.*, 2019. vol. 69, no. 1. pp. 327–341. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00464-w.
24. Pucci E., Saccomandi G., Vergori L. Linearly polarized waves of finite amplitude in pre-strained elastic materials // *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 2019. vol. 475, no. 2226. https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0891.
25. Johnson D. E., Greif R. Dynamic response of a cylindrical shell. Two numerical methods // *AIAA Journal*, 1965. vol. 4, no. 3. pp. 486–494. https://doi.org/10.2514/3.3462.
26. Коровайцева Е. А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // *Труды МАИ*, 2020. Т. 114. 34 pp. https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04.
27. Шаповалов Л. А. Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации // *Изв. АН СССР. Мех. тв. тела*, 1976. № 3. С. 62–72.
28. Houbolt J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft // *J. Aeronaut. Sci.*, 1950. vol. 17, no. 9. pp. 540–550. https://doi.org/10.2514/8.1722.

29. Levy S., Kroll W. D. Errors introduced by finite space and time increments in dynamic response computation // *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1953. vol. 51, no. 1. pp. 57–68. `https://doi.org/10.6028/jres.051.006`.
30. Коровайцева Е. А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек // *Труды МАИ*, 2019. Т. 108. 17 pp. `https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1`.
31. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. xvi+568 pp. `https://doi.org/10.1017/9781316422892`.
32. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. *Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела*. М.: Наука, 1988. 232 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 556–570
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1855

MSC: 74B20, 74K25, 74H15

Parameter differentiation method in solution of axisymmetric soft shells stationary dynamics nonlinear problems

© ***E. A. Korovaytseva***

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

An algorithm of axisymmetric unbranched soft shells nonlinear dynamic behaviour problems solution is suggested. The algorithm does not impose any restrictions on deformations or displacements range, material properties, conditions of fixing or meridian form of the structure. Mathematical statement of the problem is given in vector-matrix form and includes system of partial differential equations, system of additional algebraic equations, structure segments coupling conditions, initial and boundary conditions. Partial differential equations of motion are reduced to nonlinear ordinary differential equations using method of lines. Obtained equation system is differentiated by calendar parameter. As a result problem solution is reduced to solving two interconnected problems: quasilinear multipoint boundary problem and nonlinear Cauchy problem with right-hand side of a special form. Features of represented algorithm using in application to the problems of soft shells dynamics are revealed at its program realization and are described in the study. Three- and four-point finite difference schemes are used for acceleration approximation. Algorithm testing is carried out for the example of hinged hemisphere of neo-hookean material dynamic inflation. Influence of time step and acceleration approximation scheme choice on solution results is investigated.

Keywords: soft shell, hyperelastic material, dynamic inflation, method of lines, parameter differentiation method, physical nonlinearity, geometrical nonlinearity.

Received: 23rd March, 2021 / Revised: 17th May, 2021 /
Accepted: 25th August, 2021 / First online: 30th September, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:
Korovaytseva E. A. Parameter differentiation method in solution of axisymmetric soft shells stationary dynamics nonlinear problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 556–570. https://doi.org/10.14498/vsgtu1855 (In Russian).

Author's Details:
Ekaterina A. Korovaytseva https://orcid.org/0000-0001-6663-8689
Cand. Tech. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Dynamic Tests; e-mail: katrell@mail.ru

Competing interests. I declare that I have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Druz' B. I., Druz' I. B. *Teoriia miagkikh obolochek* [Theory of Soft Shells]. Vladivostok, Maritime State Univ., 2003, 381 pp. (In Russian)
2. Ridel' V. V., Gulin B. V. *Dinamika miagkikh obolochek* [Dynamics of Soft Shells]. Moscow, Nauka, 1990, 204 pp. (In Russian)
3. Gimadiev R. Sh. *Dinamika miagkikh obolochek parashiutnogo tipa* [Dynamics of Soft Parachute-Type Shells]. Kazan, Kazan State Energ. Univ., 2006, 208 pp. (In Russian)
4. Libai A., Simmonds J. G. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1998, 560 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511574511.
5. Lyalin V. V., Morozov V. I., Ponomarev A. T. *Parashiutnye sistemy. Problemy i metody ikh resheniia* [Parachute Systems. Problems and Methods of Their Solution]. Moscow, Fizmatlit, 2009, 576 pp. (In Russian)
6. Knowles J. K. On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity, *J. Appl. Mech.*, 1962, vol. 29, no. 2, pp. 283–286. https://doi.org/10.1115/1.3640542.
7. Akkas N. On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1978, vol. 13, no. 3, pp. 177–183. https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90006-9.
8. Calderer C. The dynamical behaviour of nonlinear elastic spherical shells, *J. Elasticity*, 1983, vol. 13, pp. 17–47. https://doi.org/10.1007/bf00041312.
9. Verron E., Khayat R. E., Derdouri A., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes, *J. Rheology*, 1999, vol. 43, no. 5, pp. 1083–1097. https://doi.org/10.1122/1.551017.
10. Yuan X. G., Zhang R. J., Zhang H. W. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models, *Comput. Mater. Continua*, 2008, vol. 7, no. 3, pp. 155–166.
11. Ren J. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load, *Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 29, no. 10, pp. 1319–1327. https://doi.org/10.1007/s10483-008-1007-x.
12. Ren J. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells, *Int. J. Eng. Sci.*, 2009, vol. 47, no. 7–8, pp. 745–753. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.02.001.
13. Yong H., He X., Zhou Y. Dynamics of a thick-walled dielectric elastomer spherical shell, *Int. J. Eng. Sci.*, 2011, vol. 49, no. 8, pp. 792–800. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.006.
14. Ju Y., Niu D. On a class of differential equations of motion of hyperelastic spherical membranes, *Appl. Math. Sci.*, 2012, vol. 6, no. 83, pp. 4133–4136.
15. Rodríguez–Martínez J. A., Fernández–Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation, *Int. J. Eng. Sci.*, 2015, vol. 93, pp. 31–45. https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004.
16. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads, *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, no. 8, pp. 3003–3018. https://doi.org/10.1007/s00707-019-02467-y.
17. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1978, vol. 13, no. 5–6, pp. 295–301. https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90035-5.

18. Wang A. S. D., Ertepinar A. Stability and vibrations of elastic thick-walled cylindrical and spherical shells subjected to pressure, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1972, vol. 7, no. 5, pp. 539–555. https://doi.org/10.1016/0020-7462(72)90043-1.
19. Akyüz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 1999, vol. 34, no. 3, pp. 391–404. https://doi.org/10.1016/s0020-7462(98)00015-8.
20. Zhu Y., Luo X. Y., Wang H. M., Ogden R. W., Berry C. Three-dimensional non-linear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.06.013.
21. Soares R. M., Gonçalves P. B. Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane, *J. Sound Vibration*, 2014, vol. 333, no. 13, pp. 2920–2935. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.02.007.
22. Gorissen B., Melancon D., Vasios N., Torbati M., Bertoldi K. Inflatable soft jumper inspired by shell snapping, *Science Robotics*, 2020, vol. 5, no. 42, eabb1967. https://doi.org/10.1126/scirobotics.abb1967.
23. Rogers C., Saccomandi G., Vergori L. Helmholtz-type solitary wave solutions in nonlinear elastodynamics, *Ricerche Mat.*, 2019, vol. 69, no. 1, pp. 327–341. https://doi.org/10.1007/s11587-019-00464-w.
24. Pucci E., Saccomandi G., Vergori L. Linearly polarized waves of finite amplitude in pre-strained elastic materials, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 2019, vol. 475, no. 2226. https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0891.
25. Johnson D. E., Greif R. Dynamic response of a cylindrical shell. Two numerical methods, *AIAA Journal*, 1965, vol. 4, no. 3, pp. 486–494. https://doi.org/10.2514/3.3462.
26. Korovaytseva E. A. On some features of soft shells of revolution static problems solution at large deformations, *Trudy MAI*, 2020, vol. 114, 34 pp. (In Russian). https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-04
27. Shapovalov L. A. Elasticity equations for a thin shell at nonaxisymmetric deformation, *Izv. Akad. Nauk SSSR. MTT*, 1976, vol. 3, pp. 62–72 (In Russian).
28. Houbolt J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. Aeronaut. Sci.*, 1950, vol. 17, no. 9, pp. 540–550. https://doi.org/10.2514/8.1722.
29. Levy S., Kroll W. D. Errors introduced by finite space and time increments in dynamic response computation, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1953, vol. 51, no. 1, pp. 57–68. https://doi.org/10.6028/jres.051.006.
30. Korovaytseva E. A. Combined equations of theory of soft shells, *Trudy MAI*, 2019, vol. 108, 17 pp. (In Russian). https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1
31. Amabili M. *Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2018, xvi+568 pp. https://doi.org/10.1017/9781316422892.
32. Grigolyuk E. I., Shalashilin V. I. *Problems of Nonlinear Deformation. The Continuation Method Applied to Nonlinear Problems in Solid Mechanics*. Berlin, Springer, 1991, viii+262 pp. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3776-8.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 571–587
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1857

УДК 519.115

Глобализация анализа моделей размещения частиц по ячейкам

© *Н. Ю. Энатская*

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова,
Россия, 123458, Москва, ул. Таллинская, 34.

Аннотация

Рассматривается общий подход к доасимптотическому анализу схем с разными качествами во всех сочетаниях по их различимости составляющих их элементов (ячеек и частиц). Для этого в каждой группе таких схем с общими ограничениями вместо непосредственного их изучения на основе учета специфики каждой схемы предлагается некоторый общий набор алгоритмических процедур пересчета результатов их доасимптотического анализа в схеме начиная со схемы с наибольшей дифференциацией их исходов последовательно для остальных схем группы с различиями в качестве одного элемента. Анализ каждой схемы проводится по традиционным и по ряду следующих новых направлений: построение случайного процесса формирования и нумерованного бесповторного перечисления исходов схемы в порядке их получения; нахождение числа исходов схемы; решение задачи нумерации для исходов схемы, состоящей в установлении взаимно однозначного соответствия между их видами и номерами; задание их вероятностного распределения и моделирования исходов схемы с этим вероятностным распределением.

В частности, отдельно изучаются случаи групп схем без ограничений размещения частиц и с ограничением (не более одной частицы в ячейке), приводящие к некоторым известным аналитическим результатам. При любых ограничениях в рассматриваемой группе схем их анализ проводится путем реализации алгоритмических процедур последовательного преобразования результатов анализа одной схемы группы для другой. Объединения в такие пары схем производятся по признаку различия качества одного их элемента.

Ключевые слова: размещение частиц по ячейкам, доасимптотический анализ.

Получение: 25 марта 2021 г. / Исправление: 18 августа 2021 г. /
Принятие: 31 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Энатская Н. Ю. Глобализация анализа моделей размещения частиц по ячейкам // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 571–587. https://doi.org/10.14498/vsgtu1857.

Сведения об авторе

Наталия Юрьевна Энатская https://orcid.org/0000-0003-1241-7543
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; деп. прикладной математики; e-mail: nat1943@mail.ru

Введение

Интерпретация многих комбинаторных задач в терминах размещений частиц по ячейками приводит их к простой наглядной постановке и находит многочисленные применения во многих научных областях, таких как теория вероятностей, математическая статистика, статистическая физика, теория автоматов и т.д., а для случаев схем размещений (без ограничений и с ограничением — не более одной частицы в ячейке) их числа исходов с разными качествами по различимости ячеек и частиц[1] представляет основные комбинаторные схемы в книгах известных авторов [1–7].

В литературе по комбинаторике широко представлены асимптотические исследования комбинаторных схем и методы их проведения. Большое место в них отводится востребованным на практике схемам размещения частиц по ячейкам. Для нас и целей нашего исследования наибольший интерес представляет начальная схема размещений с наибольшей различимостью исходов при различии составляющих ее ячеек и частиц — схемы размещений с повторением без ограничений. В монографии [8] был проведен точный и асимптотический анализ статистик размещения; в частности, получены моменты и изучено асимптотическое поведение для числа пустых ячеек и моментов при разном асимптотическом поведении ее параметров.

Большинство доасимптотических исследований сводятся к элементарным результатам числа исходов основных комбинаторных схем. Исследования комбинаторных схем алгоритмического характера не привлекают особого внимания математиков из-за ограниченности области применения и громоздкости представлений и сводятся к решению отдельных комбинаторных задач. Но в связи с ростом производительности электронных вычислительных средств, усложнением комбинаторных схем и востребованностью информации о конкретных видах исходов актуальность таких исследований растет и требует выработки общих методов их проведения. Поэтому представляет интерес, например, монография [9], в которой проведено систематическое изложение задач перечислительной комбинаторики нахождения чисел исходов комбинаторных схем и конфигураций некоторых конечных совокупностей на общей основе использования производящих функций.

В настоящей работе вводится класс комбинаторных схем, для которых проводится доасимптотический анализ в возможных сочетаниях различимости ячеек и частиц новым авторским перечислительным методом, удовлетворяющим современным практическим требованиям построения итерационного случайного процесса бесповторного нумерованного перечисления всех исходов схемы (путем последовательного поединичного добавления на каждой итерации следующего элемента схемы или ранее изученного этапа перечисления предсостояний исходов схемы), т.е., по сути, формируются исходы схемы с управляемым вероятностным распределением. Графическое представление процесса перечисления исходов схемы, называемое методом графов, приводит к получению полной информации о них и дает наглядный способ вычисления вероятностей ее итоговых исходов по итерационным переходам в процессе (см. [10]).

Часть результатов непосредственного анализа каждой схемы с учетом ее специфики со ссылками на конкретные работы приведены в [11].

[1]Здесь и далее различимость частиц или ячеек означает различие в их номерах.

В перечислительном методе предложен прием универсального моделирования исхода комбинаторной схемы, состоящий в разыгрывании одним случайным числом его номера по принятому вероятностному распределению исходов схемы с дальнейшим получением его смоделированного вида по результату решения задачи нумерации в соответствии с его разыгранным номером (прямой задачи нумерации — нахождения вида исхода схемы по ее номеру — при бесповторном нумерованном перечислении исходов схемы).

Рассматриваемый здесь общий подход, называемый глобализацией, применяется к исследованию схем размещения частиц по ячейкам в доасимптотической области изменения параметров через установление связей при разных качествах составляющих их элементов (ячеек и частиц). Он состоит в решении задач перечислительной комбинаторики, пересчете их результатов из схем с большей дифференциацией в исходах, проведении маркировок, упорядочении и отбраковке повторов. Смысл преобразований совокупностей — в последовательном уменьшении дифференциации исходов схемы до различий в исследуемой схеме, где *упорядочение* (с указанием правила) частиц в ячейках или информации о заполнении ячеек производится при их неразличимостях; *маркировка* — преобразование в виде частот определенных введенных признаков их совпадений, например, составов ячеек по их уровням заполнения или исходов схемы, производится при неразличимости частиц или исходов; *отбраковка* повторов исходов схемы проводится для их бесповторного перечисления.

В анализе схемы для определения числа ее исходов будет использоваться операция суммы по перечислению исходов предшествующих процедур их итогового формировании по методу графов при его зависимости от их видов (с явным перечислением видов этих последовательных исходов) функций этой зависимости.

Для этого вводится индикаторная функция $I(Z) = \{0$ при $Z = 0$; 1 при $Z > 0\}$. Число исходов схемы определяется числом исходов итогового алгоритмического преобразования (отбраковки), приводящего к перечислению различимых исходов схемы. Это значит, что оно выражается суммой индикаторных функций от маркировок исходов предпоследнего преобразования по совпадению исходов для исследуемой схемы, что записывается через операцию сложения по перечислению всех ее различимых исходов слагаемых вида $I(Z)$ с аргументом $Z > 0$.

Такой подход по сравнению с отдельным анализом каждой схемы имеет преимущество в естественности и общности исследований, но приводит к результатам алгоритмического характера.

Будут представлены как основные схемы размещения частиц по ячейкам (без ограничений), соответствующие всем вариантам варьирования сочетаний качеств элементов ячеек и частиц по их различимости, так и схемы с любыми, совпадающими в них ограничениями, которые будем изучать по направлениям, указанным в аннотации, со следующими описаниями схем:

- схема A размещения различимых частиц по различимым ячейкам;
- схема B размещения неразличимых частиц по различимым ячейкам;
- схема C размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам;
- схема D размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам, так и их аналоги с ограничениями.

Отдельно будут анализироваться частные случаи основных схем при отсутствии ограничений в них и при размещении в каждую ячейку не более одной частицы, где наряду с указанными алгоритмическими процедурами получения исходной информации о бесповторном перечислении их исходов для части схем аналитически определяются числа их исходов.

Схемы будут рассматриваться в порядке их алфавитного обозначения, что обусловлено логикой последовательных пересчетов результатов анализа схем, связанной с поединичным уменьшением признаков различий в их исходах, кроме порядка изучения схем B и C.

1. Виды исходов схем, их перечисления и известные числа исходов

1.1. Схемы без ограничений.[2] Виды и числа исходов схем A и B изучены, перечисления построены в [11, 12], а для схем C и D будут проанализированы позже, как частные случаи схемы A.

Вид исхода схемы A (известной как схема размещения с повторением) представляется составами номеров частиц в ячейках в порядке ячеек $\bar{m} = (\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n)$, где $\bar{m}_i$ — состав номеров частиц в i-той ячейке, $i = \overline{1, n}$. Число ее исходов $N_A = n^r$ известно. Перечислительный анализ схемы A проведен в [12] (без ограничений и с ограничением — без пустых ячеек) по следующим направлениям: прямое перечисление ее исходов; решение задачи нумерации; введение вероятностного распределения ее исходов и построение процедуры моделирования.

Вид исхода схемы B (известной как схема сочетания с повторением) представляется последовательностью уровней заполнения ячеек в порядке ячеек $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$. Число ее исходов $N_B = C^r_{n+r-1}$ известно. Перечислительный анализ схемы B следует из анализа схемы сочетаний с его результатами в [11] (в силу взаимно однозначного соответствия их исходов с исходами схемы сочетаний с повторением) по следующим направлениям: прямое перечисление ее исходов; решение задачи нумерации; введение вероятностного распределения ее исходов и построение процедуры моделирования.

Перечисление исходов схемы B получается из перечисления исходов схемы A проведением маркировки ее исходов по совпадению уровней заполнения ячеек в порядке ячеек с последующей отбраковкой повторов с результатом бесповторного перечисления наборов уровней заполнения ячеек в порядке ячеек $\{\bar{r}^*\} = (r^*_1, \ldots, r^*_n)$.

1.2. Схемы с ограничением (ячейка вмещает одну частицу при $r \leqslant n$). Вид исхода схемы A (известной как схема размещения) представляется номерами частиц в ячейках в порядке ячеек $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_r)$. Число ее исходов $N_A = A^r_n$ известно. Результаты перечислительного анализа схемы A приведены в [11] по следующим направлениям: прямое перечисление ее исходов; решение задачи нумерации; введение вероятностного распределения ее исходов и моделирование по результату решения прямой задачи нумерации в схеме размещений.

Вид исхода схемы B (известной как схема сочетаний) представляется номерами непустых ячеек в порядке роста их номеров. Число ее исходов

[2] Здесь и далее n — число ячеек, r — число частиц.

$N_B = C_n^r$ известно. Результаты перечислительного анализа схемы B приведены в [11] по следующим направлениям: прямое перечисление ее исходов; решение задачи нумерации; введение вероятностного распределения ее исходов и моделирование по результату решения прямой задачи нумерации в схеме сочетаний.

Исход схемы C один ($N_C = 1$) и имеет вид набора номеров попавших в ячейки частиц $(0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, r)$ в заранее заданном порядке, например, в порядке роста номеров частиц, где нули означают пустые ячейки.

Исход схемы D один ($N_D = 1$) и имеет вид маркировки по совпадению уровней заполнения ячеек $(n-r, r)$ исхода схемы C, где $(n-r)$ — число пустых ячеек, а r — число ячеек, содержащих по одной частице.

Таким образом, вопрос о перечислениях, видах и числах исходов схем размещения частиц по ячейкам с ограничением данного вида при всех качествах ячеек и частиц полностью изучен.

2. Вычисление чисел исходов схем размещения частиц по ячейкам

По способу вычисления чисел исходов схем будем различать схемы без ограничений и с ограничениями.

2.1. Структура формирования исходов схемы *A* и числа исходов схем *B*, *C*, *D* без ограничений. В процедуре перечисления исходов схемы A, приведенной в [11], структура исходов формируется поитерационно с учетом различимости ячеек и частиц. При этом разделение этого учета для составляющих его элементов (ячеек и частиц) для пересчета из нее перечисления исходов схем B, C, D не представляется возможным. Поэтому построим другую разделяемую структуру перечисления исходов схемы A в виде последовательных действий по отдельному учету признаков их различимости.

Число $N_A = n^r$ схемы A учитывает все разные составы различимых частиц в ячейках и все разные порядки этих составов частиц по ячейкам в схеме размещений с повторениями.

Под структурой исходов схемы A понимаются последовательные процедуры по характеру учета условий их перечисления, что в дальнейшем даст возможность пересчета чисел исходов остальных схем из перечисления исходов схемы A выбором соответствующих им условий.

Теорема 1. *Пусть $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ — маркировка по совпадению ячеек размещенных частиц, т.е. уровни заполнения ячеек в исходах схемы A, а $\bar{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ — маркировка $\bar{r}$ по совпадению уровней заполнения ячеек. Здесь μ_j — положительная частота ячеек с уровнем заполнения ячеек j, $j = \overline{1,p}$; $r_1, \ldots, r_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_p$ — целые числа, для которых $r_1 + \cdots + r_n = r$, $\sum_{j=1}^{p} \mu_j = n$, $\sum_{j=1}^{p} j\mu_j = r$. Тогда справедливо представление с операцией (суммирования) по перечислению $(*)$ разных наборов уровней заполнения ячеек $\{\bar{r}^*\} = \{(r_1^*, \ldots, r_n^*)\}$, упорядоченных по возрастанию:*

$$N_A = n^r = \sum_{(*)} \frac{r!}{r_1^*! \cdots r_n^*!} \cdot \frac{n!}{\mu_1! \cdots \mu_p!}. \tag{1}$$

Доказательство. Число исходов схемы A (схемы размещений с повторением) $N_A = n^r$ можно интерпретировать как число размещений r различимых частиц по n различимым ячейкам по перечислению всех разных наборов уровней заполнения ячеек $\{\bar{r}^*\}$ всех вариантов размещения частиц по каждому набору их уровней заполнения в каждом их порядке (с совпадающими количествами в каждом порядке) и во всех различимых порядках.

Первый перебор всех наборов $\{\bar{r}^*\}$ в формуле (1) соответствует сумме по $(*)$, а следующие два по каждому набору из $(*)$ — схемам перестановок с повторением в количествах первого и второго сомножителей в (1): размещения частиц по ячейкам в одном порядке уровней их заполнения, учитывающем различимость частиц, и перебора всех различимых порядков уровней заполнения ячеек делением ячеек на группы размерами чисел совпадающих уровней заполнения, учитывающим различимость ячеек, что и приводит к формуле (1). □

Явное перечисление элементов множества $(*)$ представляет собой все исходы схемы D без ограничений с числом N_D и, когда их визуальное перечисление затруднительно, определяется по шагам следующего алгоритма.

Алгоритм.

1) Перечисляем все исходы схемы B без ограничений как исходы схемы сочетаний с повторением выбором $(n-1)$ мест $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ среди $(n+r-1)$ для r частиц и $(n-1)$ внутренних перестановок между ячейками числом способов $N_B = C_{n+r=1}^{n-1}$, что с пересчетом из них уровней заполнения ячеек при $i = \overline{2, n-1}$ дает $r_i = t_i - t_{i-1} - 1$; $r_1 = t_1 - 1$; $t_n = n + r - 1 - t_{n-1}$;
2) упорядочиваем исходы шага 1) в терминах уровней заполнения ячеек в порядке их возрастания;
3) отбраковываем в исходах шага 2) повторы — получаем все исходы схемы D без ограничений (число N_D определяется визуально).

Пример 1. Пусть $n = 2$, $r = 3$. Тогда $N_C = C_4^1 = 4$ исхода номеров мест перегородки вида: $(1), (2), (3), (4)$, что соответствует 4-м исходам схемы B в терминах уровней заполнения ячеек: $(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)$. После упорядочения и отбраковки повторов получаем два исхода схемы D: $(0,3), (1,2)$.

Вычисление N_A с небольшими значениями параметров n и r схемы A можно производить в следующем порядке:

1) визуально выпишем все $N_A = n^r$ исходов схемы;
2) по всем исходам 1) проведем их маркировку по уровням заполнения ячеек в порядке роста минимальных уровней заполнения в них и с отбраковкой повторов — получаем наборы $\{\bar{r}^*\}$;
3) по всем исходам 2) проведем их маркировку по совпадению наборов уровней заполнения ячеек в порядке роста этих уровней;
4) произведем вычисление числа исходов схемы A по формуле (1), сравнивая со значением $N_A = n^r$.

Приведем примеры вычисления по вышеприведенным шагам числа N_A при небольших значениях параметров схемы, сверяя их с результатами $N_A = n^r$ и визуальным перечислением исходов схемы A.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $r = 2$.

1) Визуально перечислим все $n^r = 2^2 = 4$ исхода схемы A: $(0, (1,2)), ((1,2), 0), (1,2), (2,1)$;
2) $\{\bar{r}\} = (0,2), (2,0), (1,1), (1,1)$, откуда после упорядочения и отбраковки

получаем $\{\bar{r}^*\} = \{(r_1^*, \dots, r_n^*)\} = ((0,2),(1,1))$;
3) из результатов 2) находим $\{\bar{\mu}\} = ((1,1),(2))$;
4) по (1) определяем

$$N_A = \frac{2!}{0!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!} + \frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{2!}{2!} = 4,$$

что совпало с полученными выше результатами.

Пример 3. Пусть $n = 3$, $r = 2$.
1) Визуально перечислим все $n^r = 3^2 = 9$ исходов схемы A: $(0,0,(1,2))$, $(0,(1,2),0)$, $((1,2),0,0)$, $(0,1,2)$, $(1,0,2)$, $(1,2,0)$, $(0,2,1)$, $(2,0,1)$, $(2,1,0)$;
2) из $\{\bar{r}\}$ после упорядочения и отбраковки получаем $\{\bar{r}^*\} = ((0,0,2),(0,1,1))$;
3) из результатов 2) находим $\{\bar{\mu}\} = \{(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_p})\} = (2,1),(1,2)$;
4) по (1) вычисляем

$$N_A = \frac{2!}{0!\cdot 0!\cdot 2!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{2!}{0!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!} = 9,$$

что совпало с полученными выше результатами.

Теорема 2. *В условиях и обозначениях теоремы 1 для схем B, C, D численности их исходов N_B, N_C, N_D определяются по формулам*

$$N_B = \sum_{(*)} \frac{n!}{\mu_{i_1}!\cdots\mu_{i_p}!}, \tag{2}$$

$$N_C = \sum_{(*)} \frac{r!}{r_1^*!\cdots r_n^*!}, \tag{3}$$

$$N_D = \sum_{(*)} 1. \tag{4}$$

Доказательство. Формулы (2)–(4) для чисел исходов схем B, C, D следуют из интерпретаций сомножителей формулы (1) в доказательстве теоремы 1:

– для получения N_B при неразличимости частиц в (1) первый сомножитель заменяется на 1, что приводит к (2);
– для получения N_C при неразличимости ячеек в (1) второй сомножитель заменяется на 1, что приводит к (3);
– для получения N_D при неразличимости частиц в (1) оба сомножителя заменяется на 1, что приводит к (4). □

2.2. Перечисление исходов схем *B*, *C*, *D* из исходов схемы *A*. Указанные перечисления можем теперь производить двумя способами:
1) получением исходов схемы из исходов схемы A по соответствующим алгоритмическим процедурам;
2) непосредственным получением их итогового итерационного (через стрелочку между итерациями) перечисления методом графов [10].

Проверим полученное число исходов по формулам теоремы 2.

Пример 4. Пусть $n = 2$, $r = 2$. Выпишем исходы схемы A по примеру 1: $(0,(1,2))$, $((1,2),0)$, $(1,2)$, $(2,1)$; $N_A = 4$.

Схема B:
1) $(0,2),(1,1),(2,0)$;
2) $(0,0)\to(0,1)\to(0,2),(1,1),(2,0)$;

$$N_B=\frac{2!}{1!\cdot 1!}+\frac{2!}{2!}=3,$$

что совпадает с полученным результатом их перечисления и по формуле числа исходов для сочетания с повторением $C^r_{n+r-1}=C^2_3=3$.

Схема C:
1) $(0,(1,2)),(1,2)$;
2) $(0,0)\to(0,1)\to(0,(1,2)),(1,2)$;

$$N_C=\frac{2!}{0!\cdot 2!}+\frac{2!}{2!}=2,$$

что совпадает с полученным результатом их перечисления.

Схема D:
1) $(0,2),(1,1)$;
2) $(0,0)\to(0,1)\to(0,(1,2)),(1,2)$;

$$N_D=1+1=2,$$

что совпало с полученным в 2) результатом.

2.3. Перечисления и числа исходов схем $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ с любыми ограничениями. Далее будем использовать следующие обозначения: $\bar{m}=(\bar{m}_1,\dots,\bar{m}_n)$ — составы частиц в ячейках в порядке ячеек от 1 до n (вид исхода схемы A); $\{\bar{m}\}$ — все исходы схемы A; $\bar{m}^*=(\bar{m}^*_1,\dots,\bar{m}^*_n)$ — составы частиц в ячейках в порядке роста минимальных номеров частиц в них от 1 до n (вид исхода схемы C); $\{\bar{M}\}$ — результат отбраковки в $\{\bar{m}^*\}$ повторов исходов (все разные исходы схемы C); $\bar{r}=(r_1,\dots,r_n)$ — уровни заполнения ячеек в порядке ячеек от 1 до n (результат маркировки $\bar{m}$ по совпадению ячеек размещения в них частиц; вид исхода схемы B); $\{\bar{r}^*\}=\{(r^*_1,\dots,r^*_n)\}$ — результат отбраковки в $\{\bar{r}\}$ повторов исходов (все разные исходы схемы B); $\bar{\mu}$ — частоты уровней заполнения ячеек от 0 до r (результат маркировки $\bar{r}$ по совпадению их размеров повторов исходов — составов частиц в ячейках по совпадению их размеров; вид исхода схемы D); $\{\bar{\mu}^*\}$ — результат отбраковки в $\{\bar{\mu}\}$ повторов исходов — в количестве разных исходов схемы D.

В условиях ограничения число N_A и перечисление исходов схемы A будем считать известными.

2.3.1. Перечисление исходов схем $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$. Ограничения в схемах приводят к удалению в соответствующих схемах без ограничений не удовлетворяющих им исходов. Тогда при совпадающих во всех схемах ограничениях будем находить перечисления исходов остальных схем пересчетом из схемы A в соответствии с данными для них во введении алгоритмическими процедурами, определяя для каждой близкую схему, исходы которой за наименьшее число алгоритмических процедур могут преобразовываться в исходы изучаемой. В нашей группе схем — это схема A для схем B и C и схемы B или C для схемы D.

При различии в качестве частиц проводится маркировка составов заполнения ячеек в виде их уровней заполнения по совпадению ячеек размещения частиц с последующей отбраковкой повторов, а при различии в качестве ячеек — упорядочение информации о частицах в ячейках в заранее определенном их порядке с последующей отбраковкой повторов.

Получение исходов схемы B из исходов схемы A:

1) маркируем исходы $\{\bar{m}\}$ по совпадению ячеек размещения частиц и получаем наборы уровней заполнения частиц $\{\bar{r}\}$ в порядках ячеек;
2) проводим отбраковку повторов в $\{\bar{r}\}$ и получаем $\{\bar{r}^*\}$ — бесповторное перечисление исходов схемы B.

Получение исходов схемы C из исходов схемы A:

1) упорядочиваем $\{\bar{m}\}$ по росту минимальных элементов в ячейках и получаем составы $\{\bar{m}^*\}$ частиц в ячейках;
2) проводим отбраковку повторов в результате 1) и получаем $\{\bar{M}\}$ — бесповторное перечисление исходов схемы C.

Получение исходов схемы D из исходов схемы B:

1) маркируем исходы $\{\bar{r}^*\}$ схемы B по совпадению уровней заполнения ячеек в порядке роста уровней от 0 до r и получаем $\{\bar{\mu}\}$;
2) проводим отбраковку повторов исходов вида $\{\bar{\mu}\}$ и получаем $\{\bar{\mu}^*\}$ — бесповторное перечисление исходов схемы D.

2.3.2 Числа исходов схем B, C, D.

Теорема 3. *В данных обозначениях для схем B, C, D числа их исходов N_B, N_C, N_D определяются формулами*

$$N_B = \sum_{(\{T\})} I(T), \tag{5}$$

где T — результат маркировки исходов $\{\bar{r}\}$ по их совпадению;

$$N_C = \sum_{(\{M^*\})} I(M^*), \tag{6}$$

где M^* — результат маркировки исходов $\{\bar{M}\}$ по их совпадению;

$$N_D = \sum_{(\{V\})} I(V), \tag{7}$$

где $\bar{V}$ — результат маркировки исходов $\{\bar{\mu}^*\}$ по их совпадению.

Доказательство. Формулы (5)–(7) для чисел исходов схем B, C, D следуют из завершающего шага отбраковки повторов в алгоритмических процедурах получения их перечисления из исходов близких схем с повторами. Тогда формульная запись числа разных исходов в их совокупности с повторами представляется суммой индикаторных функций от результатов маркировки по их совпадениям вместо отбраковки повторов при их перечислении. А так как маркировки на совпадения проводятся по бесповторным исходам, числа исходов схем совпадают с размерностями маркировок. □

3. Задача нумерации для исходов схем

Решение задачи нумерации в схеме A (без ограничений) — схеме размещений с повторением — приведена в [12] в прямой и обратной постановках. Пересчет этих результатов решения задачи нумерации схемы A для других схем размещения частиц по ячейкам будем производить в связи с двумя типами отличий в них от начальной схемы: введением ограничений или изменением качества ее элементов, приводящих к схемам B, C, D. Первое отличие приводит к рассмотрению части исходов начальной схемы, а второе — к группированию ее исходов по причине уменьшения их дифференциации.

Оказывается, что в обоих случаях задачи пересчета результатов решения задачи нумерации в начальной схеме S к исследуемой S^* можно рассматривать, считая ее исходы частью исходов схемы S, т.к. при пересчете результатов задачи нумерации в близкой схеме в качестве исходов схемы S^* можно брать первые исходы групп в их порядке в соответствующей начальной схеме S.

Для построения алгоритмов решения задачи нумерации введем общие обозначения для указанных случаев в схемах S и S^*: N_S^*, $N_{S^*}^*$ — номера их исходов и R_S^*, $R_{S^*}^*$ — их виды в этих схемах, которые обладают свойствами взаимной однозначности и парности.

Тогда пересчет результатов решения задачи нумерации схемы S для схемы S^* реализуется двумя следующими алгоритмами в прямой задаче нумерации (по данному $N_{S^*}^*$ найти $R_{S^*}^*$) и обратной задаче нумерации (по данному $R_{S^*}^*$ найти $N_{S^*}^*$).

Алгоритм решения прямой задачи нумерации.

1) Приводим исходы схемы S к виду исходов схемы S^* (с повторами за счет уменьшения различий в них) и получаем исходы в том же количестве в порядке исходов схемы S;
2) в порядке исходов схемы S в виде результата шага 1) считаем число N^* сравнений каждого со всеми предыдущими в результате шага 1) до получения $N_{S^*}^*$-ного нового включительно;
3) по номеру N^* из шага 2) по результату решения прямой задачи нумерации в схеме S находим его вид R^*, совпадающий с искомым $R_{S^*}^*$ в схеме S^*.

Алгоритм решения обратной задачи нумерации.

1) Приводим исходы схемы S к виду исходов схемы S^* (с повторами за счет уменьшения различий в них) и получаем исходы в том же количестве в порядке исходов схемы S (исходы $\{L\}$);
2) в порядке исходов схемы S в виде результата шага 1) $\{L\}$ считаем число N^* сравнений их видов с данным видом $R_{S^*}^*$ до первого с ним совпадения включительно;
3) маркируем часть исходов $\{L\}$ от первого до N^*-ного по их совпадениям и получаем исходы $\{L^*\}$;
4) находим искомый номер $N_{S^*}^* = \sum_{(L^*)} I(L^*)$, где $I(L^*)$ — индикаторная функция, определенная во введении, а суммирование проводится по множеству исходов $\{L^*\}$.

4. Вероятностные распределения на множествах исходов схем A, B, C, D

Итерационный случайный процесс перечисления исходов комбинаторной схемы определяет все результаты ее анализа, в том числе и вероятностное распределение на множестве ее исходов. В рассматриваемых схемах размещения частиц по ячейкам он для каждой схемы состоит в последовательном поединичном добавлении ее элементов и задается структурой своего графа поитерационного перечисления ее исходов и вероятностями итерационных переходов из каждого его промежуточного состояния, определенным заданием которых управляется, т.е. приводит к разным вероятностным распределениям итоговых исходов каждой схемы. Здесь будем рассматривать случай «согласованности» вероятностных распределений всех схем группы, понимая под этим задание распределения вероятностей их итоговых исходов через вероятности итерационных переходов в процессе перечисления исходов начальной схемы как вероятностей их траекторий в графе. Установление вероятностных распределений исходов рассматриваемых схем группы состоит в их получении из распределения исходов начальной (базовой) схемы путем установления специфического соответствия между ее исходами и исходами каждой схемы по ее конкретным условиям.

В идее глобализации исследований таких комбинаторных схем, состоящей в возможности пересчета результатов анализа из схемы с большей дифференциацией исходов, являющейся базовой, будем рассматривать единую логику введения вероятностных параметров процессов схем данного класса. Она будет заключаться, например, в том, что каждая добавляемая в итерации частица равновероятно размещается по возможным в условиях схемы ячейкам. Множество исходов каждой схемы определяется по п. 2.3.1 из исходов близкой в группе схемы. А любые ограничения, общие для схем группы, учитываются удалением из графа базовой схемы лишних траекторий с пропорциональным пересчетом вероятностей итерационных переходов в ней в каждом пучке каждой его итерации с сохранением их суммарной единичной вероятности. Тогда на каждой итерации переходные вероятности формирования исходов процессами их перечисления в остальных схемах при отбраковках повторов будут иметь для каждого исхода суммарные вероятности их траекторий в графе перечисления до отбраковки.

Для примера рассмотрим процедуру пересчета исходов схем без ограничений B, C, D и их вероятностей из схемы A при $n = 3$, $r = 2$ с равновероятными итерационными переходами, что в ней означает равновероятное размещение каждой добавленной частицы по всем ячейкам схемы парами: из A в B (рис. 1); из A в C (рис. 2); из A в D (рис. 3). (Для схемы D базовыми можно еще считать схемы B и C.)

Сравним полученные исходы и их вероятности с непосредственным их нахождением по условиям схем B, C, D перечислительным методом при равновероятном размещении каждой добавленной частицы в них по всем ячейкам (см. рис. 4–6).

Совпадение с ранее полученными последовательными пересчетами из начальных схем, начиная с A, результатов итоговых исходов схем B, C, D и их вероятностных распределений на рисунках с их непосредственным исследованием перечислительным методом иллюстрирует логику расчета вероятностей

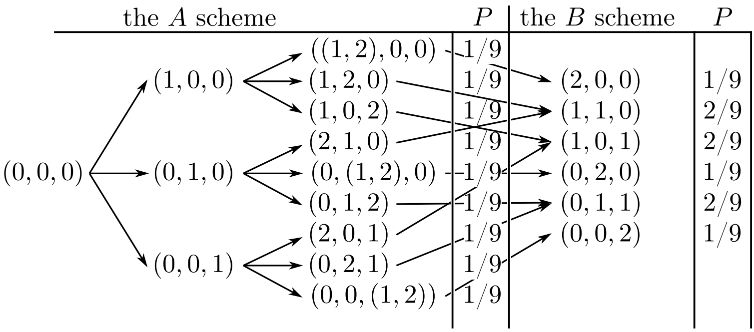


Рис. 1. Пересчет исходов схемы B и их вероятностей из схемы A

[Figure 1. Recalculation of outcomes of the B scheme and their probabilities from the A scheme]

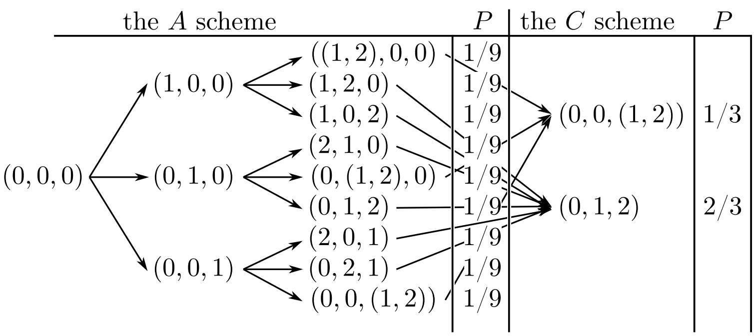


Рис. 2. Пересчет исходов схемы C и их вероятностей из схемы A

[Figure 2. Recalculation of outcomes of the C scheme and their probabilities from the A scheme]

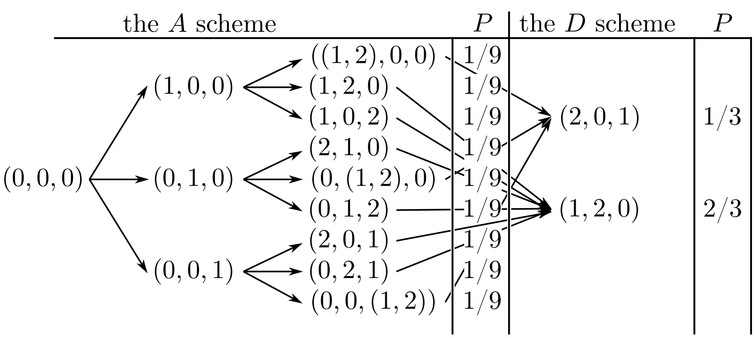


Рис. 3. Пересчет исходов схемы D и их вероятностей из схемы A

[Figure 3. Recalculation of outcomes of the D scheme and their probabilities from the A scheme]

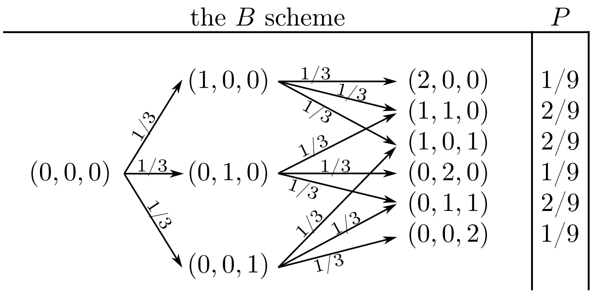


Рис. 4. Определение распределения и исходов схемы B перечислительным методом

[Figure 4. Determination of the distribution and outcomes of the B scheme by the enumeration method]

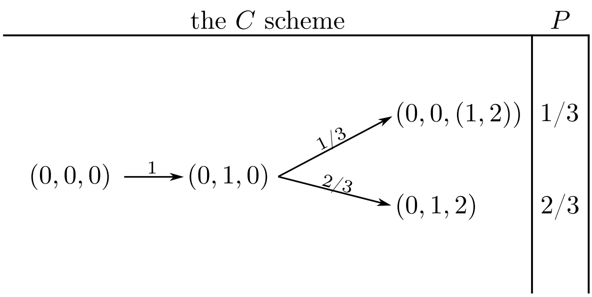


Рис. 5. Определение распределения и исходов схемы C перечислительным методом

[Figure 5. Determination of the distribution and outcomes of the C scheme by the enumeration method]

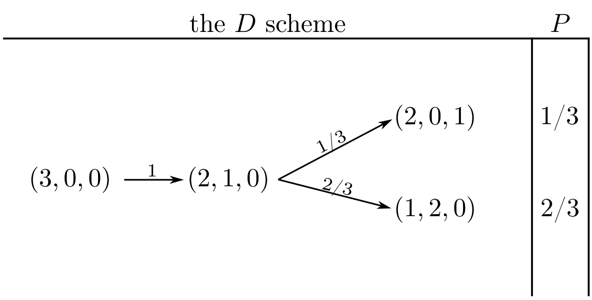


Рис. 6. Определение распределения и исходов схемы D перечислительным методом

[Figure 6. Determination of the distribution and outcomes of the D scheme by the enumeration method] итерационных переходов и итоговых вероятностных распределений исходов во всех схемах A, B, C, D двумя способами.

5. Моделирование исходов схем B, C, D

По смоделированному исходу схемы A (без или с ограничениями) для моделирования исхода каждой из схем B, C, D при «согласованности» их вероятностных распределений достаточно применить к нему соответствующую процедуру приведения его к виду исхода изучаемой схемы по п. 1.

Кроме этого, моделирование каждого исхода изучаемой схемы (B, C, D) по результату решения прямой задачи нумерации в каждой из них можно производить путем разыгрывания его номера одним случайным числом с полученным в ней из схемы A при их «согласованности» распределением.

Заключение (выводы)

В глобализации анализа схем размещения частиц по ячейкам в группах с совпадающими ограничениями предложена организация пересчета результатов исследований из одной начальной схемы группы с наибольшей дифференциацией исходов для других схем группы последовательно уменьшением видов различимых в них элементов (ячеек и частиц) соответствующим набором алгоритмических преобразований без необходимости непосредственного учета специфики каждой схемы группы.

Характер пересчитываемых результатов определен перечислительным методом, формирующим исходы начальной схемы группы случайным процессом перечисления ее исходов с их управляемым вероятностным распределением. Это дает возможность более широкого их применения для схем размещения частиц по ячейкам в реальных процессах.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Виленкин Н. Я. *Комбинаторика.* М.: Наука, 1969. 328 с.
2. Riordan J. *An Introduction to Combinatorial Analysis* / Wiley Publicatlon in Mathematical Statistics. New York: John Wiley and Sons, 1958. x+244 pp.
3. Сачков В. Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики.* М.: Наука, 1982. 384 с.
4. Сачков В. Н. *Вероятностные методы в комбинаторном анализе.* М.: Наука, 1978. 320 с.
5. Hall M. *Combinatorial Theory* / Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, 1998. xviii+440 pp.
6. Ryser H. J. *Combinatorial Mathematics* / The Carus Mathematical Monographs. vol. 14. New York: John Wiley and Sons, 1963. xiv+154 pp.
7. Рыбников К. А. *Введение в комбинаторный анализ.* М.: МГУ, 1985. 312 с.
8. Колчин В. Ф. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. *Случайные размещения* / Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Наука, 1976. 223 с.
9. Goulden I. P. Jackon D. M. *Combinatorial Enumeration.* Mineola, NY: Dover Publ., 2004. xxvi+569 pp.

10. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2020. Т. 13, № 3. С. 103–111. `https://doi.org/10.14529/mmp200312`.
11. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // *Труды Карельского научного центра РАН*, 2018. № 7. С. 117–133. `https://doi.org/10.17076/mat750`.
12. Энатская Н. Ю. Комбинаторный анализ схемы размещения различимых частиц по различимым ячейкам без пустых ячеек // *Труды Карельского научного центра РАН*, 2020. № 7. С. 120–126. `https://doi.org/10.17076/mat1172`.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 571–587
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1857

MSC: 60F15

Globalization of the analysis of particle placement models by cells

© ***N. Yu. Enatskaya***

National Research University "Higher School of Economics",
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
34, Tallinskay st, Moscow, 123458, Russian Federation.

Abstract

The title of the paper means that its goal is a general approach to the pre-asmptotic analysis of schemes with different qualities in all combinations of their distinguishability of their constituent elements (cells and particles). To do this, in each group of such schemes with general restrictions, instead of directly studying them based on the specificity of each scheme, a certain general set of algorithmic procedures for recalculating the results of their pre-asymptotic analysis in the scheme is proposed, starting with the scheme with the greatest differentiation of their outcomes, sequentially for other schemes of the group with differences as one item. The analysis of each scheme is carried out according to the traditional and in a number of new following directions: constructing a random process of formation and numbered non-repeated enumeration of the outcomes of the scheme in the order of their receipt, finding their number, solving the numbering problem for the outcomes of the scheme, which consists in establishing a one-to-one correspondence between their types and numbers, setting their probabilistic distribution and modeling the outcomes of the scheme with this probabilistic distribution.

In particular, the cases of groups of schemes without restrictions on the placement of particles and with a restriction of at most one particle in a cell are studied separately, which lead to some well-known analytical results. Under any restrictions in the considered group of circuits, their analysis is carried out by implementing algorithmic procedures for sequential transformation of the results of the analysis of one circuit of the group for another. Combinations into such pairs of schemes are made on the basis of the difference in the quality of one of their elements.

Keywords: placement of particles into cells, pre-asymptotic analysis.

Received: 25th March, 2021 / Revised: 18th August, 2021 /
Accepted: 31st August, 2021 / First online: 30th September, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:
Enatskaya N. Yu. Globalization of the analysis of particle placement models by cells, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 571–587. https://doi.org/10.14498/vsgtu1857 (In Russian).

Authors' Details:
Nataliya Yu. Enatskaya https://orcid.org/0000-0003-1241-7543
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: nat1943@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Vilenkin N. Ya. *Combinatorics.* New York, Academic Press, 1971, xiii+296 pp.
2. Riordan J. *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley Publicatlon in Mathematical Statistics. New York, John Wiley and Sons, 1958, x+244 pp.
3. Sachkov V. N. *Combinatorial Methods in Discrete Mathematics*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 55. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1996, xiii+306 pp. https://doi.org/10.1017/cbo9780511666186.
4. Sachkov V. N. *Probabilistic Methods in Combinatorial Analysis*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 56. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997, x+246 pp. https://doi.org/10.1017/CBO9780511666193.
5. Hall M. *Combinatorial Theory*, Wiley Classics Library. John Wiley and Sons, 1998, xviii+440 pp.
6. Ryser H. J. *Combinatorial Mathematics*, The Carus Mathematical Monographs, vol. 14. New York, John Wiley and Sons, 1963, xiv+154 pp.
7. Rybnikov K. A. *Vvedenie v kombinatornyi analiz* [Introduction to Combinatorial Analysis]. Moscow, Moscow State Univ., 1985, 312 pp. (In Russian)
8. Kolchin V. F., Sevast'yanov B. A., Chistyakov V. P. *Random Allocations*, Scripta Series in Mathematics. New York, John Wiley and Sons, 1978, xi+262 pp.
9. Goulden I. P. Jackon D. M. *Combinatorial Enumeration.* Mineola, NY, Dover Publ., 2004, xxvi+569 pp.
10. Enatskaya N. Yu. Probabilistic models of combinatorial schemes, *Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 103–111 (In Russian). https://doi.org/10.14529/mmp200312.
11. Enatskaya N. Yu. Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change, *Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences*, 2018, no. 7, pp. 117–133 (In Russian). https://doi.org/10.17076/mat750.
12. Enatskaya N. Yu. Combinatorial analysis of the scheme of allocation of distinguishable particles into distinguishable cells without empty cells, *Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences*, 2020, no. 7, pp. 120–126 (In Russian). https://doi.org/10.17076/mat1172.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1861

Краткие сообщения

УДК 533.6.011

Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком

© ***Г. Б. Сизых***

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

Исследуются стационарные течения идеального газа за отошедшим головным скачком в общем 3D-случае. Известный интегральный инвариант (В.Н. Голубкин, Г.Б. Сизых, 2019), обобщающий осесимметричный инвариант (Л. Крокко, 1937) на несимметричные течения, есть криволинейный интеграл по замкнутой вихревой линии (такие линии лежат на изоэнтропийных поверхностях) от давления, деленного на завихренность. Этот интеграл принимает одно и то же значение на всех (замкнутых) вихревых линиях, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Он был получен после обнаружения факта замкнутости вихревых линий в течении за скачком в общем 3D-случае. Недавно было найдено еще одно семейство замкнутых линий за скачком, лежащих на изоэнтропийных поверхностях (Г.Б. Сизых, 2020). Это векторные линии **a** — векторного произведения скорости газа и градиента энтропийной функции. В общем 3D-случае эти линии и вихревые линии не совпадают.

В представленном исследовании предпринимается попытка найти интегральный инвариант, связанный с замкнутыми векторными линиями **a**. Без использования асимптотических, численных и других приближенных методов проводится анализ уравнений Эйлера для классической модели течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями. Используется представление о воображаемых частицах, «переносящих» линии тока реального течения газа, основанное на критерии Гельмгольца–Зоравского. Получен новый интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей. Показано, что криволинейный интеграл по замкнутой векторной линии **a**, в котором подынтегральная функция есть давление, деленное на проекцию завихренности на направление **a**, принимает одинаковые значения для всех линий **a**, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Этот инвариант, как и другой ранее известный интегральный инвариант (В.Н. Голубкин, Г.Б. Сизых, 2019)

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. https://doi.org/10.14498/vsgtu1861.

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых https://orcid.org/0000-0001-5821-8596
кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: o1o2o3@yandex.ru

в частном случае незакрученных осесимметричных течений совпадает с неинтегральным инвариантом Л. Крокко и обобщает его на общий пространственный случай.

Ключевые слова: критерий Гельмгольца–Зоравского, изоэнергетические течения, завихренность, отошедший скачок уплотнения, инвариант Крокко, интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей.

Получение: 20 апреля 2021 г. / Исправление: 12 августа 2021 г. / Принятие: 31 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 30 сентября 2021 г.

Введение. Полная энергия (полная энтальпия) газа не меняется при переходе через скачок уплотнения. Поэтому если набегающий сверхзвуковой поток однороден, то течение за скачком остается изоэнергетическим. Отошедший головной скачок имеет искривленную форму, и течение за ним становится вихревым (кроме лидирующей линии тока, на которой завихренность равна нулю [1]). В осесимметричном (без закрутки) случае для изоэнергетических течений Л. Крокко показал [2], что вдоль линий тока сохраняется отношение завихренности к давлению, умноженному на расстояние до оси симметрии ($I_K = \Omega/pr$). Для закрученных осесимметричных течений инвариант Л. Крокко обобщен в [3]. Оказалось, что окружная составляющая завихренности Ω_φ представима в виде $\Omega_\varphi = r^{-1}\rho C_1 + rpC_2$, где C_1 и C_2 — функции линий тока (ρ — плотность), причем в отсутствие закрутки $C_1 \equiv 0$.

В общем пространственном случае неинтегральный инвариант Л. Крокко был обобщен в [4] интегральным инвариантом. В [4] показано, что величина криволинейного интеграла по замкнутой вихревой линии

$$I_1 = \int_\gamma (p/\Omega)\,\mathrm{d}l$$

одинакова для всех вихревых линий γ, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Это был первый инвариант, пригодный для верификации расчетов течений за скачком в общем пространственном случае.

Появлению инварианта I_1 предшествовало обнаружение факта замкнутости вихревых линий за отошедшим скачком [1]. Если рассматривать векторные поля, связанные с течением (то есть такие, которые выражаются через скорость, плотность и давление газа и через производные этих параметров), то следует отметить, что недавно в [5] найдено еще одно (кроме завихренности) векторное поле с замкнутыми векторными линиями. Речь идет о векторе $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\nabla}\sigma$, где $\sigma = p\rho^{-k}$ ($\mathbf{V}$, ρ и p — скорость, плотность и давление газа, k — показатель адиабаты).

Данная работа посвящена поиску интегрального инварианта, связанного с замкнутыми линиями вектора $\mathbf{a}$.

1. Уравнения движения. Рассмотрим течение идеального (вязкость и теплопроводность отсутствуют) газа, в частицах которого выполняется соотношение $p = R\rho T$, где T — температура, R — отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе, за отошедшим головным скачком, возникшим при обтекании тела равномерным сверхзвуковым потоком. Энтропийная функция $\sigma = p\rho^{-k}$ постоянна вдоль линий тока: $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\sigma = 0$, но может иметь разные значения на различных линиях тока за скачком. Течение за скачком вследствие однородности набегающего потока является изоэнергетическим, и уравнение Эйлера, записанное в форме Крокко [6], имеет вид

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} RT \boldsymbol{\nabla} \ln \sigma, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}\, \mathbf{V}. \tag{1}$$

Замыкает систему уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0. \tag{2}$$

2. Воображаемые частицы. Критерий Гельмгольца—Зоравского [7, 8] применительно к стационарному и соленоидальному (см. формулу (2)) полю вектора $\rho\mathbf{V}$ можно сформулировать следующим образом.

Если в области G существует такое векторное поле $\mathbf{q}$ (имеющее размерность скорости), что во всей области выполнено равенство

$$\rho \mathbf{V} \times \mathbf{rot}(\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V})) = 0, \tag{3}$$

то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени сегмент векторной линии $\rho\mathbf{V}$, лежащий в области G, двигаясь со скоростью $\mathbf{q}$, будут составлять сегмент одной из векторных линий $\rho\mathbf{V}$ в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области G).

Такие воображаемые частицы, следуя [8], будем называть q-частицами. Очевидно, что векторные линии $\rho\mathbf{V}$ совпадают с линиями тока. Поэтому если скорость $\mathbf{q}$ существует, можно считать, что сегменты линий тока переносятся q-частицами. Докажем существование в течении за скачком поля $\mathbf{q}$ и найдем его выражение через параметры течения и их производные.

В течении газа за скачком будем искать $\mathbf{q}$ в виде $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{a}$, где λ — некоторое скалярное поле. Тогда выражение $\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V})$, стоящее под знаком ротора в (3), примет вид $\lambda \mathbf{a} \times (\rho \mathbf{V}) = \lambda \rho (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\nabla}\sigma) \times \mathbf{V}$. Раскроем двойное векторное произведение и учтем ортогональность скорости $\mathbf{V}$ и градиента $\boldsymbol{\nabla}\sigma$, вытекающую из (1). Получим $\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V}) = \lambda \rho \mathbf{V}^2 \boldsymbol{\nabla}\sigma$.

Следовательно, если положить $\lambda = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2}$, где λ_0 — произвольная ненулевая константа, обеспечивающая для вектора $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{a} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{a}$ размерность скорости, то уравнение (3) окажется выполненным (поскольку в этом случае под знаком ротора окажется градиент $\boldsymbol{\nabla}\sigma$, умноженный на константу λ_0). Таким образом, существование скорости $\mathbf{q}$ доказано, и можно считать, что линии тока переносятся q-частицами, движущимися со скоростью

$$\mathbf{q} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} \mathbf{a} = \lambda_0 \rho^{-1} \mathbf{V}^{-2} (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\nabla}\sigma). \tag{4}$$

3. О ненулевом значении q. В следующем разделе будет интегрироваться величина, обратная к $|\mathbf{q}|$. Поэтому докажем, что всюду, за исключением лидирующей линии тока (линии торможения), величина $\mathbf{q}$ отлична от нуля. Будем исходить из общепринятого [4, 5, 9–11] допущения о том, что по крайней мере в некоторой окрестности выпуклой носовой части скорость $\mathbf{V}$ обращается в нуль только в передней точке торможения. Поэтому исходя из (4) и из ортогональности $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\nabla}\sigma$ приходим к выводу, что величина $\mathbf{q}$ может обращаться в нуль только вместе с $\boldsymbol{\nabla}\sigma$.

Докажем, что всюду, за исключением лидирующей линии тока, величина $\nabla\sigma$, а вместе с ней и величина $\mathbf{q}$, отличны от нуля. Поскольку $(\mathbf{V}\cdot\nabla\sigma) = 0$, градиент этого скалярного произведения также будет равен нулю, то есть $\nabla(\mathbf{V}\cdot\nabla\sigma) = 0$. Используя известное векторное тождество для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, получим

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\nabla\sigma) + ((\nabla\sigma)\cdot\nabla)\mathbf{V} + (\nabla\sigma) \times \mathbf{rot}\,\mathbf{V} = 0. \tag{5}$$

Это выражение замечательно тем, что компоненты $\nabla\sigma$ дифференцируются только в первом слагаемом $(\mathbf{V}\cdot\nabla)(\nabla\sigma)$, а в другие слагаемые (5) компоненты $\nabla\sigma$ входят линейно как коэффициенты при различных производных компонент скорости. Поэтому можно применить известный [1, 10, 11] способ — представить (5) в виде

$$\frac{d}{d\,l}(\nabla\sigma) = \frac{1}{|\mathbf{V}|}A(\nabla\sigma),$$

где l — переменная длина дуги вдоль линии тока, A — матрица размером 3×3 с коэффициентами, непрерывно зависящими от производных компонент скорости $\mathbf{V}$. При заданном поле скорости эту систему уравнений можно считать автономной относительно компонент $\nabla\sigma$. Поэтому, согласно известным свойствам автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [12], получаем следующее

Утверждение 1. *В течении за отошедшим головным скачком на любой линии тока на всем ее участке, на котором* $|\mathbf{V}| > 0$, *либо* $|\nabla\sigma| \equiv 0$, *либо* $|\nabla\sigma| > 0$.

Сразу за скачком искривленной формы завихренность равна нулю только в начале лидирующей линии [13, 14]. При этом завихренность на скачке с дозвуковой стороны лежит в касательной к скачку плоскости [1], а скорость на скачке с дозвуковой стороны имеет ненулевую нормальную к скачку составляющую. Поэтому всюду, кроме начала лидирующей линии (где $\mathbf{\Omega} = 0$), на дозвуковой стороне скачка вектор $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}$ отличен от нуля. С учетом (1) это значит, что в начале всех линий тока на скачке, кроме начала лидирующей линии, $|\nabla\sigma| > 0$. Согласно утверждению 1, это значит, что во всем течении за скачком, кроме лидирующей линии тока, градиент энтропийной функции отличен от нуля ($|\nabla\sigma| > 0$).

Как замечено в начале данного раздела, величина $\mathbf{q}$ может обращаться в нуль только вместе с $\nabla\sigma$. Поэтому во всем течении за скачком, кроме лидирующей линии тока, скорость $\mathbf{q}$, определяемая формулой (4), отлична от нуля.

4. Интегральный инвариант. В [5] показано, что по крайней мере вблизи передней точки торможения линии вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla\sigma$ замкнуты и один раз охватывают лидирующую линию тока (линию тока, которая пересекает отошедший скачок по нормали и которая, как доказано в [9], совпадает с линией торможения). Поскольку траектории q-частиц лежат на замкнутых линиях $\mathbf{a}$, эти траектории (как и линии $\mathbf{a}$) не только лежат на изоэнтропийных поверхностях, но и один раз опоясывают их.

Применим теперь идею доказательства, предложенную в [4], для замкнутых траекторий q-частиц, лежащих на изоэнтропийных поверхностях. Если γ — замкнутая линия вектора $\mathbf{a}$, l — переменная длина дуги на γ, то q-частица проходит по кривой γ расстояние $\mathrm{d}l$ за время $\mathrm{d}l/|\mathbf{q}|$. Поэтому время, за которое q-частица сделает полный оборот по замкнутой линии γ, равно криволинейному интегралу $\int_\gamma |\mathbf{q}|^{-1}\,\mathrm{d}l$. Если q-частицы составляли в начальный момент времени одну из линий тока, то, сделав один оборот, они должны составлять ту же самую линию тока. Поэтому время полного оборота у всех q-частиц, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности, одинаково, и величина $I = \int_\gamma |\mathbf{q}|^{-1}\mathrm{d}l$ есть новый (второй) интегральный инвариант изоэнтропийных поверхностей. Используя (4) и (1), получим

$$\mathbf{q} = \lambda_0\rho^{-1}\mathbf{V}^{-2}\mathbf{V}\times\boldsymbol{\nabla}\sigma = \lambda_0(k-1)\sigma\frac{1}{p}(\boldsymbol{\Omega}-\mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{V})/\mathbf{V}^2). \tag{6}$$

Легко проверить, что вектор $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{V})/\mathbf{V}^2$, входящий в выражение (6), есть проекция завихренности на вектор $\mathbf{a}$, то есть, что $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{a} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{a})/\mathbf{a}^2$. Любая замкнутая линия γ, по которой производится интегрирование в новом инварианте, лежит на изоэнтропийной поверхности. Следовательно, множитель $\lambda_0(k-1)\sigma$ в (6) остается постоянным вдоль γ и одинаков для всех γ, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Поэтому выражение для нового инварианта можно упростить:

$$I_2 = \int_\gamma \frac{p}{|\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{a}|}\mathrm{d}l. \tag{7}$$

В незакрученном осесимметричном течении любая линия γ совпадает с вихревой линией, то есть $\boldsymbol{\Omega}_\mathbf{a} = \boldsymbol{\Omega}$, а отношение $p/|\boldsymbol{\Omega}|$ не меняется вдоль γ, и интеграл (7) равен $2\pi rp/|\boldsymbol{\Omega}|$. Таким образом, в осесимметричном случае инвариант (7) совпадает с неинтегральным инвариантом Крокко $I_K = \Omega/(pr)$, а в общем пространственном случае обобщает его.

Заключение. Течение за отошедшим головным скачком исследовано с использованием полных (без каких-либо упрощений) уравнений Эйлера. Ранее было известно, что векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V}\times\boldsymbol{\nabla}\sigma$ замкнуты, лежат на изоэнтропийных поверхностях и один раз опоясывают их. (Такие линии обозначены символом γ.) В данной работе обнаружено, что криволинейный интеграл (7) сохраняет свое значение для всех линий γ, лежащих на одной изоэнтропийной поверхности. Это второй из известных интегральных инвариантов, пригодных для проверки численных расчетов несимметричных течений за скачком.

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // *Adv. Aerodyn.*, 2019. vol. 1, 15. https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5.
2. Crocco L. Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation [A new stream function for researching the movement of gases with rotation] // *ZAMM*, 1937. vol. 17, no. 1. pp. 1–7 (In German). https://doi.org/10.1002/ZAMM.19370170103.
3. Голубкин В. Н., Мануйлович И. С., Марков В. В. Пятый инвариант линий тока для осесимметричных закрученных течений газа // *Труды МФТИ*, 2018. Т. 10, № 2. С. 131–135.
4. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 12. С. 52–56. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-52-56.
5. Сизых Г. Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2020. Т. 84, № 3. С. 304–310. https://doi.org/10.31857/S0032823520020071.
6. von Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow* / Applied Mathematics and Mechanics. vol. 3. New York: Academic Press, 1958. vii+514 pp. https://doi.org/10.1016/b978-0-123-95621-7.x5001-x.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0035136-9.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity.* Bloomington: IU Press, 1954. xx+232 pp.
9. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. https://doi.org/10.1134/S0032823519030135.
10. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. https://doi.org/10.14498/vsgtu1815.
11. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176.
12. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 400 с.
13. Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid // *J. Aeronaut. Sci.*, 1952. vol. 19, no. 12. pp. 826–828. https://doi.org/10.2514/8.2495.
14. Hayes W. D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity // *J. Fluid Mech.*, 1957. no. 2. pp. 595–600. https://doi.org/10.1017/s0022112057000403.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) `https://doi.org/10.14498/vsgtu1861`

MSC: 76J20, 76L99, 76N15

Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave

© ***G. B. Sizykh***

Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

Stationary flows of an ideal gas behind the detached bow shock are investigated in the general 3D case. The well-known integral invariant (V.N. Golubkin, G.B. Sizykh, 2019), generalizing the axisymmetric invariant of (L. Crocco, 1937) to asymmetric flows, is a curvilinear integral over a closed vortex line (such lines lie on isentropic surfaces), in which the integrand is the pressure divided by the vorticity. This integral takes on the same value on all (closed) vortex lines lying on one isentropic surface. It was obtained after the discovery of the fact that the vortex lines are closed in the flow behind the shock in the general 3D case. Recently, another family of closed lines behind the shock was found, lying on isentropic surfaces (G.B. Sizykh, 2020). It is given by vector lines $\mathbf{a}$ — the vector product of the gas velocity and the gradient of the entropy function. In the general 3D case, these lines and vortex lines do not coincide.

In the presented study, an attempt is made to find the integral invariant associated with closed vector lines $\mathbf{a}$. Without using asymptotic, numerical and other approximate methods, the Euler equations are analyzed for the classical model of the flow of an ideal perfect gas with constant heat capacities. The concept of imaginary particles "carrying" the streamlines of a real gas flow, based on the Helmholtz–Zoravsky criterion, is used. A new integral invariant of isentropic surfaces is obtained. It is shown that the curvilinear integral over a closed vector line $\mathbf{a}$, in which the integrand is the pressure divided by the projection of the vorticity on the direction $\mathbf{a}$, has the same values for all lines a lying on one isentropic surface. This invariant, like another previously known integral invariant (V.N. Golubkin, G.B. Sizykh, 2019), in the particular case of non-swirling axisymmetric flows, coincides with the non-integral invariant of L. Crocco and generalizes it to the general spatial case.

Keywords: Helmholtz–Zorawski criterion, isoenergetic flows, vorticity, detached bow shock, Crocco invariant, integral invariant of isentropic surfaces.

Short Communication

Please cite this article in press as:
Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1861` (In Russian).

Author's Details:
Grigory B. Sizykh `https://orcid.org/0000-0001-5821-8596`
Cand. Phys. & Math. Sci; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: `o1o2o3@yandex.ru`

Received: 20th April, 2021 / Revised: 12th August, 2021 /
Accepted: 31st August, 2021 / First online: 30th September, 2021

Competing interests. There are no financial or non-financial competing interests in the publication of the paper.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript for print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Acknowledgments. The author is grateful to the referee for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Golubkin V. N., Sizykh G. B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave, *Adv. Aerodyn.*, 2019, vol. 1, 15. `https://doi.org/10.1186/s42774-019-0016-5`.
2. Crocco L. Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation [A new stream function for researching the movement of gases with rotation], *ZAMM*, 1937, vol. 17, no. 1, pp. 1–7 (In German). `https://doi.org/10.1002/ZAMM.19370170103`.
3. Golubkin V. N., Manuylovich I. S., Markov V. V. Fifth streamline invariant to axisymmetric swirling gas flows, *Proceedings of MIPT*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 131–135 (In Russian).
4. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Generalization of the Crocco invariant for 3D gas flows behind detached bow shock wave, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 12, pp. 45–48. `https://doi.org/10.3103/S1066369X19120053`.
5. Sizykh G. B. System of Orthogonal Curvilinear Coordinates on the Isentropic Surface Behind a Detached Bow Shock Wave, *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903. `https://doi.org/10.1134/s0015462820070095`.
6. von Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. New York, Academic Press, 1958, vii+514 pp. `https://doi.org/10.1016/b978-0-123-95621-7.x5001-x`.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1950-0035136-9`.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington, IU Press, 1954, xx+232 pp.
9. Sizykh G. B. Entropy Value on the Surface of a Non-symmetric Convex Bow Part of a Body in the Supersonic Flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. `https://doi.org/10.1134/S0015462819070139`.
10. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1815`.
11. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proceedings of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian).
12. Pontryagin L. S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniia* [Ordinary Differential Equations]. Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2001, 400 pp. (In Russian)
13. Truesdell C. On curved shocks in steady plane flow of an ideal fluid, *J. Aeronaut. Sci.*, 1952, vol. 19, no. 12, pp. 826–828. `https://doi.org/10.2514/8.2495`.
14. Hayes W. D. The vorticity jump across a gasdynamic discontinuity, *J. Fluid Mech.*, 1957, no. 2, pp. 595–600. `https://doi.org/10.1017/s0022112057000403`.

ПОДПИСКА – 2022

на январь–июнь по интернет-версии «Объединенного каталога «Пресса России» на сайтах www.pressa-rf.ru **и** www.akc.ru

**Уважаемые читатели!
Обратите внимание, что с 1 сентября 2021 г. проводится подписная кампания на журналы Самарского государственного технического университета (первое полугодие 2022 г.)**

18106 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки»**

18107 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки»**

18108 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»**

41340 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Философия»**

70570 **Градостроительство и архитектура**

Условия оформления подписки Вы найдете на сайтах www.pressa-rf.ru *и* www.akc.ru