ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Физико-математические науки»

Т. 25, № 4 – 2021

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)

ISSN 2310–7081 (online)

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с 1996 г.

Выходит 4 раза в год

Декабрь — 2021

Серия «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 25, № 4 – 2021)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 25, № 4 – 2021)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова
Выпускающий редактор Е. В. Абрамова
Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева, Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244
Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/vsgtu

Оригинал-макет изготовлен на кафедре прикладной математики и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 30 декабря 2021 г.
Дата выхода в свет 16 февраля 2022 г.
Формат 70 × 108 1/16.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 216/21.
Заказ № 60.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Scopus, Russian Science Citation Index, Zentralblatt MATH, DOAJ и входит в ядро Российского индекса научного цитирования.

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:
• 01.01.02 (1.1.2) – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
• 01.02.04 (1.1.8) – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
• 05.13.18 (1.2.2) – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (http://www.mathnet.ru), портале научных журналов «Эко-Вектор» (https://journals.eco-vector.com), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (http://elibrary.ru) и КиберЛенинка (http://cyberleninka.ru).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
December — 2021

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2021, vol. 25, no. 4

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova

Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43
Phax: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu

Printed at the Samara State Technical University Press.

The journal covered in Web of Science Core Collection (Emerging Sources Citation Index), Zentralblatt MATH, Scopus, Russian Science Citation Index, and DOAJ.

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (http://www.mathnet.ru), the Eco-Vector Journals Portal (https://journals.eco-vector.com), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (http://elibrary.ru) and CyberLeninka (http://cyberleninka.ru).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i4

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Механика деформируемого твёрдого тела

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Краткие сообщения

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu/v225/i4

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

Mechanics of Solids

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Short Communications

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 607–615
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1894

Differential Equations and Mathematical Physics

MSC: 34K08, 34L20, 35J10, 35J25, 35P20, 35P30

Asymptotics of the eigenvalues of a boundary value problem for the operator Schrödinger equation with boundary conditions nonlinearly dependent on the spectral parameter

I. F. Hashimoglu

Karabük University,
Karabük, 78050, Turkey.

Abstract

On the space $H_1 = L_2(H, [0,1])$, where H is a separable Hilbert space, we study the asymptotic behavior of the eigenvalues of a boundary value problem for the operator Schrödinger equation for the case when one, and the same, spectral parameter participates linearly in the equation and quadratically in the boundary condition. Asymptotic formulae are obtained for the eigenvalues of the considered boundary value problem.

Keywords: operator differential equations, spectrum, eigenvalue, asymptotic formula, Hilbert space.

Received: 1st December, 2021 / Revised: 20th December, 2021 / Accepted: 21st December, 2021 / First online: 28th December, 2021

Research Article

Please cite this article in press as:
Hashimoglu I. F. Asymptotics of the eigenvalues of a boundary value problem for the operator Schrödinger equation with boundary conditions nonlinearly dependent on the spectral parameter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 607–615. https://doi.org/10.14498/vsgtu1894.

Author's Details:
Ilyas F. Hashimoglu https://orcid.org/0000-0002-1690-2186
PhD; Associate Professor; Faculty of Business, Dept. of Business Administration;
e-mail: i.hasimoglu@karabuk.edu.tr

Introduction

In this paper, on the space $H_1 = L_2(H, [0,1])$, where H is a separable Hilbert space, we study the asymptotics of the eigenvalues of the following boundary value problem for the operator Schrödinger equation:

$$-u''(x) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} u(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \quad \nu \geqslant \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) - \lambda^2 u(1) = 0, \tag{2}$$

where λ is a spectral parameter, A is a self-adjoint, positive-definite operator in H and the inverse operator A^{-1} is completely continuous in H.

In [1], the discreetness and some other properties of the spectrum are investigated for the Schrödinger operator on the space $H_1 = L_2(H, [0, \infty))$.

In the papers [2] and [3], the asymptotic behavior of the eigenvalues of the following boundary value problem for a second-order elliptic differential operator equation

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

with boundary conditions

$$u'(0) + \lambda u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{4}$$

was studied on the space $H_1 = L_2(H, [0,1])$.

In [4], Aliev investigated the eigenvalues of two boundary value problems: (3), (4) and (3) with boundary conditions

$$u'(0) + \lambda u(0) = 0, \quad u'(1) - \lambda u(1) = 0$$

and proved that the set of eigenvalues of these problems is discrete and has two series of eigenvalues: $\lambda_k \sim \sqrt{\mu_k}$ and $\lambda_{n,k} \sim n^2\pi^2 + \mu_k$, $k, n \in \mathbb{N}$.

In [5], similar problem for equation (4) with boundary conditions of the form

$$u'(0) + d\lambda^2 u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

was studied.

In the paper [6], the author considered the asymptotic behavior of eigenvalues for the equation (3) with the boundary conditions

$$u'(0) + \lambda^2 u(0) = 0, \quad u'(1) - \lambda^2 u(1) = 0. \tag{5}$$

It was shown that the problem (3), (5) has three series of eigenvalues, one of which converges to zero, and the other two asymptotically behave as $(2n)^2\pi^2 + \mu_k$ and $(2n-1)^2\pi^2 + \mu_k$, where $\mu_k = \mu_k(A)$ are the eigenvalues of the operator A.

In [7] and [8], a boundary value problem for a second-order ordinary differential equation is considered in the case when one and the same spectral parameter λ linearly participates in the equation and quadratically in one of the boundary conditions. The asymptotic behavior of the eigenvalues of the considered boundary value problem was studied.

In [9], the authors considered a boundary value problem for a second-order ordinary differential equation, when one and the same, spectral parameter λ

quadratically participates in the equation, while in the boundary conditions it appears as a quadratic trinomial (with respect to λ) and it is studied the asymptotic behavior of eigenvalues of the considered boundary value problem.

In [10], Aslanova studied the asymptotics of the eigenvalues of boundary problem for the operator Schrödinger equation where spectral parameter participates linearly in the equation and in the boundary condition. She proved that the Schrödinger equation (1) with the boundary conditions

$$u(0)=0, \quad u'(1)-hu(1)=\lambda u(1) \tag{6}$$

has a discrete spectrum and two series of eigenvalues: $\lambda_k \sim -h\sqrt{\mu_k}$ and $\lambda_{m,k} \sim \left(\pi m+\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\right)^2+\mu_k$.

Problems such as (1), (2) and (1), (6) arise upon separation of variables in heat or wave equations, where one of the boundary conditions contains a partial derivative with respect to time. This is why it is so important to study such problems. Especially, problems with nonlinear boundary conditions are important.

The purpose of this study is to determine the asymptotics of the eigenvalues of boundary value problem for the operator Schrödinger equation in the case when one and the same spectral parameter participates linearly in the equation and quadratically in the boundary condition. We prove that the eigenvalues of the problem (1), (2) are real and simple. Furthermore, it will be shown that the eigenvalues asymptotically behave as $\left(\frac{1}{2}\nu\pi+\frac{3}{4}\pi+\pi n\right)^2+\mu_k$ or $(j_{n+1})^2+\mu_k$, where the numbers $j_1<j_2<j_3<\cdots<j_n<\cdots$ are the roots of the equation $J_\nu(z)=0$, and $\mu_k=\mu_k(A)$ are the eigenvalues of the operator A.

Some properties of eigenvalues

Lemma 1. *The eigenvalues of the boundary value problem* (1), (2) *are real numbers.*

Proof. Let $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n\leqslant\cdots$ be the eigenvalues and $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ be the corresponding eigenvectors of the operator A. The set $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ forms a complete orthonormal basis in the space H, and each vector-function $u(x)$ can be expanded as $u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(u(x),e_k\big)_H\cdot e_k$. For the Fourier coefficients $u_k(x)=\big(u(x),e_k\big)_H$, we get the following spectral problem

$$-u_k''(x)+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}u_k(x)+\mu_k u_k(x)=\lambda u_k(x), \quad x\in(0,1), \quad \nu\geqslant\frac{1}{2}, \tag{7}$$

$$u_k(0)=0, \quad u_k'(1)-\lambda^2 u_k(1)=0. \tag{8}$$

The study of the eigenvalue problem (1), (2) is reduced to the study of eigenvalues of the problem (7), (8) for different natural k. The spectrum of the problem (1), (2) consists of the union of eigenvalues of the problem (7), (8) for all natural k.

Let λ be an eigenvalue of the problem (7), (8) and $u_k(x)$ be the corresponding eigenfunction. Multiplying both sides of equality (7) by the function $\overline{u_k(x,\lambda)}$ and integrating the identity with respect to x from 0 to 1; we have

$$-\int_0^1 u_k''(x,\lambda)\overline{u_k(x,\lambda)}dx+\mu_k\int_0^1\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx+\int_0^1\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx=$$
$$=\lambda\int_0^1\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx \quad (9)$$

Calculating the first integral and using the boundary conditions (8), we get

$$-\int_0^1 u_k''(x,\lambda)\overline{u_k(x,\lambda)}dx=u_k'(x,\lambda)\overline{u_k(x,\lambda)}\Big|_0^1-\int_0^1 u_k'(x,\lambda)\overline{u_k'(x,\lambda)}dx=$$
$$=u_k'(1,\lambda)\overline{u_k(1,\lambda)}-u_k'(0,\lambda)\overline{u_k(0,\lambda)}-\int_0^1\left|u_k'(x,\lambda)\right|^2dx=$$
$$=\lambda^2\left|u_k(1,\lambda)\right|^2-\int_0^1\left|u_k'(x,\lambda)\right|^2dx.$$

Consequently, from (9), it follows that

$$\lambda^2\left|u_k(1,\lambda)\right|^2+\lambda\int_0^1\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx-\int_0^1\left|u_k'(x,\lambda)\right|^2dx-$$
$$-\int_0^1\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx-\mu_k\int_0^1\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx=0. \quad (10)$$

Denote

$$a_k(\lambda)=|u_k(1,\lambda)|^2,\quad b_k(\lambda)=\int_0^1\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx,$$

$$c_k(\lambda)=-\int_0^1\left|u_k'(x,\lambda)\right|^2dx-\int_0^1\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx-\mu_k\int_0^1\left|u_k(x,\lambda)\right|^2dx.$$

From (10), it follows that the eigenvalue λ is a root of the equation

$$a_k(\lambda)z^2+b_k(\lambda)z+c_k(\lambda)=0,$$

for every k.

Since $a_k(\lambda)\geqslant 0$, $b_k(\lambda)>0$, $c_k(\lambda)<0$ for any $k\in\mathbb{N}$, then

$$b_k^2(\lambda)-4a_k(\lambda)c_k(\lambda)>0.$$

Consequently, for every k, the problem (7), (8) has only real roots. Lemma 1 is proved. □

LEMMA 2. *The number $\lambda=0$ is not an eigenvalue of the boundary value problem* (1), (2).

Proof. It is sufficient to prove that the boundary value problem (7), (8) for $\lambda=0$, i.e., the problem

$$-u_k''(x)+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}u_k(x)+\mu_k u_k(x)=0,\quad x\in(0,1),\quad \nu\geqslant\frac{1}{2}, \quad (11)$$
$$u_k(0)=0,\quad u_k'(1)=0 \quad (12)$$

has only a trivial solution for every natural k.

Denote by L_0 the differential operator acting in the space $L_2(0,1)$ generated by the differential expression

$$l_0[u] = -u''(x) + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}u(x) + \mu_k u(x)$$

and boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Consider the scalar product $(L_0 u, u)$. We have:

$$(L_0 u, u) = -\int_0^1 u''(x)\overline{u(x)}dx + \int_0^1 \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}u(x)\overline{u(x)}dx + \mu_k \int_0^1 u(x)\overline{u(x)}dx =$$

$$= -u'(x)\overline{u(x)}\Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x)\overline{u'(x)}dx + \int_0^1 \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}u(x)\overline{u(x)}dx + \mu_k \int_0^1 u(x)\overline{u(x)}dx.$$

Therefore,

$$(L_0 u, u) = \int_0^1 \left|u'(x)\right|^2 dx + \int_0^1 \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\left|u(x)\right|^2 dx + \mu_k \int_0^1 \left|u(x)\right|^2 dx. \tag{13}$$

From (13), it follows that $(L_0 u, u) > 0$, when $u(x) \neq 0$; and $L_0 u = 0$, when $u(x) = 0$. Hence, for every natural k, the problem (11),(12) has only a trivial solution. This proves the Lemma 2. □

Lemma 3. *The eigenvalues of the boundary value problem* (1), (2) *are simple.*

Proof. The problem (1), (2) is reduced to the study of problem (7), (8), for every k.

To prove the lemma, it suffices to establish that the equation

$$u_k'(1,\lambda) - \lambda^2 u_k(1,\lambda) = 0 \tag{14}$$

has only simple roots. We will prove this assertion by the method proposed in [9]. Let $u_k(x,\lambda)$ be a solution to the equation (11) with the initial condition $u_k(0,\lambda) = 0$. Then, if $\lambda = \lambda^*$ is a multiple root of equation (14), then the following equalities hold:

$$u_k'(1,\lambda) - \lambda^2 u_k(1,\lambda) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial u_k'(1,\lambda)}{\partial \lambda} - 2\lambda u_k(1,\lambda) - \lambda^2 \frac{\partial u_k(1,\lambda)}{\partial \lambda} = 0. \tag{16}$$

Since $u_k(x,\lambda)$ is a solution of the equation (11), we have

$$\frac{d}{dx}\left[u_k(x,\lambda)u_k'(x,\mu) - u_k(x,\mu)u_k'(x,\lambda)\right] = (\lambda^2 - \mu^2)u_k(x,\lambda)u_k(x,\mu).$$

Integrating this equality in the interval $[0,1]$, and taking $u_k(0,\lambda) = 0$, we obtain:

$$\frac{u_k(1,\lambda)u_k'(1,\mu) - u_k(1,\mu)u_k'(1,\lambda)}{\lambda - \mu} = (\lambda + \mu)\int_0^1 u_k(x,\lambda)u_k(x,\mu)dx,$$

where $\lambda \neq \mu$. By taking the limit when $\mu \to \lambda$ in the last equality and putting $\lambda = \lambda^*$, we have:

$$u_k'(1,\lambda^*)\frac{\partial u_k(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} - u_k(1,\lambda^*)\frac{\partial u_k'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} = 2\lambda^*\int_0^1 \left|u_k(x,\lambda^*)\right|^2 dx. \tag{17}$$

Equalities (15) and (16), respectively, imply the equalities

$$u_k'(1,\lambda^*) = (\lambda^*)^2 u_k(1,\lambda^*),$$

$$\frac{\partial u_k'(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} = 2\lambda^* u_k(1,\lambda^*) + (\lambda^*)^2\frac{\partial u_k(1,\lambda^*)}{\partial\lambda}.$$

Using these equalities in (17), we obtain

$$(\lambda^*)^2 u_k(1,\lambda^*)\frac{\partial u_k(1,\lambda^*)}{\partial\lambda} - u_k(1,\lambda^*)\Big(2\lambda^* u_k(1,\lambda^*) + (\lambda^*)^2\frac{\partial u_k(1,\lambda^*)}{\partial\lambda}\Big) =$$
$$= 2\lambda^*\int_0^1 \left|u_k(x,\lambda^*\ )\right|^2 dx,$$

or

$$2\lambda^*\left(u_k^2(1,\lambda^*) + 2\lambda^*\int_0^1 \left|u_k(x,\lambda^*)\right|^2 dx\right) = 0. \tag{18}$$

Lemma 2 implies that $\lambda^* \neq 0$. On the other hand,

$$u_k^2(1,\lambda^*) + 2\lambda^*\int_0^1 \left|u_k(x,\lambda^*)\right|^2 dx > 0.$$

Therefore, equality (18) cannot hold. Thus, Lemma 3 is proved. □

Asymptotic formulae for eigenvalues

THEOREM 1. *Let A be a self-adjoint, positive-definite operator in a separable Hilbert space H and A^{-1} be completely continuous in H. Then the following asymptotic expression holds for the eigenvalues of the boundary value problem* (1), (2):

$$\lambda_{k,n} \sim \mu_k + \Big(\frac{1}{2}\nu\pi + \frac{3}{4}\pi + \pi n\Big)^2 = \mu_k + (j_{n+1})^2,$$

where the numbers $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_n < \cdots$ are the roots of the equation $J_\nu(z) = 0$, and $\mu_k = \mu_k(A) \to \infty$ (as $k \to \infty$) are the eigenvalues of the operator A.

Proof. The general solution of the differential equations (7) is of the form

$$u_k(x,\lambda) = k_1\sqrt{2x}\cdot J_\nu\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}x\big) + k_2\sqrt{2x}\cdot Y_\nu\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}x\big),$$

where k_1 and k_2 are arbitrary constants; $J_\nu(z)$ and $Y_\nu(z)$ are the Bessel functions of the first and second kinds, respectively. From the first boundary condition $u_k(0,\lambda) = 0$ it follows that $k_2 = 0$. Therefore,

$$u_k(x,\lambda) = k_1\sqrt{2x}\cdot J_\nu\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}x\big).$$

From the second condition of (8) we get

$$u_k'(1,\lambda)-\lambda^2u_k(1,\lambda)=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\nu\Big)J_\nu\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}\big)+ \\ +\sqrt{2(\lambda-\mu_k)}J_{\nu-1}\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}\big)-\sqrt{2}\lambda^2J_\nu\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}\big)=0,$$

or

$$(1-2\nu-2\lambda^2)\cdot J_\nu\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}\big)+2\sqrt{\lambda-\mu_k}\cdot J_{\nu-1}\big(\sqrt{\lambda-\mu_k}\big)=0. \tag{19}$$

Denote $\sqrt{\lambda-\mu_k}=y$. Hence, $\lambda=\mu_k+y^2$, $\lambda^2=(\mu_k+y^2)^2$ and $y\to\infty$ as $\lambda\to\infty$. Then equation (19) takes the form

$$\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\cdot J_\nu(y)+2y\cdot J_{\nu-1}(y)=0.$$

Using the asymptotic expression for $J_\nu(y)$ at $y\to\infty$ we obtain

$$\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\cdot\Big[\cos\Big(y-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\Big)\Big(1-\frac{c_1}{y^2}+\frac{c_2}{y^4}+O\Big(\frac{1}{y^6}\Big)\Big)- \\ -\sin\Big(y-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\Big)\Big(\frac{4\nu^2-1}{8y}-\frac{c_3}{y^3}+O\Big(\frac{1}{y^5}\Big)\Big)\Big]- \\ -2y\Big[\sin\Big(y-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\Big)+ \\ +\cos\Big(y-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\Big)\Big(\frac{4\nu^2-1}{8y}+O\Big(\frac{1}{y^3}\Big)\Big)\Big]=0,$$

where c_1, c_2 and c_3 are some positive real constants.

Denote $y-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi=z$. After some processing we get

$$\cos(z)\Big[\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\Big(1-\frac{c_1}{y^2}+\frac{c_2}{y^4}+O\Big(\frac{1}{y^6}\Big)\Big)+\frac{4\nu^2-1}{4}+O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\Big]- \\ -\sin(z)\Big[\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\Big(\frac{4\nu^2-1}{8y}-\frac{c_3}{y^3}+O\Big(\frac{1}{y^5}\Big)\Big)+2y+O\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big]=0. \tag{20}$$

Equation (20) takes the form

$$\tan(z)=\frac{\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\cdot\big(1-\frac{c_1}{y^2}+\frac{c_2}{y^4}+O\big(\frac{1}{y^6}\big)\big)+\frac{4\nu^2-1}{4}+O\big(\frac{1}{y^2}\big)}{\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\cdot\big(\frac{4\nu^2-1}{8y}-\frac{c_3}{y^3}+O\big(\frac{1}{y^5}\big)\big)+2y+O\big(\frac{1}{y}\big)}.$$

When $y\to\infty$,

$$\tan(z)=\frac{\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\big(1+O\big(\frac{1}{y^2}\big)\big)}{\big(1-2\nu-2(\mu_k+y^2)^2\big)\big(\frac{4\nu^2-1}{8y}+O\big(\frac{1}{y^3}\big)\big)}=\frac{8y}{4\nu^2-1}+O\Big(\frac{1}{y}\Big).$$

Equation $\tan(z)=\frac{8y}{4\nu^2-1}+O\big(\frac{1}{y}\big)$ has roots $z_k=y_k-\frac{1}{2}\nu\pi-\frac{1}{4}\pi\sim\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}^+$ when $y\to\infty$.

From here: $y_k = \sqrt{\lambda - \mu_k} = \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{3}{4}\pi + \pi k$ or

$$\lambda_{k,n} \sim \mu_k + \Bigl(\frac{1}{2}\nu\pi + \frac{3}{4}\pi + \pi n\Bigr)^2. \tag{21}$$

Let numbers $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots < j_n < \cdots$ satisfy the equality $J_\nu(j_n) = 0$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Taking into account the asymptotics of the numbers j_n, i.e. $j_n \sim \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi + \pi n$, for $n \to \infty$, from (21) we obtain the following evaluation:

$$\lambda_{k,n} \sim \mu_k + (j_{n+1})^2.$$

Theorem 1 is proved. □

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Acknowledgments. The author is grateful to the referee for the careful reading of the paper and valuable comments.

References

1. Hashimoglu I., Akın Ö., Mamedov K. R. The discreteness of the spectrum of the Schrödinger operator equation and some properties of the s-numbers of the inverse Schrödinger operator, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, vol. 42, no. 7, pp. 2231–2243. https://doi.org/10.1002/mma.5489.
2. Gorbachuk V. I., Rybak M. A. On the boundary-value problems for the Sturm–Liouville equation with a spectral parameter in the equation and boundary condition, In: *Direct and Inverse Problems of the Scattering Theory.* Kiev, 1981, pp. 3–16 (In Russian).
3. Rybak M. A. Asymptotic distribution of the eigenvalues of some boundary value problems for Sturm–Liouville operator equations, *Ukr. Math. J.*, 1980, vol. 32, no. 2, pp. 159–162. https://doi.org/10.1007/BF01092795.
4. Aliev B. A. Asymptotic behavior of the eigenvalues of a boundary-value problem for a second-order elliptic operator-differential equation, *Ukr. Math. J.*, 2006, vol. 58, no. 8, pp. 1298–1306. https://doi.org/10.1007/s11253-006-0134-1.
5. Aliev B. A. Asymptotic behavior of eigenvalues of a boundary value problem for a second-order elliptic differential-operator equation with spectral parameter quadratically occurring in the boundary condition, *Diff. Equ.*, 2018, vol. 54, no. 9, pp. 1256–1260. https://doi.org/10.1134/S0012266118090124.
6. Aliev B. A. On eigenvalues of a boundary value problem for a second order elliptic differential-operator equation, *Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2019, vol. 45, no. 2, pp. 213–221. https://doi.org/10.29228/proc.5.
7. Kapustin N. Yu. On a spectral problem in the theory of the heat operator, *Diff. Equ.*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1509–1511. https://doi.org/10.1134/S001226610910019X.
8. Kapustin N. Yu. On the uniform convergence in C^1 of Fourier series for a spectral problem with squared spectral parameter in a boundary condition, *Diff. Equ.*, 2011, vol. 47, no. 10, pp. 1408–1413. https://doi.org/10.1134/S001226611110003X.
9. Kerimov N. B., Mamedov Kh. R. On one boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions, *Sib. Math. J.*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 281–290. https://doi.org/10.1007/s11202-999-0008-5.
10. Aslanova N. M. Study of the asymptotic eigenvalue distribution and trace formula of a second order operator-differential equation, *Bound. Value Probl.*, 2011, vol. 2011, no. 7, pp. 1–22. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2011-7.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1894

УДК 517.984.4

Асимптотика собственных значений краевой задачи для операторного уравнения Шредингера с граничными условиями нелинейно зависящими от спектрального параметра

И. Ф. Гашимов[1]

Карабюкский университет,
78050, Карабюк, Турция.

Аннотация

В пространстве $H_1 = L_2(H, [0, 1])$, где H — сепарабельное гильбертово пространство, изучается асимптотическое поведение собственных значений краевой задачи для операторного уравнения Шредингера для случая, когда один и тот же спектральный параметр участвует в уравнении линейно, а в граничном условии — квадратично. Получены асимптотические формулы для собственных значений рассматриваемой краевой задачи.

Ключевые слова: операторно-дифференциальные уравнения, спектр, собственное значение, асимптотическая формула, гильбертово пространство.

Получение: 1 декабря 2021 г. / Исправление: 20 декабря 2021 г. / Принятие: 21 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2021 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение статьи и ценные замечания.

Научная статья

Образец для цитирования
Hashimoglu I. F. Asymptotics of the eigenvalues of a boundary value problem for the operator Schrödinger equation with boundary conditions nonlinearly dependent on the spectral parameter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 607–615. https://doi.org/10.14498/vsgtu1894.

Сведения об авторе
Ильъяс Файяз-оглу Гашимов https://orcid.org/0000-0002-1690-2186
PhD; доцент; факультет бизнеса, каф. делового администрирования;
e-mail: i.hasimoglu@karabuk.edu.tr

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 616–633
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1867

УДК 514.756

Эрмитовы метрики с (анти)автодуальным тензором Римана

Л. Н. Кривоносов, В. А. Лукьянов

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева,
Россия, 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

Аннотация

Составлены уравнения (анти)автодуальности для компонент связности Леви—Чивита (а не для тензора Римана) положительно определенной эрмитовой метрики. Этим известным приемом получается более простая система дифференциальных уравнений в частных производных, влекущая (анти)автодуальность тензора Римана. Эта система 1-го порядка, тогда как уравнения (анти)автодуальности тензора Римана — 2-го порядка. Однако этим способом можно получить лишь часть решений уравнений (анти)автодуальности тензора Римана. Составленные уравнения оказались существенно разными в автодуальном и антиавтодуальном случаях. В случае автодуальности уравнения разбиваются на три класса, для каждого из которых найдено общее решение. В антиавтодуальном случае мы общего решения не нашли, но привели две серии частных решений. Известно, что из (анти)автодуальности тензора Римана вытекает равенство нулю тензора Риччи. Следовательно, найдены пять серий новых решений вакуумных уравнений тяготения Эйнштейна, причем все решения в квадратурах или в явном виде. Указана связь найденных решений с кэлеровыми метриками. В случае (анти)автодуальности связности Леви—Чивита для эрмитовой метрики приведен общий вид параллельных почти комплексных структур, сохраняющих метрику. Они все без кручения. Для произвольной положительно определенной 4-метрики найден общий вид почти комплексных структур, сохраняющих эту метрику.

Ключевые слова: (анти)автодуальность, оператор Ходжа, вакуумные уравнения тяготения Эйнштейна, тензор Римана, эрмитова, кэлерова, гиперкэлерова метрика.

Получение: 16 июня 2021 г. / Исправление: 18 сентября 2021 г. / Принятие: 12 октября 2021 г. / Публикация онлайн: 16 ноября 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования

Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А. Эрмитовы метрики с (анти)автодуальным тензором Римана // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 616–633. https://doi.org/10.14498/vsgtu1867.

Сведения об авторах

Леонид Николаевич Кривоносов https://orcid.org/0000-0002-3533-9595
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Вячеслав Анатольевич Лукьянов https://orcid.org/0000-0002-7294-0232
кандидат физико-математических наук; доцент; каф. прикладной математики;
e-mail: oxyzt@ya.ru

Введение. Отыскание решений вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{ij} = 0$ не потеряло актуальности до настоящего времени. Помимо многочисленных геометрических применений [1] метрики Эйнштейна находят новые применения и в физике. Например, в теории магнитных монополей фундаментальную роль играет одна из антиавтодуальных метрик Эйнштейна, инвариантная относительно группы $SO(3)$ (см. [2]). Напрямую найти общее решение вакуумных уравнений Эйнштейна не удается, хотя частных решений найдено большое количество (см. [3]). Для отыскания других частных решений существенных успехов удалось добиться обходными путями. Один из них — твисторный метод Пенроуза. Другой путь — использование уравнений (анти)автодуальности (проще говоря — дуальности) тензора Римана [4–6]. Метрики, полученные последним способом, называются (анти)автодуальными метриками Эйнштейна. Дифференциальные уравнения дуальности тензора Римана тоже достаточно сложные, они 2-го порядка. Но есть еще и третий обходной путь. В работе [4] показано, что поскольку матрица компонент связности Леви—Чивита кососимметричная, можно потребовать выполнения условий дуальности для этих компонент (хотя они и не образуют тензора). Тогда и тензор Римана тоже станет дуальным. Обратно, всякий дуальный тензор Римана порождается дуальной связностью Леви—Чивита при некоторой калибровке. Дуальность связности Леви—Чивита выражается более простыми дифференциальными уравнениями 1-го порядка. Недостаток этого метода лишь в том, что таким путем нельзя найти все решения уравнений дуальности тензора Римана. Приведем элементарные соображения.

В неголономном базисе, в котором положительно определенная метрика имеет канонический вид

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2, \tag{1}$$

дуальность матрицы связности Леви—Чивита

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2 & -\omega_1^3 & -\omega_1^4 \\ \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 & -\omega_2^4 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 & -\omega_3^4 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

выражается следующими равенствами:

$$\omega_1^2 = \epsilon\omega_3^4, \quad \omega_1^3 = -\epsilon\omega_2^4, \quad \omega_1^4 = \epsilon\omega_2^3, \quad \epsilon = \pm 1 \tag{3}$$

(автодуальность при $\epsilon = 1$, антиавтодуальность при $\epsilon = -1$). Внешнее дифференцирование равенств (3) и формула

$$R_i^j = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k$$

для 2-форм римановой кривизны приводят к равенствам

$$R_1^2 = \epsilon R_3^4, \quad R_1^3 = -\epsilon R_2^4, \quad R_1^4 = \epsilon R_2^3, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{4}$$

выражающим условия дуальности тензора Римана. Но если условия (3) обобщить

$$\omega_1^2 = \epsilon\omega_3^4 + \alpha df, \quad \omega_1^3 = -\epsilon\omega_2^4 + \beta df, \quad \omega_1^4 = \epsilon\omega_2^3 + \gamma df, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{5}$$

где f — новая неизвестная функция от всех 4 переменных, а α, β, γ — произвольные константы, то внешнее дифференцирование равенств (5) приводит к тем же равенствам (4). Иначе говоря, решения уравнений (5) относительно неизвестных коэффициентов метрики (1) дают метрику с дуальным тензором Римана. Очевидно, решения уравнений (3) не исчерпывают всех решений системы (5) и уж тем более не исчерпывают всех решений системы (4).

Авторы статьи [7] предприняли попытку (неудачную) найти все дуальные метрики Эйнштейна. Они применили уравнения (3) к одной из метрик, считая ее (без доказательства) универсальной в классе всех положительно определенных 4-метрик. В итоге пришли к решению

$$u^{-1}\big(dt + (\overline{A}, d\overline{X})\big)^2 + v(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{6}$$

где u — произвольная функция от t, x, y и z; v — произвольная гармоническая функция от x, y, z; вектор-функция $\overline{A} = (A_1, A_2, A_3)$ выражается в квадратурах через u, v и $\epsilon = \pm 1$. Метрика (6) дает красивые дуальные решения вакуумных уравнений Эйнштейна. Она является общим решением уравнений (3), но лишь частным решением уравнений (4). Другими словами, метрика (6) не исчерпывает всех дуальных метрик Эйнштейна.

В настоящей статье мы применяем уравнения (3) к эрмитовой метрике. Любая эрмитова метрика в комплексных переменных z_1, z_2 записывается в виде

$$\psi = A dz_1 d\overline{z}_1 + B dz_2 d\overline{z}_2 + C dz_1 d\overline{z}_2 + \overline{C} d\overline{z}_1 dz_2,$$

где A и B — вещественные функции, C и $\overline{C}$ — комплексно сопряженные функции. Выражая z_1 и z_2 через вещественную и мнимую части, придем к вещественным переменным t, x, y и z. С учетом положительной определенности метрика ψ примет вид

$$\psi = (a dt + u dy + v dz)^2 + (a dx - v dy + u dz)^2 + b^2(dy^2 + dz^2). \tag{7}$$

Матрицу этой метрики обозначим

$$G = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & au & av \\ 0 & a^2 & -av & au \\ au & -av & b^2 + u^2 + v^2 & 0 \\ av & au & 0 & b^2 + u^2 + v^2 \end{pmatrix}.$$

Оператор комплексной структуры I, относительно которого метрика (7) инвариантна, $I^\top G I = G$, имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В первом разделе мы вычисляем компоненты связности Леви—Чивита для метрики (7) в неголономном каноническом базисе и составляем уравнения (3). Они оказываются существенно разными для $\epsilon = 1$ (уравнения автодуальности) и для $\epsilon = -1$ (уравнения антиавтодуальности). Аналогичная ситуация обсуждалась в [8] для метрик с нулевой сигнатурой.

Во втором разделе мы решаем уравнения автодуальности. Они разбиваются на три класса. Для каждого из этих классов найдены общие решения в квадратурах. В этом разделе вычисления наиболее сложные.

В третьем разделе мы упрощаем уравнения антиавтодуальности и приводим два класса частных решений в явном виде. Отметим, что наши решения не могут быть преобразованы в решение (6) статьи [7], так как в решение (6) переменные x, y, z входят равноправно, а в наших решениях этого равноправия нет. Это еще раз подтверждает, что статья [7], вопреки ее заголовку, не решила проблему отыскания общего решения для (анти)автодуальных метрик Эйнштейна.

Кэлеровым многообразиям (в частности, гиперкэлеровым) посвящена обширная литература [9–16]. Известно, что *риманово многообразие* (M, g) *является гиперкэлеровым тогда и только тогда, когда на* M *существуют две антикоммутирующие комплексные структуры* I *и* J, *каждая из которых параллельна относительно* g *и сохраняет* g. В этом случае оператор

$$xI + yJ + zJI \tag{9}$$

при любых вещественных $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, для которых $x^2+y^2+z^2 = 1$, определяет параллельную комплексную структуру [1, разделы 14.10, 14.11]. В четвертом разделе для размерности 4 и метрики (7) мы устанавливаем следующее:

1) конкретный вид операторов I и J;
2) для заданной ориентации многообразия формула (9) исчерпывает все параллельные комплексные структуры;
3) таких семейств (9) ровно два: по одному для каждой из ориентаций многообразия;
4) общий вид почти комплексной структуры, сохраняющей любую положительно определенную 4-метрику.

1. Уравнения (3) для эрмитовой метрики. Введем для эрмитовой метрики (7) неголономный канонический базис, положив

$$\omega^1 = adt + udy + vdz, \quad \omega^2 = adx - vdy + udz, \quad \omega^3 = bdy, \quad \omega^4 = bdz. \tag{10}$$

Тогда она примет вид (1). Дифференцируем внешне:

$$\begin{gathered}
d\omega^1 = -\frac{a_x}{a^2}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Big(\frac{\dot u}{ab} - \frac{a_y}{ab} - \frac{va_x}{a^2b}\Big)\omega^1 \wedge \omega^3 + \Big(\frac{\dot v}{ab} - \frac{a_z}{ab} + \frac{ua_x}{a^2b}\Big)\omega^1 \wedge \omega^4 + \\
+ \Big(\frac{u_x}{ab} - \frac{ua_x}{a^2b}\Big)\omega^2 \wedge \omega^3 + \Big(\frac{v_x}{ab} - \frac{va_x}{a^2b}\Big)\omega^2 \wedge \omega^4 + \\
+ \Big(\frac{ua_z}{ab^2} - \frac{v^2a_x}{a^2b^2} - \frac{u^2a_x}{a^2b^2} - \frac{va_y}{ab^2} + \frac{v\dot u}{ab^2} + \frac{u_xu}{ab^2} - \frac{u_z}{b^2} - \frac{u\dot v}{ab^2} + \frac{vv_x}{ab^2} + \frac{v_y}{b^2}\Big)\omega^3 \wedge \omega^4,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
d\omega^2 = \frac{\dot a}{a^2}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Big(\frac{v\dot a}{a^2b} - \frac{\dot v}{ab}\Big)\omega^1 \wedge \omega^3 + \Big(\frac{\dot u}{ab} - \frac{u\dot a}{a^2b}\Big)\omega^1 \wedge \omega^4 + \\
+ \Big(\frac{u\dot a}{a^2b} - \frac{v_x}{ab} - \frac{a_y}{ab}\Big)\omega^2 \wedge \omega^3 + \Big(\frac{u_x}{ab} + \frac{v\dot a}{a^2b} - \frac{a_z}{ab}\Big)\omega^2 \wedge \omega^4 + \\
+ \Big(\frac{v^2\dot a}{a^2b^2} + \frac{u^2\dot a}{a^2b^2} - \frac{ua_y}{ab^2} - \frac{va_z}{ab^2} - \frac{v\dot v}{ab^2} - \frac{v_xu}{ab^2} + \frac{v_z}{b^2} - \frac{u\dot u}{ab^2} + \frac{vu_x}{ab^2} + \frac{u_y}{b^2}\Big)\omega^3 \wedge \omega^4,
\end{gathered}$$

$$d\omega^3 = \frac{\dot b}{ab}\omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{b_x}{ab}\omega^2 \wedge \omega^3 + \Big(\frac{v\dot b}{ab^2} + \frac{ub_x}{ab^2} - \frac{b_z}{b^2}\Big)\omega^3 \wedge \omega^4,$$

$$d\omega^4 = \frac{\dot b}{ab}\omega^1 \wedge \omega^4 + \frac{b_x}{ab}\omega^2 \wedge \omega^4 + \Big(\frac{vb_x}{ab^2} + \frac{b_y}{b^2} - \frac{u\dot b}{ab^2}\Big)\omega^3 \wedge \omega^4.$$

Отсюда находим компоненты связности Леви—Чивита:

$$\omega_1^2 = -\frac{a_x}{a^2}\omega^1 + \frac{\dot a}{a^2}\omega^2 + \left(\frac{ua_x + v\dot a}{2a^2b} - \frac{\dot v + u_x}{2ab}\right)\omega^3 + \left(\frac{\dot u - v_x}{2ab} + \frac{va_x - u\dot a}{2a^2b}\right)\omega^4,$$

$$\omega_1^3 = \Big(\frac{\dot u}{ab} - \frac{a_y}{ab} - \frac{va_x}{a^2b}\Big)\omega^1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{u_x}{ab} - \frac{ua_x}{a^2b} + \frac{v\dot a}{a^2b} - \frac{\dot v}{ab}\Big)\omega^2 + \frac{\dot b}{ab}\omega^3 - \\ - \frac{1}{2}\Big(\frac{ua_z}{ab^2} - \frac{v^2a_x}{a^2b^2} - \frac{u^2a_x}{a^2b^2} - \frac{va_y}{ab^2} + \frac{v\dot u}{ab^2} + \frac{u_xu}{ab^2} - \frac{u_z}{b^2} - \frac{u\dot v}{ab^2} + \frac{vv_x}{ab^2} + \frac{v_y}{b^2}\Big)\omega^4,$$

$$\omega_1^4 = \Big(\frac{\dot v}{ab} - \frac{a_z}{ab} + \frac{ua_x}{a^2b}\Big)\omega^1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{v_x}{ab} - \frac{va_x}{a^2b} - \frac{u\dot a}{a^2b} + \frac{\dot u}{ab}\Big)\omega^2 + \frac{\dot b}{ab}\omega^4 + \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{ua_z}{ab^2} - \frac{v^2a_x}{a^2b^2} - \frac{u^2a_x}{a^2b^2} - \frac{va_y}{ab^2} + \frac{v\dot u}{ab^2} + \frac{u_xu}{ab^2} - \frac{u_z}{b^2} - \frac{u\dot v}{ab^2} + \frac{vv_x}{ab^2} + \frac{v_y}{b^2}\Big)\omega^3,$$

$$\omega_2^3 = \frac{1}{2}\Big(\frac{v\dot a}{a^2b} - \frac{\dot v}{ab} + \frac{u_x}{ab} - \frac{ua_x}{a^2b}\Big)\omega^1 + \Big(\frac{u\dot a}{a^2b} - \frac{v_x}{ab} - \frac{a_y}{ab}\Big)\omega^2 + \frac{b_x}{ab}\omega^3 - \\ - \frac{1}{2}\Big(\frac{v^2\dot a}{a^2b^2} + \frac{u^2\dot a}{a^2b^2} - \frac{ua_y}{ab^2} - \frac{va_z}{ab^2} - \frac{v\dot v}{ab^2} - \frac{v_xu}{ab^2} + \frac{v_z}{b^2} - \frac{u\dot u}{ab^2} + \frac{vu_x}{ab^2} + \frac{u_y}{b^2}\Big)\omega^4,$$

$$\omega_2^4 = \frac{1}{2}\Big(\frac{v_x}{ab} - \frac{va_x}{a^2b} - \frac{u\dot a}{a^2b} + \frac{\dot u}{ab}\Big)\omega^1 + \Big(\frac{u_x}{ab} + \frac{v\dot a}{a^2b} - \frac{a_z}{ab}\Big)\omega^2 + \frac{b_x}{ab}\omega^4 + \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{v^2\dot a}{a^2b^2} + \frac{u^2\dot a}{a^2b^2} - \frac{ua_y}{ab^2} - \frac{va_z}{ab^2} - \frac{v\dot v}{ab^2} - \frac{v_xu}{ab^2} + \frac{v_z}{b^2} - \frac{u\dot u}{ab^2} + \frac{vu_x}{ab^2} + \frac{u_y}{b^2}\Big)\omega^3,$$

$$\omega_3^4 = \frac{1}{2}\Big(\frac{ua_z}{ab^2} - \frac{v^2a_x}{a^2b^2} - \frac{u^2a_x}{a^2b^2} - \frac{va_y}{ab^2} + \frac{v\dot u}{ab^2} + \frac{u_xu}{ab^2} - \frac{u_z}{b^2} - \frac{u\dot v}{ab^2} + \frac{vv_x}{ab^2} + \frac{v_y}{b^2}\Big)\omega^1 + \\ + \frac{1}{2}\Big(\frac{v^2\dot a}{a^2b^2} + \frac{u^2\dot a}{a^2b^2} - \frac{ua_y}{ab^2} - \frac{va_z}{ab^2} - \frac{v\dot v}{ab^2} - \frac{v_xu}{ab^2} + \frac{v_z}{b^2} - \frac{u\dot u}{ab^2} + \frac{vu_x}{ab^2} + \frac{u_y}{b^2}\Big)\omega^2 + \\ + \Big(\frac{v\dot b}{ab^2} + \frac{ub_x}{ab^2} - \frac{b_z}{b^2}\Big)\omega^3 + \Big(\frac{vb_x}{ab^2} + \frac{b_y}{b^2} - \frac{u\dot b}{ab^2}\Big)\omega^4.$$

Уравнения дуальности (3) принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{ua_z}{ab^2}-\frac{v^2a_x}{a^2b^2}-\frac{u^2a_x}{a^2b^2}-\frac{va_y}{ab^2}+\frac{v\dot u}{ab^2}+\frac{u_xu}{ab^2}-\frac{u_z}{b^2}-\frac{u\dot v}{ab^2}+\frac{vv_x}{ab^2}+\frac{v_y}{b^2}+\frac{2\epsilon a_x}{a^2}=0,\\
\frac{v^2\dot a}{a^2b^2}+\frac{u^2\dot a}{a^2b^2}-\frac{ua_y}{ab^2}-\frac{va_z}{ab^2}-\frac{v\dot v}{ab^2}-\frac{v_xu}{ab^2}+\frac{v_z}{b^2}-\frac{u\dot u}{ab^2}+\frac{vu_x}{ab^2}+\frac{u_y}{b^2}-\frac{2\epsilon\dot a}{a^2}=0,\\
2\Big(\frac{b_z}{b}-\frac{v\dot b}{ab}-\frac{ub_x}{ab}\Big)+\epsilon\Big(\frac{v\dot a}{a^2}-\frac{\dot v}{a}-\frac{u_x}{a}+\frac{ua_x}{a^2}\Big)=0,\\
2\Big(\frac{u\dot b}{ab}-\frac{vb_x}{ab}-\frac{b_y}{b}\Big)+\epsilon\Big(\frac{\dot u}{a}-\frac{u\dot a}{a^2}-\frac{v_x}{a}+\frac{va_x}{a^2}\Big)=0,\\
2\Big(\frac{\dot u}{a}-\frac{a_y}{a}-\frac{va_x}{a^2}\Big)+\epsilon\Big(\frac{v_x}{a}-\frac{va_x}{a^2}-\frac{u\dot a}{a^2}+\frac{\dot u}{a}\Big)=0,\\
2\Big(\frac{u_x}{a}+\frac{v\dot a}{a^2}-\frac{a_z}{a}\Big)+\epsilon\Big(\frac{u_x}{a}-\frac{ua_x}{a^2}+\frac{v\dot a}{a^2}-\frac{\dot v}{a}\Big)=0,\\
\frac{v^2\dot a}{a^2b^2}+\frac{u^2\dot a}{a^2b^2}-\frac{ua_y}{ab^2}-\frac{va_z}{ab^2}-\frac{v\dot v}{ab^2}-\frac{v_xu}{ab^2}+\frac{v_z}{b^2}-\frac{u\dot u}{ab^2}+\frac{vu_x}{ab^2}+\frac{u_y}{b^2}+\frac{2\epsilon\dot b}{ab}=0,\\
\frac{ua_z}{ab^2}-\frac{v^2a_x}{a^2b^2}-\frac{u^2a_x}{a^2b^2}-\frac{va_y}{ab^2}+\frac{v\dot u}{ab^2}+\frac{u_xu}{ab^2}-\frac{u_z}{b^2}-\frac{u\dot v}{ab^2}+\frac{vv_x}{ab^2}+\frac{v_y}{b^2}-\frac{2\epsilon b_x}{ab}=0,\\
2\Big(\frac{a_z}{a}-\frac{\dot v}{a}-\frac{ua_x}{a^2}\Big)+\epsilon\Big(\frac{u_x}{a}-\frac{ua_x}{a^2}+\frac{v\dot a}{a^2}-\frac{\dot v}{a}\Big)=0,\\
2\Big(\frac{v_x}{a}+\frac{a_y}{a}-\frac{u\dot a}{a^2}\Big)+\epsilon\Big(\frac{v_x}{a}-\frac{va_x}{a^2}-\frac{u\dot a}{a^2}+\frac{\dot u}{a}\Big)=0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Вычтем $(11)_1$ и $(11)_8$, а также $(11)_2$ и $(11)_7$:

$$
\frac{a_x}{a}+\frac{b_x}{b}=0,\qquad \frac{\dot a}{a}+\frac{\dot b}{b}=0. \tag{12}
$$

Теперь вычтем $(11)_6$ и $(11)_9$, а также $(11)_5$ и $(11)_{10}$:

$$
\frac{u_x}{a}+\frac{ua_x}{a^2}+\frac{v\dot a}{a^2}+\frac{\dot v}{a}=\frac{2a_z}{a},\qquad \frac{\dot u}{a}+\frac{u\dot a}{a^2}-\frac{va_x}{a^2}-\frac{v_x}{a}=\frac{2a_y}{a}. \tag{13}
$$

Сложим $(11)_6$ и $(11)_9$, а также $(11)_5$ и $(11)_{10}$:

$$
(\epsilon+1)\Big(\frac{u_x}{a}-\frac{ua_x}{a^2}+\frac{v\dot a}{a^2}-\frac{\dot v}{a}\Big)=0,\quad (\epsilon+1)\Big(\frac{v_x}{a}-\frac{va_x}{a^2}+\frac{\dot u}{a}-\frac{u\dot a}{a^2}\Big)=0. \tag{14}
$$

Запишем уравнения $(11)_{3,4}$, упростив их с помощью (13)

$$
\frac{b_z}{b}-\frac{v\dot b}{ab}-\frac{ub_x}{ab}+\epsilon\Big(\frac{v\dot a}{a^2}+\frac{ua_x}{a^2}-\frac{a_z}{a}\Big)=0,\quad \frac{u\dot b}{ab}-\frac{vb_x}{ab}-\frac{b_y}{b}+\epsilon\Big(\frac{a_y}{a}-\frac{u\dot a}{a^2}+\frac{va_x}{a^2}\Big)=0.
$$

Исключим из этих уравнений b_x/b и $\dot b/b$ с помощью (12):

$$
\frac{b_z}{b}-\frac{\varepsilon a_z}{a}+(\epsilon+1)\Big(\frac{v\dot a}{a^2}+\frac{ua_x}{a^2}\Big)=0,\quad \frac{b_y}{b}-\frac{\varepsilon a_y}{a}+(\epsilon+1)\Big(\frac{u\dot a}{a^2}-\frac{va_x}{a^2}\Big)=0. \tag{15}
$$

Итак, система (11) из 10 уравнений равносильна 10 уравнениям $(11)_{1,2}$, (12), (13), (14) и (15).

2. Автодуальный случай, $\epsilon = 1$. Уравнения (14) примут вид

$$\frac{u_x}{a} - \frac{ua_x}{a^2} + \frac{v\dot{a}}{a^2} - \frac{\dot{v}}{a} = 0, \quad \frac{v_x}{a} - \frac{va_x}{a^2} + \frac{\dot{u}}{a} - \frac{u\dot{a}}{a^2} = 0. \tag{16}$$

Уравнения (12) равносильны

$$ab = C(y, z), \tag{17}$$

откуда

$$\frac{b_y}{b} = \frac{C_y}{C} - \frac{a_y}{a}, \qquad \frac{b_z}{b} = \frac{C_z}{C} - \frac{a_z}{a}.$$

С учетом этого, уравнения (15) примут вид

$$\frac{C_z}{C} - \frac{2a_z}{a} + 2\Big(\frac{v\dot{a}}{a^2} + \frac{ua_x}{a^2}\Big) = 0, \quad \frac{C_y}{C} - \frac{2a_y}{a} + 2\Big(\frac{u\dot{a}}{a^2} - \frac{va_x}{a^2}\Big) = 0.$$

Подставим сюда выражения из (13):

$$\frac{C_z}{C} - \frac{u_x}{a} - \frac{\dot{v}}{a} + \frac{v\dot{a}}{a^2} + \frac{ua_x}{a^2} = 0, \quad \frac{C_y}{C} - \frac{\dot{u}}{a} + \frac{v_x}{a} + \frac{u\dot{a}}{a^2} - \frac{va_x}{a^2} = 0$$

и еще упростим с помощью (16):

$$\dot{v} = \frac{v\dot{a}}{a} + \frac{aC_z}{2C}, \quad v_x = \frac{va_x}{a} - \frac{aC_y}{2C}. \tag{18}$$

Сами уравнения (16) после исключения из них $\dot{v}$ и v_x позволяют выразить

$$\dot{u} = \frac{u\dot{a}}{a} + \frac{aC_y}{2C}, \qquad u_x = \frac{ua_x}{a} + \frac{aC_z}{2C}. \tag{19}$$

С учетом (17) уравнения $(11)_{1,2}$ перепишем в виде

$$ua_z - (u^2 + v^2)\frac{a_x}{a} - va_y + v\dot{u} + u_x u - au_z - u\dot{v} + vv_x + av_y + 2C^2\frac{a_x}{a^3} = 0,$$
$$(u^2 + v^2)\frac{\dot{a}}{a} - ua_y - va_z - v\dot{v} - v_x u + av_z - u\dot{u} + vu_x + au_y - 2C^2\frac{\dot{a}}{a^3} = 0.$$

После подстановки в них выражений из (18) и (19) они упрощаются:

$$ua_z - au_z + av_y - va_y + 2C^2\frac{a_x}{a^3} = 0, \quad av_z - va_z + au_y - ua_y - 2C^2\frac{\dot{a}}{a^3} = 0. \tag{20}$$

Уравнения (13) после исключения из них $\dot{v}$, v_x, $\dot{u}$ и u_x с помощью (18) и (19) дают

$$a_y = \frac{u\dot{a}}{a} + \frac{aC_y}{2C} - \frac{va_x}{a}, \quad a_z = \frac{ua_x}{a} + \frac{aC_z}{2C} + \frac{v\dot{a}}{a}. \tag{21}$$

Положим

$$U \equiv \frac{u}{a}, \qquad V \equiv \frac{v}{a}, \qquad C \equiv e^P, \tag{22}$$

где P зависит только от y и z. Тогда (18) и (19) принимают вид

$$\dot U = \frac{P_y}{2}, \qquad U_x = \frac{P_z}{2}, \qquad \dot V = \frac{P_z}{2}, \quad V_x = -\frac{P_y}{2}.$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$U = \frac{1}{2}P_y t + \frac{1}{2}P_z x + D(y,z), \quad V = \frac{1}{2}P_z t - \frac{1}{2}P_y x + E(y,z). \tag{23}$$

Уравнения (20) после обозначений (22) записываются в виде

$$V_z + U_y = -\frac{1}{2}e^{2P}(a^{-4})^{\cdot}, \quad V_y - U_z = \frac{1}{2}e^{2P}(a^{-4})_x.$$

Подставим сюда U и V из (23):

$$(a^{-4})_x = \frac{2(E_y - D_z) - x\Delta P}{e^{2P}}, \quad (a^{-4})^{\cdot} = \frac{-2(E_z + D_y) - t\Delta P}{e^{2P}}, \tag{24}$$

где $\Delta P \equiv P_{yy} + P_{zz}$ — лапласиан функции $P(y,z)$. Интегрируя, получаем

$$a^{-4} = e^{-2P}\Big(F(y,z) - \frac{1}{2}(t^2 + x^2)\Delta P - 2(E_z + D_y)t + 2(E_y - D_z)x\Big), \tag{25}$$

где P, D, E и F — функции только от y и z.

Уравнения (21) после обозначений (22) можно записать в виде

$$(a^{-4})_y = U(a^{-4})^{\cdot} - V(a^{-4})_x - 2a^{-4}P_y, \quad (a^{-4})_z = U(a^{-4})_x + V(a^{-4})^{\cdot} - 2a^{-4}P_z.$$

Вычисляя левые части с помощью (25), а правые — с помощью (23), (24) и (25), получим систему из 8 дифференциальных уравнений на 4 функции P, D, E и F от переменных y и z:

$$\Delta P_y = P_y \Delta P, \quad \Delta P_z = P_z \Delta P, \quad \Delta D = D\Delta P, \quad \Delta E = E\Delta P, \tag{26}$$

$$\begin{aligned} 2E_{yz} &= D_{zz} - D_{yy} + P_y D_y - P_z D_z + P_y E_z + P_z E_y, \\ 2D_{yz} &= E_{yy} - E_{zz} + P_y D_z + P_z D_y - P_y E_y + P_z E_z, \end{aligned} \tag{27}$$

$$F_y = 2ED_z - 2DD_y - 2DE_z - 2EE_y, \quad F_z = 2DE_y - 2DD_z - 2ED_y - 2EE_z, \tag{28}$$

знак Δ — лапласиан от двух переменных y и z.

Уравнения (26) запишем в виде

$$\Delta P + \alpha e^P = 0, \quad \Delta D + \alpha D e^P = 0, \quad \Delta E + \alpha E e^P = 0, \tag{29}$$

где α — неотрицательная константа. Уравнения (27) преобразуем так:

$$\Big(\frac{D_y + E_z}{e^P}\Big)_y = \Big(\frac{D_z - E_y}{e^P}\Big)_z, \quad \Big(\frac{D_y + E_z}{e^P}\Big)_z = -\Big(\frac{D_z - E_y}{e^P}\Big)_y.$$

Это означает, что функции $Q \equiv e^{-P}(D_y + E_z)$ и $S \equiv e^{-P}(D_z - E_y)$ являются вещественной и мнимой частями комплексной голоморфной функции, то есть являются сопряженными гармоническими функциями от y и z. Отсюда

$$D_y + E_z = Qe^P, \quad D_z - E_y = Se^P. \tag{30}$$

Записывая условия интегрируемости для функций D и E с помощью (29), получаем

$$\alpha E = S_y + SP_y - Q_z - QP_z, \quad -\alpha D = S_z + SP_z + Q_y + QP_y. \tag{31}$$

Далее рассмотрим два случая.

I случай, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$. Тогда функции D и E выражаются через P, Q и S из (31), и легко проверить, что они обращают в тождество $(29)_{2,3}$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$F = \beta - \frac{2}{\alpha}(Q^2 + S^2)e^P, \quad \beta = \mathrm{const}$$

является общим решением уравнений (28).

Итак, общее решение уравнений автодуальности при $\alpha \neq 0$ зависит от пары сопряженных гармонических функций $Q(y, z)$, $S(y, z)$, двух констант α, β и функции $P(y, z)$, удовлетворяющей уравнению $(29)_1$. При этом из (25) и (17) получаем

$$a^{-4} = e^{-P}\Big(\beta e^{-P} - \frac{2}{\alpha}(Q^2 + S^2) + \frac{\alpha}{2}(t^2 + x^2) - 2Qt - 2Sx\Big), \quad b = \frac{e^P}{a},$$

а из (23) и (31) —

$$\begin{aligned} u &= \Big(\frac{1}{2}(P_y t + P_z x) - \frac{1}{\alpha}(2S_z + SP_z + QP_y)\Big)a, \\ v &= \Big(\frac{1}{2}(P_z t - P_y x) + \frac{1}{\alpha}(2S_y + SP_y - QP_z)\Big)a. \end{aligned}$$

II случай, $\boldsymbol{\alpha = 0}$. Тогда уравнения (29) означают, что $\Delta P = \Delta D = \Delta E = 0$. Равенства (31) с учетом того, что $Q_z = -S_y$ и $Q_y = S_z$, можно записать в виде

$$2S_y = QP_z - SP_y, \quad 2Q_y = -SP_z - QP_y.$$

Умножим первое из них на S, второе — на Q и сложим:

$$(S^2 + Q^2)_y = -(S^2 + Q^2)P_y.$$

Аналогичными манипуляциями из (31) можно получить

$$(S^2 + Q^2)_z = -(S^2 + Q^2)P_z.$$

Отсюда

$$S^2 + Q^2 = \beta e^{-P}, \quad \beta = \mathrm{const} \geqslant 0. \tag{32}$$

Это общее решение уравнений (31) при $\alpha = 0$. Здесь снова возможны два случая.

Случай II_1, $\boldsymbol{\beta = S = Q = 0}$. Тогда формулы (30) перепишутся в виде

$$D_y + E_z = 0, \quad D_z - E_y = 0. \tag{33}$$

Это означает, что D и E — пара сопряженных гармонических функций. В силу (33) правые части уравнений (28) равны нулю. Следовательно, $F = \mathrm{const}$. Из (25) видно, что F может быть только положительной. Удобно положить $F = \gamma^{-4}$. Тогда из (25) $a = \gamma e^{P/2}$, а из (17) $b = \gamma^{-1} e^{P/2}$. Наконец, из (22) и (23) получаем

$$u = \gamma e^{P/2}\Big(\frac{1}{2}P_y t + \frac{1}{2}P_z x + D\Big), \quad v = \gamma e^{P/2}\Big(\frac{1}{2}P_z t - \frac{1}{2}P_y x + E\Big).$$

Произвол решения случая II_1 почти такой же, как и в случае I: $P(y,z)$ — произвольная гармоническая функция, $D(y,z)$ и $E(y,z)$ — сопряженные гармонические функции и одна константа $\gamma > 0$. Однако тензор Римана для случая II_1 нулевой, то есть эрмитова метрика (7) — плоская. При нулевом тензоре Римана автодуальность не отличается от антиавтодуальности.

Случай II_2, $\boldsymbol{\beta > 0}$. Из (32) и (30) можно явно выразить гармонические функции P, Q и S через гармонические функции D и E:

$$e^P = \frac{(D_y + E_z)^2 + (D_z - E_y)^2}{\beta}, \quad Q = e^{-P}(D_y + E_z), \quad S = e^{-P}(D_z - E_y),$$

причем из этих формул и из гармоничности D и E вытекает гармоничность P, Q и S. Функция F тоже выражается через D и E из формул (28) одной квадратурой с точностью до константы интегрирования γ. Таким образом, в случае II_2 произвол решения определяется двумя не связанными между собой несопряженными гармоническими функциями D и E и двумя константами β и γ, а само решение использует лишь одну квадратуру. Из (25) и (17) вычисляются a и b:

$$a^{-4} = \frac{\beta^2(F - 2(E_z + D_y)t + 2(E_y - D_z)x)}{((D_y + E_z)^2 + (D_z - E_y)^2)^2}, \quad b = \frac{(D_y + E_z)^2 + (D_z - E_y)^2}{\beta a}.$$

Из (23) получаются u и v:

$$u = \Big(\frac{1}{2}P_y t + \frac{1}{2}P_z x + D\Big)a, \quad v = \Big(\frac{1}{2}P_z t - \frac{1}{2}P_y x + E\Big)a.$$

3. Антиавтодуальный случай, $\boldsymbol{\epsilon = -1}$. Уравнения (14) выполняются тождественно, а уравнения (15) дают

$$\frac{b_z}{b} + \frac{a_z}{a} = 0, \quad \frac{b_y}{b} + \frac{a_y}{a} = 0.$$

Вместе с (12) это эквивалентно $ab = C = \mathrm{const}$. Перенормировкой переменных y и z можно добиться равенства $C = 1$, так что считаем $b = a^{-1}$. Остались 4 уравнения: (13) и $(11)_{1,2}$. Положим

$$ua \equiv U, \quad va \equiv V, \quad a^2 \equiv A.$$

Тогда уравнения (13) принимают вид

$$U_x + \dot{V} = A_z, \quad \dot{U} - V_x = A_y, \tag{34}$$

а $(11)_{1,2}$ становятся такими:

$$U_y + V_z = \Big(\frac{V^2 + U^2 + 1}{A}\Big)^{\cdot}, \quad U_z - V_y = \Big(\frac{V^2 + U^2 + 1}{A}\Big)_x. \tag{35}$$

Итак, все уравнения антиавтодуальности свелись к 4 уравнениям в частных производных 1-го порядка (34) и (35) на 3 функции: U, V и A от всех четырех переменных. Можно исключить правые части как из уравнений (34), так и из уравнений (35). Это приводит к одному и тому же условию

$$U_{xy} - \dot{U}_z + \dot{V}_y + V_{xz} = 0.$$

Нам не удалось найти общее решение системы (34), (35). Но можно получить частное решение в элементарных функциях, если наложить дополнительное условие $A = U$. Тогда уравнения (34) и (35) запишутся в виде

$$V_x = \dot{U} - U_y, \quad \dot{V} = U_z - U_x, \tag{36}$$

$$V_y = U_z - U_x + \frac{2V(U_y - \dot{U})}{U} + \frac{U_x(V^2+1)}{U^2}, \tag{37}$$

$$V_z = \dot{U} - U_y + \frac{2V(U_z - U_x)}{U} - \frac{\dot{U}(V^2+1)}{U^2}. \tag{38}$$

Система уравнений (36)–(38) все еще достаточно сложная. Но структура этих уравнений подсказывает, какие необходимо еще ввести ограничения, чтобы получить легко интегрируемые уравнения. Положим дополнительно

$$U_y - \dot{U} = 0, \quad U_z - U_x = 0. \tag{39}$$

Тогда в силу (36) функция V не будет зависеть от t и x, а уравнения (37) и (38) запишутся в виде

$$\frac{V_y}{V^2+1} = \frac{U_x}{U^2}, \quad \frac{V_z}{V^2+1} = -\frac{\dot{U}}{U^2}.$$

Так как левые части не зависят от t и x, находим

$$U = \frac{V^2+1}{tV_z - xV_y + f},$$

где $f(y,z)$ — произвольная функция. Подставим это в уравнения (39) и получим 5 уравнений:

$$\begin{gathered} V_{yz}(V^2+1) = 2VV_yV_z, \quad 2VV_y^2 = V_{yy}(V^2+1), \quad 2VV_z^2 = V_{zz}(V^2+1), \\ (V^2+1)(f_y - V_z) = 2VV_yf, \quad (V^2+1)(f_z + V_y) = 2VV_zf. \end{gathered} \tag{40}$$

Из $(40)_{1,2,3}$ сначала находим

$$V_y = C_1(V^2+1), \quad V_z = C_2(V^2+1), \quad C_1, C_2 = \text{const},$$

а затем и

$$V = \operatorname{tg}(C_1 y + C_2 z + C_3), \quad C_1, C_2, C_3 = \text{const}.$$

Оставшиеся два уравнения $(40)_{4,5}$ позволяют найти

$$f = \frac{C_2 y - C_1 z + C_4}{\cos^2(C_1 y + C_2 z + C_3)}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{const}.$$

Параметры метрики (7) таковы:

$$a = u = \frac{1}{\sqrt{C_2(t+y) - C_1(x+z) + C_4}}, \quad b = a^{-1},$$
$$v = a^{-1} \operatorname{tg}(C_1 y + C_2 z + C_3), \quad C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{const}.$$

Другое частное решение системы уравнений (34), (35) получается при

$$V = \gamma U, \quad U_x = \dot{U} = 0, \quad \gamma = \text{const}.$$

Решение для этого случая таково:

$$a = \frac{1}{\sqrt{C_1 t + C_2 x + C_3}}, \quad b = a^{-1}, \quad v = \gamma u,$$
$$u = \frac{1}{a\sqrt{1+\gamma^2}} \operatorname{tg} \frac{(C_1 - C_2\gamma)y + (C_1\gamma + C_2)z + C_4}{\sqrt{1+\gamma^2}}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{const}.$$

4. Связь с кэлеровыми метриками. Известно, что в размерности 4 многообразие гиперкэлерово тогда и только тогда, когда оно эйнштейново и антиавтодуально [2, гл. 9]. С другой стороны, справедливо следующее утверждение: *риманово 4-многообразие гиперкэлерово тогда и только тогда, когда оно кэлерово и Риччи-плоско* [1, разд. 14.22]. Следовательно, все наши антиавтодуальные решения дают гиперкэлерову метрику, а автодуальные решения дают кэлерову метрику только в плоском случае, то есть это решения II_1.

В данном разделе мы найдем явный вид всех параллельных относительно метрики (7) комплексных структур, сохраняющих эту метрику (в случае дуальности связности Леви—Чивита). Во введении мы отмечали, что комплексная структура (8) сохраняет метрику (7). Найдем условие ее параллельности. Матрица (8) задана в голономном базисе (dt, dx, dy, dz), а 1-формы связности Леви—Чивита подсчитаны в неголономном базисе (1). Из (10) видно, что матрица перехода от голономного базиса к неголономному такова:

$$P = \begin{pmatrix} a & 0 & u & v \\ 0 & a & -v & u \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Оказывается, что в неголономном базисе матрица (8) сохраняет свой вид:

$$PIP^{-1} = I.$$

Чтобы метрика (7) была кэлеровой, оператор I должен быть параллелен относительно метрики (7), то есть его ковариантный дифференциал должен быть равен нулю ($DI = 0$). Ввиду постоянства компонент матрицы I это равенство равносильно перестановочности матрицы I и матрицы связности Леви—Чивита (2) Ω:

$$I\Omega = \Omega I. \tag{42}$$

Последнее равенство равносильно равенствам

$$\omega_1^3 = \omega_2^4, \quad \omega_1^4 = -\omega_2^3.$$

Сравнивая эти равенства с условиями дуальности (3) связности, заключаем, что оператор I параллелен в антиавтодуальном случае (при $\epsilon = -1$).

Если почти комплексная структура C, заданная в неголономном базисе ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, сохраняет квадратичную форму (1), то должны выполняться два условия:

$$C^2 = -E, \quad C^\top C = E,$$

где E — единичная матрица 4-го порядка. Отсюда $C^\top = -C$. Иначе говоря, матрица C ортогональная и кососимметричная. Запишем подробно условия ортогональности кососимметричной матрицы $C = (c_{ij})$:

$$\begin{array}{rl} (c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{14})^2 = 1, & (c_{12})^2 + (c_{23})^2 + (c_{24})^2 = 1, \\ (c_{13})^2 + (c_{23})^2 + (c_{34})^2 = 1, & (c_{14})^2 + (c_{24})^2 + (c_{34})^2 = 1, \\ c_{13}c_{23} + c_{14}c_{24} = 0, & c_{12}c_{23} - c_{14}c_{34} = 0, \\ c_{12}c_{24} + c_{13}c_{34} = 0, & c_{12}c_{13} + c_{24}c_{34} = 0, \\ c_{12}c_{14} - c_{23}c_{34} = 0, & c_{13}c_{14} + c_{23}c_{24} = 0. \end{array} \tag{43}$$

Предполагая, что c_{14} и c_{23} не равны нулю, исключим c_{12} из уравнений $(43)_{6,9}$:

$$c_{34}\big((c_{14})^2 - (c_{23})^2\big) = 0.$$

Отсюда возможны три случая:

1) $c_{14} = c_{23}$; остальные равенства (43) дают

$$(c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{14})^2 = 1, \quad c_{13} = -c_{24}, \quad c_{12} = c_{34}; \tag{44}$$

2) $c_{14} = -c_{23}$; остальные равенства (43) сводятся к

$$(c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{14})^2 = 1, \quad c_{13} = c_{24}, \quad c_{12} = -c_{34}; \tag{45}$$

3) $c_{34} = 0$; в этом случае условия (43) приводят либо к случаю 1), либо к случаю 2), поэтому случай 3) не дает новых решений системы (43).

Мы получили решения (44) и (45) в предположении, что c_{14} и c_{23} не равны нулю. Легко убедиться, что и при равенстве нулю c_{14} или c_{23} формулы (44) и (45) остаются верными, то есть они дают общее решение системы (43).

В случае 1) в силу (44) имеем

$$C = c_{12}I + c_{13}J + c_{14}K, \quad (c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{14})^2 = 1, \tag{46}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = JI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае 2) в силу (45) получаем

$$C = c_{12}N + c_{13}M + c_{14}Q, \quad (c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{14})^2 = 1, \tag{47}$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие параллельности (42) операторов J и K сводится к равенствам

$$\omega_1^4 = -\omega_2^3, \quad \omega_1^3 = \omega_2^4, \quad \omega_1^2 = -\omega_3^4.$$

Эти равенства выполняются в силу условий антиавтодуальности (3) (при $\epsilon = -1$). Чтобы оператор C, заданный формулой (46), был параллелен, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_{12}, c_{13}, c_{14} были константами.

Операторы M, N и Q параллельны только при выполнении условий автодуальности (3) (при $\epsilon = 1$). Чтобы оператор C, заданный формулой (47), был параллелен, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_{12}, c_{13}, c_{14} были константами.

Возвращение оператора C к голономному базису по формуле $P^{-1}CP$ дает операторы почти комплексной структуры в голономном базисе, сохраняющие метрику (7) и параллельные относительно этой метрики как в случае (46), так и в случае (47). Однако для автодуального случая операторов (47) это дает противоречие с утверждением, сформулированным в начале настоящего раздела, которое требует эйнштейновости и антиавтодуальности.

Для снятия этого противоречия рассмотрим оператор T перестановки элементов ω^2 и ω^3 неголономного канонического базиса. Он имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = E.$$

Легко проверить справедливость формул

$$TNT = J, \quad TMT = I, \quad TQT = K.$$

Следовательно, операторы (47) переходят в (46) и наоборот. Перестановка двух элементов базиса меняет ориентацию многообразия (но не меняет квадратичную форму (1)), а смена ориентации меняет знак оператора Ходжа (см. [8]). При этом понятия автодуальности и антиавтодуальности меняются местами. Заметим, что определитель матрицы перехода (41) от голономного базиса к неголономному положительный, поэтому виды дуальности в базисах ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 и dt, dx, dy, dz совпадают.

Итак, (46) — это общий вид операторов почти комплексной структуры, параллельных и сохраняющих метрику (7), для одной ориентации многообразия, а формула (47) — для другой ориентации.

На самом деле начальное утверждение этого раздела по умолчанию предполагает следующую формулировку: *в размерности 4 многообразие с заданной ориентацией гиперкэлерово тогда и только тогда, когда оно эйнштейново и антиавтодуально.* В этом случае никаких противоречий с нашими результатами нет. Из известного утверждения, сформулированного в конце введения, следует, что все операторы (46) и (47) — без кручения.

Приведенный в данном разделе анализ показывает, что формулы (46) и (47) дают (в неголономном каноническом базисе) все почти комплексные структуры, сохраняющие произвольную положительно определенную метрику (1). Однако у произвольной метрики коэффициенты c_{12}, c_{13} и c_{14} будут не константами, а функциями от точки многообразия с условием $(c_{12})^2 + (c_{13})^2 + (c_{14})^2 = 1$. Среди этих структур может не найтись структур с нулевым кручением. Поэтому такая метрика не обязана быть эрмитовой. Тем не менее всякую положительно определенную метрику можно считать почти эрмитовой.

Заключение. В данной статье мы исследовали положительно определенную эрмитову 4-метрику (7). Нас интересовал вопрос нахождения условий на коэффициенты этой метрики a, b, u, v, при которых ее тензор Римана является дуальным (автодуальным или антиавтодуальным). Всякая метрика с дуальным тензором Римана имеет нулевой тензор Риччи $R_{ij} = 0$, то есть удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна, поэтому данный вопрос имеет не только геометрический интерес. Решить задачу нахождения условий дуальности тензора Римана напрямую не представляется возможным, потому что компоненты тензора Римана, выражающиеся через частные производные 2-го порядка от функций a, b, u, v, оказываются очень громоздкими. Поэтому мы воспользовались методом, который заменяет очень сложные условия дуальности на значительно более простую систему дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка, а именно — на требование дуальности связности. Уравнения дуальности тензора Римана являются следствием этой системы, но в общем случае не равносильны ей. Поэтому, хотя нами и найдено общее решение уравнений автодуальности связности, мы не можем утверждать, что получили все эрмитовы метрики с автодуальным тензором Римана. Тем не менее, решая проблему дуальности тензора Римана для эрмитовой метрики, мы получили 5 новых решений вакуумных уравнений Эйнштейна в квадратурах или в явном виде. Все наши антиавтодуальные решения дают гиперкэлеровы метрики, в то время как автодуальные решения приводят к гиперкэлеровой метрике только в плоском случае, когда тензор Римана равен нулю.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Besse A. L. *Einstein Manifolds.* Berlin: Springer-Verlag, 1987. xii+512 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74311-8.
2. Atiyah M. F., Hitchin N. *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles* / Porter Lectures / Princeton Legacy Library. vol. 11. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1988. vii+134 pp. https://doi.org/10.1515/9781400859306.
3. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности.* М.: Наука, 1966. 496 с.
4. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Gravitation, gauge theories and differential geometry // *Phys. Reports*, 1980. vol. 66, no. 6. pp. 213–393. https://doi.org/10.1016/0370-1573(80)90130-1.
5. Eguchi T., Hanson A. J. Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity // *Phys. Lett. B*, 1978. vol. 74, no. 3. pp. 249–251. https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90566-X.
6. Gibbons G. W., Hawking S. W. Gravitational multi-instantons // *Phys. Lett. B*, 1978. vol. 78, no. 4. pp. 430–432. https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90478-1.
7. Koshti S., Dadhich N. *The general self-dual solution of the Einstein equations*, 1994. 14 pp., arXiv: gr-qc/9409046.
8. Кривоносов Л. Н., Лукьянов В. А. Специфика классификации Петрова (анти)автодуальных метрик нулевой сигнатуры // *Изв. вузов. Матем.*, 2020. № 9. С. 56–67. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-9-56-67.
9. Weil A. *Introduction à L'Étude des Variétés Kähleriennes.* Paris: Hermann, 1958. 175 pp. (In French)
10. Hitchin N. Compact four-dimensional Einstein manifolds // *J. Differential Geom.*, 1974. vol. 9, no. 3. pp. 435–441. https://doi.org/10.4310/jdg/1214432419.
11. Hitchin N. J. Kählerian twistor spaces // *Proc. London Math. Soc.*, 1981. vol. 43, no. 1. pp. 133–150. https://doi.org/10.1112/plms/s3-43.1.133.
12. Chen B.-Y. Some topological obstructions to Bochner–Kaehler metrics and their applications // *J. Differential Geom.*, 1978. vol. 13, no. 4. pp. 547–558. https://doi.org/10.4310/jdg/1214434707.
13. Derdziński A. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four // *Compos. Math.*, 1983. vol. 49, no. 3. pp. 405–433 http://eudml.org/doc/89617.
14. Itoh M. Self-duality of Kähler surfaces // *Compos. Math.*, 1984. vol. 51, no. 2. pp. 265–273 http://eudml.org/doc/89645.
15. Jelonek W. Compact Kähler surfaces with harmonic anti-self-dual Weyl tensor // *Diff. Geom. Appl.*, 2002. vol. 16, no. 3. pp. 267–276. https://doi.org/10.1016/S0926-2245(02)00076-1.
16. Арсеньева О. Е. Автодуальная геометрия обобщенных келеровых многообразий // *Матем. сб.*, 1993. Т. 184, № 8. С. 137–148.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 616–633
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1867

MSC: 53B30, 58A14, 53C18

Hermitian metrics with (anti-)self-dual Riemann tensor

L. N. Krivonosov, V. A. Luk'yanov

Nizhny Novgorod State Technical University,
24, Minina st., Nizhnii Novgorod, 603600, Russian Federation.

Abstract

Equations of (anti-)self-duality for the components of the Levi–Civita connection of the Hermitian positive definite metric (not for the Riemann tensor) are compiled. With this well-known method, a simpler system of partial differential equations is obtained, which implies the (anti-)self-duality of the Riemann tensor. This system is of the 1st order, while the (anti-)self-duality conditions of the Riemann tensor are expressed by equations of the 2nd order. However, this method can obtain only particular solutions of the (anti-)self-duality equations of the Riemann tensor. The constructed equations turned out to be significantly different in the self-dual and anti-self-dual cases. In the case of self-duality, the equations are divided into three classes, for each of which a general solution is found. In the anti-self-dual case, we did not find the general solution, but gave two series of particular solutions. The connection between our solutions and Kähler metrics is shown. In the case of the (anti-)self-duality of the Levi–Civita connection for the Hermitian metric, a general form of parallel almost complex metric-preserving structures is obtained. These structures are all torsion free. For an arbitrary positive definite 4-metric, a general form of almost complex structures preserving this metric is found.

Keywords: (anti-)self-duality, Hodge operator, Einstein vacuum equations of gravitation, Riemann tensor, Hermitian, Kähler, hyper–Kähler metric.

Received: 16th June, 2021 / Revised: 18th September, 2021 /
Accepted: 12th October, 2021 / First online: 16th November, 2021

Research Article

Please cite this paper in press as:
Krivonosov L. N., Luk'yanov V. A. Hermitian metrics with (anti-)self-dual Riemann tensor, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 616–633. https://doi.org/10.14498/vsgtu1867 (In Russian).

Authors' Details:

Leonid N. Krivonosov https://orcid.org/0000-0002-3533-9595
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: l.n.krivonosov@gmail.com

Vyacheslav A. Luk'yanov https://orcid.org/0000-0002-7294-0232
Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: oxyzt@ya.ru

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Acknowledgments. The authors are grateful to referees for their careful reading, suggestions and valuable comments.

References

1. Besse A. L. *Einstein Manifolds.* Berlin, Springer-Verlag, 1987, xii+512 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-540-74311-8.
2. Atiyah M. F., Hitchin N. *The Geometry and Dynamics of Magnetic Monopoles*, Porter Lectures / Princeton Legacy Library, vol. 11. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1988, vii+134 pp. https://doi.org/10.1515/9781400859306.
3. Petrov A. Z. *Novye metody v obshchei teorii otnositel'nosti* [New Methods in General Relativity]. Moscow, Nauka, 1966, 496 pp. (In Russian)
4. Eguchi T., Gilkey P. B., Hanson A. J. Gravitation, gauge theories and differential geometry, *Phys. Reports*, 1980, vol. 66, no. 6, pp. 213–393. https://doi.org/10.1016/0370-1573(80)90130-1.
5. Eguchi T., Hanson A. J. Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity, *Phys. Lett. B*, 1978, vol. 74, no. 3, pp. 249–251. https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90566-X.
6. Gibbons G. W., Hawking S. W. Gravitational multi-instantons, *Phys. Lett. B*, 1978, vol. 78, no. 4, pp. 430–432. https://doi.org/10.1016/0370-2693(78)90478-1.
7. Koshti S., Dadhich N. *The general self-dual solution of the Einstein equations*, 1994, 14 pp., arXiv: gr-qc/9409046.
8. Krivonosov L. N., Luk'yanov V. A. Specificity of Petrov classification of (anti-)self-dual zero signature metrics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2020, vol. 64, no. 9, pp. 50–60. https://doi.org/10.3103/S1066369X20090054.
9. Weil A. *Introduction à L'Étude des Variétés Kähleriennes.* Paris, Hermann, 1958, 175 pp. (In French)
10. Hitchin N. Compact four-dimensional Einstein manifolds, *J. Differential Geom.*, 1974, vol. 9, no. 3, pp. 435–441. https://doi.org/10.4310/jdg/1214432419.
11. Hitchin N. J. Kählerian twistor spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 1981, vol. 43, no. 1, pp. 133–150. https://doi.org/10.1112/plms/s3-43.1.133.
12. Chen B.-Y. Some topological obstructions to Bochner–Kaehler metrics and their applications, *J. Differential Geom.*, 1978, vol. 13, no. 4, pp. 547–558. https://doi.org/10.4310/jdg/1214434707.
13. Derdziński A. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four, *Compos. Math.*, 1983, vol. 49, no. 3, pp. 405–433 http://eudml.org/doc/89617.
14. Itoh M. Self-duality of Kähler surfaces, *Compos. Math.*, 1984, vol. 51, no. 2, pp. 265–273 http://eudml.org/doc/89645.
15. Jelonek W. Compact Kähler surfaces with harmonic anti-self-dual Weyl tensor, *Diff. Geom. Appl.*, 2002, vol. 16, no. 3, pp. 267–276. https://doi.org/10.1016/S0926-2245(02)00076-1.
16. Arsen'eva O. E. Selfdual geometry of generalized Kählerian manifolds, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1994, vol. 79, no. 2, pp. 447–457. https://doi.org/10.1070/SM1994v079n02ABEH003509.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 634–662
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1798

УДК 517.927

Об асимптотике спектра дифференциального оператора четного порядка с потенциалом дельта-функцией

С. И. Митрохин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский вычислительный центр,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1, стр. 4.

Аннотация

Изучается последовательность дифференциальных операторов высокого четного порядка, потенциалы которых сходятся к дельта-функции Дирака. Рассматривается один из видов разделённых граничных условий. В точках разрыва потенциала необходимо изучить условия склейки для корректного определения решений соответствующих дифференциальных уравнений. При больших значениях спектрального параметра методом Наймарка выписаны асимптотические решения дифференциальных уравнений. Изучены условия склейки, исследованы граничные условия, выведено уравнение на собственные значения рассматриваемого дифференциального оператора. Методом последовательных приближений найдена асимптотика спектра изучаемых дифференциальных операторов, предел которой задаёт спектр оператора с потенциалом дельта-функцией.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, дельта-функция Дирака, асимптотика решений дифференциального уравнения, кусочно-гладкий потенциал, собственные значения, асимптотика спектра.

Получение: 15 июля 2020 г. / Исправление: 23 ноября 2021 г. / Принятие: 6 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2021 г.

Научная статья

Образец для цитирования
Митрохин С. И. Об асимптотике спектра дифференциального оператора четного порядка с потенциалом дельта-функцией // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 634–662. https://doi.org/10.14498/vsgtu1798.

Сведения об авторе
Сергей Иванович Митрохин https://orcid.org/0000-0003-1896-0563
кандидат физико-математических наук, доцент; старший научный сотрудник; научно-исследовательский вычислительный центр; e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Введение и исторический обзор. Дифференциальный оператор, потенциалом которого является дельта-функция, можно рассматривать как предел последовательности операторов с кусочно-гладкими потенциалами. Развитие спектральной теории дифференциальных операторов идет в сторону уменьшения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. Различные вопросы спектральной теории операторов второго порядка с негладкими коэффициентами (с кусочно-гладкими потенциалами либо кусочно-гладкой весовой функцией) были рассмотрены в работах [1–5].

В работе [6] были найдены асимптотики собственных значений дифференциальных операторов второго порядка с суммируемым потенциалом. В работах [7–9] были изучены спектральные свойства операторов четвертого, шестого и выше порядков с разделенными граничными условиями, а в работе [10] — с неразделенными граничными условиями с суммируемым на отрезке потенциалом.

В работах [11–13] рассматривались различные операторы второго порядка с сингулярными потенциалами, в том числе и операторы с потенциалом дельта-функцией. Необходимость изучения операторов, потенциалом которых является дельта-функция Дирака, следует из богатства их физических приложений, примеры которых изложены в работах [14–18].

Во всех этих работах рассматривались операторы второго порядка. Операторы порядка выше второго, потенциалами которых является дельта-функция, до сих пор не изучались.

1. Постановка задачи. Изучим дифференциальный оператор с кусочно-гладкими коэффициентами, задаваемый на отрезке $[0;\pi]$ дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(8)}(x)+q_1(x)y_1(x)=\lambda a^8 y_1(x), \quad 0\leqslant x<x_{1n}; \tag{1}$$

$$y_2^{(8)}(x)+q_2(x)y_2(x)=\lambda a^8 y_2(x), \quad x_{1n}\leqslant x\leqslant x_0; \tag{2}$$

$$y_3^{(8)}(x)+q_3(x)y_3(x)=\lambda a^8 y_3(x), \quad x_0< x\leqslant x_{2n}; \tag{3}$$

$$y_4^{(8)}(x)+q_4(x)y_4(x)=\lambda a^8 y_4(x), \quad x_{2n}< x\leqslant \pi, \tag{4}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр; $\rho(x)=a^8$ — весовая функция, $a>0$; $Q_n(x)=q_1(x)\vee q_2(x)\vee q_3(x)\vee q_4(x)$ — потенциал, на который накладываются следующие условия:

$$\begin{gathered}
q_1(x)=0, \quad x\in[0,x_{1n}]; \quad q_4(x)=0, \quad x\in(x_{2n},\pi];\\
x_{1n}=x_0-\frac{k_0}{n}, \quad k_0>0; \quad x_{2n}=x_0+\frac{m_0}{n}, \quad m_0>0;\\
q_2(x)\in C^7[x_{1n};x_0]; \quad q_3(x)\in C^7(x_0,x_{2n}];\\
\lim_{x\to x_{1n}+0} q_2(x)=0; \qquad \lim_{x\to x_0-0} q_2(x)=+\infty;\\
\lim_{x\to x_0+0} q_3(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to x_{2n}-0} q_3(x)=0;\\
\int_{x_{1n}}^{x_0} q_2(t)dt=H_{1n}; \quad \int_{x_0}^{x_{2n}} q_3(t)dt=H_{2n}; \quad H_{1n}+H_{2n}=1.
\end{gathered} \tag{5}$$

В точках x_{1n}, x_0, x_{2n} разрыва коэффициентов потребуем выполнения следующих условий склейки:

$$y_1(x_{1n}-0)=y_2(x_{1n}+0);\quad y_1^{(m)}(x_{1n}-0)=y_2^{(m)}(x_{1n}+0),\quad m{=}1,2,\ldots,7; \tag{6}$$

$$y_2(x_0-0)=y_3(x_0+0);\quad y_2^{(m)}(x_0-0)=y_3^{(m)}(x_0+0),\quad m{=}1,2,\ldots,7; \tag{7}$$

$$y_3(x_{2n}-0)=y_4(x_{2n}+0);\quad y_3^{(m)}(x_{2n}-0)=y_4^{(m)}(x_{2n}+0),\quad m{=}1,2,\ldots,7. \tag{8}$$

Будем рассматривать граничные условия вида

$$\begin{gathered} y_1^{(m_1)}(0)=y_1^{(m_2)}(0)=\cdots=y_1^{(m_6)}(0)=y_4^{(n_1)}(\pi)=y_4^{(n_2)}(\pi)=0,\\ m_1<m_2<\cdots<m_6,\ n_1<n_2;\ m_k,n_1,n_2\in\{0,1,2,\ldots,7\},\ k=1,2,\ldots,6. \end{gathered} \tag{9}$$

Из условий (5) следует, что потенциал $Q_n(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(x)=\delta(x-x_0)=\left[\begin{array}{ll} 0, & x\in[0;x_0);\\ +\infty, & x=x_0;\\ 0, & x\in(x_0;\pi], \end{array}\right.$$

$$\int_0^\pi Q_n(x)dx=\int_0^\pi \delta(x-x_0)dx=H_{1n}+H_{2n}=1.$$

Поэтому мы фактически изучим асимптотику спектра оператора, задаваемого дифференциальным уравнением

$$y^{(8)}(x)+\delta(x-x_0)y(x)=\lambda a^8 y(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\quad a>0,$$

с граничными условиями (9).

2. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1)–(4) при больших значениях спектрального параметра $\boldsymbol{\lambda}$. Пусть $\lambda=s^8$, $s=\sqrt[8]{\lambda}$, при этом для корректности дальнейших вычислений зафиксируем ту ветвь арифметического корня восьмой степени, для которой $\sqrt[8]{1}=+1$. Обозначим через ω_k $(k=1,2,\ldots,8)$ различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{gathered} \omega_k^8=1;\quad \omega_k=e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)},\quad k=1,2,\ldots,8;\\ \omega_1=1,\quad \omega_2=e^{\frac{2\pi i}{8}}=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2 i}{2}=z\neq0;\\ \omega_3=\omega_2^2=e^{\frac{4\pi i}{8}}=i,\quad \omega_4=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2 i}{2},\\ \omega_5=-1,\quad \omega_6=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2 i}{2}=\bar\omega_4,\\ \omega_7=-i=\bar\omega_3,\quad \omega_8=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2 i}{2}=\bar\omega_2;\\ \omega_m=z^{m-1},\quad m=1,2,\ldots,8. \end{gathered} \tag{10}$$

Числа ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ из (10) делят единичную окружность на восемь равных частей и для них справедливы следующие свойства:

$$\sum_{k=1}^{8} \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, 7; \quad \sum_{k=1}^{8} \omega_k^m = 8, \quad m = 0, m = 8; \tag{11}$$

$$\sum_{k=0}^{7} \omega_m^k = 0, \quad m = 2, 3, \ldots, 8; \quad \sum_{k=0}^{7} \omega_m^k = 8, \quad m = 1. \tag{12}$$

Аналогично монографии [19, гл. 2] устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) $(q_1(x) = 0$ *при* $x \in [0; x_{1n}))$ *имеет вид*

$$\begin{gathered} y_1(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x, s); \\ y_1^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \end{gathered} \tag{13}$$

где C_{1k} — *произвольные постоянные,* $k = 1, 2, \ldots, 8$;

$$\begin{gathered} y_{1k}(x, s) = e^{a\omega_k s x}, \quad y_{1k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}, \\ k = 1, 2, \ldots, 8, \quad m = 1, 2, \ldots, 7. \end{gathered} \tag{14}$$

Теорема 2. *Общее решение дифференциального уравнения* (2) *представляется в виде*

$$\begin{gathered} y_2(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x, s); \\ y_2^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}^{(m)}(x, s), \quad x_{1n} \leqslant x \leqslant x_0, \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \end{gathered} \tag{15}$$

где C_{2k} — *произвольные постоянные,* $k = 1, 2, \ldots, 8$, *при этом для фундаментальной системы решений* $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^{8}$ *справедливы следующие асимптотические формулы и оценки:*

$$y_{2k}(x, s) = e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k A_7(x)}{s^7} + \frac{A_8^0(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s| a x}}{s^9}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{16}$$

$$y_{2k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k A_7(x)}{s^7} + \frac{A_8^m(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im} s| a x}}{s^9}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 8, \quad m = 1, 2, \ldots, 7; \tag{17}$$

$$A_7(x) = -\frac{1}{8a^7}\int_{x_{1n}}^{x} q_2(t)dt; \quad A_7(x_{1n}) = 0; \quad A_7'(x) = -\frac{q_2(x)}{8a^7}; \tag{18}$$

$$A_8^0(x) = \frac{7q_2(x) - 7q_2(x_{1n})}{16a^8}; \quad A_8^0(x_{1n}) = 0; \quad A_8^1(x) = \frac{5q_2(x) - 7q_2(x_{1n})}{16a^8};$$
$$A_8^m(x) = \frac{(7-2m)q_2(x) - 7q_2(x_{1n})}{16a^8}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 7; \tag{19}$$
$$A_8^7(x) = \frac{-7q_2(x) - 7q_2(x_{1n})}{16a^8};$$

$$\sum_{k=0}^{7} A_8^k(x) = \sum_{k=0}^{7} A_8^k(x_{1n}) = \sum_{k=0}^{7} A_8^k(x_0) = D_8 = \frac{-7q_2(x_{1n})}{2a^8}. \tag{20}$$

Теорема 3. *Общее решение дифференциального уравнения* (3) *имеет вид*

$$y_3(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}(x,s);$$
$$y_3^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \quad x_0 < x \leqslant x_{2n}, \tag{21}$$

где C_{3k} — *произвольные постоянные*, $k = 1, 2, \ldots, 8$;

$$y_{3k}(x,s) = e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^0(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s| a x}}{s^9}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \tag{22}$$

$$y_{3k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x}\left[1 + \frac{\omega_k B_7(x)}{s^7} + \frac{B_8^m(x)}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}\, s| a x}}{s^9}\right)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 8, \quad m = 1, 2, \ldots, 7; \tag{23}$$

$$B_7(x) = -\frac{1}{8a^7}\int_{x_0}^{x} q_3(t)dt; \quad B_7(x_0) = 0; \quad B_7'(x) = -\frac{q_3(x)}{8a^7}; \tag{24}$$

$$B_8^0(x) = \frac{7q_3(x) - 7q_3(x_0)}{16a^8}; \quad B_8^0(x_0) = 0; \quad B_8^1(x) = \frac{5q_3(x) - 7q_3(x_0)}{16a^8};$$
$$B_8^m(x) = \frac{(7-2m)q_3(x) - 7q_3(x_0)}{16a^8}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, 7; \tag{25}$$
$$B_8^7(x) = \frac{-7q_3(x) - 7q_3(x_0)}{16a^8};$$

$$\sum_{k=0}^{7} B_8^k(x) = \sum_{k=0}^{7} B_8^k(x_{2n}) = E_8 = \frac{-7q_3(x_0)}{2a^8}. \tag{26}$$

Теорема 4. *Общее решение дифференциального уравнения* (4) ($q_4(x) = 0$ *при* $x \in (x_{2n}; \pi)$) *представляется в виде*

$$y_4(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{4k} y_{4k}(x,s);$$
$$y_4^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{8} C_{4k} y_{4k}^{(m)}(x,s), \quad m = 1, 2, \ldots, 7, \tag{27}$$

где C_{4k} — *произвольные постоянные,* $k = 1, 2, \dots, 8$;

$$y_{4k}(x,s) = e^{a\omega_k sx}, \quad y_{4k}^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}, \\ k = 1, 2, \dots, 8, \quad m = 1, 2, \dots, 7. \tag{28}$$

Обозначим через Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$ из (10)–(12):

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_7 & \omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & \omega_7^2 & \omega_8^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \dots & \omega_7^7 & \omega_8^7 \end{vmatrix} = \prod_{\substack{k>m;\\ k,m=1,2,\dots,8}} (\omega_k - \omega_m) \neq 0. \tag{29}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* (δ_{mk}) $(m, k = 1, 2, \dots, 8)$ — *матрица алгебраических миноров к элементам* b_{mk} $(m, k = 1, 2, \dots, 8)$ *определителя* Δ_{00} *из* (29). *Тогда*

$$(\delta_{mk}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{18} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{71} & \delta_{72} & \dots & \delta_{78} \\ \delta_{81} & \delta_{82} & \dots & \delta_{88} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta_{00}}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & \dots & -\omega_7^{-1} & \omega_8^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \dots & \omega_7^{-2} & -\omega_8^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{-6} & -\omega_2^{-6} & \omega_3^{-6} & -\omega_4^{-6} & \dots & \omega_7^{-6} & -\omega_8^{-6} \\ -\omega_1^{-7} & \omega_2^{-7} & -\omega_3^{-7} & \omega_4^{-7} & \dots & -\omega_7^{-7} & \omega_8^{-7} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Доказательство теоремы 5 можно найти в работе [20].

3. Изучение условий склейки (8). С помощью формул (21) и (27) из условий склейки (8) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y_4(x_{2n}+0,s) \overset{(8)}{=} y_3(x_{2n}-0,s) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{8} C_{4k} y_{4k}(x_{2n}+0,s) = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}(x_{2n}-0,s); \\ \dfrac{y_4^{(m)}(x_{2n}+0,s)}{(as)^m} \overset{(8)}{=} \dfrac{y_3^{(m)}(x_{2n}-0,s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{8} C_{4k} \dfrac{y_{4k}^{(m)}(x_{2n}+0,s)}{(as)^m} = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{k=1}^{8} C_{3k} \dfrac{y_{3k}^{(m)}(x_{2n}-0,s)}{(as)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, 7. \end{cases} \tag{31}$$

Из метода Крамера следует, что решение системы (31) имеет следующий вид:

$$C_{41} = \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{04}(s) \neq 0}, \quad C_{42} = \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{04}(s) \neq 0}, \quad \ldots, \quad C_{48} = \frac{\Delta_{48}}{\Delta_{04}(s) \neq 0}; \tag{32}$$

$$\Delta_{04}(s) = \left.\begin{vmatrix} y_{41}(x,s) & y_{42}(x,s) & \ldots & y_{48}(x,s) \\ \dfrac{y'_{41}(x,s)}{as} & \dfrac{y'_{42}(x,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y'_{48}(x,s)}{as} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{y^{(7)}_{41}(x,s)}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{42}(x,s)}{(as)^7} & \ldots & \dfrac{y^{(7)}_{48}(x,s)}{(as)^7} \end{vmatrix}\right|_{x=x_{2n}+0} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{a\omega_1 sx} & e^{a\omega_2 sx} & \ldots & e^{a\omega_8 sx} \\ \omega_1 e^{a\omega_1 sx} & \omega_2 e^{a\omega_2 sx} & \ldots & \omega_8 e^{a\omega_8 sx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^7 e^{a\omega_1 sx} & \omega_2^7 e^{a\omega_2 sx} & \ldots & \omega_8^7 e^{a\omega_8 sx} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{a(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_8)sx}\Delta_{00} \overset{(11)}{=} e^0\Delta_{00} = \Delta_{00} \neq 0. \tag{33}$$

Определители Δ_{4k} $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ из формулы (32) получаются из определителя $\Delta_{04}(s)$ из (33) заменой k-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}(x_{2n}-0,s) \quad \sum_{k=1}^{8} C_{3k}\frac{y'_{3k}(x_{2n}-0,s)}{as} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^{8} C_{3k}\frac{y^{(7)}_{3k}(x_{2n}-0,s)}{(as)^7}\right)^{\top}. \tag{34}$$

Таким образом, из (32)–(34) следует, что определитель Δ_{41} выписывается в следующем виде:

$$\Delta_{41} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}(x_{2n}-0,s) & e^{a\omega_2 sx_{2n}} & \ldots & e^{a\omega_8 sx_{2n}} \\ \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k}\dfrac{y'_{3k}(x_{2n}-0,s)}{as} & \omega_2 e^{a\omega_2 sx_{2n}} & \ldots & \omega_8 e^{a\omega_8 sx_{2n}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k}\dfrac{y^{(7)}_{3k}(x_{2n}-0,s)}{(as)^7} & \omega_2^7 e^{a\omega_2 sx_{2n}} & \ldots & \omega_8^7 e^{a\omega_8 sx_{2n}} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{a\omega_2 sx_{2n}} e^{a\omega_3 sx_{2n}} (\ldots) e^{a\omega_8 sx_{2n}} \sum_{k=1}^{8} C_{3k}\Delta_{41k} =$$

$$= C_{31}\Delta_{411} + C_{32}\Delta_{412} + \cdots + C_{38}\Delta_{418}; \tag{35}$$

$$\Delta_{41k} \overset{(11)}{=} e^{-a\omega_1 s x_{2n}} \begin{vmatrix} y_{3k}(x_{2n}-0,s) & 1 & \dots & 1 \\ \dfrac{y'_{3k}(x_{2n}-0,s)}{as} & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y^{(7)}_{3k}(x_{2n}-0,s)}{(as)^7} & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} \overset{(22),(23)}{=}$$

$$= e^{-a\omega_1 s x_{2n}} e^{a\omega_k s x_{2n}} \begin{vmatrix} 1\cdot\Big[1+\dfrac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7}+\dfrac{B_8^0(x_{2n})}{s^8}+\dots\Big] & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k\Big[1+\dfrac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7}+\dfrac{B_8^1(x_{2n})}{s^8}+\dots\Big] & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^7\Big[1+\dfrac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7}+\dfrac{B_8^7(x_{2n})}{s^8}+\dots\Big] & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix},$$

$$k=1,2,\dots,8. \quad (36)$$

Аналогичным образом из (32)–(34) имеем

$$\Delta_{42} = \begin{vmatrix} e^{a\omega_1 s x_{2n}} & \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}(x_{2n}-0,s) & e^{a\omega_3 s x_{2n}} & \dots & e^{a\omega_8 s x_{2n}} \\ \omega_1 e^{a\omega_1 s x_{2n}} & \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k}\dfrac{y'_{3k}(x_{2n}-0,s)}{as} & \omega_3 e^{a\omega_3 s x_{2n}} & \dots & \omega_8 e^{a\omega_8 s x_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 e^{a\omega_1 s x_{2n}} & \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k}\dfrac{y^{(7)}_{3k}(x_{2n}-0,s)}{(as)^7} & \omega_3^7 e^{a\omega_3 s x_{2n}} & \dots & \omega_8^7 e^{a\omega_8 s x_{2n}} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{a\omega_1 s x_{2n}} e^{a\omega_3 s x_{2n}} (\dots) e^{a\omega_8 s x_{2n}} \sum_{k=1}^{8} C_{3k}\Delta_{42k} =$$

$$= C_{31}\Delta_{421} + C_{32}\Delta_{422} + \dots + C_{38}\Delta_{428}; \quad (37)$$

$$\Delta_{42k} = e^{-a\omega_2 s x_{2n}} \begin{vmatrix} 1 & y_{3k}(x_{2n}-0,s) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \dfrac{y'_{3k}(x_{2n}-0,s)}{as} & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 & \dfrac{y^{(7)}_{3k}(x_{2n}-0,s)}{(as)^7} & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-a\omega_2 s x_{2n}} e^{a\omega_k s x_{2n}} \begin{vmatrix} 1 & 1\cdot\Big[1+\dfrac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7}+\dfrac{B_8^0(x_{2n})}{s^8}+\dots\Big] & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_k\Big[1+\dfrac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7}+\dfrac{B_8^1(x_{2n})}{s^8}+\dots\Big] & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 & \omega_k^7\Big[1+\dfrac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7}+\dfrac{B_8^7(x_{2n})}{s^8}+\dots\Big] & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix},$$

$$k=1,2,\dots,8. \quad (38)$$

Разложим определитель Δ_{41k} $(k=1,2,\ldots,8)$ из формулы (36) по первому столбцу на сумму определителей, применим формулы (30) из теоремы 5 и получим

$$\Delta_{41k}=e^{-a\omega_1 s x_{2n}}e^{a\omega_k s x_{2n}}\Big[\Delta_{41k,0}+\frac{\Delta_{41k,7}}{s^7}+\frac{\Delta_{41k,8}}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big],\quad k=1,2,\ldots,8; \tag{39}$$

$$\Delta_{41k,0}=\begin{vmatrix}1&1&1&\ldots&1\\ \omega_k&\omega_2&\omega_3&\ldots&\omega_8\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \omega_k^7&\omega_2^7&\omega_3^7&\ldots&\omega_8^7\end{vmatrix}=\left[\begin{array}{ll}\Delta_{00}, & k=1;\\ 0, & k=2,3,\ldots,8,\end{array}\right. \tag{40}$$

$$\Delta_{41k,7}=\omega_k B_7(x_{2n})\Delta_{41k,0}=\left[\begin{array}{ll}\Delta_{00}\omega_k B_7(x_{2n}), & k=1;\\ 0, & k=2,3,\ldots,8,\end{array}\right. \tag{41}$$

$$\Delta_{41k,8}=B_8^0(x_{2n})\delta_{11}-B_8^1(x_{2n})\omega_k\delta_{21}+B_8^2(x_{2n})\omega_k^2\delta_{31}-\cdots-B_8^7(x_{2n})\omega_k^7\delta_{81}\overset{(30)}{=}$$
$$=\frac{\Delta_{00}}{8}\Big[B_8^0(x_{2n})\cdot 1+B_8^1(x_{2n})\frac{\omega_k}{\omega_1}+B_8^2(x_{2n})\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^2+\cdots+B_8^7(x_{2n})\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^7\Big],\quad k=1,2,\ldots,8. \tag{42}$$

Подставляя в формулу (42) $k=1$, находим

$$\Delta_{411,8}=\frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{k=0}^{7}B_8^k(x_{2n})\overset{(26)}{=}\frac{\Delta_{00}}{8}E_8. \tag{43}$$

Используя формулы (25), (26), из формулы (42) при $k=2,3,\ldots,8$ получаем

$$\Delta_{41k,8}=\frac{\Delta_{00}}{8}\frac{1}{16a^8}\Big[(-7)q_3(x_0)\sum_{n=0}^{7}\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^n+$$
$$+q_3(x_{2n})\sum_{m=0}^{7}(7-2m)\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^m\Big]=\Delta_{00}V_k,$$

$$V_k=\frac{q_3(x_{2n})G_k}{128a^8},\quad G_k=\sum_{m=0}^{7}(7-2m)\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^m,\quad m=2,3,\ldots,8, \tag{44}$$

так как $\sum_{n=0}^{7}(\frac{\omega_k}{\omega_1})^n=0$ в силу формул (10)–(12). При этом

$$G_5=8=7+5\omega_5+3\omega_5^2+\omega_5^3-\omega_5^4-3\omega_5^5-7\omega_5^7,\quad \omega_5\overset{(10)}{=}-1=-\omega_1. \tag{45}$$

Вычисляя аналогичным образом определители Δ_{42} и Δ_{42k} из (37), (38), находим

$$\Delta_{42k}=e^{-a\omega_2 s x_{2n}}e^{a\omega_k s x_{2n}}\Big[\Delta_{42k,0}+\frac{\Delta_{42k,7}}{s^7}+\frac{\Delta_{42k,8}}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big],\quad k=1,2,\ldots,8; \tag{46}$$

$$\Delta_{42k,0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_k & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 & \omega_k^7 & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{ll} \Delta_{00}, & k = 2; \\ 0, & k = 1, 3, 4, \dots, 8, \end{array} \right. \tag{47}$$

$$\Delta_{42k,7} = \omega_k B_7(x_{2n}) \Delta_{42k,0} = \left[\begin{array}{ll} \Delta_{00} \omega_k B_7(x_{2n}), & k = 2; \\ 0, & k = 1, 3, 4, \dots, 8, \end{array} \right. \tag{48}$$

$$\Delta_{42k,8} = \sum_{n=0}^{7} B_8^0(x_{2n}) \omega_k^n \delta_{n+1,2} \overset{(30)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8} \sum_{n=0}^{7} B_8^n(x_{2n}) \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right) \overset{(10)}{=}$$

$$= \frac{\Delta_{00}}{8} \sum_{n=0}^{7} B_8^n(x_{2n}) \left(\frac{\omega_{k-1}}{\omega_1} \right)^n = \Delta_{00} V_{k-1}, \quad k = 1, 3, 4, \dots, 8, \tag{49}$$

$$\Delta_{422,8} \overset{(49),(43)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8} E_8. \tag{50}$$

При этом $\omega_{k+8} = \omega_k$, $G_{k+8} = G_k$, $V_{k+8} = V_k$, $k = 1, 2, \dots, 8$.

Вычисляя аналогичным образом определители Δ_{43}, Δ_{44}, …, Δ_{48} из (32)–(34), применяя формулы (35)–(50), приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

Теорема 6. *Для определителей* Δ_{4n} $(n = 1, 2, \dots, 8)$ *из* (32)–(34) *справедливы следующие формулы*:

$$\Delta_{4n} = \sum_{k=1}^{8} C_{3k} \Delta_{4nk} = C_{31} \Delta_{4n1} + C_{32} \Delta_{4n2} + \dots + C_{38} \Delta_{4n8}. \tag{51}$$

При этом элементы матрицы

$$\Delta_{4nk} = \begin{pmatrix} \Delta_{411} & \Delta_{412} & \dots & \Delta_{418} \\ \Delta_{421} & \Delta_{422} & \dots & \Delta_{428} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{481} & \Delta_{482} & \dots & \Delta_{488} \end{pmatrix}, \quad n, k = 1, 2, \dots, 8,$$

находятся по следующим формулам:

$$\Delta_{4kk} = e^{a(\omega_k - \omega_k) s x_{2n}} \Delta_{00} \left[1 + \frac{\omega_k B_7(x_{2n})}{s^7} + \frac{E_8}{8 s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9} \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 8; \tag{52}$$

$$\Delta_{4km} = e^{a(\omega_m - \omega_k) s x_{2n}} \Delta_{00} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{V_{m-k+1}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9} \right) \right], \quad m \neq k; \quad V_{m \pm 8} = V_m; \quad k, m = 1, 2, \dots, 8, \tag{53}$$

где числа V_k *определены формулой* (44).

4. Изучение условий склейки (7). Применяя формулы (21) и (16), из условий склейки (7) получаем

$$
\begin{cases}
y_3(x_0+0,s) \overset{(7)}{=} y_2(x_0-0,s) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k} y_{3k}(x_0+0,s) = \\
\qquad\qquad\qquad = \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x_0-0,s); \\
\dfrac{y_3^{(m)}(x_0+0,s)}{(as)^m} \overset{(7)}{=} \dfrac{y_2^{(m)}(x_0-0,s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{3k} \dfrac{y_{3k}^{(m)}(x_0+0,s)}{(as)^m} = \\
\qquad\qquad = \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} \dfrac{y_{2k}^{(m)}(x_0-0,s)}{(as)^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, 7.
\end{cases}
\tag{54}
$$

Из метода Крамера и общей теории свойств решений дифференциального уравнения (3) следует, что система (54) имеет единственное решение, которое представляется в виде

$$
C_{31} = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{03}(s) \neq 0}, \quad C_{32} = \frac{\Delta_{32}}{\Delta_{03}(s)}, \quad \ldots, \quad C_{38} = \frac{\Delta_{38}}{\Delta_{03}(s)}; \tag{55}
$$

$$
\Delta_{03}(s) = \Delta_{03}(x,s) = \begin{vmatrix}
y_{31}(x,s) & y_{32}(x,s) & \ldots & y_{38}(x,s) \\
\dfrac{y_{31}'(x,s)}{as} & \dfrac{y_{32}'(x,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y_{38}'(x,s)}{as} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{y_{31}^{(7)}(x,s)}{(as)^7} & \dfrac{y_{32}^{(7)}(x,s)}{(as)^7} & \ldots & \dfrac{y_{38}^{(7)}(x,s)}{(as)^7}
\end{vmatrix}_{x=x_0\pm 0} \neq 0. \tag{56}
$$

Так как $\Delta_{03}(x,s)$ — определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{3k}(x,s)\}_{k=1}^{8}$ дифференциального уравнения (3), он не зависит от x и не равен нулю. Определители $\Delta_{3k}(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, 8)$ получаются из определителя $\Delta_{03}(x,s)$ из (56) заменой k-го столбца на столбец

$$
\left(\sum_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x_0-0,s) \quad \sum_{k=1}^{8} C_{2k} \frac{y_{2k}'(x_0-0,s)}{as} \quad \ldots \quad \sum_{k=1}^{8} C_{2k} \frac{y_{2k}^{(7)}(x_0-0,s)}{(as)^7} \right)^{\top}. \tag{57}
$$

Применяя формулы (22)–(26), определитель $\Delta_{03}(s)$ из (56) можно представить в виде

$$
\Delta_{03}(s) =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
v_1\left[1 + \dfrac{\omega_1 B_7(x)}{s^7} + \dfrac{B_8^0(x)}{s^8} + \ldots\right] & \ldots & v_8\left[1 + \dfrac{\omega_8 B_7(x)}{s^7} + \dfrac{B_8^0(x)}{s^8} + \ldots\right] \\
\omega_k v_1\left[1 + \dfrac{\omega_1 B_7(x)}{s^7} + \dfrac{B_8^1(x)}{s^8} + \ldots\right] & \ldots & \omega_8 v_8\left[1 + \dfrac{\omega_8 B_7(x)}{s^7} + \dfrac{B_8^1(x)}{s^8} + \ldots\right] \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\omega_k^7 v_1\left[1 + \dfrac{\omega_1 B_7(x)}{s^7} + \dfrac{B_8^7(x)}{s^8} + \ldots\right] & \ldots & \omega_8^7 v_8\left[1 + \dfrac{\omega_8 B_7(x)}{s^7} + \dfrac{B_8^7(x)}{s^8} + \ldots\right]
\end{vmatrix}, \tag{58}
$$

где
$$v_k = e^{a\omega_k sx}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8;$$
$$v_1 v_2 (\ldots) v_8 = e^{a(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_8)sx} = e^0 = 1.$$

Для вычисления определителя $\Delta_{03}(s)$ из (58) вынесем из k-го столбца множитель $v_k = e^{a\omega_k sx}$, затем разложим по столбцам на сумму определителей, получим

$$\Delta_{03}(s) = \Delta_{00} + \frac{\Delta_{03,7}(s)}{s^7} + \frac{\Delta_{03,8}(s)}{s^8} + \underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big), \tag{59}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{03,7}(s) &\overset{(29)}{=} \omega_1 B_7(x)\Delta_{00} + \omega_2 B_7(x)\Delta_{00} + \cdots + \omega_8 B_7(x)\Delta_{00} = \\ &= \Delta_{00} B_7(x) \sum_{k=1}^{8} \omega_k \overset{(12)}{=} 0,\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{03,8}(s) &= B_8^0(x)\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot \delta_{1k} + B_8^1(x)\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k}\omega_k\delta_{2k} + \\ &+ B_8^2(x)\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k-1}\omega_k^2\delta_{3k} + \cdots + B_8^7(x)\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k}\omega_k^7\delta_{8k} \overset{(28)}{=} \\ &= \Delta_{00}\sum_{m=0}^{7} B_8^m(x) \overset{(26)}{=} \Delta_{00}E_8.\end{aligned} \tag{61}$$

Поэтому из формул (59)–(61) следует формула

$$\Delta_{03}(s) = \Delta_{00}\Big[1 + \frac{0}{s^7} + \frac{E_8}{s^8} + \underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big] \neq 0, \quad E_8 \overset{(26)}{=} \frac{-7q_3(x_0)}{2a^8}. \tag{62}$$

Из формул (56), (57) следует формула для вычисления определителя Δ_{31} из (55):

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x_0-0,s) & y_{32}(x_0+0,s) & \ldots & y_{38}(x_0+0,s) \\ \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} \dfrac{y'_{2k}(x_0-0,s)}{as} & \dfrac{y'_{32}(x_0+0,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y'_{38}(x_0+0,s)}{as} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} \dfrac{y^{(7)}_{2k}(x_0-0,s)}{(as)^7} & \dfrac{y^{(7)}_{32}(x_0+0,s)}{(as)^7} & \ldots & \dfrac{y^{(7)}_{38}(x_0+0,s)}{(as)^7} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{k=1}^{8} C_{2k}\Delta_{31k} = C_{21}\Delta_{311} + C_{22}\Delta_{312} + \cdots + C_{28}\Delta_{318}. \tag{63}$$

При этом, применяя формулы (58) и (16), (17), имеем

$$\Delta_{31k} = \\ = \begin{vmatrix} v_k\Big[1+\dfrac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{A_8^0(x_0)}{s^8}+\Big] & \ldots & v_8\Big[1+\dfrac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{B_8^0(x_0)}{s^8}+\ldots\Big] \\ \omega_k v_k\Big[1+\dfrac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{A_8^1(x_0)}{s^8}+\Big] & \ldots & \omega_8 v_8\Big[1+\dfrac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{B_8^1(x_0)}{s^8}+\ldots\Big] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_k^7 v_k\Big[1+\dfrac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{A_8^7(x_0)}{s^8}+\Big] & \ldots & \omega_8^7 v_8\Big[1+\dfrac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7}+\dfrac{B_8^7(x_0)}{s^8}+\ldots\Big] \end{vmatrix},$$

$$v_k = e^{a\omega_k s x_0}, \quad k=1,2,\ldots,8; \quad B_7(x_0) \overset{(24)}{=} 0. \tag{64}$$

Вычисляя определители Δ_{31k} $(k=1,2,\ldots,8)$ из (64) аналогично вычислению определителей Δ_{41k} $(k=1,2,\ldots,8)$ из (36), (39)–(45), получаем

$$\Delta_{31k} = e^{a\omega_k s x_0} e^{-a\omega_1 s x_0}\Big[\Delta_{31k,0}+\frac{\Delta_{31k,7}}{s^7}+\frac{\Delta_{31k,8}}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big], \\ k=1,2,\ldots,8, \tag{65}$$

$$\Delta_{31k,0} = \left[\begin{array}{ll} \Delta_{00}, & k=1; \\ 0, & k=2,3,\ldots,8, \end{array}\right. \qquad \Delta_{31k,7} = \left[\begin{array}{ll} \Delta_{00}\omega_1 A_7(x_0), & k=1; \\ 0, & k=2,3,\ldots,8, \end{array}\right. \tag{66}$$

$$\Delta_{311,8} = e^{a\omega_1 s x_0} e^{-a\omega_1 s x_0}\Big[\sum_{m=0}^{7} A_8^m(x_0)(-1)^m\omega_1^m\delta_{m+1,1}+ \\ +\sum_{m=0}^{7} B_8^m(x_0)\Big(\sum_{n=2}^{8}(-1)^{m+n-1}\omega_n^m\delta_{m+1,n}\Big)\Big] = \frac{\Delta_{00}}{8}[D_8+7E_8],$$

$$D_8 \overset{(20)}{=} \frac{-7q_2(x_{1n})}{2a^8}; \tag{67}$$

$$\Delta_{31k,8} = \frac{\Delta_{00}}{8}\sum_{n=0}^{7}\big[A_7^n(x_0)-B_7^n(x_0)\big]\Big(\frac{\omega_k}{\omega_1}\Big)^n = \Delta_{00}R_k,$$

$$R_k = \frac{1}{128a^8}\Delta\widetilde{q}(x_0)G_k; \quad \Delta\widetilde{q}(x_0) = q_2(x_0-0)-q_3(x_0+0), \\ k=2,3,\ldots,8, \tag{68}$$

где числа G_k определены формулой (44).

Определители Δ_{32}, Δ_{33}, …, Δ_{38} из (55)–(57) выписываются и вычисляются аналогично определителям Δ_{4k} $(k=2,3,\ldots,8)$ из (37), (38), (46)–(53), в результате придем к выводу о справедливости следующей теоремы.

Теорема 7. *Для определителей* Δ_{3n} $(n=1,2,\ldots,8)$ *из* (55)–(57) *справедливы следующие формулы*:

$$\Delta_{3n} = \sum_{k=1}^{8} C_{2k}\Delta_{3nk} = C_{21}\Delta_{3n1}+C_{22}\Delta_{3n2}+\cdots+C_{28}\Delta_{3n8}, \\ n=1,2,\ldots,8. \tag{69}$$

При этом элементы матрицы

$$\Delta_{3nk} = \begin{pmatrix} \Delta_{311} & \Delta_{312} & \dots & \Delta_{318} \\ \Delta_{321} & \Delta_{322} & \dots & \Delta_{328} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{381} & \Delta_{382} & \dots & \Delta_{388} \end{pmatrix}, \quad n, k = 1, 2, \dots, 8,$$

находятся по формулам

$$\begin{gathered} \Delta_{3kk} = \Delta_{00} e^{a(\omega_k - \omega_k)sx_0} \Big[1 + \frac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7} + \frac{H_8}{s^8} + \underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big], \\ H_8 = \frac{D_8 + 7E_8}{8}, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \end{gathered} \tag{70}$$

$$\begin{gathered} \Delta_{3km} = \Delta_{00} e^{a(\omega_m - \omega_k)sx_0} \Big[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{R_{m-k+1}}{s^8} + \underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big], \\ m \neq k; \quad R_{m\pm 8} = R_8, \quad m, k = 1, 2, \dots, 8, \end{gathered} \tag{71}$$

где величины R_k *определены формулой* (68).

Доказательство формул (69)–(71) проводится обобщением формул (63)–(68).

5. Изучение условий склейки (6). Применяя формулы (13) и (15), из условий склейки (6) получаем

$$\begin{cases} y_2(x_{1n} + 0, s) \overset{(6)}{=} y_1(x_{1n} - 0, s) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} y_{2k}(x_{1n} + 0, s) = \\ \qquad = \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x_{1n} - 0, s); \\ \dfrac{y_2^{(m)}(x_{1n} + 0, s)}{(as)^m} \overset{(6)}{=} \dfrac{y_1^{(m)}(x_{1n} - 0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{8} C_{2k} \dfrac{y_{2k}^{(m)}(x_{1n} + 0, s)}{(as)^m} = \\ \qquad = \sum\limits_{k=1}^{8} C_{1k} \dfrac{y_{1k}^{(m)}(x_{1n} - 0, s)}{(as)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, 7. \end{cases} \tag{72}$$

Решая систему (72) методом Крамера, аналогично решению систем (31) и (54), получаем

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s) \neq 0}, \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)}, \quad \dots, \quad C_{28} = \frac{\Delta_{28}}{\Delta_{02}(s)}; \tag{73}$$

$$\Delta_{02}(s) = \Delta_{02}(x, s) = \begin{vmatrix} y_{21}(x, s) & y_{22}(x, s) & \dots & y_{28}(x, s) \\ \dfrac{y'_{21}(x, s)}{as} & \dfrac{y'_{22}(x, s)}{as} & \dots & \dfrac{y'_{28}(x, s)}{as} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{y_{21}^{(7)}(x, s)}{(as)^7} & \dfrac{y_{22}^{(7)}(x, s)}{(as)^7} & \dots & \dfrac{y_{28}^{(7)}(x, s)}{(as)^7} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{74}$$

Определитель $\Delta_{02}(x,s)$ — определитель Вронского фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x,s)\}_{k=1}^{8}$ дифференциального уравнения (2), поэтому он не зависит от x и не равен нулю. Определители Δ_{2k} ($k=1,2,\ldots,8$) получаются из определителя $\Delta_{02}(x,s)$ из (74) заменой k-го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^{8} C_{1k} y_{1k}(x_{1n}-0,s) \quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y'_{1k}(x_{1n}-0,s)}{as} \quad \ldots \quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y_{1k}^{(7)}(x_{1n}-0,s)}{(as)^7}\right)^{\top}. \tag{75}$$

Применяя формулы (16)–(20) и (14), аналогично выводу формул (58)–(71) можно доказать следующее утверждение.

Теорема 8. *Для определителей* Δ_{2n} ($n=1,2,\ldots,8$) *из* (73)–(75) *справедливы следующие формулы*:

$$\Delta_{2n}=\sum_{k=1}^{8} C_{1k}\Delta_{2nk}=C_{11}\Delta_{2n1}+C_{12}\Delta_{2n2}+\cdots+C_{18}\Delta_{2n8}, \quad n=1,2,\ldots,8,$$

при этом элементы матрицы

$$\Delta_{2nk}=\begin{pmatrix}\Delta_{211} & \Delta_{212} & \ldots & \Delta_{218}\\ \Delta_{221} & \Delta_{222} & \ldots & \Delta_{228}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Delta_{281} & \Delta_{282} & \ldots & \Delta_{288}\end{pmatrix}, \quad n,k=1,2,\ldots,8,$$

вычисляются по формулам

$$\Delta_{2kk}=\Delta_{00}e^{a(\omega_k-\omega_k)sx_{1n}}\left[1+\frac{0}{s^7}+\frac{7D_8}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \quad k=1,2,\ldots,8, \tag{76}$$

$$\Delta_{2km}=\Delta_{00}e^{a(\omega_m-\omega_k)sx_{1n}}\left[0+\frac{0}{s^7}+\frac{T_{m-k+1}}{s^8}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right], \quad m\neq k;$$

$$T_k=\frac{-q_2(x_{1n})G_k}{128a^8}, \quad T_{k\pm 8}=T_k; \quad m,k=1,2,\ldots,8, \tag{77}$$

где величины G_k *определены формулами* (44), (45).

6. Изучение граничных условий (9). Из первых шести граничных условий (9) с помощью формул (13), (14) получаем

$$\frac{y_1^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}} \overset{(9)}{=} 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\frac{y_{1k}^{(m_p)}(0,s)}{(as)^{m_p}}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\omega_k^{m_p}e^0=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}\omega_k^{m_p}=0, \quad p=1,2,\ldots,6. \tag{78}$$

Из последних двух граничных условий (9), применяя формулы (27), (28), получаем

$$\frac{y_4^{(n_p)}(\pi,s)}{(as)^{n_p}} \overset{(9)}{=} 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{8} C_{4k}\frac{y_{4k}^{(n_p)}(\pi,s)}{(as)^{n_p}}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} C_{4k}\omega_k^{n_p} e^{a\omega_k s\pi} = 0, \quad p = 1, 2. \tag{79}$$

Применяя формулы (32) и (51)–(53), из (79) выводим, что

$$\frac{y_4^{(n_p)}(\pi, s)}{(as)^{n_p}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} \frac{\Delta_{4k}}{\Delta_{04}(s)}\omega_k^{n_p} e^{a\omega_k s\pi} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta_{04}(s)} \sum_{k=1}^{8} \left(\sum_{n=1}^{8} C_{3n}\Delta_{4kn} \right) \omega_k^{n_p} e^{a\omega_k s\pi} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} C_{3k}\psi_{3k,n_p}(\pi, s) = 0, \quad p = 1, 2, \tag{80}$$

где $\Delta_{04}(s) \neq 0$ и введены обозначения

$$\psi_{3k,n_p}(\pi, s) = \sum_{n=1}^{8} \Delta_{4kn}\omega_n^{n_p} e^{a\omega_n s\pi}, \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad p = 1, 2. \tag{81}$$

Подставляя формулы (55) и (69)–(71) в формулу (80), получаем

$$\frac{y_4^{(n_p)}(\pi, s)}{(as)^{n_p}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} \frac{\Delta_{3k}}{\Delta_{03}(s)}\psi_{3k,n_p}(\pi, s) = 0, \quad \Delta_{03}(s) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta_{03}(s)} \sum_{k=1}^{8} \left(\sum_{n=1}^{8} C_{2n}\Delta_{3kn} \right) \psi_{3k,n_p}(\pi, s) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} C_{2k}\phi_{2k,n_p}(\pi, s) = 0, \tag{82}$$

$$\phi_{2k,n_p}(\pi, s) = \sum_{n=1}^{8} \Delta_{3kn}\psi_{3n,n_p}(\pi, s), \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad p = 1, 2. \tag{83}$$

Применяя формулы (73) и (76), (77), из (82) находим

$$\frac{y_4^{(n_p)}(\pi, s)}{(as)^{n_p}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s)}\phi_{2k,n_p}(\pi, s) = 0, \quad \Delta_{02}(s) \neq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\Delta_{02}(s)} \sum_{k=1}^{8} \left(\sum_{n=1}^{8} C_{1n}\Delta_{2kn} \right) \phi_{2k,n_p}(\pi, s) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{8} C_{1k}u_{1k,n_p}(\pi, s) = 0, \tag{84}$$

$$u_{1k,n_p}(\pi, s) = \sum_{n=1}^{8} \Delta_{2kn}\phi_{2n,n_p}(\pi, s), \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad p = 1, 2.$$

Объединяя (78) и (84) в одну систему, получим систему из восьми однородных уравнений с восемью неизвестными $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{18}$, которая имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 9. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(8) *с граничными условиями* (9) *имеет следующий вид*:

$$f(s) = \\ = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \ldots & \omega_7^{m_1} & \omega_8^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \ldots & \omega_7^{m_2} & \omega_8^{m_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^{m_6} & \omega_2^{m_6} & \omega_3^{m_6} & \ldots & \omega_7^{m_6} & \omega_8^{m_6} \\ u_{11,n_1}(\pi,s) & u_{12,n_1}(\pi,s) & u_{13,n_1}(\pi,s) & \ldots & u_{17,n_1}(\pi,s) & u_{18,n_1}(\pi,s) \\ u_{11,n_2}(\pi,s) & u_{12,n_2}(\pi,s) & u_{13,n_2}(\pi,s) & \ldots & u_{17,n_2}(\pi,s) & u_{18,n_2}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \tag{85}$$

$$u_{1k,n_p}(\pi,s) = \sum_{n=1}^{8} \Delta_{2kn}\phi_{2n,n_p}(\pi,s) \overset{(83)}{=} \sum_{n=1}^{8} \Delta_{2nk}\left(\sum_{m=1}^{8} \Delta_{3mn}\phi_{3m,n_p}(\pi,s)\right). \tag{86}$$

Применяя формулы (70), (71) и (78), (77), оставляя только главные по росту s величины, проводя оценки величин с точностью до $\underline{O}(s^{-8})$, в формуле (86) имеем

$$u_{1k,n_p}(\pi,s) = \Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\psi_{3k,n_p} + \Delta_{2kk}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{8} \Delta_{3mk}\psi_{3m,n_p}(\pi,s) + \\ + \Delta_{3kk}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{8} \Delta_{2mk}\psi_{3m,n_p}(\pi,s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{16}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 8; \quad p = 1, 2. \tag{87}$$

Подставляя в формулу (87) формулу для $\psi_{3m,n_p}(\pi,s)$ из (81) и оставляя только главные по росту s величины, получаем

$$u_{1k,n_p}(\pi,s) = \Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\Delta_{4kk}\omega_k^{n_p}e^{a\omega_k s\pi} + \\ + \Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{8} \Delta_{4mk}\omega_m^{n_p}e^{a\omega_m s\pi} + \Delta_{2kk}\Delta_{4kk}\sum_{m=1}^{8} \Delta_{3mk}\omega_m^{n_p}e^{a\omega_m s\pi} + \\ + \Delta_{3kk}\Delta_{4kk}\sum_{m=1}^{8} \Delta_{2mk}\omega_m^{n_p}e^{a\omega_m s\pi} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^{16}}\right), \; k = 1, 2, \ldots, 8; \quad p = 1, 2. \tag{88}$$

В формуле (88) первое слагаемое — величина порядка $\underline{O}(1)$, второе, третье и четвертое слагаемое — величины порядка $\underline{O}(s^{-8})$.

Применяя теорему Лапласа, разложим определитель $f(s)$ из (85) по последним двум строкам и получим

$$f(s)=\begin{vmatrix}u_{11,n_1}(\pi,s) & u_{12,n_1}(\pi,s)\\ u_{11,n_2}(\pi,s) & u_{12,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix} D_{345678}+\begin{vmatrix}u_{12,n_1}(\pi,s) & u_{13,n_1}(\pi,s)\\ u_{12,n_2}(\pi,s) & u_{13,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix} D_{145678}+$$
$$+\begin{vmatrix}u_{13,n_1}(\pi,s) & u_{14,n_1}(\pi,s)\\ u_{13,n_2}(\pi,s) & u_{14,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix} D_{125678}+\cdots-$$
$$-\begin{vmatrix}u_{11,n_1}(\pi,s) & u_{13,n_1}(\pi,s)\\ u_{11,n_2}(\pi,s) & u_{13,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix} D_{245678}+\cdots=0, \quad (89)$$

$$D_{k_1k_2k_3k_4k_5k_6}=\begin{vmatrix}\omega_{k_1}^{m_1} & \omega_{k_2}^{m_1} & \dots & \omega_{k_6}^{m_1}\\ \omega_{k_1}^{m_2} & \omega_{k_2}^{m_2} & \dots & \omega_{k_6}^{m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_{k_1}^{m_6} & \omega_{k_2}^{m_6} & \dots & \omega_{k_6}^{m_6}\end{vmatrix};$$

$$D_{123456}=\begin{vmatrix}\omega_{1}^{m_1} & \omega_{2}^{m_1} & \dots & \omega_{6}^{m_1}\\ \omega_{1}^{m_2} & \omega_{2}^{m_2} & \dots & \omega_{6}^{m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_{1}^{m_6} & \omega_{2}^{m_6} & \dots & \omega_{6}^{m_6}\end{vmatrix} \overset{(10)}{=} \begin{vmatrix}1^{m_1} & z^{m_1} & \dots & z^{5m_1}\\ 1^{m_2} & z^{m_2} & \dots & z^{5m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1^{m_6} & z^{m_6} & \dots & z^{5m_6}\end{vmatrix}=$$
$$=\det \mathrm{Wandermond's}(z^{m_1},z^{m_2},\dots,z^{m_6})=$$
$$=\prod_{\substack{k>n,\\ k,n=1,2,\dots,8}}(z^{m_k}-z^{m_n})=D_6\neq 0; \quad (90)$$

$$D_{234567}=\begin{vmatrix}\omega_{2}^{m_1} & \omega_{3}^{m_1} & \dots & \omega_{7}^{m_1}\\ \omega_{2}^{m_2} & \omega_{3}^{m_2} & \dots & \omega_{7}^{m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_{2}^{m_6} & \omega_{3}^{m_6} & \dots & \omega_{7}^{m_6}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z^{m_1} & z^{2m_1} & \dots & z^{6m_1}\\ z^{m_2} & z^{2m_2} & \dots & z^{6m_2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ z^{m_6} & z^{2_6} & \dots & z^{6m_6}\end{vmatrix}=$$
$$=z^{m_1}z^{m_2}(\dots)z^{m_6}D_{123456}=z^{M_6}D_6, \quad M_6=\sum_{k=1}^{6}m_k; \quad D_{345678}=z^{2M_6}D_6;$$

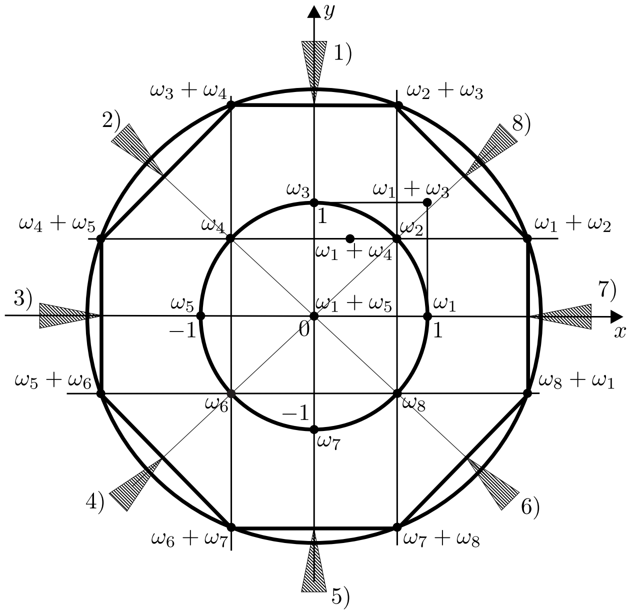
$$D_{456789}=D_{456781}=-D_{145678}=(-1)z^{3M_6}D_6; \quad D_{124567}=z^{4M_6}D_6; \quad \dots \quad (91)$$

Подставляя формулы (90), (91) в уравнение (89), поделим на $z^{2M_6}D_6\neq 0$, получим

$$f(s)=\begin{vmatrix}u_{11,n_1}(\pi,s) & u_{12,n_1}(\pi,s)\\ u_{11,n_2}(\pi,s) & u_{12,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix} - z^{M_6}\begin{vmatrix}u_{12,n_1}(\pi,s) & u_{13,n_1}(\pi,s)\\ u_{12,n_2}(\pi,s) & u_{13,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix}+$$
$$+z^{2M_6}\begin{vmatrix}u_{13,n_1}(\pi,s) & u_{14,n_1}(\pi,s)\\ u_{13,n_2}(\pi,s) & u_{14,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix}-\cdots-$$
$$-\begin{vmatrix}u_{11,n_1}(\pi,s) & u_{13,n_1}(\pi,s)\\ u_{11,n_2}(\pi,s) & u_{13,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix} D_{245678}+\cdots=0, \quad (92)$$

величины $u_{1k,n_p}(\pi,s)$ определены формулой (88).

Для нахождения корней уравнения (92) необходимо изучить индикаторную диаграмму (см. [9, гл. 12]) этого уравнения, т. е. выпуклую оболочку множества точек $\{\omega_k+\omega_m,\ k\neq m;\ k,m=1,2,\dots,8\}$.



Индикаторная диаграмма уравнения (92)
[The indicator diagram for Eq. (92)]

Индикаторная диаграмма уравнения (92) имеет следующий вид (см. рисунок). Индикаторная диаграмма показывает, что на асимптотику корней уравнения (92) влияют экспоненты с показателями $\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3$, $\ldots$, $\omega_7+\omega_8$, $\omega_8+\omega_1$; экспоненты с показателями $\omega_1+\omega_3$, $\omega_1+\omega_4$, $\ldots$, $\omega_m+\omega_n$ при $|m-n|\geqslant 2$ на асимптотику корней уравнения (92) не влияют (они представляют собой бесконечно малые величины, их можно отбросить).

7. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы. Чтобы найти асимптотику корней уравнения (92) в секторе 1), необходимо оставить экспоненты с показателями $\omega_2+\omega_3$ и $\omega_3+\omega_4$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(8) *с граничными условиями* (9) *в секторе* 1) *индикаторной диаграммы имеет вид*

$$g_1(s)=\begin{vmatrix}u_{12,n_1}(\pi,s) & u_{13,n_1}(\pi,s)\\ u_{12,n_2}(\pi,s) & u_{13,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix}+z^{M_6}\begin{vmatrix}u_{13,n_1}(\pi,s) & u_{14,n_1}(\pi,s)\\ u_{13,n_2}(\pi,s) & u_{14,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix}=0, \quad (93)$$

величины $u_{1k,n_p}(\pi,s)$ *определены формулой* (88).

Поделим (93) на $z^{M_6}\neq 0$ и, используя свойства определителей, перепишем уравнение (93) в виде

$$g_1(s)=\begin{vmatrix}u_{13,n_1}(\pi,s) & z^{M_6}u_{14,n_1}(\pi,s)+u_{12,n_1}(\pi,s)\\ u_{13,n_2}(\pi,s) & z^{M_6}u_{14,n_2}(\pi,s)+u_{12,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix}=0, \quad (94)$$

причем, оставляя главные по росту s для сектора 1) величины, из (88) и рисунка имеем

$$u_{1k,n_1}(\pi,s)=\Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\Delta_{4kk}\omega_k^{n_p}e^{a\omega_k s\pi}+\frac{\phi_{1k,n_p}(\pi,s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big),\qquad k=2,3,4; \tag{95}$$

$$\begin{aligned}\phi_{13,n_p}(\pi,s)&=\omega_2^{n_p}e^{a\omega_2 s\pi}[\Delta_{233}\Delta_{333}\Delta_{423}+\Delta_{233}\Delta_{422}\Delta_{323}+\Delta_{322}\Delta_{422}\Delta_{223}]+\\&+\omega_4^{n_p}e^{a\omega_4 s\pi}[\Delta_{233}\Delta_{333}\Delta_{443}+\Delta_{233}\Delta_{444}\Delta_{343}+\Delta_{344}\Delta_{444}\Delta_{243}],\\\phi_{14,n_p}(\pi,s)&=\omega_3^{n_p}e^{a\omega_3 s\pi}[\Delta_{244}\Delta_{344}\Delta_{434}+\Delta_{244}\Delta_{433}\Delta_{334}+\Delta_{333}\Delta_{433}\Delta_{234}]+\\&+\omega_2^{n_p}e^{a\omega_2 s\pi}[\Delta_{244}\Delta_{344}\Delta_{424}+\Delta_{244}\Delta_{422}\Delta_{324}+\Delta_{322}\Delta_{422}\Delta_{224}],\\\phi_{12,n_p}(\pi,s)&=\omega_3^{n_p}e^{a\omega_3 s\pi}[\Delta_{222}\Delta_{322}\Delta_{432}+\Delta_{222}\Delta_{433}\Delta_{332}+\Delta_{333}\Delta_{433}\Delta_{232}]+\\&+\omega_4^{n_p}e^{a\omega_4 s\pi}[\Delta_{222}\Delta_{322}\Delta_{442}+\Delta_{222}\Delta_{444}\Delta_{342}+\Delta_{344}\Delta_{444}\Delta_{242}],\\&\qquad p=1,2,\end{aligned} \tag{96}$$

при этом из формул (76), (70) и (52) получаем

$$\Delta_{2kk}\Delta_{3kk}\Delta_{4kk}=\Big[1+\frac{7D_8}{8s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\Big[1+\frac{\omega_kA_7(x_0)}{s^7}+\frac{H_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\times\\\times\Big[1+\frac{\omega_kB_7(x_{2n})}{s^7}+\frac{E_8}{8s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]=1+\frac{\omega_kP_7}{s^8}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big); \tag{97}$$

$$P_7=A_7(x_0)+B_7(x_{2n});\quad P_8=\frac{7D_8}{8}+H_8+\frac{E_8}{8}=D_8+E_8;$$

$$H_8\overset{(70)}{=}\frac{D_8+7E_8}{8};\quad D_8\overset{(20)}{=}\frac{-7q_2(x_{1n})}{2a^8};\quad E_8\overset{(26)}{=}\frac{-7q_3(x_0)}{2a^8};\quad k=1,2,\dots,8.$$

С помощью формул (95)–(97) уравнение (94) запишем в виде

$$g_1(s)=\begin{vmatrix}a_{11}(s)&a_{12}(s)\\a_{21}(s)&a_{22}(s)\end{vmatrix}=0, \tag{98}$$

где

$$a_{11}(s)=\Big[1+\frac{\omega_3P_7}{s^7}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\omega_3^{n_1}e^{a\omega_3 s\pi}+\frac{\phi_{13,n_1}(\pi,s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big),$$

$$a_{12}(s)=z^{M_6}\Big[1+\frac{\omega_4P_7}{s^7}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\omega_4^{n_1}e^{a\omega_4 s\pi}+\\+\Big[1+\frac{\omega_2P_7}{s^7}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}+\frac{\phi_{21,n_1}(\pi,s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big),$$

$$a_{21}(s)=\Big[1+\frac{\omega_3P_7}{s^7}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\omega_3^{n_2}e^{a\omega_3 s\pi}+\frac{\phi_{13,n_2}(\pi,s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big),$$

$$a_{22}(s)=z^{M_6}\Big[1+\frac{\omega_4P_7}{s^7}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\omega_4^{n_2}e^{a\omega_4 s\pi}+$$

$$+\Big[1+\frac{\omega_2 P_7}{s^7}+\frac{P_8}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)\Big]\omega_2^{n_2}e^{a\omega_2 s\pi}+\frac{\phi_{21,n_2}(\pi,s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big);$$

$$\phi_{21,n_p}(\pi,s)=z^{M_6}\phi_{14,n_p}(\pi,s)+\phi_{12,n_p}(\pi,s),\quad p=1,2. \tag{99}$$

Раскладывая уравнение (98) по столбцам на сумму определителей, получаем

$$g_1(s)=g_{1,0}(s)+\frac{g_{1,7}(s)}{s^7}+\frac{g_{1,8}(s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)=0, \tag{100}$$

$$g_{1,0}(s)=\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1}e^{a\omega_3 s\pi} & z^{M_6}\omega_4^{n_1}e^{a\omega_4 s\pi}+\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}\\ \omega_3^{n_2}e^{a\omega_3 s\pi} & z^{M_6}\omega_4^{n_2}e^{a\omega_4 s\pi}+\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}\end{vmatrix}=$$
$$=z^{M_6}\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2}\end{vmatrix}e^{a(\omega_3+\omega_4)s\pi}+\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_2^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_2^{n_2}\end{vmatrix}e^{a(\omega_2+\omega_3)s\pi};$$

$$g_{1,7}(s)=\omega_3 P_7\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1}e^{a\omega_3 s\pi} & z^{M_6}\omega_4^{n_1}e^{a\omega_4 s\pi}+\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}\\ \omega_3^{n_2}e^{a\omega_3 s\pi} & z^{M_6}\omega_4^{n_2}e^{a\omega_4 s\pi}+\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}\end{vmatrix}+$$
$$+\omega_4 P_7\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2}\end{vmatrix}z^{M_6}e^{a(\omega_3+\omega_4)s\pi}+\omega_4 P_7\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_2^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_2^{n_2}\end{vmatrix}e^{a(\omega_2+\omega_3)s\pi};$$

$$g_{1,8}(s)=g_{1,8,1}(s)+g_{1,8,2}(s),$$
$$g_{1,8,1}(s)=P_8\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1}e^{a\omega_3 s\pi} & z^{M_6}\omega_4^{n_1}e^{a\omega_4 s\pi}+\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}\\ \omega_3^{n_2}e^{a\omega_3 s\pi} & z^{M_6}\omega_4^{n_2}e^{a\omega_4 s\pi}+\omega_2^{n_1}e^{a\omega_2 s\pi}\end{vmatrix}+$$
$$+P_8\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2}\end{vmatrix}z^{M_6}e^{a(\omega_3+\omega_4)s\pi}+P_8\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_2^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_2^{n_2}\end{vmatrix}e^{a(\omega_2+\omega_3)s\pi},$$
$$g_{1,8,2}(s)=\begin{vmatrix}\phi_{13,n_1}(\pi,s) & \omega_4^{n_1}\\ \phi_{13,n_2}(\pi,s) & \omega_4^{n_2}\end{vmatrix}z^{M_6}e^{a\omega_4 s\pi}+\begin{vmatrix}\phi_{13,n_1}(\pi,s) & \omega_2^{n_1}\\ \phi_{13,n_2}(\pi,s) & \omega_2^{n_2}\end{vmatrix}e^{a\omega_2 s\pi}+$$
$$+\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \phi_{21,n_1}(\pi,s)\\ \omega_3^{n_2} & \phi_{21,n_2}(\pi,s)\end{vmatrix}e^{a\omega_3 s\pi};$$
$$\phi_{21,n_p}(\pi,s)\overset{(99)}{=}z^{M_6}\phi_{14,n_p}(\pi,s)+\phi_{12,n_p}(\pi,s);\quad p=1,p=2. \tag{101}$$

Из формул (10) следует, что

$$\begin{vmatrix}\omega_1^{n_1} & \omega_2^{n_1}\\ \omega_1^{n_2} & \omega_2^{n_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1^{n_1} & z^{n_1}\\ 1^{n_2} & z^{n_2}\end{vmatrix}=z^{n_2}-z^{n_1}=R_2\neq 0;$$
$$\begin{vmatrix}\omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1}\\ \omega_2^{n_2} & \omega_3^{n_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z^{n_1} & z^{2n_1}\\ z^{n_2} & z^{2n_2}\end{vmatrix}=z^{N_2}R_2,\quad N_2=n_1+n_2; \tag{102}$$
$$\begin{vmatrix}\omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1}\\ \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2}\end{vmatrix}=z^{2N_2}R_2,\quad \ldots .$$

Подставляя формулы (102) в уравнение (100), поделим полученное уравнение на $(-1)z^{N_2}R_2e^{a(\omega_4+\omega_3)s\pi}\neq 0$:

$$\widetilde{g}_1(s)=\widetilde{g}_{1,0}(s)+\frac{\widetilde{g}_{1,7}(s)}{s^7}+\frac{\widetilde{g}_{1,8,1}(s)}{s^8}+\frac{\widetilde{g}_{1,8,2}(s)}{s^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^9}\Big)=0, \tag{103}$$

$$\widetilde{g}_{1,0}(s)=e^{a(\omega_2-\omega_4)s\pi}-z^{M_6}z^{N_2},$$

$$\widetilde{g}_{1,7}(s)=P_7[(\omega_2+\omega_3)e^{a(\omega_2-\omega_4)s\pi}-(\omega_3+\omega_4)z^{M_6}z^{N_2}];$$

$$\widetilde{g}_{1,8,1}(s)=P_8\cdot 2\cdot[e^{a(\omega_2-\omega_4)s\pi}-z^{M_6}z^{N_2}],$$

$$\widetilde{g}_{1,8,2}(s)=(-1)z^{-N_2}\frac{1}{R_2}e^{-a(\omega_3+\omega_4)s\pi}g_{1,8,2}(s).$$

Основное приближение уравнения (103) имеет вид

$$\widetilde{q}_{1,0}(s)=0\quad\Leftrightarrow\quad e^{a(\omega_2-\omega_4)s\pi}-z^{M_6}z^{N_2}=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{a(\omega_2-\omega_4)s\pi}=e^{2\pi ik}e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{2\pi i}{8}N_2}\quad\Leftrightarrow\quad s_{k,1,\text{осн}}=\frac{2i\widetilde{k}}{a(\omega_2-\omega_4)}, \tag{104}$$

$$\widetilde{k}=k+\frac{M_6+N_2}{8},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Из общей теории нахождения асимптотики корней квазиполиномов вида (103) (см. [21, гл. 12; 22]) следует вид асимптотики. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(8) *с граничными условиями* (9) *в секторе* 1) *имеет вид*

$$s_{k,1}=\frac{2i}{a(\omega_2-\omega_4)}\Big[\widetilde{k}+\frac{d_{7k,1}}{\widetilde{k}^7}+\frac{d_{8k,1}}{\widetilde{k}^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\Big)\Big], \tag{105}$$

$$\widetilde{k}=k+\frac{M_6+N_2}{8},\quad M_6=\sum_{k=1}^{6}m_k;\quad N_2=n_1+n_2;$$

$$\omega_2=n_1+n_2;\quad \omega_2-\omega_4\overset{(10)}{=}\sqrt{2};\quad k\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Применяя формулу Тейлора, подставляя $s_{k,1}$ из (105) в уравнение (103), получаем

$$\begin{gathered}\Big[1+\frac{2\pi id_{7k,1}}{\widetilde{k}^7}+\frac{2\pi id_{8k,1}}{\widetilde{k}^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\Big)\Big]z^{M_6}z^{N_2}-z^{M_6}z^{N_2}+\\ +\frac{1}{\widetilde{k}^7}\frac{a^7(\omega_2-\omega_4)^7}{2^7i^7}\Big(1+\underline{O}\Big(\frac{1}{\widetilde{k}^8}\Big)\Big)P_7\Big[(\omega_2+\omega_3)z^{M_6}z^{N_2}\Big(1+\underline{O}\Big(\frac{1}{\widetilde{k}^7}\Big)\Big)-\\ -(\omega_3+\omega_4)z^{M_6}z^{N_2}\Big]+\frac{1}{\widetilde{k}^8}2P_8\Big[z^{M_6}z^{N_2}\Big(1+\underline{O}\Big(\frac{1}{\widetilde{k}^7}\Big)\Big)-z^{M_6}z^{N_2}\Big]-\\ -\frac{1}{\widetilde{k}^8}z^{-N_2}\frac{1}{R_2}e^{-a(\omega_3+\omega_4)s\pi}\Big|_{s_{k,1}}g_{1,8,2}(s)\Big|_{s_{k,1}}\frac{a^8(\omega_2-\omega_4)^8}{2^8i^8}+\underline{O}\Big(\frac{1}{\widetilde{k}^9}\Big)=0.\end{gathered} \tag{106}$$

Приравнивая в уравнении (106) коэффициенты при $\widetilde{k}^0$, получаем верное равенство

$$z^{M_6} z^{N_2} - z^{N_6} z^{N_2} = 0,$$

что свидетельствует о правильности выбора асимптотики (105).

При $\widetilde{k}^{-7}$ в (106) имеем

$$d_{7k,1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{P_7 a^7 (\omega_2 - \omega_4)^7}{2^7 i^7} [(\omega_3 + \omega_4) - (\omega_2 + \omega_3)] = \\ = \frac{(-1) P_7 a^7 (\omega_2 - \omega_4)^8}{2^8 \pi} \overset{(97)}{=} \frac{(-1) a^7 (\omega_2 - \omega_4)^8}{2^8 \pi} [A_7(x_0) + B_7(x_{2n})],$$

откуда, применяя формулы (10), (18), и (24), находим

$$d_{7k,1} = \frac{(-1) a^7 (\sqrt{2})^7}{2^8 \pi} \Big(-\frac{1}{8a^7} \Big) \bigg[\int_{x_{1n}}^{x_0} q_2(t) dt + \int_{x_0}^{x_{2n}} q_3(t) dt \bigg] = \\ = \frac{1}{128\pi} \bigg[\int_{x_{1n}}^{x_0} q_2(t) dt + \int_{x_0}^{x_{2n}} q_3(t) dt \bigg] \overset{(5)}{=} \\ = \frac{H_{1n} + H_{2n}}{128\pi} \overset{(5)}{=} \frac{1}{128\pi}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \quad (107)$$

В предельном случае (при $n \to +\infty$, в случае, когда потенциалом изучаемого оператора является дельта-функция), получаем

$$\lim_{n \to +\infty} d_{7k,1}(n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{128\pi} \bigg[\int_{x_{1n}}^{x_0} q_2(t) dt + \int_{x_0}^{x_{2n}} q_3(t) dt \bigg] \overset{(5)}{=} \\ = \frac{H_{1n} + H_{2n}}{128\pi} \overset{(5)}{=} \frac{1}{128\pi}.$$

При $\widetilde{k}^{-8}$ в (106) получаем

$$d_{8k,1} = \frac{a^8 (\omega_2 - \omega_4)^8}{2^8 2\pi i} \Big[2P_8(-1+1) + \\ + z^{-M_6} z^{-2N_2} R_2^{-1} e^{-a(\omega_3 + \omega_4) s\pi} g_{1,8,2}(s) \big|_{s_{k,1,\text{осн}}} \Big] = \\ = \frac{z^{-M_6} z^{-2N_2} R_2^{-1} a^8}{2^4 2\pi i} e^{-a(\omega_3 + \omega_4) s\pi} \big|_{s_{k,1,\text{осн}}} g_{1,8,2}(s) \big|_{s_{k,1,\text{осн}}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \quad (108)$$

Применяя формулы (101), (96), (76), (70) и (52), формулу (108) можно переписать следующим образом:

$$d_{8k,1} = \frac{a^8}{2\pi i} \frac{z^{-M_6} z^{-2N_2}}{16} \frac{1}{R_2} \times \\ \times \left[e^{a(\omega_2 - \omega_4) s\pi} \begin{vmatrix} \omega_3^{n_1} & \omega_2^{n_1} \sum_{m=2}^4 \Delta_{m24} \\ \omega_3^{n_2} & \omega_2^{n_2} \sum_{m=2}^4 \Delta_{m24} \end{vmatrix} z^{M_6} + \begin{vmatrix} \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} \sum_{m=2}^4 \Delta_{m42} \\ \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2} \sum_{m=2}^4 \Delta_{m42} \end{vmatrix} \right] \Bigg|_{s_{k,1,\text{осн}}} =$$

$$= \frac{a^8}{2\pi i}\frac{z^{-M_6}z^{-2N_2}}{16}\frac{1}{R_2}\Big[z^{M_6}z^{N_2}z^{M_6}\sum_{m=2}^{4}\Delta_{m24}(-1)z^{N_2}R_2+ \\ +\sum_{m=2}^{4}\Delta_{m42}z^{2N_2}R_2\Big]\Big|_{s_{k,1,\text{осн}}},$$

откуда, используя формулы (77), (71) и (53), находим $d_{8k,1}$:

$$d_{8k,1} = \frac{a^8}{32\pi i}\big[z^{-M_6}(\Delta_{242}+\Delta_{342}+\Delta_{442}) - z^{-M_6}(\Delta_{224}+\Delta_{324}+\Delta_{424})\big]\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} = \\ = \frac{a^8}{32\pi i}\big\{[z^{-M_6}e^{a(\omega_2-\omega_4)sx_{1n}}T_7 - z^{-M_6}e^{-a(\omega_2-\omega_4)sx_{1n}}T_3]+ \\ +[z^{-M_6}e^{a(\omega_2-\omega_4)sx_0}R_7 - z^{-M_6}e^{-a(\omega_2-\omega_4)sx_0}R_3]+ \\ +[z^{-M_6}e^{a(\omega_2-\omega_4)sx_{2n}}V_7 - z^{M_6}e^{-a(\omega_2-\omega_4)sx_{2n}}V_3]\big\}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}, \quad (109)$$

$$T_k \overset{(77)}{=} \frac{-q_2(x_{1n})G_k}{128a^8}; \quad R_k \overset{(68)}{=} \frac{\Delta\widetilde{q}(x_0)G_k}{128a^8}; \quad V_k \overset{(44)}{=} \frac{q_3(x_{2n})G_k}{128a^8};$$

$$G_3 \overset{(44)}{=} 7+5\omega_3+3\omega_3^2+\omega_3^3-\omega_3^4-3\omega_3^5-5\omega_3^6-7\omega_3^7 = 8+8i = 8\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad (110)$$

$$G_7 = \bar{G}_3 = 8\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}; \quad e^{a(\omega_2-\omega_4)sx_0}\big|_{s_{k,1,\text{осн}}} \overset{(104)}{=} e^{2\widetilde{k}x_0 i}.$$

Поэтому, подставив (110) в (109) и сделав необходимые преобразования, получим

$$d_{8k,1} = \frac{a^8}{32\pi i}\frac{8\sqrt{2}}{128a^8}\big\{\big[e^{-\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{-\pi i}{4}}e^{2\widetilde{k}x_{1n}i} - e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{-2\widetilde{k}x_{1n}i}\big](-q_2(x_{1n})) + \\ +\big[e^{-\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{-\pi i}{4}}e^{2\widetilde{k}x_0 i} - e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{-2\widetilde{k}x_0 i}\big]\Delta\widetilde{q}(x_0) + \\ +\big[e^{-\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{-\pi i}{4}}e^{2\widetilde{k}x_{2n}i} - e^{\frac{2\pi i}{8}M_6}e^{\frac{\pi i}{4}}e^{-2\widetilde{k}x_{2n}i}\big]q_3(x_{2n})\big\}, \quad k\in\mathbb{N},$$

откуда находим

$$d_{8k,1} = \frac{\sqrt{2}}{256\pi}\Big\{q(x_{2n})\sin\Big(2\widetilde{k}x_{2n} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\Big) + \\ +\Delta\widetilde{q}(x_0)\sin\Big(2\widetilde{k}x_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\Big) - \\ -q_2(x_{1n})\sin\Big(2\widetilde{k}x_{1n} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi M_6}{4}\Big)\Big\}, \quad k=1,2,3,\dots; \widetilde{k} = k+\frac{M_6+N_2}{8}; \quad (111)$$

$$M_6 = \sum_{k=1}^{6} m_k; \quad N_2 = n_1+n_2; \quad \Delta\widetilde{q}(x_0) = q_2(x_0-0) - q_3(x_0+0).$$

Формулы (107) и (111) показывают, что коэффициенты $d_{7k,1}$ и $d_{8k,1}$ асимптотического разложения (105) находятся единственным образом. Мы привели явные формулы для их вычисления, поэтому теорема 11 полностью доказана. □

Изучая аналогичным образом секторы 2), 3), ..., 8) индикаторной диаграммы (см. рисунок), можно доказать следующую теорему.

Теорема 12. *В секторах* 2), 3), ..., 8) *индикаторной диаграммы асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(8) *с граничными условиями* (9) *подчиняется следующему закону*:

$$s_{k,2} = s_{k,1}e^{\frac{2\pi i}{8}}, \quad s_{k,3} = s_{k,2}e^{\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1}e^{\frac{4\pi i}{8}}, \quad \dots,$$
$$s_{k,m} = s_{k,m-1}e^{\frac{2\pi i}{8}} = e^{\frac{2\pi i}{8}(m-1)}, \quad m = 1, 2, \dots, 8.$$

Величины $s_{k,1}$ $(k = 1, 2, \dots, 8)$ *определены формулами* (105), (107), (111). *При этом*

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^8, \quad m = 1, 2, \dots 8; \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // *Матем. заметки*, 1977. Т. 22, № 5. С. 679–698.
2. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1986. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
3. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986. № 6. С. 3–6.
4. Митрохин С. И. О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом // *Диффер. уравн.*, 1986. Т. 22, № 6. С. 927–931.
5. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // *Докл. РАН*, 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
6. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // *Диффер. уравн.*, 1998. Т. 34, № 10. С. 1423–1426.
7. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009. № 3. С. 14–17.
8. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // *Уфимск. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 4. С. 95–115.
9. Митрохин С. И. Спектральные свойства краевых задач для функционально-дифференциального уравнения с суммируемыми коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 8. С. 1085–1093.
10. Митрохин С. И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2019. Т. 25, № 1. С. 136–149. `https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-136-149`.

11. Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // *Матем. заметки*, 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912. https://doi.org/10.4213/mzm1234.
12. Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // *УМН*, 2000. Т. 55, № 6(336). С. 155–156. https://doi.org/10.4213/rm352.
13. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // *Диффер. уравн.*, 2002. Т. 38, № 6. С. 735–751.
14. Борисов Д. И. О лакунах в спектре Лапласиана в полосе с периодическим дельта-взаимодействием / Тр. ИММ УрО РАН, Т. 24, 2018. С. 46–53. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-46-53.
15. Конечная Н. Н., Сафонова Т. А., Тагирова Р. Н. Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // *Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Сер. Естественные науки*, 2016. № 1. https://doi.org/10.17238/issn2227-6572.2016.1.104.
16. Кочубей А. Н. Эллиптические операторы с граничными условиями на подмножестве меры нуль // *Функц. анализ и его прил.*, 1982. Т. 16, № 2. С. 74–75.
17. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // *Докл. АН СССР*, 1961. Т. 137, № 5. С. 1011–1014.
18. Гейлер В. А., Маргулис В. А., Чучаев И. И. Потенциалы нулевого радиуса и операторы Карлемана // *Сиб. матем. журн.*, 1995. Т. 36, № 4. С. 828–841.
19. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
20. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // *Изв. вузов. Матем.*, 2018. № 6. С. 31–47.
21. Беллман Р., Кук К. Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир, 1967. 548 с.
22. Садовничий В. А., Любишкин В. А. О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов // *Диффер. уравн.*, 1982. Т. 18, № 1. С. 109–116.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 634–662
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1798

MSC: 34B10, 47E05

On the asymptotics of spectrum of an even-order differential operator with a delta-function potential

S. I. Mitrokhin

Lomonosov Moscow State University,
Research Computing Center,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

We study a sequence of differential operators of high even order whose potentials converge to the Dirac delta-function. One of the types of separated boundary conditions is considered. At the points of potential discontinuity, it is necessary to study the conditions of gluing for the correct determination of the corresponding differential equations solutions. For large values of the spectral parameter, asymptotic solutions of differential equations are furnished by the Naimark method. The conditions of gluing are studied, the boundary conditions are investigated, the equation for the eigenvalues of the considered differential operator is derived. The method of successive approximations is used to find the asymptotics of spectrum of studied differential operators, the limit of which determines a spectrum of operator with a delta-function potential.

Keywords: differential operator, Dirac delta-function, asymptotics of solutions of differential equations, piecewise smooth potential, eigenvalues, asymptotics of the spectrum.

Received: 15th July, 2020 / Revised: 23rd November, 2021 /
Accepted: 6th December, 2021 / First online: 29th December, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

Research Article

Please cite this paper in press as:
Mitrokhin S. I. On the asymptotics of spectrum of an even-order differential operator with a delta-function potential, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 634–662. https://doi.org/10.14498/vsgtu1798 (In Russian).

Author's Details:
Sergey I. Mitrokhin https://orcid.org/0000-0003-1896-0563
Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Senior Researcher; Research Computing Center; e-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

References

1. Il'in V. A. Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator, *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 5, pp. 870–882. https://doi.org/10.1007/BF01098352.
2. Il'in V. A. Necessary and sufficient conditions for being a Riesz basis of root vectors of second-order discontinuous operators, *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 12, pp. 2059–2071 (In Russian).
3. Mitrokhin S. I. Formulas for the regularized traces of the second order differential operators with discontinuous coefficients, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1986, vol. 41, no. 6, pp. 1–5.
4. Mitrokhin S. I. Trace formulas for a boundary value problem with a functional-differential equation with a discontinuous coefficient, *Differ. Uravn.*, 1986, vol. 22, no. 6, pp. 927–931 (In Russian).
5. Mitrokhin S. I. On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous positive weight function, *Dokl. Akad. Nauk*, 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (In Russian).
6. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Arbitrary-order asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville boundary value problem on an interval with integrable potential, *Differ. Equ.*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1425–1429.
7. Mitrokhin S. I. The asymptotics of the eigenvalues of a fourth order differential operator with summable coefficients, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2009, vol. 64, no. 3, pp. 102–104.
8. Mitrokhin S. I. On spectral properties of a differential operator with summable coefficients with a retarded argument, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95–115 (In Russian).
9. Mitrokhin S. I. Spectral properties of boundary value problems for functional-differential equations with integrable coefficients, *Differ. Equ.*, 2010, vol. 46, no. 8, pp. 1095–1103. https://doi.org/10.1134/S0012266110080033.
10. Mitrokhin S. I. Asymptotics of the spectrum of a periodic boundary value problem for a differential operator with a summable potential, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 136–149 (In Russian). https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-136-149.
11. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Sturm–Liouville operators with singular potentials, *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 6, pp. 741–753. https://doi.org/10.1007/BF02674332.
12. Savchuk A. M. First-order regularised trace of the Sturm-Liouville operator with δ-potential, *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, no. 6, pp. 1168–1169. https://doi.org/10.1070/rm2000v055n06ABEH000352.
13. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. The asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and a trace formula for a potential with delta functions, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 6, pp. 772–789. https://doi.org/10.1023/A:1020302110566.
14. Borisov D. I. Gaps in the spectrum of the Laplacian in a strip with periodic delta interaction, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2019, vol. 305 (suppl. 1), pp. S16–S23. https://doi.org/10.1134/S0081543819040047.
15. Konechnaya N. N., Safonova T. A., Tagirova R. N. Asymptotics of the eigenvalues and regularized trace of the first-order Sturm–Liouville operator with δ-potential, *Vestnik of Northern (Arctic) Federal University. Ser. Natural Science*, 2016, no. 1, pp. 104–113 (In Russian). https://doi.org/10.17238/issn2227-6572.2016.1.104.
16. Kochubei A. N. Elliptic operators with boundary conditions on a subset of measure zero, *Funct. Anal. Appl.*, 1982, vol. 16, no. 2, pp. 137–139. https://doi.org/10.1007/BF01081632.
17. Berezin F. A., Faddeev L. D. A remark on Schrödinger's equation with a singular potential, *Sov. Math., Dokl.*, 1961, vol. 2, no. 5, pp. 372–375.
18. Geiler V. A., Margulis V. A., Chuchaev I. I. Potentials of zero radius and Carleman operators, *Siberian Math. J.*, 1995, vol. 36, no. 4, pp. 714–726. https://doi.org/10.1007/BF02107328.

19. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka, 1969, 528 pp. (In Russian)
20. Mitrokhin S. I. Asymptotics of eigenvalues of differential operator with alternating weight function, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, no. 6, pp. 27–42. https://doi.org/10.3103/S1066369X1806004X.
21. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-Difference Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 6. New York, London, Academic Press, 1963, xvi+462 pp.
22. Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A. Some new results of the theory of regularized traces of differential operators, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 109–116 (In Russian).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 663–675
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1869

УДК 519.63:519.688

Моделирование процесса переноса «реакция–диффузия» в нелинейном электромагнитном поле

Л. А. Уварова, П. В. Лин

Московский государственный технологический университет «Станкин»
Россия, 127055, Москва, Вадковский пер., 18 а.

Аннотация

Исследована модель двухкомпонентного массопереноса в неоднородной сферической системе, протекающего в нелинейном электромагнитном поле. Показано, что величины концентрации во внутренней области, на границе областей, а также концентрации, пересекшей границу и попавшей во вторую область, зависят от параметра нелинейности электродинамической задачи.

Ключевые слова: массоперенос, фазовые переход, нелинейные электродинамические уравнения, тепломассообмен.

Получение: 13 мая 2021 г. / Исправление: 30 ноября 2021 г. / Принятие: 6 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 13 декабря 2021 г.

Введение. В настоящее время большой интерес представляют исследования в области фазовых переходов, барьерных эффектов и качественных преобразований гетерогенных систем (в том числе наносистем) различного типа (физических, технических, биофизических). В частности, это относится к исследованиям процессов такого рода, происходящих под воздействием электромагнитных полей, что связано с возможностью управления. Рассеяние и поглощение монохроматической волны на сферической частице, как известно, может быть описано на основе классической теории Ми [1]. Позже теория была развита в применении к цилиндрам, несферическим частицам,

Научная статья

Образец для цитирования
Уварова Л. А., Лин П. В. Моделирование процесса переноса «реакция–диффузия» в нелинейном электромагнитном поле // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 663–675. https://doi.org/10.14498/vsgtu1869.

Сведения об авторах

Людмила Александровна Уварова https://orcid.org/0000-0003-1137-6436
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики; e-mail: uvar11@yandex.ru

Пхиьо Вэй Лин https://orcid.org/0000-0002-1847-0516
аспирант; каф. прикладной математики; e-mail: phyowailinnmipt@gmail.com

коллективам частиц. В последнее десятилетие большой интерес вызывают исследования по распространению электромагнитных волн в нелинейных средах с учетом мнимых составляющих оптических характеристик. Такие процессы могут моделироваться с помощью комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау. Исследования такого рода были отчасти инициированы успехами в области получения точных решений нелинейных гамильтоновых уравнений в виде солитонов [2, 3]. Получаемые решения имеют различные физические приложения, в частности, позволяют рассматривать эффекты, возникающие при взаимодействии электромагнитных волн с суспензиями [4]. Также в настоящее время проводятся экспериментальные и теоретические исследования в области влияния радиационной составляющей на теплоперенос в неоднородных средах, содержащих включения различных размеров [5]. При рассмотрении процессов фазовых переходов, барьерных эффектов, процессов типа «реакция–диффузия» необходимо рассматривать гетерогенные системы, которые в общем случае обладают нелинейными свойствами [6–8].

В данной работе рассматривается процесс массопереноса в гетерогенной системе, вызванный реакцией и диффузией и протекающий в нелинейном электромагнитном поле.

1. Некоторые решения нелинейных электродинамических уравнений. В этом разделе мы рассмотрим перенос электромагнитных волн в двухслойной оптически нелинейной сфере с целью определения поглощенной электромагнитной энергии и, соответственно, источников тепла. В квазистационарном приближении система уравнений Максвелла для амплитуд электрического и магнитного векторов может быть сведена к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{E}_i + k^2\varepsilon_i(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3})\vec{E}_i = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}_i),\\ &\Delta\vec{H}_i + k^2\varepsilon_i(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3})\vec{H}_i = \nabla(k_{1i}\times\vec{E}_i),\\ &\nabla\cdot(k_{1i}\vec{E}_i) = 0, \quad \nabla\cdot\vec{H}_i = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_{1i} = \frac{j\omega}{c}\Big(\varepsilon_i + j\frac{4\pi\sigma_i}{c}\Big), \quad j = \sqrt{-1};$$

E_{mi} — компоненты электрического вектора в ортогональной системе координат, $m = 1, 2, 3$; $\vec{H}_i$ — вектор магнитного поля; индекс $i = 1$ относится к внутренней области (слою) рассматриваемой сферы, а индекс $i = 2$ — к внешней области. Комплексная диэлектрическая проницаемость ε_i определяется так:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i'(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}) + j\frac{4\pi\sigma_i}{c}.$$

Для описания нелинейной зависимости диэлектрической проницаемости от электрического вектора часто используется закон Керра или его модификация:

$$\varepsilon_i' = \varepsilon_{i0} - |\alpha_i||\vec{E}_i|^2, \tag{2}$$

$$\varepsilon_i' = \varepsilon_{i0} - |\alpha_i|\vec{E}_i^{\,2}, \tag{3}$$

где α_i — параметр нелинейности для среды i. Ранее некоторые классы точных решений системы (1), (2) и (1), (3) были найдены в предположении, что среды являются подобными друг другу телами с общим центром или осью симметрии (сферы, кубы, цилиндры, торы). Особенностью этих решений является постоянство модуля электрического вектора (для зависимости (2)) или квадрата электрического вектора (для зависимости (3)). Обозначим эти решения через $\overrightarrow{E}_{iT}$, $\overrightarrow{H}_{iT}$. Они получены из условия $\varepsilon_i = 0$ и, таким образом, удовлетворяют системе (1) [9, 10].

Приближенные решения вблизи этих точных решений можно найти из линеаризованных уравнений (1), представив векторы напряжений в виде

$$\overrightarrow{E}_i = \overrightarrow{E}_{iT} + \overrightarrow{E}_i, \quad \overrightarrow{H}_i = \overrightarrow{H}_{iT} + \overrightarrow{H}_i.$$

Тогда система (1) сводится к виду [11]

$$\begin{aligned}
&\Delta \overrightarrow{E}'_i - 2k^2\Big(\varepsilon_{i0} + j\frac{4\pi\sigma_i}{c}\Big)\Delta \overrightarrow{E}'_i = 0,\\
&\Delta \overrightarrow{H}'_i - 2k^2\Big(\varepsilon_{i0} + j\frac{4\pi\sigma_i}{c}\Big)\Delta \overrightarrow{H}'_i = 0,\\
&\nabla\cdot \overrightarrow{H}'_i = 0, \quad \nabla\cdot \overrightarrow{E}'_i = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Граничные условия для (радиуса внутренней сферы) можно записать в виде

$$E^{(t)}_{1T} = E^{(t)}_{2T}, \quad E'^{(t)}_1 = E'^{(t)}_2, \quad H'^{(t)}_1 = H'^{(t)}_2,$$

где индекс t означает «тангенциальная составляющая».

Из уравнений (4) следует, что они формально совпадают с линейными уравнениями Гельмгольца для определения векторов напряжений. Однако роль диэлектрической проницаемости играет величина $\hat{\varepsilon}_i = -2\varepsilon_{0i}$ и роль коэффициента поглощения — $\hat{k}_i = 8\pi\sigma_i/\omega$. Будем считать, что поглощения во внешней сфере нет, т.е. $\sigma_2 = 0$. Мы также предполагаем, что справедливо следующее неравенство:

$$R_2 \gg R_1.$$

В этом случае решение для рассеянной и поглощенной электромагнитной волны $\overrightarrow{E}'_1$, $\overrightarrow{H}'_1$, $\overrightarrow{E}'_1\overrightarrow{H}'_1$ во внутренней частице совпадает с решением Ми в виде ряда с одним различием. Отличие связано с тем, что аргументом для радиальных функций является величина $(-j2\varepsilon_{20}kr)$, что приводит к необходимости использования функций Ганкеля второго рода (вместо функций Ганкеля первого рода), которые исчезают на бесконечности в комплексной плоскости с отрицательной мнимой частью.

2. Модель тепломассообмена. Исходя из результатов предыдущего раздела можно определить количество поглощенной электромагнитной энергии во внутренней области системы и, следовательно, величину плотности источника тепла:

$$q = \frac{m'_1 m''_1 I_0 k |\overrightarrow{E}_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_{20}}|\overrightarrow{E}_0|^2}, \tag{5}$$

где I_0 — мощность лазерного излучения, $m_1 = m_1' + jm_1''$ — комплексный показатель преломления,

$$m_1' = \left[\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{10} + \left(\varepsilon_{10}^2 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\right)\right]^{1/2}, \quad m_1'' = \frac{2\pi\sigma}{\omega m_1'}.$$

Конкретизируем выражение (5) для рассмотренных выше решений (для зависимости (3) как более общей). Формула получается с помощью условия (3), которое для точных решений можно записать так:

$$(\overrightarrow{E}'_{iT} + j\overrightarrow{E}''_{iT})^2 = \frac{(\varepsilon'_{i0} + j\varepsilon''_{i0})}{|\alpha_1|}. \tag{6}$$

Поскольку $\overrightarrow{E}'_T$ является вектором, в зависимости от вида системы и зависимости $\overrightarrow{E}'_T$ от координат могут быть получены различные зависимости для компонент данного вектора. В данном случае рассматриваются сферы и в простейшем случае зависимости компонент E_{Tr}, $E_{T\theta}$, $E_{T\varphi}$ только от радиальной координаты решения имеют вид [12]

$$E_{ir} = E'_{ir} + jE''_{ir} = \left[\frac{\varepsilon_{i0}}{2|\alpha_i|} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\varepsilon_{i0}}{|\alpha_i|}\right)^2 + \frac{16\pi^2\sigma_i^2}{\omega^2|\alpha_i|^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}, \quad E_{i\theta} = E_{i\varphi} = 0. \tag{7}$$

В данном случае нас интересует внутренняя область, для которой $i = 1$. Поскольку в статье рассматриваются и приближенные решения $\overrightarrow{E}'$, необходимо также записать

$$\overrightarrow{E}' = \overrightarrow{E}'_{1T} + \mathrm{Re}(\overrightarrow{E}'_1) + j\big(\overrightarrow{E}'_{1T} + \mathrm{Re}(\overrightarrow{E}'_1)\big). \tag{8}$$

С помощью выражений (5)–(8) можно получить следующую формулу для плотности теплового потока:

$$q = \frac{I_0 k m_1' m_1''}{\sqrt{\varepsilon'_{20}|E_0|^2}}\Big[|E_1'|^2 + 2\big(\mathrm{Re}(E'_{1r})E'_{1r} + \mathrm{Im}(E'_{1r})E'_{1r}\big) + \\ + \left(\left(\frac{\varepsilon_{i0}}{|\alpha_i|}\right)^2 + \frac{16\pi^2\sigma_i^2}{\omega^2|\alpha_i|^2}\right)^{1/2}\Big], \tag{9}$$

где E'_{1r} — радиальная компонента вектора $\overrightarrow{E}'_1$. Здесь мы предполагаем, что внутренняя область мала (порядка нескольких нанометров). Поэтому можно усреднить плотность источника по его объему или, при необходимости, только по полярному и азимутальному углам. При усреднении по объему величина плотности источника становится постоянной ($q = \overline{q}$). Из выражений (7) и (9) можно видеть, что процедура усреднения путем интегрирования имеет смысл только для вектора $\overrightarrow{E}'_1$.

Соответственно, уравнения для температуры в каждой из областей имеют следующий вид:

$$C_p^i \rho^{(i)} \frac{\partial^2 T(i)}{\partial t} = \chi^{(i)}\left(\frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T^{(i)}}{\partial r}\right) + q_i f_i(t), \tag{10}$$

где C_p^i — теплоемкость при постоянном давлении, $\rho^{(i)}$ — плотность, $q_2 = 0$, $q_1 = \overline{q}$, $\chi^{(i)}$ — коэффициент теплопроводности. Здесь вводится функция $f_i(t)$, поскольку действие источника может быть прекращено или возобновлено во внутренней области:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 2, 4, \ldots, \\ 0, & t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Граничные условия на внутренней границе следующие:

$$\begin{gathered} T^{(1)} = T^{(2)}, \quad -\chi^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} = -\chi^{(2)}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}, \quad \chi = \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(2)}}, \\ x = \frac{r}{R_1}, \quad d = \frac{R_2}{R_1}, \quad b = \Big(\frac{\chi C_p^{(1)}\rho^{(1)}}{C_p^{(2)}\rho^{(2)}}\Big)^{1/2}, \quad \tau = \frac{t}{t_\chi}, \quad t_\chi = \frac{C_p^{(2)}\rho^{(2)}R_1^2}{\chi^{(2)}}. \end{gathered} \tag{11}$$

Решения краевой задачи (10), (11) рассматривались, например, в работе [13] при моделировании переноса электронов на большие расстояния в белковой глобуле. В нашем случае на первом этапе воздействия постоянного электромагнитного источника решение для температуры имеет вид

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= T_0^{(1)} + \frac{2\chi\overline{q}R_1t_\chi}{C_p^{(1)}\rho^{(1)}r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(y_nbx)\varphi_n\psi_n(\tau)}{\sin(y_nb)y_n^2}, \\ T^{(2)} &= T_0^{(2)} + \frac{2\chi\overline{q}R_1t_\chi}{C_p^{(1)}\rho^{(1)}r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\big(y_n(d-x)\big)\varphi_n\psi_n(\tau)}{\sin\big(y_n(d-1)\big)y_n^2}; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} 1 - \chi + \chi by\operatorname{ctg}(by) + y\operatorname{ctg}\big(y(d-1)\big) = 0, \\ \varphi_n = \big(1 - by_n\operatorname{ctg}(by_n)\big)\Big(1 - \chi + \frac{\chi b^2y_n^2}{\sin^2(by_n)} + \frac{y_{d-1}^2}{\sin^2\big((d-1)y_n\big)}\Big), \\ \psi_n(\tau) = 1 - \exp(-y_n^2\tau) \end{gathered}$$

в течение первого периода времени воздействия источника.

Определив температуру, можно рассмотреть перенос вещества (концентрацию) в каждой из областей и между ними. Предполагается, что изменение концентрации компонентов во внутренней области происходит за счет реакции, а во внешней области — за счет диффузии:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial t} = -\nu(T^{(1)})c_1^{(1)}c_2^{(1)}, \quad \frac{\partial c_2^{(1)}}{\partial t} = -\nu(T^{(1)})c_1^{(1)}c_2^{(1)}, \\ &\frac{\partial c^{(2)}}{\partial t} = D(T^{(2)})\Delta c_1^{(2)}, \qquad c_2^{(2)} = 0, \\ &c_1^{(1)}(0,r) = c_1^{(0)}, \quad c_1^{(2)}(0,r) = c_{10}, \quad c_2^{(1)}(0,r) = c_{20}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь верхний показатель относится к среде, $D(T^{(2)})$ — коэффициент диффузии, оператор $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$. Скорость реакции в общем случае зависит от температуры по закону Аррениуса:

$$\nu(T_1) = \nu_0 \exp(-U/T^{(1)}), \tag{14}$$

где U — энергия, характеризующая реакцию; R_g — универсальная газовая постоянная. В работе [14] приведены некоторые модификации данного закона, которые в конкретных случаях также могут быть использованы. Интегрируя первые два уравнения (13) вместе с выражением (14), можно рассматривать два подхода:

1) температуру, зависящую от радиальной координаты и времени;
2) среднюю температуру по объему $\overline{T}^{(1)}(t)$.

Средняя температура $\overline{T}^{(1)}(t)$ определяется по объему $4\pi R_1^3/3$:

$$\overline{T}^{(1)} = T_0^{(1)} + \frac{6\psi\overline{q}tx}{c_p^{(1)}\rho^1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n\varphi_n(\tau)}{y_n^3 b}\Big(\frac{1}{y_n b} - \mathrm{ctg}(y_n b)\Big). \tag{15}$$

На границе R_1 граничные условия имеют следующий вид:

$$c_1^{(1)} = c_1^{(2)}, \quad \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial r}, \quad c_2^{(1)} = 0. \tag{16}$$

Из системы (13) и условий (16) следует, что для определения концентрации первого компонента, проникшего во внешнюю область, в которой перенос происходит по диффузионному механизму, можно рассматривать (в зависимости от постановки задачи) как условия Дирихле, так и условия Неймана. Это возможно, так как значение $c_1^{(1)}$ уже будет известно. При определении этой концентрации при скорости реакции, зависящей от средней температуры (15), необходимо использовать условия Дирихле из краевых условий (16), так как условия Неймана становятся однородными (производная по координате равна нулю), и концентрация не проникает во внешнюю область.

Решение для $c_1^{(1)}$ имеет вид

$$c_1^{(1)} = \frac{c_1^0(c_{20} - c_1^0)\exp\big(-\nu_0(c_{20} - c_1^0)J(t)\big)}{c_{20} - c_1^0\exp\big(-\nu_0(c_{20} - c_1^0)J(t)\big)}, \; J(t) = \int_{t_j}^{t}\exp\Big(\frac{-U}{\overline{T}^{(1)}(S)}\Big)ds, \tag{17}$$

где t_j — начало соответствующего периода времени. Решение для $c_1^{(2)}$ получается из третьего уравнения системы (13), первого из условий (16) и выражения (17) путем решения задачи в частных производных с неоднородными краевыми условиями Дирихле

$$c_1^{(2)}(R_1) = c_1^{(1)}(R_1).$$

На внешней границе можно поставить однородные условия Неймана

$$\frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=R_2} = 0$$

или Дирихле
$$c_1^{(2)}(R_2) = 0.$$
В этих случаях вводится величина $\xi(t) = \int D(\overline{T}^{(2)})dt$ в качестве аналога времени. Запишем решение в случае смешанных условий как более реалистичных. Обозначим через $t = \gamma(\xi)$ функцию для определения времени, то есть обратную к функции $\xi(t)$ при заданной зависимости коэффициента диффузии от температуры. Она может быть найдена с использованием выражения для температуры во внешней области. Решение указанной задачи имеет следующий вид:

$$c_1^{(2)} = \frac{c_1^{(1)}\big(\gamma(\xi)\big)R_1(R_2-r)^2}{r(R_2-R_1)^2} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{r} \exp\Big(-\frac{\mu_n^2\xi}{R_2}\Big)\Big(\sin\Big(\frac{\mu_n r}{R_2}\Big) - \operatorname{tg}\Big(\frac{\mu_n}{d}\Big)\cos\Big(\frac{\mu_n r}{R_2}\Big)\Big). \quad (18)$$

Здесь через μ_n обозначены корни уравнения
$$\mu_n \operatorname{tg}\Big(\mu_n\Big(1-\frac{1}{d}\Big)\Big) = 1.$$

Поскольку рассматривается случай $d \gg 1$, решение (15), (16) можно упростить:

$$c_1^{(2)} = \frac{c_1^{(1)}\big(\gamma(\xi)\big)R_1(R_2-r)^2}{r(R_2-R_1)^2} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_2}{r} \exp\Big(-\frac{\mu_n^2\xi}{R_2^2}\Big)\Big(K_{1n}\sin\Big(\frac{\pi n r}{R_2}\Big) + K_{2n}\cos\Big(\frac{\pi n r}{R_2}\Big)\Big), \quad (19)$$

где
$$K_{10} = M_1 \int_\kappa^1 \frac{x\,dx}{\sin\big(\mu_0(1-\kappa)x\big)} - M_2 \int_\kappa^1 \frac{(1-x)^2dx}{\sin\big(\mu_0(1-\kappa)x\big)},$$

$$K_{1n} = 2M_1 \int_\kappa^1 \frac{x\cos(\pi n x)dx}{\sin\big(\mu_0(1-\kappa)x\big)} - 2M_2 \int_\kappa^1 \frac{(1-x)^2\cos(\pi n x)dx}{\sin\big(\mu_0(1-\kappa)x\big)},$$

$$K_{2n} = 2M_1 \int_\kappa^1 \frac{x\sin(\pi n x)dx}{\cos\big(\mu_0(1-\kappa)x\big)} - 2M_2 \int_\kappa^1 \frac{(1-x)^2\sin(\pi n x)dx}{\cos\big(\mu_0(1-\kappa)x\big)},$$

$$M_1 = c_{10}\cos\frac{\mu_0\kappa}{1-\kappa}, \quad M_2 = c_1^{(0)}\kappa\cos\frac{\mu_0\kappa}{(1-\kappa)^3}, \quad \kappa = \frac{1}{d}.$$

Величина μ_0 определяется из уравнения $\mu_0 = \operatorname{arctg}(1/\mu_0)$: $\mu_0 \approx 0.863$. Интегралы вычисляются численно.

Для дальнейшего анализа приведем некоторые частные случаи формулы для концентрации (17) с учетом (14), (15).

В первом таком случае рассмотрим изотермический процесс, который поддерживается дополнительным подводом тепла или условиями теплоизоляции после того, как произошел нагрев до некоторой температуры $\overline{T}_k^{(1)} = T^{(1)}(t_k)$, например, за первый период времени $t = t_k$. В этом случае для концентрации в первой области можно записать следующее выражение:

$$c_1^{(1)} = \frac{c_1^0(c_{20} - c_1^0)\exp\bigl(-\nu_0(c_{20} - c_1^0)\exp\bigl(-\frac{U}{\overline{T}_k^{(1)}R_g}\bigr)t\bigr)}{c_{20} - c_1^0\exp\bigl(-\nu_0(c_{20} - c_1^0)\exp\bigl(-\frac{U}{\overline{T}_k^{(1)}R_g}\bigr)t\bigr)}. \tag{20}$$

Во втором случае рассмотрим влияние изменяющейся во времени температуры на концентрацию при малых временах, когда можно ограничиться линейными членами в разложении экспоненты, входящей в функцию $\psi_n(t)$, в ряд, ограничиваясь несколькими первыми членами ряда N (при этом коэффициенты ряда для температуры (15) убывают примерно как $1/y_n^2$, например при $\chi \sim 1$, $b \sim 1$ величина $y_n = \frac{\pi n}{d}$). В этом случае выражение для интеграла $J(t)$ из (17) имеет вид

$$\begin{aligned} J(t) \approx \frac{T_0^{(1)} + \overline{q}Qt}{2.3\overline{q}Q}\exp\Bigl(-\frac{U}{R_g(T_0^{(1)} + \overline{q}Qt)}\Bigr) - \frac{T_0^{(1)}}{2.3\overline{q}Q}\exp\Bigl(-\frac{U}{R_gT_0^{(1)}}\Bigr) + \\ + \frac{U}{R_g\overline{q}Q}\Bigl[\ln\Bigl(\frac{T_0^{(1)}}{T_0^{(1)} + \overline{q}Qt}\Bigr) + \frac{T_0^{(1)}}{T_0^{(1)} + \overline{q}Qt} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{nn!}\Bigl(\Bigl(\frac{U}{R_g(T_0^{(1)} + \overline{q}Qt)}\Bigr)^n - \Bigl(\frac{U}{R_gT_0^{(1)}}\Bigr)^n\Bigr)\Bigr], \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$Q = \frac{6\chi}{c_p^{(1)}\rho^{(1)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n}{y_n^2b^2}\bigl(1 - y_nb\,\mathrm{ctg}(y_nb)\bigr).$$

При получении (21) возникающий интегральный логарифм был разложен в ряд согласно известной формуле:

$$\mathrm{li}(x) = \gamma + \ln(\ln x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n}{nn!},$$

где γ — постоянная Эйлера.

Заключение. Исследована модель двухкомпонентного массопереноса в неоднородной сферической системе, протекающего в нелинейном электромагнитном поле. Из полученных решений для источника тепла, температуры и концентрации (формулы (9), (15), (17), (19), (21)) следует, что величины концентрации во внутренней области, на границе областей, а также концентрации, пересекшей границу и попавшей во вторую область, зависят от параметра нелинейности электродинамической задачи, от которого зависит плотность теплового источника. Действительно, как видно из (7), (9), в выражение для теплового источника входит параметр нелинейности α. Соответственно, от него зависит температура в каждой из областей, поскольку она пропорциональна плотности теплового источника. Следовательно, через скорость реакции массоперенос зависит от характера зависимости диэлектрической проницаемости от поля. Такого рода влияние будет также иметь место и для модификаций закона Аррениуса [14]. В статье также в общем виде учитывается зависимость коэффициента диффузии от температуры. Соответственно, из формул (9), (12), (17) (18) следует, что на диффузионный механизм переноса концентрации также может влиять параметр электродинамической нелинейности. Реакция может протекать как со скоростью, практически не зависящей от температуры, так и в режиме активации, когда температура значительно влияет на скорость реакции. В данном случае в активационном режиме скорость реакции зависит от температуры внутренней области (как отмечено выше, данная температура напрямую зависит от плотности источника тепла) и радиуса R_1. В рассматриваемой задаче возможны два механизма перехода из одного режима протекания в другой. Первый механизм обусловлен варьированием параметра нелинейности. Из (7), (9), (15), (17), (20), (21) следует, что при относительно больших α скорость реакции и массоперенос заметно зависят от температуры, т.е. реализуется активационный режим. При малых α величины точных решений для электрического вектора $\overrightarrow{E}_T$ значительно возрастают (7). Тогда можно приближенно записать $\overline{q} \approx \frac{S}{|\alpha|}$ и соответственно $\overline{T}^{(1)} \sim \frac{S}{|\alpha|}$. Здесь через S обозначена величина, приближенно полученная из (7), (9) при $\alpha \to 0$.

Отметим, что приведенный результат $\overline{q} \sim \frac{1}{|\alpha|}, \overline{T} \sim \frac{1}{|\alpha|}$ является достаточно общим и справедлив для точных решений рассматриваемого класса, опирающихся на выражение (6) и приведенных в [12]. Таким образом, происходит качественное изменение процесса переноса концентрации $c_1^{(1)}(t)$, обусловленное значительным возрастанием температуры в формуле (14) — независимо от параметров, входящих в формулу (15), и величины энергетического барьера U, экспоненциальная зависимость для концентрации в (17) и (20) принимает вид $\exp(-\nu_0(c_2^0 - c_1^0)t)$. Таким образом, происходит переход в режим, когда скорость реакции практически не зависит от температуры (в пределе $\alpha \to 0$ данный результат получается точно). В этом режиме массоперенос происходит наиболее быстро. Полагая, что 99 % от скорости реакции, не зависящей от температуры, можно считать скоростью при отсутствии барьера U, из закона Аррениуса можно получить, что температура при этом должна быть приближенно равна $T^+ \approx 99.602\, U/R_g$. Соответствующую плотность теплового источника можно оценить по формуле

$$\overline{q}^+ \approx \frac{99.602\, U}{S_1 R_g} - \frac{-T_0^{(1)}}{S_1},$$

где

$$S_1 = \frac{6\chi t_\chi}{c_p^{(1)}\rho^{(1)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\tau_k)\varphi_n}{y_n^4 b^2}\big(1 - y_n b \operatorname{ctg}(y_n b)\big).$$

Важным также представляется рассмотрение перехода концентрации через границу раздела. Поскольку среда внешней области является непоглощающей, скорость реакции, которая способствует распространению концентрации из области (1) в область (2), зависит от плотности теплового источника $\overline{q}$. Как показано выше, параметр нелинейности непосредственно влияет на эту величину и через температуру — на скорость реакции (12), (17), (19). Большие значения параметра α приводят к увеличению энергетического барьера. Это, в свою очередь, приводит к тому, что основная часть концентрации $c_1^{(2)}$ некоторое время находится вблизи границы раздела (возникает барьерный эффект для распространения концентрации), а затем она постепенно диффундирует далее. Такой концентрационный барьер, в свою очередь, влияет и на электродинамические характеристики внешней области. При уменьшении α во внешней области (так же, как и во внутренней) происходит переход от активационного к независящему от температуры режиму реакции.

Другим механизмом, переводящим активационный режим реакции в режим, который не зависит от температуры, является возникновение электромагнитного резонанса. Резонанс возникает при равенстве нулю знаменателей коэффициентов в решении $\overrightarrow{E}'_1$ (решение представляет собой ряд, знаменатели членов которого зависят от R_1 и m_1). При этом также происходит качественное изменение зависимости $c_1^{(1)}(t)$ вследствие значительного возрастания температуры в выражении (17). Как и в первом рассмотренном механизме, экспоненциальная зависимость для указанной концентрации принимает вид $\exp(-\nu_0(c_2^0 - c_1^0)t)$. Из вышеизложенного следует, что параметр электродинамической нелинейности и размер внутренней области R_1 могут являться управляющими параметрами для массопереноса в рассматриваемой системе. В том числе, от их значений может зависеть режим, в котором происходит распространение концентрации.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 18–11–00247).

Библиографический список

1. Born M., Bhatia A. B., Wolf E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light.* Oxford: Pergamon Press, 1965. xxviii+808 pp.
2. Skarka V., Aleksić N., Krolikowski W., Christodoulides D., Aleksić B., Belić M. Linear modulational stability analysis of Ginzburg–Landau dissipative vortices // *Opt. Quant. Electron.*, 2016. vol. 48, no. 4, 240. https://doi.org/10.1007/s11082-016-0514-1.
3. Aleksić B. N., Aleksić N. B., Skarka V., Belić M. Stability and nesting of dissipative vortex solitons with high vorticity // *Phys. Rev. A*, 2015. vol. 91, no. 4, 043832. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.043832.
4. Skarka V., Aleksić N. B., Krolikowski W., Christodoulides D., Rakotoarimalala S., Aleksić B. N., Belić M. Self-structuring of stable dissipative breathing vortex solitons in a colloidal nanosuspension // *Optics Express*, 2017. vol. 25, no. 9. pp. 10090–10102. https://doi.org/10.1364/OE.25.010090.
5. Половников В. Ю. Влияние радиационного теплообмена на интенсификацию теплопереноса в тонкопленочной тепловой изоляции // *Известия Томского политехнического*

университета. Инжиниринг георесурсов, 2020. Т. 331, № 8. С. 34–39. https://doi.org/10.18799/24131830/2020/8/2766.

6. Ильина Е. А., Сараев Л. А. Моделирование фазовых превращений и сверхупругого упрочнения нестабильных материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 407–429. https://doi.org/10.14498/vsgtu1626.
7. Drin Ya., Ushenko Yu., Drin I., Drin S. About the approximate solutions to linear and non-linear pseudodifferential reaction diffusion equations // *Mohyla Math. J.*, 2019. vol. 2. pp. 41–45. https://doi.org/10.18523/2617-70802201941-45.
8. Kuttler C. *Reaction-diffusion equations with applications*: Lecture Notes; Munich Technical University, 2011. https://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script_reaktdiff.pdf.
9. Uvarova L. A., Krivenko I. V., Ivannikov A. F. Peculiarities of stochastic resonance in disperse systems / *Australian Institute of Physics 17th National Conference 2006: Refereed Papers* (3–8 December, 2006; Brisbane, Australia). Canberra, 2006. 274.
10. Uvarova L. A., Babarin S. S. The movement of molecules and nanoparticles in potential field with the Casimir force in nano volumes with different optical boundaries // *Physica Scripta*, 2014. vol. 2014, no. T162, 014053. https://doi.org/10.1088/0031-8949/2014/T162/014053.
11. Уварова Л. А., Федянин В. К. *Рассеяние электромагнитной волны на сферической частице с нелинейными свойствами*: Препринт № Р17-89-372. Дубна: ОИЯИ, 1989. 7 с.
12. Уварова Л. А. *Некоторые точные решения для вектора напряженности электрического поля в сопряженных нелинейных средах*: Препринт № Р17-87-693. Дубна: ОИЯИ, 1987. 14 с.
13. Лахно В. Д., Уварова Л. А. *Влияние электронного разогрева белков на скорость электронного транспорта*: Препринт. Пущино: Пущинский научный центр РАН, 1993. 13 с.
14. Чикова О. А. О структурных переходах в сложнолегированных расплавах // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*, 2020. Т. 63, № 3–4. С. 261–270. https://doi.org/10.17073/0368-0797-2020-3-4-261-270.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 663–675
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1869

MSC: 35Q60

Modeling of the "reaction–diffusion" transfer process in a nonlinear electromagnetic field

L. A. Uvarova, P. W. Linn

Moscow State Technological University (Stankin)
18 a, Vadkovsky lane, Moscow, 127055, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with a model of two-component mass transfer in an inhomogeneous spherical system. A model of two-component mass transfer in an inhomogeneous spherical system occurring in a nonlinear electromagnetic field is investigated. It is shown that the concentration in the inner region, at the boundary of the regions, as well as the concentration that crossed the border and got into the second region, depend on the nonlinearity parameter of the electrodynamic problem.

Keywords: mass transfer, phase transition, nonlinear electrodynamic equations, heat and mass transfer.

Received: 13th May, 2021 / Revised: 30th November, 2021 /
Accepted: 6th December, 2021 / First online: 13th December, 2021

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 18–11–00247).

Research Article

Please cite this paper in press as:
Uvarova L. A., Linn P. W. Modeling of the "reaction–diffusion" transfer process in a nonlinear electromagnetic field, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 663–675. https://doi.org/10.14498/vsgtu1869 (In Russian).

Authors' Details:
Lyudmila A. Uvarova https://orcid.org/0000-0003-1137-6436
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: uvar11@yandex.ru

Phyo Wai Linn https://orcid.org/0000-0002-1847-0516
Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics; e-mail: phyowailinnmipt@gmail.com

References

1. Born M., Bhatia A. B., Wolf E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Oxford, Pergamon Press, 1965, xxviii+808 pp.
2. Skarka V., Aleksić N., Krolikowski W., Christodoulides D., Aleksić B., Belić M. Linear modulational stability analysis of Ginzburg–Landau dissipative vortices, *Opt. Quant. Electron.*, 2016, vol. 48, no. 4, 240. https://doi.org/10.1007/s11082-016-0514-1.
3. Aleksić B. N., Aleksić N. B., Skarka V., Belić M. Stability and nesting of dissipative vortex solitons with high vorticity, *Phys. Rev. A*, 2015, vol. 91, no. 4, 043832. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.043832.
4. Skarka V., Aleksić N. B., Krolikowski W., Christodoulides D., Rakotoarimalala S., Aleksić B. N., Belić M. Self-structuring of stable dissipative breathing vortex solitons in a colloidal nanosuspension, *Optics Express*, 2017, vol. 25, no. 9, pp. 10090–10102. https://doi.org/10.1364/OE.25.010090.
5. Polovnikov V. Yu. Influence of radiation heat exchange on the intensification of heat transfer in thin-film thermal insulation, *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 2020, vol. 331, no. 8, pp. 34–39 (In Russian). https://doi.org/10.18799/24131830/2020/8/2766.
6. Ilyina E. A., Saraev L. A. Modeling of phase transformations and superelastic hardening of unstable materials, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 407–429 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1626.
7. Drin Ya., Ushenko Yu., Drin I., Drin S. About the approximate solutions to linear and non-linear pseudodifferential reaction diffusion equations, *Mohyla Math. J.*, 2019, vol. 2, pp. 41–45. https://doi.org/10.18523/2617-70802201941-45.
8. Kuttler C. *Reaction-diffusion equations with applications*, Lecture Notes; Munich Technical University, 2011. https://www-m6.ma.tum.de/~kuttler/script_reaktdiff.pdf.
9. Uvarova L. A., Krivenko I. V., Ivannikov A. F. Peculiarities of stochastic resonance in disperse systems, In: *Australian Institute of Physics 17th National Conference 2006: Refereed Papers* (3–8 December, 2006; Brisbane, Australia). Canberra, 2006, 274.
10. Uvarova L. A., Babarin S. S. The movement of molecules and nanoparticles in potential field with the Casimir force in nano volumes with different optical boundaries, *Physica Scripta*, 2014, vol. 2014, no. T162, 014053. https://doi.org/10.1088/0031-8949/2014/T162/014053.
11. Uvarova L. A., Fedyanin V. K. *Scattering of an electromagnetic wave by a spherical particle with nonlinear properties*, Preprint no. P17-89-372. Dubna, JINR, 1989, 7 pp. (In Russian)
12. Uvarova L. A. *Some exact solutions for the vector of electric field strength in conjugate nonlinear media*, Preprint no. P17-87-693. Dubna, JINR, 1987, 14 pp. (In Russian)
13. Lakhno V. D., Uvarova L. A. *The effect of electron heating of proteins on the electron transport rate*, Preprint. Pushchino, Pushchino Scientific Center of RAS, 1993, 13 pp. (In Russian)
14. Chikova O. A. Structural transitions in complexly alloyed melts, *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*, 2020, vol. 63, no. 3–4, pp. 261–270 (In Russian). https://doi.org/10.17073/0368-0797-2020-3-4-261-270.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 676–695
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1874

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри высокой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени

***А. М. Локощенко*[1], *Л. В. Фомин*[1], *Ю. Г. Басалов*[1], *П. М. Третьяков*[2]**

[1] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

[2] Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет,
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1.

Аннотация

Проведено исследование ползучести и длительного разрушения узкой прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри высокой жесткой матрицы) при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени.

Деформирование мембраны рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания продольных сторон жесткой матрицы. На второй стадии она деформируется при касании продольных стенок матрицы вплоть до касания ее поперечной стенки. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы. Деформирование мембраны происходит в условиях

Научная статья

Образец для цитирования
Локощенко А. М., Фомин Л. В., Басалов Ю. Г., Третьяков П. М. Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри высокой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 676–695. https://doi.org/10.14498/vsgtu1874.

Сведения об авторах

Александр Михайлович Локощенко https://orcid.org/0000-0002-5462-6055
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий лабораторией; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: loko@imec.msu.ru

Леонид Викторович Фомин https://orcid.org/0000-0002-9075-5049
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: fleonid1975@mail.ru

ползучести при двух видах контактных условий: скольжение мембраны вдоль стенок матрицы и прилипание мембраны к стенкам матрицы.

Для анализа постепенного длительного разрушения мембраны используется кинетическая теория ползучести Ю. Н. Работнова, при этом параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер. Решение системы, состоящей из определяющего и кинетического уравнений, показало, что во время деформирования мембраны на первой стадии в ней независимо от вида контактных условий накапливается поврежденность, близкая к ее предельному значению. В связи с этим процессы ползучести мембраны на второй и третьей стадиях деформирования при обоих рассматриваемых видах контактных условий практически совпадают. Получена зависимость времени до разрушения мембраны при различных скоростях возрастания величины поперечного давления.

Полученные уравнения использованы для анализа ползучести и длительного разрушения мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel, деформируемой при переменном поперечном давлении при температуре 600 °C.

Ключевые слова: прямоугольная мембрана, жесткая матрица, переменное поперечное давление, ползучесть, длительное разрушение, параметр поврежденности, кинетическая теория, длительная прочность.

Получение: 28 июня 2021 г. / Исправление: 15 октября 2021 г. / Принятие: 22 ноября 2021 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2021 г.

Введение. В работе рассматриваются ползучесть и длительное разрушение длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q, которое возрастает пропорционально времени t. Решение этой задачи при постоянной и кусочно-постоянной зависимостях $q(t)$ при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Л. М. Качанова [1], Одквиста [2], Сторакерса [3], Н. Н. Малинина [4] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В монографиях [4, 5] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [5] приведены решения задач при учете различных форм матриц (клиновидной, криволинейной и прямоугольной) при двух типах контактных условий на границе мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В [6] исследуется ползучесть длинной узкой мембраны внутри высокой жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости величины поперечного давления от времени. Исследование проведено при трех вариантах контакта матрицы и мембраны: идеальное скольжение, прилипание и скольжение с учетом трения. В [7] проведено исследование установившейся ползучести мембраны внутри высокой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Расчеты проводятся до времени практически полного прилегания мембраны к матри-

Юрий Генрихович Басалов https://orcid.org/0000-0002-1416-3690
ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности;
e-mail: basalov@yandex.ru

Петр Максимович Третьяков https://orcid.org/0000-0002-8221-3127
студент; механико-математический факультет; e-mail: pet3tyak@gmail.com

це. Проведено сравнение этих времен при различных контактных условиях. А. Б. Ефимов с соавторами [8] составили обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих постановку задачи контактного взаимодействия общего вида. Во всех этих работах исследуется только ползучесть мембраны, а длительное разрушение нигде не рассматривается.

В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов пришли к выводу, что используемые в то время термины механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещений) недостаточны для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, этот подход был назван кинетическим. Он основан на использовании введенного Л. М. Качановым [9] параметра сплошности среды ψ и Ю. Н. Работновым [10] — параметра поврежденности ω, связанного с ψ соотношением $\psi = 1 - \omega$, и разработанной впоследствии Ю. Н. Работновым [11] кинетической теории ползучести и длительной прочности. Основой этого подхода при одноосном растяжении является введение скалярного параметра поврежденности $\omega(t)$, характеризующего структурное состояние материала при произвольном значении времени t. Исходному состоянию материала (при $t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении ($t = t^*$) поврежденность $\omega(t^*)$ принимает значение 1. При рассмотрении длительной прочности в случае одноосного растяжения Л. М. Качанов [9] дополнил уравнение ползучести дифференциальным кинетическим уравнением, характеризующим изменение параметра ψ во времени, а Ю. Н. Работнов [12] дополнительно ввел параметр ω в уравнение ползучести (для учета влияния процесса накопления поврежденности на процесс ползучести).

1. Постановка задачи. Рассматривается деформирование в условиях ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны толщины H_0, закрепленной вдоль длинных сторон и расположенной внутри высокой жесткой матрицы прямоугольной формы, вплоть до ее (мембраны) разрушения (рис. 1). Ширина $2a$ и длина мембраны и матрицы L удовлетворяют неравенству $2a/L \ll 1$. Отношение высоты матрицы b к половине ее ширины a в данной статье удовлетворяет неравенству $b/a \geqslant 1$ (высокая матрица).

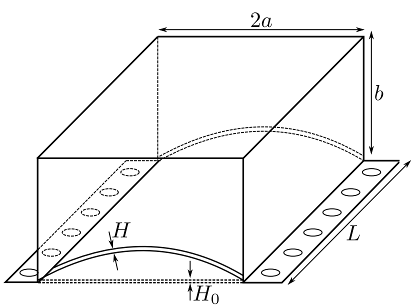


Рис. 1. Общая схема деформирования прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы

[Figure 1. General scheme of deformation of a rectangular membrane inside a rigid matrix]

Рассматривается пропорциональная зависимость величины поперечного давления q от времени t:

$$q(t) = \dot{q}t,$$

где $\dot{q} = \text{const}$ — скорость возрастания величины q, точкой всюду обозначаются производные по времени t.

Деформирование мембраны в условиях ползучести рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания продольных сторон матрицы. На второй стадии она деформируется при касании продольных стенок матрицы вплоть до касания ее поперечной стенки. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы.

Задача рассматривается в стандартной цилиндрической системе координат, поэтому при моделировании напряженно-деформированного состояния при $t > 0$ рассматриваются радиальное σ_{rr}, окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz} главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr}, $p_{\theta\theta}$ и p_{zz}. Недиагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Рассмотрим элемент мембраны [4]. Принимаем напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и, записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = q\rho/H, \quad d(\sigma_{\theta\theta}H) = 0, \tag{1}$$

где ρ — радиус кривизны срединной поверхности, H — толщина мембраны. Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \text{const}. \tag{2}$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), заключаем, что рассматриваемый радиус кривизны срединной поверхности мембраны $\rho = \text{const}$ во всех ее точках, т. е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α [4]. В этом случае очевидно, что если толщина мембраны до деформирования постоянна, то она останется постоянной и при любых значениях деформации ползучести. Следовательно, согласно равенству (1), окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ по длине окружности радиуса ρ не изменяется.

Целью данного исследования является определение зависимости времени до разрушения мембраны t^* от величины скорости возрастания величины поперечного давления $\dot{q}$, в случае разрушения на i-той стадии эти параметры будем обозначать через t_i^* и $\dot{q}_i$ соответственно, $i = 1, 2, 3$.

Для учета накопления поврежденности в материале мембраны в процессе ползучести вводится тензорный параметр поврежденности $\omega_{ij}(t)$, который при активном нагружении ($\dot{q} > 0$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{3}{2}F(\sigma_{kl}, \omega_{kl}, t)s_{ij}, \tag{3}$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

Для описания ползучести мембраны при $t > 0$ с учетом накопления поврежденности материала вплоть до ее разрушения рассмотрим гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций ползучести при учете несжимаемости материала в следующем виде (в дальнейшем ω_u представляет собой аналог интенсивности напряжений σ_u):

$$\begin{cases} \dot{p}_{ij} = \dfrac{3}{2}\dfrac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega_u)^n}s_{ij}, \quad p_{ij}(0) = 0; \\ \sigma_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz}-\sigma_{rr})^2}; \\ \omega_u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\omega_{rr}-\omega_{\theta\theta})^2 + (\omega_{\theta\theta}-\omega_{zz})^2 + (\omega_{zz}-\omega_{rr})^2}; \end{cases} \tag{4}$$

где p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести; A, n — постоянные величины соответствующих размерностей.

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{p}_{zz}$ принимается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0. \tag{5}$$

Примем, как обычно для тонкостенных цилиндрических оболочек, равенство

$$\sigma_{rr} = 0. \tag{6}$$

В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (4) при учете (5), (6) следует

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}.$$

Компоненты девиатора напряжений s_{ij} в мембране определяются соотношениями

$$s_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} > 0, \quad s_{zz} = 0, \quad s_{rr} = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} < 0, \quad s_{\theta z} = s_{rz} = s_{r\theta} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с (3) в тензоре поврежденности ω_{ij} только $\omega_{\theta\theta} \neq 0$, т. е. параметр поврежденности в данной задаче является скалярной величиной: $\omega = \omega(t)$. Примем кинетическое уравнение (3) в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_{\theta\theta}^k}{(1-\omega)^m}, \quad \omega(0) = 0. \tag{7}$$

Таким образом, ползучесть мембраны внутри прямоугольной матрицы вплоть до разрушения определяется из системы определяющего уравнения

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{3}{2}\frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega)^n}s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n}{(1-\omega)^n}, \quad p_{\theta\theta}(0) = 0 \tag{8}$$

и кинетического уравнения (7), а момент разрушения $t = t^*$ характеризуется условием

$$\omega(t^*) = 1. \tag{9}$$

Из уравнения (7) после серии преобразований получаем

$$\omega(t) = 1 - \left(1 - (m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}, \tag{10}$$
$$(1-\omega)^n = \left(1 - (m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{n}{m+1}}.$$

Подставляя выражение $(1-\omega)^n$ в уравнение (8), получаем выражение для скорости окружной компоненты тензора деформации ползучести:

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n\left(1 - (m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}. \tag{11}$$

Дальнейшей целью исследований является определение зависимости окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (1) от скорости возрастания давления $\dot{q}$ при обоих рассматриваемых контактных условиях (идеальное скольжение и прилипание), а затем с помощью (7) и (9) — анализ задачи о возможности разрушения на той или иной стадии ползучести.

2. Разрушение мембраны в процессе свободного деформирования в условиях ползучести (первая стадия). На первой стадии мембрана (плоская в начальном состоянии) под действием давления $q(t)$ приобретает форму незамкнутой цилиндрической оболочки с центральным углом 2α (см. рис. 2). На этой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания продольных стенок жесткой матрицы.

Введем безразмерные переменные

$$\overline{H}_i = H_i/H_0, \quad \overline{H}_0 = H_0/a, \quad \overline{b} = b/a, \quad \overline{\rho} = \rho/a, \tag{12}$$

где H_0 — начальная толщина мембраны, H_i — толщина мембраны на i-той стадии, $i = 1, 2, 3$.

Далее черточки над всеми безразмерными переменными опустим. В этом пункте рассматривается длительное разрушение мембраны при постоянной скорости возрастания поперечного давления $\dot{q}_1 = \mathrm{const}$.

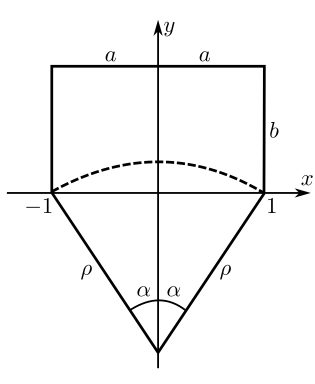


Рис. 2. Схема деформации прямоугольной мембраны на первом этапе
[Figure 2. The scheme of deformation of a rectangular membran at the first stage]

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной деформации ползучести:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, для скорости окружной компоненты деформации ползучести имеем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \qquad (13)$$

Поскольку

$$\rho \sin\alpha = 1, \qquad (14)$$

имеем

$$\dot{\rho}\sin\alpha + \rho\dot{\alpha}\cos\alpha = 0.$$

Поэтому выражение (13) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \qquad (15)$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния имеем

$$\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Так как скорость радиальной компоненты деформации ползучести

$$\dot{p}_{rr} = \dot{H}_1/H_1, \qquad (16)$$

согласно равенствам (15), (16), с учетом $\dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}$ получаем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_1}{H_1} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)\dot{\alpha}. \qquad (17)$$

Интегрируя (17) при начальном условии $H_1(0) = 1$, $\alpha(0) = 0$, получаем

$$H_1(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad H_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} = H_1^0, \qquad (18)$$

где H_1^0 — значение толщины мембраны в конце первой стадии, т. е. при $\alpha = \pi/2$. Величина $\sigma_{\theta\theta}$ (1) при учете (12), (14) и (18) принимает следующий вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q_1\rho}{H_0 H_1} = \frac{\dot{q}_1 t}{H_0}\frac{\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Подставляя выражение (11) в (17), получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg}\alpha)^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n\left(1 - (m+1)B\int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}, \qquad (19)$$

$$\alpha(0) = 0.$$

В конце первой стадии ($t = t_1$) раствор мембраны $2\alpha(t_1) = 2\alpha_1$ в случае ее неразрушения удовлетворяет равенству $2\alpha_1 = \pi$. Момент времени t_1, соответствующий окончанию первой стадии, и толщина мембраны $H_1^0 = H(t_1)$ вычисляются согласно зависимости (18):

$$t_1 = t(\alpha_1), \quad H_1^0 = H_1(t_1) = \frac{\sin\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{2}{\pi}.$$

Определим скорость увеличения поперечного давления $\dot{q}_1$, при котором мембрана разрушается в процессе первой стадии ($t = t_1^*$). Для этого воспользуемся уравнением (19) при начальном значении $\alpha(0) = 0$. Конечное значение $\alpha^* = \alpha(t^*)$ определяется с помощью уравнения (10) при $\omega(t^*) = 1$:

$$(m+1)B\int_0^{t_1^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt = 1.$$

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях в случае, если не произошло разрушения на первой стадии.

3. Деформирование и разрушение мембраны в условиях идеального скольжения мембраны вдоль сторон матрицы. Введем координаты поперечного сечения матрицы x и y (см. рис. 2) и дополнительные безразмерные координаты:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a},$$

где x_0, y_0 — координаты точек касания мембраны и матрицы; далее черточки над этими безразмерными переменными также будем опускать.

3.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ($0 \leqslant y_0 \leqslant y_0^*$, $y_0^* \leqslant b - 1$). Рассмотрим характеристики разрушения мембраны $\dot{q}_2$ и t_2^* в процессе второй стадии. При этом исследование ползучести проводится сначала на первой стадии ($0 \leqslant t \leqslant t_1$), а затем на второй стадии $t_1 \leqslant t \leqslant t_2^*$.

Ползучесть мембраны на первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(t_1) = \pi/2$, при этом

$$\sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2\alpha t}{H_0\sin^2\alpha}.$$

Поврежденность материала в конце первой стадии определяется согласно (10):

$$\omega(t_1) = 1 - \left(1 - (m+1)B\int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}} = \omega_1. \tag{20}$$

После окончания первой стадии деформирования ($t = t_1$) наступает вторая стадия ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2^*$, $0 \leqslant y \leqslant y_0^*$, $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant 1$).

Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ($b \geqslant 1$) и относительно низкой матрицы ($b \leqslant 1$). Для определенности в данной работе будет рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно высокой матрицы.

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы далее рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

При $t > t_1$ часть поверхности мембраны прилегает к внутренней боковой поверхности матрицы.

При исследовании деформирования мембраны на второй стадии выделим два близких деформированных состояния с радиусом свободной дуги мембраны $\rho = 1$: одно характеризуется длиной участка контакта y_0, а другое — длиной участка контакта $y_0 + dy_0$. Согласно определению $dp_{\theta\theta}$, имеем

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(y_0 + dy_0 + \pi/2) - (y_0 + \pi/2)}{y_0 + \pi/2} = \frac{dy_0}{y_0 + \pi/2} = -\frac{dH_2}{H_2}, \tag{21}$$

$$-\int_{H_1^0}^{H_2(y_0)} \frac{dH_2}{H_2} = \int_0^{y_0} \frac{dy_0}{y_0 + \pi/2},$$

$$H_2(y_0) = \frac{\pi}{2} \frac{H_1^0}{y_0 + \pi/2} = \frac{1}{y_0 + \pi/2}. \tag{22}$$

Толщина в конце второй стадии определяется согласно (22):

$$H_2^0 = H_2(t_2) = \frac{1}{b - 1 + \pi/2}. \tag{23}$$

Окончание второй стадии ($t = t_2$) происходит при разрушении мембраны, т. е. когда $\omega(t_2^*) = 1$.

Рассмотрим зависимость параметра поврежденности на второй стадии от времени. Из (7) при $\omega \geqslant \omega_1$, $t \geqslant t_1$ имеем

$$\omega(t) = 1 - \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Тогда при разрушении в момент времени $t = t_2^*$ из последнего соотношения имеем

$$(1 - \omega_1)^{m+1} = (m+1)B \int_{t_1}^{t_2^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \tag{24}$$

Из (21) следует

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_0 + \pi/2)\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_0 + \pi/2)\frac{\sqrt{3}}{2} A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\right)^n \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}. \tag{25}$$

Окружное напряжение на второй стадии при $\rho = 1$ определяется из соотношений (1) и (22):

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0}(y_0 + \pi/2). \tag{26}$$

Определим зависимость времени разрушения t_2^* от скорости возрастания величины давления $\dot{q}_2$, т. е. $t_2^* = t_2^*(\dot{q}_2)$. Задавая произвольное значение $\dot{q}_2$ ($\dot{q}_2 \leqslant \dot{q}_1$) и подставляя его в выражение (26), находим решение дифференциального уравнения (25) при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2^*$. При этом начальное значение $y_0(t_1) = 0$, а конечное значение $t = t_2^*$ определяется с помощью уравнения (24).

3.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ($b - 1 \leqslant y_0 \leqslant y_0^*$). Рассмотрим процесс деформирования и разрушения мембраны при $\dot{q}_3$ ($\dot{q}_3 < \dot{q}_2$) на третьей стадии. Этот процесс происходит после окончания второй стадии деформирования.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2\alpha}.$$

В конце первой стадии (при $t = t_1$) поврежденность материала мембраны определяется равенством (20).

Вторая стадия деформирования характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad 0 \leqslant y_0 \leqslant b - 1, \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2.$$

Толщина мембраны $H_2(y_0)$ на второй стадии ползучести и ее значение в конце второй стадии H_2^0 определяются равенствами (22) и (23) соответственно.

Процесс деформирования мембраны на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy_0}{dt} = (y_0 + \pi/2)\frac{\sqrt{3}}{2} A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n \left((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}};$$

$$y_0(t_1) = 0, \quad y_0(t_2) = b - 1, \quad \sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0}(y_0 + \pi/2).$$

Поврежденность материала мембраны $\omega_2 = \omega_2(t)$ в конце второй стадии определяется с помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) при $t > t_1$:

$$\omega_2 = 1 - \left((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_1}^{t_2} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{27}$$

Третья стадия деформирования мембраны характеризуется параметрами

$$t_2 \leqslant t \leqslant t_3^*, \quad b - 1 \leqslant y_0 \leqslant y_0^*, \quad \omega_2 \leqslant \omega \leqslant 1.$$

Кинетика параметра $\omega(t)$ в процессе третьей стадии определяется из дифференциального уравнения (7) при $t > t_2$:

$$\omega(t) = 1 - \left((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)B\int_{t_2}^{t} \sigma_{\theta\theta}^k dt\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{28}$$

Отсюда для разрушения при $t = t_3^*$ $(\omega(t_3^*) = 1)$ имеем уравнение

$$(1-\omega_2)^{m+1} = (m+1)B\int_{t_2}^{t_3^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \tag{29}$$

На этой стадии мембрана касается обеих сторон матрицы:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(2-\pi/2)dy_0}{2y_0 - b + 1 + (b-y_0)\pi/2},$$

$$-\int_{H_2^0}^{H_3(y_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \ln\frac{H_2^0}{H_3(y_0)} = \ln\frac{1 + b\pi/2 - b + y_0(2-\pi/2)}{b-1+\pi/2},$$

$$H_3(y_0) = \frac{1}{1 + b\pi/2 - b + y_0(2-\pi/2)},$$

$$\dot y_0 = \frac{2y_0 - b + 1 + (b-y_0)\pi/2}{2-\pi/2}\dot p_{\theta\theta}.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (8) при учете (10) вместо $\dot p_{\theta\theta}$, получаем

$$\dot y_0 = \frac{2y_0 - b + 1 + (b-y_0)\pi/2}{2-\pi/2}\frac{\sqrt3}{2}A\Big(\frac{\sqrt3}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n \times$$
$$\times\left((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)\int_{t_2}^{t} B\Big(\frac{\sqrt3}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^k dt\right)^{-\frac{n}{m+1}}, \tag{30}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{\dot q_3 t}{H_0}\big(1 + b\pi/2 - b + y_0(2-\pi/2)\big)(b-y_0).$$

При решении дифференциального уравнения (30) начальное значение $y_0(t_2) = b-1$, а конечное значение t_3^* удовлетворяет равенству (29) с учетом найденного значения для $\sigma_{\theta\theta}$.

4. Деформирование и разрушение мембраны в условиях прилипания мембраны вдоль сторон матрицы. Как и для предыдущего случая граничных условий рассмотрим вторую и третью стадии деформирования мембраны в условиях ползучести и определим условия ее разрушения.

4.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ($\boldsymbol{0 \leqslant y_0 \leqslant y_0^*,\ y_0^* \leqslant b-1}$). Чтобы определить условия разрушения мембраны в процессе ее деформирования на второй стадии при $\dot q_2$ необходимо последовательно рассмотреть ее ползучесть на первой и второй стадиях.

Ползучесть мембраны на первой стадии при условии ее неразрушения на ней ($0 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1$) описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot q_2 \alpha t}{H_0 \sin^2\alpha}.$$

Поврежденность материала мембраны в конце первой стадии определяется равенством (20).

В процессе второй стадии деформирования мембраны зависимость параметра поврежденности от времени определяется соотношением (24). При исследовании второй стадии деформирования мембраны выделим два близких состояния с радиусом свободной дуги мембраны $\rho = 1$. Согласно определению $p_{\theta\theta}$ имеем

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\pi/2 + dy_0) - \pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}dy_0 = -\frac{dH_2}{H_2},$$
$$-\int_{H_1^0}^{H_2(y_0)} \frac{dH_2}{H_2} = \int_0^{y_0} \frac{2dy_0}{\pi},$$

отсюда

$$H_2(y_0) = H_1^0 \exp\Big(-\frac{2}{\pi}y_0\Big).$$

Окружная компонента тензора напряжений при учете $\rho = 1$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(y_0)}\Big|_{\rho=1} = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0 H_2(y_0)} = \frac{\dot{q}_2 t}{H_0}\frac{\pi}{2}\exp\Big(\frac{2}{\pi}y_0\Big). \tag{31}$$

Далее имеем

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{\pi}{2}\frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n\Big((1-\omega_1)^{m+1}-(m+1)B\int_{t_1}^{t}\sigma_{\theta\theta}^k dt\Big)^{-\frac{n}{m+1}}. \tag{32}$$

Подставляя (31) в (32), получаем дифференциальное уравнение относительно y_0, при этом начальное значение $y_0(t_1) = 0$, конечное значение t_2^* определяется с помощью уравнения (24).

4.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ($b - 1 \leqslant y_0 \leqslant y_0^*$). Рассмотрим ползучесть мембраны при $\dot{q}_3$ последовательно на первой, второй и третьей стадиях в случае, если разрушение не произошло на первой и второй стадии.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \pi/2, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2\alpha}.$$

В конце первой стадии (при $t = t_1$) поврежденность $\omega(t_1) = \omega_1$ материала мембраны задается соотношением

$$\omega_1 = 1 - \Big(1 - (m+1)B\int_0^{t_1}\sigma_{\theta\theta}^k dt\Big)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Вторая стадия процесса деформирования мембраны характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad 0 \leqslant y_0 \leqslant b - 1, \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2.$$

Процесс ползучести на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy_0}{dt}=\frac{\sqrt{3}\pi}{4}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n\bigg((1-\omega_1)^{m+1}-(m+1)B\int_{t_1}^{t}\sigma_{\theta\theta}^k dt\bigg)^{-\frac{n}{m+1}},$$

$$y_0(t_1)=0,\quad y_0(t_2)=b-1,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0)=\frac{\dot q_3 t}{H_0H_2(y_0)}=\frac{\dot q_3 t}{H_0}\frac{\pi}{2}\exp\Big(\frac{2}{\pi}y_0\Big).$$

Поврежденность материала мембрана в конце второй стадии $\omega(t_2)=\omega_2$ определяется из уравнения (27).

Третья стадия деформирования мембраны характеризуется параметрами

$$t_2\leqslant t\leqslant t_3^*,\quad b-1\leqslant y_0\leqslant y_0^*,\quad \omega_2\leqslant\omega\leqslant 1.$$

На этой стадии ползучесть мембраны при касании ею обеих сторон матрицы описывается следующими уравнениями:

$$dp_{\theta\theta}=\frac{(2-\pi/2)dy_0}{(b-y_0)\pi/2},$$

$$\dot y_0=\frac{(b-y_0)\pi/2}{2-\pi/2}\dot p_{\theta\theta}=\frac{b-y_0}{(2-\pi/2)}\frac{\sqrt{3}\pi}{4}A\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^n\times$$
$$\times\bigg((1-\omega_2)^{m+1}-(m+1)B\int_{t_2}^{t}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}\Big)^k dt\bigg)^{-\frac{n}{m+1}};\qquad(33)$$

$$-\int_{H_2^0}^{H_3(y_0)}\frac{dH_3}{H_3}=\int_{(b-1)}^{y_0}dp_{\theta\theta},\quad -\ln\frac{H_3(y_0)}{H_2^0}=-\frac{2-\pi/2}{\pi/2}\ln(b-y_0),$$

$$H_3(y_0)=\frac{2}{\pi}\exp\Big(-\frac{2}{\pi}(b-1)\Big)(b-y_0)^{\frac{4}{\pi}-1};\qquad(34)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(y_0)=\frac{\dot q_3 t}{H_0H_3(y_0)}(b-y_0).\qquad(35)$$

Зависимость $\omega(t)$ на третьей стадии процесса деформирования при $t>t_2$ имеет вид (28).

Подставим (34) в (35), а затем в (33). С помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) выпишем зависимость $\omega(t)$ на третьей стадии процесса:

$$\omega(t)=1-\bigg[(1-\omega_2)^{m+1}-(m+1)B\int_{t_2}^{t}\sigma_{\theta\theta}^k dt\bigg]^{\frac{1}{m+1}}.$$

При разрушении в момент времени $t=t_3^*$ величина $\omega(t_3^*)=1$, поэтому

$$(1-\omega_2)^{m+1}=(m+1)B\int_{t_2}^{t_3^*}\sigma_{\theta\theta}^k dt.\qquad(36)$$

Вычисление значений $\dot q_3$ и t_3^*, соответствующих разрушению на третьей стадии деформирования при условиях прилипания, производится аналогично случаю идеального скольжения.

Дифференциальное уравнение (33) решается при $t_2 \leqslant t \leqslant t_3^*$, при этом начальное условие $y_0(t_2) = b - 1$, конечное значение $t = t_3^*$ удовлетворяет условию (36).

5. Приложение. В качестве примера рассмотрим ползучесть и длительное разрушение прямоугольной мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel и деформируемой при 600 °C внутри жесткой матрицы высотой $b = 1.2$.

Химический состав этой стали [13]:

$$\mathrm{C} = 0.06\,\%,\quad \mathrm{Si} = 0.18\,\%,\quad \mathrm{Mn} = 0.48\,\%,\quad \mathrm{P} = 0.008\,\%,\quad \mathrm{S} = 0.008\,\%,$$
$$\mathrm{Cr} = 2.18\,\%,\quad \mathrm{Mo} = 0.93\,\%,\quad \mathrm{Fe} - \text{баланс}.$$

Материальные константы этой стали, используемые в кинетической модели ползучести и длительной прочности (7), (8), имеют следующие значения [13]:

$$A = 9.17 \cdot 10^{-17}\ \text{МПа/ч},\quad B = 0.91 \cdot 10^{-17}\ \text{МПа/ч},\quad n = 6.0,\quad m = 4.8,\quad k = 6.7.$$

Кроме того, во всех вычислениях в качестве безразмерной начальной толщины мембраны использовано значение $H_0 = 0.01$.

В табл. 1–3 приведены характеристики длительного разрушения мембраны на первой, второй и третьей стадиях деформирования соответственно. Расчеты показали, что характеристики ползучести мембраны вплоть до ее разрушения практически не зависят от вида контактных условий мембраны и матрицы. Это объясняется тем, что при переходе от первой стадии ко второй накопленная поврежденность материала мембраны ω_1 имеет порядок значений $0.86 \div 0.94$, а при переходе от второй стадии к третьей поврежденность ω_2 уже имеет порядок значений $0.91 \div 0.94$. Другими словами, почти весь ресурс поврежденности материала мембраны уже вырабатывается в процессе первой стадии, которая не зависит от вида контактных условий.

На рис. 3 приведена зависимость $\alpha(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1^*$ при различных значениях $\dot q_1$. На рис. 4 в логарифмических координатах приведена зависимость времени до разрушения мембраны t^* от величины $\dot q$, полученная при анализе результатов ползучести мембраны на всех трех стадиях.

Таблица 1

Характеристики длительного разрушения мембраны на первой стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the first stage of deformation]

$\dot q_1$, MPa/hr	t^*, hr	α^*
2	0.67	1.37
1.5	0.87	1.387
1	1.26	1.4
0.8	1.54	1.414
0.5	2.36	1.44
0.2	5.39	1.48
0.15	6.98	1.5
0.1	10.05	1.56
0.08	12.29	1.57

Таблица 2

Характеристики длительного разрушения мембраны на второй стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the second stage of deformation]

$\dot{q}_2$, MPa/hr	y_0^* adhesion conditions	y_0^* slip conditions	t_1^*, hr	$t^* - t_1$, s	ω_1
0.02	0.003	0.003	42.71	0	0.938
0.01	0.02	0.02	79.6	0.02	0.929
0.005	0.07	0.067	148.4	0.14	0.923
0.003	0.11	0.105	234.4	0.44	0.916
0.002	0.14	0.136	337.2	0.99	0.91
0.0016	0.159	0.15	411.8	1.46	0.907
0.0014	0.175	0.166	464.2	2.01	0.904
0.0012	0.182	0.171	532.9	2.45	0.902
0.0011	0.188	0.177	576.13	2.65	0.902
0.001	0.197	0.184	627.5	3.37	0.9

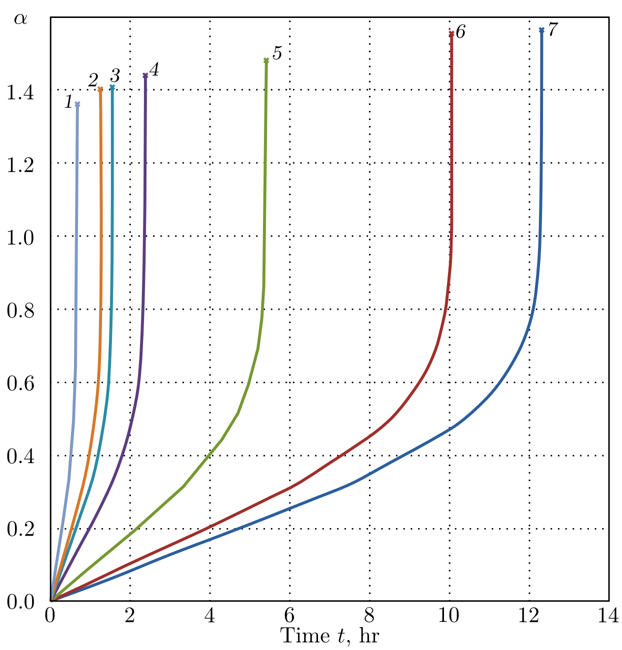


Рис. 3. Зависимость $\alpha(t)$ в процессе первой стадии деформирования мембраны для различных значений скорости $\dot{q}_1$ (в МПа/ч): *1* — $\dot{q}_1 = 2$, *2* — $\dot{q}_1 = 1$, *3* — $\dot{q}_1 = 0.8$, *4* — $\dot{q}_1 = 0.5$, *5* — $\dot{q}_1 = 0.2$, *6* — $\dot{q}_1 = 0.1$, *7* — $\dot{q}_1 = 0.08$

[Figure 3. Dependence $\alpha(t)$ during the first stage of membrane deformation for different values of the rate $\dot{q}_1$ (in MPa/hr): *1* — $\dot{q}_1 = 2$, *2* — $\dot{q}_1 = 1$, *3* — $\dot{q}_1 = 0.8$, *4* — $\dot{q}_1 = 0.5$, *5* — $\dot{q}_1 = 0.2$, *6* — $\dot{q}_1 = 0.1$, *7* — $\dot{q}_1 = 0.08$]

Таблица 3

Характеристики длительного разрушения мембраны на третьей стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the third stage of deformation]

$\dot{q}_3$, MPa/hr	y_0^* adhesion conditions	y_0^* slip conditions	t_2^*, hr	$t^* - t_2$, s	ω_2
0.0009	0.211	0.19	689.6	0	0.939
0.0007	0.249	0.216	863.6	0.04	0.937
0.0005	0.305	0.269	1167	0.13	0.93
0.0002	0.479	0.405	2646	0.99	0.92
0.0001	0.634	0.521	4779	4.24	0.91

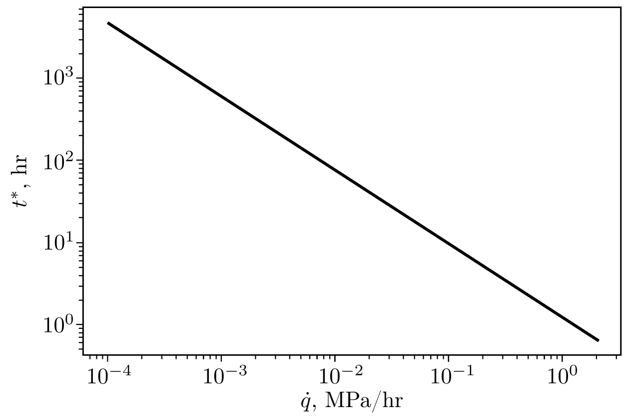


Рис. 4. График зависимости t^* от $\dot{q}$ в логарифмических координатах [Figure 4. A plot of t^* versus $\dot{q}$ in logarithmic coordinates]

Заключение. Исследована ползучесть узкой мембраны внутри высокой прямоугольной матрицы вплоть до ее разрушения при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Рассмотрены два типа контактных условий: идеальное скольжение мембраны относительно матрицы и прилипание мембраны к матрице. Для описания процесса накопления поврежденности материала мембраны использована кинетическая теория Ю. Н. Работнова, при этом параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер. Решение системы, состоящей из определяющего и кинетического уравнений, проводится при последовательном чередовании первой, второй и третьей стадий деформирования. Модельные расчеты показали, что в процессе первой стадии, не зависящей от контактных условий, накапливается уровень поврежденности материала мембраны, который близок к предельному значению. Поэтому процесс деформирования на последующих стадиях дает практически одинаковые результаты при обоих рассматриваемых контактных условиях (идеальное скольжение и прилипание). Основной результат проведенного исследования — зависимость времени до разрушения мембраны от скорости возрастания величины поперечного давления.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–80–00387_а).

Библиографический список

1. Качанов Л. М. *Основы механики разрушения.* М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture.* Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 pp.
3. Storåkers B. *Finite Plastic Deformation of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure* / Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series. vol. 44. Stocholm: Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969. 107 pp.
4. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов.* М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
5. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 504 с.
6. Локощенко А. М., Терауд В. В., Шеварова Е. А. Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при переменном поперечном давлении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 445–468. https://doi.org/10.14498/vsgtu1772.
7. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G. Steady-state creep of a long narrow membrane inside a high rigid matrix at variable transverse pressure // *Proceeding of the 7th World Congress on Mechanical, Chemical and Material Engeneering (MCM'21)*, 2021 (August, 2021), ICMIE 123. https://doi.org/10.11159/icmie21.123.
8. Ефимов А. Б., Романюк С. Н., Чумаченко Е. Н. Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // *Изв. РАН. МТТ*, 1995. № 6. С. 82–98.
9. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–36.
10. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций.* М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
11. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.
12. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ*, 1963. № 2. С. 113–123.
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels // *Materials at High Temperatures*, 2014. vol. 31, no. 3. pp. 211–220. https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 676–695
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1874

MSC: 74A05, 74D10

Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a high rigid matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time

A. M. Lokoshchenko*[1]*, L. V. Fomin*[1]*,
***Yu. G. Basalov*[1]*, P. M. Tretyakov*[2]**

[1] Lomonosov Moscow State University,
Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.
[2] Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

In this work, we studied the creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane in confined conditions (inside a high rigid matrix) with a proportional dependence on the magnitude of transverse pressure on time.

Deformation of the membrane is considered as a sequence of three stages. At first stage, the membrane is deformed under free conditions until it touches the longitudinal sides of the rigid matrix. At second stage, the membrane is deformed when it touches the longitudinal walls of matrix until it touches its transverse wall. At third stage, the membrane is already deformed while simultaneously touching the longitudinal and transverse walls of matrix. Membrane deformation occurs under creep conditions under two types of contact conditions: sliding of the membrane along the walls of matrix and adhesion of membrane to the walls of matrix. The dependence of the time until the fracture of membrane at different rates of increase in the magnitude of the transverse pressure is obtained.

The analysis of the gradual long-term fracture of the membrane is carried out using the kinetic theory of creep by Yu. N. Rabotnov, while the parameter of material damage in this problem has a scalar character. The solution

Research Article

Please cite this paper in press as:
Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G., Tretyakov P. M. Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a high rigid matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 676–695. https://doi.org/10.14498/vsgtu1874 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko https://orcid.org/0000-0002-5462-6055
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Laboratory; Lab. of Creep and Long-Term Strength; e-mail: loko@imec.msu.ru

Leonid V. Fomin https://orcid.org/0000-0002-9075-5049
Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength; e-mail: fleonid1975@mail.ru

of the system consisting of constitutive and kinetic equations showed that during the membrane deformation at the first stage regardless of the type of contact conditions, the level of damage accumulates in the membrane, which is close to its limiting value. In this regard, the creep processes of the membrane at second and third stages of deformation under both considered types of contact conditions practically coincide.

The obtained equations are used to analyze the creep and long-term fracture of a membrane made of 2.15Cr-1Mo steel, which is deformed under variable transverse pressure at a temperature of 600 °C.

Keywords: rectangular membrane, rigid matrix, variable transverse pressure, creep, long-term fracture, damage parameter, kinetic theory, long-term strength.

Received: 28$^{\text{th}}$ June, 2021 / Revised: 15$^{\text{th}}$ October, 2021 / Accepted: 22$^{\text{nd}}$ November, 2021 / First online: 23$^{\text{rd}}$ December, 2021

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–80–00387_a).

References

1. Kachanov L. M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974, 312 pp. (In Russian)
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford, Clarendon Press, 1974, 200 pp.
3. Storåkers B. *Finite Plastic Deformation of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure*, Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series, vol. 44. Stocholm, Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969, 107 pp.
4. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov* [Creep in Metal Forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 216 pp. (In Russian)
5. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2018, xviii+545 pp.. https://doi.org/10.1201/b22242.
6. Lokoshchenko A. M., Teraud W. V., Shevarova E. A. The steady-state creep of long membrane in a rigid matrix at a variable transverse pressure, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 445–468 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1772.
7. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Basalov Yu. G. Steady-state creep of a long narrow membrane inside a high rigid matrix at variable transverse pressure, *Proceeding of the 7th World Congress on Mechanical, Chemical and Material Engeneering (MCM'21)*, 2021 (August, 2021), ICMIE 123. https://doi.org/10.11159/icmie21.123.

Yuriy G. Basalov https://orcid.org/0000-0002-1416-3690
Lead Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength; e-mail: basalov@yandex.ru

Petr M. Tretyakov https://orcid.org/0000-0002-8221-3127
Student; Dept. of Mechanics and Mathematics; e-mail: pet3tyak@gmail.com

8. Efimov A. B., Romanyuk S. N., Chumachenko E. N. On the determination of the regularities of friction in the processes of metal forming by pressure, *Mec. Solids*, 1995, no. 6, pp. 82–98 (In Russian).
9. Kachanov L. M. Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–36 (In Russian).
10. Rabotnov Yu. N. Mechanism of long-term destruction, In: *Strength of Materials and Structures.* Moscow, USSR Academy of Sciences, 1959, pp. 5–7 (In Russian).
11. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members.* Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
12. Rabotnov Yu. N. On fracture as a consequence of creep, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1963, no. 2, pp. 113–123 (In Russian).
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels, *Materials at High Temperatures*, 2014, vol. 31, no. 3, pp. 211–220. https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 696–715
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1877

УДК 539.374

Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления

С. В. Фирсов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, ХФИЦ ДВО РАН,
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1.

Аннотация

Изучается изотермическое деформирование толстостенной трубы с жестким покрытием боковой поверхности под воздействием изменяющегося внутреннего давления. Рассматриваются четыре стадии нагружения: (1) плавный рост нагрузки, (2) ее фиксация на максимальном значении в течение продолжительного времени, (3) плавное уменьшение нагрузки до нуля и (4) частичная релаксация напряжений. В качестве материала взята сталь 45, разогретая до температуры 725 °C.

Изучается влияние ползучести на процесс пластического течения и на изменение уровня напряжений и деформаций в течение процесса деформирования, а также на их остаточные значения. Для изучения влияния ползучести также рассматривается задача деформирования с нулевыми скоростями ползучести. Рассматриваются два варианта нагружения: при распространении пластичности на часть среды (давление 200 МПа) и при распространении пластического течения на всю среду (давление 320 МПа при отсутствии ползучести).

По результатам расчетов получено, что ползучесть оказывает значительное влияние на распределение напряжений и деформаций в материале. Особенно сильно это проявляется на более продолжительных стадиях выдержки и релаксации. Расчеты для двух случаев нагружения давлением в 200 МПа и 320 МПа в конце стадии выдержки приводят к близким значениям напряжений, а после релаксации также сравниваются значения деформаций и перемещения. При сравнении случаев упругопластического деформирования и деформирования с учетом ползучести видим, что ползучесть замедляет распространение пластичности, а также сокращает итоговую область влияния пластического течения. Однако в связи с большими накопленными необратимыми деформациями ползучесть приводит к увеличению влияния повторного пластического течения, которое появляется раньше и затрагивает большую часть деформируемой среды.

Научная статья

Образец для цитирования
Фирсов С. В. Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 696–715. https://doi.org/10.14498/vsgtu1877.

Сведения об авторе
Сергей Викторович Фирсов https://orcid.org/0000-0001-7446-6231
младший научный сотрудник; e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

Ключевые слова: цилиндр, толстостенная труба, труба с внешним жестким покрытием, ползучесть и пластическое течение, вязкопластичность, внутреннее давление, плоская деформация, малые деформации.

Получение: 23 августа 2021 г. / Исправление: 30 ноября 2021 г. / Принятие: 6 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2021 г.

Введение. В работе рассматривается задача накопления необратимых деформаций вследствие механизмов вязкого и пластичного деформирования, где под вязким подразумевается механизм накопления деформаций ползучести, а под пластичным — деформаций пластического течения. Более подробно рассматривается вопрос о том, какое влияние оказывает процесс ползучести на распределение напряжений и деформаций в образце в то время, когда в части образца напряжения достигают поверхности нагружения. Данный процесс рассматривается на примере типовой задачи изотермического деформирования трубы под воздействием внутреннего давления при повышенных температурах. Решению подобной задачи посвящено множество работ. К ним можно отнести работу Надаи [1], в которой было получено решение для идеально-пластического материала. Работа Хилла [2] посвящена изучению данной задачи деформирования, где наряду с пластическими деформациями, задаваемыми с помощью условия пластичности Треска, также учитываются сжимающие упругие деформации. Данная статья является одной из первых, в которых рассматривалось упругопластическое деформирование трубы под действием внутреннего давления. По данной теме также был опубликован ряд работ [3–8], сравнительный обзор части из которых приведен в статье [9]. В приведенных ранее работах расчеты производятся в рамках теории малых деформаций. Изучению конечных деформаций в трубах под давлением посвящены статьи [10–15]. В работах [16, 17] рассматривалось деформирование упругопластического материала с учетом упрочнения. В работе [18] приводится расчет вращающегося цилиндрического сосуда под давлением, сделанного из функционально-градиентного материала.

Параллельно с пластическим деформированием толстостенной трубы под давлением также изучается вопрос вязкого деформирования. Среди первых можно отметить работы [19,20]. Наряду с трубами рассматривалось также деформирование тонкостенных цилиндрических оболочек [21–25]. Много работ посвящено изучению сосудов под давлением, сделанных из материалов, обладающих анизотропными свойствами. Так, работы [26,27] являются одними из первых, в которых изучается деформирование сосудов под давлением из ортотропных материалов в рамках теории ползучести. В работе [28] рассматривались большие деформации толстостенной цилиндрической трубы изготовленной, как из изотропного, так и ортотропного материала. В данной работе рассматривалась задача деформирования как под действием только внутреннего давления, так и под совместным действием внутреннего и внешнего давлений. Было отмечено, что анизотропия значительно влияет на радиальные напряжения и деформации, и что внешнее давление, приложенное к боковой поверхности, снижает скорость накопления деформаций ползучести. В последнее время в связи с широким распространением композитных материалов также изучаются задачи деформирования труб из трансверсально-изотропных (или транстропных) материалов [29, 30].

В большинстве случаев для описания ползучести используется степенная зависимость деформаций от напряжений, однако в работе [31] было отмечено, что для ряда термостойких материалов в определенном диапазоне напряжений характерна линейная зависимость скоростей ползучести от напряжений. В приведенной работе была представлена модель, которая совмещает в себе как линейную, так и степенную зависимость скоростей ползучести от напряжений, что позволяет описывать поведение подобных материалов.

Помимо анизотропных в последнее время приобрели популярность неоднородные материалы, такие как функционально-градиентные. Работы [32,33] являются одними из первых, в которых рассматриваются деформации ползучести сосудов под давлением, сделанных из функционально-градиентных материалов. В работе [34] к данной задаче также добавляется температурное поле, а в [35] — магнитное. Деформации ползучести в сосуде под давлением, изготовленном из функционально-градиентного материала, при наличии накопленных остаточных напряжений рассматривались в работе [36]. Ряд задач был решен в рамках теории Сета [29, 37, 38].

В данной работе будет рассматриваться поведение сосуда под давлением, разогретого до высоких температур и подверженного большой нагрузке, достаточной для выхода напряжений на поверхность нагружения. В связи с этим в материале можем наблюдать как пластические деформации, так и деформации ползучести. Так, в работах [39–41] рассматривается необратимое деформирование материала, связанное как с пластичностью, так и с ползучестью. В работе [42] данный процесс рассматривается на примере сосуда под давлением. В приведенных работах считается, что до выхода напряжений на поверхность нагружения накопление необратимых деформаций происходит в связи с ползучестью. При этом в областях, в которых началось пластическое деформирование, скорости ползучести считаются неизменными и равными тем скоростям, которых достигла ползучесть в момент выхода напряжений на поверхность нагружения. В тоже время в других работах [43–45] предполагается, что скорости ползучести продолжат изменяться даже после выхода напряжений на поверхность нагружения. Здесь будет использоваться последний подход к совместному учету механизмов накопления необратимых деформаций.

В качестве модельного материала рассмотрим сталь 45, широко использующуюся в производстве стержней и труб. Деформации ползучести данной марки стали при высоких температурах рассматривались в работах [46, 47]. Воспользуемся здесь коэффициентами ползучести при температуре в 725 °C, приведенными в работе [46].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу деформирования толстостенной трубы с зафиксированными торцами и жестким покрытием боковой поверхности под действием внутреннего давления. Решение будем искать в цилиндрической системе координат r, φ, z. Данная задача обладает осевой симметрией, из-за зафиксированных торцов труба находится в состоянии плоского деформирования. Ненулевые компоненты вектора перемещений запишем в форме $u = u_r(r, t)$. Внутренний и внешний радиусы трубы обозначим соответственно R_1 и R_2. К поверхности внутренней полости $r = R_1$ прикладывается давление $P = P(t)$. Считаем, что на боковую поверхность $r = R_2$ нанесено жесткое покрытие (например, из сплава на основе бериллия), предотвращающее расширение трубы $u(R_2,t)=0$. Будем рассматривать квазистатический процесс деформирования, то есть заданная нагрузка $P=P(t)$ будет претерпевать малые изменения с течением времени. Это позволяет разбить весь процесс деформирования на временные шаги, каждый из которых может рассматриваться как отдельная задача с заданной статической нагрузкой. Предполагаем, что деформации, возникающие при данном нагружении, будут малыми. Соответственно, тензор малых деформаций Альманси в нашем случае примет вид

$$d_{rr}=e_{rr}+p_{rr}=u_{,r},\quad d_{\varphi\varphi}=e_{\varphi\varphi}+p_{\varphi\varphi}=r^{-1}u,\quad d_{zz}=e_{zz}+p_{zz}=0. \qquad (1)$$

Напряжения будем определять согласно закону Гука:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\lambda\left(e_{rr}+e_{\varphi\varphi}+e_{zz}\right)+2\mu e_{rr},\\ \sigma_{\varphi\varphi}&=\lambda\left(e_{rr}+e_{\varphi\varphi}+e_{zz}\right)+2\mu e_{\varphi\varphi},\\ \sigma_{zz}&=\lambda\left(e_{rr}+e_{\varphi\varphi}+e_{zz}\right)+2\mu e_{zz}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Уравнения равновесия для данной кинематической постановки сведутся к одному уравнению:

$$\sigma_{rr,r}+r^{-1}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})=0. \qquad (3)$$

Используя соотношения (1), (2), уравнение равновесия (3) можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка относительно перемещения:

$$u_{,rr}+r^{-1}u_{,r}-r^{-2}u=r^{-1}\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}(p_{rr}-p_{\varphi\varphi})+ \\ +p_{rr,r}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(p_{\varphi\varphi,r}+p_{zz,r}). \qquad (4)$$

Представив левую часть уравнения (4) в форме [48]

$$u_{,rr}+r^{-1}u_{,r}-r^{-2}u=\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\Big),$$

проинтегрируем его и получим соотношение для нахождения компоненты вектора перемещений:

$$\begin{aligned}u(r,t)&=\frac{1}{2}C_1(t)r+C_2(t)r^{-1}+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}rI_1(r,t)+r^{-1}I_2(r,t),\\ I_1(r,t)&=\int_{R_1}^{r}x^{-1}\big(p_{rr}(x,t)-p_{\varphi\varphi}(x,t)\big)\,dx,\\ I_2(r,t)&=\int_{R_1}^{r}x\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\big(p_{rr}(x,t)+p_{\varphi\varphi}(x,t)\big)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p_{zz}(x,t)\Big)\,dx.\end{aligned} \qquad (5)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений примут вид

$$\sigma_{rr}=(\lambda+\mu)C_1-2\mu C_2r^{-2}+2\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}I_1-2\mu r^{-1}I_2,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda+\mu)C_1 + 2\mu C_2 r^{-2} + 2\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}I_1 + 2\mu r^{-1}I_2 - \\ - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\big(\lambda p_{zz} + 2(\lambda+\mu)p_{\varphi\varphi}\big), \tag{6}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda C_1 + 2\mu\Big(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}I_1 - 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}p_{zz} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p_{\varphi\varphi}\Big).$$

Коэффициенты интегрирования $C_1(t)$ и $C_2(t)$ найдем из граничных условий

$$\sigma_{rr}(R_1,t) = p(t) = -P(t), \quad u(R_2,t) = 0. \tag{7}$$

Здесь $p(t)$ — значение нормальной компоненты тензора напряжений на внутренней граничной поверхности, которая должна компенсировать приложенное к поверхности полости давление $P(t)$.

Подставив полученные значения перемещения (5) и напряжений (6) в граничные условия (7), найдем

$$C_1(t) = \frac{p(t)R_1^2}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2} - 2\mu I_3(t),$$

$$C_2(t) = -\frac{R_1^2}{2}\frac{p(t)R_2^2}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2} - (\lambda+\mu)R_1^2 I_3(t), \tag{8}$$

$$I_3(t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}\Big(\frac{\mu R_2^2}{\lambda+2\mu}I_1(R_2,t) + I_2(R_2,t)\Big).$$

С учетом коэффициентов (8) перемещение (5) запишется в виде

$$u(r,t) = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}rI_1(r,t) + r^{-1}I_2(r,t) - \\ - \frac{1}{2}r^{-1}\frac{R_1^2(r^2-R_2^2)}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}p(t) + \big(r\mu + (\lambda+\mu)R_1^2 r^{-1}\big)I_3(t). \tag{9}$$

Напряжения (6) будут находиться согласно формулам

$$\sigma_{rr} = 2\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}I_1(r,t) - 2\mu r^{-1}I_2(r,t) + \\ + R_1^2 r^{-2}\frac{(\lambda+\mu)r^2 + \mu R_2^2}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}p(t) - 2(r^2 - R_1^2)r^{-2}\mu(\lambda+\mu)I_3(t),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}I_1(r,t) + 2\mu r^{-1}I_2(r,t) - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\big(\lambda p_{zz} + 2(\lambda+\mu)p_{\varphi\varphi}\big) + \\ + R_1^2 r^{-2}\frac{(\lambda+\mu)r^2 - \mu R_2^2}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}p(t) - 2(r^2 + R_1^2)r^{-2}\mu(\lambda+\mu)I_3(t), \tag{10}$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\Big(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}I_1(r,t) - 2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}p_{zz} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p_{\varphi\varphi}\Big) + \\ + \frac{\lambda R_1^2}{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}p(t) - 2\lambda\mu I_3(t).$$

Полученные соотношения (9), (10) можно использовать для нахождения напряженно-деформированного состояния трубы при заданной нагрузке $p(t)$ на поверхности полости $r = R_1$ и известных накопленных необратимых деформациях p_{ij} на данном временном шаге. На внутренней ($r = R_1$) и внешней ($r = R_2$) боковых поверхностях трубы данные соотношения примут более простой вид. Для поверхности внутренней полости ($r = R_1$) получим

$$
\begin{aligned}
u(R_1,t) &= -\frac{1}{2}\frac{R_1(R_2^2-R_1^2)}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}p(t) - (\lambda+2\mu)R_1 I_3(t),\\
\sigma_{rr}(R_1,t) &= p(t),\\
\sigma_{\varphi\varphi}(R_1,t) &= \frac{(\lambda+\mu)R_1^2-\mu R_2^2}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}p(t) - 4\mu(\lambda+\mu)I_3(t) -\\
&\quad - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\big(\lambda p_{zz}(R_1,t) + 2(\lambda+\mu)p_{\varphi\varphi}(R_1,t)\big),\\
\sigma_{zz}(R_1,t) &= \frac{\lambda R_1^2}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}p(t) - 2\lambda\mu I_3(t) -\\
&\quad - 2\mu\Big(2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}p_{zz}(R_1,t) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p_{\varphi\varphi}(R_1,t)\Big).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

На боковой поверхности ($r = R_2$) они примут вид

$$
\begin{aligned}
u(R_2,t) &= 0,\\
\sigma_{rr}(R_2,t) &= 2\mu(\lambda+2\mu)I_4(t) + \frac{(\lambda+2\mu)R_1^2}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}p(t),\\
\sigma_{\varphi\varphi}(R_2,t) &= \frac{\lambda R_1^2}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}p(t) + 2\lambda\mu I_4(t) -\\
&\quad - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\big(\lambda p_{zz}(R_2,t) + 2(\lambda+\mu)p_{\varphi\varphi}(R_2,t)\big),\\
\sigma_{zz}(R_2,t) &= \frac{\lambda R_1^2}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}p(t) + 2\lambda\mu I_4(t) -\\
&\quad - 2\mu\Big(2\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}p_{zz}(R_2,t) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p_{\varphi\varphi}(R_2,t)\Big),\\
I_4(t) &= \frac{1}{(\lambda+\mu)R_1^2+\mu R_2^2}\Big(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}R_1^2 I_1(R_2,t) - I_2(R_2,t)\Big).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

2. Задание источника необратимых деформаций. Соотношения (9), (10) вместе с упрощенными формулами для границ расчетной области (11), (12) позволяют найти напряженно-деформированное состояние в теле в любой фиксированный момент времени при заданной нагрузке $p(t)$ и известных накопленных необратимых деформациях p_{ij}. Следовательно, осталось найти, как будут изменяться необратимые деформации при переходе с одного временного шага на следующий. Так как наибольший интерес в данной задаче представляет изучение вопроса о влиянии ползучести на процесс пластического течения, будем рассматривать процесс деформирования при высоких температурах. Это позволит при относительно небольших нагрузках и малой продолжительности времени наблюдать влияние на процесс деформирования как пластического течения, так и ползучести.

Для расчетов воспользуемся предположением, что скорость накопления необратимых деформаций равна сумме скоростей деформаций ползучести ε^v_{ij} и пластичности ε^p_{ij} [43–45]:

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \gamma_{ij} = \varepsilon^v_{ij} + \varepsilon^p_{ij}. \tag{13}$$

Для нахождения скоростей деформаций ползучести воспользуемся теорией типа течения [49] с потенциалом, соответствующим степенному закону Нортона [50] с октаэдрической мерой напряжения:

$$\begin{gathered}\varepsilon^v_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} = B\Sigma^n, \quad \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\tau_{ij}\tau_{ji}},\\ \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right),\\ \varepsilon^v_{ij} = \frac{3}{2}B\Sigma^{n-1}\tau_{ij}.\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь B, n — параметры ползучести, которые для стали 45 при температуре 725 °C согласно [46] примут соответственно значения $B = 3.5\cdot 10^{-14}$ МПа$^{-n}\cdot$ с$^{-1}$ и $n = 5.22$. В рассматриваемом случае соотношения (14) сведутся к

$$\begin{gathered}\varepsilon^v_{rr} = \frac{1}{2}B\Sigma^{n-1}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}\right),\\ \varepsilon^v_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}B\Sigma^{n-1}\left(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}\right),\\ \varepsilon^v_{zz} = \frac{1}{2}B\Sigma^{n-1}\left(2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right),\\ \Sigma = \sqrt{\sigma^2_{rr} + \sigma^2_{\varphi\varphi} + \sigma^2_{zz} - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz}}.\end{gathered} \tag{15}$$

Для нахождения скоростей деформаций пластичности воспользуемся теорией пластического течения с обобщенным условием максимальных октаэдрических напряжений Мизеса для случая вязкопластического течения:

$$\begin{gathered}\varepsilon^p_{ij} = \phi\frac{\partial f}{\partial \tau_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}\big(\tau_{ij} - \eta\varepsilon^p_{ij}\big)\big(\tau_{ji} - \eta\varepsilon^p_{ji}\big)} - \sigma_0,\\ \varepsilon^p_{ij} = \frac{\phi}{1+\phi\eta}\tau_{ij}, \quad \phi = \frac{1}{\eta}\Big(\frac{1}{2\sigma_0}\sqrt{\frac{3}{2}\tau_{ij}\tau_{ij}} - 1\Big),\\ \varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{\eta}\frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma}\tau_{ij}.\end{gathered} \tag{16}$$

В рассматриваемом случае скорости деформации пластичности (16) примут вид

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{rr}^{p} &= \frac{1}{3\eta}\frac{\Sigma-\sigma_0}{\Sigma}\left(2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{zz}\right),\\
\varepsilon_{\varphi\varphi}^{p} &= \frac{1}{3\eta}\frac{\Sigma-\sigma_0}{\Sigma}\left(2\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}-\sigma_{zz}\right),\\
\varepsilon_{zz}^{p} &= \frac{1}{3\eta}\frac{\Sigma-\sigma_0}{\Sigma}\left(2\sigma_{zz}-\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Здесь η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению, σ_0 — предел текучести материала.

Исходя из формул (13), (15), (17) получим, что скорость необратимых деформаций до начала пластического течения (при $\Sigma < \sigma_0$) будет находиться из соотношений (15), в то время как в области пластического течения (где выполняется неравенство $\Sigma(r,t) \geqslant \sigma_0$) они будут находиться из соотношений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp_{rr}}{dt} = \chi\left(2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{zz}\right), \qquad \frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \chi\left(2\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}-\sigma_{zz}\right),\\
&\frac{dp_{zz}}{dt} = \chi\left(2\sigma_{zz}-\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right), \qquad \chi(r,t) = \frac{1}{6\Sigma}\Big(3B\Sigma^{n}+\frac{2}{\eta}(\Sigma-\sigma_0)\Big).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

К сожалению, нахождение аналитического решения для полученных соотношений (15), (18) затруднительно, поэтому будем искать их решение численно. Для этого расчетную область разобьем на прямоугольные ячейки; значения функций в узлах полученной сетки будем обозначать как $f_i^j = f(r_i, t^j)$, где $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Соответственно, $r_0 = R_1$, $r_n = R_2$, $t^0 = 0$. Запишем производную по времени через конечную разность и получим явную разностную схему:

$$
{p_{lm}}_i^{j+1} = {p_{lm}}_i^{j} + {\gamma_{lm}}_i^{j}\Delta t,
\tag{19}
$$

где γ_{lm} находится соответственно либо из соотношений (15), либо из (18). Значения ${\sigma_{lm}}_i^j$, которые будут использоваться в соотношениях (19), будем находить из уравнений (10) при значениях $r = r_i$ и $t = t^j$.

3. Результаты расчетов. Рассмотрим деформирование трубы из стали 45 при температуре 725 °C. Параметры материала возьмем согласно [46]:

$$
\lambda = 113\cdot 10^{9}\ \text{Па},\quad \mu = 59\cdot 10^{9}\ \text{Па},\quad R_1 = 0.003\ \text{м},\quad R_2 = 0.008\ \text{м},
$$
$$
\sigma_0 = 80\cdot 10^{6}\ \text{Па},\quad \eta = 600\cdot 10^{6}\ \text{Па},\quad B = 1.675\cdot 10^{-45}\ \text{Па}^{-n}\cdot\text{с}^{-1}\quad n = 5.22.
$$

Функцию нагружения $p(t)$ зададим следующим образом:

$$
p(t) = \begin{cases}
p_{\max}\big(\frac{t}{t_1} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{t_1}\big), & 0 \leqslant t < t_1,\\
p_{\max}, & t_1 \leqslant t < t_2,\\
p_{\max}\big(1 - \frac{t-t_2}{t_3-t_2} + \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi(t-t_2)}{t_3-t_2}\big), & t_2 \leqslant t < t_3,\\
\quad 0, & t_3 \leqslant t \leqslant t_4.
\end{cases}
$$

Будем считать, что рост давления до максимального значения происходит за 10 секунд ($t_1 = 10$ с), труба выдерживается при данном давлении в течение 10 минут ($t_2 = 610$ с), затем происходит снятие давления также за 10 секунд

($t_3 = 620$ с) и еще в течение 3 минут продолжаем следить за релаксацией напряжений. Это в сумме приводит к общей продолжительности рассматриваемого процесса $t_4 = 800$ с.

Для оценки нагрузки, достаточной для появления пластического течения, рассмотрим чисто упругое деформирование. Из условия начала пластического течения ($\Sigma = \sigma_0$) получим выражение

$$p = \pm\frac{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}{\mu R_1^2\sqrt{r^4 + 3R_2^4}}\sigma_0 r^2.$$

Полученная в правой части последнего выражения функция является монотонно возрастающей по абсолютной величине. Следовательно, свое наименьшее значение она принимает при минимально допустимом значении r. В нашем случае это $r = R_1$. Это показывает, что пластическое течение зарождается на поверхности внутренней полости ($r = R_1$) при величине нагрузки

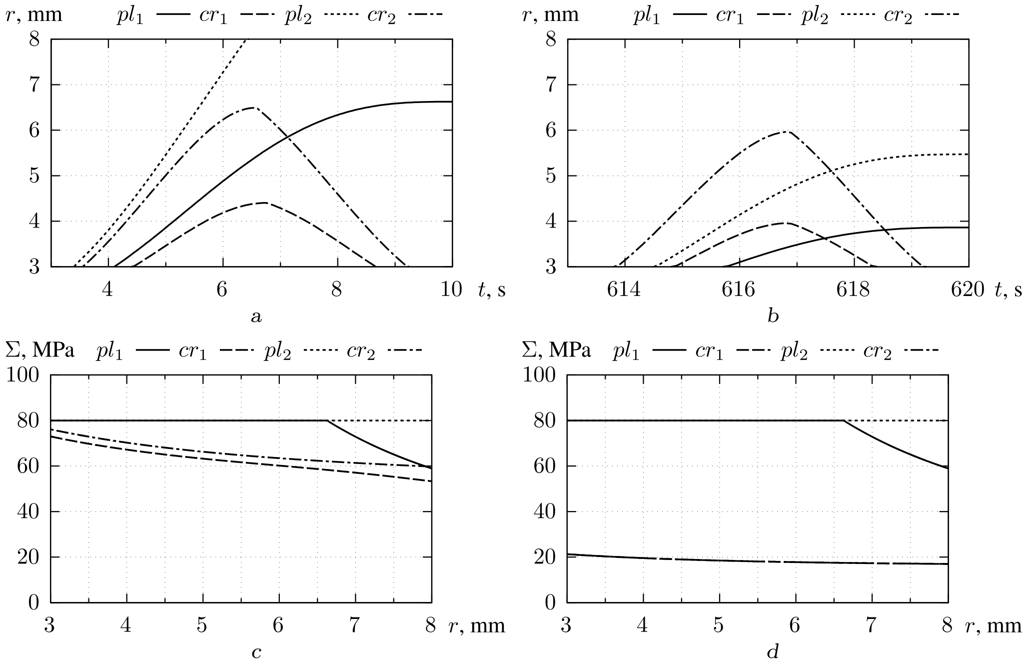
$$p = \pm\frac{(\lambda+\mu)R_1^2 + \mu R_2^2}{\mu\sqrt{R_1^4 + 3R_2^4}}\sigma_0 \approx \pm 64.9096\cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Однако в рассматриваемом случае ползучесть оказывает существенное влияние на снижение уровня напряжений в деформируемой среде, что в свою очередь приводит к увеличению значения нагрузки, необходимой для достижения напряжениями поверхности нагружения. Причем чем медленнее растет нагрузка, тем сильнее напряжения успевают релаксировать. Это, в свою очередь, приводит к увеличению минимальной нагрузки, необходимой для начала пластического течения. В связи с этим рассмотрим два случая со значениями максимальной нагрузки, равными соответственно $p^1_{\max} = -200$ МПа и $p^2_{\max} = -320$ МПа. Чтобы оценить, какое влияние оказывает ползучесть на процесс деформирования, найдем решение данных задач без учета ползучести, то есть положив скорость деформации ползучести ε^v_{ij} всегда равной нулю. Обозначим данные случаи через pl_1 и pl_2, в то время как случаи решения исходных задач будем обозначать через cr_1 и cr_2 при соответствующих максимальных нагрузках $p^1_{\max}$ и $p^2_{\max}$. Полученные результаты представлены на рис. 1 и 2. Для оценки уровня необратимых деформаций использовалась октаэдрическая мера деформаций, аналогичная таковой для напряжений (15):

$$P = \sqrt{p^2_{rr} + p^2_{\varphi\varphi} + p^2_{zz} - p_{rr}p_{\varphi\varphi} - p_{rr}p_{zz} - p_{\varphi\varphi}p_{zz}}.$$

Представленные на рисунках данные показывают, что при отсутствии ползучести (случаи pl_1 и pl_2) пластическое течение начинается у полости ($r = R_1$) и с ростом нагрузки постепенно распространяется в направлении боковой поверхности ($r = R_2$) (см. рис. 1, a). При достаточном значении нагрузки упругопластическая граница достигает боковой поверхности (случай pl_2). При фиксации нагрузки пластическое течение останавливается, то есть скорости деформаций пластичности становятся равными нулю ($\varepsilon^p_{ij} = 0$), но напряжения продолжают находиться на поверхности нагружения ($\Sigma = \sigma_0$), что хорошо видно из рис. 1, c и 1, d.

При уменьшении нагрузки уровень напряжений начинает снижаться, однако в связи с накопленными необратимыми деформациями p_{ij} с определенного момента октаэдрическое напряжение Σ снова начинает расти и повторно



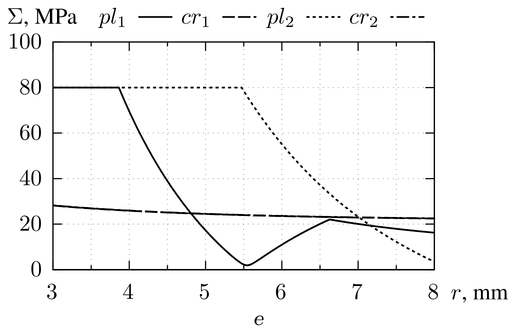
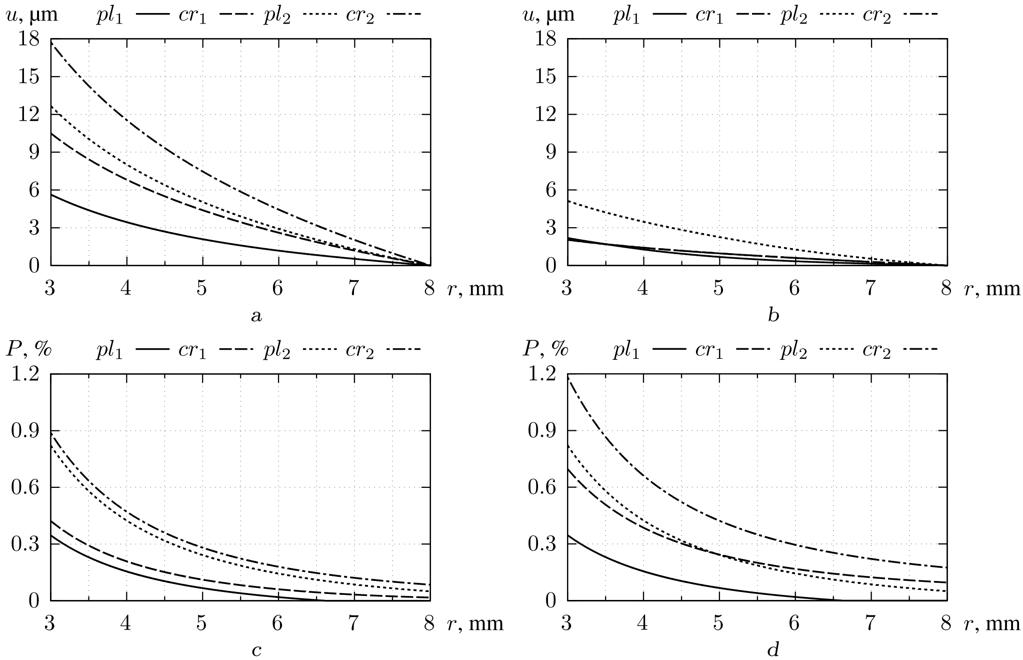


Рис. 1. Деформирование полой трубы с заданным максимальным внутренним давлением $P^1_{\max} = 200$ МПа и $P^2_{\max} = 320$ МПа с учетом деформации ползучести (случаи cr_1 и cr_2 соответственно) и без нее (случаи pl_1 и pl_2). Движение упругопластической границы на стадии увеличения внутреннего давления (a) и на стадии его уменьшения (b). Распределение октаэдрического напряжения Σ при $t = t_1$ (c), $t = t_2$ (d) и $t = t_4$ (e)

[Figure 1. Deformation of thick-walled cylinder under internal pressures $P^1_{\max} = 200$ MPa and $P^2_{\max} = 320$ MPa with creep properties (for cr_1 and cr_2 respectively) and without it (for pl_1 and pl_2). Evolution of the plastic regions with increasing (a) and decreasing (b) inner pressure. Stresses at time $t = t_1$ (c), $t = t_2$ (d) and $t = t_4$ (e)]

достигает поверхности нагружения (см. рис. 1, e), что, в свою очередь, приводит к появлению вторичного (повторного) пластического течения. Как и при росте нагрузки ($t \in [0; t_1]$), область пластического течения начинает распространяться от внутренней полости ($r = R_1$) к боковой поверхности ($r = R_2$) и накопление пластических деформаций останавливается при прекращении изменения нагрузки $p(t)$ (см. рис. 1, b). Можно заметить, что при бóльших накопленных необратимых деформациях (см. рис. 2, d), то есть при большем значении изначальной нагрузки (случай pl_2) повторное пластическое течение затрагивает большую область деформируемой среды. Из-за повторной пластичности уровень необратимых деформаций в окрестности внутренней полости ($r = R_1$) уменьшается (см. рис. 2, e).

Если же к рассмотрению добавить ползучесть материала (случаи cr_1 и cr_2), то можно заметить, что ползучесть оказывает значительное влияние на рас-



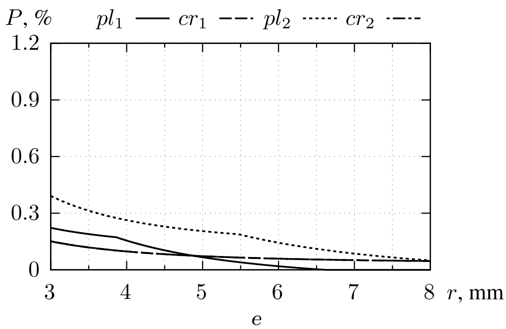


Рис. 2. Деформирование полой трубы с заданным максимальным внутренним давлением $P^1_{\max} = 200$ МПа и $P^2_{\max} = 320$ МПа с учетом деформации ползучести (случаи cr_1 и cr_2 соответственно) и без нее (случаи pl_1 и pl_2). Перемещение точек среды при $t = t_2$ (a) и $t = t_4$ (b). Распределение октаэдрической меры необратимых деформаций P при $t = t_1$ (c), $t = t_2$ (d) и $t = t_4$ (e)

[Figure 2. Deformation of thick-walled cylinder under internal pressures $P^1_{\max} = 200$ MPa and $P^2_{\max} = 320$ MPa with creep properties (for cr_1 and cr_2 respectively) and without it (for pl_1 and pl_2). Displacements at time $t = t_2$ (a) and $t = t_4$ (b). Irreversible strains at time $t = t_1$ (c), $t = t_2$ (d) and $t = t_4$ (e)]

пределение напряжений (см. рис. 1) и деформаций (см. рис. 2) в деформируемой среде. Так как с ростом напряжений в среде влияние ползучести становится более явным, можно заметить, что пластическое течение начинается лишь немного позднее (см. рис. 1, a), в то время как по мере распространения пластичности и уменьшения скорости роста нагрузки упругопластическая граница движется все медленнее. Это происходит вплоть до того момента, когда скорость релаксации напряжений начинает превышать скорость их прироста, связанного с увеличением нагрузки, что приводит к сходу напряжений с поверхности нагружения и сокращению области пластического течения еще во время роста нагрузки $p(t)$ (см. рис. 1, a). Наряду с сокращением уровня напряжений в среде ползучесть также приводит к их перераспределению (см. рис. 1, c), а именно к их оттоку из наиболее загруженного участка (в окрестности внутренней полости) к наименее загруженному (в окрестности боковой поверхности), что также хорошо видно на рис. 1, *c*.

Интересно, что после выдержки в течение 10 минут при фиксированной максимальной нагрузке уровень напряжений для двух рассматриваемых случаев становится практически одинаковым (см. рис. 1, *d*), в то время как перемещения и накопленные необратимые деформации остаются различными (см. рис. 2, *a* и 2, *d*). При уменьшении нагрузки также появляется повторное пластическое течение (см. рис. 1, *b*), и, как и ранее, чем больше накопленные необратимые деформации (см. рис. 2, *d*), тем раньше напряжения выходят на поверхность нагружения и тем большую область затрагивает пластическое течение. Однако, как и при нагрузке, ползучесть приводит к релаксации напряжений, что сказывается на распространении пластического течения (см. рис. 1, *b*).

После снятия нагрузки и выдержки в течение трех минут напряжения релаксируют и опять становятся одинаковыми для рассматриваемых случаев cr_1 и cr_2 (см. рис. 1, *e*). Аналогичным образом сократятся и сравняются перемещения (см. рис. 2, *b*) и необратимые деформации (см. рис. 2, *e*). Это связано с тем, что после снятия нагрузки ползучесть приводит к интенсивной релаксации напряжений за счет сокращения деформаций и, соответственно, перемещений. При указанной выдержке в три минуты релаксация достаточно велика, чтобы нивелировать разницу между двумя рассматриваемыми случаями нагружения $p^1_{\max}$ и $p^2_{\max}$.

Заключение (выводы). В результате проделанной работы составлена математическая модель, позволяющая рассчитать перемещения и напряжения в толстостенной трубе с жестким покрытием при заданном внутреннем давлении и известном распределении необратимых деформаций. Произведен расчет по данной модели для случая деформирования особо толстостенной трубы с наружным диаметром 16 мм и толщиной стенки 5 мм из стали 45 под давлением 200 и 320 МПа при температуре 725 °C.

Результаты расчетов показали, что при заданных условиях ползучесть оказывает значительное влияние на процесс деформирования даже при относительно небольших временных промежутках. Ползучесть значительно сокращает область влияния пластического течения (см. рис. 1, *a*) и при длительном воздействии сокращает и выравнивает уровень напряжений в деформируемой среде (см. рис. 1, *d*). Однако это происходит за счет значительного роста деформаций и, соответственно, перемещений (см. рис. 2).

После снятия нагрузки наблюдается постепенная релаксация напряжений (см. рис. 1, *e*), также сопровождающаяся сокращением деформаций и перемещений (см. рис. 2, *b* и 2, *e*). В результате данного процесса в течение трех минут напряжения, перемещения и деформации в материале снижаются до определенного уровня, практически одинакового для двух рассматриваемых случаев. Если увеличить время выдержки, то напряжения и деформации продолжат уменьшаться и разница между двумя рассматриваемыми случаями станет еще меньше. Стоит отметить, что уровень остаточных деформаций и перемещений при учете ползучести все еще выше случая упругопластического деформирования при давлении 200 МПа, однако ниже, чем при давлении 320 МПа.

Данные выводы сделаны только для рассматриваемых граничных условий, и неизвестно, останутся ли они справедливыми при других граничных условиях. Как было показано ранее в работах [43–45], при различных граничных условиях и кинематических постановках для задач вращения цилиндров ползучесть будет вести себя по-разному. Соответственно, в дальнейшем планируется рассмотреть задачу деформирования трубы и сравнить полученные значения с приведенными здесь результатами, что позволит узнать, какое влияние оказывает наличие жесткого покрытия на боковой стенке на эволюцию напряжений и деформаций в среде. Ведь в трубе, по крайней мере, пластическое течение начнется при меньших значениях внутреннего давления, что легко можно получить из упругого решения:

$$p = \pm \frac{(\lambda+\mu)(R_2^2 - R_1^2)}{\sqrt{\mu^2 R_1^4 + 3(\lambda+\mu)^2 R_2^4}}\sigma_0 \approx \pm 39.6774 \text{ МПа}.$$

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа проводилась в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

Благодарность. Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Nadai A. *Plasticity.* New York, London: McGraw Hill Book Comp., 1931. 392 pp.
2. Hill R., Lee E. H., Tupper S. J. The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure // *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1947. vol. 191, no. 1026. pp. 278–303. https://doi.org/10.1098/rspa.1947.0116.
3. Cook G. The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstrained by internal pressure // *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1934. vol. 126, no. 1. pp. 407–455. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1934_126_019_02.
4. Allen D. N., Sopwith D. G. The stresses and strains in a partly plastic thick tube under internal pressure and end-load // *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1951. vol. 205, no. 1080. pp. 69–83. https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0018.
5. Steele M. C. Partially plastic thick-walled cylinder theory // *J. Appl. Mech.*, 1952. vol. 19, no. 2. pp. 133–140. https://doi.org/10.1115/1.4010436.
6. Соколовский В. В. *Теория пластичности.* М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
7. Chu S. C., Vasilakis J. D. Inelastic behavior of thick-walled cylinders subjected to nonproportionate loading // *Exp. Mech.*, 1973. vol. 13, no. 3. pp. 113–119. https://doi.org/10.1007/BF02323968.
8. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1992. vol. 52, no. 1. pp. 129–144. https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90064-M.
9. Chu S.-C. A more rational approach to the problem of an elastoplastic thick-walled cylinder // *J. Franklin Inst.*, 1972. vol. 294, no. 1. pp. 57–65. https://doi.org/10.1016/0016-0032(72)90113-5.
10. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for a closed-end thick-walled cylinder of elastic linear-hardening material with large strains // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1993. vol. 56, no. 3. pp. 331–350. https://doi.org/10.1016/0308-0161(93)90004-D.

11. Durban D. Large strain solution for pressurized elasto/plastic tubes // *J. Appl. Mech.*, 1979. vol. 46, no. 1. pp. 228–330. https://doi.org/10.1115/1.3424511.
12. Bonn R., Haupt P. Exact solutions for large elastoplastic deformations of a thick-walled tube under internal pressure // *Int. J. Plast.*, 1995. vol. 11, no. 1. pp. 99–118. https://doi.org/10.1016/0749-6419(94)00040-9.
13. MacGregor C. W., Coffin L. F., Fisher J. C. The plastic flow of thick-walled tubes with large strains // *J. Appl. Phys.*, 1948. vol. 19, no. 3. pp. 291–297. https://doi.org/10.1063/1.1715060.
14. Durban D. Finite straining of pressurized compressible elasto-plastic tubes // *Int. J. Eng. Sci.*, 1988. vol. 26, no. 9. pp. 939–950. https://doi.org/10.1016/0020-7225(88)90023-7.
15. Durban D., Kubi M. A general solution for the pressurized elastoplastic tube // *J. Appl. Mech.*, 1992. vol. 59, no. 1. pp. 20–26. https://doi.org/10.1115/1.2899431.
16. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory // *Int. J. Solids Struct.*, 2003. vol. 40, no. 23. pp. 6445–6455. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00424-4.
17. Darijani H., Kargarnovin M. H., Naghdabadi R. Design of thick-walled cylindrical vessels under internal pressure based on elasto-plastic approach // *Mat. Des.*, 2009. vol. 30, no. 9. pp. 3537–3544. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.03.010.
18. Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition // *Compos. B. Eng.*, 2018. vol. 154. pp. 410–422. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022.
19. Coffin L. F., Jr., Shepler P. R., Cherniak G. S. Primary creep in the design of internal-pressure vessels // *J. Appl. Mech.*, 1949. vol. 16, no. 3. pp. 229–241. https://doi.org/10.1115/1.4009970.
20. Weir C. D. The creep of thick tubes under internal pressure // *J. Appl. Mech.*, 1957. vol. 24, no. 3. pp. 464–466. https://doi.org/10.1115/1.4011565.
21. Sankaranarayanan R. Steady creep of circular cylindrical shells under combined lateral and axial pressures // *Int. J. Solids Struct.*, 1969. vol. 5, no. 1. pp. 17–32. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90066-3.
22. Murakami S., Iwatsuki S. Transient creep of circular cylindrical shells // *Int. J. Solids Struct.*, 1969. vol. 11, no. 11. pp. 897–912. https://doi.org/10.1016/0020-7403(69)90016-2.
23. Murakami S., Iwatsuki S. Steady-state creep of circular cylindrical shells // *Bull. JSME*, 1971. vol. 14, no. 73. pp. 615–623. https://doi.org/10.1299/jsme1958.14.615.
24. Murakami S., Suzuki K. On the creep analysis of pressurized circular cylindrical shells // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1971. vol. 6, no. 3. pp. 377–392. https://doi.org/10.1016/0020-7462(71)90016-3.
25. Murakami S., Tanaka E. On the creep buckling of circular cylindrical shells // *Int. J. Mech. Sci.*, 1976. vol. 18, no. 4. pp. 185–194. https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90024-2.
26. Pai D. H. Steady-state creep analysis of thick-walled orthotropic cylinders // *Int. J. Mech. Sci.*, 1967. vol. 9, no. 6. pp. 335–348. https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90039-2.
27. Bhatnagar N. S., Gupta S. K. Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // *J. Phys. Soc. Japan*, 1969. vol. 27, no. 6. pp. 1655–1661. https://doi.org/10.1143/JPSJ.27.1655.
28. Bhatnagar N. S., Arya V. K. Large strain creep analysis of thick-walled cylinders // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1974. vol. 9, no. 2. pp. 127–140. https://doi.org/10.1016/0020-7462(74)90004-3.
29. Sharma S., Sahni M., Kumar R. Thermo creep transition of transversely isotropic thick-walled rotating cylinder under internal pressure // *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 2010. vol. 5, no. 11. pp. 517–527.

30. Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // *Compos. Struct.*, 2011. vol. 93, no. 2. pp. 747–758. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.08.005.
31. Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K. Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges // *Acta Mech.*, 2008. vol. 195, no. 1. pp. 263–274. https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5.
32. Chen J. J., Tu S. T., Xuan F. Z., Wang Z. D. Creep analysis for a functionally graded cylinder subjected to internal and external pressure // *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 2007. vol. 42, no. 2. pp. 69–77. https://doi.org/10.1243/03093247JSA237.
33. You L. H., Ou H., Zheng Z. Y. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure // *Compos. Struct.*, 2007. vol. 78, no. 2. pp. 285–291. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.10.002.
34. Jamian S., Sato H., Tsukamoto H., Watanabe Y. Creep Analysis of functionally graded material thick-walled cylinder // *Appl. Mech. Mater.*, 2013. vol. 315. pp. 867–871. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.315.867.
35. Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Amir S., Vajedi A. Magnetothermoelastic creep analysis of functionally graded cylinders // *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2010. vol. 87, no. 7. pp. 389–395. https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2010.05.001.
36. Singh T., Gupta V. K. Analysis of steady state creep in Whisker reinforced functionally graded thick cylinder subjected to internal pressure by considering residual stress // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2014. vol. 21, no. 5. pp. 384–392. https://doi.org/10.1080/15376494.2012.697600.
37. Gupta S. K., Pathak S. Thermo creep transition in a thick-walled circular cylinder under internal pressure // *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2001. vol. 32, no. 2. pp. 237–253.
38. Sharma S., Sahay I., Kumar R. Creep transition in non homogeneous thick-walled circular cylinder under internal and external pressure // *Appl. Math. Sci.*, 2012. vol. 6, no. 122. pp. 6075–6080.
39. Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Об изменяющихся механизмах производства больших необратимых деформаций в условиях прямолинейного движения в цилиндрическом слое // *Изв. РАН. МТТ*, 2020. №2. С. 10–21. https://doi.org/10.31857/S0572329920020099.
40. Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и пластическое течение материала сферического вязкоупругопластического слоя при его нагрузке и разгрузке // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, №2. С. 270–283. https://doi.org/10.14498/vsgtu1687.
41. Бегун А. С., Ковтанюк Л. В., Лемза А. О. Ползучесть и релаксация напряжений при нагружении и разгрузке цилиндрического слоя с учетом развития и торможения вязкопластического течения // *ПМТФ*, 2019. Т. 60, №4 (356). С. 183–193. https://doi.org/10.15372/PMTF20190420.
42. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Ползучесть и пластическое течение материала толстостенной цилиндрической трубы вследствие действия равномерного внутреннего давления // *Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2020. №3 (45). С. 72–79. https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.91.51.007.
43. Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // *Изв. Алт. гос. ун-та.*, 2018. Т. 102, №4. С. 114–117. https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21.
44. Фирсов С. В., Прокудин А. Н. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся полом цилиндре // *Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2019. №4 (42). С. 45–55. https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.42.4.005.
45. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2019. Т. 22, №4. С. 121–133. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.412.

46. Банщикова И. А., Горев Б. В., Сухоруков И. В. Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2002. Т. 43, № 3. С. 129–139.
47. Кузнецов Е. Б., Леонов С. С. Методика выбора функций определяющих уравнений ползучести и длительной прочности с одним скалярным параметром поврежденности // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 2. С. 202–211. `https://doi.org/10.15372/PMTF20160221`.
48. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 3. С. 86–99. `https://doi.org/10.1134/S0572329919030073`.
49. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 2014. 752 с.
50. Norton F. H. *The Creep of Steel at High Temperatures* / Classic Reprint Series. London: Forgotten Books, 2017. 102 pp.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 696–715
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1877

MSC: 34B05, 74C10

Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure

S. V. Firsov

Institute of Machinery and Metallurgy, KhFRC FEB RAS,
1, Metallurgov street, Komsomolsk-na-Amure, 681005, Russian Federation.

Abstract

The creep and plastic flow of cylindrical pressurized vessel with rigid casing was considered. To combine creep and plastic deformations the vessel was heated and subjected to the high inner pressure. The semi-analytical solution for plain strain problem of a thick-walled cylinder with rigid casing in the frame of small strain theory was obtained in this paper. This solution consists of analytical formula for displacement distribution with asking values of pressure and irreversible strains (plastic and creep) and a numerical solution for irreversible strain values. The Norton power law and advanced Mises condition for viscoplasticity, associated with flow rules have been used to describe creep and plastic behavior of medium.

Four stages of the deformation process were considered: pressure increasing, pressure fixed on maximum value for a long time, pressure decreasing and relaxing stage with zero pressure. Two cases of maximum pressure values of 200 MPa and 320 MPa were studied. An additional case of elastoplastic deformation was considered to investigate the influence of creep on the deformational process. It has been observed that creep has a significant influence on stress and strain evolution in medium, especially on stages with maximum and zero pressure. Also, because of the creep plastic flow evolves slower and stoppes earlier on the loading stage. In the unloading stage, the plastic flow starts earlier and affects greater area due to greater irreversible strains. Creep leads to sufficient stress relaxation and stresses for two pressure cases get similar values at the end of the stage with maximum pressure value. At the end of the relaxing stage besides stresses displacement and deformation also became similar for the two cases.

Keywords: cylinder, thick-walled tube, tube with a rigid casing, creep and plastic flow, viscoplasticity, internal pressure, plain strain, small strain.

Received: 23rd August, 2021 / Revised: 30th November, 2021 /
Accepted: 6th December, 2021 / First online: 23rd December, 2021

Research Article

Please cite this paper in press as:
Firsov S. V. Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 696–715. https://doi.org/10.14498/vsgtu1877 (In Russian).

Author's Details:
Sergey V. Firsov https://orcid.org/0000-0001-7446-6231
Junior Researcher; e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The work was carried out within the framework of the state task of the KhFRC FEB RAS.

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewers for carefully reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Nadai A. *Plasticity.* New York, London, McGraw Hill Book Comp., 1931, 392 pp.
2. Hill R., Lee E. H., Tupper S. J. The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1947, vol. 191, no. 1026, pp. 278–303. https://doi.org/10.1098/rspa.1947.0116.
3. Cook G. The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstrained by internal pressure, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 1934, vol. 126, no. 1, pp. 407–455. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1934_126_019_02.
4. Allen D. N., Sopwith D. G. The stresses and strains in a partly plastic thick tube under internal pressure and end-load, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 1951, vol. 205, no. 1080, pp. 69–83. https://doi.org/10.1098/rspa.1951.0018.
5. Steele M. C. Partially plastic thick-walled cylinder theory, *J. Appl. Mech.*, 1952, vol. 19, no. 2, pp. 133–140. https://doi.org/10.1115/1.4010436.
6. Sokolovsky V. V. *Teoriia plastichnosti* [Theory of Plasticity]. Moscow, Vyssh. Shkola, 1969, 608 pp. (In Russian)
7. Chu S. C., Vasilakis J. D. Inelastic behavior of thick-walled cylinders subjected to nonproportionate loading, *Exp. Mech.*, 1973, vol. 13, no. 3, pp. 113–119. https://doi.org/10.1007/BF02323968.
8. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1992, vol. 52, no. 1, pp. 129–144. https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90064-M.
9. Chu S.-C. A more rational approach to the problem of an elastoplastic thick-walled cylinder, *J. Franklin Inst.*, 1972, vol. 294, no. 1, pp. 57–65. https://doi.org/10.1016/0016-0032(72)90113-5.
10. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for a closed-end thick-walled cylinder of elastic linear-hardening material with large strains, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 1993, vol. 56, no. 3, pp. 331–350. https://doi.org/10.1016/0308-0161(93)90004-D.
11. Durban D. Large strain solution for pressurized elasto/plastic tubes, *J. Appl. Mech.*, 1979, vol. 46, no. 1, pp. 228–330. https://doi.org/10.1115/1.3424511.
12. Bonn R., Haupt P. Exact solutions for large elastoplastic deformations of a thick-walled tube under internal pressure, *Int. J. Plast.*, 1995, vol. 11, no. 1, pp. 99–118. https://doi.org/10.1016/0749-6419(94)00040-9.
13. MacGregor C. W., Coffin L. F., Fisher J. C. The plastic flow of thick-walled tubes with large strains, *J. Appl. Phys.*, 1948, vol. 19, no. 3, pp. 291–297. https://doi.org/10.1063/1.1715060.
14. Durban D. Finite straining of pressurized compressible elasto-plastic tubes, *Int. J. Eng. Sci.*, 1988, vol. 26, no. 9, pp. 939–950. https://doi.org/10.1016/0020-7225(88)90023-7.
15. Durban D., Kubi M. A general solution for the pressurized elastoplastic tube, *J. Appl. Mech.*, 1992, vol. 59, no. 1, pp. 20–26. https://doi.org/10.1115/1.2899431.
16. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory, *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, no. 23, pp. 6445–6455. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00424-4.

17. Darijani H., Kargarnovin M. H., Naghdabadi R. Design of thick-walled cylindrical vessels under internal pressure based on elasto-plastic approach, *Mat. Des.*, 2009, vol. 30, no. 9, pp. 3537–3544. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.03.010.
18. Nejad M. Z., Alamzadeh N., Hadi A. Thermoelastoplastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels in linear elastic-fully plastic condition, *Compos. B. Eng.*, 2018, vol. 154, pp. 410–422. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.09.022.
19. Coffin L. F., Jr., Shepler P. R., Cherniak G. S. Primary creep in the design of internal-pressure vessels, *J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, no. 3, pp. 229–241. https://doi.org/10.1115/1.4009970.
20. Weir C. D. The creep of thick tubes under internal pressure, *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, no. 3, pp. 464–466. https://doi.org/10.1115/1.4011565.
21. Sankaranarayanan R. Steady creep of circular cylindrical shells under combined lateral and axial pressures, *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 17–32. https://doi.org/10.1016/0020-7683(69)90066-3.
22. Murakami S., Iwatsuki S. Transient creep of circular cylindrical shells, *Int. J. Solids Struct.*, 1969, vol. 11, no. 11, pp. 897–912. https://doi.org/10.1016/0020-7403(69)90016-2.
23. Murakami S., Iwatsuki S. Steady-state creep of circular cylindrical shells, *Bull. JSME*, 1971, vol. 14, no. 73, pp. 615–623. https://doi.org/10.1299/jsme1958.14.615.
24. Murakami S., Suzuki K. On the creep analysis of pressurized circular cylindrical shells, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1971, vol. 6, no. 3, pp. 377–392. https://doi.org/10.1016/0020-7462(71)90016-3.
25. Murakami S., Tanaka E. On the creep buckling of circular cylindrical shells, *Int. J. Mech. Sci.*, 1976, vol. 18, no. 4, pp. 185–194. https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90024-2.
26. Pai D. H. Steady-state creep analysis of thick-walled orthotropic cylinders, *Int. J. Mech. Sci.*, 1967, vol. 9, no. 6, pp. 335–348. https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90039-2.
27. Bhatnagar N. S., Gupta S. K. Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep, *J. Phys. Soc. Japan*, 1969, vol. 27, no. 6, pp. 1655–1661. https://doi.org/10.1143/JPSJ.27.1655.
28. Bhatnagar N. S., Arya V. K. Large strain creep analysis of thick-walled cylinders, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1974, vol. 9, no. 2, pp. 127–140. https://doi.org/10.1016/0020-7462(74)90004-3.
29. Sharma S., Sahni M., Kumar R. Thermo creep transition of transversely isotropic thick-walled rotating cylinder under internal pressure, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 2010, vol. 5, no. 11, pp. 517–527.
30. Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder, *Compos. Struct.*, 2011, vol. 93, no. 2, pp. 747–758. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.08.005.
31. Altenbach H., Gorash Y., Naumenko K. Steady-state creep of a pressurized thick cylinder in both the linear and the power law ranges, *Acta Mech.*, 2008, vol. 195, no. 1, pp. 263–274. https://doi.org/10.1007/s00707-007-0546-5.
32. Chen J. J., Tu S. T., Xuan F. Z., Wang Z. D. Creep analysis for a functionally graded cylinder subjected to internal and external pressure, *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 69–77. https://doi.org/10.1243/03093247JSA237.
33. You L. H., Ou H., Zheng Z. Y. Creep deformations and stresses in thick-walled cylindrical vessels of functionally graded materials subjected to internal pressure, *Compos. Struct.*, 2007, vol. 78, no. 2, pp. 285–291. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.10.002.
34. Jamian S., Sato H., Tsukamoto H., Watanabe Y. Creep analysis of functionally graded material thick-walled cylinder, *Appl. Mech. Mater.*, 2013, vol. 315, pp. 867–871. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.315.867.
35. Loghman A., Ghorbanpour Arani A., Amir S., Vajedi A. Magnetothermoelastic creep analysis of functionally graded cylinders, *Int. J. Pres. Ves. Pip.*, 2010, vol. 87, no. 7, pp. 389–395. https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2010.05.001.

36. Singh T., Gupta V. K. Analysis of steady state creep in Whisker reinforced functionally graded thick cylinder subjected to internal pressure by considering residual stress, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 384–392. https://doi.org/10.1080/15376494.2012.697600.
37. Gupta S. K., Pathak S. Thermo creep transition in a thick-walled circular cylinder under internal pressure, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2001, vol. 32, no. 2, pp. 237–253.
38. Sharma S., Sahay I., Kumar R. Creep transition in non homogeneous thick-walled circular cylinder under internal and external pressure, *Appl. Math. Sci.*, 2012, vol. 6, no. 122, pp. 6075–6080.
39. Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. On the changing mechanisms of the production of large irreversible deformations in the conditions of rectilinear motion in a cylindrical layer, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 2, pp. 162–171. https://doi.org/10.3103/S0025654420020132.
40. Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and plastic flow of a spherical viscoelastic layer material at its loading and unloading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 270–283 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1687.
41. Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Lemza A. O. Creep and stress relaxation in the case of loading and unloading of a cylindrical layer with allowance for the development and deceleration of a viscoplastic flow, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 4, pp. 748–757. https://doi.org/10.1134/S0021894419040205.
42. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Creep and plastic flow of a material of a thick-walled cylindrical pipe under the action of uniform internal pressure, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2020, no. 3 (45), pp. 72–79 (In Russian). https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.91.51.007.
43. Firsov S. V. Irreversible deformations of a rotating cylinder, *Izv. Altai State Univ.*, 2018, vol. 102, no. 4, pp. 114–117 (In Russian). https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21.
44. Firsov S. V., Prokudin A. N. Creep and plastic flow in rotating hollow cylinder, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2019, no. 4 (42), pp. 45–55 (In Russian). https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.42.4.005.
45. Firsov S. V., Prokudin A. N., Burenin A. A. Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion, *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, vol. 13, no. 4, pp. 642–652. https://doi.org/10.1134/S1990478919040070.
46. Banshchikova I. A., Gorev B. V., Sukhorukov I. V. Twodimensional problems of beam forming under conditions of creep, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 3, pp. 448–456. https://doi.org/10.1023/A:1015382723827.
47. Kuznetsov E. B., Leonov S. S. Technique for selecting the functions of the constitutive equations of creep and long-term strength with one scalar damage parameter, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 369–377. https://doi.org/10.1134/S0021894416020218.
48. Burenin A. A., Tkacheva V. E. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 559–569. https://doi.org/10.3103/S0025654419040095.
49. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members.* Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
50. Norton F. H. *The Creep of Steel at High Temperatures*, Classic Reprint Series. London, Forgotten Books, 2017, 102 pp.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 716–737
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1876

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

УДК 519.254, 004.94

Математическое моделирование процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с применением SVD-фильтра Калмана

А. Н. Кувшинова[1], *А. В. Цыганов*[1], *Ю. В. Цыганова*[2]

[1] Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Россия, 432071, Ульяновск, пл. Ленина, 4/5.
[2] Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

Аннотация

Рассматривается задача математического моделирования процесса идентификации коэффициентов уравнения в частных производных в моделях конвективно-диффузионного переноса по результатам зашумленных измерений значений искомой функции с применением нового метода, относящегося к классу рекуррентных методов параметрической идентификации на основе алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации калмановского типа. Рассматриваются одномерные модели с постоянными коэффициентами, граничными условиями первого рода или смешанными граничными условиями первого и третьего рода.

Предлагаемый метод решения задачи основан на переходе от исходной непрерывной модели с уравнением в частных производных к модели, описываемой линейной дискретной динамической системой в пространстве состояний, и применении к ней метода максимального правдоподобия с построением критерия идентификации (функции правдоподобия)

Научная статья

Образец для цитирования
Кувшинова А. Н., Цыганов А. В., Цыганова Ю. В. Математическое моделирование процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса с применением SVD-фильтра Калмана // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 716–737. https://doi.org/10.14498/vsgtu1876.

Сведения об авторах

Анастасия Николаевна Кувшинова https://orcid.org/0000-0002-3496-5981
аспирант; каф. высшей математики; e-mail: kuvanulspu@yandex.ru

Андрей Владимирович Цыганов https://orcid.org/0000-0002-4173-5199
кандидат физико-математических наук, доцент; профессор; каф. высшей математики; e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Юлия Владимировна Цыганова https://orcid.org/0000-0001-8812-6035
доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. информационных технологий; e-mail: tsyganovajv@gmail.com

на основе величин, вычисляемых SVD-модификацией фильтра Калмана. Данный фильтр основан на сингулярном разложении ковариационной матрицы ошибок оценивания вектора состояния и устойчиво работает даже в тех случаях, когда она близка к вырожденной. SVD-фильтр хорошо зарекомендовал себя при решении различных задач дискретной фильтрации и параметрической идентификации и обладает целым рядом преимуществ по сравнению с традиционно используемым стандартным фильтром Калмана, главным из которых является устойчивость к ошибкам машинного округления.

Приводятся результаты компьютерного моделирования процессов параметрической идентификации в системе MATLAB с использованием специализированного программного комплекса. Результаты численных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного метода и его преимущества по сравнению с аналогичным методом на основе стандартного фильтра Калмана.

Ключевые слова: модель конвективно-диффузионного переноса, параметрическая идентификация, фильтр Калмана, SVD-фильтр.

Получение: 3 августа 2021 г. / Исправление: 7 декабря 2021 г. / Принятие: 21 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2021 г.

Введение и постановка задачи. Математические модели, описываемые уравнениями в частных производных, в частности, модели конвективно-диффузионного переноса, широко используются для описания природных и технических процессов [1, 2]. Для данных моделей актуальными являются задачи идентификации их параметров по результатам измерений значений искомой функции в отдельных точках рассматриваемой области. Такие задачи относятся к обратными задачам математической физики и в общем случае являются некорректно поставленными [3].

В ряде работ (см., например, [4–9] для решения задач параметрической идентификации моделей, описываемых уравнениями в частных производных, предложено использовать рекуррентные методы, основанные на алгоритмах дискретной фильтрации калмановского типа. Такой подход обладает рядом преимуществ, например для систем, работающих в реальном времени, однако следует заметить, что эффективность реализации рекуррентных методов параметрической идентификации может существенно зависеть от выбора соответствующих алгоритмов оптимальной дискретной фильтрации, поскольку недостатки классического фильтра Калмана, в частности неустойчивость к ошибкам машинного округления, широко известны и описаны в литературе [10]. В связи с этим актуальными являются вопросы разработки алгоритмов параметрической идентификации на основе численно эффективных модификаций фильтра Калмана.

Пусть дана математическая модель конвективно-диффузионного переноса, описываемая следующими уравнениями:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x}, \tag{1}$$

$$c(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$c(a,t) = f(t), \tag{3}$$

$$c(b,t) = g(t), \tag{4}$$

или
$$\frac{\partial c(b,t)}{\partial x} = -\lambda[c(b,t) - g(t)], \tag{5}$$
где $x \in [a;b]$ — пространственная координата; $t \in [0;T]$ — время; $c(x,t)$ — искомая функция, например концентрация некоторого вещества в потоке жидкости в точке с координатой x в момент времени t; v — скорость конвекции; α — коэффициент диффузии; (2) — начальное условие; (3), (4), (5) — граничные условия. Таким образом, рассматриваются модели либо с граничными условиями первого рода, либо со смешанными граничными условиями первого и третьего рода.

Рассмотрим задачу параметрической идентификации, состоящую в определении коэффициентов v и α в уравнении (1) по результатам зашумленных измерений значений функции $c(x,t)$ в отдельных точках рассматриваемого отрезка в различные моменты времени (функции $\varphi(x)$, $f(t)$, $g(t)$ и коэффициентов λ, входящих в начальное и граничные условия предполагаются известными).

Данная задача ранее исследовалась авторами в работах [11–13], однако в них использовались методы идентификации на основе стандартного фильтра Калмана. Основной целью данной статьи является разработка нового метода параметрической идентификации для моделей конвективно-диффузионного переноса на основе SVD-модификации фильтра Калмана и исследование его преимуществ по сравнению со стандартным фильтром с применением методов и средств компьютерного моделирования.

1. Дискретизация исходной модели. Перейдем от исходной непрерывной модели к дискретной модели, описываемой линейной динамической системой в пространстве состояний. Следуя [12, 13], зададим в рассматриваемой пространственно-временной области конечно-разностную сетку $\{(x_i, t_k) \mid i = 0, 1, \ldots, N,\ k = 0, 1, \ldots, K\}$, где
$$x_i = a + i\Delta x, \quad t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = \frac{b-a}{N-1}, \quad \Delta t = \frac{T}{K-1}.$$
Обозначим $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $c_i^0 = c(x_i, 0) = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$. Заменяя частные производные в уравнении (1) их конечно-разностными аппроксимациями, в случае граничных условий (3), (4) получаем дискретную линейную динамическую систему
$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix}}_{u_{k-1}},$$
$$k = 1, 2, \ldots, K, \tag{6}$$

а в случае граничных условий (3), (5) —

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{bmatrix}}_{c_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_4a_1 & a_4a_2 & a_4a_3 \end{bmatrix}}_{F_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{bmatrix}}_{c_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^k \end{bmatrix}}_{u_{k-1}},$$

$$k = 1, 2, \dots, K. \quad (7)$$

Системы (6) и (7) являются дискретными линейными динамическими системами, в которых граничные условия входят в двумерный вектор входных воздействий u_k. Коэффициенты в матрицах обеих систем имеют следующий вид:

$$a_1 = r_1 + r_2, \quad a_2 = 1 - 2r_2, \quad a_3 = r_2 - r_1, \quad a_4 = \frac{1}{1 + \lambda\Delta x}, \quad a_5 = \frac{\lambda\Delta x}{1 + \lambda\Delta x},$$

где

$$r_1 = \frac{v\Delta t}{2\Delta x}, \quad r_2 = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2},$$

а сами матрицы являются постоянными ($F_k = F \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_k = B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$).

В системе (6) $n = N-1$ — вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки, а в системе (7) $n = N$ — вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки и правой границы.

2. Выбор структуры измерителя. Добавим к уравнениям (6) и (7) модель измерителя в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ \vdots \\ z_m^k \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_n^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (8)$$

где $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица измерений, определяющая структуру измерителя; m — количество измеряемых компонент вектора состояния c_k; $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ — погрешность измерителя. Очевидным выбором является $H = I$, где I — единичная матрица. Однако это решение избыточное, поскольку единичная матрица означает наличие n сенсоров для сбора данных измерений.

Обозначим через θ неизвестный (в общем случае векторный) параметр линейной динамической системы (6) или (7), подлежащий идентификации. Поставим задачу выбора структуры измерителя с минимальным количеством сенсоров, при которой обеспечивается существование и единственность стационарного оптимального дискретного фильтра Калмана при истинном значении параметра θ [14]. Достаточным условием является полная наблюдаемость линейной динамической системы. Данное условие накладывает ограничения на область определения $D(\theta)$ параметра θ, а также на возможность реализации процесса параметрической идентификации.

Для проверки условия полной наблюдаемости необходимо вычислить ранг матрицы наблюдаемости [15]

$$\mathscr{M}_{DTI} = \begin{bmatrix} H^\top & (HF)^\top & (HF^2)^\top & \dots & (HF^{n-1})^\top \end{bmatrix}^\top,$$

который должен быть равен n (размеру вектора состояния c_k).

Следовательно, для решения задачи выбора подходящей структуры измерителя необходимо найти такую матрицу с минимальным количеством сенсоров, для которой $\operatorname{rank} \mathscr{M}_{DTI} = n$.

В [16] проведен анализ полной наблюдаемости модели (6) и решена задача выбора структуры измерителя для $n = 5$. Доказано, что при выборе матрицы H в виде

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

модель (6), (8) является полностью наблюдаемой при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 в модели (6) не равны нулю. Можно показать, что и в общем случае при выборе матрицы H в виде

$$H = \begin{bmatrix} e_i^\top \\ e_j^\top \end{bmatrix},$$

где $i \neq j$ и строка $e_i^\top = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i-м месте), модель (6), (8) является полностью наблюдаемой при условии, что коэффициенты a_1 и a_3 в модели (6) не равны нулю.

Аналогичные результаты получаются для модели (7). Таким образом, для идентификации параметра θ в моделях (6) и (7) достаточно всего лишь двух сенсоров для сбора данных измерений.

3. Описание процесса параметрической идентификации. Предположим, что характеристики шума в измерителе известны, а шаги пространственно-временной сетки Δx и Δt заданы, тогда неизвестными параметрами дискретных моделей (6) и (7), подлежащими идентификации, являются скорость конвекции v и коэффициент диффузии α, от которых зависят коэффициенты a_1, a_2, a_3, входящие в элементы матриц F и B.

Дискретные модели (6), (7) с моделью измерителя (8) в общем виде можно записать как

$$\begin{cases} c_k = F(\theta) c_{k-1} + B(\theta) u_{k-1}, \\ z_k = H c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \tag{9}$$

где $\theta = (v, \alpha)^\top \in \mathbb{R}^2$, $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^2$ — вектор входных воздействий, $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений. Предположим, что погрешность измерителя $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ является гауссовым белым шумом с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R > 0$. Матрицы моделей (6) и (7) $F(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$, зависят от параметра θ.

Рассмотрим задачу параметрической идентификации модели (9) по доступным данным с целью оценки неизвестного (векторного) параметра θ. Задача параметрической идентификации заключается в нахождении неизвестного параметра θ по известным входным сигналам $U_0^{K-1} = \{u_0, u_1, \dots, u_{K-1}\}$

и выходным данным измерений $Z_1^K = \{z_1, z_2, \ldots, z_K\}$ в соответствии с выбранным критерием качества идентификации $\mathscr{J}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1})$. В этом случае задача оценки неизвестного параметра требует решения задачи нелинейного программирования

$$\hat{\theta}_{\min} = \underset{\theta \in D(\theta)}{\operatorname{argmin}}\, \mathscr{J}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}), \tag{10}$$

где $D(\theta) \subseteq \mathbb{R}^2$ — область определения параметра θ.

Одним из известных и наиболее популярных методов решения задачи параметрической идентификации является метод максимального правдоподобия [17], который заключается в отыскании экстремума функции правдоподобия. Для решения данной задачи можно использовать различные численные методы — градиентный метод, метод Ньютона, метаэвристические методы оптимизации (например генетический алгоритм или метод имитации отжига) и др. [18]. Готовые программные реализации данных методов, как правило, требуют от пользователя задания начального значения параметра θ, ограничений на переменные и описания целевой функции. Вопрос выбора конкретного численного метода оптимизации также может быть предметом отдельного исследования.

В качестве целевой функции для реализации процедуры параметрической идентификации выберем критерий идентификации (10) в виде отрицательной логарифмической функции правдоподобия [17]

$$\mathscr{J}_{KF\_LR}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \\ = \frac{Km}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\big\{\ln[\det(\Sigma_{\nu,k}(\theta))] + \nu_k^\top(\theta)\Sigma_{\nu,k}^{-1}(\theta)\nu_k(\theta)\big\}, \tag{11}$$

где вектор невязки измерений $\nu_k(\theta)$ и его ковариационную матрицу

$$\Sigma_{\nu,k}(\theta) = E\big\{\nu_k(\theta)\nu_k^\top(\theta)\big\}$$

при заданных значениях параметра θ вычисляют по известным уравнениям фильтра Калмана [10].

Алгоритм 1 (Стандартный фильтр Калмана для модели (9)).

① Начальные данные.

Положить $\hat{c}_{0|0} = \bar{c}_0$ и $P_{0|0} = \Pi_0$, где $\bar{c}_0$ — начальное значение оценки вектора состояния, $\Pi_0 > 0$ — начальное значение ковариационной матрицы ошибки оценивания.

② Рекуррентно обновлять величины ($k \geqslant 0$):

I. Экстраполяция.

I.1. Вычислить матрицу ковариации ошибки оценки

$$P_{k+1} = FP_{k|k}F^\top.$$

I.2. Найти оценку вектора состояния $\hat{c}_{k+1} = F\hat{c}_{k|k} + Bu_k$.

II. Фильтрация.

II.1. Вычислить матрицу Калмана

$$K_{k+1} = P_{k+1} H^\top \Sigma_{\nu,k+1}^{-1}, \quad \text{где} \quad \Sigma_{\nu,k+1} = R + H P_{k+1} H^\top.$$

II.2. Найти оценку вектора состояния

$$\hat{c}_{k+1|k+1} = \hat{c}_{k+1} + K_{k+1}\nu_{k+1}, \quad \text{где} \quad \nu_{k+1} = z_{k+1} - H\hat{c}_{k+1}.$$

II.3. Вычислить матрицу ковариации ошибки оценки

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1} - K_{k+1} H P_{k+1}.$$

③ Конец.

Отметим, что решение задачи параметрической идентификации параметра $\theta = (v, \alpha)^\top$ для дискретной модели (6) методом максимального правдоподобия на основе стандартного фильтра Калмана получено в [13]. Решение задачи численной идентификации скорости конвекции в модели конвективно-диффузионного переноса с помощью метаэвристических алгоритмов рассмотрено в [11] также с применением стандартного алгоритма Калмана.

Как уже было отмечено ранее, основной целью данной работы является разработка нового метода параметрической идентификации модели конвективно-диффузионного переноса, обладающего улучшенными вычислительными свойствами. Хорошо известно, что стандартная реализация фильтра (алгоритм 1) является неустойчивой по отношению к ошибкам машинного округления (см., например, подробный анализ и обсуждение в [10]). Для повышения точности оценки вектора состояния вместо стандартного фильтра Калмана предпочтительнее использовать его численно устойчивые модификации [19].

4. Идентификация параметров дискретной модели с применением SVD-фильтра Калмана. В данной работе мы предлагаем новый подход к идентификации параметров дискретных моделей конвективно-диффузионного переноса на основе численно устойчивого SVD-фильтра Калмана.

Рассмотрим SVD-факторизацию [20, теорема 1.1.6]. Любую матрицу $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r можно представить в виде

$$A = \mathscr{W}\Sigma\mathscr{V}^*, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad S = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\},$$

где $\mathscr{W} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathscr{V} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитарные матрицы, $\mathscr{V}^*$ — означает сопряженную и транспонированную к $\mathscr{V}$, $S \in \mathbb{R}^{r\times r}$ — вещественная неотрицательная диагональная матрица. Величины $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$ являются сингулярными значениями матрицы A. Заметим, что если $r = n$ и/или $r = m$, некоторые из нулевых подматриц в Σ отсутствуют.

Метод сингулярного разложения (или SVD-факторизация) известен как наиболее точный метод факторизации матриц, особенно для матриц, близких к вырожденным. Кроме того, сингулярное разложение существует для любой матрицы, чего нельзя сказать, например, о разложении Холецкого. Поэтому модификации фильтра Калмана на основе SVD-факторизации обладают такой же улучшенной численной устойчивостью к ошибкам машинного округления, что и все известные квадратно-корневые модификации [10, 19]. Кроме того, SVD-фильтры имеют дополнительные преимущества, такие как:

(1) все собственные значения матриц ковариации ошибок автоматически вычисляются на каждом шаге работы алгоритма фильтрации и могут использоваться для автоматического анализа и/или сокращения исходной модели;
(2) информационные матрицы (обратные к ковариационным) легко вычисляются путем инверсии диагональных факторов в SVD-разложении, что создает элегантный способ построения алгоритмов информационного типа и фильтров смешанного типа с автоматическим переключением с ковариационного режима фильтрации на информационный.

Насколько известно авторам данной статьи, впервые идею построения численно устойчивой модификации фильтра Калмана с применением сингулярного разложения предложили Ошман и Бар–Ицхак [21]. Авторы назвали свой вариант SVD-фильтра как V-Λ-фильтр. Для реализации алгоритма необходимо выполнить как SVD-разложение, так и разложение Холецкого, а также минимум три операции матричного обращения. Затем Ошманом была предложена информационная форма V-Λ-фильтра [22]. В [23] V-Λ-фильтр был применен для решения задачи параметрической идентификации линейной дискретной стохастической системы.

Позднее другие авторы предложили свои варианты SVD-фильтра, соответствующие стандартному фильтру Калмана [24] и расширенному фильтру Калмана [25]. Указанные модификации во многом схожи с V-Λ-фильтром. Ограничением их применения является требование положительной определенности матриц ковариации шумов в объекте и измерителе на каждой итерации работы алгоритма, поскольку в нем необходимо применять разложение Холецкого для вычисления квадратного корня ковариационной матрицы. Также необходимо выполнить минимум три матричных обращения.

С целью устранения указанных недостатков предыдущих версий SVD-фильтра в [26] авторами был предложен новый, улучшенный вариант SVD-фильтра Калмана. Его отличие от других известных нам вариантов в том, что данная модификация фильтра Калмана свободна от выполнения условий $Q_k \geqslant 0$ и $R_k > 0$, требуемых как в стандартном фильтре Калмана, так и во всех его квадратно-корневых модификациях [19]. Другим значимым преимуществом указанной модификации является наличие всего лишь одного обращения диагональной матрицы в уравнениях фильтра. Согласно [26], по результатам сравнительного анализа данный вариант SVD-фильтра показал наилучшие результаты в плане численной устойчивости к ошибкам машинного округления на примере решения плохообусловленных задач.

Следует также отметить, что SVD-фильтр подтвердил свою эффективность при решении задач параметрической идентификации [27], задачи оценки состояния и параметров полета летательного аппарата [25], задачи калмановской фильтрации показаний инерциального измерительного модуля (IMU) [28] и др.

Учитывая изложенное выше, в данной работе для построения процедуры параметрической идентификации мы выбрали улучшенный вариант SVD-фильтра [26].

Рассмотрим представление ковариационных матриц ошибок оценивания в виде $P_k = \Theta_{P_k} D_{P_k} \Theta_{P_k}^{\top}$, где Θ_{P_k} — ортогональная матрица и D_{P_k} — диагональная матрица, содержащая сингулярные значения матрицы P_k. Уравнения SVD-фильтра позволяют рекуррентно обновлять SVD-факторы $\{\Theta_{P_k}, D_{P_k}\}$

матрицы P_k с помощью сингулярного разложения (процедуры SVD-факторизации). Далее запишем уравнения SVD-фильтра с учетом модели (9).

Алгоритм 2 (SVD-фильтр для модели (9)).

① Начальные данные.

Выполнить SVD-разложение матриц $\Pi_0 = \Theta_{\Pi_0} D_{\Pi_0} \Theta_{\Pi_0}^\top$, $R = \Theta_R D_R \Theta_R^\top$.

Положить $\hat{c}_{0|0} = \bar{c}_0$, $\Theta_{P_{0|0}} = \Theta_{\Pi_0}$, $D_{P_{0|0}}^{1/2} = D_{\Pi_0}^{1/2}$.

② Рекуррентно обновлять величины ($k \geqslant 0$):

I. Экстраполяция.

I.1. Выполнить SVD-разложение матрицы

$$\left[D_{P_{k|k}}^{1/2} \Theta_{P_{k|k}}^\top F_k^\top \right] = \mathscr{W}_{TU} \left[D_{P_{k+1}}^{1/2} \right] \Theta_{P_{k+1}}^\top .$$

I.2. Получить SVD-факторы $\{\Theta_{P_{k+1}}, D_{P_{k+1}}\}$ матрицы P_{k+1}.

I.3. Найти оценку вектора состояния $\hat{c}_{k+1} = F\hat{c}_{k|k} + Bu_k$.

II. Фильтрация.

II.1. Выполнить SVD-разложение матрицы

$$\begin{bmatrix} D_R^{1/2} \Theta_R^\top \\ D_{P_{k+1}}^{1/2} \Theta_{P_{k+1}}^\top H^\top \end{bmatrix} = \mathscr{W}_{MU}^{(1)} \begin{bmatrix} D_{\Sigma_{\nu,k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}^\top .$$

II.2. Найти

$$\bar{K}_{k+1} = P_{k+1} H^\top \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}, \quad K_{k+1} = \bar{K}_{k+1} D_{\Sigma_{\nu,k+1}}^{-1} \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}^\top .$$

II.3. Выполнить SVD-разложение матрицы

$$\begin{bmatrix} D_{P_{k+1}}^{1/2} \Theta_{P_{k+1}}^\top (I - K_{k+1} H)^\top \\ D_R^{1/2} \Theta_R^\top K_{k+1}^\top \end{bmatrix} = \mathscr{W}_{MU}^{(2)} \begin{bmatrix} D_{P_{k+1|k+1}}^{1/2} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta_{P_{k+1|k+1}}^\top .$$

II.4. Получить SVD-факторы $\{\Theta_{P_{k+1|k+1}}, D_{P_{k+1|k+1}}\}$ матрицы $P_{k+1|k+1}$.

II.5. Найти оценку вектора состояния $\hat{c}_{k+1|k+1} = \hat{c}_{k+1} + \bar{K}_{k+1} D_{\Sigma_{\nu,k+1}}^{-1} \bar{\nu}_{k+1}$, где $\bar{\nu}_{k+1} = \Theta_{\Sigma_{\nu,k+1}}^\top (z_{k+1} - H\hat{c}_{k+1})$.

③ Конец.

Теперь для построения процедуры параметрической идентификации необходимо переписать выражение для вычисления логарифмической функции правдоподобия (11) в терминах SVD-фильтра. Учитывая, что

$$\det(\Sigma_{\nu,k}) = \det(D_{\Sigma_{\nu,k}}) \quad \text{и} \quad \nu_k^\top \Sigma_{\nu,k}^{-1} \nu_k = \bar{\nu}_k^\top D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{\nu}_k,$$

запишем

$$\mathscr{J}_{SVD\_LR}(\theta; Z_1^K, U_0^{K-1}) = \\ = \frac{Km}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \left\{ \ln[\det(D_{\Sigma_{\nu,k}})] + \bar{\nu}_k^\top D_{\Sigma_{\nu,k}}^{-1} \bar{\nu}_k \right\}, \quad (12)$$

где диагональная матрица $D_{\Sigma_{\nu,k}}$ и вектор $\bar{\nu}_k$ доступны на каждом шаге работы алгоритма 2.

5. Численный анализ эффективности предложенного подхода. Рассмотрим на численных примерах работоспособность и преимущества предложенного подхода. Пусть требуется идентифицировать параметры v и α следующей модели:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 c}{\partial^2 x}, \tag{13}$$

$$c(x,0) = 0, \tag{14}$$

$$c(0,t) = 4t|\sin \pi t|, \tag{15}$$

$$c(1,t) = t, \tag{16}$$

или

$$\frac{\partial c(1,t)}{\partial x} = -[c(1,t) - t], \tag{17}$$

где $c(x,t)$ — концентрация вещества в одномерном потоке; $x \in [0;1]$; $t \in [0;2]$; начальное условие (14) соответствует концентрации вещества в начальный момент времени; граничное условие (15) — периодическому изменению концентрации вещества с возрастающей амплитудой на левом конце отрезка; граничное условие (16) — линейному возрастанию концентрации вещества на правом конце отрезка; граничное условие (17) — линейному возрастанию концентрации вещества в окружающей среде на правом конце отрезка.

Пусть в уравнении (13) $v = 2$, $\alpha = 1$. Процесс идентификации будем моделировать в системе MATLAB при помощи специализированного программного комплекса авторской разработки. Зададим на отрезке $[0;1]$ пространственную сетку с 6 узлами по оси Ox ($\Delta x = 0.2$). Шаг по оси Ot выберем из условия устойчивости конечно-разностной схемы: $\Delta t \leqslant \frac{(\Delta x)^2}{2} = 0.02$, что соответствует $K = 101$. Получим решения рассматриваемой задачи методом конечных разностей для различных комбинаций граничных условий. На рис. 1 приведены графики соответствующих решений.

Рассмотрим процесс идентификации коэффициентов уравнения (13) по результатам зашумленных измерений в узлах пространственной сетки, соответствующих первой и последней компонентам вектора состояния. В этом случае для задачи с граничными условиями (15), (16) измеритель будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

а для задачи с граничными условиями (15), (17):

$$\begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \\ c_5^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, K.$$

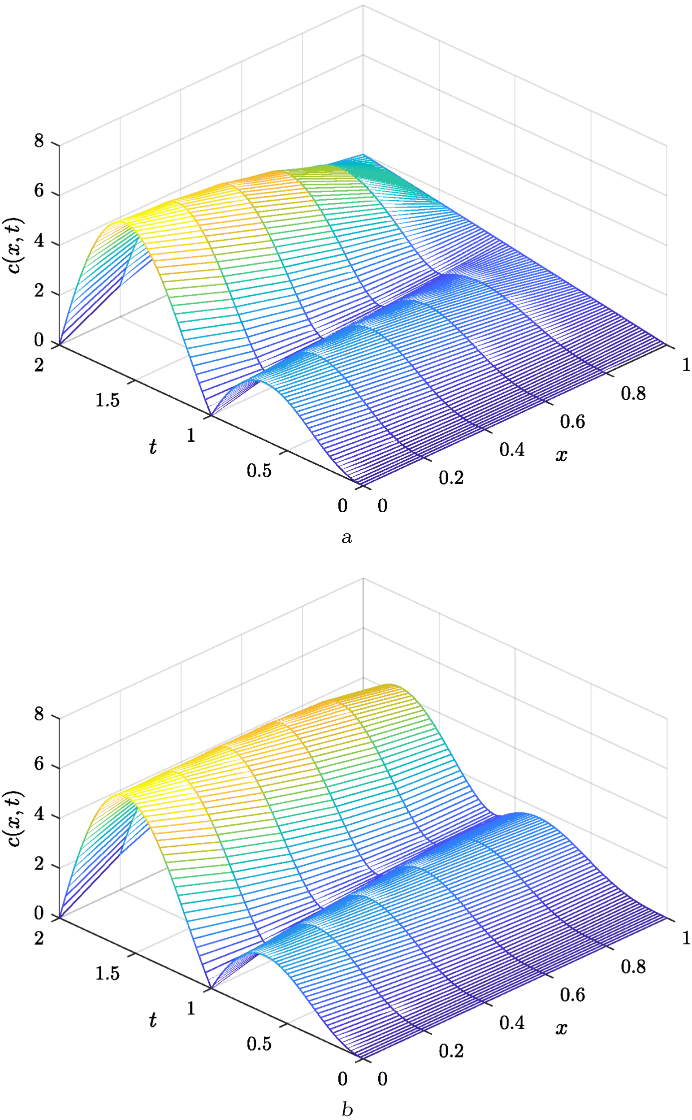


Рис. 1. Графики решения задачи с граничными условиями (15), (16) (a) и (15), (17) (b)
[Figure 1. Plots of solutions of problem with boundary conditions (15), (16) (a) and (15), (17) (b)]

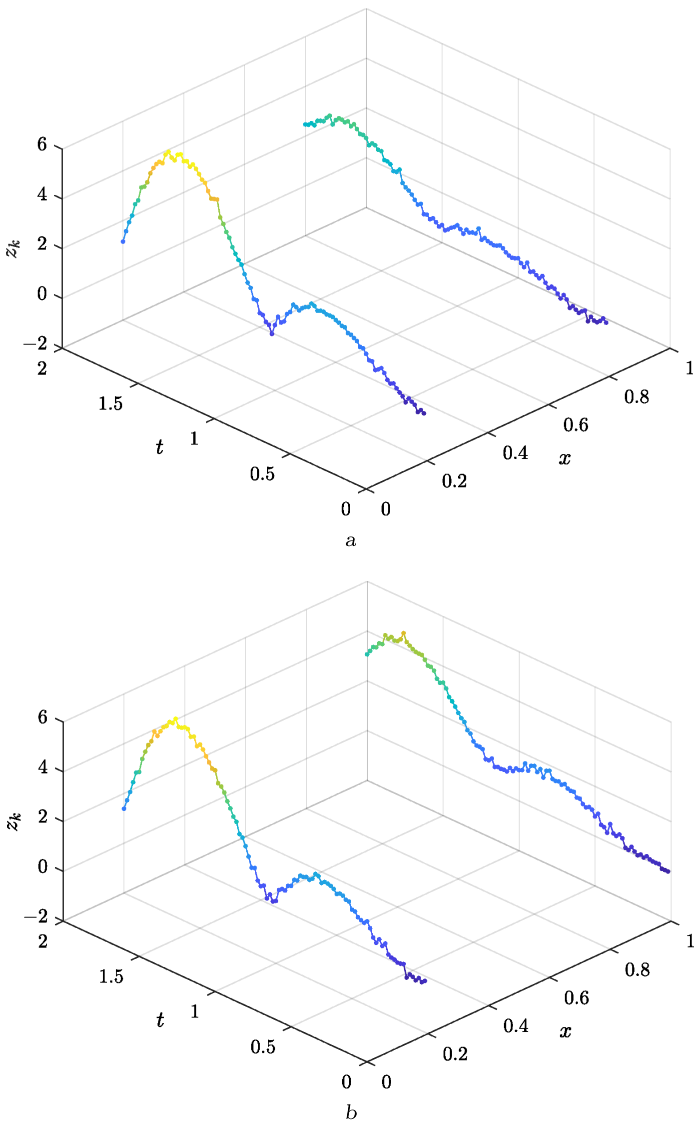


Рис. 2. Графики измерений для задачи с граничными условиями (15), (16) (*a*) и (15), (17) (*b*)
[Figure 2. Plots of measurements for problem with boundary conditions (15), (16) (*a*) and (15), (17) (*b*)]

Таблица 1

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_0$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_0$ and boundary conditions (15), (16)]

Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
	v	α	v	α	v	α
CKF	1.9951	0.9962	$4.63 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$	1.8242	1.8325
SVD	1.9951	0.9962	$4.63 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^{-2}$	1.8242	1.8325

Таблица 2

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_0$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_0$ and boundary conditions (15), (17)]

Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
	v	α	v	α	v	α
CKF	1.9996	0.9984	$4.99 \cdot 10^{-2}$	$2.31 \cdot 10^{-2}$	1.9539	1.8660
SVD	1.9996	0.9984	$4.99 \cdot 10^{-2}$	$2.31 \cdot 10^{-2}$	1.9539	1.8660

Таблица 3

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_1$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_1$ and boundary conditions (15), (16)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF	2.0000	1.0000	$4.55 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$
	SVD	2.0000	1.0000	$4.55 \cdot 10^{-6}$	$2.34 \cdot 10^{-6}$	$1.80 \cdot 10^{-4}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF	2.0000	1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.09 \cdot 10^{-7}$	$5.91 \cdot 10^{-5}$	$5.78 \cdot 10^{-5}$
	SVD	2.0000	1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.10 \cdot 10^{-7}$	$5.91 \cdot 10^{-5}$	$5.78 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF	2.0000	1.0000	$5.09 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-7}$	$1.99 \cdot 10^{-5}$	$1.56 \cdot 10^{-5}$
	SVD	2.0000	1.0000	$5.09 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-7}$	$1.99 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF	2.0000	1.0000	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$6.73 \cdot 10^{-8}$	$6.60 \cdot 10^{-6}$	$5.40 \cdot 10^{-6}$
	SVD	2.0000	1.0000	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$6.74 \cdot 10^{-8}$	$6.60 \cdot 10^{-6}$	$5.40 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF	2.0909	1.1295	$3.72 \cdot 10^{-1}$	$2.45 \cdot 10^{-1}$	13.3856	18.2959
	SVD	2.0000	1.0000	$4.95 \cdot 10^{-8}$	$2.44 \cdot 10^{-8}$	$2.00 \cdot 10^{-6}$	$1.97 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF	2.4525	2.4007	$4.92 \cdot 10^{-1}$	1.4422	24.2181	141.0602
	SVD	2.0000	1.0000	$2.84 \cdot 10^{-8}$	$1.38 \cdot 10^{-8}$	$1.24 \cdot 10^{-6}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$
10^{-16}	CKF	—	—	—	—	—	—
	SVD	2.0000	1.0000	$2.77 \cdot 10^{-8}$	$1.29 \cdot 10^{-8}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$

Таблица 4

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_2$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_2$ and boundary conditions (15), (16)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	1.9998 1.9998	1.0002 1.0002	$8.53 \cdot 10^{-3}$ $8.53 \cdot 10^{-3}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$ $3.97 \cdot 10^{-3}$	$3.45 \cdot 10^{-1}$ $3.45 \cdot 10^{-1}$	$3.09 \cdot 10^{-1}$ $3.09 \cdot 10^{-1}$
10^{-11}	CKF SVD	1.9996 1.9996	1.0003 1.0003	$8.72 \cdot 10^{-3}$ $8.72 \cdot 10^{-3}$	$3.81 \cdot 10^{-3}$ $3.81 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-1}$ $3.44 \cdot 10^{-1}$	$2.98 \cdot 10^{-1}$ $2.98 \cdot 10^{-1}$
10^{-12}	CKF SVD	1.9998 1.9999	1.0003 1.0003	$9.17 \cdot 10^{-3}$ $9.17 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$ $3.58 \cdot 10^{-3}$	$3.70 \cdot 10^{-1}$ $3.70 \cdot 10^{-1}$	$2.91 \cdot 10^{-1}$ $2.91 \cdot 10^{-1}$
10^{-13}	CKF SVD	2.0008 2.0008	0.9999 0.9999	$9.03 \cdot 10^{-3}$ $9.04 \cdot 10^{-3}$	$3.80 \cdot 10^{-3}$ $3.80 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-1}$ $3.58 \cdot 10^{-1}$	$3.06 \cdot 10^{-1}$ $3.07 \cdot 10^{-1}$
10^{-14}	CKF SVD	2.0011 1.9998	1.1824 1.0000	$3.80 \cdot 10^{-1}$ $8.23 \cdot 10^{-3}$	$3.53 \cdot 10^{-1}$ $3.70 \cdot 10^{-3}$	8.5127 $3.36 \cdot 10^{-1}$	18.6786 $2.96 \cdot 10^{-1}$
10^{-15}	CKF SVD	2.0556 1.9998	1.2045 1.0000	$6.08 \cdot 10^{-1}$ $8.67 \cdot 10^{-3}$	$3.75 \cdot 10^{-1}$ $3.25 \cdot 10^{-3}$	21.0730 $3.30 \cdot 10^{-1}$	23.0515 $2.64 \cdot 10^{-1}$
10^{-16}	CKF SVD	2.1827 2.0002	1.2980 1.0001	$7.79 \cdot 10^{-1}$ $9.15 \cdot 10^{-3}$	$6.69 \cdot 10^{-1}$ $3.57 \cdot 10^{-3}$	29.2086 $3.59 \cdot 10^{-1}$	41.3944 $2.79 \cdot 10^{-1}$

Таблица 5

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_3$ и граничных условий (15), (16) [Mean values and identification errors for $R = R_3$ and boundary conditions (15), (16)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$5.88 \cdot 10^{-6}$ $4.79 \cdot 10^{-6}$	$2.97 \cdot 10^{-6}$ $2.97 \cdot 10^{-6}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$ $2.40 \cdot 10^{-4}$	$2.40 \cdot 10^{-4}$ $2.40 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$1.67 \cdot 10^{-6}$ $1.67 \cdot 10^{-6}$	$9.22 \cdot 10^{-7}$ $9.21 \cdot 10^{-7}$	$6.49 \cdot 10^{-5}$ $6.48 \cdot 10^{-5}$	$7.50 \cdot 10^{-5}$ $7.49 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$5.63 \cdot 10^{-7}$ $5.63 \cdot 10^{-7}$	$2.94 \cdot 10^{-7}$ $2.94 \cdot 10^{-7}$	$2.25 \cdot 10^{-5}$ $2.25 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$ $2.42 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF SVD	2.0000 2.0000	1.0000 1.0000	$2.04 \cdot 10^{-7}$ $2.05 \cdot 10^{-7}$	$9.85 \cdot 10^{-8}$ $9.85 \cdot 10^{-8}$	$8.06 \cdot 10^{-6}$ $8.08 \cdot 10^{-6}$	$7.78 \cdot 10^{-6}$ $7.78 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF SVD	2.4218 2.0000	2.3225 1.0000	$5.04 \cdot 10^{-1}$ $6.59 \cdot 10^{-8}$	1.3914 $3.38 \cdot 10^{-8}$	23.2788 $2.60 \cdot 10^{-6}$	132.5812 $2.56 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF SVD	2.0530 2.0000	1.2871 1.0000	$6.02 \cdot 10^{-1}$ $4.32 \cdot 10^{-8}$	$3.99 \cdot 10^{-1}$ $2.13 \cdot 10^{-8}$	24.6737 $1.94 \cdot 10^{-6}$	30.9475 $1.93 \cdot 10^{-6}$
10^{-16}	CKF SVD	3.0785 2.0000	1.6264 1.0000	1.1877 $3.54 \cdot 10^{-8}$	0.6924 $1.79 \cdot 10^{-8}$	55.5319 $1.74 \cdot 10^{-6}$	63.5329 $1.76 \cdot 10^{-6}$

Таблица 6

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_1$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_1$ and boundary conditions (15), (17)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF	2.0000	1.0000	$5.06 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-6}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$
	SVD	2.0000	1.0000	$5.06 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-6}$	$2.03 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF	2.0000	1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.24 \cdot 10^{-7}$	$5.80 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10^{-5}$
	SVD	2.0000	1.0000	$1.47 \cdot 10^{-6}$	$7.25 \cdot 10^{-7}$	$5.80 \cdot 10^{-5}$	$5.90 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF	2.2732	1.8860	$5.42 \cdot 10^{-1}$	1.1367	19.9823	88.8022
	SVD	2.0000	1.0000	$4.81 \cdot 10^{-7}$	$2.51 \cdot 10^{-7}$	$1.80 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF	2.0295	1.5567	$4.69 \cdot 10^{-1}$	$8.75 \cdot 10^{-1}$	15.5471	56.4061
	SVD	2.0000	1.0000	$1.54 \cdot 10^{-7}$	$7.30 \cdot 10^{-8}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.92 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF	1.7208	1.8216	$9.00 \cdot 10^{-1}$	1.06342	36.9710	85.6284
	SVD	2.0000	1.0000	$5.17 \cdot 10^{-8}$	$2.34 \cdot 10^{-8}$	$2.06 \cdot 10^{-6}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF	—	—	—	—	—	—
	SVD	2.0000	1.0000	$1.86 \cdot 10^{-8}$	$8.75 \cdot 10^{-9}$	$7.55 \cdot 10^{-7}$	$7.05 \cdot 10^{-7}$
10^{-16}	CKF	—	—	—	—	—	—
	SVD	2.0000	1.0000	$1.02 \cdot 10^{-8}$	$6.07 \cdot 10^{-9}$	$4.54 \cdot 10^{-7}$	$5.55 \cdot 10^{-7}$

Таблица 7

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_2$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_2$ and boundary conditions (15), (17)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF	1.9998	1.0000	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$6.20 \cdot 10^{-3}$	$4.48 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$
	SVD	1.9998	1.0000	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$6.20 \cdot 10^{-3}$	$4.48 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$
10^{-11}	CKF	2.0011	1.0004	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$4.82 \cdot 10^{-1}$	$5.02 \cdot 10^{-1}$
	SVD	2.0011	1.0004	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$4.82 \cdot 10^{-1}$	$5.02 \cdot 10^{-1}$
10^{-12}	CKF	2.0867	1.1835	$4.46 \cdot 10^{-1}$	$4.78 \cdot 10^{-1}$	8.9741	19.0136
	SVD	2.0008	1.0000	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$5.00 \cdot 10^{-3}$	$4.63 \cdot 10^{-1}$	$4.60 \cdot 10^{-1}$
10^{-13}	CKF	1.7084	1.4499	$8.48 \cdot 10^{-1}$	$6.67 \cdot 10^{-1}$	28.9005	45.2698
	SVD	2.0000	1.0000	$1.14 \cdot 10^{-2}$	$6.37 \cdot 10^{-3}$	$4.53 \cdot 10^{-1}$	$5.07 \cdot 10^{-1}$
10^{-14}	CKF	1.3955	1.3397	$8.62 \cdot 10^{-1}$	$5.20 \cdot 10^{-1}$	32.7939	34.9237
	SVD	1.9994	1.0004	$1.19 \cdot 10^{-2}$	$6.03 \cdot 10^{-3}$	$4.54 \cdot 10^{-1}$	$4.66 \cdot 10^{-1}$
10^{-15}	CKF	1.5160	1.2420	$8.89 \cdot 10^{-1}$	$4.28 \cdot 10^{-1}$	37.9516	30.0707
	SVD	1.9988	1.0006	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$6.11 \cdot 10^{-3}$	$4.40 \cdot 10^{-1}$	$4.85 \cdot 10^{-1}$
10^{-16}	CKF	—	—	—	—	—	—
	SVD	2.0004	1.0001	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$6.32 \cdot 10^{-3}$	$4.18 \cdot 10^{-1}$	$5.09 \cdot 10^{-1}$

Таблица 8

Средние значения параметров и ошибки идентификации для $R = R_3$ и граничных условий (15), (17) [Mean values and identification errors for $R = R_3$ and boundary conditions (15), (17)]

δ	Algorithm	Mean values		RMSE		MAPE	
		v	α	v	α	v	α
10^{-10}	CKF	2.0000	1.0000	$5.90 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$
	SVD	2.0000	1.0000	$5.90 \cdot 10^{-6}$	$2.82 \cdot 10^{-6}$	$2.38 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$
10^{-11}	CKF	2.0000	1.0000	$1.76 \cdot 10^{-6}$	$8.62 \cdot 10^{-7}$	$7.07 \cdot 10^{-5}$	$6.86 \cdot 10^{-5}$
	SVD	2.0000	1.0000	$1.76 \cdot 10^{-6}$	$8.62 \cdot 10^{-7}$	$7.07 \cdot 10^{-5}$	$6.86 \cdot 10^{-5}$
10^{-12}	CKF	2.2020	1.7162	$4.04 \cdot 10^{-1}$	1.0238	13.9583	71.8292
	SVD	2.0000	1.0000	$6.42 \cdot 10^{-7}$	$2.59 \cdot 10^{-7}$	$2.65 \cdot 10^{-5}$	$2.05 \cdot 10^{-5}$
10^{-13}	CKF	2.4736	2.4251	$4.86 \cdot 10^{-1}$	1.4618	23.6781	142.5113
	SVD	2.0000	1.0000	$1.64 \cdot 10^{-7}$	$9.01 \cdot 10^{-8}$	$6.53 \cdot 10^{-6}$	$7.16 \cdot 10^{-6}$
10^{-14}	CKF	1.9462	2.2192	$7.26 \cdot 10^{-1}$	1.3157	29.1861	121.9198
	SVD	2.0000	1.0000	$5.46 \cdot 10^{-8}$	$2.38 \cdot 10^{-8}$	$2.21 \cdot 10^{-6}$	$1.91 \cdot 10^{-6}$
10^{-15}	CKF	2.3016	2.2533	$6.05 \cdot 10^{-1}$	1.3677	27.1425	128.7952
	SVD	2.0000	1.0000	$1.88 \cdot 10^{-8}$	$9.76 \cdot 10^{-9}$	$7.56 \cdot 10^{-7}$	$7.76 \cdot 10^{-7}$
10^{-16}	CKF	—	—	—	—	—	—
	SVD	2.0000	1.0000	$1.12 \cdot 10^{-8}$	$5.98 \cdot 10^{-9}$	$4.86 \cdot 10^{-7}$	$5.43 \cdot 10^{-7}$

Решение задачи получим при следующих вариантах матрицы ковариации шума R в измерителе:

$$R_0 = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix},$$

где $\delta = 10^{-10}, 10^{-11}, \ldots, 10^{-16}$. При уменьшении δ погрешность измерений соответствующего сенсора уменьшается, что соответствует случаю «почти точных» измерений, которые могут приводить к вырожденности и плохой обусловленности ковариационной матрицы ошибок оценивания в стандартном фильтре Калмана.

На рис. 2 приведены примеры графиков смоделированных измерений с матрицей ковариации шума $R = R_0$ для рассматриваемой задачи с различными комбинациями граничных условий.

В качестве критериев идентификации возьмем логарифмические функции правдоподобия (11) и (12).

В табл. 1–8 приведены результаты численных экспериментов по идентификации коэффициентов v и α для различных значений матрицы R и граничных условий. Минимизация критериев идентификации выполнялась в области $D(\theta) = \{\theta = (v, \alpha)^\top \mid v \in [0; 5], \alpha \in [0; 5]\}$ при помощи функции `fmincon` системы `MATLAB`. В качестве начальной точки для функции `fmincon` выбирался центр области D. Для каждого варианта матрицы R и каждого значения δ выполнялось усреднение найденных параметров и вычисление ошибок RMSE и MAPE по результатам 200 запусков.

Полученные данные численных экспериментов показывают, что сначала для обоих алгоритмов с увеличением точности измерений средние значения идентифицированных параметров v и α стремятся к истинным (2 и 1 соответственно), а ошибки RMSE и MAPE уменьшаются. Однако начиная со значения $\delta = 10^{-14}$ для граничных условий (15), (16) и $\delta = 10^{-13}$ для граничных условий (15), (17) ошибки процедуры идентификации на основе стандартного фильтра Калмана начинают быстро нарастать вплоть до аварийного завершения работы функции минимизации fmincon (прочерки в таблицах). Данный факт обусловлен расходимостью стандартного фильтра Калмана (резким ухудшением обусловленности ковариационной матрицы при увеличении точности измерений) и, как следствие, некорректным вычислением значений критерия идентификации (11). В то же время процедура идентификации на основе SVD-фильтра выполняется корректно для всех значений δ.

Таким образом, при использовании рекуррентных методов параметрической идентификации непосредственное влияние на качество идентификации могут оказывать вычислительные свойства алгоритма оптимальной дискретной фильтрации, на основе которого вычисляются значения критерия идентификации.

Заметим, что все вычисления в системе `MATLAB` по умолчанию проводятся с двойной точностью, однако на практике встречаются ситуации, когда вычисления необходимо проводить с одинарной точностью, например, во встраиваемых системах [28]. В этом случае использование SVD-фильтра, несмотря на больший объем вычислений, будет более предпочтительным.

Заключение. Рассмотрена задача математического моделирования процесса параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса, описываемых уравнениями в частных производных с начальным и граничными условиями, с применением SVD-модификации фильтра Калмана. Рассматриваются одномерные модели с постоянными коэффициентами, граничными условиями первого рода или смешанными граничными условиями первого и третьего рода. Начальное и граничные условия предполагаются известными.

Метод решения задачи основан на переходе от исходной непрерывной модели с уравнением в частных производных к модели, описываемой линейной дискретной динамической системой в пространстве состояний, с известными входными воздействиями, двумя неизвестными параметрами, соответствующими скорости конвекции v и коэффициенту диффузии α, и с зашумленными измерениями, моделирующими экспериментальные данные.

В работе показано, что для выполнения условия полной наблюдаемости моделей достаточно, чтобы матрица измерений H состояла всего из двух строк, соответствующих наличию в модели измерителя двух сенсоров.

Основным результатом работы является новый рекуррентный метод параметрической идентификации моделей конвективно-диффузионного переноса, основанный на использовании метода максимального правдоподобия с построением критерия идентификации (функции правдоподобия) на основе величин, вычисляемых SVD-модификацией фильтра Калмана. Оптимизация критерия идентификации выполнена с помощью функции `fmincon` системы `MATLAB`.

С помощью компьютерного моделирования в системе `MATLAB` проведен сравнительный анализ численной эффективности алгоритма параметрической идентификации с применением стандартного фильтра Калмана и SVD-фильтра. Результаты численных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного метода и его надежность в плане численной устойчивости к ошибкам машинного округления при решении задачи параметрической идентификации.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта № 19–41–730009.

Библиографический список

1. Леонтьев А. И., Кожинов И. А., Исаев С. И. и др. *Теория тепломассообмена.* М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 462 с.
2. Farlow S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* New York: Dover Publ., 1982. ix+414 pp.
3. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.* М.: МГУ, 1994. 208 с.
4. Мацевитый Ю. М., Мултановский А. В. Идентификация параметров теплообмена методом оптимальной динамической фильтрации // *Теплофизика высоких температур*, 1979. Т. 17, № 5. С. 1053–1060.
5. Карпов А. А., Тихонова Т. А. Восстановление нестационарных тепловых потоков по экспериментальным данным // *Матем. модел.*, 2000. Т. 12, № 5. С. 101–106.
6. Симбирский Г. Д., Лантрат В. К. Применение цифрового фильтра Калмана для параметрической идентификации высокотемпературного термопреобразователя // *Автомобиль и электроника. Современные технологии*, 2017. № 11. С. 68–75.
7. Пилипенко Н. В. *Применение фильтра Калмана в нестационарной теплометрии.* СПб.: Унив. ИТМО, 2017. 36 с.
8. Матвеев М. Г., Копытин А. В., Сирота Е. А. Комбинированный метод идентификации параметров распределенной динамической модели / *Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2018): сборник трудов 4-й Международной конференции и молодежной школы.* Самара, 2018. С. 1651–1657.
9. Пилипенко Н. В., Заричняк Ю. П., Иванов В. А., Халявин А. М. Параметрическая идентификация дифференциально-разностных моделей теплопереноса в одномерных телах на основе алгоритмов фильтра Калмана // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2020. Т. 20, № 4. С. 584–588. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588.
10. Grewal M. S., Andrews A. P. *Kalman Filtering. Theory and Practice with MATLAB.* Hoboken, NJ: John Wiley and Sons, 2015. xvii+617 pp. https://doi.org/10.1002/9781118984987.
11. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Tapia Garza H. R. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model / *CEUR Workshop Proceedings.* vol. 2258, 2018. pp. 188–196. http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf.
12. Кувшинова А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Журнал СВМО*, 2019. Т. 21, № 4. С. 469–479. https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479.
13. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Tapia Garza H. R. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1745, 012110. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012110.
14. Фомин В. Н. *Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация.* М.: Наука, 1984. 288 с.

15. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control.* vol. 1 / Mathematics in Science and Engineering. vol. 141. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979. xix+423 pp.
16. Кувшинова А. Н. Анализ дискретной линейной стохастической модели конвективно-диффузионного переноса // *Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии*, 2019. № 1. С. 65–69.
17. Åström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods // *Automatica*, 1980. vol. 16, no. 5. pp. 551–574. https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90078-3.
18. Васильев В. П. *Численные методы решения экстремальных задач.* М.: Мир, 1982. 520 с.
19. Цыганова Ю. В., Куликова М. В. О современных ортогонализованных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2018. Т. 11, № 4. С. 5–30. https://doi.org/10.14529/mmp180401.
20. Björck Å. *Numerical Methods in Matrix Computations* / Texts in Applied Mathematics. vol. 59. Cham: Springer, 2015. xvi+800 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05089-8.
21. Oshman Y., Bar-Itzhack I. Y. Square root filtering via covariance and information eigenfactors // *Automatica*, 1986. vol. 22, no. 5. pp. 599–604. https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90070-1.
22. Oshman Y. Square root information filtering using the covariance spectral decomposition / *Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control*, 1988. pp. 382–387. https://doi.org/10.1109/CDC.1988.194335.
23. Oshman Y. Maximum likelihood state and parameter estimation via derivatives of the V-Lambda filter // *J. Guid. Control Dyn.*, 1992. vol. 15, no. 3. pp. 717–726. https://doi.org/10.2514/3.20896.
24. Wang L., Libert G., Manneback P. Kalman filter algorithm based on singular value decomposition / *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, 1992. pp. 1224–1229. https://doi.org/10.1109/IECON.1992.254406.
25. Zhang Y., Dai G., Zhang H., Li Q. A SVD-based extended Kalman filter and applications to aircraft flight state and parameter estimation / *Proc. of 1994 American Control Conf.*, 1994. pp. 1809–1813. https://doi.org/10.1109/ACC.1994.752384.
26. Kulikova M. V., Tsyganova J. V. Improved discrete-time Kalman filtering within singular value decomposition // *IET Control Theory Appl.*, 2017. vol. 11, no. 15. pp. 2412–2418, arXiv: 1611.03686 [math.OC]. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2016.1282.
27. Tsyganova J. V., Kulikova M. V. SVD-based Kalman filter derivative computation // *IEEE Trans. Autom. Control*, 2017. vol. 62, no. 9. pp. 4869–4875, arXiv: 1612.04777 [cs.SY]. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2694350.
28. Alessandrini M., Biagetti G., Crippa P., Falaschetti L., Manoni L., Turchetti C. Singular value decomposition in embedded systems based on ARM Cortex-M architecture // *Electronics*, 2021. vol. 10, no. 1, 34. https://doi.org/10.3390/electronics10010034.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 716–737
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1876

MSC: 93A30, 65C20

Mathematical modeling of parameter identification process of convection-diffusion transport models using the SVD-based Kalman filter

***A. N. Kuvshinova*[1], *A. V. Tsyganov*[1], *Yu. V. Tsyganova*[2]**

[1] Ilya Ulyanov State Pedagogical University,
4/5, Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russian Federation.
[2] Ulyanovsk State University,
42, L. Tolstoy st., Ulyanovsk, 432017, Russian Federation.

Abstract

The paper addresses a problem of mathematical modeling of the process of identifying the coefficients of a partial differential equation in convection-diffusion transport models based on the results of noisy measurements of the function values. Identification process is performed using a new method belonging to the class of recurrent parameter identification methods based on optimal discrete Kalman-type filtering algorithms. One-dimensional models with constant coefficients, boundary conditions of first kind, or mixed boundary conditions of first and third kind are considered.

The proposed method is based on the transition from the initial continuous model with a partial differential equation to the model described by the state-space linear discrete-time dynamic system and the application of the maximum likelihood method to it with construction of an identification criterion (likelihood function) based on the values calculated by the SVD algorithm of the Kalman filtering. This filter is based on the singular value decomposition of error covariance matrix and works stably even in cases when it is close to singular. The SVD filter has proven itself well in solving various problems of discrete filtering and parameter identification. It has several advantages over the traditionally used conventional Kalman filter. The main of which is robustness against machine roundoff errors.

Research Article

Please cite this paper in press as:
Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V. Mathematical modeling of parameter identification process of convection-diffusion transport models using the SVD-based Kalman filter, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 716–737. https://doi.org/10.14498/vsgtu1876 (In Russian).

Authors' Details:

Anastasia N. Kuvshinova https://orcid.org/0000-0002-3496-5981
Postgraduate Student; Dept. of Higher Mathematics; e-mail: kuvanulspu@yandex.ru

Andrey V. Tsyganov https://orcid.org/0000-0002-4173-5199
Cand. Phys. & Math. Sci; Professor; Dept. of Higher Mathematics;
e-mail: andrew.tsyganov@gmail.com

Yulia V. Tsyganova https://orcid.org/0000-0001-8812-6035
Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Information Technology;
e-mail: tsyganovajv@gmail.com

Computer modeling of parameter identification has been processed with the MATLAB system using a specialized software package. The results of numerical experiments confirm the efficiency of the proposed method and its advantages compared to the similar one based on the conventional Kalman filter.

Keywords: convection-diffusion transport model, parameter identification, Kalman filter, SVD filter.

Received: 3rd August, 2021 / Revised: 7th December, 2021 / Accepted: 21st December, 2021 / First online: 28th December, 2021

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The reported study was funded by RFBR and Ulyanovsk region, project no. 19–41–730009.

References

1. Leont'ev A. I., Kozhinov I. A., Isaev S. I., et al. *Teoriia teplomassoobmena* [Theory of Heat and Mass Transfer]. Moscow, Bauman Moscow State Techn. Univ., 2018, 462 pp. (In Russian)
2. Farlow S. J. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York, Dover Publ., 1982, ix+414 pp.
3. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriiu obratnykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems]. Moscow, Moscow State Univ., 1994, 208 pp. (In Russian)
4. Matsevityi Yu. M., Multanovskii A. V. Identification of heat transfer parameters by the method of optimal dynamic filtering, *High Temperature*, 1979, vol. 17, no. 5, pp. 1053–1060 (In Russian).
5. Karpov A. A., Tikhonova T. A. Recovery of non-stationary heat flows from experimental data, *Matem. Mod.*, 2000, vol. 12, no. 5, pp. 101–106 (In Russian).
6. Simbirskiy G. D., Lantrat V. K. Application of the Kalman digital filter for parametric identification high-temperature thermocouple, *Autom. Electron. Modern Technology*, 2017, no. 11, pp. 68–75 (In Russian).
7. Pilipenko N. V. *Primenenie fil'tra Kalmana v nestatsionarnoi teplometrii* [Applying the Kalman Filter in Non-Stationary Heat Metering]. St. Petersburg, ITMO Univ., 2017, 36 pp. (In Russian)
8. Matveev M. G., Kopytin A. V., Sirota E. A. Combined method for identifying the parameters of a distributed dynamic model, In: *Proc. IV Int. Conf. (ITNT, 2018)*. Samara, 2018, pp. 1651–1657 (In Russian).
9. Pilipenko N. V., Zarichnyak Yu. P., Ivanov V. A., Khalyavin A. M. Parametric identification of differencial-difference models of heat transfer in one-dimensional bodies based on Kalman filter algorithms, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 584–588 (In Russian). `https://doi.org/10.17586/2226-1494-2020-20-4-584-588`.
10. Grewal M. S., Andrews A. P. *Kalman Filtering. Theory and Practice with MATLAB*. Hoboken, NJ, John Wiley and Sons, 2015, xvii+617 pp. `https://doi.org/10.1002/9781118984987`.
11. Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Kuvshinova A. N., Tapia Garza H. R. Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport

model, In: *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 2258, 2018, pp. 188–196. http://ceur-ws.org/Vol-2258/paper24.pdf.

12. Kuvshinova A. N. Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements, *Zhurnal SVMO*, 2019, vol. 21, no. 4, pp. 469–479 (In Russian). https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.469-479.
13. Kuvshinova A. N., Tsyganov A. V., Tsyganova Yu. V., Tapia Garza H. R. Parameter identification algorithm for convection-diffusion transport model, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1745, 012110. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012110.
14. Fomin V. N. *Rekurrentnoe otsenivanie i adaptivnaia fil'tratsiia* [Recurrent Estimation and Adaptive Filtering]. Moscow, Nauka, 1984, 288 pp. (In Russian)
15. Maybeck P. S. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, vol. 1, Mathematics in Science and Engineering, vol. 141. New York, San Francisco, London, Academic Press, 1979, xix+423 pp.
16. Kuvshinova A. N. Analysis of discrete linear stochastic model of convection-diffusion transport, *Uchenye Zapiski UlGU. Ser. Matem. Inform. Tekhn.*, 2019, no. 1, pp. 65–69 (In Russian).
17. Åström K. J. Maximum likelihood and prediction error methods, *Automatica*, 1980, vol. 16, no. 5, pp. 551–574. https://doi.org/10.1016/0005-1098(80)90078-3.
18. Vasil'ev V. P. *Chislennye metody resheniia ekstremal'nykh zadach* [Numerical Methods for Solving Extreme Problems]. Moscow, Mir, 1982, 520 pp. (In Russian)
19. Tsyganova Yu. V., Kulikova M. V. On modern array algorithms for optimal discrete filtering, *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 5–30 (In Russian). https://doi.org/10.14529/mmp180401.
20. Björck Å. *Numerical Methods in Matrix Computations*, Texts in Applied Mathematics, vol. 59. Cham, Springer, 2015, xvi+800 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05089-8.
21. Oshman Y., Bar-Itzhack I. Y. Square root filtering via covariance and information eigenfactors, *Automatica*, 1986, vol. 22, no. 5, pp. 599–604. https://doi.org/10.1016/0005-1098(86)90070-1.
22. Oshman Y. Square root information filtering using the covariance spectral decomposition, In: *Proc. of the 27th Conf. on Decision and Control*, 1988, pp. 382–387. https://doi.org/10.1109/CDC.1988.194335.
23. Oshman Y. Maximum likelihood state and parameter estimation via derivatives of the V-Lambda filter, *J. Guid. Control Dyn.*, 1992, vol. 15, no. 3, pp. 717–726. https://doi.org/10.2514/3.20896.
24. Wang L., Libert G., Manneback P. Kalman filter algorithm based on singular value decomposition, In: *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, 1992, pp. 1224–1229. https://doi.org/10.1109/IECON.1992.254406.
25. Zhang Y., Dai G., Zhang H., Li Q. A SVD-based extended Kalman filter and applications to aircraft flight state and parameter estimation, In: *Proc. of 1994 American Control Conf.*, 1994, pp. 1809–1813. https://doi.org/10.1109/ACC.1994.752384.
26. Kulikova M. V., Tsyganova J. V. Improved discrete-time Kalman filtering within singular value decomposition, *IET Control Theory Appl.*, 2017, vol. 11, no. 15, pp. 2412–2418, arXiv: 1611.03686 [math.OC]. https://doi.org/10.1049/iet-cta.2016.1282.
27. Tsyganova J. V., Kulikova M. V. SVD-based Kalman filter derivative computation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2017, vol. 62, no. 9, pp. 4869–4875, arXiv: 1612.04777 [cs.SY]. https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2694350.
28. Alessandrini M., Biagetti G., Crippa P., Falaschetti L., Manoni L., Turchetti C. Singular value decomposition in embedded systems based on ARM Cortex-M architecture, *Electronics*, 2021, vol. 10, no. 1, 34. https://doi.org/10.3390/electronics10010034.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 738–762
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1862

УДК 519.248:[33+301]

Модели стохастической динамики развития производственных предприятий с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями

А. Л. Сараев, Л. А. Сараев

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Предложены новые стохастические модели динамического развития предприятий, которые восстанавливают свои производства за счет внутренних и внешних запаздывающих инвестиций. Установлены системы стохастических дифференциальных уравнений баланса для таких предприятий, описывающие случайные изменения факторов производства и выпуска продукции. Рассмотрены пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные амортизационные отчисления и исследовано их взаимодействие с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями. Сформулированы условия достижения равновесного состояния работы предприятий и вычислены соответствующие предельные значения факторов производства. Для численных решений систем стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий получены алгоритмы метода Эйлера—Маруямы. Для каждой численной реализации этих алгоритмов построены соответствующие стохастические траектории для случайных функций факторов производства и выпуска продукции. Предложен вариант метода расчета математических ожиданий случайных функций факторов производства, для которых получена соответствующая система дифференциальных уравнений. Численный анализ решений стохастических дифференциальных уравнений для разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным развития производственных предприятий.

Ключевые слова: предприятие, факторы производства, производственная функция, выпуск продукции, ресурсы, стохастические уравнения,

Научная статья

Образец для цитирования
Сараев А. Л., Сараев Л. А. Модели стохастической динамики развития производственных предприятий с запаздывающими внутренними и внешними инвестициями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 738–762. https://doi.org/10.14498/vsgtu1862.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Сараев https://orcid.org/0000-0002-9223-6330
кандидат экономических наук; доцент; каф. математики и бизнес-информатики; e-mail: alex.saraev@gmail.com

Леонид Александрович Сараев https://orcid.org/0000-0003-3625-5921
доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. математики и бизнес-информатики; e-mail: saraev_leo@mail.ru

винеровский процесс, коэффициент сноса, коэффициент волатильности, запаздывание инвестиций.

Получение: 21 апреля 2021 г. / Исправление: 23 августа 2021 г. / Принятие: 20 сентября 2021 г. / Публикация онлайн: 3 декабря 2021 г.

Введение. Одним из важных и актуальных направлений современной экономической теории является развитие экономико-математических методов прогнозирования показателей стохастической динамики производственных предприятий. Разработка на основе таких методов новых стохастических моделей для оценки деятельности предприятий позволяет проводить адекватный и эффективный анализ их работы, вычислять предельные значения для их производственных факторов, достоверно прогнозировать объемы выпуска продукции, объемы издержек и объемы прибыли, оценивать эффекты замещения производственных факторов и т.д.

Развитие и рост экономических систем вообще и производственных предприятий в частности представляет собой долгосрочную тенденцию увеличения показателей национальной экономики. Значительный вклад в разработку теоретических положений экономического роста представлен в работах [1–7].

На основе этих положений рядом исследователей разработаны модели роста, учитывающие влияние технического прогресса и роль информационных процессов [8–18].

Характер динамического развития предприятия определяется взаимодействием вкладываемых в его производство объемов инвестиций, объемов амортизации производственных факторов и затрат на модернизацию средств производства.

Привлечение в производство предприятия внутренних и внешних инвестиций представляет собой распределенный во времени процесс, поэтому модель развития предприятия должна учитывать не только инвестиции, поступающие в данный момент времени, но и всю историю их постепенного ввода.

Для построения моделей экономического развития предприятий, учитывающих запаздывание внутренних и внешних инвестиций, широко применяются дифференциальные уравнения, содержащие функции распределения постепенного и непрерывного ввода капиталовложений [9–31].

Известные многочисленные статистические данные деятельности различных производственных предприятий демонстрируют стохастический характер формирования объемов их производственных факторов и волатильность объемов выпуска продукции. Поэтому при построении математических моделей динамики экономических показателей предприятий следует опираться на теорию случайных функций. Стохастическое моделирование позволяет наиболее полно учесть нестабильный характер работы реальных предприятий и внести существенные дополнения в имеющиеся аналогичные детерминистские модели. Эффективным инструментом для построения недетерминированных моделей экономического развития предприятий является теория стохастических дифференциальных уравнений, учитывающая влияние случайных внешних воздействий.

Построение на основе этой теории определяющих уравнений балансов относительно объемов факторов производства и объемов выпуска продукции производственных предприятий существенно обогащает известные детерминированные модели развития предприятий, в которых нельзя учесть внешние случайные возмущающие факторы [32–38].

Методы исследования приложений теории стохастических дифференциальных уравнений для моделирования случайных процессов подробно изложены в работах [39–43].

Применение численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений для расчетов реализаций случайных процессов и вычисления их математических ожиданий представлены в работах [44–54].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей стохастической динамики развития производственных предприятий за счет постепенного ввода внутренних и внешних запаздывающих инвестиций.

Научная новизна полученных моделей заключается в том, что они учитывают взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними запаздывающими инвестициями и позволяют найти предельные значения факторов производства. Кроме того, эти модели способны описать не только стабильное поступательное развитие предприятий, но и приостановку их работы во время переоснащения производств и временного кризисного сворачивания производств при замене оборудования.

1. Постановка задачи. Пусть объемы выпуска продукции предприятием обеспечиваются набором ресурсов в виде производственных факторов $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, представляющих собой основной капитал, оборотный капитал, финансовый капитал, трудовые ресурсы, привлекаемые в производство материалы, технологии и инновации и т.д.

Величины Q_s изменяются во времени t и представляют собой некоторые непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции $Q_s = Q_s(t)$. Единицы измерения времени определяются экономическими условиями конкретной задачи. Это может быть один месяц, один квартал или один год.

Функции $Q_s = Q_s(t)$ являются ограниченными, для них существуют свои верхние и нижние предельные границы $Q_s^0 \leqslant Q_s \leqslant Q_s^\infty$, где $Q_s^0 = Q_s(0)$ — начальные значения факторов производства Q_s, а $Q_s^\infty = \lim\limits_{t\to\infty} Q_s(t)$ — их предельные значения.

Значения компонентов Q_s^0 в начальный момент времени рассматриваемого процесса $t = 0$ считаются заданными.

Предельные значения объемов факторов производства Q_s^∞ определяются особенностями развития предприятий и подлежат вычислению.

Выпуск производственной продукции предприятием V описывается многофакторной производственной функцией Кобба—Дугласа

$$V = P \prod_{p=1}^{n} Q_p^{a_p}. \tag{1}$$

Здесь P — стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов, a_k — представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам Q_k, $(0 < a_k < 1)$.

Приращения объемов факторов производства $Q_s = Q_s(t)$ за малый интервал времени Δt составят величины $\Delta Q_s(t)$, которые можно представить в виде четырех слагаемых [32]:

$$\Delta Q_s(t) = \Delta Q_s^A(t) + \Delta Q_s^I(t) + \Delta Q_s^G(t) + \Delta Q_s^W(t), \tag{2}$$

где $\Delta Q_s^A(t)$ — приращения амортизаций объемов факторов производства $Q_s(t)$, $\Delta Q_s^I(t)$ — частичные восстановления объемов факторов производства $Q_s(t)$ за счет внутренних инвестиций, $\Delta Q_s^G(t)$ — частичные восстановления объемов факторов производства $Q_s(t)$ за счет внешних инвестиций в предприятие, $\Delta Q_s^W(t)$ — случайные колебания приращения объемов факторов производства, обусловленные волатильностью реализации выпускаемой продукции.

Приращения частичных амортизаций $\Delta Q_s^A(t)$ за промежуток времени Δt можно представить в виде

$$\Delta Q_s^A(t) = -A_s \theta(t) Q_s^{u_s}(t) \cdot \Delta t. \tag{3}$$

Здесь A_s — коэффициенты амортизации доли выбывших за единицу времени объемов факторов производства $Q_s(t)$, u_s — показатели интенсивности амортизации. Значения параметров $u_s = 1$ соответствуют линейной пропорциональной амортизации, значения параметров $u_s > 1$ соответствуют прогрессивным амортизационным отчислениям, значения параметров $u_s < 1$ соответствуют дигрессивным амортизационным отчислениям.

Функция $\theta = \theta(t)$ в соотношениях (3) определяет варианты развития рассматриваемого предприятия во время смены технологий производства. Для постоянной и единичной функции $\theta(t) \equiv 1$ развитие предприятия будет стабильным. При уменьшении значений функции $\theta(t)$ процесс развития предприятия будет замедляться вплоть до его временной остановки и частичного сворачивания производства [26].

Приращения внутренних инвестиций $\Delta Q_s^I(t)$ за промежуток времени Δt определяются соотношениями [31]

$$\Delta Q_s^I(t) = \theta(t) W_s(t) \cdot \Delta t. \tag{4}$$

Здесь

$$W_s(t) = \int_{-\infty}^{t} R_s(t,\tau) I_s(\tau) d\tau \tag{5}$$

— объемы внутренних инвестиций, накопленные предприятием за счет факторов производства Q_s к моменту времени t, $R_s(t,\tau)$ — функции распределения потока постепенного и непрерывного ввода инвестиций, соответствующих факторам производства Q_s за весь период работы предприятия, $I_s(\tau)$ — объемы инвестиций, соответствующие фактору производства Q_s и сделанные в момент времени τ. Постепенный и поэтапный ввод внутренних инвестиций считается стационарным: $R_s(t,\tau) = R_s(t-\tau)$, поэтому формулы (5) принимают вид

$$W_s(t) = \int_{-\infty}^{t} R_s(t-\tau) I_s(\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} I_s(t-\tau) R_s(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Функции распределения ввода инвестиций $R_s(t-\tau)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_0^\infty R_s(\tau)d\tau = 1. \tag{7}$$

Равенство (7) означает, что несмотря на перераспределение во времени потоков капиталовложений запаздывающих внутренних инвестиций суммы вложенных инвестиций за весь период остаются постоянными.

Очевидно, что функции распределения ввода инвестиций $R_s(\tau)$ являются монотонно убывающими, поскольку эффект от вводимых внутренних инвестиций будет тем меньше, чем ранее они были вложены.

Для экспоненциальных распределений ввода внутренних инвестиций $R_s(\tau) = \lambda_s \exp(-\lambda_s \tau)$ соотношения (6) принимают вид

$$W_s(t) = \lambda_s \int_0^\infty I_s(t-\tau)\exp(-\lambda_s\tau)d\tau. \tag{8}$$

Здесь λ_s — параметры распределения, описывающие степени влияния ранее сделанных внутренних инвестиций на капиталовложения текущего момента. Следует отметить, что чем больше значения величин λ_s, тем меньше это влияние, и наоборот.

Интегральные уравнения (8) могут быть представлены в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого обе их части следует продифференцировать по времени t, воспользоваться формулой интегрирования по частям и учесть очевидные равенства:

$$\frac{\partial I_s(t-\tau)}{\partial t} = -\frac{\partial I_s(t-\tau)}{\partial \tau}, \quad \lim_{\tau\to\infty} R_s(\tau) = 0.$$

Уравнения (8) принимают вид

$$\frac{dW_s(t)}{dt} = \lambda_s I_s(t) - \lambda_s W_s(t),$$

или

$$\frac{dW_s(t)}{dt} = \lambda_s\big(B_s V(t) - W_s(t)\big). \tag{9}$$

Здесь B_s — нормы накоплений внутренних инвестиций ($0 \leqslant B_s \leqslant 1$), с помощью которых внутренние инвестиции $I_s(t)$ связаны с производственной функцией $V(t)$ соотношениями $I_s(t) = B_s V(t)$.

Приращения внешних инвестиций $\Delta Q_s^G(t)$ за промежуток времени определяются соотношениями [31]

$$\Delta Q_s^G(t) = \theta(t) U_s(t) \cdot \Delta t. \tag{10}$$

Здесь

$$U_s(t) = \int_{-\infty}^t S_s(t,\tau) G_s(\tau) d\tau. \tag{11}$$

— объемы внешних инвестиций, накопленные предприятием в моменту времени t; $S_s(t,\tau)$ — функции распределения постепенного и непрерывного ввода внешних инвестиций за весь период работы предприятия; $G_s(\tau) = \eta_s G(\tau)$ — объемы внешних инвестиций, совершенные в момент времени τ; $G(t)$ — полный объем внешних инвестиций, приходящихся на все объемы $Q_s(t)$ факторов производства; η_s — коэффициенты распределения объема внешних инвестиций между объемами факторов производства.

Очевидно, что коэффициенты η_s не являются независимыми, а удовлетворяют соотношению $\sum_{s=1}^{n} \eta_s = 1$.

Процессы ввода внешних инвестиций считаются стационарными, поэтому формулы (11) принимают вид

$$U_s(t) = \int_{-\infty}^{t} S_s(t-\tau) G_s(\tau) d\tau = \int_{0}^{\infty} G_s(t-\tau) S_s(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Запаздывание потоков капиталовложений внешних инвестиций сопровождается перераспределением во времени, но суммы внешних инвестиций за весь период остаются постоянными. Поэтому функции распределения ввода инвестиций $S_s(\tau)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_{0}^{\infty} S_s(\tau) d\tau = 1. \tag{13}$$

Соотношение (13) означает, что при перераспределении во времени потоков капиталовложений запаздывающих внешних инвестиций суммы вложенных инвестиций за весь период остаются постоянными.

Очевидно, что функции распределения ввода внешних инвестиций $S_s(\tau)$ являются монотонно убывающими, поскольку эффект от вводимых внешних инвестиций будет тем меньше, чем ранее они были вложены.

Для экспоненциальных распределений вводов внешних инвестиций $S_s(\tau) = \mu_s \exp(-\mu_s \tau)$ соотношения (12) принимают вид

$$U_s(t) = \mu_s \int_{0}^{\infty} G_s(t-\tau) \exp(-\mu_s \tau) d\tau. \tag{14}$$

Здесь μ_s — параметры распределения, описывающие степени влияния ранее сделанных внешних инвестиций на капиталовложения текущего момента. Очевидно, что чем больше значения величин μ_s, тем меньше это влияние, и наоборот.

Интегральные уравнения (14) могут быть представлены в виде системы дифференциальных уравнений. Для этого обе их части следует продифференцировать по времени t, воспользоваться формулой интегрирования по частям и учесть очевидные равенства:

$$\frac{\partial G_s(t-\tau)}{\partial t} = -\frac{\partial G_s(t-\tau)}{\partial \tau}, \quad \lim_{\tau \to \infty} S_s(\tau) = 0.$$

Уравнения (14) принимают вид

$$\frac{dU_s(t)}{dt} = \mu_s \big(G_s(t) - U_s(t) \big). \tag{15}$$

Случайные колебания приращений объемов факторов производства $\Delta Q_s^W(t)$, обусловленные определенной волатильностью объема выпускаемой продукции, представлены в виде стохастических стандартных винеровских процессов [32]:

$$\Delta Q_s^W(t) = \theta(t)\rho_s\big(Q_s(t) - Q_s^0\big)\left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty}\right) \cdot \Delta w. \qquad (16)$$

Здесь w — стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon(t) \cdot \sqrt{\Delta t}$; ρ_s — уровни волатильности факторов производства $Q_s(t)$; $\varepsilon(t)$ — случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением $\langle\varepsilon\rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle\varepsilon^2\rangle = 1$.

Из формул (16) следует, что в окрестностях точек Q_s^0, соответствующих началу процесса развития предприятия, и в окрестностях точек Q_s^∞, соответствующих завершению процесса развития предприятия, стохастический процесс становится практически детерминированным.

Подставляя формулы (3), (4), (10) и (16) в уравнение баланса (2), получаем

$$\Delta Q_s(t) = \theta(t)\Big(\big(-A_s Q_s^{u_s}(t) + W_s(t) + U_s(t)\big) \cdot \Delta t + \\ + \rho_s\big(Q_s(t) - Q_s^0\big)\left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty}\right) \cdot \Delta w\Big). \qquad (17)$$

Переходя в соотношениях (17) к пределу при условии $\Delta t \to 0$ и $\Delta w \to 0$, находим систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений

$$dQ_s(t) = \theta(t)\big(S_s(Q_s(t), t)\,dt + Z_s(Q_s(t), t)\,dw\big). \qquad (18)$$

Здесь

$$S_s(Q_s(t), t) = -A_s Q_s^{u_s}(t) + W_s(t) + U_s(t) \qquad (19)$$

— коэффициенты сноса уравнений (18),

$$Z_s(Q_s(t), t) = \rho_s\big(Q_s(t) - Q_s^0\big)\left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty}\right) \qquad (20)$$

— коэффициенты волатильности уравнений (18).

Уравнения (9), (15) и (18) с коэффициентами (19) и (20) образуют систему нормальных нелинейных связанных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка. Подстановка в них выражения для производственной функции (1) дает

$$dQ_s(t) = \theta(t)\big(S_s(Q_s(t), t)\,dt + Z_s(Q_s(t), t)\,dw\big),$$
$$dW_s(t) = \lambda_s\left(B_s P \prod_{p=1}^{n} Q_p^{a_p}(t) - W_s(t)\right) dt, \qquad (21)$$
$$dU_s(t) = \mu_s\big(G_s(t) - U_s(t)\big)\,dt.$$

Начальные условия для системы (21) имеют вид

$$Q_s(0) = Q_s^0, \quad W_s(0) = W_s^0, \quad U_s(0) = U_s^0. \tag{22}$$

В общем случае нелинейная задача Коши (21), (22) может быть решена только численно.

Если вместо функций распределения постепенного и непрерывного ввода внутренних и внешних инвестиций $R_s(\tau)$ и $S_s(\tau)$ выбрать дельта-функцию Дирака $R_s(\tau) = S_s(\tau) = \delta(\tau)$, то система (21) принимает вид

$$dQ_s(t) = \theta(t)\big(S_s(Q_s(t), t)\,dt + Z_s(Q_s(t), t)\,dw\big). \tag{23}$$

Здесь

$$\begin{gathered} S_s(Q_s(t), t) = -A_s Q_s^{u_s}(t) + B_s P \prod_{p=1}^{n} Q_p^{a_p}(t) + \eta_s G(t), \\ Z_s(Q_s(t), t) = \rho_s\big(Q_s(t) - Q_s^0\big)\left(1 - \frac{Q_s(t)}{Q_s^\infty}\right) \end{gathered} \tag{24}$$

— коэффициенты сноса и коэффициенты волатильности уравнений (23).

Начальные условия для системы уравнений (23) с коэффициентами (24) имеют вид

$$Q_s(0) = Q_s^0. \tag{25}$$

Структура системы уравнений (21) показывает, что развитие предприятия будет продолжаться до тех пор, пока сумма объемов внутренних и внешних инвестиций будет превосходить объемы амортизационных отчислений. Если сумма объемов внутренних и внешних инвестиций станет равной объемам амортизационных отчислений, развитие предприятия остановится. Предельные значения Q_s^∞ объемов производственных факторов $Q_s(t)$ находятся из условий

$$\begin{gathered} \frac{dQ_s(t)}{dt} = \theta(t)\big(-A_s Q_s^{u_s}(t) + W_s(t) + U_s(t)\big) = 0, \\ \frac{dW_s(t)}{dt} = \lambda_s\left(B_s P \prod_{p=1}^{n} Q_p^{a_p}(t) - W_s(t)\right) = 0, \\ \frac{dU_s(t)}{dt} = \mu_s\big(G_s(t) - U_s(t)\big) = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Исключая из уравнений (26) величины $W_s(t)$, $U_s(t)$ и учитывая, что предельному состоянию работы предприятия соответствует условие $t \to \infty$, получаем систему уравнений для вычисления предельных значений объемов производственных факторов Q_s^∞:

$$-A_s \cdot (Q_s^\infty)^{u_s} + B_s P \prod_{p=1}^{n} (Q_p^\infty)^{a_p} + G_s^\infty = 0. \tag{27}$$

Здесь $G_s^\infty = \lim\limits_{t\to\infty} G_s(t)$.

Вид функции $\theta(t)$ существенно влияет на формы интегральных кривых уравнений (21) и (23). Функция $\theta(t)$ определяет центр временного интервала, его протяженность и максимальную величину отклонения от единичного значения, при котором предприятие работает стабильно.

Если в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ предприятие производит полную или частичную замену технологического оборудования, то функцию $\theta(t)$ можно записать в виде [28]

$$\theta(t) = 1 - \omega \exp\Big(-\frac{(t^* - t)^2}{2\sigma^2}\Big). \tag{28}$$

Здесь ω — максимальный размер отклонения функции $\theta(t)$ от единицы, t^* — центр временного интервала, σ — радиус временного интервала.

Для стабильно работающего предприятия параметр ω принимает нулевое значение. Если $0 < \omega < 1$, то в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ будет наблюдаться некоторое замедление работы предприятия. Если $\omega = 1$, то в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ будет наблюдаться переоснащение производства. Если $\omega > 1$, то в интервале времени $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ будет наблюдаться переоснащение производства, сопровождаемое его некоторым сворачиванием.

Если эффекты стагнации и падения выпуска продукции на предприятии происходят неоднократно, то в качестве функции относительной удельной скорости развития рассматриваемого предприятия целесообразно выбрать произведение функций вида (28):

$$\theta(t) = \prod_{s=1}^{n} \Big(1 - \omega_s \exp\Big(-\frac{(t_s^* - t)^2}{2\sigma_s^2}\Big)\Big). \tag{29}$$

2. Стохастическая модель развития однофакторного производственного предприятия, учитывающая эффект запаздывания внутренних и внешних инвестиций. Рассмотрим производственное предприятие, выпуск продукции которого обеспечивается только одним ресурсом в виде производственного фактора $Q = Q(t)$. Непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция $Q = Q(t)$ ограниченна на числовой полуоси $(0 < t < \infty)$, $Q_0 \leqslant Q \leqslant Q_\infty$, своими предельными значениями $Q_0 = Q(0)$, $Q_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} Q(t)$. В таком случае общая система уравнений (21) и начальные условия (22) принимают вид

$$\begin{gathered} dQ(t) = \theta(t)\big(S(Q(t),t)\,dt + Z(Q(t),t)\,dw\big),\\ dW(t) = \lambda\big(BPQ^a(t) - W(t)\big)\,dt,\\ dU(t) = \mu\big(G(t) - U(t)\big)\,dt. \end{gathered} \tag{30}$$

Здесь

$$S(Q(t),t) = -AQ^u(t) + W(t) + U(t) \tag{31}$$

— коэффициент сноса уравнений (30),

$$Z(Q(t),t) = \rho\big(Q(t) - Q_0\big)\Big(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\Big) \tag{32}$$

— коэффициент волатильности уравнений (30).

Начальные условия для системы уравнений (30)–(32) имеют вид

$$Q(0) = Q_0, \quad W(0) = W_0, \quad U(0) = U_0. \tag{33}$$

Уравнения (27) для вычисления предельного значения Q_∞ объема производственного фактора $Q(t)$ сводятся к уравнению

$$-AQ_\infty^u + BPQ_\infty^a + G_\infty = 0. \tag{34}$$

Здесь $G_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} G(t)$.

Уравнение (34) имеет аналитическое решение

$$Q_\infty = \left(\frac{BP}{A}\right)^{1/(u-a)} \tag{35}$$

только в случае $G_\infty = 0$. Если $G_\infty \neq 0$, то уравнение (34) можно решить только численно.

Общая система уравнений (23)–(25), которая не учитывает эффект запаздывания внутренних и внешних инвестиций, принимает вид

$$dQ(t) = \theta(t)\big(S(Q(t),t)\,dt + Z(Q(t),t)\,dw\big). \tag{36}$$

Здесь

$$\begin{gathered} S(Q(t),t) = -AQ^u(t) + BPQ^a(t) + G(t), \\ Z(Q(t),t) = \rho\big(Q(t) - Q_0\big)\left(1 - \frac{Q(t)}{Q_\infty}\right) \end{gathered} \tag{37}$$

— коэффициенты сноса и коэффициенты волатильности уравнения (36).

Начальное условие для уравнения (36) с коэффициентами (37) имеет вид

$$Q(0) = Q_0. \tag{38}$$

Численные решения системы уравнений (30) с коэффициентами (31), (32) и начальными условиями (33) выполняются методом последовательных приближений Эйлера–Маруямы в соответствии с алгоритмом [31, 53]

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i + \theta(t_i)\big(S(Q_i,t_i)\cdot\Delta t_i + Z(Q_i,t_i)\varepsilon(t_i)\cdot\sqrt{\Delta t_i}\big), \\ W_{i+1} = W_i + \lambda(BPQ_i^a - W_i)\cdot\Delta t_i, \\ U_{i+1} = U_i + \mu\big(G(t_i) - U_i\big)\cdot\Delta t_i, \\ S(Q_i,t_i) = -AQ_i^u + W_i + U_i, \\ Z(Q_i,t_i) = \rho(Q_i - Q_0)\left(1 - \dfrac{Q_i}{Q_\infty}\right). \end{cases} \tag{39}$$

Численное решение уравнения (36) с коэффициентами (37) и начальным условием (38) выполняются методом последовательных приближений Эйлера–Маруямы в соответствии с алгоритмом [31, 53]

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i + \theta(t_i)\big(S(Q_i,t_i)\cdot\Delta t_i + Z(Q_i,t_i)\varepsilon(t_i)\cdot\sqrt{\Delta t_i}\big), \\ S(Q_i,t_i) = -AQ_i^u + BPQ_i^a + G(t_i), \\ Z(Q_i,t_i) = \rho(Q_i - Q_0)\left(1 - \dfrac{Q_i}{Q_\infty}\right). \end{cases} \tag{40}$$

Для любых вариантов реализации алгоритмов (39) и (40) на каждом малом временном шаге Δt_i начиная с начальных значений величин Q_0, W_0 и U_0 генерируется случайное число $\varepsilon(t_i)$ и рассчитываются последующие значения величин Q_{i+1}, W_{i+1} и U_{i+1}.

В результате образуются четыре случайные числовые последовательности $\{t_i\}$, $\{Q_i\}$, $\{W_i\}$ и $\{U_i\}$. Эти последовательности на координатной плоскости образуют три системы случайных точек $\{t_i, Q_i\}$, $\{t_i, W_i\}$ и $\{t_i, U_i\}$, которые порождают три ломаные случайные траектории.

Очевидно, что всякий раз при повторении реализаций алгоритмов (39) и (40) образуются новые ломаные случайные траектории, поскольку каждый раз случайная величина генерирует новые случайные значения.

Для численных реализаций алгоритмов (39) и (40) временной интервал $t \in [0, 120]$ разбивался на $n = 100$ одинаковых частей с шагом $\Delta t_i = \Delta t = 1.2$. Количество реализаций случайного процесса динамики предприятия принималось $m = 200$.

Следует отметить, что в достаточно малых окрестностях начальных точек $\{t = 0, Q = Q_0\}$, $\{t = 0, W = W_0\}$ и $\{t = 0, U = U_0\}$ и в достаточно малых окрестностях предельных точек $\{t = 120, Q = Q_\infty\}$, $\{t = 120, W = W_\infty\}$ и $\{t = 120, U = U_\infty\}$ стохастические процессы становятся практически детерминированными, что является вполне ожидаемым и определяется видом функции коэффициента волатильности.

Для вычисления математического ожидания величины $Q(t)$ следует статистически усреднить систему стохастических уравнений (30):

$$\begin{cases} d\langle Q(t)\rangle = \theta(t)\langle -AQ^u(t) + W(t) + U(t)\rangle\, dt, \\ d\langle W(t)\rangle = \lambda\langle BPQ^a(t) - W(t)\rangle\, dt, \\ d\langle U(t)\rangle = \mu\langle G(t) - U(t)\rangle\, dt \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} d\langle Q\rangle = \theta\big(-A\langle Q^u\rangle + \langle W\rangle + \langle U\rangle\big)\, dt, \\ d\langle W\rangle = \lambda\big(BP\langle Q^a\rangle - \langle W\rangle\big)\, dt, \\ d\langle U\rangle = \mu\big(G - \langle U\rangle\big)\, dt. \end{cases} \tag{41}$$

Система уравнений (41) показывает, что при последовательном вычислении статистических моментов вида $\langle Q^h\rangle$ возникает бесконечная система статистических уравнений, генерирующая статистические моменты все более высоких порядков. Для остановки этого процесса генерации необходимо сделать определенные допущения. Будем предполагать, что флуктуации величины $Q(t)$ относительно ее среднего значения $\langle Q(t)\rangle$ пропорциональны случайной величине $\varepsilon(t)$ [32]:

$$Q - \langle Q\rangle = \xi \cdot \varepsilon.$$

Здесь $\xi = \rho(\langle Q\rangle - Q_0)\big(1 - \frac{\langle Q\rangle}{Q_\infty}\big)$ — коэффициент пропорциональности.

Тогда выражение для величины Q^h принимает вид

$$Q^h = \big(\langle Q\rangle + \xi \cdot \varepsilon\big)^h = \langle Q\rangle^h \Big(1 + \frac{\xi}{\langle Q\rangle} \cdot \varepsilon\Big)^h. \tag{42}$$

Ограничиваясь в формуле (42) малыми флуктуациями $\left|\frac{\xi}{\langle Q\rangle}\cdot\varepsilon\right|<1$, рассмотрим три слагаемых сходящегося биномиального ряда:

$$Q^h=\langle Q\rangle^h\Big(1+h\frac{\xi}{\langle Q\rangle}\cdot\varepsilon+\frac{h(h-1)}{2}\frac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\cdot\varepsilon^2+\cdots\Big). \tag{43}$$

Вычисляя по формуле (43) средние величины

$$\langle Q^u\rangle\approx\langle Q\rangle^u\Big(1+\frac{u(u-1)}{2}\frac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\Big),\quad \langle Q^a\rangle\approx\langle Q\rangle^a\Big(1+\frac{a(a-1)}{2}\frac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\Big)$$

и подставляя их в уравнения (41), находим систему дифференциальных уравнений для математических ожиданий величин $\langle Q(t)\rangle$, $\langle W(t)\rangle$ и $\langle U(t)\rangle$:

$$\begin{cases}\dfrac{d\langle Q\rangle}{dt}=\theta\Big(-A\langle Q\rangle^u\Big(1+\dfrac{u(u-1)}{2}\dfrac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\Big)+\langle W\rangle+\langle U\rangle\Big),\\ \dfrac{d\langle W\rangle}{dt}=\lambda\Big(BP\langle Q\rangle^a\Big(1+\dfrac{a(a-1)}{2}\dfrac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\Big)-\langle W\rangle\Big),\\ \dfrac{d\langle U\rangle}{dt}=\mu\big(\langle G\rangle-\langle U\rangle\big).\end{cases} \tag{44}$$

Начальные условия для системы уравнений (44) имеют вид

$$\langle Q(0)\rangle=Q_0,\quad \langle W(0)\rangle=W_0,\quad \langle U(0)\rangle=U_0. \tag{45}$$

Если не учитывать эффект запаздывания внутренних и внешних инвестиций, то система (44) сводится к одному уравнению [32]:

$$\frac{d\langle Q\rangle}{dt}=\theta\Big(-A\langle Q\rangle^u\Big(1+\frac{u\cdot(u-1)}{2}\frac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\Big)+ \\ +BP\langle Q\rangle^a\Big(1+\frac{a(a-1)}{2}\frac{\xi^2}{\langle Q\rangle^2}\Big)+G\Big). \tag{46}$$

Начальное условие для уравнения (46) принимает вид

$$\langle Q(0)\rangle=Q_0. \tag{47}$$

Сравнение результатов численного решения задачи Коши (44), (45) и (46), (47) с численными значениями статистических средних, вычисленных по всем двумстам реализациям алгоритмов (39), (40) показывает их почти полное совпадение.

На рис. 1 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором параметр ω функции $\theta(t)$ обращается в нуль ($\omega=0$).

На рис. 2 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^*-\sigma,t^*+\sigma)$ при $t^*=40$ и

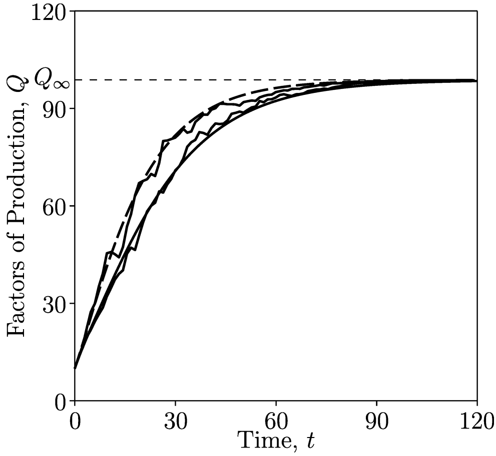


Рис. 1. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия), для случая стабильной работы рассматриваемого предприятия, при котором параметр ω функции $\theta(t)$ обращается в нуль. Расчетные значения: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 0$, $\lambda = 0.25$

[Figure 1. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (45), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) for the case of stable operation of the considered enterprise in which the parameter ω of the function $\theta(t)$ vanishes. Calculation values: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 0$, $\lambda = 0.25$]

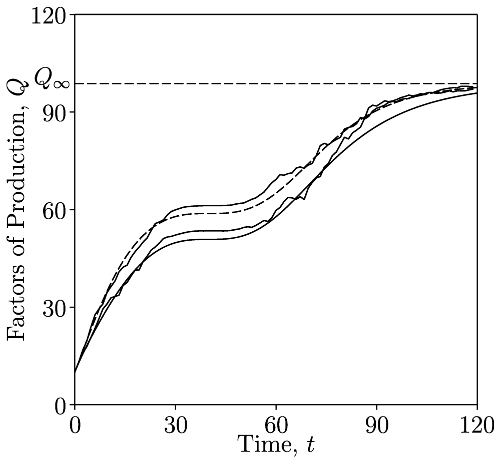


Рис. 2. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия), для случая переоснащения процесса производства на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Расчетные значения: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$

[Figure 2. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (44), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) for the case of retooling the production process on the time interval $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Calculation values: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$; $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$]

$\sigma = 20$. Размер максимального отклонения ω функции $\theta(t)$ в этом случае принимается равным единице ($\omega = 1$).

На рис. 3 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), для случая переоснащения процесса производства в условиях кризиса на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$ при $t^* = 40$ и $\sigma = 20$. Размер максимального отклонения ω функции $\theta(t)$ в этом случае принимается равным 1.25.

При построении графиков функций на рис. 1–3 не учитывались внешние инвестиции ($G(t) \equiv 0$). Предельное значение ресурса $Q(t)$, вычисленное по формуле (35), составляет $Q_\infty = 98.7174$.

В случае если волатильность ρ обращается в нуль ($\rho = 0$) и процесс ста-

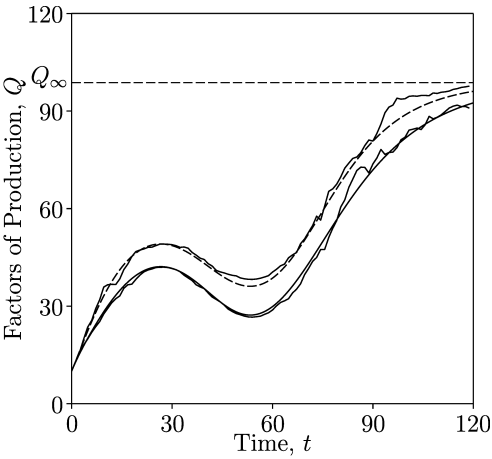


Рис. 3. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия), для случая переоснащения процесса производства в условиях кризиса на временном интервале $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Расчетные значения: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1.25$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$

[Figure 3. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (45), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) for the case of re-equipment of the production process in a crisis on a time interval $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$. Calculation values: $n = 100$, $\Delta t = 1.2$, $m = 200$, $Q_0 = 10$, $P = 15$, $a = 0.45$, $u = 1$, $A = 0.12$, $B = 0.12$, $\rho = 0.1$, $\omega = 1.25$, $t^* = 40$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.25$]

новится детерминированным, полученные результаты совпадают с результатами работы [31].

Сравним теперь построенные расчетные модели (39), (40); (44), (45) и (46), (47) со статистическими данными для показателей развития предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат» [55]. Статистические данные по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 1. Здесь переменная времени t изменяется на отрезке $[0, 9]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2011 до 2020.

В соответствии с данными табл. 1 производственная функция (1) для рассматриваемого предприятия принимает вид

$$V = 51.1429 \cdot Q^{0.53}. \tag{48}$$

На рис. 4 приведен график функции выпуска предприятия, построенный по формуле (48).

Таблица 1

Статистические данные по выпуску продукции ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат» [55] [Factors of Production and Total Production for CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant [55]]

Years	Time, t	Factors of Production, Q (mln rubles)	Total Production, V (mln rubles)
2011	0	125.708	662.900
2012	1	150.235	731.496
2013	2	231.137	856.875
2014	3	245.655	953.532
2015	4	247.904	1 062.253
2016	5	336.925	1 162.925
2017	6	378.737	1 170.557
2018	7	429.265	1 220.274
2019	8	415.676	1 294.213
2020	9	416.390	1 343.184

Характер данных табл. 1 показывает, что развитие предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат» происходит в основном за счет внутренних инвестиций, поэтому при построении графиков функций на рис. 5 внешние инвестиции не учитывались ($G(t) \equiv 0$). Кроме того, из анализа этих данных следует, что в 2014 году ($t_1^* = 3$) и в 2019 году ($t_2^* = 8$) наблюдалось определенное замедление развития предприятия, поэтому в расчетах использовалась функция относительной удельной скорости $\theta(t)$ вида (29).

На рис. 5 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), со статистическими данными работы предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат».

Применим теперь построенную модель для расчета показателей развития предприятия ООО Маслозавод «Пестравский» [56]. Статистические данные

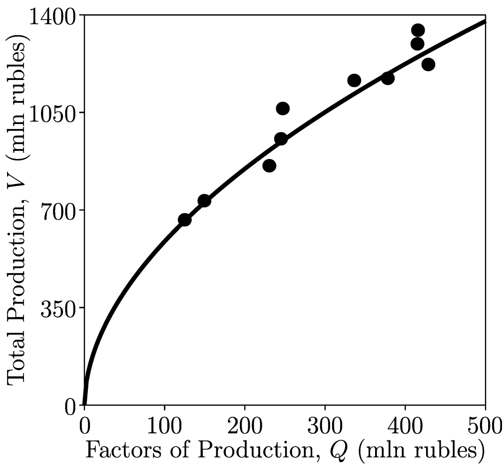


Рис. 4. График функции выпуска (48) и статистические данные для ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат». Расчетные значения: $P = 51.1429$, $a = 0.53$; точки соответствуют данным табл. 1

[Figure 4. The production function (48) and statistical data for CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant. Calculation values: $P = 51.1429$, $a = 0.53$; the points correspond to the data in Table 1]

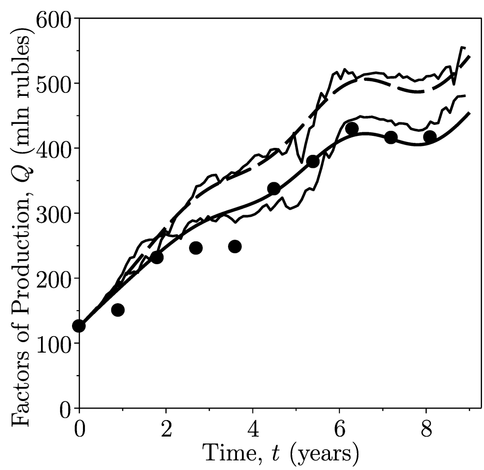


Рис. 5. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия) со статистическими данными работы предприятия ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.09$, $m = 200$, $Q_0 = 125.708$, $P = 51.1429$, $a = 0.53$, $A = 0.15$, $u = 1$, $B = 0.12$, $\rho = 0.25$, $\omega_1 = 0.7$, $t_1^* = 3$, $\sigma_1 = 1$, $\omega_2 = 1.25$, $t_2^* = 8$; точки соответствуют данным табл. 1

[Figure 5. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (44), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) and statistical data for CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant. Calculation values: $n = 200$, $\Delta t = 0.09$, $m = 200$, $Q_0 = 125.708$, $P = 51.1429$, $a = 0.53$, $A = 0.15$, $u = 1$, $B = 0.12$, $\rho = 0.25$, $\omega_1 = 0.7$, $t_1^* = 3$, $\sigma_1 = 1$, $\omega_2 = 1.25$, $t_2^* = 8$; the points correspond to the data in Table 1]

Таблица 2

Статистические данные по выпуску продукции ООО Маслозавод «Пестравский» [56] [Factors of Production and Total Production for LLC Pestravsky Oil Plant [56]]

Years	Time, t	Factors of Production, Q (mln rubles)	Total Production, V (mln rubles)
2014	0	157.182	415.770
2015	1	213.220	825.524
2016	2	258.295	904.156
2017	3	362.699	827.725
2018	4	469.344	942.414
2019	5	560.128	1 001.580
2020	6	1 316.062	2 277.409

по выпуску продукции этим предприятием приведены в табл. 2. Здесь переменная времени t изменяется на отрезке $[0, 6]$, а ее целые значения соответствуют годам от 2014 до 2020.

Анализ данных табл. 2 показывает, что до 2019 года предприятие развивалось монотонно за счет внутренних инвестиций. Эта часть графика может быть хорошо аппроксимирована теоретической кривой

$$Q_T(t) = Q(0) + 49.7263 \cdot t^{1.3}. \tag{49}$$

Резкий рост ресурсов предприятия после 2019 года свидетельствует о том, что на его развитие существенно повлияли внешние инвестиции, которые можно описать формулой [32]

$$G_T(t) = G_{\max} \cdot \exp\Big(-\frac{(t-t_G)^4}{2\sigma_G^2}\Big). \tag{50}$$

На рис. 6 представлены график функции объема фактора производства Q_T, построенный по формуле (49), и график функции объема фактора производства Q_S, построенный по статистическим данным табл. 2. Кроме того, на этом же рисунке приведены график функции внешних инвестиций G_T,

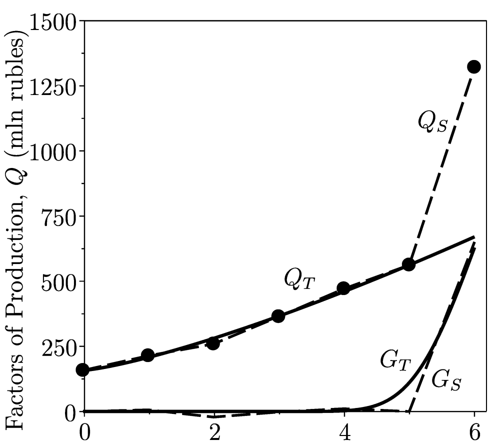


Рис. 6. Графики функций объемов факторов производства Q_T (сплошная линия) и Q_S (штриховя линия) и графики функций объемов внешних инвестиций G_T (сплошная линия) и G_S (штриховая линия), построенные по формулам (49) и (50) и статистическим данным табл. 2. Точками обозначены значения ресурса $Q(t)$ в соответствии со статистическими данными табл. 2

[Figure 6. The graphs of functions of volumes of production factors Q_T (solid line) and Q_S (dashed line), and graphs of functions of volumes of external investments G_T (solid line) and G_S (dashed line) constructed according to the formulae (49) and (50); the points denote the values of the resource $Q(t)$ and correspond to the data in Table 2]

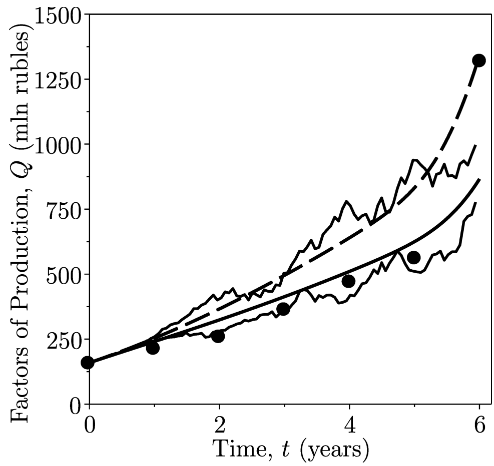


Рис. 7. Сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) (сплошная линия) и (46), (47) (штриховая линия) со статистическими данными работы предприятия ООО Маслозавод «Пестравский». Расчетные значения: $n = 200$, $\Delta t = 0.06$, $m = 200$, $Q_0 = 157.182$, $P = 37.3695$, $a = 0.55$, $A = 0.1$, $u = 1$, $B = 0.165$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$. Точками обозначены значения ресурса, в соответствии со статистическими данными табл. 2

[Figure 7. The stochastic trajectories constructed by the algorithms (39), (40) and the expectation curves calculated by the formulae (44), (45) (solid line) and (46), (47) (dashed line) and statistical data for LLC Pestravsky Oil Plant. Calculation values: $n = 200$, $\Delta t = 0.06$, $m = 200$, $Q_0 = 157.182$, $P = 37.3695$, $a = 0.55$, $A = 0.1$, $u = 1$, $B = 0.165$, $\rho = 0.25$, $\omega = 0$; the points denote the values of the resource and correspond to the data in Table 2]

построенный по формуле (50), и график функции внешних инвестиций G_S, построенный по статистическим данным.

На рис. 7 представлено сравнение стохастических траекторий, построенных по алгоритмам (39), (40), и кривых математических ожиданий, рассчитанных по формулам (44), (45) и (46), (47), со статистическими данными работы предприятия ООО Маслозавод «Пестравский».

Заключение. Разработаны новые стохастические модели динамического развития однофакторных производственных предприятий за счет внутренних и внешних инвестиций.

Построены стохастические дифференциальные уравнения баланса для таких предприятий, описывающие случайные процессы увеличения выпуска продукции и роста факторов производства.

Исследовано взаимодействие пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений с внутренними и внешними инвестициями.

Сформулированы условия равновесного состояния работы предприятия и получены уравнения для определения предельных значений факторов производства, при достижении которых дальнейший рост выпуска продукции предприятием прекращается.

Рассмотрены три варианта развития предприятий. В первом случае предприятие развивается стабильно и поступательно. Во втором случае предприятие временно приостанавливает рост выпуска продукции, переоснащая производство и заменяя технологическое оборудование. В третьем случае предприятие вынуждено временно сворачивать производство при смене технологического уклада.

Представлен алгоритм построения стохастических фрактальных линий для случайной функции фактора производства на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений развития предприятий.

Разработан вариант метода статистического осреднения стохастических дифференциальных уравнений баланса предприятий, с помощью которого установлены дифференциальные уравнения для определения математических ожиданий случайных функций факторов производства.

Показано, что численные решения этих уравнений и статистическое среднее значение функции фактора производства, вычисленное по двумстам реализациям стохастических фрактальных линий, дают почти одинаковые результаты.

Численный анализ разработанных моделей показал хорошее соответствие известным статистическим данным работы производственного предприятия.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford: Clarendon Press, 1936. 248 pp.
2. Domar E. D. Capital expansion, rate of growth, and employment // *Econometrica*, 1946. vol. 14, no. 2. pp. 137–147. https://doi.org/10.2307/1905364.
3. Solow R. M. A contribution to the theory of economic growth // *Quart. J. Econ.*, 1956. vol. 70, no. 1. pp. 65–94. https://doi.org/10.2307/1884513.
4. Swan T. W. Economic growth and capital accumulation // *Economic Record*, 1956. vol. 32, no. 2. pp. 334–361. https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x.
5. Kuznets S. Long swings in the growth of population and in related economic variables // *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 1958. vol. 102, no. 1. pp. 25–52 http://www.jstor.org/stable/985303.
6. Kuznets S. Quantitative aspects of the economic growth of nations. Paper VIII: Distribution of income by size // *Economic Development and Cultural Change*, 1963. vol. 11, no. 2. pp. 1–80. https://doi.org/10.1086/450006.
7. Uzawa H. Optimum technical change in an aggregative model of economic growth // *Int. Econ. Review*, 1965. vol. 6, no. 1. pp. 18–31. https://doi.org/10.2307/2525621.
8. Arrow K. J. The economic implications of learning by doing // *Review Econ. Stud.*, 1962. vol. 29, no. 3. pp. 155–173. https://doi.org/10.2307/2295952.
9. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth // *American Econ. Review*, 1980. vol. 70, no. 2. pp. 220–224 https://www.jstor.org/stable/1815471.
10. Romer P. M. Increasing returns and long-run growth // *J. Polit. Econ.*, 1986. vol. 94, no. 5. pp. 1002–1037. https://doi.org/10.1086/261420.
11. Lucas R. E. On the mechanics of economic development // *J. Monetary Econ.*, 1988. vol. 22, no. 1. pp. 3–42. https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7.
12. Romer P. M. Endogenous technological change // *J. Polit. Econ.*, 1990. vol. 98, no. 5. pp. 71–102 https://www.jstor.org/stable/2937632.
13. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA: MIT Press, 1991. 359 pp.
14. Mankiw N. G, Romer D., Weil D. N. A contribution to the empirics of economic growth // *Quart. J. Econ.*, 1992. vol. 107, no. 2. pp. 407–437. https://doi.org/10.2307/2118477.
15. Grossman G. M., Helpman E. Endogenous innovation in the theory of growth // *J. Econ. Perspect.*, 1994. vol. 8, no. 1. pp. 23–44 https://www.jstor.org/stable/2138149.

16. Barro R. J., Sala-i-Martin X. I. *Economic Growth*. Cambridge MA: MIT Press, 1995. 672 pp.
17. Bruno M., Easterly W. *Inflation crises and long-run growth*: NBER Working Papers 5209, 1995. https://doi.org/10.3386/w5209.
18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence // *Struct. Change Econ. Dyn.*, 2004. vol. 15, no. 4. pp. 401–420. https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.
19. Нижегородцев Р. М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования / *Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование*. М.: Диалог МГУ, 1997. С. 34–51.
20. Бадаш Х. З. Экономико-математическая модель экономического роста предприятия // *Вестн. Удмуртск. унив. Сер. Экономика и право*, 2009. №1. С. 5–9.
21. Королев А. В., Матвеенко В. Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // *Автомат. и телемех.*, 2006. №4. С. 126–136.
22. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // *Эконом. анализ: теория и практика*, 2007. Т. 86, №5. С. 23–30.
23. Кузнецов Ю. А., Мичасова О. В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2012. №4. С. 46–57.
24. Прасолов А. В. *Математические методы экономической динамики*. СПб.: Лань, 2015. 352 с.
25. Сараев А. Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // *Вестник Самарского государственного университета*, 2015. Т. 6, №2. С. 262–272. https://doi.org/10.18287/2542-0461-2015-0-2-262-272.
26. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // *Экономика и предпринимательство*, 2018. №11. С. 1237–1241.
27. Сараев А. Л. Уравнения динамики нестабильных многофакторных экономических систем, учитывающих эффект запаздывания внутренних инвестиций // *Казанский экономический вестник*, 2015. Т. 17, №3. С. 68–73.
28. Ильина Е. А., Сараев А. Л., Сараев Л. А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // *Экономика и предпринимательство*, 2017. №9–4(86). С. 1130–1134.
29. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Экономико-математическая модель развития производственных предприятий, учитывающая эффект запаздывания внутренних инвестиций // *Экономика и предпринимательство*, 2019. №5(106). С. 1316–1320.
30. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2020. Т. 11, №2. С. 157–165. https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165.
31. Saraev A. L., Saraev L. A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 1784, 012010. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010.
32. Сараев А. Л., Сараев Л. А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, №2. С. 343–364. https://doi.org/10.14498/vsgtu1700.
33. Артемьев С. С., Якунин М. А. *Математическое и статистическое моделирование в финансах*. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2008. 174 с.
34. Воронцовский А. В., Дикарев А. Ю. Прогнозирование макроэкономических показателей в режиме имитации на основе стохастических моделей экономического роста // *Финансы и бизнес*, 2013. №2. С. 33–51.

35. Курзенев В. А., Лычагина Е. Б. Стохастическое моделирование динамики экономической системы // *Управленческое консультирование*, 2013. № 5. С. 78–83.
36. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамические стохастические модели общего экономического равновесия // *Управление экономическими системами*, 2014. Т. 67, № 7.
37. Андрианов Д. Л., Шульц Д. Н., Ощепков И. А. Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия России // *Вестник Нижегородского университета. Сер. Социальные науки*, 2015. № 2(38). С. 18–25.
38. Андрианов Д. Л., Арбузов В. О., Ивлиев С. В., Максимов В. П., Симонов П. М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // *Вестник Пермского университета. Сер. Экономика*, 2015. № 4. С. 8–32.
39. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths* / Classics in Mathematics. Berlin: Springer. xv+321 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6.
40. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations* / Mathematical Modelling: Theory and Applications. vol. 22. Netherlands: Springer, 2007. xii+230 pp. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7.
41. Степанов С. С. *Стохастический мир*, 2009. https://synset.com/pdf/ito.pdf; дата обращения: 21.04.2021.
42. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations // *World Applied Sciences Journal*, 2011. vol. 13, no. 11. pp. 2288–2295.
43. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes* / Oxford Graduate Texts in Mathematics. vol. 24. Oxford: Oxford University Press, 2014. xiv+352 pp. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001.
44. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function // *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996. vol. 104, no. 1. pp. 43–60. https://doi.org/10.1007/BF01303802.
45. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density // *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996. vol. 2, no. 2. pp. 93–128. https://doi.org/10.1515/mcma.1996.2.2.93.
46. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations // *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008. vol. 77, no. 4. pp. 408–420, arXiv: 1303.4510 [math.NA]. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.04.016.
47. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods // *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008. vol. 4, no. 2. pp. 83–93.
48. Кузнецов Д. С. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения.* Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2007. 800 с. https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-229.
49. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities // *J. Theor. Probab.*, 2011. vol. 24. pp. 454–478. https://doi.org/10.1007/s10959-010-0291-x.
50. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients // *Electron. J. Probab.*, 2017. vol. 22, 46. 47 pp., arXiv: 1604.00771 [math.PR]. https://doi.org/10.1214/17-EJP53.
51. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit // *J. Stat. Phys.*, 2012. vol. 146, no. 4. pp. 762–773. https://doi.org/10.1007/s10955-012-0418-9.
52. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme // *Bernoulli*, 2018. vol. 24, no. 3. pp. 1653–1691. https://doi.org/10.3150/16-BEJ909.
53. Соловьев В. И. *Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения.* М.: Вега-Инфо, 2009. 176 с.

54. Кузнецова И. Ю. Численное решение стохастического дифференциального уравнения методом Эйлера–Маруямы // *Международный научно-исследовательский журнал*, 2013. № 11–1(18). С. 8–11.
55. *ЗАО «Самарский булочно-кондитерский комбинат»: бухгалтерская отчетность и финансовый анализ.* https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6319008608_zao-samarskiy-bulochno-konditerskiy-kombinat; дата обращения: 21.04.2021.
56. *ООО Маслозавод «Пестравкий»: бухгалтерская отчетность и финансовый анализ.* https:https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6375000296_ooo-maslozavod-pestravskiy; дата обращения: 21.04.2021.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 738–762
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1862

MSC: 60H10

Models of stochastic dynamics of development of industrial enterprises with lagging internal and external investments

A. L. Saraev, L. A. Saraev

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

The article proposes new stochastic models of the dynamic development of enterprises that restore their production at the expense of internal and external lagging investments. Systems of stochastic differential balance equations for such enterprises are established, describing random changes in factors of production and output. Proportional, progressive and digressive depreciation deductions are considered and their interaction with lagging internal and external investments is investigated. The conditions for achieving an equilibrium state of the enterprises work are formulated and the corresponding limiting values of the factors of production are calculated. Algorithms of the Euler–Maruyama method are obtained for numerical solutions of systems of stochastic differential equations of enterprise development. For each numerical implementation of these algorithms, the corresponding stochastic trajectories are constructed for the random functions of factors of production and output. A variant of the method for calculating the mathematical expectations of random functions of production factors is proposed, for which the corresponding system of differential equations is obtained. Numerical analysis of solutions of stochastic differential equations for the developed models showed good agreement with the known statistical data on the development of industrial enterprises.

Keywords: enterprise production factors, production function, output, resources, stochastic equations, Wiener process, the drift coefficient, volatility factor, lagging investment.

Received: 21st April, 2021 / Revised: 23rd August, 2021 /
Accepted: 20th September, 2021 / First online: 3rd December, 2021

Research Article

Please cite this paper in press as:
Saraev A. L., Saraev L. A. Models of stochastic dynamics of development of industrial enterprises with lagging internal and external investments, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 738–762. https://doi.org/10.14498/vsgtu1862 (In Russian).

Authors' Details:

Alexander L. Saraev https://orcid.org/0000-0002-9223-6330
Cand. Econom. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: alex.saraev@gmail.com

Leonid A. Saraev https://orcid.org/0000-0003-3625-5921
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Department of Mathematics and Business Informatics; e-mail: saraev_leo@mail.ru

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Harrod R. F. *The Trade Cycle*. Oxford, Clarendon Press, 1936, 248 pp.
2. Domar E. D. Capital expansion, rate of growth, and employment, *Econometrica*, 1946, vol. 14, no. 2, pp. 137–147. `https://doi.org/10.2307/1905364`.
3. Solow R. M. A contribution to the theory of economic growth, *Quart. J. Econ.*, 1956, vol. 70, no. 1, pp. 65–94. `https://doi.org/10.2307/1884513`.
4. Swan T. W. Economic growth and capital accumulation, *Economic Record*, 1956, vol. 32, no. 2, pp. 334–361. `https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x`.
5. Kuznets S. Long swings in the growth of population and in related economic variables, *Proc. Amer. Phil. Soc.*, 1958, vol. 102, no. 1, pp. 25–52 `http://www.jstor.org/stable/985303`.
6. Kuznets S. Quantitative aspects of the economic growth of nations. Paper VIII: Distribution of income by size, *Economic Development and Cultural Change*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 1–80. `https://doi.org/10.1086/450006`.
7. Uzawa H. Optimum technical change in an aggregative model of economic growth, *Int. Econ. Review*, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 18–31. `https://doi.org/10.2307/2525621`.
8. Arrow K. J. The economic implications of learning by doing, *Review Econ. Stud.*, 1962, vol. 29, no. 3, pp. 155–173. `https://doi.org/10.2307/2295952`.
9. Denison E. F. The contribution of capital to economic growth, *American Econ. Review*, 1980, vol. 70, no. 2, pp. 220–224 `https://www.jstor.org/stable/1815471`.
10. Romer P. M. Increasing returns and long-run growth, *J. Polit. Econ.*, 1986, vol. 94, no. 5, pp. 1002–1037. `https://doi.org/10.1086/261420`.
11. Lucas R. E. On the mechanics of economic development, *J. Monetary Econ.*, 1988, vol. 22, no. 1, pp. 3–42. `https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7`.
12. Romer P. M. Endogenous technological change, *J. Polit. Econ.*, 1990, vol. 98, no. 5, pp. 71–102 `https://www.jstor.org/stable/2937632`.
13. Grossman G. M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA, MIT Press, 1991, 359 pp.
14. Mankiw N. G, Romer D., Weil D. N. A contribution to the empirics of economic growth, *Quart. J. Econ.*, 1992, vol. 107, no. 2, pp. 407–437. `https://doi.org/10.2307/2118477`.
15. Grossman G. M., Helpman E. Endogenous innovation in the theory of growth, *J. Econ. Perspect.*, 1994, vol. 8, no. 1, pp. 23–44. `https://www.jstor.org/stable/2138149`.
16. Barro R. J., Sala-i-Martin X. I. *Economic Growth*. Cambridge MA, MIT Press, 1995, 672 pp.
17. Bruno M., Easterly W. *Inflation crises and long-run growth*, NBER Working Papers 5209, 1995. `https://doi.org/10.3386/w5209`.
18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa–Lucas model without scale effects: Theory and empirical evidence, *Struct. Change Econ. Dyn.*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 401–420. `https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002`.
19. Nizhegorodtsev R. M. Models of logistics dynamics as a tool for economic analysis and forecasting, In: *Modelirovanie ekonomicheskoi dinamiki: risk, optimizatsiia, prognozirovanie* [Modeling of Economic Dynamics: Risk, Optimization, Forecasting]. Moscow, Dialog MSU, 1997, pp. 34–51 (In Russian).
20. Badash Kh. Z. Economic and mathematical model of economic growth of an enterprise, *Vestn. Udmurtsk. Univ., Ser. Ekonomika Pravo*, 2009, no. 1, pp. 5–9 (In Russian).

21. Korolev A. V., Matveenko V. D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model, *Autom. Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 4, pp. 624–633. `https://doi.org/10.1134/S0005117906040102`.
22. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. Comparative analysis of the application of simulation packages and computer mathematics systems for the analysis of models of the theory of economic growth, *Ekonom. Analiz*, 2007, vol. 86, no. 5, pp. 23–30 (In Russian).
23. Kuznetsov Yu. A., Michasova O. V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 4, pp. 46–57 (In Russian).
24. Prasolov A. V. *Matematicheskie metody ekonomicheskoi dinamiki* [Mathematical Methods of Economic Dynamics]. St. Petersburg, Lan', 2015, 352 pp. (In Russian)
25. Saraev A. L. Equations of nonlinear dynamics of crisis phenomena for multifactor economic systems, *Vestnik of Samara State University*, 2015, vol. 124, no. 2, pp. 262–272 (In Russian). `https://doi.org/10.18287/2542-0461-2015-0-2-262-272`.
26. Saraev A. L., Saraev L. A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2018, no. 11, pp. 1237–1241 (In Russian).
27. Saraev A. L. Equations of dynamics of unstable multifactor economic systems taking into account retardation effects of internal investment, *Kazan Econom. Vestn.*, 2015, vol. 17, no. 3, pp. 68–73 (In Russian).
28. Ilyina E. A., Saraev A. L., Saraev L. A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2017, no. 9–4(86), pp. 1130–1134 (In Russian).
29. Saraev A. L., Saraev L. A. Economic and mathematical model of the development of industrial enterprises, taking into account the effect of lagging internal investment, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2019, no. 5(106), pp. 1316–1320 (In Russian).
30. Saraev A. L., Saraev L. A. Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments, *Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 157–165 (In Russian). `https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165`.
31. Saraev A. L., Saraev L. A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1784, 012010. `https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010`.
32. Saraev A. L., Saraev L. A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364 (In Russian). `https://doi.org/10.14498/vsgtu1700`.
33. Artemyev S. S., Yakunin M. A. *Matematicheskoe i statisticheskoe modelirovanie v finansakh* [Mathematical and Statistical Modeling in Finances]. Novosibirsk, Inst. of Comput. Math. and Math. Geophys., 2008, 174 pp. (In Russian)
34. Vorontsovskii A. V., Dikarev A. Yu. Forecasting macroeconomic indicators in simulation mode based on stochastic models of economic growth, *Finansy i Biznes*, 2013, no. 2, pp. 33–51 (In Russian).
35. Kurzenev V. A., Lychagina E. B. Stochastic Modelling of Dynamics of Economic System, *Upravlencheskoe konsultirovanie*, 2013, no. 5, pp. 78–83 (In Russian).
36. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic general economic equilibrium models, *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of Economic Systems], 2014, vol. 67, no. 7 (In Russian).
37. Andrianov D. L., Shultz D. N., Oshchepkov I. A. Dynamic stochastic model of Russia's general economic equilibrium, *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta, Ser. Sotsialnye nauki*, 2015, no. 2(38), pp. 18–25 (In Russian).
38. Andrianov D. L., Arbuzov V. O., Ivliev S. V., Maksimov V. P., Simonov P. M. Dynamic models of economics: Theory, applications, software implementation, *Vestnik Permskogo Universiteta, Ser. Ekonomika*, 2015, no. 4, pp. 8–32.

39. Itô K., McKean H. P. Jr. *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Classics in Mathematics. Berlin, Springer, xv+321 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-62025-6.
40. Allen E. *Modeling with Itô stochastic differential equations*, Mathematical Modelling: Theory and Applications, vol. 22. Netherlands, Springer, 2007, xii+230 pp. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7.
41. Stepanov S. S. *Stokhasticheskii mir* [Stochastic World] (In Russian). https://synset.com/pdf/ito.pdf; Accessed April 04, 2021.
42. Neisy A., Peymany M. Financial modeling by ordinary and stochastic differential equations, *World Applied Sciences Journal*, 2011, vol. 13, no. 11, pp. 2288–2295.
43. Kallianpur G., Sundar P. *Stochastic analysis and diffusion processes*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 24. Oxford, Oxford University Press, 2014, xiv+352 pp. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199657063.001.0001.
44. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function, *Probab. Th. Rel. Fields*, 1996, vol. 104, no. 1, pp. 43–60. https://doi.org/10.1007/BF01303802.
45. Bally V., Talay D. The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: II. Convergence rate of the density, *Monte Carlo Methods and Applications*, 1996, vol. 2, no. 2, pp. 93–128. https://doi.org/10.1515/mcma.1996.2.2.93.
46. Debarant K., Rößler A. Classification of stochastic Runge–Kutta methods for the weak approximation of stochastic differential equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, vol. 77, no. 4, pp. 408–420, arXiv: 1303.4510 [math.NA]. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.04.016.
47. Soheili A. R., Namjoo M. Strong approximation of stochastic differential equations with Runge–Kutta methods, *World Journal of Modelling and Simulation*, 2008, vol. 4, no. 2, pp. 83–93.
48. Kuznetsov D. S. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniia: teoriia i praktika chislennogo resheniia* [Stochastic Differential Equations: Theory and Practice of Numerical Solution]. St. Petersburg, Polytechnic Univ., 2007, 800 pp (In Russian). https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/s17-229.
49. Konakov V., Menozzi S. Weak error for stable driven stochastic differential equations: Expansion of the densities, *J. Theor. Probab.*, 2011, vol. 24, pp. 454–478. https://doi.org/10.1007/s10959-010-0291-x.
50. Konakov V., Menozzi S. Weak error for the Euler scheme approximation of diffusions with non-smooth coefficients, *Electron. J. Probab.*, 2017, vol. 22, 46, 47 pp., arXiv: 1604.00771 [math.PR]. https://doi.org/10.1214/17-EJP53.
51. Hottovy S., Volpe G., Wehr J. Noise-Induced drift in stochastic differential equations with arbitrary friction and diffusion in the Smoluchowski–Kramers limit, *J. Stat. Phys.*, 2012, vol. 146, no. 4, pp. 762–773. https://doi.org/10.1007/s10955-012-0418-9.
52. Frikha N. On the weak approximation of a skew diffusion by an Euler-type scheme, *Bernoulli*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 1653–1691. https://doi.org/10.3150/16-BEJ909.
53. Solov'ev V. I. *Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie rynka programmnogo obespecheniia* [Economic and Mathematical Modeling of the Software Market]. Moscow, Vega-Info, 2009, 176 pp. (In Russian)
54. Kuznetzova I. Yu. Numerical solution of a stochastic differential equation by the Euler–Maruyama method, *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*, 2013, no. 11–1(18), pp. 8–11 (In Russian).
55. *CJSC Samara Bakery and Confectionery Plant: Financial statements and financial analysis* (In Russian). https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6319008608_zao-samarskiy-bulochno-konditerskiy-kombinat; Accessed April 04, 2021.
56. *LLC Oil Plant Pestravsky: Financial statements and financial analysis* (In Russian). https:https://www.audit-it.ru/buh_otchet/6375000296_ooo-maslozavod-pestravskiy; Accessed April 04, 2021.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 763–775
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1878

Short Communications

MSC: 35C10, 76D05, 35G20

Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis

V. V. Bashurov[1,2]**, *E. Yu. Prosvirykov***[1,2]

[1] Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation.
[2] Ural State University of Railway Transport, 66, Kolmogorova st., Ekaterinburg, 620034, Russian Federation.

Abstract

An exact solution that describes steady flow of viscous incompressible fluid with coupled convective and diffusion effects (coupled dissipative Soret and Dufour effects) has been found. To analyze shear fluid flow an over-determined boundary value problem has been solved. The over-determination of the boundary value problem is caused by the advantage of number of equations in non-linear Oberbeck–Boussinesq system against number of unknown functions (two components of velocity vector, pressure, temperature and concentration of dissolved substance). Non-trivial exact solution of system consisting of Oberbeck–Boussinesq equations, incompressibility equation, heat conductivity equation and concentration equation has been built as Birich–Ostroumov class exact solution. Since the exact solution a priori satisfies the incompressibility equation the over-determined system is solvable. Existence of stagnation points is shown both in general flow and in secondary fluid motion without vorticity. Conditions of countercurrent appearance are found.

Keywords: Navier–Stokes equations, exact solution, stratified fluid, mass force field, overdetermined reduced system.

Received: 24th August, 2021 / Revised: 3rd November, 2021 /
Accepted: 22nd November, 2021 / First online: 27th December, 2021

Short Communication

Please cite this article in press as:
Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 763–775. https://doi.org/10.14498/vsgtu1878.

Authors' Details:

Vyacheslav V. Bashurov https://orcid.org/0000-0002-6507-169X
Cand. Tech. Sci.; Engineer; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[1]; Dean of Electrotechnical Faculty[2]; e-mail: vbashurov@usurt.ru

Evgeniy Yu. Prosviryakov https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Sector; Sect. of Nonlinear Vortex Hydrodynamics[1]; Professor; Dept. of Natural Sciences[2]; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Introduction. The most frequent reason to induce and support fluid motion is known to be convection [1–5]. Convective mixture principles depend on the nonhomogeneous distribution of temperature and impurities of the dissolved substance or solid inclusions, on the presence of magnetic and electric fields, mechanical impacts (vibrations, mixing, rotation) and other reasons [1–5]. Studying convective flow, two principles of force field (especially temperature field) stratification is distinguished. The vertical temperature field stratification corresponds to Rayleigh convection [1, 3]. The Marangoni effect that excites horizontal convection was ignored in the classical Benard experiments under heating of the spermaceti layer (sperm whale brain fat). The selection of convection from the two trends is enough conditionally because due to the Onsager principle they complement each other [1, 6].

Horizontal convection analysis began later than the study of Rayleigh principle of impulse moment transfer in fluids. However, the non-homogeneity of the exciting force field is frequent in nature. Water and air mass flow, astrophysical interstellar medium motion, crystal growing, biological fluid flow, and other processes are caused by horizontal (longitudinal) density gradients. These gradients may be a sequence of density dependence upon temperature, upon the concentration of dissolved substances, upon pressure, upon magnetic and electrical fluid properties [3–6].

Experimental study of convection is difficult as it is seen in the theoretical description. The Navier–Stokes equations and the continuity equation together with transfer correlation are written in Boussinesq approximation [1–6]. The Oberbeck–Boussinesq equations are constructed due to the principle of density linear dependence upon the scalar field in normal gravitation conditions, neglecting the density variance in mixing forces and low compressibility [1].

To understand the convection mechanism, it is important to have an extensive library of exact Oberbeck–Boussinesq equations. Theoretical study in this scientific direction begins with the pioneer publications of Ostroumov and Birich [7, 8] where the unidirectional convective flows take its origin. By now, several classes of exact solutions of three-dimensional Oberbeck–Boussinesq equation system have been built to describe viscous incompressible fluid flow [3–6, 9–16]. The main idea in the construction of classes of exact solutions of Navier–Stokes equations is based on velocity field modification with linear dependence on spatial acceleration. The generalization of Ostroumov–Birich exact solution for layered and shear flows is realized in [3, 4, 9, 17–25].

The essential gap in the horizontal convection study is found in binary liquid investigations. The coupled dissipative Soret and Dufour effects prevail in this case [1,6,18,21,25]. Dufour effect is neglected in the majority of analyses [1,18,21,25]. This research work deals with the large-scale flow where one geometric variable is negligible in comparison to the other ones. Hence, a plain horizontal layer can be taken as a hydrodynamic model where the fluid motion represents Couette flow class. The exact solutions for different boundary value problems taking into account the convection effect were built earlier in works [3, 4, 8, 10–16, 19–21, 23]. The exact solution class published in [18] was taken as the foundation of articles [3, 4, 8, 10–16, 19–21, 23] and remains the most wide-expanded solution among the famous polynomial exact solutions of hydrodynamic equations in our day. The literature review of this equation class construction is presented in [18] and its references.

The analyses within the exact equation class [18] to study binary liquid flows regarding Soret effect and ignoring the cross Dufour effect were published in articles [1, 2, 4, 6, 21, 25]. The diffusion processes were added in the development of the mentioned exact equation class [18] to enable a sufficient and more accurate description of fluid flow and evaluation of its influence on the formation of whirling fluid countercurrents.

Motion equations and their exact solution. The steady shear flow of a binary viscous incompressible fluid is studied between two parallel planes where the lower one forms the coordinate plane xOy and the Oz axis is normal to the upper one (Fig. 1).

The lower plane is considered absolutely solid and unmovable and the upper one is free with no deformation. The deformation neglecting of the free surface of the fluid layer can avoid from consideration the fluid flow with scale matching to layer depth. Due to this approach, we cannot consider, for example, surface waves of different origin (gravitation waves, thermos-capillary waves, etc.) [1–4]. Fluid layer depth (distance between planes) is equal to h. Hence, the lower boundary of the infinite horizontal fluid layer is related to $z = 0$, and the upper boundary equation is $z = h$.

Equation system of viscous incompressible fluid in Boussinesq approximation for thermos-diffusive shear flow is written as [1, 18]:

$$
\begin{gathered}
V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Big(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\Big),\\
V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\Big(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\Big),\\
\frac{\partial P}{\partial z} = g(\beta_1 T + \beta_2 C),\\
V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = (\chi + \alpha^2 dn)\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big) + \\
+ \alpha dn\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right),\\
V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} = \alpha\Big(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\Big) + \alpha d\Big(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\Big),\\
\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

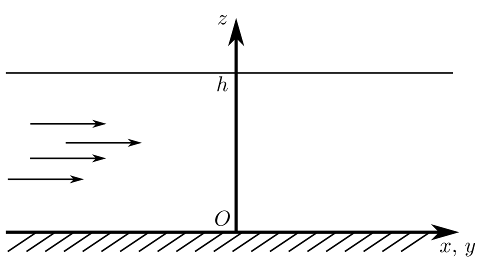


Figure 1. Fluid flow (the Ox and Oy axes are coincided on the figure, although we mean the three-dimensional space)

Here V_x, V_y are the velocity vector components, P is the pressure related to the constant average fluid density ρ; ν is the kinematic (molecular) mixture viscosity; C, T are the concentration of light component and fluid temperature, respectively, deviated from equilibrium value; g is the gravity acceleration; χ, d, α are the temperature conductivity, diffusion, thermo-diffusion coefficients, respectively; $n = \left[\frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{T,P}\right]_0$ is the thermo-dynamical parameter.

The system of equations (1) is overdetermined. It consists of six equations to determine two velocity components, related pressure, temperature, and concentration. We will use a further approach based on the method of differential correlations [18, 25, 26]. It is necessary to find correlation between hydrodynamic fields that enables to eliminate "extra" equation in the system (1) [18, 25, 26].

The analysis of the solvability of thermodiffusion equations (1) will be made in the exact solution class presented in articles [18, 25, 26]:

$$
\begin{aligned}
&V_x = U(z), \quad V_y = V(z),\\
&P = P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z),\\
&T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z),\\
&C = C_0(z) + xC_1(z) + yC_2(z).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

The velocity field (2) depend only upon the vertical (transversal) coordinate z. Other hydrodynamic fields depend on three coordinates and are expressed linearly in the coordinates x and y. Thus, the formulae (2) generalize the class of Ostroumov–Birich exact solutions proposed for the first time to solve Marangoni convection problems [7, 8]. The hydrodynamic field presentation (2) describes horizontal convection induced by special gradients of pressure, temperature, and concentration [18].

Substitution of the exact solution class (2) into the incompressibility equation

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

turns it into identity. In this case, we have a system of eleven ordinary differential equations to determine eleven unknown functions:

$$
\begin{gathered}
(\chi + \alpha^2 dn)T_1'' + \alpha dnC_1'' = 0,\\
(\chi + \alpha^2 dn)T_2'' + \alpha dnC_2'' = 0,\\
C_1'' + dT_1'' = 0, \quad \alpha C_2'' + \alpha dT_2'' = 0,\\
P_1' = g\beta_1 T_1 + g\beta_2 C_1,\\
P_2' = g\beta_1 T_2 + g\beta_2 C_2,\\
\nu U'' = P_1, \quad \nu V'' = P_2,\\
UT_1 + VT_2 = (\chi + \alpha^2 dn)T_0'' + \alpha dnC_0'',\\
UC_1 + VC_2 = \alpha C_0'' + \alpha dT_0'',\\
P_0' = g\beta_1 T_0 + g\beta_2 C_0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Hence, the choice of exact solution (2) enables to avoid overdetermination of the initial Oberbeck–Boussinesq system (1).

Derivation stroke means z variable derivation in the system (3). To calculate the exact solution of the ordinary differential equations system (3) we consider a subsystem:

$$\begin{gathered}(\chi+\alpha^2 dn)T_1''+\alpha dnC_1''=0,\quad (\chi+\alpha^2 dn)T_2''+\alpha dnC_2''=0,\\ C_1''+dT_1''=0,\quad \alpha C_2''+\alpha dT_2''=0.\end{gathered}\tag{4}$$

The subsystem (4) is studied separately because it consists of differential equations concerning horizontal gradients of temperature T_1, T_2 and concentration C_1, C_2 with different dissipation coefficients. In this case, the situation is possible when the differential equations system (4) can have no exact equation with explicit physical interpretation.

We rewrite the system (4) in vector-matrix view for convenience:

$$\begin{pmatrix}\chi+\alpha^2 dn & 0 & \alpha dn & 0\\ 0 & \chi+\alpha^2 dn & 0 & \alpha dn\\ d & 0 & 1 & 0\\ 0 & \alpha d & 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1''\\ T_2''\\ C_1''\\ C_2''\end{pmatrix}=0.\tag{5}$$

We analyze the equations (5) as the system of linear algebraic equations concerning second derivatives. The matrix determinant is not equal to zero. Consequently, due to the Kronecker–Capelli theorem, the solution of the system of linear algebraic equations (5) is trivial (null solution):

$$T_1''=0,\quad C_1''=0,\quad T_2''=0,\quad C_2''=0.$$

In this case, the horizontal temperature and concentration gradients are presented as linear polynomial functions:

$$\begin{aligned}T_1&=c_1z+c_2,\quad T_2=c_3z+c_4,\\ C_1&=c_5z+c_6,\quad C_2=c_7z+c_8.\end{aligned}\tag{6}$$

The linear form coefficients in the correlations (6) are the constants of integration. Regarding the integration of the system (3) due to the formulae (6) we obtain the exact solution for horizontal pressure and velocity gradients:

$$\begin{aligned}P_1&=g\beta_1\Big(c_1\frac{z^2}{2}+c_2z\Big)+g\beta_2\Big(c_5\frac{z^2}{2}+c_6z\Big)+c_9,\\ P_2&=g\beta_1\Big(c_3\frac{z^2}{2}+c_4z\Big)+g\beta_2\Big(c_7\frac{z^2}{2}+c_8z\Big)+c_{10},\\ U&=\frac{g\beta_1}{\nu}\Big(c_1\frac{z^4}{24}+c_2\frac{z^3}{6}\Big)+\frac{g\beta_2}{\nu}\Big(c_5\frac{z^4}{24}+c_6\frac{z^3}{6}\Big)+c_9\frac{z^2}{2}+c_{11}z+c_{12},\\ V&=\frac{g\beta_1}{\nu}\Big(c_3\frac{z^4}{24}+c_4\frac{z^3}{6}\Big)+\frac{g\beta_2}{\nu}\Big(c_7\frac{z^4}{24}+c_8\frac{z^3}{6}\Big)+c_{10}\frac{z^2}{2}+c_{13}z+c_{14}.\end{aligned}\tag{7}$$

The last three system equations give us the exact expressions for T_0 and C_0 as seventh power polynomial functions of z and P_0 is presented as eighth power polynomial function of z. As the expressions for the background field components of T_0, C_0 and P_0 are bulky, they are not presented. Furthermore, we will consider only the field of velocity.

Boundary value problem. The boundary conditions are needed to be written to calculate the constants of integration in formulae (6) and (7). The adhesion condition is realized on the lower boundary (bottom) $z = 0$:

$$V_x(0) = V_y(0) = 0.$$

The homogeneous velocity distribution is given on the upper boundary (it moves as a solid surface):

$$V_x(h) = W \cos\psi, \quad V_y(h) = W \sin\psi.$$

Here W is the velocity value on the upper boundary, ψ is the angle formed by the velocity vector and abscises axis. Boundary condition for the pressure is written as

$$P(h) = S,$$

where S is the atmosphere pressure on the free surface. The conditions of impenetrability and ideal heat exchange are given for concentration and temperature on the border $z = 0$, respectively:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

The temperature on the upper boundary is defined as

$$T(h) = ax + by,$$

and concentration is determined as

$$C(h) = mx + ny.$$

Using the formulae (2) and the linearity of the boundary conditions, we obtain the following relations at $z = 0$:

$$U = V = 0, \quad \frac{dT_0}{dz} = 0, \quad \frac{dT_1}{dz} = \frac{dT_2}{dz} = 0, \quad \frac{dC_0}{dz} = 0, \quad \frac{dC_1}{dz} = \frac{dC_2}{dz} = 0. \quad (8)$$

The next equalities are defined at $z = h$:

$$\begin{gathered} U = W\cos\psi, \quad V = W\sin\psi, \quad T_0 = 0, \quad T_1 = a, \quad T_2 = b, \\ P_0 = S, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad C_0 = 0, \quad C_1 = m, \quad C_2 = n. \end{gathered} \quad (9)$$

The written boundary conditions (8) and (9) describe Couette type fluid flow (horizontal pressure gradients are not regarded).

Boundary value problem solution. The exact solution for the boundary value problem is obtained using boundary conditions (8) and (9) for the formulae (6) and (7). The velocity field is described by the following correlations:

$$\begin{aligned} V_x = U(z) &= \frac{h^2 gF}{3\nu} z + \frac{W\cos\psi}{h} z - \frac{ghF}{2\nu} z^2 + \frac{gF}{6\nu} z^3, \\ V_y = V(z) &= \frac{h^2 gE}{3\nu} z + \frac{W\sin\psi}{h} z - \frac{ghE}{2\nu} z^2 + \frac{gE}{6\nu} z^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Two designations are introduced for the coefficients:

$$E = \beta_1 b + \beta_2 n, \quad F = \beta_1 a + \beta_2 m.$$

The temperature field stratification along the vertical coordinates and horizontal variables is expressed in a linear form:

$$T = T_0(z) + ax + by.$$

Background temperature

$$T_0(z) = T_0^0 + T_0^3 z^3 + T_0^4 z^4 + T_0^5 z^5 \tag{11}$$

is formed by several components:

$$T_0^0 = -\frac{AgFh^5}{45\nu K} - \frac{AWh^2\cos\psi}{6K} - \frac{MgEh^5}{45K\nu} - \frac{WMh^2\sin\psi}{6K},$$
$$T_0^3 = \frac{AgFh^2}{18\nu K} + \frac{AW\cos\psi}{6Kh} + \frac{MgEh^2}{18K\nu} + \frac{WM\sin\psi}{6Kh},$$
$$T_0^4 = \frac{-AgFh}{24\nu K} - \frac{MgEh}{24K\nu}, \qquad T_0^5 = \frac{AgF}{120\nu K} + \frac{MgE}{120K\nu},$$

where $K = -d^2 n\alpha + \chi + \alpha^2 dn$, $A = a - mnd$, $M = b - dn^2$.

The concentration distribution has the similar correlation

$$C = C_0(z) + mx + ny, \tag{12}$$

where $C_0(z) = C_0^0 + C_0^3 z^3 + C_0^4 z^4 + C_0^5 z^5$ with components

$$C_0^0 = -\frac{BgFh^5}{45\nu K} - \frac{BWh^2\cos\psi}{6K} - \frac{IgEh^5}{45K\nu} - \frac{WIh^2\sin\psi}{6K},$$
$$C_0^3 = \frac{BgFh^2}{18\nu K} + \frac{BW\cos\psi}{6Kh} + \frac{IgEh^2}{18K\nu} + \frac{WI\sin\psi}{6Kh},$$
$$C_0^4 = -\frac{BgFh}{24\nu K} - \frac{IgEh}{24K\nu}, \qquad C_0^5 = \frac{BgF}{120\nu K} + \frac{IgE}{120K\nu}.$$

Here we add the designations $B = m(\chi\alpha^{-1} + \alpha dn) - da$, $I = -(n\chi\alpha^{-1} + \alpha dn^2 - bd)$.

The pressure distribution has the sixth power polynomial function of the coordinate z:

$$P = P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z), \tag{13}$$

where $P_0(z) = P_0^0 + P_0^1 z + P_0^4 z^4 + P_0^5 z^5 + P_0^6 z^6$ with components

$$P_0^0 = S - \Big(-\frac{11DgFh^6}{720\nu K} - \frac{DWh^3\cos\psi}{8K} - \frac{11LgEh^6}{720K\nu} - \frac{WLh^3\sin\psi}{8K}\Big),$$
$$P_0^1 = -\frac{DgFh^5}{45\nu K} - \frac{DWh^2\cos\psi}{6K} - \frac{LgEh^5}{45K\nu} - \frac{WLh^2\sin\psi}{6K},$$
$$P_0^4 = \frac{DgFh^2}{72\nu K} + \frac{DW\cos\psi}{24Kh} + \frac{LgEh^2}{72K\nu} + \frac{WL\sin\psi}{24Kh},$$

$$P_0^5 = -\frac{DgFh}{120\nu K} - \frac{LgEh}{120K\nu}, \qquad P_0^6 = \frac{DgF}{720\nu K} + \frac{LgE}{720K\nu},$$
$$P_1(z) = gFz - gFh, \qquad P_2(z) = gEz - gEh.$$

We add the designations

$$D = \beta_1 A + \beta_2 B, \quad L = \beta_1 M + \beta_2 I$$

to get the final recording of the exact solution (10)–(13) of the boundary value problem (3), (8) and (9) and it is written in polynomial function class.

Velocity field analysis. To analyze velocity field, we introduce dimensionless values $u = U/W$, $v = V/W$, and $Z = z/h$ $(0 \leqslant Z \leqslant 1)$. The third power polynomial functions are written to analyze the cinematic characteristics of hydrodynamic flow:

$$\begin{aligned} u &= Z\Big[\cos\psi + \frac{h^3 gF}{6\nu W}(Z-1)(Z-2)\Big], \\ v &= Z\Big[\sin\psi + \frac{h^3 gE}{6\nu W}(Z-1)(Z-2)\Big]. \end{aligned} \tag{14}$$

One can note that the dimension of two-dimensional velocity field (10) reduces due to the turning transformation

$$\tan\psi = \frac{E}{F} = \frac{\beta_1 b + \beta_2 n}{\beta_1 a + \beta_2 m}. \tag{15}$$

In this case, the fluid motion transforms from shear motion into a layered (one direction) one.

Every component of the velocity vector can have maximally one null point where the sign change of velocity and it corresponds to the direction change of fluid flow. The fulfilment of the following correlations for each velocity component is needed to find this null point:

$$[u(0)] \cdot [u(1)] < 0, \quad [v(0)] \cdot [v(1)] < 0,$$

where $[u(\,\cdot\,)]$, $[v(\,\cdot\,)]$ describe the expressions in square brackets for each velocity. Using the correlations for the exact solution (14) we get

$$\cos\psi\Big(\cos\psi + \frac{h^3 gF}{3\nu W}\Big) < 0, \quad \sin\psi\Big(\sin\psi + \frac{h^3 gE}{3\nu W}\Big) < 0.$$

We can note that if $F = 0$ $(\beta_1 a = -\beta_2 m)$ or $E = 0$ $(\beta_1 b = -\beta_2 n)$, the countercurrents do not happen in fluid flow as the velocity profile within the given values of the parameters F and E is described by the classical exact Couette solution [26, 28]. Hence, the fluid countercurrents can be found due to the superposition of the temperature and concentration effects on the structure of hydrodynamic flow.

The velocity $u(z)$ profiles for the cases of countercurrent absence and presence are shown on the Fig. 2. The velocity profile (14) is not monotonous. The velocity function can have the extremum and depending on the coefficient values, the extremum can be maximum or minimum. Analyzing the formulae (14) it can be easily shown that the countercurrent formation is connected with the mutual influence of the boundary conditions of velocity, temperature, and concentration on physical fluid constants characterizing the flow of dissipation processes in fluid.

The velocity hodographs are presented on the Fig. 3 with the conditions $E = F$ and $\psi = 0$ (a), $\psi = \pi/4$ (b), $\psi = 3\pi/4$ (c), $\psi = \pi$ (d). The velocity hodograph shows that the flows are said to be locally spiral (Fig. 3, a, c, d). The hodograph loop formation in stable motion is typical for two-dimensional velocity field. If the fluid flow has one direction due to the fulfilment of correlation (15) then the velocity hodograph becomes a segment (Fig. 3, b).

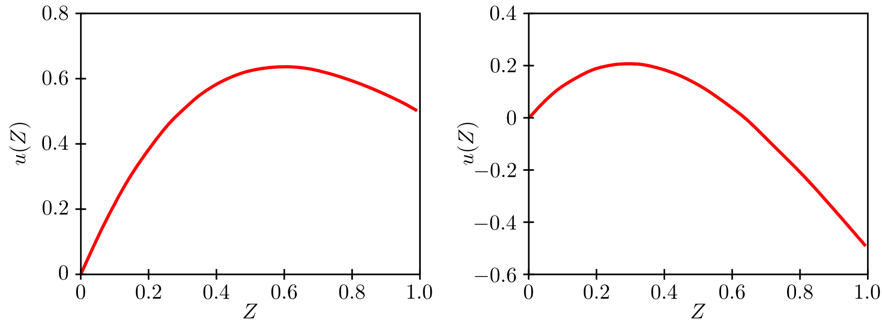


Figure 2. Velocity profiles without countercurrent (left figure) and with countercurrent (right figure)

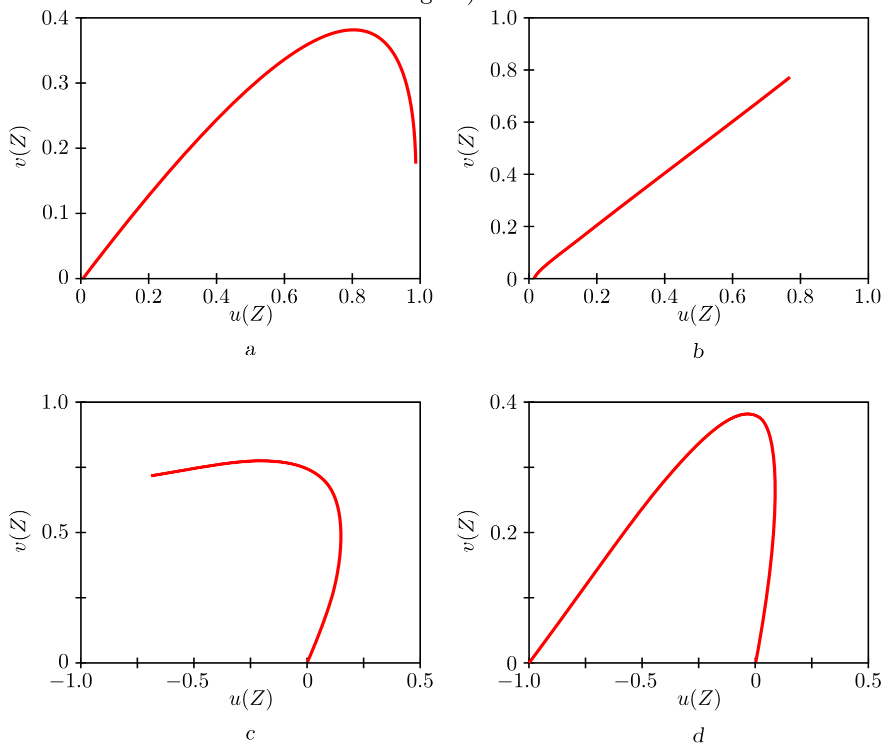


Figure 3. Velocity hodographs with the conditions $E = F$ and $\psi = 0$ (a), $\psi = \pi/4$ (b), $\psi = 3\pi/4$ (c), $\psi = \pi$ (d)

Such effect was noticed in the classical Couette solution for rotating liquid and its generalizations [3, 4, 27].

Conclusion. The exact solution to describe large-scale stationary Couette flow is presented. The solution is calculated in the class of velocities distributed due to the certain dependence on the transversal coordinate and linearly on one horizontal value. The distribution of zeroes of the regarded polynomial functions is studied. The connection of zeroes with the fluid countercurrent formation is shown.

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976, 330 pp.
2. Kutepov A. M., Polyanin A. D., Zapryanov Z. D., Vyazmin A. V., Kazenin D. A. *Khimicheskaya gidrodinamika* [Chemical Hydrodynamics]. Moscow, Quantum, 1996, 336 pp. (In Russian)
3. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vihrevye techenija advektivnoj prirody vo vrashhajushhemsja sloe zhidkosti* [Vortex Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm. State Univ., 2006, 155 pp. (In Russian)
4. Aristov S. N., Shvarts K. G. *Vikhrevye techenija v tonkikh slojakh zhidkosti* [Vortical Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, Vyatka State Univ., 2011, 207 pp. (In Russian)
5. Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachev V. V. *Mathematical Models of Convection*, De Gruyter Studies in Mathematical Physics, vol. 5. Berlin, Boston, De Gryuter, 2012, xv+417 pp. https://doi.org/10.1515/9783110258592.
6. Ryzhkov I. I. *Termodiffuziia v smesiakh: uravneniia, simmetrii, resheniia i ikh ustoichivost'* [Thermodiffusion in Mixtures: Equations, Symmetries, Solutions and its Stability]. Novosibirsk, 2013, 200 pp. (In Russian)
7. Ostroumov G. A. *Free Convection under the Condition of the Internal Problem*, NACA Technical Memorandum 1407. Washington, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.
8. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44. https://doi.org/10.1007/BF00914697.
9. Ingel' L. Kh., Aristov S. N. The class of exact solutions of nonlinear problems on thermal circulation associated with volumetric heat release in the atmosphere, *Tr. In-ta Eksperim. Meteorol.*, 1996, no. 27(162), pp. 142–157 (In Russian).
10. Andreev V. K. *Birikh Solutions to Convection Equations and Some of its Extensions*, ICM SB RAS Preprint no. 1–10. Krasnoyarsk, 2010, 68 pp. (In Russian)
11. Pukhnachev V. V. Non-stationary analogues of the Birikh solution, *Izv. Alt. Gos. Univ.*, 2011, no. 1–2, pp. 62–69 (In Russian).
12. Birikh R. V., Pukhnachev V. V. An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient, *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 47–52. https://doi.org/10.1134/S1028335811010095.
13. Andreev V. K., Bekezhanova V. B. Stability of non-isothermal fluids (Review), *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171–184. https://doi.org/10.1134/S0021894413020016.

14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid, *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456 (In Russian). https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.

15. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of a incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 180–196 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1527.

16. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Temperature and pressure field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 736–751 (In Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1568.

17. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. https://doi.org/10.1007/BF00852164.

18. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations, *Theor. Found. Chem. Technol.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. https://doi.org/10.1134/S0040579516030027.

19. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 581–587. https://doi.org/10.1134/S001546281605001X.

20. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341–360. https://doi.org/10.14498/vsgtu1670.

21. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect, *J. King Saud Univ. – Science*, 2020, vol. 32, no. 8, pp. 3364–3371. https://doi.org/10.1016/j.jksus.2020.09.023.

22. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Temperature field investigation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 528–541. https://doi.org/10.14498/vsgtu1770.

23. Burmasheva N. V., Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition, *Sādhanā*, 2021, vol. 46, no. 1, 55. https://doi.org/10.1007/s12046-021-01585-5.

24. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial acceleration, *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 7, pp. 8–16. https://doi.org/10.3103/S1066369X21070021.

25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for shear flows of a viscous binary fluid with allowance made for the Soret effect, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 17–30. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.17.

26. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, 642. https://doi.org/10.1134/S0040579509050066.

27. Ekman V. W. On the influence of the Earth's rotation on ocean-currents, *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–52. http://jhir.library.jhu.edu/handle/1774.2/33989.

28. Couette M. Études sur le frottement des liquids, *Ann. de Chim. et Phys. (6)*, 1890, vol. 21, pp. 433–510 (In French).

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 763–775
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1878

УДК 532.51, 517.958:531.3-324

Установившееся термодиффузионное сдвиговое течение Куэтта несжимаемой жидкости. Исследование поля скоростей

***В. В. Башуров*[1,2], *Е. Ю. Просвиряков*[1,2]**

[1] Институт машиноведения УрО РАН,
Россия, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.
[2] Уральский государственный университет путей сообщения,
Россия, 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66.

Аннотация

Найдено точное решение, описывающее установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом перекрестного влияния конвективного и диффузионного эффектов (перекрестное влияние диссипативных эффектов Соре и Дюфора). Для исследования сдвигового потока жидкости была решена переопределенная краевая задача. Переопределенность краевой задачи обусловлена тем, что количество уравнений в нелинейной системе уравнений Обербека—Буссинеска больше, чем количество неизвестных функций (две компоненты вектора скорости, давление, температура и концентрация растворенного вещества). Нетривиальное точное решение системы, состоящей из уравнений Обербека—Буссинеска, уравнения непрерывности, уравнения теплопроводности и уравнения концентрации, было построено в классе точных решений Бириха—Остроумова. Разрешимость переопределенной системы уравнений обусловлена тем, что точное решение автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности. Показано существование застойных точек как в общем течении, так и во вторичном движении жидкости без завихренности. Найдены условия, при которых возможны противотечения.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, точное решение, многослойная жидкость, поле массовых сил, переопределенная приведенная система.

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 763–775. https://doi.org/10.14498/vsgtu1878.

Сведения об авторах
Вячеслав Владимирович Башуров https://orcid.org/0000-0002-6507-169X
кандидат технических наук; инженер; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[1]; декан; электротехнический факультет[2]; e-mail: vbashurov@usurt.ru

Евгений Юрьевич Просвиряков https://orcid.org/0000-0002-2349-7801
доктор физико-математических наук; заведующий сектором; сектор нелинейной вихревой гидродинамики[1]; профессор; каф. естественнонаучных дисциплин[2];
e-mail: evgen_pros@mail.ru

Получение: 24 августа 2021 г. / Исправление: 3 ноября 2021 г. /
Принятие: 22 ноября 2021 г. / Публикация онлайн: 27 декабря 2021 г.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1883

УДК 539.3

О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Рассматриваются проблемы согласования ориентаций реперов для микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство. На основе понятия элементарного тензорного объема (площади) M-ячейки, описывается алгоритм сравнения и согласования внешних пространственных ориентаций M-ячеек. Рассматривается процесс непрерывного переноса реперных направлений, ассоциированных с M-ячейкой. В результате можно вести речь об ориентации самого микрополярного континуума и его границы. Ориентированный континуум играет важную роль в микрополярной теории упругости, корректное построение которой возможно только в рамках псевдотензорного формализма и ориентируемого многообразия. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред. Обсуждается псевдотензорная формулировка теоремы Стокса.

Ключевые слова: относительный тензор, ориентирующий псевдоскаляр, микроповорот, перемещение, микрополярный гемитропный континуум.

Получение: 11 сентября 2021 г. / Исправление: 29 октября 2021 г. / Принятие: 22 ноября 2021 г. / Публикация онлайн: 24 декабря 2021 г.

Краткое сообщение

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. https://doi.org/10.14498/vsgtu1883.

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин https://orcid.org/0000-0002-3267-4742
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@google.com

Юрий Николаевич Радаев https://orcid.org/0000-0002-0866-2151
доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Введение. Наиболее распространенной математической моделью континуума является дифференцируемое многообразие [1, 2].[1] В механике сплошных деформируемых сред обычно требуется, чтобы континуум был погружен во внешнее «плоское» пространство.[2]

На дифференцируемом многообразии часто приходится вводить дополнительные структуры. Например, риманова структура на многообразии позволяет говорить о целом классе дифференцируемых пространств [1, 2], которые имеют важное прикладное значение. Подобные проблемы возникают при моделировании процессов деформирования материалов с микроструктурой, микрополярных сред, процессов аддитивного производства [3, 4].

Другой важной особенностью, возникающей при моделировании поведения микрополярных материалов, является ориентируемость континуума и его границы. При формулировке интегральных теорем и законов механики континуума особое внимание надо уделять согласованию ориентаций реперных направлений элементарных ячеек внутри континуума и на его границе. Все базовые понятия, связанные с измерениями тензорного объема ячейки,[3] требуют привлечения аппарата псевдотензорного исчисления и фундаментального понятия об ориентируемых многообразиях [5–11].

В ходе изложения вопросов, связанных с многомерной геометрией, будем следовать терминологии и идеям [11, 12]. Минимальные сведения о тензорных элементах объема и площади можно найти в [8, см. приложение Дж. Л. Эриксена] и [11]. Вопросы применения алгебры псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости обсуждались в работах [3, 4, 13–18].

В представленной работе рассмотрим проблемы согласования ориентаций реперов для микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство. Опираясь на понятие элементарного тензорного объема (площади) M-ячейки, опишем алгоритм сравнения и согласования внешних пространственных ориентаций M-ячеек. Соответствующие рассмотрения подразумевают выбор ориентации репера, определяющего элемент объема (площади). Последнее обстоятельство имеет исключительное значение в микрополярных теориях упругости [19–21]. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред [3, 13, 14]. Обсуждается псевдотензорная формулировка теоремы Стокса.[4]

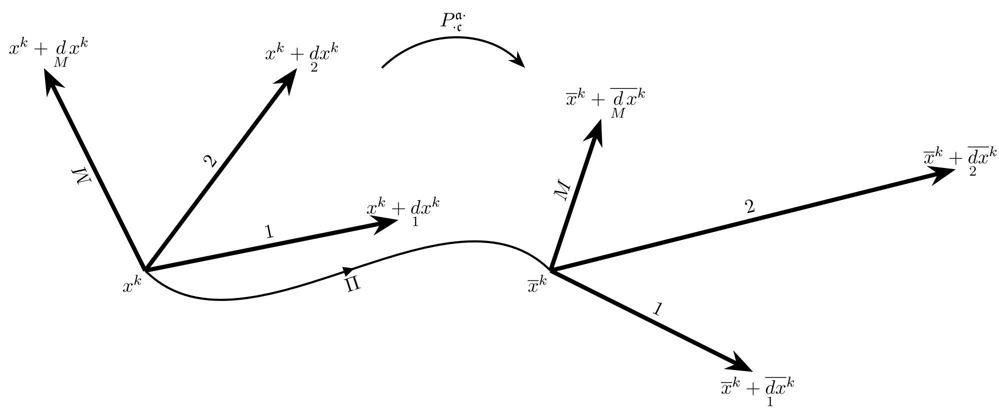
1. Тензорные элементы площади M-многообразия, погруженного в N-мерное пространство. В данной работе мы не будем воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Подробное изложение алгебры псевдотензоров можно найти в руководствах по тензорному анализу [7, 9–11]

[1] Ориентируемое многообразие естественным образом появляется в теории микрополярной упругости.

[2] Особенно это актуально для механики растущих тел [3, 4], когда растущее тело, вообще говоря, не допускает погружения в трехмерное пространство наблюдателя.

[3] Упомянутая процедура измерения и формирования тензорного объема ячейки приведена в работе [18].

[4] В существующей научной литературе указанная теорема обычно формулируется в терминах дифференциальных форм. В данной статье мы не будем пользоваться теорией дифференциальных форм. Более того, как хорошо известно, теория дифференциальных форм может быть переизложена в терминах антисимметричных псевдотензоров и ориентируемых многообразий.



Реперные направления, ассоциированные с M-ячейками. Сравнение ориентаций осуществляется путем непрерывного переноса вдоль пути Π одного репера к другому

[Reper directions associated with M-cells. Comparison of orientations is carried out by continuous transfer along the path Π of one frame to another]

и в статьях [3, 14]. В дальнейшем изложении сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

В N-мерном «плоском» пространстве выберем криволинейную систему координат x^k ($k = 1, 2, \ldots, N$). Будем называть M-многообразием — многообразие (поверхность) математической размерности M ($M \leqslant N$), погруженное в указанное внешнее пространство. Рассмотрим два репера с различными угловыми точками x^k и $\overline{x}^k$ и концевыми точками $x^k + \underset{\mathfrak{c}}{dx}{}^k$ и $\overline{x}^k + \overline{\underset{\mathfrak{c}}{dx}}{}^k$, изображенными на рисунке. Тогда внешние координаты векторов первого и второго реперов будут $\underset{\mathfrak{c}}{dx}{}^k$ и $\overline{\underset{\mathfrak{c}}{dx}}{}^k$ соответственно. Очевидно, что всегда существует линейное преобразование одного репера к другому, действующее по формуле [2, 22]

$$\overline{\underset{\mathfrak{c}}{dx}}{}^k = P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}} \underset{\mathfrak{a}}{dx}{}^k, \tag{1}$$

где $P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}}$ — матрица перехода от старого базиса (репера) к новому [2, 22–24].[5] Опираясь на формулу (1), нетрудно сформулировать критерий сравнения ориентаций реперов $\underset{\mathfrak{b}}{dx}{}^k$ и $\overline{\underset{\mathfrak{a}}{dx}}{}^k$. Для этого, во-первых, должен прежде всего существовать непрерывный путь Π переноса одного M-репера в другой. Во-вторых, если $\det(P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}}) > 0$, то тогда считаем, что реперы имеют одинаковые ориентации или они коориентированы, а если $\det(P^{\mathfrak{a}\cdot}_{\cdot\mathfrak{c}}) < 0$, то тогда реперы имеют противоположные ориентации. Более того, таким образом в каждой точке M-многообразия можно задать только два класса ориентаций реперов, непрерывно зависящих от точки многообразия.

Определим операцию непрерывного переноса репера из M направлений вдоль пути Π точки x^k в точку $\overline{x}^k$ (см. рисунок) [25, с. 532]. Пусть имеется кусочно-гладкий путь Π на M-многообразии, соединяющий две точки

[5]В руководствах по векторному анализу и конечномерным пространствам [23, 24] иногда вводится матрица перехода, транспонированная к (1). Мы следуем определению, данному в [22, с. 105].

x^k и $\overline{x}^k$. Переместим, непрерывно деформируя, репер из начальной точки в конечную так, чтобы векторы репера оставались линейно независимыми. Полученный репер можно сравнить с репером в конечной точке, если при этом ориентация репера не изменилась, т.е. матрица перехода в (1) не меняет знак, то многообразие является ориентируемым или двусторонним. В противном случае оно неориентируемо. Указанное обстоятельство говорит о том, что связное M-многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда параллельный перенос вдоль любого цикла внутри многообразия сохраняет ориентацию репера.

Ориентируемые многообразия имеют исключительное значение в микрополярных теориях механики континуума [19–21]. Ясно, что ориентация репера в точке микрополярного тела задается нумерацией реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. В механике континуума ориентацию *базисного* репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим скаляром e [3, 14]. Его можно определить как косое произведение векторов ковариантного базиса $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{N}{\boldsymbol{\imath}}$ в N-мерном пространстве [12, с. 63]

$$\lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{N}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = e.$$

В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}.$$

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры произвольного веса W в абсолютные тензоры. Введем тензор $\mathbf{T}$ согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W} \overset{[W]}{\mathbf{T}}.$$

Сравнивая веса, приходим к заключению о том, что $\mathbf{T}$ является абсолютным тензором. В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ϵ, e и g, указание на их вес будем опускать.

Отметим также широко используемую в механике и физике формулу

$$e^2 = g.$$

Пусть рассматриваемое дифференцируемое M-многообразие можно задать его Гауссовой параметризацией u^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, M)$

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \ldots, u^M). \tag{2}$$

В формуле (2) x^k являются внешними координатами для M-многообразия, а u^α — внутренними.

Разобьем M-многообразие на систему M-ячеек (M-cell). Каждая M-ячейка задается угловым репером, который характеризуется угловой вершиной (с внешними координатами x^k и внутренними координатами u^α) и концевыми точками репера, имеющими внутренние координаты

$$u^\alpha + \underset{\mathfrak{c}}{d}u^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M$$

и внешние координаты

$$x^k + \underset{\mathfrak{c}}{d}x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где индекс шрифта «фрактур» $\mathfrak{c}$ нумерует реперные направления ($\mathfrak{c} = 1, 2, \ldots, M$). С внешней (пространственной) точки зрения направления рассматриваемого репера задаются абсолютными контравариантными векторами

$$\underset{1}{d}x^k, \underset{2}{d}x^k, \ldots, \underset{M}{d}x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Тензорный элемент объема M-ячейки (the tensor element of area [8, см. приложение Дж. Л. Эриксена с. 816])[6] определим согласно формуле

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = M! \underset{1}{d}x^{[i_1} \underset{2}{d}x^{i_2} \cdots \underset{M}{d}x^{i_M]}. \tag{3}$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы, по которым выполняется альтернирование.

Учитывая формулу для дифференциалов внешних координат вдоль реперных направлений M-ячейки

$$\underset{\mathfrak{b}}{d}x^k = (\partial_\alpha x^k) \underset{\mathfrak{b}}{d}u^\alpha,$$

соотношение (3) можно записать в виде [11, с. 256–257]

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \underset{1}{d}u^{\gamma_1} \underset{2}{d}u^{\gamma_2} \cdots \underset{M}{d}u^{\gamma_M},$$

где $\delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_M}$ — обобщенные дельты Кронекера. Воспользовавшись известной из псевдотензорного исчисления формулой для контравариантных символов перестановок $\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M}$

$$\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M}_{12 \ldots M},$$

получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \cdots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(\underset{\mathfrak{b}}{d}u^\gamma).$$

Если элементарные M-ячейки нарезаны с помощью координатных поверхностей $u^\alpha = c^\alpha$, то тогда справедливо соотношение

$$\det(\underset{\mathfrak{c}}{d}u^\gamma) = du^1 du^2 \cdots du^M$$

и для случая $M = N$ получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \overset{[-1]}{d\tau}{}^{12 \ldots M} \epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_M},$$

[6]Согласно более архаичной терминологии (см. [11, с. 255]) можно также использовать термин “протяженность M-ячейки” (the extension of the M-cell).

где $\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots M}$ — естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса -1, который определяется следующим образом:

$$\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots M} = \det(\partial_\alpha x^k)du^1du^2\cdots du^M = dx^1dx^2\cdots dx^M.$$

С помощью псевдоскаляра $\overset{[-1]}{d\tau}$ и фундаментального ориентирующего скаляра e можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = e\,\overset{[-1]}{d\tau}{}^{12\ldots M}.$$

2. Теорема Стокса. Важную роль в механике континуума, особенно при формулировке законов сохранения, играют интегральные теоремы. Запишем инвариантный интеграл на M-многообразии

$$\int A_{i_1i_2\ldots i_M}d\tau^{i_1i_2\ldots i_M}, \tag{4}$$

где $A_{i_1i_2\ldots i_M}$ — абсолютный ковариантный тензор валентности M. Интеграл (4) является абсолютным инвариантом.

Рассмотрим граничное $(M-1)$-многообразие ∂ к M-многообразию, заданное своей Гауссовой параметризацией

$$x^k = x^k(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2, \ldots, \widetilde{u}^{M-1}), \tag{5}$$

тогда $(M-1)$-ячейка на границе ∂ будет определяться репером $\widetilde{\partial}_1x^k$, $\widetilde{\partial}_2x^k$, ..., $\widetilde{\partial}_{M-1}x^k$, где $\widetilde{\partial}_i = \partial/\partial\widetilde{u}^i$. Зададим на границе ∂ векторное поле S^k, направленное вовне по отношению к M-многообразию. Согласуем (arrange) параметризации (2) и (5) так, чтобы ориентации систем векторов так $\widetilde{\partial}_1x^k$, $\widetilde{\partial}_2x^k$, ..., $\widetilde{\partial}_{M-1}x^k$, S^k и ∂_1x^k, ∂_2x^k, ..., ∂_Mx^k были одинаковыми, т.е. матрица перехода от одной системы векторов к другой имела бы положительный детерминант.

Для любого дифференцируемого ковариантного абсолютного тензорного поля $A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}}$ можно сформулировать теорему Стокса [11, p. 269]:

$$\int \partial_{i_M}A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}}d\tau^{i_1i_2\ldots i_M} = \oint_\partial A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}}d\tau^{i_1i_2\ldots i_{M-1}},$$

где $d\tau^{i_1i_2\ldots i_M}$ вычисляется с использованием параметризации u^1, u^2, ..., u^M, а $d\tau^{i_1i_2\ldots i_{M-1}}$ — с использованием параметризации $\widetilde{u}^1$, $\widetilde{u}^2$, ..., $\widetilde{u}^{M-1}$.

Подынтегральное выражение для $A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}}$ можно преобразовать следующим образом:

$$\partial_{i_M}A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}}d\tau^{i_1i_2\ldots i_M} = \partial_{[i_M}A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}]}d\tau^{i_1i_2\ldots i_M} = \nabla_{[i_M}A_{i_1i_2\ldots i_{M-1}]}d\tau^{i_1i_2\ldots i_M}.$$

Заключение. В статье рассматриваются проблемы согласования ориентаций реперов для микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство.

1. На основе понятия элементарного тензорного объема (площади) M-ячейки описывается алгоритм сравнения и согласования внешних пространственных ориентаций M-ячеек.
2. Рассматривается процесс непрерывного переноса реперных направлений, ассоциированных с M-ячейкой. В результате можно вести речь об ориентации самого микрополярного континуума и его границы.
3. Ориентированный континуум играет важную роль в микрополярной теории упругости, корректное построение которой возможно только в рамках псевдотензорного формализма и ориентируемого многообразия. В особенности это касается теории гемитропных упругих сред.
4. Обсуждается псевдотензорная формулировка теоремы Стокса.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА–А20–120011690132–4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19–51–60001, № 20–01–00666.

Библиографический список

1. Eisenhart L. P. *Riemannian Geometry.* Princeton, N.J.: Princeton Univ., 1967. vii+306 pp.
2. Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М.: Наука, 1967. 664 с.
3. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1792`.
4. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids // *Mech. Solids*, 2019. vol. 54, no. 8. pp. 1157–1164. `https://doi.org/10.3103/S0025654419080053`.
5. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924. vol. 26, no. 3. pp. 373–377. `https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1924-1501284-6`.
6. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms* / Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. vol. 24. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. viii+102 pp.
7. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants.* Groningen: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
8. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories / *Principles of Classical Mechanics and Field Theory* / Encyclopedia of Physics, III/1; ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–902. `https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2`.
9. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicists.* Oxford: Clarendon Press, 1954. xii+277 pp.
10. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua* / Applied Mathematics Series. New York: John Wiley & Sons Inc, 1964. xii+361 pp.
11. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus* / Dover Books on Advanced Mathematics. vol. 5. New York: Courier Corporation, 1978. ix+324 pp.
12. Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства.* М.: Наука, 1966. 647 с.
13. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 4. pp. 752–761. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1799`.

14. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.
15. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 6. С. 130–138. https://doi.org/10.31857/S0572329921060106.
16. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио–Адамара // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2021. № 2(48). С. 104–114. https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.013.
17. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Прямые, инверсные и зеркальные волновые моды связанных волн перемещений и микровращений в гемитропных микрополярных средах // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2021. № 2(48). С. 115–127. https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014.
18. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 2 (в печати).
19. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine* / International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures. vol. 25. Wien, New York: Springer, 1972. 286 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9.
20. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.
21. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat–Kontinuums [A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat–continuum] // *Acta Mechanica*, 1974. vol. 20, no. 1. pp. 105–131 (In German). https://doi.org/10.1007/BF01374965.
22. Шилов Г. Е. *Введение в теорию линейных пространств*. М.: ГИТТЛ, 1952. 384 с.
23. Сушкевич А. К. *Основы высшей алгебры*. М.: ОНТИ, 1937. 476 с.
24. Lagally M. *Vorlesungen über Vektor-Rechnung* [Vector Calculus]. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1928. xvii+358 pp. (In German)
25. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Л. *Современная геометрия*. М.: Наука, 1979. 760 с.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1883

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with the problems of ordering the reper orientations for a micropolar continuum immersed in an external plane space. Based on the concept of an elementary tensor volume (area) M-cells, an algorithm for comparing and matching external spatial orientations of M-cells is proposed. The process of continuous transfer of reper directions associated with a M-cell is considered. As a result, we can talk about the orientation of micropolar continuum itself and its boundary. The oriented continuum plays an important role in micropolar elasticity. This is especially true for the theory of hemitropic elastic media. The pseudotensor formulation of Stokes' theorem is discussed.

Keywords: relative tensor, orienting pseudoscalar, microrotation, displacement, micropolar hemitropic continuum.

Received: 11$^{\text{th}}$ September, 2021 / Revised: 29$^{\text{th}}$ October, 2021 /
Accepted: 22$^{\text{nd}}$ November, 2021 / First online: 24$^{\text{th}}$ December, 2021

Competing interests. The authors declare no conflicts of interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Short Communication

Please cite this paper in press as:
Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786. https://doi.org/10.14498/vsgtu1883 (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin https://orcid.org/0000-0002-3267-4742
Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@gmail.com

Yuri N. Radayev https://orcid.org/0000-0002-0866-2151
D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Funding. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA–A20–120011690132–4) and by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 18–01–00844, 20–01–00666).

References

1. Eisenhart L. P. *Riemannian Geometry.* Princeton, N.J., Princeton Univ., 1967, vii+306 pp.
2. Raschewski P. K. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis* [Riemannian Geometry and Tensor Analysis]. Frankfurt am Main, Verlag Harri Deutsch, 1995, 606 pp. (In German)
3. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1792`.
4. Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. `https://doi.org/10.3103/S0025654419080053`.
5. Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of relative tensors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. `https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1924-1501284-6`.
6. Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 24. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1927, viii+102 pp.
7. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants.* Groningen, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
8. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, III/1; ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. `https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2`.
9. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicists.* Oxford, Clarendon Press, 1954, xii+277 pp.
10. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Applied Mathematics Series. New York, John Wiley & Sons Inc, 1964, xii+361 pp.
11. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, Dover Books on Advanced Mathematics, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, ix+324 pp.
12. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)
13. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1799`.
14. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). `https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412`.
15. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. A generalization of the algebraic theory of Hamilton–Cayley, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6 (to appear).
16. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a pseudotensor generalization of the Hugoniot-Hadamard linking boundary conditions, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2021, no. 2(48), pp. 104–114 (In Russian). `https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.013`.
17. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Direct, inverse and mirror wave modes of coupled displacements and microrotations monochromatic plane waves in hemitropic micropolar media, *Vestn. I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical Univ. Ser. Mechanics of a Limit State*, 2021, no. 2(48), pp. 115–127 (In Russian). `https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.48.2.014`.
18. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. On the theory of oriented tensor elements of the area of a micropolar continuum immersed in an external flat space, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 2 (to appear).
19. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity. Course held at the Department for Mechanics of Deformable Bodies, July 1970, Udine*, International Centre for Mechanical Sciences.

Courses and Lectures, vol. 25. Wien, New York, Springer, 1972, 286 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9.

20. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
21. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat–Kontinuums [A contribution to the nonlinear theory of the Cosserat–continuum], *Acta Mechanica*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131 (In German). https://doi.org/10.1007/BF01374965.
22. Shilov G. E. *An Introduction to the Theory of Linear Spaces*, Dover Books on Advanced Mathematics. New York, Dover Publ., 1974, ix+310 pp.
23. Sushkevich A. K. *Osnovy vysshei algebry* [Fundamentals of Higher Algebra]. Moscow, ONTI, 1937, 476 pp. (In Russian)
24. Lagally M. *Vorlesungen über Vektor-Rechnung* [Vector Calculus]. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1928, xvii+358 pp. (In German)
25. Dubrovin B. A., Novikov S. P., Fomenko A. L. *Sovremennaia geometriia* [Modern Geometry]. Moscow, Nauka, 1979, 760 pp. (In Russian)

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 787–796
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1865

УДК 517.958:530.145

Модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий

А. А. Бирюков

Самарский государственный университет путей сообщения,
Россия, 443066, Самара, ул. Свободы, 2 В.

Аннотация

Строится модель пространства случайных совместных событий, в котором дополнительно к симметричной разности событий вводится понятие симметричной суммы событий. В пространстве формулируются модель стохастического процесса и соответствующее выражение для вероятности перехода системы между двумя событиями. Показано, что для попарно совместных событий оно эквивалентно уравнению квантовой механики.

Ключевые слова: пространство случайных совместных событий, модель симметричной суммы случайных совместных событий, модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий, вероятности перехода, квантовая механика.

Получение: 14 мая 2021 г. / Исправление: 3 августа 2021 г. / Принятие: 18 августа 2021 г. / Публикация онлайн: 5 ноября 2021 г.

Введение. Построение математической модели физического процесса является принципиально важным для его адекватного описания. Модели стохастических процессов классической физики успешно представляются в рамках теории вероятностей и широко освещены в литературе. Например, в монографии [1] представлены как оригинальные исследования авторов, так и обзор обширной литературы по теории классических стохастических процессов.

Активное развитие современных технологий стимулируют исследования описания квантовых систем методами теории вероятностей (смотри, например, работы [2–6]), в которых представлены оригинальные результаты и обзоры в этом направлении. В работах [7–11] предложены модели стохастических процессов в пространстве совместных событий.

Краткое сообщение

Образец для цитирования
Бирюков А. А. Модель стохастического процесса в пространстве случайных совместных событий // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 787–796. https://doi.org/10.14498/vsgtu1865.

Сведения об авторе
Александр Александрович Бирюков https://orcid.org/0000-0003-3955-1726
кандидат физико-математических наук, профессор; профессор; кафедра естественных наук; e-mail: biryukov_1@mail.ru

В данной работе предлагается дальнейшее развитие модели пространства случайных совместных событий и стохастического процесса в этом пространстве. В предложенной модели пространства совместных событий, в соответствии с аксиоматикой Колмогорова, существует симметричная разность событий. Однако специфика стохастических процессов, изучаемых в физике микромира, требует дополнительно ввести для их описания совместные случайные события, для которых существует симметричная сумма. В предложенном пространстве строится модель стохастического процесса, которая описывается выражением для вероятности перехода между событиями. Показано, что уравнение для случая, когда случайные события лишь попарно совместны, эквивалентно уравнению квантовой механики.

1. Модель пространства совместных случайных событий с симметричными разностью и суммой событий. Рассмотрим пространство N случайных событий S_n^{kl}, где $n = 1, 2, \ldots, N$, символ kl означает, что события и их вероятности подчиняются действиям в соответствии с аксиомами Колмогорова [12]. В пространстве событий определяются состояние и стохастическое движение некой физической системы.

Для случая, когда данные события S_n^{kl}, $n = 1, 2, \ldots, N$, несовместны, вероятность их объединения определяется формулой [12]

$$P\big(\cup_{k=1}^{N} S_n^{kl}\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}).$$

Модель пространства, в которой все случайные события S_n^{kl}, $n = 1, 2, \ldots, N$, совместны, определяется тем, что вероятности пересечения этих событий отличны от нуля:

$$P(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}) \neq 0,\ P(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}) \neq 0,\ \ldots,\ P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \cdots \cap S_N^{kl}) \neq 0, \quad (1)$$

все индексы k, n, m, $\ldots$ принимают значения от 1 до N. Вероятность объединения совместных событий $\big(S_1^{kl} \cup S_2^{kl} \cup \cdots \cup S_N^{kl}\big)$ определяется формулой [13]

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^{kl}\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}) - \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}\big) + \\ + \sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}\big) - \cdots + (-1)^{N-1} P\big(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \cdots \cap S_N^{kl}\big). \quad (2)$$

В пространстве случайных совместных событий S_1^{kl}, S_2^{kl}, $\ldots$, S_N^{kl} построим события S_1^{-}, S_2^{-}, $\ldots$, S_N^{-}, каждое из которых значит, что если произойдет событие с соответствующим номером, то не произойдет ни одно другое событие пространства. Из определения следует, что события S_1^{-}, S_2^{-}, $\ldots$, S_N^{-} несовместны.

Для пространства двух совместных событий S_1^{kl}, S_2^{kl} события S_1^{-}, S_2^{-} определяются выражениями

$$S_1^{-} = S_1^{kl} \setminus (S_1^{kl} \cap S_2^{kl}), \quad S_2^{-} = S_1^{kl} \setminus (S_1^{kl} \cap S_2^{kl}).$$

Из данных определений на основании аксиом Колмогорова доказывается

$$P\big(S_1^- \cup S_2^-\big) = \sum_{n=1}^{2} P(S_n^{kl}) - 2P\big(S_1^{kl} \cap S_2^{kl}\big). \tag{3}$$

Выражение (3) называется симметричной разностью двух событий.

В пространстве совместных событий S_1^{kl}, S_2^{kl}, ..., S_N^{kl}, $N \geqslant 3$, симметричная разность N событий представляется выражением [14]

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^-\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{kl}) - 2\sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl}\big) +$$
$$+ 4\sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{kl} \cap S_m^{kl} \cap S_k^{kl}\big) - \dots + 2^{N-1}(-1)^{N-1} P(S_1^{kl} \cap S_2^{kl} \cap \dots \cap S_N^{kl}). \tag{4}$$

Выражение (4) доказывается методом математической индукции с использованием формулы (3).

Анализ экспериментов показывает, что соотношения (1)–(4) успешно описывают совместные события в физике макромира и большой класс событий в физике микромира. Однако в физике микромира существуют совместные случайные события (например, в опытах по дифракции электронов), описание которых на базе соотношений (1)–(4) невозможно. Для их описания требуются дополнительные положения.

Постулируем, что в физике микромира наряду с событиями S_n^{kl} существуют совместные события S_n^{qv}, вероятность объединения которых $P\big(S_1^{qv} \cup S_2^{qv} \cup \dots \cup S_N^{qv}\big)$ описывается выражением

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^{qv}\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n^{qv}) + \sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv}\big) -$$
$$- \sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv} \cap S_k^{qv}\big) - \dots + (-1)^{N'} P(S_1^{qv} \cap S_2^{qv} \cap \dots \cap S_N^{qv}), \tag{5}$$

где символ qv значит, что случайное событие относится к физике микромира (к процессам в квантовой механике); знак перед первым слагаемым “+”, перед остальными слагаемыми знаки определяются множителями $(-1)^{N'}$, где N' — порядковый номер слагаемого.

В пространстве случайных совместных событий S_1^{qv}, S_2^{qv}, ..., S_N^{qv} построим события S_1^+, S_2^+, ..., S_N^+, каждое из которых значит, что при реализации этого события реализуются все события S_n^{kl} с соответствующими вероятностями.

Для пространства двух совместных событий S_1^{qv}, S_2^{qv} события S_1^+, S_2^+ определяются выражениями

$$S_1^+ = S_1^{qv} \cup (S_1^{qv} \cap S_2^{qv}), \quad S_2^+ = S_2^{qv} \cup (S_1^{qv} \cap S_2^{qv}).$$

Из данных определений следует, что

$$P\big(S_1^+ \cup S_2^+\big) = \sum_{n=1}^{2} P(S_n^{qv}) + 2P\big(S_1^{qv} \cap S_2^{qv}\big). \tag{6}$$

Выражение (6) естественно называть симметричной суммой двух событий.

Вероятность объединения событий $P\big(S_1^+ \cup S_2^+ \cup \dots \cup S_N^+\big)$ выражается через вероятности событий S_n^{qv}, $n = 1, 2, \dots, N$, и вероятности их пересечений выражением

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} S_n^+\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n) + 2\sum_{n<m=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv}\big) -$$

$$- 4\sum_{n<m<k=1}^{N} P\big(S_n^{qv} \cap S_m^{qv} \cap S_k^{qv}\big) - \dots + 2^{N-1}(-1)^{N'} P\big(S_1^{qv} \cap S_2^{qv} \cap \dots \cap S_N^{qv}\big), \tag{7}$$

где знак перед слагаемым определяется так же, как и в формуле (5). Формула (7) доказывается методом математической индукции с использованием (6). Выражение (7) является симметричной суммой случайных событий S_n^+. Заметим, что интерпретация событий в уравнениях (5)–(7) множествами, как это предусмотрено аксиоматикой Колмогорова, недопустима, она приводит к противоречию.

Выражения (4), (7) можно записать в виде одного. С этой целью введем случайные события $\tilde{S}_n$, каждое из которых принимает значение или S_n^-, или S_n^+. Вероятность объединения событий $\tilde{S}_n$ представляется формулой, которая является объединением (4) и (7):

$$P\big(\cup_{n=1}^{N} \tilde{S}_n\big) = \sum_{n=1}^{N} P(S_n) + 2\sum_{n<m=1}^{N} g_{nm} P(S_n \cap S_m) +$$

$$+ 4\sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P(S_n \cap S_m \cap S_k) + \dots + 2^{N-1} g_{12\dots N} P\big(S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_N\big), \tag{8}$$

где множители g_{nm}, g_{nkm} и другие принимают одно из значений 0, $+1$, -1 в зависимости от событий S_n. Индексы kl, qv у событий S_n^{kl}, S_n^{qv} в (8) опущены, так как они учитываются знаками коэффициентов $g_{nm}, g_{nkm}, \dots$.

В построенном пространстве случайных совместных событий реализуются как симметричная разность, так и симметричная сумма событий. Пространство описывает более широкий круг систем и стохастических процессов, нежели пространства, в которых реализуется только симметричная разность событий.

2. Вероятность перехода между состояниями системы при стохастическом процессе в пространстве совместных случайных событий. Рассмотрим систему, которая описывается набором случайных совместных событий S_n, $n = 1, 2, \dots, N$, в пространстве, представленном в предыдущем пункте данной работы. Движение системы представляется ее переходом в пространстве случайных событий с некой вероятностью из состояния, характеризуемого событием a в момент времени t_1, в состояние с событием b в момент $t_2 > t_1$. Переход системы характеризуется вероятностью

$$P(b \cap a) = P(b|a)P(a), \tag{9}$$

где $P(b|a)$ — условная вероятность перехода системы из состояния a в состояние b за интервал времени $(t_2 - t_1)$; $P(a)$ — вероятность реализации состояния a в начальный момент времени t_1. Будем полагать $P(a) = 1$.

Для нахождения явного вида вероятности перехода $P(b|a)$ построим стохастическую модель движения системы в пространстве случайных совместных событий. Будем полагать

$$b \cap a = \bigcup_{n=1}^{N} \bigl(b \cap \tilde{S}_n \cap a\bigr) = \bigcup_{n=1}^{N} \tilde{S}[b, n, a], \tag{10}$$

где $\bigl(b \cap \tilde{S}_n \cap a\bigr) = \tilde{S}[b, n, a]$; поскольку здесь события a и b фиксированные, мы их представляем как индексы. Формула (10) означает, что переход физической системы из некого состояния a в другое состояние b осуществляется через промежуточные состояния $\tilde{S}_n$.

Искомая вероятность перехода системы с учетом (9), (10) определяется формулой

$$P(b|a) = P\Bigl(\bigcup_{n=1}^{N} \tilde{S}[b, n, a]\Bigr). \tag{11}$$

Учитывая (8), формулу (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(b|a) = \sum_{n=1}^{N} P\bigl(S[b, n, a]\bigr) + 2 \sum_{n<m=1}^{N} g_{nm} P\bigl(S[b, n, a] \cap S[b, m, a]\bigr) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P\bigl(S[b, n, a] \cap S[b, m, a] \cap S[b, k, a]\bigr) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P\bigl(S[b, 1, a] \cap S[b, 2, a] \cap \cdots \cap S[b, N, a]\bigr), \end{aligned} \tag{12}$$

Представим уравнения (12) в форме, более удобной для описания стохастических процессов. Объединяя первые два слагаемых в соответствии с принципами теории вероятностей, уравнение (12) представим в виде

$$\begin{aligned} P(b|a) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P\bigl(S[b, n, a] \cap S[b, m, a]\bigr) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P\bigl(S[b, n, a] \cap S[b, m, a] \cap S[b, k, a]\bigr) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P\bigl(S[b, 1, a] \cap S[b, 2, a] \cap \cdots \cap S[b, N, a]\bigr), \end{aligned} \tag{13}$$

где $g_{n,m} = +1, -1$, $n \neq m$; $g_{n,n} = +1$, $n = m$; $g_{nmk} = +1, -1$; $\ldots$.

Для выражения (12), описывающего процесс в пространстве совместных событий, выполняется принцип соответствия: когда события несовместны, вероятности пересечения событий в правой части уравнения равны нулю, остается лишь первая сумма, то есть оно переходит в уравнение марковских процессов в пространстве несовместных событий.

Для проведения конкретных численных вычислений вероятностей перехода на основании формулы (13) требуется конкретизация вероятностей и коэффициентов в правой части выражения на основании изучаемой модели.

3. Физическая интерпретация уравнения для вероятности перехода системы в пространстве случайных совместных событий. Для описания физической системы на основании уравнения (13) необходимо случайным событиям поставить в соответствие случайные числа, характеризующие систему. Рассмотрим систему, в которой каждому событию с номером n соответствует случайное число с тем же порядковым номером. Например, электрон в атоме пребывает в квантовых состояниях с энергиями E_n, $n = 1, 2, \dots$.

В предлагаемой модели событиям b, a соответствуют числа n_f, n_{in}. Переход системы из состояния n_{in} в момент времени t_{in} в состояние n_f в момент времени $t_f > t_{in}$ осуществляется по некоторой случайной траектории, определяемой либо одним числом n, либо множеством чисел n_{in}, n_1, n_2, …, n_f. Событиям $\big(b \cap S_n \cap a\big) = S[b, n, a]$ ставятся в соответствие безразмерные (т.е. в единицах $\hbar$) действия системы $S[n_f, n, n_{in}]$, вдоль случайных траекторий между состояниями n_f, n_{in} (числа n нумеруют траектории, вдоль которых рассматриваются действия, и в ряде моделей могут быть мультииндексами).

Вероятность $P(n_f|n_{in})$ перехода системы между состояниями n_f, n_{in} определяется формулой (13), в которой случайные события заменяются соответствующими случайными числами, характеризующие систему:

$$\begin{aligned} P(n_f|n_{in}) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P\big(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}]\big) + \\ + 4 \sum_{n<m<k=1}^{N} g_{nmk} P(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}], S[n_f, k, n_{in}]) + \ldots + \\ + 2^{N-1} g_{12\ldots N} P\big(S[n_f, 1, n_{in}], S[n_f, 2, n_{in}], \ldots, S[n_f, N, n_{in}]\big). \end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим частный случай нашей модели, когда события только попарно совместны:

$$P(S_n \cap S_m) \neq 0,\ P(S_n \cap S_m \cap S_k) = 0,\ \ldots,\ P(S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_N) = 0. \tag{15}$$

Соответственно, выражение (14) с учетом (15) для вероятности перехода системы в пространстве состояний принимает вид

$$P(n_f|n_{in}) = \sum_{n,m=1}^{N} g_{nm} P\big(S[n_f, n, n_{in}], S[n_f, m, n_{in}]\big), \tag{16}$$

где $g_{n,m} = +1, -1$, $n \neq m$; $g_{n,n} = +1$, $n = m$.

Формула (16) для вероятностей переходов системы между состояниями совпадает с соответствующими выражениями квантовой механики, что позволяет утверждать, что предложенная модель стохастических процессов в пространстве попарно совместных событий описывает квантовые процессы.

Для квантовых систем определяем

$$P\big(S[n_f,n,n_{in}],S[n_f,m,n_{in}]\big)=P_0\big|\cos\big[S[n_f,n,n_{in}]-S[n_f,m,n_{in}]\big]\big|, \quad (17)$$

$$g_{nm}=\cos\big[S[n_f,n,n_{in}]-S[n_f,m,n_{in}]\big]\times$$
$$\times\left|\cos\big[S[n_f,n,n_{in}]-S[n_f,m,n_{in}]\big]\right|^{-1}, \quad (18)$$

где P_0 — нормировочная постоянная. Подставляя (17), (18) в (16), получаем

$$P(n_f|n_{in})=\sum_{n,m=1}^{N}P_0\cos\big[S[n_f,n,n_{in}]-S[n_f,m,n_{in}]\big]. \quad (19)$$

Выражение (19) описывает квантовые процессы, например, дифракцию частиц при прохождении через дифракционную решетку с N щелями. Вероятность $P(n_f|n_{in})$ описывает плотность распределения частиц на экране наблюдения дифракции. В этой модели n_{in} означает эмиссионное состояние частицы с импульсом $\mathbf{p}$; n_f — состояние частицы на регистрирующем экране, параллельном плоскости дифракционной решетки; $S[n_f,n,n_{in}]=\mathbf{k}\,\mathbf{r}_{n_f,n}+\mathbf{k}\,\mathbf{r}_{n,n_{in}}$ — действие частицы по траектории от состояния n_{in} до точки n_f, проходящей через щель с номером n. Здесь $\mathbf{k}=\mathbf{p}/\hbar$ — волновое число частицы; $\mathbf{r}_{n_f,n}$, $\mathbf{r}_{n,n_{in}}$ — векторы между точками.

Квантовая система с дискретным энергетическим спектром E_n, $n=1,2,\dots$, описана методом функционального интегрирования в работе [15]. Система совершает переходы между квантовыми состояниями n под действием поляризованной монохроматической электромагнитной волны, $n=1,2,\dots,N$. Вероятность квантового перехода $P(n_f,t_f|n_{in},t_{in})$ между состояниями n_{in}, n_f за интервал времени (t_f-t_{in}) получена в виде (19), где действие определено в соответствии с моделью системы.

Заключение. Построена модель пространства случайных совместных событий с определенными симметричной разностью и симметричной суммой событий. Вероятность перехода системы между состояниями в процессе ее стохастического движения в пространстве определяется уравнением, учитывающим совместность событий. Для уравнения выполняется принцип соответствия, то есть если события не совместные, оно переходит в уравнение марковского процесса.

Для случая, когда события лишь попарно совместны, уравнение идентично уравнению квантовой механики, описывающего эволюцию квантовой системы.

Представляет интерес исследование вероятности перехода системы между состояниями на основании предложенного уравнения с учетом совместности трех, четырех и более событий.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Морозов А. Н., Скрипкин А. В. *Немарковские физические процессы.* М.: Физматлит, 2018. 288 с.
2. Skorobogatov G. A., Svertilov S. I. Quantum mechanics can be formulated as a non-Markovian stochastic process // *Phys. Rev. A*, 1998. vol. 58, no. 5. pp. 3426–3432. `https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.3426`.
3. Попов Н. Н. *Элементы теории квантовых вероятностей.* М.: Выч. центр РАН, 1996. 206 с.
4. Холево А. С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории.* М., Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 410 с.
5. Хренников А. Ю. *Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика.* М.: Физматлит, 2003. 207 с.
6. Рязанов Г. В. Квантово-механические вероятности как суммы по путям // *ЖЭТФ*, 1958. Т. 35, № 1. С. 123–131.
7. Бирюков А. А. Цепи Маркова для совместных состояний и уравнения квантовой механики // *ТМФ*, 1971. Т. 7, № 1. С. 56–60.
8. Бирюков А. А. Марковские процессы для совместных событий и уравнения квантовой механики // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010. № 4(78). С. 137–144.
9. Бирюков А. А. Стохастические процессы в пространстве случайных совместных событий и уравнения квантовой механики // *Теорет. физ.*, 2012. № 13. С. 56–76.
10. Бирюков А. А. Описание дифракции частиц в пространстве случайных совместных событий // *Теорет. физ.*, 2013. № 14. С. 77–87.
11. Biryukov A. A. Equations of quantum theory in the space of randomly joint quantum events // *EPJ Web Conf.*, 2019. vol. 222, 03005. `https://doi.org/10.1051/epjconf/201922203005`.
12. Колмогоров А. Н. *Основные понятия теории вероятностей.* М.: Наука, 1974. 120 с.
13. Розанов Ю. А. *Лекции по теории вероятностей.* М.: Наука, 1968. 120 с.
14. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г. *Задачи по теории вероятности.* М.: Наука, 1986. 328 с.
15. Бирюков А. А., Дегтярева Я. В., Шлеенков М. А. Численное вычисление вероятностей квантовых переходов в атомах и молекулах методом функционального интегрирования // *Изв РАН. Сер. физ.*, 2018. Т. 82, № 12. С. 1728–1733. `https://doi.org/10.1134/S0367676518120050`.

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 787–796

MSC: 60A05, 60G07

Model of a stochastic process in the space of random joint events

A. A. Biryukov

Samara State Transport University,
2 V, Svobody st., Samara, 443066, Russian Federation.

Abstract

A model of the space of random joint events is being constructed. In space, along with the existence of a symmetric difference of joint events, a new postulate is introduced about the existence of a symmetric sum of random joint events. In the generated space, the stochastic equation of motion of the system and the expression for the probabilities of the system's transition between two events are modeled. The transition probability depends on the probabilities of compatibility of two, three, etc. events. The equation is equivalent to the Markov chain equation for incompatible events. The equation is equivalent to the equation of quantum theory if the events are compatible only in pairs.

Keywords: space of joint events, model of a symmetric sum of random joint events, model of a stochastic process in spatial joint events, transition probabilities, quantum mechanics.

Received: 14$^{\text{th}}$ May, 2021 / Revised: 3$^{\text{rd}}$ August, 2021 / Accepted: 18$^{\text{th}}$ August, 2021 / First online: 5$^{\text{th}}$ November, 2021

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Morozov A. N., Skripkin A. V. *Nemarkovskie fizicheskie protsessy* [Non-Markovian Physical Processes]. Moscow, Fizmatlit, 2018, 288 pp. (In Russian)
2. Skorobogatov G. A., Svertilov S. I. Quantum mechanics can be formulated as a non-Markovian stochastic process, *Phys. Rev. A*, 1998, vol. 58, no. 5, pp. 3426–3432. `https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.3426`.

Short Communication

Please cite this paper in press as:
Biryukov A. A. Model of a stochastic process in the space of random joint events, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 787–796. `https://doi.org/10.14498/vsgtu1865` (In Russian).

Author's Details:
Alexandr A. Biryukov `https://orcid.org/0000-0003-3955-1726`
Cand. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Natural Sciences; e-mail: `biryukov_1@mail.ru`

3. Popov N. N. *Elementy teorii kvantovykh veroiatnostei* [Elements of the Theory of Quantum Probabilities]. Moscow, Computing Center of RAS, 1996, 206 pp. (In Russian)
4. Holevo A. S. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory.* Pisa, Edizioni della Normale, 2011, xvi+223 pp. https://doi.org/10.1007/978-88-7642-378-9.
5. Khrennikov A. Yu. *Nekolmogorovskie teorii veroiatnostei i kvantovaia fizika* [Non-Kolmogorovian Probability Theory in Quantum Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 207 pp.
6. Ryazanov G. V. Quantum-mechanical probabilities as sums over paths, *Sov. Phys., JETP*, 1959, vol. 8, no. 1, pp. 85–93.
7. Biryukov A. A. Markov chains for compatible states and the equations of quantum mechanics, *Theor. Math. Phys.*, 1971, vol. 7, no. 1, pp. 364–367. https://doi.org/10.1007/BF01028134.
8. Biryukov A. A. Markovian processes for compatible events and equations of quantum mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2010, no. 4(78), pp. 137–144 (In Russian).
9. Biryukov A. A. Stochastic processes in the space of random joint events and the equations of quantum mechanics, *Theor. Phys.*, 2012, no. 13, pp. 56–76 (In Russian).
10. Biryukov A. A. Description of the diffraction of particles in the space of random joint events, *Theor. Phys.*, 2013, no. 14, pp. 77–87 (In Russian).
11. Biryukov A. A. Equations of quantum theory in the space of randomly joint quantum events, *EPJ Web Conf.*, 2019, vol. 222, 03005. https://doi.org/10.1051/epjconf/201922203005.
12. Kolmogorov A. N. *Osnovnye poniatiia teorii veroiatnostei* [Basic Concepts of Probability Theory]. Moscow, Nauka, 1974, 120 pp. (In Russian)
13. Rozanov Yu. A. *Lektsii po teorii veroiatnostei* [Lectures on Probability Theory]. Moscow, Nauka, 1968, 120 pp. (In Russian)
14. Prokhorov A. V., Ushakov V. G., Ushakov N. G. *Zadachi po teorii veroiatnosti* [Problems on the Theory of Probability]. Moscow, Nauka, 1986, 328 pp. (In Russian)
15. Biryukov A. A., Degtyareva Yu. V., Shleenkov M. A. Calculating the probabilities of quantum transitions in atoms and molecules numerically through functional integration, *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 2018, vol. 82, no. 12, pp. 1565–1569. https://doi.org/10.3103/S1062873818120055.

Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 797–797
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1895

Дополнение к статье

Кожанов А. И., Дюжева А. В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка//*Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434. https://doi.org/10.14498/vsgtu1859.

В статье А. И. Кожанова, А. В. Дюжевой "Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка" место работы первого автора указано не полно. Второе место работы —
[2] Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Сведения об авторе следует читать так:

Александр Иванович Кожанов https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. дифференциальных и разностных уравнений[1]; профессор; каф. высшей математики[2];
e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki
[J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 797–797
ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print) https://doi.org/10.14498/vsgtu1895

Supplement to the article

Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434. https://doi.org/10.14498/vsgtu1859 (In Russian).

In the article "The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations" by A. I. Kozhanov, A. V. Dyuzheva the affiliation of the first author is not indicated in full. The second affiliation is
[2] Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.
Author Details should read:

Alexander I. Kozhanov https://orcid.org/0000-0003-4376-4003
Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Differential and Difference Equations[1]; Professor; Dept. of Higher Mathematics[2]; e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

ПОДПИСКА – 2022

на январь–декабрь
в «Объединенном каталоге «Пресса России»
на сайтах www.pressa-rf.ru **и** www.akc.ru

Уважаемые читатели!
Обратите внимание, что с 1 сентября 2021 г. проводится подписная кампания на журналы Самарского государственного технического университета на 2022 год.

18106 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки»**

18107 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки»**

18108 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»**

41340 **Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Философия»**

70570 **Градостроительство и архитектура**

Условия оформления подписки Вы найдете на сайтах www.pressa-rf.ru *и* www.akc.ru