

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 26, № 1 – 2022

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Март — 2022

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 26, № 1 – 2022)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвириков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 26, № 1 – 2022)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244
Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Подписано в печать 25 марта 2022 г.
Дата выхода в свет 31 марта 2022 г.
Формат 70 × 108 1/16.
Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.
Тираж 500 экз. Рег. № 48/22.
Заказ № 2–2574–1в.

Отпечатано в
ООО «Типография Фурсова»
196084, г. Санкт-Петербург,
ул. Заставская, д. 14А, литер М
Тел.: +7 (812) 646 33 77

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, [Zentralblatt MATH](#), [DOAJ](#) и входит в ядро [Российского индекса научного цитирования](#).

Журнал включен в [Перечень рецензируемых научных изданий](#), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
March — 2022

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2022, vol. 26, no. 1

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevast'yanov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
14A-M, Zastavskay st., Saint Petersburg, 196084, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Zentralblatt MATH](#), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, and [DOAJ](#).

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Бештокова З. В.* “Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода” 7

Механика деформируемого твёрдого тела

- Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В., Нестеров Т. К.* “О ковариантном непостоянстве тензоров дисторсии и обратной дисторсии” 36
- Вильдеман В. Э., Мугатаров А. И.* “Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования” 48
- Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.* “Моделирование одномерных механодиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений” 62
- Модин И. А., Кочетков А. В., Глазова Е. Г.* “Численное исследование взаимодействия ударной волны с проницаемым деформируемым гранулированным слоем” 79
- Ошмарин Д. А., Севодина Н. В., Юрлова Н. А.* “Применение метода Мюллера для определения собственных частот колебаний вязкоупругих тел с частотно-зависимыми характеристиками материала” 93
- Радченко В. П., Либерман А. Е., Блохин О. Л.* “Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести” 119

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Маклаков В. Н.* “Использование псевдоневязок при исследовании сходимости неустойчивых разностных краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка” 140
- Максименко И. А., Марков В. В.* “О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях” 179
- Сизых Г. Б.* “Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками” 190

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

<i>Beshtokova Z. V.</i> “Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind”	7
---	---

Mechanics of Solids

<i>Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K.</i> “On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors”	36
<i>Wildemann V. E., Mugatarov A. I.</i> “Modeling the process of equilibrium crack growth in a composite specimen from the standpoints of the postcritical deformation mechanics”	48
<i>Zverev N. V., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V.</i> “Modelling of one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations”	62
<i>Modin I. A., Kochetkov A. V., Glazova E. G.</i> “Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable deformable granulated layer”	79
<i>Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlova N. A.</i> “An application of Mueller’s method for determining eigenfrequencies of vibrations of viscoelastic bodies with frequency-dependent characteristics of a material”	93
<i>Radchenko V. P., Liberman A. E., Blokhin O. L.</i> “Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions”	119

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

<i>Maklakov V. N.</i> “The use of pseudoresiduals in the study of convergence of unstable difference boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary second-order differential equations”	140
<i>Maksimenko I. A., Markov V. V.</i> “On a new Lagrangian view on the evolution of vorticity in spatial flows”	179
<i>Sizykh G. B.</i> “Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls”	190

Дифференциальные уравнения и математическая физика



УДК 519.633

Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода

З. В. Бештокова^{1,2}

¹ Северо-Кавказский центр математических исследований,
Северо-Кавказский федеральный университет,
Россия, 355017, Ставрополь, ул. Пушкина, 1.

² Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Аннотация

Исследуется начально-краевая задача для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с краевыми условиями третьего рода. Для численного решения строится локально-одномерная разностная схема А. А. Самарского с порядком аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимости решения локально-одномерной разностной схемы к решению исходной дифференциальной задачи в L_2 -норме со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Построен алгоритм численного решения и проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в данной работе теоретические выкладки.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нагруженное уравнение, разностные схемы, локально-одномерная схема, априорная оценка, устойчивость, сходимости, многомерная задача.

Получение: 11 февраля 2022 г. / Исправление: 18 марта 2022 г. /
Принятие: 21 марта 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Бештокова З. В. Численный метод решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с условиями третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 7–35. EDN: BIBCLS. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1908>.

Сведения об авторе

Заряна Владимировна Бештокова  <https://orcid.org/0000-0001-8020-4406>
научный сотрудник; отд. вычислительных методов¹; аспирант²;
e-mail: zarabaeva@yandex.ru

Введение. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе принято называть уравнения, содержащие функции от решения на многообразиях меньшей размерности, чем размерность области определения искомой функции [1]. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений возникают при изучении движения подземных вод в задачах управления качеством водных ресурсов, когда в водоем поступает из n источников загрязняющее вещество определенной интенсивности, при построении математической модели переноса дисперсных загрязнений в пограничном слое атмосферы.

Среди таких задач наиболее сложными с точки зрения численной реализации считаются многомерные (по пространственным переменным) задачи. Сложность заключается в значительном увеличении объема вычислений, возникающем при переходе от одномерных задач к многомерным. В этой связи актуальное значение приобретает задача построения экономичных разностных схем для численного решения многомерных задач, обладающих возможностью достаточно эффективной стабилизации решений (устойчивостью) и требующих при переходе со слоя на слой затраты числа арифметических операций Q , пропорционального числу узлов сетки, так что $Q = O(h^{-p})$, где $h = \min_{1 \leq i \leq p} h_i$, p — размерность области, h_i — шаг сетки по направлению x_i .

Настоящая работа посвящена построению локально-одномерных (экономичных) разностных схем для численного решения начально-краевой задачи для многомерного нагруженного параболического уравнения общего вида с краевыми условиями третьего рода, суть которой состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. При этом каждая из вспомогательных задач может не аппроксимировать исходную задачу, но в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация имеет место [2–4].

В разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений большой вклад внесли идеи работ [5, 6]. Отметим также, что в обзорных работах А. М. Нахушева на многочисленных примерах показана практическая и теоретическая важность исследований нагруженных дифференциальных уравнений. Одним из методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений является предложенный А. М. Нахушевым метод редукции интегро-дифференциальных уравнений к нагруженным дифференциальным уравнениям. В его работе [1] впервые указана связь нелокальных задач с нагруженными уравнениями. Нелокальные задачи типа Бицадзе—Самарского для уравнений Лапласа и теплопроводности эквивалентно редуцированы к локальным задачам для нагруженных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \leq t \leq T]$, основанием которого является p -мерный прямоугольный параллелепипед

$$\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$$

с границей Γ , $\bar{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\begin{cases} k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} = \beta_{-\alpha} u - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_{\alpha} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} = \beta_{+\alpha} u - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_{\alpha} = l_{\alpha}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad (3)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha} u, \quad L_{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + r_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - \\ - \sum_{s=1}^m q_{s\alpha}(x, t) u(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha}^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t),$$

$$k_{\alpha}(x, t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T); \quad r_{\alpha}(x, t), \quad q_{s\alpha}(x, t), \quad f(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T);$$

$$0 < c_0 \leq k_{\alpha}(x, t) \leq c_1;$$

$$|r_{\alpha}(x, t)|, \quad |k_{x_{\alpha}}(x, t)|, \quad |r_{x_{\alpha}}(x, t)|, \quad |q_{s\alpha}(x, t)|, \quad |\beta_{\pm\alpha}(x, t)| \leq c_2;$$

x_{α}^s – фиксированная точка интервала $(0, l_{\alpha})$, $s = 1, 2, \dots, m$; c_0, c_1, c_2 – положительные постоянные; $Q_T = G \times (0 < t \leq T]$; $\mu_{\pm\alpha}(x, t)$ – непрерывные функции.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий из задачи (1)–(3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x, t)$ в цилиндре \bar{Q}_T .

С помощью выбора коэффициентов $q_{s\alpha}(x, t)$ можно регулировать интенсивность источников (стоков) в точках x_{α}^s .

Далее через M_i , $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи (1)–(3).

Допуская существование регулярного решения задачи (1)–(3) в цилиндре \bar{Q}_T , получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1) скалярно на u и получим энергетическое тождество:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) = \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right), u \right) + \left(\sum_{\alpha=1}^p r_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}}, u \right) - \\ - \left(\sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^m q_{s\alpha}(x, t) u(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha}^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t), u \right) + (f(x, t), u). \quad (4)$$

Воспользуемся скалярным произведением и нормой:

$$u_x^2 = \sum_{\alpha=1}^p u_{x_{\alpha}}^2, \quad \|u\|_{L_2(0, l_{\alpha})}^2 = \int_0^{l_{\alpha}} u^2(x, t) dx_{\alpha},$$

$$(u, v) = \int_G uv \, dx, \quad (u, u) = \|u\|_0^2, \quad \|u\|_0^2 = \int_G u^2 \, dx.$$

Справедлива следующая [7]

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω — область с гладкой границей $\partial\Omega$. Для элементов $u(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ определены следы на областях Γ гладких гиперповерхностей как элементы $L_2(\Gamma)$, и они непрерывно меняются. Для них справедливы неравенства вида

$$\int_\Gamma [u(x + le_1) - u(x)]^2 ds \equiv \|u(x + le_1) - u(x)\|_{2,\Gamma}^2 \leq cl \int_{Q_l(\Gamma)} u_x^2 dx, \quad 0 \leq l \leq \delta,$$

и

$$\|u(x)\|_{2,\Gamma}^2 \leq c \left[\frac{1}{\delta} \|u(x)\|_{2,Q_\delta(\Gamma)}^2 + \delta \|u_x(x)\|_{2,Q_\delta(\Gamma)}^2 \right],$$

где e_1 — единичный вектор нормали к Γ в точке x , а $Q_l(\Gamma)$ — криволинейный цилиндр, образованный отрезками этих нормалей длины l (δ — наибольшая из тех длин l , при которых $Q_l(\Gamma) \subset \Omega$), c — постоянная, не зависящая от функции $u(x)$.

Для всех элементов $v(x)$ из $W_2^1(\Omega)$ с «кусочно-гладкой границей» справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v^2 ds &\leq \bar{c}_1 \int_\Omega (|v| \cdot |v_x| + v^2) dx \leq \bar{c}_1 \int_\Omega \left[\frac{\varepsilon}{\bar{c}_1} v^2 + \left(\frac{\bar{c}_1}{4\varepsilon} + 1 \right) v^2 \right] dx \equiv \\ &\equiv \int_\Omega (\varepsilon v_x^2 + c_\varepsilon v^2) dx, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (4), с учетом теоремы 1:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, u \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), u \right) &= \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} k_\alpha(x, t) u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \Big|_0^{l_\alpha} dx' - \sum_{\alpha=1}^p \int_G k_\alpha(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx. \quad (6) \end{aligned}$$

Далее для оценки слагаемых в правой части применим ε -неравенство Коши:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^p r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, u \right) \leq \sum_{\alpha=1}^p \left(r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}, u \right) \leq \varepsilon \|u_x\|_0^2 + M_1(\varepsilon) \|u\|_0^2, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} - \left(\sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^m q_{s\alpha}(x, t) u(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t), u \right) &= \\ &= - \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^m u(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t) (q_{s\alpha}(x, t), u) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^m (u^2(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha}^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t) + (q_{s\alpha}(x, t), u)^2) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \sum_{s=1}^m (\varepsilon \|u_x\|_0^2 + c(\varepsilon) \|u\|_0^2 + M_2(1, u^2)) \leq \varepsilon M_3 \|u_x\|_0^2 + M_4(\varepsilon) \|u\|_0^2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(f(x, t), u) \leq \frac{1}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|u\|_0^2, \quad (9)$$

где $G' = \{x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p) : 0 < x_k < l_k, k = 1, 2, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, p\}$, $dx' = dx_1 dx_2 \dots dx_{\alpha-1} dx_{\alpha+1} \dots dx_p$, $c(\varepsilon) = 1/l_{\alpha} + 1/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Учитывая преобразования (5)–(9), из (4) получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int_G k_{\alpha}(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 dx \leq \\ &\leq \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} uk_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \Big|_0^{l_{\alpha}} dx' + \varepsilon M_5 \|u_x\|_0^2 + M_6(\varepsilon) \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Первое слагаемое в правой части (10) с учетом (2) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} uk_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \Big|_0^{l_{\alpha}} dx' = \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} (k_{\alpha}(l_{\alpha}, x', t) u_{x_{\alpha}}(l_{\alpha}, x', t) u(l_{\alpha}, x', t) - \\ &- k_{\alpha}(0, x', t) u_{x_{\alpha}}(0, x', t) u(0, x', t)) dx' = \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} (\mu_{+\alpha}(l_{\alpha}, x', t) u(l_{\alpha}, x', t) - \beta_{+\alpha}(l_{\alpha}, x', t) u^2(l_{\alpha}, x', t) - \\ &- \beta_{-\alpha}(0, x', t) u^2(0, x', t) + \mu_{-\alpha}(0, x', t) u(0, x', t)) dx'. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11), пользуясь теоремой 1 и ε -неравенством Коши, получим оценку

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} uk_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \Big|_0^{l_{\alpha}} dx' \leq \\ &\leq \varepsilon M_7 \|u_x\|_0^2 + M_8(\varepsilon) \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) dx'. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда из неравенства (10) с учетом (12) находим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|u\|_0^2 + \sum_{\alpha=1}^p \int_G k_{\alpha}(x, t) \left(\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 dx \leq \\ &\leq \varepsilon M_9 \|u_x\|_0^2 + M_{10}(\varepsilon) \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \int_{G'} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) dx' + \frac{1}{2} \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Проинтегрируем (13) по τ от 0 до t , тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau \leq \varepsilon M_{11} \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + M_{12}(\varepsilon) \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{13} \left(\int_0^t \left(\|f\|_0^2 + \int_{G'} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) dx' \right) d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right). \quad (14)$$

Выбирая $\varepsilon = 1/M_{11}$, из (14) находим

$$\|u\|_0^2 \leq M_{14} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{15} \left(\int_0^t \left(\|f\|_0^2 + \int_{G'} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) dx' \right) d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right). \quad (15)$$

На основании леммы Гронуолла [7] из (15) получаем неравенство

$$\|u\|_0^2 \leq M \left(\int_0^t \left(\|f\|_0^2 + \int_{G'} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) dx' \right) d\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right), \quad (16)$$

где M зависит только от входных данных задачи (1)–(3).

Из априорной оценки (16) следует единственность решения исходной задачи (1)–(3), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в L_2 -норме.

2. Построение локально-одномерной разностной схемы (ЛОС).

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\},$$

$$\bar{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

По аналогии с [8] на отрезке $[0, T]$ также введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \tau\alpha/p$, $\alpha = 1, 2, \dots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = [t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \dots, p$.

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathcal{L}_\alpha u = 0, \quad \mathcal{L}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$.

На каждом полуинтервале Δ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{L}_\alpha \vartheta_\alpha = \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_\alpha - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (17)$$

$$\begin{cases} k_\alpha \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} \vartheta_\alpha - \mu_{-\alpha}(x, t), & x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} \vartheta_\alpha - \mu_{+\alpha}(x, t), & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad (18)$$

полагая при этом [8, с. 522]

$$\begin{aligned} \vartheta_{(1)}(x, 0) &= u_0(x), \quad \vartheta_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = \vartheta_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p, \\ \vartheta_{(1)}(x, t_j) &= \vartheta_{(p)}(x, t_j), \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \end{aligned}$$

Аналогично [8, с. 401] получим для уравнения (17) номера α монотонную схему второго порядка аппроксимации по h_α . Для этого рассмотрим последнее уравнение при фиксированном α с возмущенным оператором \tilde{L}_α :

$$\frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial t} = \tilde{L}_\alpha \vartheta_\alpha + f_\alpha, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\alpha \vartheta_\alpha &= \varkappa_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial x_\alpha} - \\ &\quad - \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} \vartheta_\alpha(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t), \end{aligned}$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha}, \quad R_\alpha = \frac{1}{2} \frac{h_\alpha |r_\alpha|}{k_\alpha} \text{ — разностное число Рейнольдса,}$$

$$r_\alpha^+ = \frac{1}{2}(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0, \quad r_\alpha^- = \frac{1}{2}(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0, \quad b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha},$$

$$r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-, \quad a^{(1\alpha)} = a_{i_\alpha+1}, \quad a_\alpha = k_\alpha(x_{i_\alpha-1/2}, \bar{t}), \quad \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} = f_\alpha(x, \bar{t}),$$

$$\bar{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases} \quad d_{s\alpha} = q_{s\alpha}(x_{i_\alpha}, \bar{t}), \quad \bar{t} = t^{j+1/2}.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (18), (19) номера α двухслойной неявной схемой на полуинтервале $(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}]$, тогда получим цепочку из p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{L}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \quad (20)$$

$$\tilde{\Lambda}_\alpha y = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1)} y_{x_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} - \sum_{s=1}^m d_{s\alpha} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+),$$

$$x_{i_{\alpha s}}^- = \frac{x_\alpha^{(i_{\alpha s}+1)} - x_\alpha^s}{h_\alpha}, \quad x_{i_{\alpha s}}^+ = \frac{x_\alpha^s - x_\alpha^{(i_{\alpha s})}}{h_\alpha}, \quad x_\alpha^{(i_{\alpha s})} \leq x_\alpha^s \leq x_\alpha^{(i_{\alpha s}+1)}.$$

К уравнению (20) надо присоединить граничные и начальные условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (2):

$$\begin{cases} a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} - \mu_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ -a_\alpha^{(N\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha}^{j+\alpha/p} = \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \mu_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases} \quad (21)$$

Условия (21) имеют порядок аппроксимации $O(h_\alpha)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_\alpha^2)$ на решениях уравнения (17) при каком-либо α :

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = \beta_{-\alpha} \vartheta_0^{j+\alpha/p} - \mu_{-\alpha} + O(h_\alpha),$$

$$a_\alpha^{(1\alpha)} = k_{1/2}^{(\alpha)} = k_0 + k_0' \frac{h_\alpha}{2} + k_0'' \frac{h_\alpha^2}{8} + O(h_\alpha^3),$$

$$\frac{\vartheta_{(\alpha)}^1 - \vartheta_{(\alpha)}^0}{h_\alpha} = \vartheta_{(\alpha)x_\alpha,0} = \vartheta'_{(\alpha)} + \vartheta''_{(\alpha)} \frac{h_\alpha}{2} + O(h_\alpha^2),$$

$$a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} = k^{(\alpha)} \vartheta'_{(\alpha),0} + (k^{(\alpha)} \vartheta'_{(\alpha)})' \frac{h_\alpha}{2} + O(h_\alpha^2),$$

$$\begin{aligned} k^{(\alpha)} \vartheta'_{(\alpha),0} &= a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha (k^{(\alpha)} \vartheta'_{(\alpha)})' + O(h_\alpha^2) = \\ &= a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha \left(\frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta^{j+\alpha/p}}{\partial t} - r_\alpha \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} \vartheta_{(\alpha)}(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t) - f_\alpha \right) + O(h_\alpha^2). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} &a_\alpha^{(1\alpha)} \vartheta_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha \left(\frac{1}{p} \vartheta_t^{j+\alpha/p} - r_\alpha \vartheta_{(\alpha)x_\alpha,0} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} \vartheta_{(\alpha)}(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t) - f_\alpha \right) = \\ &= \beta_{-\alpha} \vartheta_0^{j+\alpha/p} - \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} \vartheta_{(\alpha)}(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_\alpha^s, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t) - \mu_{-\alpha} + \\ &\quad + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau). \quad (22) \end{aligned}$$

В (22) отбросим величины порядка малости $O(h_\alpha^2)$ и $O(h_\alpha\tau)$, заменим $\vartheta_{(\alpha)}$ на $y_{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$, тогда (22) переписется так:

$$\begin{aligned} & \left(a_\alpha^{(1_\alpha)} + \frac{1}{2} h_\alpha r_\alpha^{(0)} \right) y_{x_\alpha, 0}^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} \frac{h_\alpha}{p} y_{\bar{t}}^{j+\alpha/p} = \\ & = \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} + \frac{1}{2} h_\alpha d_\alpha^0 (y_{i_{\alpha_0}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_0}}^- + y_{i_{\alpha_0}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_0}}^+) - \mu_{-\alpha} - \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha, 0}, \quad x_\alpha = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_\alpha \frac{y_0^{j+\alpha/p} - y_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} & = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha, 0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} - \\ & - \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+) + \bar{\mu}_{-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_\alpha \frac{y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - y_{N_\alpha}^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} & = -\varkappa_{+\alpha} a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \\ & - \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(N_\alpha)} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+) + \bar{\mu}_{+\alpha}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha, 0}, \quad \bar{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha, N_\alpha}, \quad \mu_{\pm\alpha} = \mu_{\pm\alpha}(t_j);$$

$$\varkappa_{-\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_\alpha |r_\alpha^{(0)}|}{k_\alpha^{(1/2)}} \right)^{-1}, \quad r_\alpha^{(0)} \leq 0; \quad \varkappa_{+\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_\alpha |r_\alpha^{(N_\alpha)}|}{k_\alpha^{(N_\alpha-1/2)}} \right)^{-1}, \quad r_\alpha^{(N_\alpha)} \geq 0.$$

Таким образом, приходим к цепочке одномерных схем с нелокальными граничными условиями при каждом $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha y^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} h_\alpha \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} + \bar{\mu}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \frac{1}{2} h_\alpha \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} + \bar{\mu}_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha, \end{cases} \quad (24)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} & = \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{x_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} - \\ & - \sum_{s=1}^m d_{s\alpha} (y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^- + y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha_s}}^+); \end{aligned}$$

$$\Lambda_{\alpha}^{-} y^{(\alpha)} = \varkappa_{-\alpha} a_{\alpha}^{(1\alpha)} y_{x_{\alpha}, 0}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} - \frac{1}{2} h_{\alpha} \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^{-} + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^{+}), \quad x_{\alpha} = 0;$$

$$\Lambda_{\alpha}^{+} y^{(\alpha)} = -\varkappa_{+\alpha} a_{\alpha}^{(N\alpha)} y_{\bar{x}_{\alpha}, N_{\alpha}}^{(\alpha)} - \beta_{+\alpha} y_{N_{\alpha}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} h_{\alpha} \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(N\alpha)} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^{-} + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^{+}), \quad x_{\alpha} = l_{\alpha};$$

$$\frac{1}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$

Задачу (23)–(25) перепишем в операторном виде

$$\frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \bar{\Lambda}_{\alpha} y^{(\alpha)} + \Phi_{\alpha}^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \bar{\omega}_{h_{\alpha}}, \quad (26)$$

$$y(x, 0) = u_0(x),$$

где

$$\bar{\Lambda}_{\alpha} y^{(\alpha)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}_{\alpha} y^{(\alpha)}, & x_{\alpha} \in \omega_{h_{\alpha}}, \\ \frac{1}{0.5h_{\alpha}} \Lambda_{\alpha}^{-} y^{(\alpha)}, & x_{\alpha} = 0, \\ \frac{1}{0.5h_{\alpha}} \Lambda_{\alpha}^{+} y^{(\alpha)}, & x_{\alpha} = l_{\alpha}, \end{cases} \quad \Phi_{\alpha} = \begin{cases} \varphi_{\alpha}, & x_{\alpha} \in \omega_{h_{\alpha}}, \\ \frac{1}{0.5h_{\alpha}} \bar{\mu}_{-\alpha}, & x_{\alpha} = 0, \\ \frac{1}{0.5h_{\alpha}} \bar{\mu}_{+\alpha}, & x_{\alpha} = l_{\alpha}. \end{cases}$$

3. Погрешность аппроксимации ЛОС. Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где $u^{j+\alpha/p}$ — решение исходной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ в разностную задачу (23)–(25), получим задачу для погрешности $z^{j+\alpha/p}$:

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_{\alpha} z^{j+\alpha/p} + \psi_{\alpha}^{j+\alpha/p}, \quad (27)$$

$$\text{где } \psi_{\alpha}^{j+\alpha/p} = \tilde{\Lambda}_{\alpha} u^{j+\alpha/p} + \varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$

Обозначив через

$$\dot{\psi}_{\alpha} = \left(L_{\alpha} u + f_{\alpha} - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2}$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_{\alpha} = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f$, представим погрешность в (27) в виде суммы $\psi_{\alpha}^{j+\alpha/p} = \dot{\psi}_{\alpha} + \psi_{\alpha}^{*}$:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}^{j+\alpha/p} &= \tilde{\Lambda}_{\alpha} u^{j+\alpha/p} + \varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \dot{\psi}_{\alpha} - \dot{\psi}_{\alpha} = \\ &= (\tilde{\Lambda}_{\alpha} u^{j+\alpha/p} - L_{\alpha} u^{j+1/2}) + (\varphi_{\alpha}^{j+\alpha/p} - f_{\alpha}^{j+1/2}) - \\ &\quad - \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} \right) + \dot{\psi}_{\alpha} = \dot{\psi}_{\alpha} + \psi_{\alpha}^{*}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \dot{\psi}_\alpha = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau).$$

Запишем граничное условие $x_\alpha = 0$ так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_\alpha \frac{y_0^{j+\alpha/p} - y_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} &= \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} y_0^{j+\alpha/p} - \\ &- \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+) + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Пусть $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где u — решение исходной дифференциальной задачи (1)–(3). Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_\alpha \frac{z_0^{j+\alpha/p} - z_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} &= \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} z_0^{j+\alpha/p} - \\ &- \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (z_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + z_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+) + \\ &+ \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (u_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + u_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+) - \\ &- \frac{1}{2} h_\alpha \frac{u_0^{j+\alpha/p} - u_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \end{aligned}$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_\alpha \dot{\psi}_\alpha &= \frac{1}{2} h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \right. \\ &\left. - \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} u(x_1, \dots, x_\alpha^s, \dots, x_p, t) + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{-\alpha} &= \frac{1}{2} h_\alpha \left(f_{\alpha,0} - \frac{u_0^{j+\alpha/p} - u_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} \right) + \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\alpha/p} - \\ &- \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (u_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + u_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+) + \mu_{-\alpha} - \frac{1}{2} h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \right. \\ &\left. - \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} u(x_1, \dots, x_\alpha^s, \dots, x_p, t) + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2} + \frac{1}{2} h_\alpha \dot{\psi}_\alpha = \\ &= \frac{1}{2} h_\alpha \left(f_{\alpha,0} - \frac{u_0^{j+\alpha/p} - u_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} \right) + a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{2} h_\alpha r_\alpha^{(0)} u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \\ &- \beta_{-\alpha} u_0^{j+\alpha/p} - \frac{1}{2} h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (u_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + u_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+) + \mu_{-\alpha} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \right]^{j+1/2} - \frac{1}{2}h_\alpha \left(f_{\alpha,0} - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1/2} + \\
 & + \frac{1}{2}h_\alpha \sum_{s=1}^m q_{s\alpha} u(x_1, \dots, x_\alpha^s, \dots, x_p, t) - \frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha^{(0)} u_{x_\alpha,0}^{j+1/2} + \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_\alpha + O(h_\alpha \tau) = \\
 & = a_\alpha^{(1\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} + \frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha^{(0)} u_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\alpha/p} + \mu_{-\alpha} - \\
 & - \frac{1}{2}h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \right]^{j+1/2} - \frac{1}{2}h_\alpha r_\alpha(x, t) \frac{\partial u^{j+1/2}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_\alpha + \\
 & + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau) = k_\alpha \frac{\partial u^{j+\alpha/p}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2}h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \right]_0^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\alpha/p} - \\
 & - \frac{1}{2}h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) \right]^{j+1/2} + \mu_{-\alpha} + \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_\alpha + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau) = \\
 & = \left(k_\alpha \frac{\partial u^{j+\alpha/p}}{\partial x_\alpha} - \beta_{-\alpha} u_0^{j+\alpha/p} + \mu_{-\alpha} \right)_{x_\alpha=0} + \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_\alpha + O(h_\alpha^2) + O(h_\alpha \tau).
 \end{aligned}$$

В силу граничных условий (2) выражение, стоящее в скобках, есть ноль. Поэтому

$$\psi_{-\alpha} = \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*, \quad \psi_{-\alpha}^* = O(h_\alpha^2 + \tau) + O(h_\alpha \tau),$$

имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}h_\alpha \frac{z_0^{j+\alpha/p} - z_0^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} & = \varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{j+\alpha/p} - \beta_{-\alpha} z_0^{j+\alpha/p} - \\
 & - \frac{1}{2}h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(0)} (z_{i_\alpha s}^{(\alpha)} x_{i_\alpha s}^- + z_{i_\alpha s+1}^{(\alpha)} x_{i_\alpha s}^+) + \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}h_\alpha \frac{z_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - z_{N_\alpha}^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} & = -\varkappa_{+\alpha} a_\alpha^{(N_\alpha)} z_{\bar{x}_\alpha, N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \beta_{+\alpha} z_{N_\alpha}^{j+\alpha/p} - \\
 & - \frac{1}{2}h_\alpha \sum_{s=1}^m d_{s\alpha}^{(N_\alpha)} (z_{i_\alpha s}^{(\alpha)} x_{i_\alpha s}^- + z_{i_\alpha s+1}^{(\alpha)} x_{i_\alpha s}^+) + \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_{+\alpha} + \psi_{+\alpha}^*.
 \end{aligned}$$

Итак, задачу для погрешности $z^{j+\alpha/p}$ запишем в виде

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha z^{j+\alpha/p} + \psi_\alpha^{j+\alpha/p}, \quad x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \quad (28)$$

$$\frac{1}{2}h_\alpha \frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- z^{(\alpha)} + \psi_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2}h_\alpha \frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ z^{(\alpha)} + \psi_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

$$z(x, 0) = 0,$$

где

$$\begin{aligned}\psi_\alpha &= \dot{\psi}_\alpha + \psi_\alpha^*, \quad \dot{\psi}_\alpha = O(1), \quad \psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_\alpha = 0, \\ \psi_{-\alpha} &= \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_{-\alpha} + \psi_{-\alpha}^*, \quad \psi_{+\alpha} = \frac{1}{2}h_\alpha \dot{\psi}_{+\alpha} + \psi_{+\alpha}^*, \\ \psi_{\pm\alpha} &= O(h_\alpha^2 + \tau), \quad \dot{\psi}_{\pm\alpha} = O(1), \quad \sum_{\alpha=1}^p \dot{\psi}_{\pm\alpha} = 0.\end{aligned}$$

4. Устойчивость локально-одномерной схемы. Умножим уравнение (26) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}$:

$$\left[\frac{1}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right]_\alpha - [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha = [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}[u, v] &= \sum_{x \in \bar{\omega}_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^p h_\alpha, \quad [u, v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \bar{h}_\alpha, \\ \bar{h}_\alpha &= \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases} \quad \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^2 \bar{h}_\alpha, \\ \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &= \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 H / \bar{h}_\alpha.\end{aligned}$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (29):

$$\left[\frac{1}{p} y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right]_\alpha = \frac{1}{2p} (\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2p} \|y_{\bar{t}}\|_{L_2(\alpha)}^2, \quad (30)$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

$$\begin{aligned}[\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha &= (\tilde{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y_0^{(\alpha)} + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} = \\ &= (\varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha}, y^{(\alpha)})_\alpha + (b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1_\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + (b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha - \\ &- \left[\sum_{s=1}^m d_{s_\alpha} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+), y^{(\alpha)} \right]_\alpha + (\varkappa_{-\alpha} a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_{\alpha,0}}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} y^{(\alpha)}) y_0^{(\alpha)} - \\ &- (\varkappa_{+\alpha} a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_{\alpha, N_\alpha}}^{(\alpha)} + \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}) y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \quad (31)\end{aligned}$$

Так как

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{1 + R_\alpha} = 1 - \frac{0.5h|r_\alpha|}{k_\alpha} + O(h^2),$$

\varkappa_α заменим на $1 - \frac{0.5h|r_\alpha|}{k_\alpha}$. Тогда выражение (31) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
 [\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha &= -(\varkappa^{-1} a_\alpha, y_{\bar{x}_\alpha}^2)_\alpha + (b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + \\
 &+ (b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha - \left[\sum_{s=1}^m d_{s\alpha} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+), y^{(\alpha)} \right]_\alpha - \\
 &- (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\alpha)})_\alpha - \beta_{-\alpha} y_0^2 - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^2, \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha &= (\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + \bar{\mu}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \bar{\mu}_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} = \\
 &= (\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)})_\alpha + \left(\mu_{-\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha,0} \right)_\alpha y_0^{(\alpha)} \bar{h}_\alpha + \left(\mu_{+\alpha} + \frac{1}{2} h_\alpha f_{\alpha, N_\alpha} \right)_\alpha y_{N_\alpha}^{(\alpha)} \bar{h}_\alpha = \\
 &= [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

С помощью леммы 1 из [9] находим оценки для слагаемых, входящих в правую часть (32):

$$\begin{aligned}
 -(\varkappa^{-1} a_\alpha, y_{\bar{x}_\alpha}^2)_\alpha &\leq -M_1 \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2, \\
 -(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\alpha)})_\alpha &+ (b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)})_\alpha + (b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)})_\alpha \leq \\
 &\leq M_2 \left(\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right), \\
 -\left[\sum_{s=1}^m d_{s\alpha} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+), y^{(\alpha)} \right]_\alpha &\leq \\
 &\leq -(y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+) \left[\sum_{s=1}^m d_{s\alpha}, y^{(\alpha)} \right]_\alpha \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+)^2 + \frac{1}{2} \left[\sum_{s=1}^m d_{s\alpha}, y^{(\alpha)} \right]_\alpha^2 \leq \\
 &\leq M_3 (\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2), \\
 -\beta_{-\alpha} y_0^2 - \beta_{+\alpha} y_{N_\alpha}^2 &\leq c_2 (y_0^2 + y_{N_\alpha}^2) \leq c_2 (\varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \|y\|_{L_2(\alpha)}^2), \\
 [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}]_\alpha &\leq \frac{1}{2} \|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{2} \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)} &\leq \frac{\mu_{-\alpha}^2}{2} + \frac{\mu_{+\alpha}^2}{2} + \frac{1}{2} [(y_0^{(\alpha)})^2 + (y_{N_\alpha}^{(\alpha)})^2] \leq \frac{1}{2} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) + \\
 &+ \varepsilon \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2,
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$, $c(\varepsilon) = 1/l_\alpha + 1/\varepsilon$.

Подставляя (30), (33) и все полученные оценки после суммирования по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \dots, p$, в тождество (29), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} (\|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2)_{\bar{t}} + M_1 \|y_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon M_4 \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_5(\varepsilon) \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\bar{h}_\alpha \right). \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon \leq \frac{M_1}{2M_4}$, из последнего находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} (\|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2)_{\bar{t}} + \frac{M_1}{2} \|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq M_6 \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\|\varphi^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(t_j) + \mu_{+\alpha}^2(t_j)) H/\bar{h}_\alpha \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Просуммируем (34) сначала по $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 - \frac{1}{2\tau} \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{M_1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq \\ &\leq M_6 \sum_{\alpha=1}^p \|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\bar{h}_\alpha \right), \end{aligned} \quad (35)$$

а затем, умножая обе части на 2τ и суммируя по j' от 0 до j , получаем

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq M_7 \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &+ M_8 \left(\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\bar{h}_\alpha \right) + \|y^0\|_{L_2}^2 \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Из (36) имеем

$$\|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M_7 \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_8 F^j, \quad (37)$$

$$F^j = \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\bar{h}_\alpha \right) + \|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2.$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \nu_2 F^j,$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Перепишем неравенство (35) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq \|y^{j+(\alpha-1)/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &+ 2\tau M_6 \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \tau \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\hbar_\alpha \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Просуммируем (38) по α' от 1 до α , тогда получим

$$\begin{aligned} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2\tau M_6 \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \|y^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &+ \tau \sum_{\alpha'=1}^{\alpha} \left(\|\varphi^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i'_{\alpha'}} (\mu_{-\alpha'}^2 + \mu_{+\alpha'}^2) H/\hbar_{\alpha'} \right) \leq \\ &\leq \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2\tau M_6 \sum_{\alpha=1}^p \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &+ \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\hbar_\alpha \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1 \leq \alpha' \leq p} \|y^{j+\alpha'/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 = \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2,$$

в противном случае (38) будем суммировать до такого α , при котором $\|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2$ достигает максимального значения при фиксированном j . Тогда (39) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 &\leq \|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + 2p\tau M_6 \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \\ &+ \tau \sum_{\alpha=1}^p \left(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2 + \mu_{+\alpha}^2) H/\hbar_\alpha \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Так как из (37) следует, что

$$\|y^j\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M_7 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_8 F^j, \quad (41)$$

из (40) с учетом (41) имеем

$$(1 - 2p\tau M_6) \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M_7 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + M_9 F^j.$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{4pM_6}$, из последнего находим

$$\max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq \nu_1 \sum_{j'=0}^{j-1} \tau \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \nu_2 F^j.$$

Вводя обозначение $g_{j+1} = \max_{1 \leq \alpha \leq p} \|y^{j+\alpha/p}\|_{L_2(\omega_h)}^2$, последнее соотношение можно переписать в виде

$$g_{j+1} \leq \nu_1 \sum_{k=1}^j \tau g_k + \nu_2 F^j, \quad (42)$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

Применяя к (42) лемму 4 [10, с. 171], получаем априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 \leq M \left[\|y^0\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\varphi^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\mu_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \mu_{+\alpha}^2(l_\alpha, x', t_{j'})) H/\bar{h}_\alpha \right], \quad (43)$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h_α и τ , $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p)$.

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Локально-одномерная схема (23)–(25) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения разностной задачи (23)–(25) при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка (43).*

5. Сходимость локально-одномерной схемы. По аналогии с [8, с. 528] представим решение задачи (28) в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/p}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \dot{\psi}_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma h_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (44)$$

$$\eta(x, 0) = 0,$$

где

$$\dot{\psi}_\alpha = \begin{cases} \dot{\psi}_\alpha, & x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \dot{\psi}_{-\alpha}, & x_\alpha = 0, \\ \dot{\psi}_{+\alpha}, & x_\alpha = l_\alpha. \end{cases}$$

Из (44) следует $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dots + \dot{\psi}_p) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0$, так как $\eta^0 = 0$.

Тогда для η_α имеем

$$\eta_{(\alpha)} = \tau(\dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 + \dots + \dot{\psi}_\alpha) = -\tau(\dot{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \dot{\psi}_p) = O(\tau).$$

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_\alpha, \quad \tilde{\psi}_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha \eta_{(\alpha)} + \psi_\alpha^*, \quad x \in \omega_{h_\alpha}, \quad (45)$$

$$\frac{1}{2} h_\alpha \frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^- v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{-\alpha}, \quad \tilde{\psi}_{-\alpha} = \Lambda_\alpha^- \eta_{(\alpha)} + \psi_{-\alpha}^*, \quad x_\alpha = 0, \quad (46)$$

$$\frac{1}{2} h_\alpha \frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha^+ v_{(\alpha)} + \tilde{\psi}_{+\alpha}, \quad \tilde{\psi}_{+\alpha} = \Lambda_\alpha^+ \eta_{(\alpha)} + \psi_{+\alpha}^*, \quad x_\alpha = l_\alpha, \quad (47)$$

$$v(x, 0) = 0. \quad (48)$$

Если существуют непрерывные в замкнутой области \overline{Q}_T производные

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^3 k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial x_\alpha \partial t}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_\beta^2}, \\ & \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 q_s}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial q_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq p, \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned}$$

то $\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha (\dot{\psi}_{\alpha+1} + \dots + \dot{\psi}_p) = O(\tau)$, $\Lambda_\alpha^\pm \eta_{(\alpha)} = O(\tau)$.

Решение задачи (45)–(48) оценим с помощью теоремы 2:

$$\begin{aligned} \|v^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 & \leq M(T) \left[\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \|\tilde{\psi}_\alpha^{j'+\alpha/p}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)}^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} (\tilde{\psi}_{-\alpha}^2(0, x', t_{j'}) + \tilde{\psi}_{+\alpha}^2(l_\alpha, x', t_{j'})) H / h_\alpha \right]. \quad (49) \end{aligned}$$

Так как $\eta^j = 0$, $\eta_{(\alpha)} = O(\tau)$, $\|z^j\| \leq \|v^j\|$, из оценки (49) следует

ТЕОРЕМА 3. Пусть задача (1)–(3) имеет единственное непрерывное в \overline{Q}_T решение $u(x, t)$ и существуют непрерывные в \overline{Q}_T производные

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad \frac{\partial^3 k}{\partial x_\alpha \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial x_\alpha \partial t}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_\beta^2}, \\ & \frac{\partial r}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 q_s}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial q_s}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq p, \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned}$$

тогда локально-одномерная схема (23)–(25) сходится к решению дифференциальной задачи (1)–(3) со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что при достаточно малом τ имеет место оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_{L_2(\bar{\omega}_h)} \leq M(|h|^2 + \tau), \quad 0 < \tau \leq \tau_0,$$

где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$.

6. Алгоритм численного решения задачи. Для решения сеточных уравнений, получающихся при разностной аппроксимации нагруженных уравнений, удобно использовать метод параметрической прогонки (см. [11, с. 131]).

Перепишем задачу (1)–(3) при $0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha$, $\alpha = 2$, $p = 2$, $s = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \\ & + r_1(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2, t) + r_2(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) - \\ & - q_{1_1}(x_1, x_2, t)u(x_{1_1}^1, x_2, t) - q_{1_2}(x_1, x_2, t)u(x_{1_1}^2, x_2, t) - \\ & - q_{2_1}(x_1, x_2, t)u(x_1, x_{2_1}^1, t) - q_{2_2}(x_1, x_2, t)u(x_1, x_{2_1}^2, t) + f(x_1, x_2, t), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} = \beta_{-1}u - \mu_{-1}(x, t), \quad x_1 = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -k_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} = \beta_{+1}u - \mu_{+1}(x, t), \quad x_1 = l_1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ k_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} = \beta_{-2}u - \mu_{-2}(x, t), \quad x_2 = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -k_2(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} = \beta_{+2}u - \mu_{+2}(x, t), \quad x_2 = l_2, \quad 0 \leq t \leq T, \end{array} \right. \quad (51)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \quad (52)$$

Для решения задачи (50)–(52) рассмотрим сетку

$$x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad t_j = j\tau,$$

где $i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha$, $h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha$, $j = 0, 1, \dots, m$, $\tau = T/m$. Вводится один дробный шаг $t_{j+1/2} = t_j + \tau/2$. Обозначим сеточную функцию:

$$y_{i_1, i_2}^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} = y(i_1 h_1, i_2 h_2, (j + \alpha/2)\tau), \quad \alpha = 1, 2.$$

Напишем локально-одномерную схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \tilde{\Lambda}_1 y^{j+1/2} + \varphi_1, \\ \frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \tilde{\Lambda}_2 y^{j+1} + \varphi_2, \end{array} \right. \quad (53)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 y_{0,i_2}^{j+1/2} &= \varkappa_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{1,i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{11_2}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2}, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1+1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{11_2}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2+1}, i_2}^{j+1/2} + \mu_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}), \\
 y_{N_1, i_2}^{j+1/2} &= \varkappa_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{N_1-1, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{12_2}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2}, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1+1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{12_2}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2+1}, i_2}^{j+1/2} + \mu_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}), \\
 y_{i_1, 0}^{j+1/2} &= \varkappa_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, 1}^{j+1} + \varkappa_{21_1}^1(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_1}}^{j+1} + \\
 &+ \varkappa_{21_2}^1(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_2}}^{j+1} + \varkappa_{21_1}^2(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_1+1}}^{j+1} + \\
 &+ \varkappa_{21_2}^2(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_2+1}}^{j+1} + \mu_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}), \\
 y_{i_1, N_2}^{j+1} &= \varkappa_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, N_2-1}^{j+1} + \varkappa_{22_1}^1(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_1}}^{j+1} + \\
 &+ \varkappa_{22_2}^1(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_2}}^{j+1} + \varkappa_{22_1}^2(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_1+1}}^{j+1} + \\
 &+ \varkappa_{22_2}^2(i_1 h_1, t_{j+1}) y_{i_1, i_{2_2+1}}^{j+1} + \mu_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}),
 \end{aligned} \right. \quad (54)$$

$$y_{i_1, i_2}^0 = u_0(i_1 h_1, i_2, h_2), \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_\alpha y &= \varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p})_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\alpha/p} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\alpha/p} - \\
 &- \sum_{s=1}^m d_{s\alpha} (y_{i_{\alpha s}}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^- + y_{i_{\alpha s}+1}^{(\alpha)} x_{i_{\alpha s}}^+),
 \end{aligned}$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} f(x_1, x_2, t_{j+\alpha/2}) \text{ или } \varphi_1 = 0, \varphi_2 = f(x_1, x_2, t_{j+1}), \alpha = 1, 2.$$

Приведем расчетные формулы для решения задачи (53)–(55).

На первом этапе находим решение $y_{i_1, i_2}^{j+1/2}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ решается следующая задача:

$$\begin{aligned}
 A_{1(i_1, i_2)} y_{i_1-1, i_2}^{j+1/2} - C_{1(i_1, i_2)} y_{i_1, i_2}^{j+1/2} + B_{1(i_1, i_2)} y_{i_1+1, i_2}^{j+1/2} - \\
 - \sum_{s=1}^2 d_{s1}(i_1, i_2) (y_{i_{1s}}^{(1)} x_{i_{1s}}^- + y_{i_{1s}+1}^{(1)} x_{i_{1s}}^+) = -F_{1(i_1, i_2)}^{j+1/2}, \quad 0 < i_1 < N_1, \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{0, i_2}^{j+1/2} &= \varkappa_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{1, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{11_2}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2}, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{11_1}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1+1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{11_2}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2+1}, i_2}^{j+1/2} + \mu_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{N_1, i_2}^{j+1/2} &= \varkappa_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{N_1-1, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{12_2}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2}, i_2}^{j+1/2} + \varkappa_{12_1}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_1+1}, i_2}^{j+1/2} + \\
 &+ \varkappa_{12_2}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) y_{i_{1_2+1}, i_2}^{j+1/2} + \mu_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{1(i_1, i_2)} &= \frac{(\varkappa_1)_{i_1, i_2} (a_1)_{i_1, i_2}}{h_1^2} - \frac{(b_1^-)_{i_1, i_2} (a_1)_{i_1, i_2}}{h_1}, \\
 B_{1(i_1, i_2)} &= \frac{(\varkappa_1)_{i_1, i_2} (a_1)_{i_1+1, i_2}}{h_1^2} + \frac{(b_1^+)_{i_1, i_2} (a_1)_{i_1+1, i_2}}{h_1}, \\
 C_{1(i_1, i_2)} &= A_{1(i_1, i_2)} + B_{1(i_1, i_2)} + \frac{1}{\tau}, \quad F_{1(i_1, i_2)}^{j+1/2} = \frac{1}{\tau} y_{i_1, i_2}^j + \varphi_{1(i_1, i_2)}. \\
 \varkappa_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{\frac{(\varkappa_{-1} a_1)_{1, i_2}}{h_1}}{\frac{(\varkappa_{-1} a_1)_{1, i_2}}{h_1} + \beta_{-1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \varkappa_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{\frac{(\varkappa_{+1} a_1)_{N_1, i_2}}{h_1}}{\frac{(\varkappa_{+1} a_1)_{N_1, i_2}}{h_1} + \beta_{+1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \varkappa_{11_s}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{-\frac{1}{2} h_1 d_{s_1}^{(0)} x_{i_1_s}^-}{\frac{(\varkappa_{-1} a_1)_{1, i_2}}{h_1} + \beta_{-1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \varkappa_{12_s}^1(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{-\frac{1}{2} h_1 d_{s_1}^{(N_1)} x_{i_1_s}^-}{\frac{(\varkappa_{+1} a_1)_{N_1, i_2}}{h_1} + \beta_{+1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \varkappa_{11_s}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{-\frac{1}{2} h_1 d_{s_1}^{(0)} x_{i_1_s}^+}{\frac{(\varkappa_{-1} a_1)_{1, i_2}}{h_1} + \beta_{-1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \varkappa_{12_s}^2(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{-\frac{1}{2} h_1 d_{s_1}^{(N_1)} x_{i_1_s}^+}{\frac{(\varkappa_{+1} a_1)_{N_1, i_2}}{h_1} + \beta_{+1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \mu_{11}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{\bar{\mu}_{-1}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) + \frac{0.5 h_1}{\tau} y_0^j}{\frac{(\varkappa_{-1} a_1)_{1, i_2}}{h_1} + \beta_{-1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}, \\
 \mu_{12}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) &= \frac{\bar{\mu}_{+1}(i_2 h_2, t_{j+1/2}) + \frac{0.5 h_1}{\tau} y_{N_1}^j}{\frac{(\varkappa_{+1} a_1)_{N_1, i_2}}{h_1} + \beta_{+1, i_2}^{j+1/2} + \frac{0.5 h_1}{\tau}}.
 \end{aligned}$$

Решение системы (56) будем искать в виде [11]:

$$\begin{aligned}
 y_{i_1, i_2} &= \alpha_{i_1+1, i_2} y_{i_1+1, i_2} + \beta_{1, i_1+1, i_2} y_{i_1} + \beta_{2, i_1+1, i_2} y_{i_1+1} + \beta_{3, i_1+1, i_2} y_{i_2} + \\
 &+ \beta_{4, i_1+1, i_2} y_{i_2+1} + \delta_{i_1+1, i_2}, \quad i_1 = \overline{0, N_1 - 1}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Найдем теперь α_{i_1, i_2} , β_{k, i_1, i_2} , $k = 1, 2, 3, 4$, $i_1 = \overline{1, N_1}$. Из (57) следует, что

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1, i_2} &= \varkappa_{11}, \quad \beta_{1, 1, i_2} = \varkappa_{11_s}^1, \quad \beta_{2, 1, i_2} = \varkappa_{11_s}^2, \\
 \beta_{3, 1, i_2} &= \varkappa_{11_s}^1, \quad \beta_{4, 1, i_2} = \varkappa_{11_s}^2, \quad \delta_{1, i_2} = \mu_{11}.
 \end{aligned}$$

Подставляя

$$y_{i_1, i_2} = \alpha_{i_1+1, i_2} y_{i_1+1, i_2} + \beta_{1, i_1+1, i_2} y_{i_1} + \beta_{2, i_1+1, i_2} y_{i_1+1} + \\ + \beta_{3, i_1+1, i_2} y_{i_1, 2} + \beta_{4, i_1+1, i_2} y_{i_1, 2+1} + \delta_{i_1+1, i_2},$$

$$y_{i_1-1, i_2} = \alpha_{i_1, i_2} y_{i_1, i_2} + \beta_{1, i_1, i_2} y_{i_1} + \beta_{2, i_1, i_2} y_{i_1+1} + \\ + \beta_{3, i_1, i_2} y_{i_1, 2} + \beta_{4, i_1, i_2} y_{i_1, 2+1} + \delta_{i_1, i_2}$$

в (57), получим

$$\alpha_{i_1+1, i_2} = \frac{B_{1(i_1, i_2)}}{C_{1(i_1, i_2)} - A_{1(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}}, \quad \delta_{i_1+1, i_2} = \frac{F_{1(i_1, i_2)}^j + A_{1(i_1, i_2)} \delta_{i_1, i_2}}{C_{1(i_1, i_2)} - A_{1(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}}.$$

$$\beta_{1, i_1+1, i_2} = \frac{A_{1(i_1, i_2)} \beta_{1, i_1, i_2} - d_{1_1(i_1, i_2)} x_{i_{11}}^-}{C_{1(i_1, i_2)} - A_{1(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}},$$

$$\beta_{2, i_1+1, i_2} = \frac{A_{1(i_1, i_2)} \beta_{2, i_1, i_2} - d_{1_1(i_1, i_2)} x_{i_{11}}^+}{C_{1(i_1, i_2)} - A_{1(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}}$$

$$\beta_{3, i_1+1, i_2} = \frac{A_{1(i_1, i_2)} \beta_{3, i_1, i_2} - d_{1_2(i_1, i_2)} x_{i_{12}}^-}{C_{1(i_1, i_2)} - A_{1(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}},$$

$$\beta_{4, i_1+1, i_2} = \frac{A_{1(i_1, i_2)} \beta_{4, i_1, i_2} - d_{1_2(i_1, i_2)} x_{i_{12}}^+}{C_{1(i_1, i_2)} - A_{1(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}},$$

Выразим неизвестные y_{i_1, i_2} , $i_1 = \overline{0, N_1}$, через y_{i_1} , $y_{i_1, 2}$, y_{i_1+1} , $y_{i_1, 2+1}$ следующим образом:

$$y_{i_1, i_2} = H_{1, i_1, i_2} y_{i_1} + H_{2, i_1, i_2} y_{i_1+1} + H_{3, i_1, i_2} y_{i_1, 2} + H_{4, i_1, i_2} y_{i_1, 2+1} + \Phi_{i_1, i_2}. \quad (58)$$

$$H_{1, N_1, i_2} = \frac{\varkappa_{12} \beta_{1, N_1, i_2} + \varkappa_{12_1}^1}{1 - \varkappa_{12} \alpha_{N_1, i_2}}, \quad H_{2, N_1, i_2} = \frac{\varkappa_{12} \beta_{2, N_1, i_2} + \varkappa_{12_1}^2}{1 - \varkappa_{12} \alpha_{N_1, i_2}},$$

$$H_{3, N_1, i_2} = \frac{\varkappa_{12} \beta_{3, N_1, i_2} + \varkappa_{12_2}^1}{1 - \varkappa_{12} \alpha_{N_1, i_2}}, \quad H_{4, N_1, i_2} = \frac{\varkappa_{12} \beta_{4, N_1, i_2} + \varkappa_{12_2}^2}{1 - \varkappa_{12} \alpha_{N_1, i_2}},$$

$$\Phi_{i_1, N_2} = \frac{\varkappa_{12} \delta_{N_1, i_2} + \mu_{12}}{1 - \varkappa_{12} \alpha_{N_1, i_2}}.$$

Найдем теперь H_{k, i_1, i_2} , $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1, i_2} . Тогда, подставляя (58) в (57), получим

$$H_{k, i_1, i_2} = \alpha_{i_1+1, i_2} H_{k, i_1+1, i_2} + \beta_{k, i_1+1, i_2}, \\ \Phi_{i_1, i_2} = \alpha_{i_1+1, i_2} \Phi_{i_1+1, i_2} + \delta_{i_1+1, i_2}, \quad i_1 = \overline{N_1 - 1, 0}. \quad (59)$$

Выразим $y_{i_1}, y_{i_2}, y_{i_1+1}, y_{i_2+1}$ через H_{k,i_1,i_2} , $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1,i_2} . Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{i_1,i_2} = H_{1,i_1,i_2}y_{i_1} + H_{2,i_1,i_2}y_{i_1+1} + \\ \quad + H_{3,i_1,i_2}y_{i_2} + H_{4,i_1,i_2}y_{i_2+1} + \Phi_{i_1,i_2}, \\ y_{i_2,i_2} = H_{1,i_2,i_2}y_{i_1} + H_{2,i_2,i_2}y_{i_1+1} + \\ \quad + H_{3,i_2,i_2}y_{i_2} + H_{4,i_2,i_2}y_{i_2+1} + \Phi_{i_2,i_2}, \\ y_{i_1+1,i_2} = H_{1,i_1+1,i_2}y_{i_1} + H_{2,i_1+1,i_2}y_{i_1+1} + \\ \quad + H_{3,i_1+1,i_2}y_{i_2} + H_{4,i_1+1,i_2}y_{i_2+1} + \Phi_{i_1+1,i_2}, \\ y_{i_2+1,i_2} = H_{1,i_2+1,i_2}y_{i_1} + H_{2,i_2+1,i_2}y_{i_1+1} + \\ \quad + H_{3,i_2+1,i_2}y_{i_2} + H_{4,i_2+1,i_2}y_{i_2+1} + \Phi_{i_2+1,i_2}, \end{array} \right.$$

решая которую, находим значения следующих функций:

$$y_{i_1,i_2}, \quad y_{i_2,i_2}, \quad y_{i_1+1,i_2}, \quad y_{i_2+1,i_2}.$$

Подставляя полученные значения в (58), с учетом (59) находим решение y_{i_1,i_2} системы (56).

На втором этапе находим решение y_{i_1,i_2}^{j+1} . Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N_1 - 1}$ решается задача

$$A_{2(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{2(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{2(i_1,i_2)}y_{i_1,i_2+1}^{j+1} - \sum_{s=1}^2 d_{s2}(y_{i_2s}^{(2)}x_{i_2s}^- + y_{i_2s+1}^{(2)}x_{i_2s}^+) = -F_{2(i_1,i_2)}^{j+1}, \quad 0 < i_2 < N_2, \quad (60)$$

$$y_{i_1,0}^{j+1} = \varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,1}^{j+1} + \varkappa_{21}^1(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2}^{j+1} + \varkappa_{21}^2(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2}^{j+1} + \\ + \varkappa_{21}^2(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2+1}^{j+1} + \varkappa_{21}^2(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2+1}^{j+1} + \mu_{21}(i_1h_1, t_{j+1}),$$

$$y_{i_1,N_2}^{j+1} = \varkappa_{22}(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,N_2-1}^{j+1} + \varkappa_{22}^1(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2}^{j+1} + \varkappa_{22}^2(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2}^{j+1} + \\ + \varkappa_{22}^2(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2+1}^{j+1} + \varkappa_{22}^2(i_1h_1, t_{j+1})y_{i_1,i_2+1}^{j+1} + \mu_{22}(i_1h_1, t_{j+1}),$$

$$A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(b_2^-)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2},$$

$$B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(b_2^+)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2},$$

$$C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{1}{\tau}, \quad F_{2(i_1,i_2)}^{j+1/2} = \frac{1}{\tau}y_{i_1,i_2}^j + \varphi_{2(i_1,i_2)}.$$

$$\varkappa_{21}(i_1h_1, t_{j+1}) = \frac{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2}}{\frac{(\varkappa_{-2}a_2)_{i_1,1}}{h_2} + \beta_{-2,i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}},$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{\frac{(\varkappa_{+2a_2})_{i_1, N_2}}{h_2}}{\frac{(\varkappa_{+2a_2})_{i_1, N_2}}{h_2} + \beta_{+2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}, \\ \varkappa_{21_s}^1(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{-\frac{1}{2}h_2 d_{s_2}^{(0)} x_{i_2_s}^-}{\frac{(\varkappa_{-2a_2})_{i_1, 1}}{h_2} + \beta_{-2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}, \\ \varkappa_{22_s}^1(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{-\frac{1}{2}h_2 d_{s_2}^{(N_2)} x_{i_2_s}^-}{\frac{(\varkappa_{+2a_2})_{i_1, N_2}}{h_2} + \beta_{+2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}, \\ \varkappa_{21_s}^2(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{-\frac{1}{2}h_2 d_{s_2}^{(0)} x_{i_2_s}^+}{\frac{(\varkappa_{-2a_2})_{i_1, 1}}{h_2} + \beta_{-2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}, \\ \varkappa_{22_s}^2(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{-\frac{1}{2}h_2 d_{s_2}^{(N_2)} x_{i_2_s}^+}{\frac{(\varkappa_{+2a_2})_{i_1, N_2}}{h_2} + \beta_{+2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}, \\ \mu_{21}(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{\bar{\mu}_{-2}(i_1 h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5h_2}{\tau} y_0^j}{\frac{(\varkappa_{-2a_2})_{i_1, 1}}{h_2} + \beta_{-2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}, \\ \mu_{22}(i_1 h_1, t_{j+1}) &= \frac{\bar{\mu}_{+2}(i_1 h_1, t_{j+1}) + \frac{0.5h_2}{\tau} y_{N_2}^j}{\frac{(\varkappa_{+2a_2})_{i_1, N_2}}{h_2} + \beta_{+2, i_1}^{j+1} + \frac{0.5h_2}{\tau}}. \end{aligned}$$

Решение системы (60) будем искать в виде

$$\begin{aligned} y_{i_1, i_2} &= \alpha_{i_1, i_2+1} y_{i_1, i_2+1} + \beta_{1, i_1, i_2+1} y_{i_2_1} + \beta_{2, i_1, i_2+1} y_{i_2_1+1} + \beta_{3, i_1, i_2+1} y_{i_2_2} + \\ &+ \beta_{4, i_1, i_2+1} y_{i_2_2+1} + \delta_{i_1, i_2+1}, \quad i_2 = \overline{0, N_2 - 1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Найдем теперь α_{i_1, i_2} , β_{k, i_1, i_2} , $k = 1, 2, 3, 4$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Из (61) следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1, 1} &= \varkappa_{21}, \quad \beta_{1, i_1, 1} = \varkappa_{21_1}^1, \quad \beta_{2, i_1, 1} = \varkappa_{21_1}^2, \\ \beta_{3, i_1, 1} &= \varkappa_{21_2}^1, \quad \beta_{4, i_1, 1} = \varkappa_{21_2}^2, \quad \delta_{i_1, 1} = \mu_{21}. \end{aligned}$$

Подставляя

$$\begin{aligned} y_{i_1, i_2} &= \alpha_{i_1, i_2+1} y_{i_1, i_2+1} + \beta_{1, i_1, i_2+1} y_{i_2_1} + \beta_{2, i_1, i_2+1} y_{i_2_1+1} + \\ &+ \beta_{3, i_1, i_2+1} y_{i_2_2} + \beta_{4, i_1, i_2+1} y_{i_2_2+1} + \delta_{i_1, i_2+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{i_1, i_2-1} &= \alpha_{i_1, i_2} y_{i_1, i_2} + \beta_{1, i_1, i_2} y_{i_2_1} + \beta_{2, i_1, i_2} y_{i_2_1+1} + \\ &+ \beta_{3, i_1, i_2} y_{i_2_2} + \beta_{4, i_1, i_2} y_{i_2_2+1} + \delta_{i_1, i_2} \end{aligned}$$

в (61), получим

$$\alpha_{i_1, i_2+1} = \frac{B_{2(i_1, i_2)}}{C_{2(i_1, i_2)} - A_{2(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}}, \quad \delta_{i_1, i_2+1} = \frac{F_{2(i_1, i_2)}^j + A_{2(i_1, i_2)} \delta_{i_1, i_2}}{C_{2(i_1, i_2)} - A_{2(i_1, i_2)} \alpha_{i_1, i_2}}.$$

$$\begin{aligned}\beta_{1,i_1,i_2+1} &= \frac{A_2(i_1,i_2)\beta_{1,i_1,i_2} - d_{21}(i_1,i_2)x_{i_2}^-}{C_2(i_1,i_2) - A_2(i_1,i_2)\alpha_{i_1,i_2}}, \\ \beta_{2,i_1,i_2+1} &= \frac{A_2(i_1,i_2)\beta_{2,i_1,i_2} - d_{21}(i_1,i_2)x_{i_2}^+}{C_1(i_1,i_2) - A_2(i_1,i_2)\alpha_{i_1,i_2}}, \\ \beta_{3,i_1,i_2+1} &= \frac{A_2(i_1,i_2)\beta_{3,i_1,i_2} - d_{22}(i_1,i_2)x_{i_2}^-}{C_2(i_1,i_2) - A_2(i_1,i_2)\alpha_{i_1,i_2}}, \\ \beta_{4,i_1,i_2+1} &= \frac{A_2(i_1,i_2)\beta_{4,i_1,i_2} - d_{22}(i_1,i_2)x_{i_2}^+}{C_2(i_1,i_2) - A_2(i_1,i_2)\alpha_{i_1,i_2}},\end{aligned}$$

Выразим неизвестные y_{i_1,i_2} , $i_2 = \overline{0, N_2}$, через $y_{i_2_1}$, $y_{i_2_2}$, $y_{i_2_1+1}$, $y_{i_2_2+1}$ следующим образом:

$$y_{i_1,i_2} = H_{1,i_1,i_2}y_{i_2_1} + H_{3,i_1,i_2}y_{i_2_2} + H_{2,i_1,i_2}y_{i_2_1+1} + H_{4,i_1,i_2}y_{i_2_2+1} + \Phi_{i_1,i_2}. \quad (62)$$

$$H_{1,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{1,i_1,N_2} + \varkappa_{22_1}^1}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}}, \quad H_{2,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{2,i_1,N_2} + \varkappa_{22_1}^2}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}},$$

$$H_{3,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{3,i_1,N_2} + \varkappa_{22_2}^1}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}}, \quad H_{4,i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\beta_{4,i_1,N_2} + \varkappa_{22_2}^2}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}},$$

$$\Phi_{i_1,N_2} = \frac{\varkappa_{22}\delta_{i_1,N_2} + \mu_{22}}{1 - \varkappa_{22}\alpha_{i_1,N_2}}.$$

Найдем теперь H_{k,i_1,i_2} , $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1,i_2} . Тогда, подставляя (62) в (61), получим

$$\begin{aligned}H_{k,i_1,i_2} &= \alpha_{i_1,i_2+1}H_{k,i_1,i_2+1} + \beta_{k,i_1,i_2+1}, \\ \Phi_{i_1,i_2} &= \alpha_{i_1,i_2+1}\Phi_{i_1,i_2+1} + \delta_{i_1,i_2+1}, \quad i_2 = \overline{N_2 - 1, 0}.\end{aligned} \quad (63)$$

Выразим $y_{i_2_1}$, $y_{i_2_2}$, $y_{i_2_1+1}$, $y_{i_2_2+1}$ через H_{k,i_1,i_2} , $k = 1, 2, 3, 4$, Φ_{i_1,i_2} . Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}y_{i_1,i_2_1} &= H_{1,i_1,i_2_1}y_{i_2_1} + H_{2,i_1,i_2_1}y_{i_2_1+1} + H_{3,i_1,i_2_1}y_{i_2_2} + \\ &\quad + H_{4,i_1,i_2_1}y_{i_2_2+1} + \Phi_{i_1,i_2_1}, \\ y_{i_1,i_2_2} &= H_{1,i_1,i_2_2}y_{i_2_1} + H_{2,i_1,i_2_2}y_{i_2_1+1} + H_{3,i_1,i_2_2}y_{i_2_2} \\ &\quad + H_{4,i_1,i_2_2}y_{i_2_2+1} + \Phi_{i_1,i_2_2}, \\ y_{i_1,i_2_1+1} &= H_{1,i_1,i_2_1+1}y_{i_2_1} + H_{2,i_1,i_2_1+1}y_{i_2_1+1} + H_{3,i_1,i_2_1+1}y_{i_2_2} + \\ &\quad + H_{4,i_1,i_2_1+1}y_{i_2_2+1} + \Phi_{i_1,i_2_1+1}, \\ y_{i_1,i_2_2+1} &= H_{1,i_1,i_2_2+1}y_{i_2_1} + H_{2,i_1,i_2_2+1}y_{i_2_1+1} + H_{3,i_1,i_2_2+1}y_{i_2_2} + \\ &\quad + H_{4,i_1,i_2_2+1}y_{i_2_2+1} + \Phi_{i_1,i_2_2+1},\end{aligned} \right.$$

решая которую, находим значения следующих функций:

$$y_{i_1,i_2_1}, \quad y_{i_1,i_2_2}, \quad y_{i_1,i_2_1+1}, \quad y_{i_1,i_2_2+1}.$$

Подставляя полученные значения в (62), с учетом (63) находим решение y_{i_1, i_2} системы (60).

Каждая из задач (56), (60) решается, как видно, методом параметрической прогонки (см. [11, с. 131]).

7. Тестовая задача и численные результаты. Коэффициенты уравнения и граничных условий исходной дифференциальной задачи (1)–(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением при $p = 2$ была функция $u(x, t) = t^3(x_1^4 - l_1x_1^3)(x_2^4 - l_2x_2^3)$.

Ниже в табл. 1, 2 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и вычислительный порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(w_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(w_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(w_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in w_{h\tau}} |y|$, когда

$\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2 + (\sqrt{\tau})^2)$.

Вычислительный порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ВПС} = \log_{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}} \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где z_i — погрешность, соответствующая \bar{h}_i .

Таблица 1

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$ [The maximum value of the error ($z = y - u$) and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

\bar{h}	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{L_2(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.001858105	
1/40	0.000592952	1.6478
1/80	0.000163636	1.8574
1/160	0.000044111	1.8913

Таблица 2

Изменение погрешности в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки на $t = 1$, когда $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$. [The maximum value of the error ($z = y - u$) and the computational order of convergence (CO) in the norm $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ when the grid size is reduced by $t = 1$, if $\bar{h} = h_1 = h_2 = \sqrt{\tau}$]

\bar{h}	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	CO in $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
1/20	0.007805524	
1/40	0.002882977	1.4369
1/80	0.000857080	1.7501
1/160	0.000226344	1.9209

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // *Диффер. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Дьяконов Е. Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для нестационарных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1962. Т. 144, № 1. С. 29–32.
3. Самарский А. А. raref Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962. Т. 2, № 5. С. 787–811.
4. Самарский А. А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1963. Т. 3, № 3. С. 431–466.
5. Будаков В. М., Искендеров А. Д. Об одном классе обратных краевых задач с неизвестными коэффициентами // *Докл. АН СССР*, 1967. Т. 176, № 1. С. 20–23.
6. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems // *Rocky Mountain J. Math.*, 1975. vol. 5, no. 4. pp. 493–542. <https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493>.
7. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973. 407 с.
8. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1983. 616 с.
9. Андреев В. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968. Т. 8, № 6. С. 1218–1231.
10. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973. 415 с.
11. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. *Численные методы расчета одномерных систем*. Новосибирск: Наука, 1981. 208 с.

MSC: 35K20, 65N06, 65N12

Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind

Z. V. Beshtokova^{1,2}¹ North-Caucasus Center for Mathematical Research,

North-Caucasus Federal University,

1, Pushkin str., Stavropol, 355017, Russian Federation.

² Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,

173, Chernyshevsky str., Nalchik, 360004, Russian Federation.

Abstract

An initial-boundary value problem is studied for a multidimensional loaded parabolic equation of general form with boundary conditions of the third kind. For a numerical solution, a locally one-dimensional difference scheme by A.A. Samarskii with order of approximation $O(h^2 + \tau)$ is constructed. Using the method of energy inequalities, we obtain a priori estimates in the differential and difference interpretations, which imply uniqueness, stability, and convergence of the solution of the locally one-dimensional difference scheme to the solution of the original differential problem in the L_2 norm at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme. An algorithm for the computational solution is constructed and numerical calculations of test cases are carried out, illustrating the theoretical calculations obtained in this work.

Keywords: parabolic equation, loaded equation, difference schemes, locally one-dimensional scheme, a priori estimate, stability, convergence, multidimensional problem.

Received: 11th February, 2022 / Revised: 18th March, 2022 /Accepted: 21st March, 2022 / First online: 31st March, 2022

Competing interests. There are no financial or non-financial competing interests in the publication of the paper.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beshtokova Z. V. Numerical method for solving an initial-boundary value problem for a multidimensional loaded parabolic equation of a general form with conditions of the third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 7–35. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1908> (In Russian).

Author's Details:

Zaryana V. Beshtokova  <https://orcid.org/0000-0001-8020-4406>Researcher; Dept. of Computational Methods¹; Postgraduate Student²;e-mail: zarabaeva@yandex.ru

References

1. Nakhushev A. M. Loaded equations and their applications, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 1, pp. 86–94 (In Russian).
2. Dyakonov E. G. Difference schemes with a splitting operator for nonstationary equations, *Sov. Math., Dokl.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 645–648.
3. Samarskii A. A. On an economical difference method for the solution of a multidimensional parabolic equation in an arbitrary region, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 2, no. 5, pp. 894–926. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90504-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90504-4).
4. Samarskii A. A. Local one dimensional difference schemes on non-uniform nets, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 572–619. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90290-8).
5. Budak V. M., Iskenderov A. D. A class of inverse boundary value problems with unknown coefficients, *Sov. Math., Dokl.*, 1967, vol. 8, no. 1, pp. 1026–1030.
6. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems, *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, vol. 5, no. 4, pp. 493–542. <https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493>.
7. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 49. New York, Springer, 1985, xxx+322 pp. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4317-3>.
8. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1983, 616 pp. (In Russian)
9. Andreev V. B. On the convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1968, vol. 8, no. 6, pp. 44–62. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(68\)90092-X](https://doi.org/10.1016/0041-5553(68)90092-X).
10. Samarskii A. A., Gulin A. B. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 415 pp. (In Russian)
11. Voevodin A. F., Shugrin S. M. *Chislennyye metody rascheta odnomernykh sistem* [Numerical Methods for Calculating One-Dimensional Systems]. Novosibirsk, Nauka, 1981, 208 pp. (In Russian)

Mechanics of Solids



MSC: 74A05, 74A99

On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors

Y. N. Radayev, E. V. Murashkin, T. K. Nesterov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101-1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper deals with covariant constancy problem for tensors and pseudotensors of an arbitrary rank and weight in an Euclidean space. Requisite preliminaries from pseudotensor algebra and analysis are given. The covariant constancy of pseudotensors are separately considered. Important for multidimensional geometry examples of covariant constant tensors and pseudotensors are demonstrated. In particular, integer powers of the fundamental orienting pseudoscalar satisfied the condition of covariant constancy are introduced and discussed. The paper shows that the distortion and inversed distortion tensors are not actually covariant constant, contrary to the statements of those covariant constancy which can be found in literature on continuum mechanics.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, distortion, inversed distortion, covariant constant tensors, parallel vector field.

Received: 27th October, 2021 / Revised: 28th December, 2021 /

Accepted: 24th January, 2022 / First online: 21st February, 2022

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Radayev Y.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 36–47. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>.

Authors' Details:

Yuri N. Radayev  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@gmail.com

Timofey K. Nesterov  <https://orcid.org/0000-0003-0844-0484>

M.Sc. (Applied Mathematics); Postgraduate Student; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: nesterovtim4@gmail.com

Preliminary remarks. Variational and dynamic equations describing the mechanical behavior of solids require in general the formalism of pseudotensor analysis [1–4]. In this case, the covariant constant tensor and relative tensor fields play an important role¹. In the present paper the notions and requisite equations from algebra and analysis of pseudotensors are discussed. An in-depth and complete presentation of the pseudotensor formalism can be found in the books on tensor analysis and continuum mechanics [2–6]. The pseudotensor formalism is inevitable for developing isotropic and hemitropic micropolar elastic continua models (see [7–10]).

In this study, the concept of covariant constancy of absolute tensor and pseudotensor fields is introduced and discussed. Examples of fundamental objects of pseudotensor analysis possessing the properties of covariant constancy are given. An algorithm for obtaining covariant constant tensors and pseudotensors proposed in the monograph [2] is considered.

The paper is due to the fact that a number of authors (see, for example, [11, p. 65]) do state that the distortion and inversed distortion tensors are covariant constants. The latter statement is not generally true and should be considered as erroneous, which can be elucidated by the rational mechanics technique [12, 13]. The paper presents the correct equations being the most similar to the covariant constancy of distortion and inversed distortion.

Before all it should be noted that the paper is aimed at determination of the covariant derivative of pseudotensors, which are widely employed in the mechanics of micropolar elastic solids [7–9].

After the Preliminary remarks in Sec. 1 the definitions of fundamental orienting pseudoscalar, generalized Kronecker deltas, permutation symbols (alternating pseudotensors), and alternating tensors are recalled for N -dimensional space. The covariant differentiation of an arbitrary relative tensor is considered and a number of particular cases are given.

Then in Sec. 2 the definitions of covariant constant tensor and pseudotensor fields are proposed. It will be shown that relative and absolute tensors with constant components are covariant constants. A number of covariant constant tensors (e.g. introduced in Sec. 1 fundamental orienting pseudoscalar and its integer powers, generalized Kronecker deltas, permutation symbols, alternating tensors) is collected in the Table for convenience and further references. A general algorithm for obtaining tensors and pseudotensors with constant components which are simultaneously covariant constant is recalled and discussed following the monograph by B. G. Gurevich [2].

Finally, in Sec. 3 the definitions of distortion (deformation gradient) and inversed distortion tensors are considered according to the rational mechanics scheme. The positive absolute scalar J known from rational mechanics is recalled and calculated in terms of the fundamental orienting pseudoscalars related to referential and actual states. The tensor reformulations of Euler–Piola–Jacobi equations are proposed. Equations being the most similar to the covariant constancy of distortion and inversed distortion are obtained.

¹For example, following I. S. Sokolnikoff [6], covariant constant (parallel) Euler vector fields can be used in order to formulate the principle of virtual displacements.

As a whole, the present paper should be considered as a contemporary framework for problems of covariant differentiation of tensors and pseudotensors fields that is important for nonlinear continuum mechanics.

1. Notions and requisite equations from algebra and analysis of pseudotensors in Euclidean space. Consider an N -dimensional Euclidean space supplied by the coordinates x^k . The fundamental orienting pseudoscalar e [7–10] and its integer powers play an important role in the geometry of multidimensional spaces. In an N -dimensional space, it is defined as the skew product [1, p. 63–65] of absolute covariant basis vectors

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e. \quad (1)$$

It is easy to demonstrate that in an Euclidean space the following relation holds true

$$e^2 = g,$$

where g is the determinant of the metric tensor g_{ij} : $g = \det(g_{ij})$.

In a three-dimensional space ($N = 3$) the equation (1) is reformulated as

$$e = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3] = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{z}_3$$

We proceed to discussion of other fundamental objects of N -dimensional geometry which are the absolute tensors $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$, usually called as generalized Kronecker deltas. Objects $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$ are defined for each $M \leq N$ according to

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M} = \begin{cases} +1, & \text{if } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ are distinct integers selected from the range} \\ & 1, 2, \dots, N \text{ and if, } i_1, i_2, \dots, i_M \text{ is an even permutation of} \\ & j_1, j_2, \dots, j_M; \\ -1, & \text{if } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ are distinct integers selected from the range} \\ & 1, 2, \dots, N \text{ and if, } i_1, i_2, \dots, i_M \text{ is an odd permutation} \\ & j_1, j_2, \dots, j_M; \\ 0, & \text{if any two of } j_1, j_2, \dots, j_M \text{ are equal, or if any two of} \\ & i_1, i_2, \dots, i_M \text{ equal, or if the set of numbers } j_1, j_2, \dots, j_M \\ & \text{differs, apart from order, from the set } i_1, i_2, \dots, i_M. \end{cases}$$

By the aid of deltas $\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$ the permutation symbols (alternating pseudotensors) can be immediately introduced as:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[-1]} = \delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{12 \dots N}, \quad \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}^{[+1]} = \delta_{12 \dots N}^{i_1 i_2 \dots i_N}.$$

It should be noted that pseudotensors can be transformed into absolute tensors by using the fundamental orienting pseudoscalar e (see [7–10]). For an arbitrary pseudotensor of integer weight W we have

$$T_{\dots i j \dots l}^{p q r \dots s} = e^{-W} T_{\dots i j \dots l}^{[W] p q r \dots s}.$$

For example, the alternating tensors can be obtained from permutation symbols multiplied by the corresponding power (+1 or -1) of fundamental orienting pseudoscalar

$$e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^{-1} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}, \quad e^{i_1 i_2 \dots i_N} = \frac{1}{e} \epsilon^{+1}{}_{i_1 i_2 \dots i_N}.$$

The weight index $[W]$ in an upper position will be omitted for fundamental symbols such as the fundamental orienting scalar, permutation symbols, and it is also applicable to zero weight absolute tensors.

The covariant derivative of the pseudotensor $T^{[W]pqr\dots s}_{\dots ij\dots l}$ of a given valency and weight is determined by the following equation corresponding to an analogous operation for absolute tensors [6]:

$$\begin{aligned} \nabla_p T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} &= \partial_p T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} + T^{[W]sm\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{sp}^l + T^{[W]ls\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{sp}^m + \\ &+ \dots + T^{[W]lm\dots s}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{sp}^n - \Gamma_{ip}^s T^{[W]lm\dots n}_{\dots sj\dots k} - \Gamma_{jp}^s T^{[W]lm\dots n}_{\dots is\dots k} - \\ &- \dots - \Gamma_{kp}^s T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots s} - W T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{sp}^s, \end{aligned} \quad (2)$$

where $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}$.

The tensor gradient of an arbitrary valency and weight W tensor is defined by the following direct equation²:

$$\nabla \otimes \mathbf{T} = e^{W\mathbf{i}} \otimes \partial_k (e^{-W\mathbf{T}} \mathbf{T}). \quad (3)$$

Expanding the equation (3) and taking account of

$$\partial_p \mathbf{i}^m = -\Gamma_{sp}^m \mathbf{i}^s, \quad \partial_p \mathbf{i}_m = \Gamma_{mp}^s \mathbf{i}_s, \quad e^{-1}(\partial_p e) = \Gamma_{ps}^s,$$

it can be seen that (2) follows from (3). It is clear that (for the sake of compactness, the lengths of polyads are not explicitly indicated)

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \mathbf{T} &= e^{W\mathbf{i}} \otimes \partial_p (e^{-W\mathbf{T}} T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} \mathbf{i}_l \otimes \mathbf{i}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_n \otimes \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{i}^k) = \\ &= (\partial_p T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} - W e^{-1}(\partial_p e) T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k}) \mathbf{i}_l \otimes \mathbf{i}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_n \otimes \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{i}^k + \\ &+ T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{lp}^s \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_n \otimes \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{i}^k + \\ &+ T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{mp}^s \mathbf{i}_l \otimes \mathbf{i}_s \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_n \otimes \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{i}^k + \dots + \\ &+ T^{[W]lm\dots n}_{\dots ij\dots k} \Gamma_{np}^s \mathbf{i}_l \otimes \mathbf{i}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{i}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{i}^k - \end{aligned}$$

²The Hamilton nabla is conventionally defined according to: $\nabla = \mathbf{i}^s \partial_s$.

$$\begin{aligned}
 & - T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{sp}^i \mathbf{z}^p \otimes \mathbf{z}_l \otimes \mathbf{z}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{z}_n \otimes \mathbf{z}^s \otimes \mathbf{z}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^k - \\
 & - T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{sp}^j \mathbf{z}^p \otimes \mathbf{z}_l \otimes \mathbf{z}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{z}_n \otimes \mathbf{z}^i \otimes \mathbf{z}^s \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^k - \dots - \\
 & - T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{sp}^k \mathbf{z}^p \otimes \mathbf{z}_l \otimes \mathbf{z}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{z}_n \otimes \mathbf{z}^i \otimes \mathbf{z}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^s.
 \end{aligned}$$

Then the similar polyads can be discriminated and after a number of rearrangements we come to the equation:

$$\begin{aligned}
 \nabla \otimes \mathbf{T} &= (\partial_p T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n} - W T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{sp}^s + T_{\dots ij \dots k}^{[W]sm \dots n} \Gamma_{sp}^l + T_{\dots ij \dots k}^{[W]ls \dots n} \Gamma_{sp}^m + \\
 & + \dots + T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots s} \Gamma_{sp}^n - T_{\dots sj \dots k}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{ip}^s - T_{\dots is \dots k}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{jp}^s - \dots - \\
 & - T_{\dots ij \dots s}^{[W]lm \dots n} \Gamma_{kp}^s) \mathbf{z}^p \otimes \mathbf{z}_l \otimes \mathbf{z}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{z}_n \otimes \mathbf{z}^i \otimes \mathbf{z}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^k = \\
 & = (\nabla_p T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n}) \mathbf{z}^p \otimes \mathbf{z}_l \otimes \mathbf{z}_m \otimes \dots \otimes \mathbf{z}_n \otimes \mathbf{z}^i \otimes \mathbf{z}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^k.
 \end{aligned}$$

Thus, the equation (2) can be derived on the ground of the definition (3).

The equation (2) in particular cases furnishes:

1) covariant derivative of a pseudoscalar of weight W :

$$\nabla_p T = \partial_p T - W T \Gamma_{sp}^s;$$

2) the covariant derivative of a contravariant pseudovector of weight W :

$$\nabla_p T^k = \partial_p T^k + T^s \Gamma_{sp}^k - W T^k \Gamma_{sp}^s;$$

3) covariant derivative of 2-contravariant pseudotensor of weight W :

$$\nabla_p T^{ji} = \partial_p T^{ji} + T^{si} \Gamma_{sp}^j + T^{js} \Gamma_{sp}^i - W T^{ji} \Gamma_{sp}^s;$$

4) covariant derivative of 1-contravariant and 1-covariant pseudotensor of weight W :

$$\nabla_p T_i^j = \partial_p T_i^j - T_s^j \Gamma_{ip}^s + T_i^s \Gamma_{sp}^j - W T_i^j \Gamma_{sp}^s.$$

2. Definition and important examples of covariant constant tensor

and pseudotensor fields. A given pseudotensor field $T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n}$ of valency N and weight W is called as covariant constant if it satisfies the pseudotensor equation

$$\nabla_p T_{\dots ij \dots k}^{[W]lm \dots n} = 0. \quad (4)$$

Examples of covariant constant tensors and pseudotensors (see [5, 6]) are presented in Table. Among them, the fundamental orienting pseudoscalar e having been often employed in micropolar theories of continuum mechanics.

Note that the tensor equation (4), involving a pseudotensor, being valid in a given coordinate net remains valid in any other coordinate net [5, 6]. In the right-handed Cartesian coordinates, all of the tensors from Table have constant components equalled to 0 or 1. In this case, their covariant derivatives are the usual partial derivatives. Thus, each covariant derivative will be equalled to zero, that proves the covariant constancy of the absolute tensors and pseudotensors from Table in any curvilinear coordinate net.

In the monograph [2, p. 164–176] a general algorithm for constructing tensors and pseudotensors with constant components is proposed. Those are clearly covariant constant ones, since the differentiation rules for sums and products lead to a zero result.

The algorithm permits obtaining an arbitrary absolute tensor $C_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ with constant components by using the standard two-index Kronecker deltas in the form of a linear combination (of $r!$ terms) with arbitrary constant coefficients, while each term consists of products of r delta symbols permuted in superscripts. Note that all $C_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}$ do not constitute the complete set of covariant constant absolute tensors. An evident example is a parallel vector field, which is a covariant constant vector, but not representable as a vector with constant components.

A pseudotensor (r -covariant, s -contravariant, $s = r + N|W|$, N — space dimension, W — weight) having constant components is also easily constructed by reducing it to an absolute tensor. In particular, if $W > 0$, then the absolute tensor should be formed according to

$$C_{\dots k_1 k_2 \dots k_r}^{i_1 i_2 \dots i_s} \underbrace{\epsilon_{i_{r+1} \dots i_N} \dots \epsilon_{i_{s-N+1} \dots i_s}}_W$$

The corresponding pseudotensor representations can be found in the monograph [2, p. 175].

3. Distortion and inversed distortion tensors. We denote as x^i ($i = 1, 2, 3$) the spatial (Euler) coordinates and by X^α ($\alpha = 1, 2, 3$) the referential (Lagrangian) coordinates. Hereafter, the Latin indices are associated to the Euler coordinates, whereas the Greek ones to the Lagrangian³. The deformation gradient⁴ (or distortion tensor) is defined by the following components, called as distortions:

$$x_\alpha^i = \partial_\alpha x^i.$$

The inversed deformation gradient (or inversed distortion)⁵ is determined accord-

³In the early papers on rational mechanics (see, for example, [12]) the Latin capital letters K, L, M have been used in place of Greek. However, in the later work [13] the letters of the Greek alphabet had been employed.

⁴More precisely, the transposed deformation gradient \mathbf{F}^T .

⁵In contemporary continuum mechanics, along with the direct description $X^\alpha \rightarrow x^i$, the “inversed motion description” $x^i \rightarrow X^\alpha$ [14] is also searchable in literature. It seems that the “inversed description” was introduced into mechanics by G. Piola.

Table. Covariant constant tensors and pseudotensors in N -dimensional space

Standard terminology	Root notation	Weight	Transformation to absolute tensor
fundamental orienting pseudoscalar	e	+1	${}^{[+1]}e = e$
fundamental orienting pseudoscalar	$\frac{1}{e}$	-1	${}^{[-1]}e_{-1} = \frac{1}{e}$
sign of fundamental orienting pseudoscalar	$\text{sgn } e$	-	
metric tensor	g_{ij}	0	
fundamental tensor	g^{ij}	0	
metric tensor determinant	g	+2	${}^{[+2]}g = e^2$
sign of metric tensor determinant	$\text{sgn } g$	0	
generalized Kronecker deltas ($M \leq N$)	$\delta_{i_1 i_2 \dots i_M}^{j_1 j_2 \dots j_M}$	0	
alternating pseudotensors	$\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_M}$	+1	$e^{i_1 i_2 \dots i_N} = \frac{1}{e} \epsilon^{[+1]i_1 i_2 \dots i_N}$
alternating pseudotensors	$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_M}$	-1	$e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e \epsilon^{[-1]i_1 i_2 \dots i_N}$
alternating tensor	$e^{i_1 i_2 \dots i_N}$	0	
alternating tensor	$e_{i_1 i_2 \dots i_N}$	0	
parallel covariant vector field	λ_i	0	

ing to the equation

$$X_i^{\cdot\alpha} = \partial_i X^\alpha.$$

The following equations are clearly valid

$$x_\alpha^{\cdot i} X_j^{\cdot\alpha} = \delta_j^i, \quad X_i^{\cdot\beta} x_\alpha^{\cdot i} = \delta_\alpha^\beta.$$

Following the rational mechanics scheme, distortion $x_\alpha^{\cdot i}$ and inversed distortion $X_j^{\cdot\alpha}$ are equivalently redefined by the relations

$$x_\alpha^{\cdot i} = \nabla_\alpha^{\text{total}} x^i, \quad X_i^{\cdot\alpha} = \nabla_i^{\text{total}} X^\alpha,$$

where the differential operators $\nabla_\alpha^{\text{total}}$ and ∇_i^{total} denote the total covariant derivatives as of rational mechanics script found in [12, p. 810].

In the book by V. L. Berdichevsky [11, p. 65] it is stated that the distortion and inversed distortion are covariant constant tensors. This statement is not generally true. Following the rational mechanics scenario [12, p. 244, equation (16.5)], we introduce the positive absolute scalar J :

$$J = \frac{e}{\mathcal{V}_e} > 0, \quad (5)$$

wherein the fundamental orienting pseudoscalar e is equalled to the triple product of the convected basis vectors, \mathcal{V}_e is equalled to the triple products of the referential basis vectors. Basis vectors in the referential state are $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$. Following the deformation they are transformed into $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Therefore the fundamental orienting pseudoscalars in eq. (5) are determined as:

$$e = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3, \quad \mathcal{V}_e = (\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) \cdot \mathcal{V}_3.$$

Obviously, $J = +e$ in the case when the referential basis is right-handed Cartesian, and $J = -e$ if the referential basis is left-handed.

The Jacobian defined by deformation $\Delta = \det(\partial_\alpha x^i)$ will satisfy the Jacobi identity [12, p. 246, equation (17.8)]

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_\alpha^i} = X_i^{\cdot\alpha} \Delta.$$

By using the latter equation, one can obtain the Euler–Piola–Jacobi equations [12, p. 246, equation (17.9)]:

$$\partial_k^{\text{total}}(\Delta^{-1} x_\alpha^{\cdot k}) = 0, \quad \partial_\alpha^{\text{total}}(\Delta X_k^\alpha) = 0. \quad (6)$$

The tensor reformulation of equations (6) read

$$\nabla_l^{\text{total}}(J^{-1} x_\alpha^{\cdot l}) = 0, \quad \nabla_\alpha^{\text{total}}(J X_k^\alpha) = 0. \quad (7)$$

The equations (7) are valid in any coordinate system, including the case when the Euler and Lagrangian coordinates are Cartesian. In this case, the following relation holds:

$$J = \Delta. \quad (8)$$

Taking account of (8) equation (7) can be derived from (6), as in Cartesian coordinates, we have

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}^{\text{total}}(JX_k^{\cdot\alpha}) &= \partial_{\alpha}^{\text{expl}}(\Delta X_k^{\cdot\alpha}) + \partial_s^{\text{expl}}(\Delta X_k^{\cdot\alpha})(\partial_{\alpha}x^s) = \partial_{\alpha}^{\text{total}}(\Delta X_k^{\cdot\alpha}), \\ \nabla_k^{\text{total}}(J^{-1}x_{\alpha}^{\cdot k}) &= \partial_{\beta}^{\text{expl}}(\Delta^{-1}x_{\alpha}^{\cdot k})(\partial_k X^{\beta}) + \partial_k^{\text{expl}}(\Delta^{-1}x_{\alpha}^{\cdot k}) = \partial_k^{\text{total}}(\Delta^{-1}x_{\alpha}^{\cdot k}), \end{aligned}$$

and by applying equations (6) we can obtain the following equations:

$$\nabla_i^{\text{total}}(J^{-1}x_{\alpha}^{\cdot i}) = 0, \quad \nabla_{\alpha}^{\text{total}}(JX_i^{\cdot\alpha}) = 0.$$

Besides the equations (7) no other statements regarding the covariant constancy of distortion and inversed distortion tensors are known in nonlinear continuum mechanics.

Results and conclusions. Covariant constancy of absolute tensors and pseudotensors of arbitrary valence and weight has been discussed to correct erroneous statements found in the literature on nonlinear continuum mechanics.

- 1) The notions and requisite equations from algebra and analysis of pseudotensors have been presented for clear understanding and reference framework.
- 2) The concept of covariant constancy of tensors and pseudotensors has been proposed and discussed.
- 3) Examples of covariant constant tensors and pseudotensors interesting for micropolar elasticity have been given in Table for convenience. In particular, the notion of fundamental orienting pseudoscalar that satisfies the condition of covariant constancy has been introduced and applied to the problems of concern.
- 4) A general algorithm for constructing tensors and pseudotensors with constant components which simultaneously are covariant constant has been recalled and discussed.
- 5) The distortion and inversed distortion tensors, which are fundamental for nonlinear mechanics of solids, have been shown not actually covariant constant, contrary to the erroneous statements of the covariant constancy of distortion and inversed distortion discovered after a literary search.

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment (state registration no. AAAA-A20-120011690132-4) and with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00666).

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable improvements, suggestions and comments.

References

1. Rozenfel'd B. A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966, 648 pp. (In Russian)

2. Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Groningen, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
3. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, Dover Books on Advanced Mathematics, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, ix+324 pp.
4. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, xii+277 pp.
5. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York, Dover Publ., 1957, xii+318 pp.
6. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Applied Mathematics Series. New York, John Wiley & Sons, 1964, xii+361 pp.
7. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
8. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
9. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
10. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.
11. Berdichevsky V. L. *Variational Principles of Continuum Mechanics*. Moscow, Nauka, 1983, 448 pp. (In Russian)
12. Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, III/1; eds. S. Flügge. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–858. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
13. Truesdell C., Noll W. *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Springer, 2004, xxix+602 pp.
14. Maugin G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 3. London, Chapman & Hall, 1993, xii+276 pp.

УДК 539.3

О ковариантном непостоянстве тензоров дисторсии и обратной дисторсии

Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин, Т. К. Нестеров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Обсуждаются вопросы ковариантного постоянства тензоров и псевдотензоров произвольной валентности и веса в евклидовом пространстве. Приводятся минимально необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Выясняются условия ковариантного постоянства псевдотензоров. Рассматриваются примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров из многомерной геометрии. Речь, в частности, идет о фундаментальном ориентирующем псевдоскаляре, целые степени которого удовлетворяют условию ковариантного постоянства. В работе продемонстрировано, что тензоры дисторсии и обратной дисторсии на самом деле не являются ковариантно постоянными, в противовес указаниям на ковариантное постоянство дисторсии и обратной дисторсии, которые встречаются в литературных источниках по нелинейной механике континуума.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, дисторсия, обратная дисторсия, ковариантно постоянные тензоры, параллельное векторное поле.

Получение: 27 октября 2021 г. / Исправление: 28 декабря 2021 г. /

Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 21 февраля 2022 г.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Radayev Y. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 36–47. EDN: EWDQGG. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>.

Сведения об авторах

Юрий Николаевич Радаев  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru

Евгений Валерьевич Мурашкин  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@google.com

Тимофей Константинович Нестеров  <https://orcid.org/0000-0003-0844-0484>

аспирант; программист; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: nesterovtim4@gmail.com

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА–А20–120011690132–4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–01–00666).

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.



УДК 539.421

Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования

В. Э. Вильдеман, А. И. Мугатаров

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29.

Аннотация

Обеспечение прочностной надежности и безопасности конструкций требует изучения вопросов возникновения и равновесного роста трещин. Существует аналогия между подходами механики распространения трещин и феноменологической механики разрушения, строящейся на основе использования полных диаграмм деформирования. Для описания процессов деформирования тел с трещинами целесообразно использовать разработанные ранее модели механики закритического деформирования, позволяющие описывать равновесные процессы накопления повреждений, сопровождающиеся разупрочнением. В работе на примере численного, с использованием когезионных элементов, моделирования межслойного разрушения композитного образца продемонстрирована реализация полной диаграммы деформирования материала вблизи вершины трещины. Построены расчетные диаграммы нагружения, на которых отображены точки появления зоны закритического деформирования и начала роста трещины. Выявлена связь между модулем спада материала и максимальными значениями расчетной нагрузки, раскрытия и длины пророщенной трещины. Отмечено влияние жесткости нагружающей системы. Сделан вывод о целесообразности рассмотрения задач моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций с применением когезионных элементов с позиций механики закритического деформирования.

Ключевые слова: закритическое деформирование, когезионный элемент, композит, равновесный рост трещины.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Вильдеман В. Э., Мугатаров А. И. Моделирование процесса равновесного роста трещины в композитном образце с позиций механики закритического деформирования // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 48–61. EDN: DWDLIJ. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1886>.

Сведения об авторах

Валерий Эрвинович Вильдеман  <https://orcid.org/0000-0002-6240-4022>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения; e-mail: wildemann@pstu.ru

Артур Ильдарович Мугатаров   <https://orcid.org/0000-0002-2229-8181>

магистрант; каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения; e-mail: cem_mugatarov@mail.ru

Получение: 30 сентября 2021 г. / Исправление: 12 января 2022 г. /
 Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Введение. Прогнозирование процессов разрушения, оценка живучести и безопасности конструкций требуют изучения вопросов возникновения и развития трещин и трещиноподобных дефектов в процессе нагружения или эксплуатации. Особого внимания заслуживает анализ условий, при которых реализуется равновесное развитие и распространение трещин. Связь вида ниспадающих участков диаграммы нагружения с микромеханизмами и стадиями разрушения предопределяет наличие определенной аналогии и общности между подходами механики распространения трещин и феноменологической механики разрушения, строящейся на основе использования полных диаграмм деформирования. Представляется целесообразным и перспективным применение для моделирования равновесного роста трещин в твердых телах основных положений механики закритического деформирования [1, 2], основанной на концепции рассмотрения разрушения как результата потери устойчивости сопровождаемого развитием дефектов процесса закритической деформации. Оценка устойчивости этого процесса осуществляется с учетом жесткостных свойств нагружающих систем.

С точки зрения рассмотрения отмеченной аналогии можно обратить внимание на следующую особенность. При анализе тел с трещинами рассматриваются докритические диаграммы разрушения, представляющие собой зависимости между средним растягивающим напряжением в неповрежденном сечении образца от длины трещины при различных начальных длинах последней [3]. Геометрическое место критических (соответствующих динамическому росту трещин) точек на этих кривых называется критической диаграммой разрушения. При испытаниях гладких образцов критическая точка соответствует пределу прочности. Поведение материала может быть описано без явного рассмотрения трещин и разрывов с использованием ниспадающей ветви диаграммы деформирования. Она также представляет собой критическую диаграмму, поскольку является геометрическим местом критических точек (соответствующих достижению предела прочности) для образцов с различной степенью поврежденности, получаемых в результате равновесного деформирования до той или иной степени. Поведение тел с трещинами в условиях снижения нагрузки при увеличивающихся перемещениях (величин раскрытия или длины трещины) может рассматриваться по аналогии с закономерностями закритического поведения образцов материалов в испытаниях. Так, в работе [4] приведена диаграмма кинематического нагружения образца с трещиной в координатах «раскрытие трещины – нагрузка»; зависимость аналогична полной диаграмме деформирования материала.

Для определения условий разрушения твердых тел крайне важными являются представления о физических процессах в окрестности вершины трещины и соответствующие модели механического поведения. С. Д. Волковым высказана идея, что характер распределения напряжений у вершины трещины в принципе повторяет ниспадающий участок кривой на полной диаграмме деформирования материала, полученной при испытании гладкого образца. В работе [5] приведена эпюра напряжений у вершины трещины с учетом за-

критической стадии деформирования материала. Полные диаграммы деформирования, содержащие ниспадающую ветвь, обнаружены экспериментально и отражают закон изменения деформационных характеристик материала (деформационного разупрочнения) при накоплении повреждений. В связи с этим естественным является предположение, что подобный характер деформирования воспроизводится в зоне концентрации напряжений у вершины трещины. Проблема сингулярности при этом решается автоматически вследствие убывания до нуля сопротивления материала в вершине трещины, где деформация максимальна и равна предельной для полностью равновесного состояния. Жесткость нагружающей системы для элемента материала у вершины трещины может быть конечной и достаточной для устойчивой за критической деформации в этой зоне, чем и объясняется возможность существования равновесных трещин. Характер развития трещины (устойчивый или неустойчивый) определяется устойчивостью процесса за критического деформирования. Предложен целый ряд моделей, определяющих наличие некоторой зоны сцепления или зоны с ослабленными связями — зоны предразрушения. К числу наиболее известных относятся модели Дж. Р. Ирвина, Г. И. Баренблатта, Дж. Р. Райса, Д. С. Дагдейла, М. Я. Леонова и В. В. Панасюка, М. П. Внука и др. [6–15]. Кроме С. Д. Волкова, рядом других авторов была отмечена целесообразность использования моделей разупрочняющихся сред при описании процессов деформирования в области концентраторов напряжений [16–20]. Авторы считают, что очевидна корреляция между полной диаграммой деформирования материала и характером распределения напряжений вблизи вершины трещины, качественно они перекликаются.

Показательно, что в настоящее время при численном моделировании развития трещин в твердых телах распространена «модель когезионной зоны». В ней предполагается наличие у вершины трещины зоны процесса разрушения с ослабленными связями, для описания поведения которой используются диаграммы с ниспадающим участком [21–29]. В работах [21–22] описаны основы когезионной модели трещин, рассмотрены вопросы смешанного разрушения. Стоит отметить, что данная модель является удобной для решения задач, в которых направление развития трещины заранее известно. Так, в работе [23] рассмотрены задачи разрушения балок с надрезами при различных вариантах нагружения. В статье [24] исследована задача деформирования неоднородной слоистой балки при различных свойствах адгезионного слоя. В работе [25] проведено численное и экспериментальное исследование поведения клеевого соединения дерева со стеклом. В работе [26] исследовано влияние толщины клеевого соединения на процесс деформирования склеенных металлических конструкций. В статье [27] авторами предложена методика решения задач разрушения конструкций с клеевыми соединениями, позволяющая сочетать процессы когезионного и адгезионного разрушения. В работе [28] исследовано влияние закона деформирования материала клеевого соединения на процесс деформирования балки, приклеенной к жесткому основанию, произведена оценка размера зоны сцепления. В работе [29] решены задачи изгиба балок с продольным клеевым соединением, а также растяжения балки с клеевым соединением под углом. Во всех работах модель когезионной зоны косвенно воспроизводит проявление за критического деформирования у вершины трещины.

В качестве удобного для анализа примера в данной работе рассмотрена задача деформирования композиционного образца на разрыв между слоями в рамках модели когезионной зоны. Решение получено в прикладном пакете ABAQUS CAE.

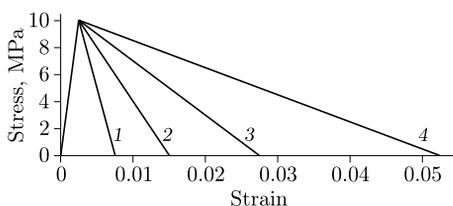
1. Постановка задачи. Для исследования влияния механического поведения на закритической стадии деформирования материала на процесс роста трещины рассмотрим модельную статическую задачу разрушения двухконсольной балки из композиционного материала. Данная задача аналогична методу расчета значения межслойной трещиностойкости полимерных композитов по ASTM D5528-01. В плоском деформированном состоянии рассматривается образец длиной 100 мм, состоящий из двух частей шириной по 2 мм, скрепленных через тонкий (0.001 мм) укороченный адгезионный слой. Отсутствие части адгезионного слоя задает начальную трещину (длина 25 мм). Композиционный материал — ортотропный, его упругие характеристики приведены в таблице. Материал адгезионного слоя является изотропным упруго-хрупким с линейным разупрочнением: модуль Юнга $E = 4000$ МПа; предел прочности на растяжение $\sigma_B = 10$ МПа; модуль спада D (взятый с противоположным знаком тангенс угла наклона касательной на закритической стадии деформирования) изменяется в диапазоне от 100 МПа до 4000 МПа. Высокое значение модуля спада характеризует склонность к хрупкому разрушению, низкое — к вязкому разрушению и равновесному накоплению повреждений. Некоторые диаграммы деформирования материала адгезионного слоя приведены на рис. 1. Удельные работы разрушения (площади под диаграммой деформирования), соответствующие работе, затраченной на разрушение единицы объема материала, могут быть рассчитаны через модуль спада по формуле

$$S_f = \frac{\sigma_B^2}{2} \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{D} \right).$$

Между частями конструкции заданы связанные контактные условия, между композитными частями прописаны контактные условия типа «поверхность–поверхность» во избежание взаимного проникновения друг в друга. Для упругих частей использована сетка из 4-узловых четырехугольников, для адгезионного слоя использован одномерный когезионный элемент. Линейный размер всех элементов — 0.1 мм. Граничные условия: шарнирно закреплена точка на расстоянии 10 мм от левого края нижней поверхности;

Рис. 1. Диаграммы деформирования материала адгезионного слоя, модуль спада: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа

[Figure 1. Adhesive layer material's deformation diagrams, softening modulus: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа]



Упругие свойства композита [Composite material's elastic properties]

E_{11} , GPa	E_{22} , GPa	E_{33} , GPa	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12} , GPa	G_{13} , GPa	G_{23} , GPa
56	17	56	0.30	0.04	0.30	3	17	3

к аналогичной точке на верхней поверхности ступенчато прикладывается перемещение вдоль оси OY с фиксированным шагом 0.01 мм, перемещение вдоль оси OX отсутствует. Остальные поверхности являются свободными, массовые силы не учитываются. Начало координат поместим в вершину начальной трещины. Решение задачи прекращается, когда теряется сходимость итерационного процесса.

2. Результаты расчета и их анализ. Анализ поведения образца удобно проводить по эпоре нормальных напряжений σ_{22} в адгезионном слое, пример которой с соответствующим полем напряжений изображен на рис. 2. На эпоре можно выделить несколько характерных точек: 1 — точка, где полностью реализована закритическая стадия деформирования материала; 2 — точка, соответствующая частичной реализации закритической стадии; 3 — точка, соответствующая пределу прочности материала; 4 — точка в упругой области растяжения; 5 — точка в недеформированном состоянии, являющаяся переходной между областью растяжения и областью сжатия; 6 — точка в упругой области сжатия. Из эпоры видно, каким образом реализуется полная диаграмма деформирования, видны области (слева направо): с разрушенным материалом, реализации закритической стадии, упругого растяжения, упругого сжатия.

На рис. 3 приведены наложенные друг на друга эпоры нормальных напряжений в адгезионном слое в различные моменты после начала разрушения и соответствующие им изображения деформированных образцов. Из эпор видно, что по мере прорастания трещины область растяжения практически не изменяется, область сжатия увеличивается (снижается наименьшее значение напряжения).

По известному в различные моменты напряженно-деформированному состоянию получаем расчетную диаграмму нагружения конструкции в координатах «раскрытие трещины – нагрузка». Раскрытие трещины определяем

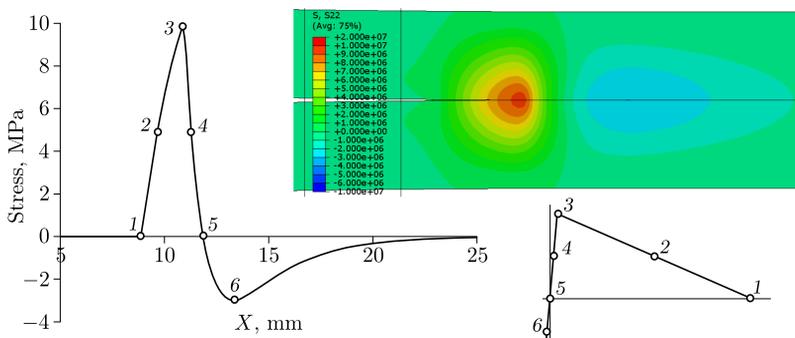


Рис. 2. Поле и эпора напряжений σ_{22} с соответствующими точками на диаграмме деформирования материала

[Figure 2. Stresses σ_{22} field and diagram with corresponding points on the material deformation diagram: 1 — the point where the supercritical stage of material deformation is fully realized; 2 — the point corresponding to the partial realization of the supercritical stage; 3 — the point corresponding to the ultimate strength of the material; 4 — the point in the elastic region of tension; 5 — the point in the undeformed state, which is a transition between the area of tension and the area of compression; 6 — the point in the elastic area of compression]

вдоль оси OY начала координат (в вершине заданной трещины). Внешнюю нагрузку получаем путем вычисления равнодействующей нормальных напряжений в адгезионном слое. На диаграмме нагружения, приведенной на рис. 4, точками обозначены: 1 — момент, где происходит образование зоны закритического деформирования материала; 2 — момент, где происходит первое удаление конечного элемента; 3–5 — различные состояния по мере равновесного роста трещины. Из рисунка видно, что внешняя нагрузка способна значительно увеличиваться после начала реализации закритической стадии деформирования, после начала роста трещины происходит монотонное снижение нагрузки. Полученные диаграммы нагружения для различных модулей спада изображены на рис. 5.

Зависимости максимальной нагрузки, выдерживаемой конструкцией, максимальных величин раскрытия и длины трещины от величины модуля спада и от удельной энергии разрушения представлены на рис. 6. Рост нагрузки при снижении величины модуля спада объясняется большим размером участка закритического деформирования (при равной деформации несущая способность увеличивается). Склонность к росту максимальной величины раскрытия трещины при уменьшении модуля спада связана с увеличением податли-

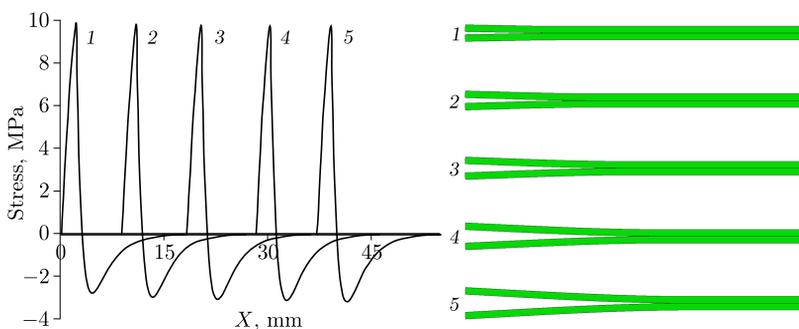


Рис. 3. Эпюры напряжений σ_{22} и изображения образца по мере роста трещины

[Figure 3. Stresses σ_{22} diagram and specimen images as the crack growth]

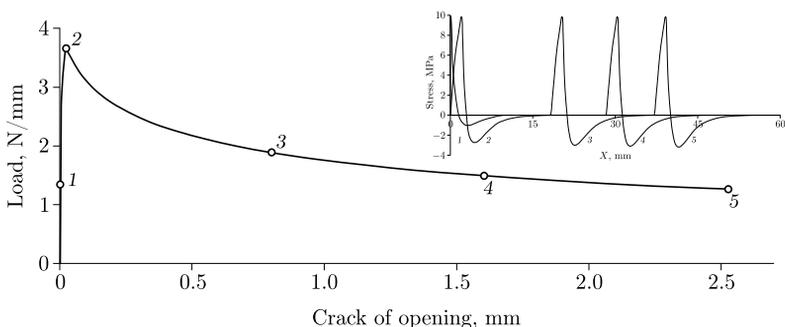


Рис. 4. Расчетная диаграмма нагружения и эпюры напряжений в различных состояниях

[Figure 4. Calculated loading diagram and stress diagrams in various states: 1 — the moment where the formation of a zone of supercritical deformation of the material occurs; 2 — the moment where the first removal of the finite element occurs; 3–5 — the different states as the crack grows in equilibrium]

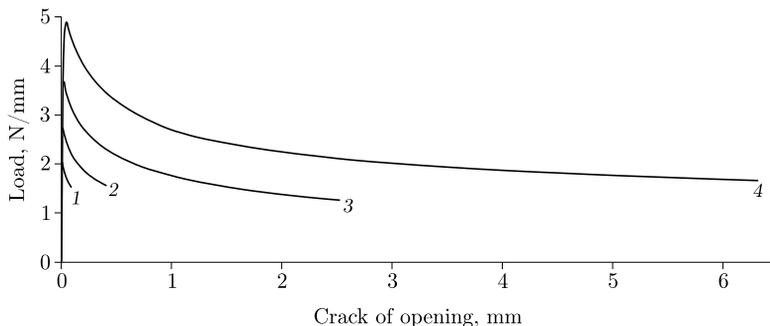


Рис. 5. Расчетные диаграммы нагружения, модуль спада: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа

[Figure 5. Calculated loading diagrams, softening modulus: 1 — 1800 МПа, 2 — 800 МПа, 3 — 400 МПа, 4 — 200 МПа]

вости системы. Из зависимости видно, что, как правило, в некотором диапазоне существует обратная пропорциональность между максимальной длиной трещины и модулем спада, т.е. чем более податливым является адгезионный слой, тем больше длина пророщенной трещины. После достижения некоторого значения модуля спада максимальная длина трещины изменяется слабо (достигается некоторое предельное для конструкции состояние). Стоит отметить, что зависимости, изображенные на рис. 6, с–f, не являются монотонными. Это может быть связано как с влиянием размера конечно-элементной сетки и величины шага нагружения [30], так и с отсутствием дополнительного условия устойчивости процесса деформирования, построенного в связи со свойствами нагружающей системы [1]. Данный вопрос требует отдельного рассмотрения.

Для исследования влияния жесткости нагружающей системы на процесс деформирования данного образца проведен расчет аналогичной задачи с условием, что перемещение передается через упругий элемент с заданным коэффициентом жесткости K . Рассмотрен случай, когда модуль спада $D = 200$ МПа. Установлено, что при $K = 3$ Н/м расчет завершается в точке с максимальной нагрузкой (соответствует случаю «мягкого» нагружения), при $K = 4$ Н/м расчет проходит полностью (как в случае «жесткого» нагружения). Это связано с тем, что наибольшая скорость спада нагрузки соответствует началу разрушения, дальше жесткость нагружающей системы оказывается достаточной для продолжения процесса равновесного роста трещины.

Заключение. Для демонстрации аналогии между подходами механики трещин и механики закритического деформирования, а также целесообразности использования последней для описания равновесного роста трещин в твердых телах рассмотрена задача деформирования образца на разрыв между слоями в рамках когезионной модели трещин. Рассмотрена двухзвенная аппроксимация полной диаграммы деформирования материала при различных значениях модуля спада, соответствующих определенным значениям удельной энергии разрушения. Построены эпюры нормальных напряжений в адгезионном слое: показано, каким образом реализуется полная диаграмма деформирования материала вблизи вершины трещины. Изучена эволюция процесса деформирования. Построены расчетные диаграммы нагруже-

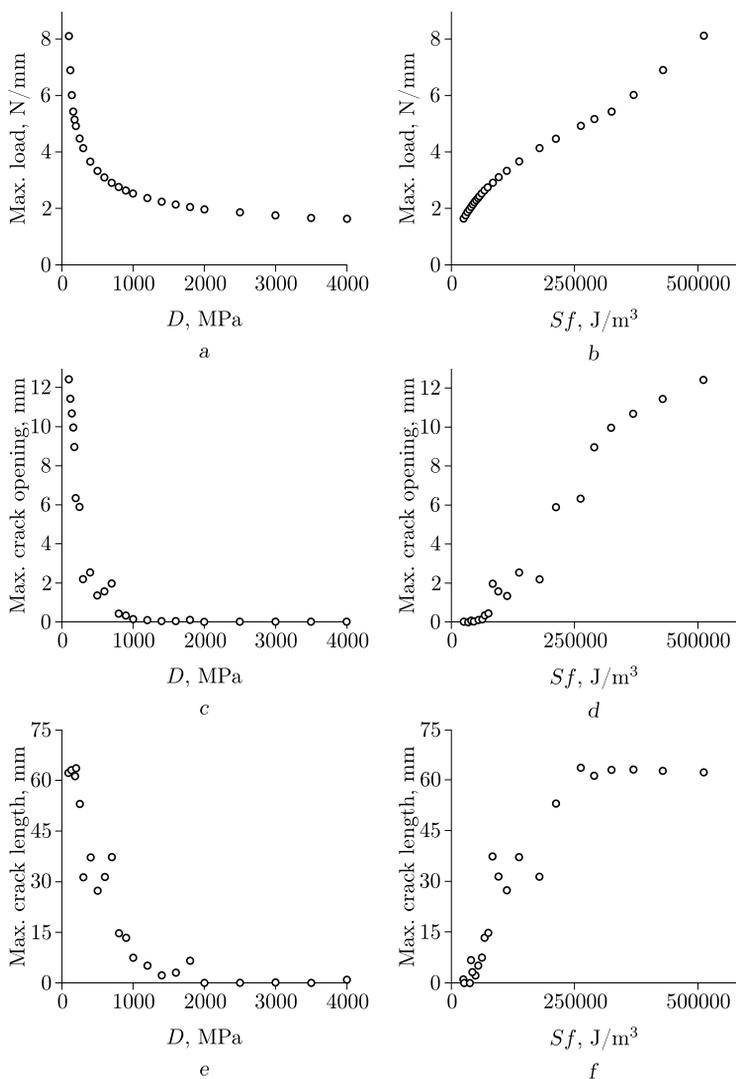


Рис. 6. Зависимости максимальной нагрузки от модуля спада (а) и удельной энергии разрушения (b); максимальной величины раскрытия трещины от модуля спада (c) и удельной энергии разрушения (d); максимальной длины трещины от модуля спада (e) и удельной энергии разрушения (f)

[Figure 6. Dependences of the maximum load on softening modulus (a) and specific fracture energy (b); the maximum crack opening on softening modulus (c) and specific fracture energy (d); the maximum crack length on softening modulus (e) and specific fracture energy (f)]

ния, показаны точки появления зоны закритического деформирования и начала разрушения. Отмечено, что происходит существенное увеличение расчетной нагрузки по мере развития зоны закритического деформирования до начала разрушения. Изучено влияние величины модуля спада на процесс деформирования: с уменьшением модуля спада происходит увеличение выдерживаемой нагрузки и прикладываемых перемещений. Выявлена зависимость максимальной длины пророщенной трещины от модуля спада: данная зависимость является обратно пропорциональной в некотором диапазоне и имеет предел. Продемонстрировано, что процесс равновесного роста трещины возможен только при достаточном значении жесткости нагружающей системы. Можно сделать вывод о целесообразности рассмотрения задач моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций с применением когезионных элементов с позиций механики закритического деформирования.

Конкурирующие интересы. Авторы конкурирующих интересов не имеют.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование процесса деформирования композитного образца на разрыв между слоёв в рамках когезионной модели трещин проводилось в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ ФСНМ-2020-0027).

Благодарность. Авторы выражают благодарность профессорам С. В. Смирнову, В. П. Радченко, Н. Г. Чаусову за плодотворные обсуждения предмета исследования.

Библиографический список

1. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов*. М.: Наука, 1997. 288 с.
2. Вильдеман В. Э. О решениях упругопластических задач с граничными условиями контактного типа для тел с зонами разупрочнения // *ПММ*, 1998. Т. 62, № 2. С. 304–312.
3. Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А. *Основы экспериментальной механики разрушения*. М.: Моск. ун-т, 1989. 140 с.
4. Бажуков П. С., Вильдеман В. Э., Ильиных А. В., Третьяков М. П. Влияние жесткости нагружающей системы на равновесный рост трещин при квазистатическом нагружении // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2013. № 2. С. 7–20.
5. Волков С. Д., Ставров В. П. *Статистическая механика композитных материалов*. Минск: БГУ, 1978. 206 с.
6. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины // *ПММ*, 1959. Т. 23, № 3. С. 434–444.
7. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture / *Fracture: An Advanced Treatise*. vol. 2, Mathematical Fundamentals (ed. H. Liebowitz). New York: Academic Press, 1968. pp. 191–311. http://esag.harvard.edu/rice/018_Rice_MathAnalMechFract_68.pdf.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*, 1960. vol. 8, no. 2. pp. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).

9. Панасюк В. В. *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*. Киев: Наук. думка, 1968. 246 с.
10. Леонов М. Я. Элементы теории хрупкого разрушения // *ПМТФ*, 1961. №3. С. 85–92.
11. Внук М. П. Модель когезионной зоны с учетом параметра трехосности // *Физ. мезомех.*, 2001. Т. 4, №4. С. 9–19.
12. Wecharatana M., Shah S. P. Predictions of nonlinear fracture process zone in concrete // *J. Eng. Mech.*, 1983. vol. 109, no. 3. pp. 1231–1246. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1983\)109:5\(1231\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:5(1231)).
13. Bažant Z. P., Oh B. H. Crack band theory for fracture of concrete // *Mat. Constr.*, 1983. vol. 16, no. 3. pp. 155–177. <https://doi.org/10.1007/BF02486267>.
14. Ingraffea A. R., Gerstle W. H. Non-linear fracture models for discrete crack propagation / *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites* / NATO ASI Series, 94. Dordrecht: Springer, 1985. pp. 247–285. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5121-1_9.
15. Shlyannikov V. N., Martínez Pañeda E., Tumanov A. V., Tartygasheva A. M. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // *Int. J. Sol. Struct.*, 2021. vol. 208–209. pp. 63–82. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
16. Волков С. Д., Дубровина Г. И., Соковнин Ю. П. О краевой задаче механики разрушения // *Пробл. прочности*, 1978. №1. С. 3–7.
17. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // *Изв. РАН. МТТ*, 2001. №1. С. 94–112.
18. Линьков А. М. Потеря устойчивости при разупрочнении / *Исследования по упругости и пластичности*. Т. 14, Проблемы механики деформируемого твердого тела. Л.: ЛГУ, 1982. С. 41–46.
19. Чаусов Н. Г., Богданович А. З. Моделирование кинетики деформирования материала в зоне предразрушения // *Пробл. прочности*, 2003. №2. С. 54–65.
20. Радченко В. П., Горбунов С. В. Метод решения краевой упругопластической задачи о растяжении полосы с концентраторами напряжений с учетом локальных областей пластического разупрочнения материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. Т. 4(37). С. 98–110. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1366>.
21. Schwalbe K.-H., Scheider I., Cornec A. *Guidelines for Applying Cohesive Models to the Damage Behaviour of Engineering Materials and Structures*. Heidelberg: Springer, 2003. xii+89 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-29494-5>.
22. Carpinteri A., Cornetti P., Barpi F., Valente S. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory // *Eng. Fract. Mech.*, 2003. vol. 70, no. 14. pp. 1809–1839. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00126-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00126-7).
23. de Borst R. Numerical aspects of cohesive-zone models // *Eng. Fract. Mech.*, 2003. vol. 70, no. 14. pp. 1743–1757. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00122-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00122-X).
24. Khan M. A., Silberschmidt V. V., El-Rimawi J. Controlled failure warning and mitigation of prematurely failing beam through adhesive // *Compos. Struct.*, 2017. vol. 161. pp. 119–131. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.049>.
25. Piculin S., Nicklisch F., Brank B. Numerical and experimental tests on adhesive bond behaviour in timber-glass walls // *Int. J. Adh. Adh.*, 2016. vol. 70. pp. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.06.012>.
26. Xu W., Yu H., Tao C. Damage and stress evolution in the bondlines of metallic adhesively bonded joints accompanied by bondline thickness effect // *Int. J. Adh. Adh.*, 2015. vol. 59. pp. 86–97. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.02.007>.
27. Belnoue J. P. H., Hallett S. R. Cohesive/adhesive failure interaction in ductile adhesive joints. Part I: A smeared-crack model for cohesive failure // *Int. J. Adh. Adh.*, 2016. vol. 68. pp. 359–368. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.03.009>.

28. Valoroso N., de Barros S. Adhesive joint computations using cohesive zones // *Appl. Adhes. Sci.*, 2013. vol. 1, 8. <https://doi.org/10.1186/2196-4351-1-8>.
29. Silva D. F. O., Campilho R. D. S. G., Silva F. J. G, Carvalho U. T. F. Application a direct/cohesive zone method for the evaluation of scarf adhesive joints // *Appl. Adhes. Sci.*, 2018. vol. 6, no. 1, 13. <https://doi.org/10.1186/s40563-018-0115-2>.
30. Feklistova E. V., Tretyakov M. P., Wildemann V. E. Numerical implementation issues of the deformation and destruction process of bodies with stress concentrators // *AIP Conf. Proc.*, 2021. vol. 2371, 050002. <https://doi.org/10.1063/5.0059553>.

MSC: 74R20

Modeling the process of equilibrium crack growth in a composite specimen from the standpoints of the postcritical deformation mechanics

*V. E. Wildemann, A. I. Mugatarov*Perm National Research Polytechnic University,
29, Komsomolsky prospect, Perm, 614990, Russian Federation.

Abstract

Ensuring the strength and safety of structures requires studying the issues of crack initiation and equilibrium growth. An analogy between the approaches of phenomenological fracture mechanics, which is based on the complete deformation diagrams usage, and crack propagation mechanics is noted. The applying of previously developed postcritical deformation mechanics models, which describes accompanied by softening equilibrium damage accumulation processes, is advisable. On the example of the numerical, with cohesive elements using, simulation of composite specimen interlayer fracture, the realization of the material deformation complete diagram near the crack tip is demonstrated. The calculated loading diagrams are constructed, the points of the postcritical deformation zone initiation and the beginning of crack growth are shown. Relations between softening modulus value and maximum values of load, crack opening and length are revealed. The influence of the loading system rigidity is noted. It is concluded that consideration of the constructions deformation and fracture processes modeling problems using cohesive elements from the postcritical mechanics deformation standpoints is expedient.

Keywords: postcritical deformation, cohesive element, composite, equilibrium crack growth.

Received: 30th September, 2021 / Revised: 12th January, 2022 /Accepted: 24th January, 2022 / First online: 31st March, 2022

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Wildemann V. E., Mugatarov A. I. Modeling the process of equilibrium crack growth in a composite specimen from the standpoints of the postcritical deformation mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 48–61. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1886> (In Russian).

Authors' Details:

Valeriy E. Wildemann  <https://orcid.org/0000-0002-6240-4022>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Experimental Mechanics and Structural Materials Science; e-mail: wildemann@pstu.ru*Artur I. Mugatarov*   <https://orcid.org/0000-0002-2229-8181>Master's Student; Dept. of Experimental Mechanics and Structural Materials Science; e-mail: cem_mugatarov@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. Investigation of the composite specimen for rupture between layers deformation process within the framework of a cohesive model of cracks was conducted within the State Assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (no. FSNM–2020–0027).

Acknowledgments. The authors are grateful to professors S. V. Smirnov, V. P. Radchenko, N. G. Chaouf for productive discussions of the subject of research.

References

1. Wildemann V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Inelastic Deformation and Fracture of Composite Materials]. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian)
2. Wildemann V. E. On the solutions of elastic-plastic problems with contact-type boundary conditions for solids with loss-of-strength zones, *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 281–288. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(98\)00036-7](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00036-7).
3. Kershtein I. M., Klyushnikov V. D., Lomakin E. V., Shesterikov S. A. *Osnovy eksperimental'noi mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Experimental Fracture Mechanics]. Moscow, Moscow Univ., 1989, 140 pp. (In Russian)
4. Bazhukov P. S., Vildeman V. E., Ilinykh A. V., Tretyakov M. P. Effect of stiffness loading system on the equilibrium of the crack growth under quasi-static loading, *PNNRU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 2, pp. 7–20.
5. Volkov S. D., Stavrov V. P. *Statisticheskaiia mekhanika kompozitnykh materialov* [Statistical Mechanics of Composite Materials]. Minsk, Belarus State Univ., 1978, 206 pp. (In Russian)
6. Barenblatt G. I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, *J. Appl. Math. Mech.*, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 622–636. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90157-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90157-1).
7. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture, In: *Fracture: An Advanced Treatise*, vol. 2, Mathematical Fundamentals (ed. H. Liebowitz). New York, Academic Press, 1968, pp. 191–311. http://esag.harvard.edu/rice/018_Rice_MathAnalMechFract_68.pdf.
8. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits, *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).
9. Panasyuk V. V. *Predel'noe ravnovesie khрупkikh tel s treshchinami* [Limit Equilibrium of Brittle Bodies with Cracks]. Kiev, Nauk. Dumka, 1968, 246 pp. (In Russian)
10. Leonov M. Ya. Elements of the theory of brittle fracture, *Prikl. Mech. Techn. Fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 1961, no. 3, pp. 85–92 (In Russian).
11. Wnuk M. P. Model of the cohesive zone taking into account the triaxiality parameter, *Phys. Mesomech.*, 2001, vol. 4, no. 4, pp. 9–19 (In Russian).
12. Wecharatana M., Shah S. P. Predictions of nonlinear fracture process zone in concrete, *J. Eng. Mech.*, 1983, vol. 109, no. 3, pp. 1231–1246. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1983\)109:5\(1231\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1983)109:5(1231)).
13. Bažant Z. P., Oh B. H. Crack band theory for fracture of concrete, *Mat. Constr.*, 1983, vol. 16, no. 3, pp. 155–177. <https://doi.org/10.1007/BF02486267>.
14. Ingraffea A. R., Gerstle W. H. Non-linear fracture models for discrete crack propagation, In: *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, NATO ASI Series, 94. Dordrecht, Springer, 1985, pp. 247–285. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5121-1_9.
15. Shlyannikov V. N., Martínez Pañeda E., Tumanov A. V., Tartygasheva A. M. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity, *Int. J. Sol. Struct.*, 2021, vol. 208–209, pp. 63–82. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.

16. Volkov S. D., Dubrovina G. I., Sokovnin Yu. P. The edge problem of fracture mechanics, *Strength of Materials*, 1978, vol. 10, no. 1, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1007/bf01523685>.
17. Goldstein R. V., Perelmuter M. N. An interface crack with bonds between the surfaces, *Mech. Solids*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 77–92.
18. Lin'kov A. M. Loss of stability during softening, In: *Issledovaniya po uprugosti i plastichnosti* [Research on Elasticity and Plasticity], vol. 14, Problems of Solid Mechanics. Leningrad, Leningrad State Univ., 1982, pp. 41–46 (In Russian).
19. Chausov N. G., Bogdanovich A. Z. Modeling of material deformation kinetics in the pre-fracture zone, *Strength of Materials*, 2003, vol. 35, no. 2, pp. 140–148. <https://doi.org/10.1023/A:1023710511523>.
20. Radchenko V. P., Gorbunov S. V. The method of solution of the elastic-plastic boundary value problem of tension of strip with stress raisers with allowance for local domains of softening plasticity of material, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 4(37), pp. 98–110 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1366>.
21. Schwalbe K.-H., Scheider I., Cornec A. *Guidelines for Applying Cohesive Models to the Damage Behaviour of Engineering Materials and Structures*. Heidelberg, Springer, 2003, xii+89 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-29494-5>.
22. Carpinteri A., Cornetti P., Barpi F., Valente S. Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory, *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 14, pp. 1809–1839. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00126-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00126-7).
23. de Borst R. Numerical aspects of cohesive-zone models, *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, no. 14, pp. 1743–1757. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00122-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00122-X).
24. Khan M. A., Silberschmidt V. V., El-Rimawi J. Controlled failure warning and mitigation of prematurely failing beam through adhesive, *Compos. Struct.*, 2017, vol. 161, pp. 119–131. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.11.049>.
25. Piculin S., Nicklisch F., Brank B. Numerical and experimental tests on adhesive bond behaviour in timber-glass walls, *Int. J. Adh. Adh.*, 2016, vol. 70, pp. 204–217. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.06.012>.
26. Xu W., Yu H., Tao C. Damage and stress evolution in the bondlines of metallic adhesively bonded joints accompanied by bondline thickness effect, *Int. J. Adh. Adh.*, 2015, vol. 59, pp. 86–97. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.02.007>.
27. Belnoue J. P. H., Hallett S. R. Cohesive/adhesive failure interaction in ductile adhesive joints. Part I: A smeared-crack model for cohesive failure, *Int. J. Adh. Adh.*, 2016, vol. 68, pp. 359–368. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2016.03.009>.
28. Valoroso N., de Barros S. Adhesive joint computations using cohesive zones, *Appl. Adhes. Sci.*, 2013, vol. 1, 8. <https://doi.org/10.1186/2196-4351-1-8>.
29. Silva D. F. O., Campilho R. D. S. G., Silva F. J. G., Carvalho U. T. F. Application a direct/cohesive zone method for the evaluation of scarf adhesive joints, *Appl. Adhes. Sci.*, 2018, vol. 6, no. 1, 13. <https://doi.org/10.1186/s40563-018-0115-2>.
30. Feklistova E. V., Tretyakov M. P., Wildemann V. E. Numerical implementation issues of the deformation and destruction process of bodies with stress concentrators, *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2371, 050002. <https://doi.org/10.1063/5.0059553>.



УДК 539.3

Моделирование одномерных механо-dиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений

Н. А. Зверев¹, А. В. Земсков^{1,2}, Д. В. Тарлаковский^{1,2}

¹ Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

Аннотация

Рассматривается полярно-симметричная задача механо-dиффузии для ортотропного сплошного многокомпонентного однородного цилиндра, находящегося под действием равномерно распределенных радиальных нестационарных объемных возмущений. В качестве математической модели используется связанная система уравнений упругой диффузии в цилиндрической системе координат, которая учитывает релаксационные диффузионные эффекты, подразумевающие конечные скорости распространения диффузионных процессов.

Решение задачи получено в интегральной форме в виде сверток функций Грина с функциями, задающими объемные возмущения. Для нахождения функций влияния применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение искомого функций влияния в ряды Фурье по специальным функциям Бесселя. Обращение преобразования Лапласа осуществляется аналитически с помощью теории вычетов и таблиц операционного исчисления.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование одномерных механо-dиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 62–78. EDN: [FSTMLU](https://doi.org/10.14498/vsgtu1880). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1880>.

Сведения об авторах

Николай Андреевич Зверев  <https://orcid.org/0000-0002-0813-2863>

аспирант; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин; e-mail: nik.zvereff2010@yandex.ru

Андрей Владимирович Земсков  <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>

доктор физико-математических наук, доцент; профессор; каф. прикладные программные средства и математические методы¹; ведущий научный сотрудник; лаб. динамических испытаний²; e-mail: azemskov1975@mail.ru

Дмитрий Валентинович Тарлаковский  <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. сопротивления материалов, динамики и прочности машин¹; заведующий лабораторией; лаб. динамических испытаний²; e-mail: tdv902@mai.ru

На примере трехкомпонентного материала, в котором две компоненты являлись независимыми, выполнено исследование взаимодействия механического и диффузионного полей в сплошном ортотропном цилиндре.

Ключевые слова: упругая диффузия, интегральное преобразование Лапласа, ряды Фурье, функции Грина, полярно-симметричные задачи, нестационарные задачи, функции Бесселя, сплошной цилиндр.

Получение: 26 августа 2021 г. / Исправление: 26 декабря 2021 г. /
Принятие: 17 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Введение. В работе исследуются явления, обусловленные взаимодействием нестационарных механических и диффузионных полей в сплошных средах. Исследования в этой области были начаты еще в начале 20-го века и носили преимущественно экспериментальный характер. Первые модели, описывающие связанные механодиффузионные процессы, появились уже во второй половине 20-го века. В настоящее время вопрос о взаимодействии полей различной физической природы по-прежнему остается актуальным. Рассматриваются модели, в которых описывается взаимодействие механических, диффузионных, тепловых и электромагнитных полей с учетом конечной скорости распространения диффузионных потоков [1–5].

В плане решения соответствующих начально-краевых задач наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат. При решении нестационарных задач в различных криволинейных системах координат основной проблемой является нахождение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Среди публикаций, посвященных данной проблеме, можно выделить [6–20]. В работах [6–15] рассматриваются одномерные задачи для сплошных и полых цилиндрических тел (а также для полостей в пространстве). Двумерным и осесимметричным задачам посвящены публикации [11, 16–20].

При решении указанных нестационарных и квазистационарных задач использовались как численные методы, основанные на применении методов конечных разностей [16] и конечных элементов [11], так и аналитические методы, основанные на интегральных преобразованиях Лапласа и Ганкеля [6–15, 17–20]. В последнем случае обращение преобразования Лапласа осуществлялось преимущественно методом Дурбина [8, 9, 13, 14] и его модификациями [17, 18], а также с помощью алгоритма Gaver–Stehfast [20] и представления в виде ортогональных полиномов Лежандра [10]. Во всех случаях вычисление интеграла Меллина основано на использовании специальных квадратурных формул. Не вдаваясь в обсуждение достоинств и недостатков данных подходов, отметим только, что такие алгоритмы подходят лишь для определенного класса функций. При этом изображения, получающиеся при решении конкретных задач, являются настолько громоздкими, что практически проверить возможность применения того или иного метода для нахождения их оригиналов не всегда представляется возможным.

Достаточно основательный анализ существующих на сегодняшний день методов обращения преобразования Лапласа дан в работе [21]. Выводы, полученные авторами, позволяют утверждать, что универсального алгоритма

обращения преобразования Лапласа не существует. Таким образом, вопросы, связанные с разработкой аналитических методов решения нестационарных задач, в частности задач механодиффузии, также являются актуальными.

В заключение отметим, что в известных на сегодняшний день публикациях рассматривались нестационарные задачи только для бинарных систем. Таким образом, постановка данной задачи является новой. Предложенный алгоритм позволяет получить решение задачи в явном виде, что также является отличительной особенностью данной работы.

1. Постановка задачи. Рассматривается одномерный сплошной ортотропный $(N + 1)$ -компонентный цилиндр, на который действуют радиальные нестационарные объемные возмущения. Дифференциальные уравнения, описывающие связанные механодиффузионные процессы с учетом релаксации диффузионных потоков, имеют следующий вид (здесь и далее точка обозначает производную по времени, штрих – производную по радиальной координате) [22–24]:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta'^{(j)} + F_1, & \eta^{(N+1)} &= -\sum_{j=1}^N \eta^{(j)}, \\ \dot{\eta}^{(q)} + \tau_q \ddot{\eta}^{(q)} &= -\Lambda_{11}^{(q)} \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + \\ &+ D_1^{(q)} \left(\eta''^{(q)} + \frac{\eta'^{(q)}}{r} \right) + F_{q+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Исходя из того, что изначально цилиндр находится в невозмущенном состоянии, начальные условия в задаче полагаются нулевыми. Краевые условия, выражающие постоянный уровень концентрации диффузантов и отсутствие механических нагрузок на поверхности цилиндра, записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left[u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta^{(j)} \right]_{r=1} &= 0, & \eta^{(q)}|_{r=1} &= 0, \\ u &= O(1), & \eta^{(q)} &= O(1) \quad (r \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь последние два равенства задают естественное условие ограниченности искомых величин в рассматриваемой области, в частности, в окрестности точки $r = 0$. В дальнейшем изложении указанные порядковые равенства будут опущены ввиду отсутствия в явной необходимости их постоянного упоминания.

В формулах (1) и (2) все величины безразмерные. Со своими размерными аналогами они связаны с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r^*}{R_0}, & u &= \frac{u_r}{R_0}, & \tau &= \frac{Ct}{R_0}, & C^2 &= \frac{C_{1111}}{\rho}, & \tau_q &= \frac{C\tau^{(q)}}{R_0}, \\ C_{\alpha\beta} &= \frac{C_{\alpha\alpha\beta\beta}}{C_{1111}}, & C_{66} &= \frac{C_{1212}}{C_{1111}}, & \alpha_1^{(q)} &= \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, & D_1^{(q)} &= \frac{D_{11}^{(q)}}{CR_0}, \\ \Lambda_{11}^{(q)} &= \frac{m^{(q)} \alpha_{11}^{(q)} D_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho CR_0 RT_0}, & F_i &= \frac{\rho R_0 F_i^*}{C_{1111}}, & F_{q+1} &= \frac{R_0 F^{(q)}}{C}, \end{aligned} \quad (3)$$

где t — время; u_r — компонента вектора механических перемещений; r^* — радиальная координата; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ — приращение концентрации вещества; $n^{(q)}$ и $n_0^{(q)}$ — начальная и текущая концентрации q -го вещества в составе $(N+1)$ -компонентной сплошной среды; $m^{(q)}$ — молярная масса q -го вещества в составе $(N+1)$ -компонентной сплошной среды; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; ρ — плотность среды; $\alpha_{ij}^{(q)}$ — компоненты тензора диффузионных постоянных, характеризующие деформации, возникающие вследствие диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ — компоненты тензора самодиффузии; R — универсальная газовая постоянная; T_0 — температура сплошной среды; F_1^* — удельная плотность объемных сил; $F^{(q)}$ — объемная плотность источников массопереноса; $\tau^{(q)}$ — время релаксации диффузионных потоков; R_0 — радиус цилиндра.

2. Алгоритм решения. Решение поставленной задачи ищется в интегральной форме [22–24]:

$$\begin{aligned} u(r, \tau) &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^1 G_{1m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi, \\ \eta_q(r, \tau) &= \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^\tau \int_0^1 G_{q+1,m}(r, \xi, t) F_m(\xi, \tau - t) dt d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

где $G_{km}(r, \xi, \tau)$, $k, m = \overline{1, N+1}$, $0 \leq \xi \leq 1$, — объемные функции Грина рассматриваемой задачи, т.е. решения следующих начально-краевых задач:

$$\begin{aligned} \left(G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G'_{j+1,m} + \delta_{1m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) &= \ddot{G}_{1m}, \\ -\Lambda_{11}^{(q)} \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) + \\ + \delta_{q+1,m} \delta(r - \xi) \delta(\tau) &= \dot{G}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,m}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left[G'_{1m} + \frac{G_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m} \right]_{r=1} &= 0, \quad G_{q+1,m}|_{r=1} = 0, \\ G_{1m}|_{\tau=0} = \dot{G}_{1m}|_{\tau=0} = G_{q+1,m}|_{\tau=0} &= \dot{G}_{q+1,m}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения функций Грина применяем к (5) и (6) преобразование Лапласа. Затем первое уравнение (5) домножаем на $rJ_1(\lambda_n r)$, а второе — на $rJ_0(\lambda_n r)$ и интегрируем по r в промежутке $[0, 1]$. Получаем (верхний индекс « L » обозначает трансформанту Лапласа, s — параметр преобразования Лапласа):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) J_1(r\lambda_n) r dr - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \int_0^1 G'_{j+1,m} J_1(r\lambda_n) r dr + \\ + \delta_{1m} \int_0^1 \delta(r - \xi) J_1(r\lambda_n) r dr = s^2 \int_0^1 G^L_{1m} J_1(r\lambda_n) r dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Lambda_{11}^{(q)} \int_0^1 \left(G'''_{1m} + \frac{2G''_{1m}}{r} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) J_0(r\lambda_n) r dr + \\
 & \quad + D_1^{(q)} \int_0^1 \left(G''_{q+1,m} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) J_0(r\lambda_n) r dr + \\
 & \quad + \delta_{q+1,m} \int_0^1 \delta(r-\xi) J_0(r\lambda_n) r dr = (s + \tau_q s^2) \int_0^1 G^L_{q+1,m} J_0(r\lambda_n) r dr.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\left[G^L_{1m} + \frac{G_{1m}}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G^L_{j+1,m} \right]_{r=1} = 0, \quad G^L_{q+1,m} \Big|_{r=1} = 0. \tag{8}$$

Здесь $J_\nu(z)$ — функции Бесселя первого рода порядка ν ; λ_n — корни уравнения $J_0(\lambda_n) = 0$. В работе [26] показано, что λ_n удовлетворяют также уравнению $J_1(\lambda_n) + \lambda_n J'_1(\lambda_n) = 0$.

Для вычисления интегралов в (7) используем формулы, полученные в работах [22–25]:

$$\int_0^1 G^L_{q+1,m}(r, \xi, s) J_1(r\lambda_n) r dr = -\lambda_n \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s),$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[G''_{q+1,m}(r, \xi, s) + \frac{G'_{q+1,m}(r, \xi, s)}{r} \right] J_0(r\lambda_n) r dr = \\
 = -\lambda_n^2 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[G'''_{1m}(r, \xi, s) + \frac{G''_{1m}(r, \xi, s)}{r} - \frac{G'_{1m}(r, \xi, s)}{r^2} \right] J_1(r\lambda_n) r dr = \\
 = -\lambda_n^2 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left[G'''_{1m}(r, \xi, s) + \frac{2G''_{1m}(r, \xi, s)}{r} - \frac{G'_{1m}(r, \xi, s)}{r^2} + \frac{G_{1m}(r, \xi, s)}{r^3} \right] J_0(r\lambda_n) r dr = \\
 = -\lambda_n^3 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s).
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G^L_{1m}(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s) J_1(\lambda_n r), \\
 G^{LH_1}_{1m}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r G^L_{1m}(r, \xi, s) J_1(\lambda_n r) dr, \\
 G^L_{q+1,m}(r, \xi, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s) J_0(\lambda_n r), \\
 G^{LH_0}_{q+1,m}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r G^L_{q+1,m}(r, \xi, s) J_0(\lambda_n r) dr.
 \end{aligned} \tag{9}$$

С учетом этих равенств задача (7), (8) преобразуется к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 k_1(\lambda_n, s)G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= F_1(\lambda_n, \xi), \\
 \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) - k_{q+1}(\lambda_n, s) G_{q+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= F_{q+1}(\lambda_n, \xi), \\
 F_1(\lambda_n, \xi) &= \frac{2\delta_{1m}}{J_1^2(\lambda_n)} J_1(\lambda_n \xi) \xi, \quad F_{q+1}(\lambda_n, \xi) = -\frac{2\delta_{q+1,m}}{J_1^2(\lambda_n)} J_0(\lambda_n \xi) \xi, \\
 k_1(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = D_1^{(q)} \lambda_n^2 + \tau_q s^2 + s,
 \end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned}
 G_{11}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) P_{11}(\lambda_n, s)}{J_1^2(\lambda_n) P(\lambda_n, s)}, \\
 G_{1,q+1}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi) P_{1,q+1}(\lambda_n, s)}{J_1^2(\lambda_n) P(\lambda_n, s)}, \\
 G_{q+1,1}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{J_1^2(\lambda_n) Q_q(\lambda_n, s)}, \\
 G_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \left[\frac{\delta_{qp}}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right].
 \end{aligned} \tag{10}$$

В формулах (10) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s), \\
 Q_q(\lambda_n, s) &= P(\lambda_n, s) k_{q+1}(\lambda_n, s), \quad P_{11}(\lambda_n, s) = \Pi(\lambda_n, s), \\
 P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= -\lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s), \quad P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s), \\
 \Pi_j(\lambda_n, s) &= \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi(\lambda_n, s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1}(\lambda_n, s).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Так как все функции в (10) и (11) являются рациональными функциями параметра $s \in \mathbb{C}$, то оригиналы функций влияния находятся аналитически с помощью теории вычетов и стандартных таблиц операционного исчисления (штрих означает производную по параметру s) [22–24, 26]:

$$\begin{aligned}
 G_{11}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{11}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau), \\
 G_{1,q+1}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+2} A_{1,q+1}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau),
 \end{aligned}$$

$$G_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) = \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)^{2N+4}}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,1}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau),$$

$$G_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) = \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)} \left[\sum_{l=1}^2 \frac{\delta_{qp} \exp(\chi_l \tau)}{k_{q+1}(\lambda_n, \chi_l)} + \sum_{k=1}^{2N+4} A_{q+1,p+1}^{(k)}(\lambda_n, s_k) \exp(s_k \tau) \right],$$

$$A_{1m}^{(k)}(\lambda_n, s_k) = \frac{P_{1m}(\lambda_n, s_k)}{P'(\lambda_n, s_k)}, \quad A_{q+1,m}^{(k)}(\lambda_n, s_k) = \frac{P_{q+1,m}(\lambda_n, s_k)}{Q'_q(\lambda_n, s_k)},$$

$$G_{1m}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1m}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) J_1(\lambda_n r),$$

$$G_{q+1,m}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,m}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) J_0(\lambda_n r),$$

где $s_k(\lambda_n)$ ($k = 1, 2N+2$) — нули полинома $P(\lambda_n, s)$, а $\chi_j(\lambda_n)$ — дополнительные нули полинома $Q_q(\lambda_n, s)$,

$$\chi_1(\lambda_n) = s_{2N+3}(\lambda_n) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q},$$

$$\chi_2(\lambda_n) = s_{2N+4}(\lambda_n) = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q}.$$

Полагая $\tau_q = 0$, получаем классическую модель механо-диффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков. При $\tau_q \rightarrow 0$ степень многочлена $P(\lambda_n, s)$ изменяется с $2N+2$ до $N+2$, а для дополнительных нулей имеют место следующие предельные переходы:

$$\chi_1(\lambda_n) \rightarrow -D_1^{(q)} \lambda_n^2, \quad \chi_2(\lambda_n) \rightarrow -\infty \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Тогда

$$\exp(\chi_1 \tau) \rightarrow \exp(-D_1^{(q)} \lambda_n^2 \tau), \quad \exp(\chi_2 \tau) \rightarrow 0 \quad (\tau_q \rightarrow 0).$$

Полагая далее $\alpha_1^{(q)} = 0$, переходим к классическим моделям упругости и массопереноса для сплошного цилиндра. Соответствующие им функции Грина будем обозначать через $\tilde{G}_{11}(r, \xi, \tau)$, $\tilde{G}_{q+1,p+1}(r, \xi, \tau)$ и представлять в виде следующих рядов:

$$\tilde{G}_{11}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{11}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) J_1(\lambda_n r),$$

$$\tilde{G}_{q+1,p+1}(r, \xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) J_0(\lambda_n r).$$

Коэффициенты этих рядов находятся из равенств (9) путем предельного перехода при $\alpha_1^{(q)} \rightarrow 0$. Имеем (здесь учтено, что $\Lambda_{11}^{(q)} \rightarrow 0$ при $\alpha_1^{(q)} \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{11}(\lambda_n, s) &= \Pi(\lambda_n, s), & \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= 0, \\ \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{q+1,k}(\lambda_n, s) &= 0, & \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s), \\ \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} Q_q(\lambda_n, s) &= k_{q+1}(\lambda_n, s)k_1(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s). \end{aligned}$$

Тогда в пространстве преобразования Лапласа функции Грина для несвязанных задач упругости и диффузии запишутся так:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}^{LH_1}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi)}{J_1^2(\lambda_n)k_1(\lambda_n, s)}, \\ \tilde{G}_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, \xi, s) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)\delta_{pq}}{J_1^2(\lambda_n)k_{q+1}(\lambda_n, s)}. \end{aligned}$$

Здесь переход в пространство оригиналов осуществляется непосредственно с помощью таблиц операционного исчисления [26]:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11}^{H_1}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_1(\lambda_n \xi) \sin \lambda_n \tau}{J_1^2(\lambda_n)\lambda_n} H(\tau), \\ \tilde{G}_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \xi, \tau) &= \frac{2\xi J_0(\lambda_n \xi)\delta_{pq}}{J_1^2(\lambda_n)} \sum_{r=1}^2 \frac{\exp(s_r \tau)}{k'_{q+1}(\lambda_n, s_r)}. \end{aligned} \quad (12)$$

3. Расчетный пример. В качестве примера рассмотрим цилиндр радиуса 0.5 мм из трехкомпонентного сплава ($N = 2$, независимые компоненты [27] цинк 1.0 % и медь 4.5 % диффундируют в дюралюминии), физические характеристики которого после применения процедуры перехода к безразмерным величинам (3) следующие:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 4.92 \cdot 10^{-1}, & C_{66} &= 2.54 \cdot 10^{-1}, \\ \alpha_1^{(1)} &= \alpha_2^{(1)} = 6.32 \cdot 10^{-4}, & \alpha_1^{(2)} &= \alpha_2^{(2)} = 5.92 \cdot 10^{-4}, \\ D_1^{(1)} &= D_2^{(1)} = 4.17 \cdot 10^{-13}, & D_1^{(2)} &= D_2^{(2)} = 4.60 \cdot 10^{-16}, \\ \Lambda_{11}^{(1)} &= \Lambda_{12}^{(1)} = \Lambda_{21}^{(1)} = \Lambda_{22}^{(1)} &= 1.13 \cdot 10^{-15}, \\ \Lambda_{11}^{(2)} &= \Lambda_{12}^{(2)} = \Lambda_{21}^{(2)} = \Lambda_{22}^{(2)} &= 5.18 \cdot 10^{-18}. \end{aligned}$$

Задаем объемные возмущения в следующем виде:

$$F_1(r, \tau) = rJ_1(\lambda_1 r)H(\tau), \quad F_{q+1}(r, \tau) = 0,$$

где $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

Тогда, вычисляя свертки (4), получаем

$$\begin{aligned}
 u(r, \tau) &= \int_0^\tau \int_0^1 G_{11}(r, \xi, t) F_1(\xi, \tau - t) dt d\xi = \\
 &= J_1(\lambda_1 r) \sum_{l=1}^{2N+2} A_{11}^{(l)}(\lambda_1) \frac{\exp(s_l \tau) - 1}{s_l}, \\
 \eta_q(r, \tau) &= \int_0^\tau \int_0^1 G_{q+1,1}(r, \xi, t) F_1(\xi, \tau - t) dt d\xi = \\
 &= J_0(\lambda_1 r) \sum_{l=1}^{2N+4} A_{q+1,1}^{(l)}(\lambda_1) \frac{\exp(s_l \tau) - 1}{s_l}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Для вычисления рядов (13) использовалось $N_\lambda = 100$ членов. Дальнейшее увеличение членов ряда не приводит к видимому изменению результатов.

Результаты вычислений по формулам (13) представлены на рис. 1–5. Здесь одна безразмерная единица времени соответствует $1.24 \cdot 10^7$ сек.

Диффузионные поля, изображенные на рис. 2 и 3, инициируются механическими нагрузками, что демонстрирует влияние механического поля на кинетику массопереноса в сплошных средах. Компоненты сплава цинк и медь диффундируют с различной скоростью, величина которой определяется значением коэффициента диффузии. Для цинка по рис. 2 можно примерно оценить момент выхода диффузионного процесса на статический режим ($\tau \approx 10^{13}$, около 9.5 суток).

При этом видно, что механические воздействия очень незначительно влияют на массоперенос. Даже по истечении достаточно большого промежутка времени (9.5 суток для цинка и 95 суток для меди) приращения концентраций имеют порядок 10^{-5} . Такой результат в общем и целом подтверждается результатами экспериментальных исследований, согласно которым упругие

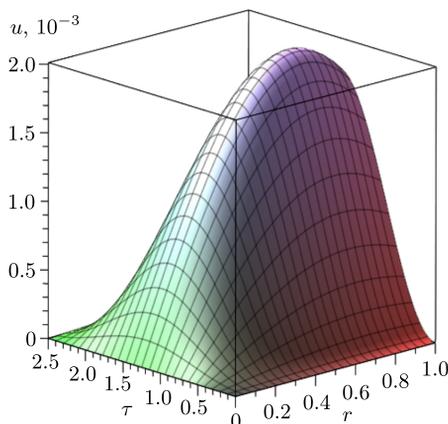


Рис. 1. Зависимость перемещения u от времени τ и от координаты r

[Figure 1. Dependence of the displacement u on the time τ and on the coordinate r]

деформации действительно слабо влияют на диффузионные процессы в твердых телах [28, 29].

Решение упругой задачи с учетом (12) будет иметь вид

$$u^{(el)}(r, \tau) = \int_0^\tau \int_0^1 \tilde{G}_{11}(r, \xi, t) F_1(\xi, \tau - t) dt d\xi = J_1(\lambda_1 r) \frac{1 - \cos(\lambda_1 \tau)}{\lambda_1^2}.$$

Сравнение решений упругой и упругодиффузионных задач показано на рис. 4. Показано, что начиная с некоторого момента времени ($\tau \sim 10^9$, при-

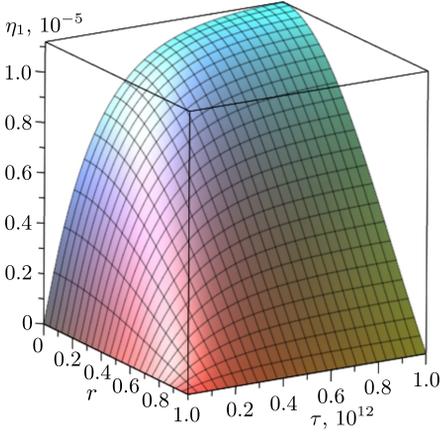


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации η_1 (цинк) от времени τ и от координаты r

[Figure 2. Dependence of the concentration increment η_1 (Zinc) on the time τ and on the coordinate r]

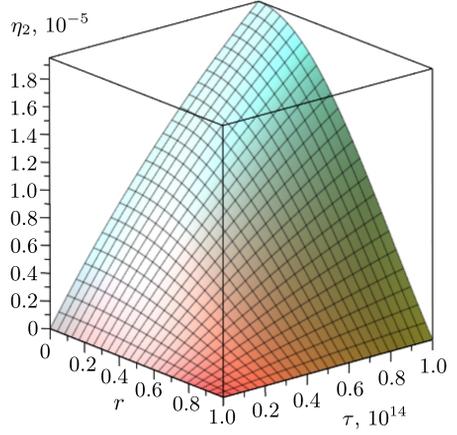


Рис. 3. Зависимость приращения концентрации η_2 (медь) от времени τ и от координаты r

[Figure 3. Dependence of the concentration increment η_2 (Copper) on the time τ and on the coordinate r]

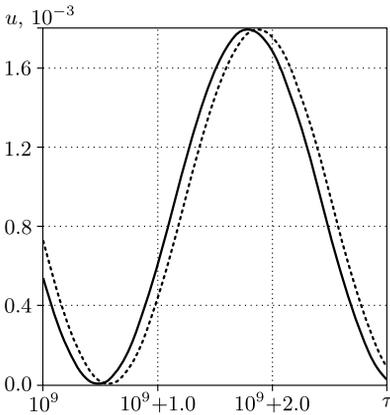
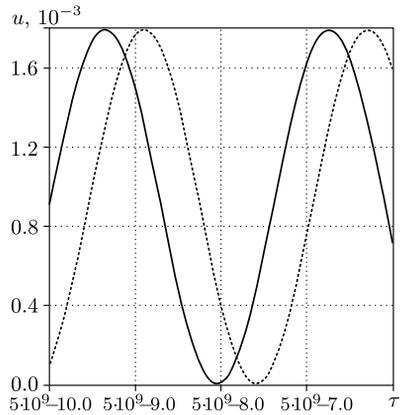


Рис. 4. Зависимость перемещения u от времени τ при $r = 1$. Сплошная линия соответствует решению упругодиффузионной задачи, пунктирная — упругой

[Figure 4. Dependence of the displacement u on the time τ for $r = 1$. The solid line corresponds to the solution of the elastic diffusion problem, the dotted line corresponds to the elastic problem]



мерно 80 сек) механические процессы с учетом влияния диффузии начинают сдвигаться относительно чисто упругих.

На рис. 5 на примере первого компонента вещества (цинк) показано влияние релаксации на кинетику массопереноса. Видно, что релаксационные эффекты существенно проявляются на ограниченном промежутке времени и с течением времени затухают.

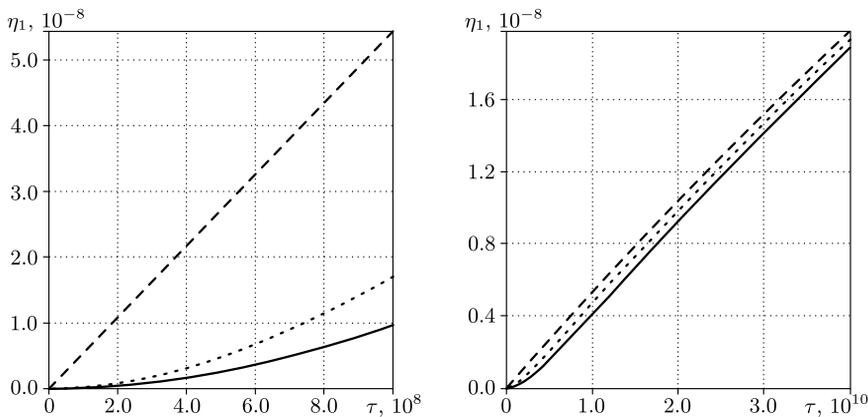


Рис. 5. Зависимость приращения концентрации η_1 (цинк) от времени τ при $r = 0.1$. Сплошная линия соответствует времени релаксации $\tau^{(a)} = 200$ сек, пунктирная — $\tau^{(a)} = 100$ сек, штриховая — $\tau^{(a)} = 0$

Figure 5. Dependence of the concentration increment η_1 (Zinc) on the time τ for $r = 1$. The solid line corresponds to the relaxation time $\tau^{(a)} = 200$ sec, the dotted line corresponds to $\tau^{(a)} = 100$ sec, the dashed line corresponds to $\tau^{(a)} = 0$

Закключение. Предложена модель, описывающая связанные нестационарные механо-диффузионные процессы в сплошных средах. Модель содержит линейаризованные уравнения движения сплошной среды и массопереноса. Связь между физическими полями учитывается с помощью обобщенного закона Гука и выражений для диффузионных потоков с учетом их конечной скорости распространения. Несмотря на то, что речь идет о диффузии в многокомпонентных твердых телах, данная модель может описывать также диффузию газов и жидкостей в твердых телах, так как все указанные процессы в линейном приближении описываются одинаковыми уравнениями и фактическое отличие этих явлений в данном случае определяется только величиной коэффициента диффузии.

Изложен алгоритм решения одномерной полярно-симметричной нестационарной задачи упругой диффузии для ортотропного сплошного многокомпонентного цилиндра с учетом релаксации диффузионных потоков. Найдены функции влияния, позволяющие определять поля механических перемещений и приращения концентраций компонент сплошной среды по заданным нестационарным объемным возмущениям. Важно отметить, что предложенный алгоритм, основанный, по сути, на использовании интегрального преобразования Лапласа и метода разделения переменных Фурье, позволяет получить решение рассматриваемой задачи в аналитической форме, что дает широкие возможности для проведения различного рода численных экспериментов. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости искомых полей от времени в различных точках цилиндра.

На примере трехкомпонентного сплошного цилиндра, находящегося под действием нестационарных объемных сил, исследованы эффекты связанности механического и диффузионных полей, а также влияние релаксационных процессов на кинетику массопереноса. Показано, что, с одной стороны, нестационарные деформации инициируют процесс массопереноса. С другой стороны, диффузия влияет на поле перемещений, что проявляется в виде фазового сдвига механодиффузионных колебаний относительно чисто механических. Отмечено также, что релаксационные эффекты, обуславливающие конечную скорость распространения диффузионных возмущений, проявляются только на конечном промежутке времени, соизмеримом с временем релаксации диффузионных потоков.

Результаты выполненных расчетов на качественном уровне совпадают с результатами экспериментальных исследований, которые, с одной стороны, подтверждают эффекты взаимной связанности механического и диффузионного полей, а с другой стороны, показывают, что эта взаимосвязь существенно проявляется в основном при пластических деформациях и совсем незначительно — при упругих. Поэтому полученные в работе результаты можно рассматривать как начальный этап моделирования механодиффузионных процессов в сплошных средах.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *ZAMP*, 2005. vol. 57, no. 2. pp. 350–366. <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>.
2. Bachher M., Sarkar N. Fractional order magneto-thermoelasticity in a rotating media with one relaxation time // *Math. Models Eng.*, 2016. vol. 2, no. 1. pp. 57–68. <https://www.extrica.com/article/17103>.
3. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion // *Int. J. Thermal Sci.*, 2011. vol. 50, no. 5. pp. 749–759. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>.
4. Kumar R., Chawla V. Fundamental solution for two-dimensional problem in orthotropic piezothermoelastic diffusion media // *Mater. Phys. Mech.*, 2013. vol. 16, no. 2. pp. 159–174. <https://mpm.spbstu.ru/en/article/2013.27.7/>.
5. Zhang J., Li Y. A two-dimensional generalized electromagnetothermoelastic diffusion problem for a rotating half-space // *Math. Probl. Eng.*, 2014. vol. 2014. pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/964218>.
6. Abbas A. I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // *J. Meas. Eng.*, 2014. vol. 2, no. 4. pp. 175–184. <https://www.extrica.com/article/15667>.
7. Abbas A. I. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity // *Appl. Math. Model.*, 2015. vol. 39, no. 20. pp. 6196–6206. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.065>.

8. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2006. vol. 2006. pp. 1–15. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>.
9. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Solids Struct.*, 2007. vol. 44, no. 17. pp. 5711–5722. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019>.
10. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two-temperature fractional order generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *IJAIEEM*, 2014. vol. 3, no. 8. pp. 096–108.
11. Xia R. H., Tian X. G., Shen Y. P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *Int. J. Eng. Sci.*, 2009. vol. 47, no. 5–6. pp. 669–679. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.01.003>.
12. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite element method to study elasto-thermodiffusive response inside a hollow cylinder with three-phase-lag effect // *Int. J. Comp. Sci. Eng.*, 2019. vol. 7, no. 1. pp. 148–156. <https://doi.org/10.26438/ijcse/v7i1.148156>.
13. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.*, 2011. vol. 218, no. 3–4. pp. 205–215. <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>.
14. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite medium with a spherical cavity // *Int. J. Thermophys.*, 2012. vol. 33, no. 1. pp. 172–183. <https://doi.org/10.1007/s10765-011-1138-0>.
15. Shvets R. M. On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // *J. Math. Sci.*, 1999. vol. 97, no. 1. pp. 3830–3839. <https://doi.org/10.1007/bf02364922>.
16. Минов А. В. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2008. № 10. С. 21–26.
17. Deswal S., Kalkal K. K., Sheoran S. S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Phys. B – Condensed Matter.*, 2016. vol. 496. pp. 57–68. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2016.05.008>.
18. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST*, 2019. vol. 25, no. 4. pp. 167–176. <https://doi.org/10.12921/cmst.2018.0000034>.
19. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *Int. J. Eng. Sci.*, 1995. vol. 33, no. 6. pp. 773–780. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00099-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00099-6).
20. Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C. Generalized thermoelastic diffusion in a thick circular plate including heat source // *Alexandria Eng. J.*, 2016. vol. 55, no. 3. pp. 2241–2249. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.06.003>.
21. Порошина Н. И., Рябов В. М. О методах обращения преобразования Лапласа // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*, 2011. № 3. С. 55–64.
22. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012101. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012101>.
23. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды // *Проблемы прочности и пластичности*, 2018. Т. 80, № 1. С. 5–14. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-5-14>.
24. Зверев Н. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 2. С. 156–167. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-2-156-167>.

25. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Основные дифференциальные уравнения математической физики*. М.: Наука, 1962. 768 с.
26. Диткин В. А., Прудников А. П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высш. шк., 1965. 568 с.
27. Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др. *Физические величины: Справочник*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
28. Nachtrieb N. H., Handler G. S. A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals // *Acta Metal.*, 1954. vol. 2, no. 6. pp. 797–802. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(54\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(54)90031-0).
29. Petit J., Nachtrieb N. H. Self-diffusion in liquid gallium // *J. Chem. Phys.*, 1956. vol. 24, no. 5. pp. 1027–1028. <https://doi.org/10.1063/1.1742671>.

MSC: 74B05, 74N99

Modelling one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations

N. A. Zverev¹, A. V. Zemskov^{1,2}, D. V. Tarlakovskii^{1,2}¹ Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.² Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

Abstract

A polar-symmetric elastic diffusion problem is considered for an orthotropic multicomponent homogeneous cylinder under uniformly distributed radial unsteady volumetric perturbations. Coupled elastic diffusion equations in a cylindrical coordinate system is used as a mathematical model. The model takes into account a relaxation of diffusion effects implying finite propagation speed of diffusion perturbations.

The solution of the problem is obtained in the integral convolution form of Green's functions with functions specifying volumetric perturbations. The integral Laplace transform in time and the expansion into the Fourier series by the special Bessel functions are used to find the Green's functions. The theory of residues and tables of operational calculus are used for inverse Laplace transform.

A calculus example based on a three-component material, in which two components are independent, is considered. The study of the mechanical and diffusion fields interaction in a solid orthotropic cylinder is carried out.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Zverev N. V., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Modelling one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 62–78. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1880> (In Russian).

Authors' Details:

Nikolay A. Zverev  <https://orcid.org/0000-0002-0813-2863>Postgraduate Student; Dept. of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines;
e-mail: nik.zvereff2010@yandex.ru**Andrei V. Zemskov**  <https://orcid.org/0000-0002-2653-6378>Dr. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Professor; Dept. of Applied Software and Mathematical Methods¹; Leading Researcher; Lab. of Dynamic Testing²;e-mail: azemskov1975@mail.ru**Dmitrii V. Tarlakovskii**  <https://orcid.org/0000-0002-5694-9253>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Strength of Materials, Dynamics and Strength of Machines¹; Head of Lab.; Lab. of Dynamic Testing²; e-mail: tdv902@mai.ru

Keywords: elastic diffusion, Laplace transform, Fourier series, Green's functions, polar symmetric problems, unsteady problems, Bessel functions, cylinder.

Received: 26th August, 2021 / Revised: 26th December, 2021 /

Accepted: 17th January, 2022 / First online: 31st March, 2022

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Aouadi M. Variable electrical and thermal conductivity in the theory of generalized thermoelastic diffusion, *ZAMP*, 2005, vol. 57, no. 2, pp. 350–366. <https://doi.org/10.1007/s00033-005-0034-5>.
2. Bachher M., Sarkar N. Fractional order magneto-thermoelasticity in a rotating media with one relaxation time, *Math. Models Eng.*, 2016, vol. 2, no. 1, pp. 57–68. <https://www.extrica.com/article/17103>.
3. Deswal S., Kalkal K. A two-dimensional generalized electro-magneto-thermoviscoelastic problem for a half-space with diffusion, *Int. J. Thermal Sci.*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 749–759. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.016>.
4. Kumar R., Chawla V. Fundamental solution for two-dimensional problem in orthotropic piezothermoelastic diffusion media, *Mater. Phys. Mech.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 159–174. <https://mpm.spbstu.ru/en/article/2013.27.7/>.
5. Zhang J., Li Y. A two-dimensional generalized electromagnetothermoelastic diffusion problem for a rotating half-space, *Math. Probl. Eng.*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/964218>.
6. Abbas A. I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium, *J. Meas. Eng.*, 2014, vol. 2, no. 4, pp. 175–184. <https://www.extrica.com/article/15667>.
7. Abbas A. I. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity, *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 20, pp. 6196–6206. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.065>.
8. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2006, vol. 2006, pp. 1–15. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>.
9. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion, *Int. J. Solids Struct.*, 2007, vol. 44, no. 17, pp. 5711–5722. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019>.
10. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two-temperature fractional order generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell, *IJAIEEM*, 2014, vol. 3, no. 8, pp. 096–108.
11. Xia R. H., Tian X. G., Shen Y. P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity, *Int. J. Eng. Sci.*, 2009, vol. 47, no. 5–6, pp. 669–679. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.01.003>.
12. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite element method to study elasto-thermodiffusive response inside a hollow cylinder with three-phase-lag effect, *Int. J. Comp. Sci. Eng.*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 148–156. <https://doi.org/10.26438/ijcse/v7i1.148156>.
13. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times, *Acta Mech.*, 2011, vol. 218, no. 3–4, pp. 205–215. <https://doi.org/10.1007/s00707-010-0415-5>.

14. Elhagary M. A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite medium with a spherical cavity, *Int. J. Thermophys.*, 2012, vol. 33, no. 1, pp. 172–183. <https://doi.org/10.1007/s10765-011-1138-0>.
15. Shvets R. M. On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion, *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 97, no. 1, pp. 3830–3839. <https://doi.org/10.1007/bf02364922>.
16. Minov A. V. Study of the stress-strain state of a hollow cylinder subjected to the thermal diffusion effect of carbon in an axisymmetric thermal field variable in length, *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 2008, no. 10, pp. 21–26 (In Russian).
17. Deswal S., Kalkal K. K., Sheoran S. S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction, *Phys. B – Condensed Matter.*, 2016, vol. 496, pp. 57–68. <https://doi.org/10.1016/j.physb.2016.05.008>.
18. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources, *CMST*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 167–176. <https://doi.org/10.12921/cmst.2018.0000034>.
19. Olesiak Z. S., Pyryev Yu. A. A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder, *Int. J. Eng. Sci.*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 773–780. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(94\)00099-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)00099-6).
20. Tripathi J. J., Kedar G. D., Deshmukh K. C. Generalized thermoelastic diffusion in a thick circular plate including heat source, *Alexandria Eng. J.*, 2016, vol. 55, no. 3, pp. 2241–2249. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.06.003>.
21. Poroshina N. I., Ryabov V. M. Methods for Laplace transform inversion, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, 2011, vol. 44, no. 3, pp. 214–222. <https://doi.org/10.3103/S1063454111030071>.
22. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012101. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012101>.
23. Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for a multicomponent medium, *Problems of Strength and Plasticity*, 2018, vol. 80, no. 1, pp. 5–14 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-1-5-14>.
24. Zverev N. A., Zemskov A. V., Tarlakovskii D. V. Modeling of unsteady coupled mechanodiffusion processes in a continuum isotropic cylinder, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 2, pp. 156–167 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-2-156-167>.
25. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Osnovnye differentsial'nye uravneniia matematicheskoi fiziki* [Basic Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1962, 768 pp.
26. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniiu* [Guide to operational Calculus]. Moscow, Vyssh. Shk., 1965, 568 pp. (In Russian)
27. Babichev A. P., Babushkina N. A., Bratkovskii A. M., et al. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical Quantities: Handbook]. Moscow, Energoatomizdat, 1991, 1232 pp. (In Russian)
28. Nachtrieb N. H., Handler G. S. A relaxed vacancy model for diffusion in crystalline metals, *Acta Metal.*, 1954, vol. 2, no. 6, pp. 797–802. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(54\)90031-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(54)90031-0).
29. Petit J., Nachtrieb N. H. Self-diffusion in liquid gallium, *J. Chem. Phys.*, 1956, vol. 24, no. 5, pp. 1027–1028. <https://doi.org/10.1063/1.1742671>.



УДК 539.3

Численное исследование взаимодействия ударной волны с проницаемым деформируемым гранулированным слоем

И. А. Модин, А. В. Кочетков, Е. Г. Глазова

Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского,
Россия, 603022, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.

Аннотация

Получены решения задач воздействия плоских ударных волн на деформируемый гранулированный слой. Исследуется трансформация волн при прохождении через упругопластический гранулированный слой с учетом и без учета изменения проницаемости слоя вследствие его деформации. При решении задач используется зависимость изменения проницаемости слоя от его сжатия, которая получена численно при моделировании сжатия симметричных фрагментов гранулированных слоев в пространственной постановке. Представлена математическая модель, описывающая в одномерном приближении взаимосвязанные процессы нестационарного деформирования плоских проницаемых гранулированных слоев, состоящих из шаровых частиц, и волновых процессов в поровом и окружающем газе. В основе модели лежат нелинейные уравнения динамики двух взаимопроникающих континуумов. В качестве межфазных сил учитываются силы сопротивления при обтекании газом шаровых частиц и силы трения Стокса. Численное решение уравнений проводится по модифицированной схеме С. К. Годунова, адаптированной к задачам динамики взаимопроникающих сред. Поверхности контакта чистого газа с пористым гранулированным слоем и поровым газом являются поверхностью разрыва пористости и проницаемости, на которых выполняются законы сохранения как на скачке пористости. Численная

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Модин И. А., Кочетков А. В., Глазова Е. Г. Численное исследование взаимодействия ударной волны с проницаемым деформируемым гранулированным слоем // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 79–92. EDN: [FUXBZE](https://doi.org/10.14498/vsgtu1879). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1879>.

Сведения об авторах

Иван Александрович Модин  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

кандидат технических наук; научный сотрудник; лаб. моделирования физико-механических процессов; e-mail: mianet@mail.ru

Анатолий Васильевич Кочетков  <https://orcid.org/0000-0001-7939-8207>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. теоретической, компьютерной и экспериментальной механики; e-mail: kochetkov@mech.unn.ru

Елена Геннадьевна Глазова  <https://orcid.org/0000-0003-4351-889X>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. динамики многокомпонентных сред; e-mail: glazova@mech.unn.ru

реализация контактных условий производится на основе решения задачи распада разрыва на скачке пористости. Численные исследования процессов нелинейного взаимодействия ударных волн с деформируемыми проницаемыми гранулированными слоями показали, что параметры проходящих и отраженных волн существенно зависят от степени обжатия гранулированных слоев. Поэтому оценку защитных свойств проницаемых преград при воздействии сильных ударных волн следует проводить с учетом изменения их проницаемости вследствие деформирования слоев.

Ключевые слова: ударная волна, гранулированный слой, проницаемость, взаимопроникающие континуумы, упругопластическое деформирование, схема Годунова.

Получение: 25 августа 2021 г. / Исправление: 26 декабря 2021 г. /
Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Введение. Перспективным элементом, защищающим конструкции от импульсных воздействий, являются насыпные слои [1–3]. В научной литературе существует ряд работ, посвященных исследованию деформируемых пористых преград [4–22], где показано, что размещение слоя пористых насыпных слоев перед стенкой мишени уменьшает величины остаточного напряжения и энергии мишени и существенно снижает скорость приложенной нагрузки. Полученные результаты ограничиваются малыми нагрузками, которые не вызывают развитое пластическое течение или разрушение материала шариков [14, 15]. При этом предполагалось, что проницаемые элементы в процессе взаимодействия с ударными волнами испытывают малые деформации и их проницаемость не изменяется. В данной статье рассматривается процесс взаимодействия плоских ударных волн с деформируемыми упругопластическими гранулированными слоями, которые могут испытывать большие деформации, влияющие на их проницаемость.

1. Уравнения в одномерном приближении. Динамическое поведение гранулированного слоя с содержащимся поровым газом описывается на основе уравнений динамики двух взаимопроникающих континуумов, каждый из которых имеет свои скорости, напряжения (давления) и температуры. Одномерные уравнения динамики порового газа в форме законов сохранения массы, импульса и энергии имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1^0)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta \rho_1^0 u_1)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial(\alpha_1 \rho_1^0 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta(p_1 + \rho_1^0 u_1^2))}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_1 \rho_1^0 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \beta \left(\rho_1^0 u_1 \left(e_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + p_1 u_1 \right) \right\} &= 0, & (1) \\ p_1 &= (\gamma - 1) \rho_1^0 e_1, & T_1 &= e_1 / c_{v1}(T_1). \end{aligned}$$

Здесь и далее нижний индекс 1 относится к газу; 2 – к твердой компоненте; t – время; x – координата; ρ_1^0 – истинная плотность газа; u – скорость; e – внутренняя энергия; c_{v1} – удельная теплоемкость; γ – показатель адиабаты газа; f , q – межфазные силы и тепловой поток, действующие на «элементарный узел» твердой компоненты со стороны порового газа; n – количество

таких узлов в единице объема смеси; α_i — объемные концентрации компонент; β — коэффициент проницаемости сечений. Коэффициент проницаемости принимается в виде отношения площади пор к общей площади элемента среды. Из системы (1) при $\alpha_1 = \beta = 1$ и $n = 0$ следуют уравнения газовой динамики для однородной среды.

Уравнения динамического деформирования гранулированного слоя в одномерном приближении как скелета двухфазной среды имеют вид [14, 23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2^2) &= n f, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \frac{\partial f_n}{\partial \varepsilon} \frac{\partial u_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь σ , ε — напряжение и деформация, ρ_2 — приведенная плотность гранулированного слоя ($\rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$). Закон связи между напряжением и деформацией имеет вид $\sigma = f_n(\varepsilon, \sigma^*)$. Параметры, отмеченные верхним индексом *, представляют собой максимальные значения, достигнутые частицей при нагружении в соответствующем направлении, они необходимы для описания разгрузки частиц среды, испытывающей необратимые деформации. Конкретный вид уравнения состояния определяется по результатам экспериментальных исследований сжатия гранулированных слоев. При взаимодействии твердого и газового компонентов в качестве межфазных сил учитываются: силы сопротивления частичек твердой фазы при их обтекании поровым газом; силы Стокса вязкого трения, а также конвективный теплообмен через межфазную поверхность [23]. Твердая фаза как скелет высокопористой среды может сильно сжиматься в процессе деформации, поэтому параметры α_1 , β будут зависеть от степени ее сжатия. Конкретный вид этих зависимостей определяется численными исследованиями деформирования фрагментов гранулированного слоя в трехмерной постановке [24].

Поверхности контакта чистого газа с пористым гранулированным слоем являются поверхностью разрыва пористости и проницаемости. Как показали исследования [25–27], на контактных границах «чистый газ» — «поровый газ» должны выполняться специальные условия, как на скачке пористости:

$$\begin{aligned} \rho_5^0 u_5 &= \beta \rho_4^0 u_4, \\ \rho_5^0 u_5^2 + \beta p_5 &= \beta(\rho_4^0 u_4^2 + p_4) \\ \rho_5^0 u_5 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_5}{\rho_5^0} + \frac{u_5^2}{2} \right) &= \beta \rho_4^0 u_4 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_4}{\rho_4^0} + \frac{u_4^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (3) отражают законы сохранения массы, импульса и энергии на скачке. Индекс 5 относится к параметрам со стороны «чистого газа», индекс 4 — к параметрам со стороны порового газа.

Построенная нелинейная математическая модель описывает процессы взаимодействия проницаемых деформируемых гранулированных слоев с ударными волнами. Модель учитывает изменение пористости среды и ее проницаемости от степени деформации гранулированного слоя. Численное решение уравнений (1), (2) производится с помощью схемы С. К. Годунова [28],

адаптированной к задачам динамики взаимопроникающих сред. Численная реализация контактных условий (3) производится на основе решения задачи распада разрыва на скачке пористости [25, 27].

2. Постановка задачи. Постановка задачи показана на рис. 1. Расчетная область включает в себя три подобласти: воздух, гранулированный слой, воздух. Подвижный деформируемый гранулированный слой размещается в подобласти 2 от $x = x_2$ до $x = x_3$, таким образом, начальная толщина гранулированного слоя составляет $H = x_3 - x_2 = 0.017$ м. Коэффициент проницаемости слоя принимается равным $\alpha = 0.215$, начальные параметры порового газа $p_0 = 0.1$ МПа, $\rho_0 = 1.23$ кг/м³, $u_0 = 0$.

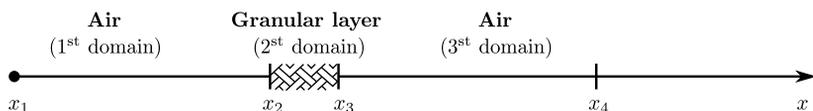


Рис. 1. Постановка задачи численного моделирования [Figure 1. Numerical modeling problems]

Координаты границ подобластей имеют следующие значения: $x_1 = -0.2$ м, $x_2 = 0$ м, $x_3 = 0.017$ м, $x_4 = 0.217$ м. В первой подобласти задаются параметры, соответствующие параметрам газа (воздуха) за фронтом набегающей плоской ударной волны. На искусственных границах подобластей газа $x = x_1$ и $x = x_4$ ставятся условия по давлению, соответствующие начальным условиям по этим подобластям. Размеры расчетных областей (подобласти 1 и 2) выбраны из условий, чтобы волновые возмущения от гранулированного слоя не отразились от искусственных границ и не исказили численное решение в течение интервала времени 0.4 мс, когда уже сформированы отраженные и прошедшие ударные волны в газе.

Коэффициент проницаемости принимается в виде отношения площади пор к общей площади элемента среды. В третьей подобласти — покоящийся газ с начальными параметрами, как и во второй подобласти. Показатель адиабаты газа во всех подобластях $\gamma = 1.4$. Решение получено на разностной сетке с размером ячеек 0.0005 м. Гранулированный слой предполагается деформируемым. Кривые одноосного сжатия имеют вид, характерный для пористых материалов [29], и в переменных «давление — плотность» показаны на рис. 2. Пунктиром показана разгрузочная ветвь, принимаемая в виде прямой линии, с тангенсом угла наклона (квадрат скорости звука) равным $2.9 \cdot 10^5$ м²/с². В начальный момент времени слой покоится, деформации слоя отсутствуют, его начальная плотность равна 680 кг/м³, давление — 0.1 МПа. Уменьшение проницаемости слоя при его сжатии с начального значения $\alpha = 0.215$ происходит по линейному закону (рис. 3). Вид зависимости изменения проницаемости от плотности установлен по результатам численного моделирования трехмерных задач упругопластического сжатия симметричных фрагментов гранулированных слоев [30].

В области $x < 0$ в качестве начальных условий задаются постоянные параметры за фронтом набегающей плоской ударной волны (УВ) в направлении оси Ox . Эти параметры определяются числом Маха ударного фронта M_0

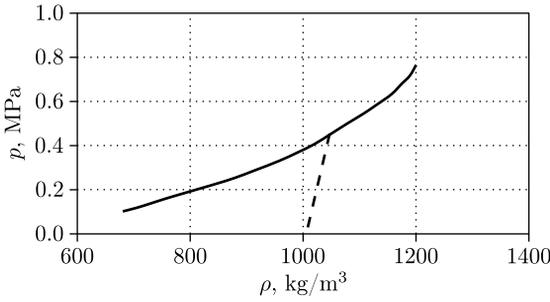


Рис. 2. Изменение плотности относительно давления
[Figure 2. Change in density relative to pressure]

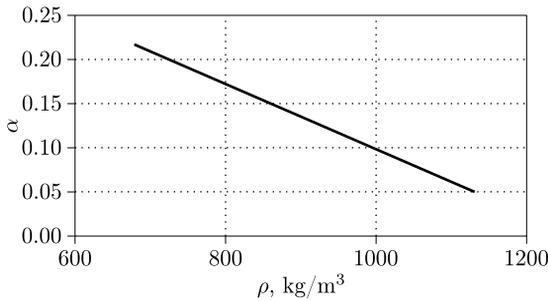


Рис. 3. Изменение проницаемости
[Figure 3. Permeability change]

и вычисляются согласно формулам [31]:

$$\frac{p_{sw}}{p_0} = \frac{2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad \frac{\rho_{sw}}{\rho_0} = \frac{(\gamma + 1)M_0^2}{(\gamma - 1)M_0^2 + 2},$$

$$\frac{T_{sw}}{T_0} = \frac{(2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1))((\gamma - 1)M_0^2 + 2)}{(\gamma + 1)^2 M_0^2},$$

$$\frac{u_{sw}}{a_0} = \frac{2}{\gamma + 1} \left(M_0 - \frac{1}{M_0} \right),$$

где γ — показатель адиабаты, $M_0 = u_0/a_0$, a_0 — скорость звука перед УВ.

Рассматривались три варианта задания интенсивности набегающей УВ. В первом варианте полагалось $p_{sw} = 0.3$ МПа, $\rho_{sw} = 2.596$ кг/см³, $u_{sw} = 292.5$ м/с. На рис. 4–6 представлены распределения давлений, плотностей и скоростей в газе по расчетной области задачи ($-0.1 \text{ м} < x < 0.1 \text{ м}$) в момент времени $t = 0.2$ мс, когда формируются отраженные и проходящие через гранулированный слой ударные волны. Видно, что амплитуда давления отраженной волны в газе (кривые 1) более чем в 2 раза превышает амплитуду падающей ударной волны. Проходящая волна также является нелинейной с амплитудой 0.136 МПа (кривая 3). Наибольшие давления образуются в поровом газе гранулированной среды с амплитудами, на порядок превышающими амплитуду набегающей, отраженной и проходящей волны (кривая 2). Распределения скорости и плотности подтверждают нелинейный характер протекающих процессов (рис. 5, 6). Хорошо видны характерные скачки всех

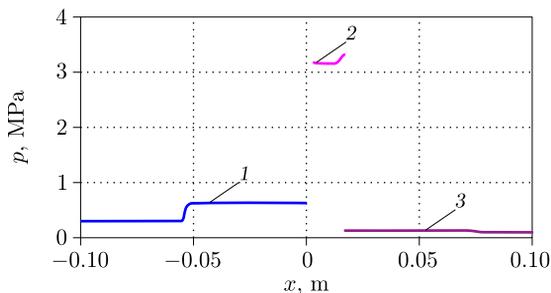


Рис. 4. Распределение давления по расчетной области при $t = 0.2$ мс
 [Figure 4. Pressure distribution by computational domain ($t = 0.2$ ms)]

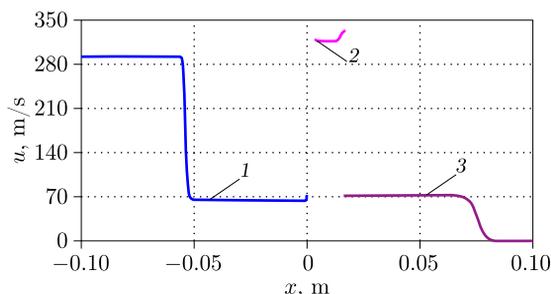


Рис. 5. Распределение скорости по расчетной области при $t = 0.2$ мс
 [Figure 5. Speed distribution by computational domain ($t = 0.2$ ms)]

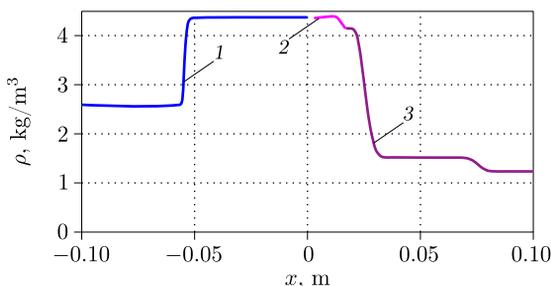


Рис. 6. Распределение плотности по расчетной области при $t = 0.2$ мс
 [Figure 6. Density distribution by computational domain ($t = 0.2$ ms)]

параметров на границах гранулированного слоя, что соответствует физике протекающих явлений [14].

На рис. 7, 8 представлены распределения давлений и плотностей по гранулированному слою (твердой фазе) в моменты времени $t = \{0.1; 0.2; 0.3\}$ мс. Здесь цифрой 1 отмечено распределение полей в момент времени $t = 0.1$ мс; цифрой 2 — $t = 0.2$ мс; цифрой 3 — $t = 0.3$ мс.

Процессы волнообразования в твердой фазе также носят нелинейный характер. Скорости распространения возмущений по твердой фазе значительно меньше, чем по поровому газу. Вследствие нелинейности происходит некоторое усиление амплитуды, распространяющейся по слою волны (кривые 3). В распространяющейся по твердой фазе волне наблюдается уплотнение слоя в 1.76 раза, что приводит к существенному изменению его проницаемости (рис. 3). Для оценки влияния изменения проницаемости при сжатии грану-

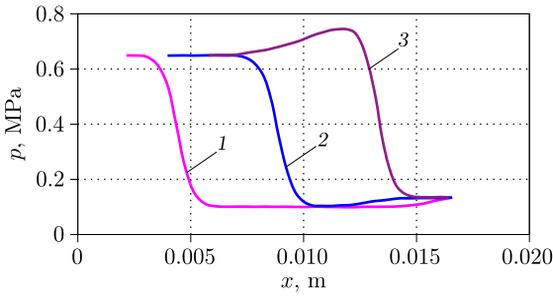


Рис. 7. Распределение давления по расчетной области в твердой фазе слоя [Figure 7. Pressure distribution by computational domain]

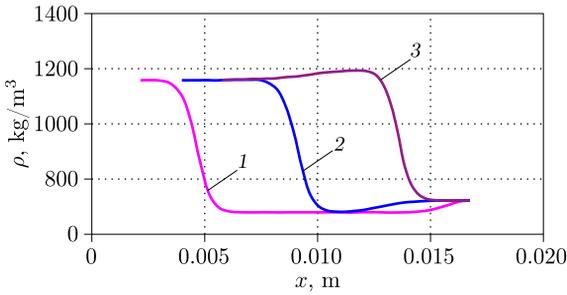


Рис. 8. Распределение плотности по расчетной области в твердой фазе слоя [Figure 8. Density distribution by computational domain]

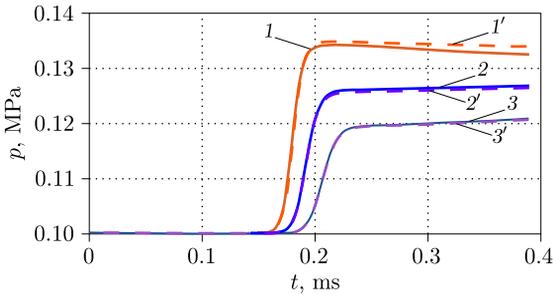


Рис. 9. Изменение давления проходящих волн [Figure 9. Pressure change of passing waves]

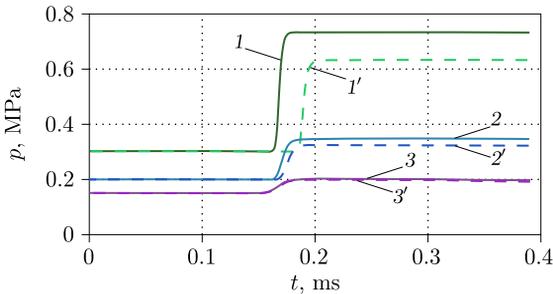


Рис. 10. Изменение давления отраженных волн [Figure 10. Reflected wave pressure change]

лированного слоя на параметры проходящих и отраженных волн ниже приводится сравнительный анализ численных решений с учетом и без учета изменения его проницаемости вследствие деформирования.

Для этого проведены расчеты взаимодействия гранулированного слоя с набегающими УВ различной амплитуды: $p_{sw} = 0.3$ МПа, $p_{sw} = 0.2$ МПа, $p_{sw} = 0.15$ МПа.

На рис. 9, 10 представлены временные зависимости давлений проходящих (рис. 9) и отраженных (рис. 10) волн в точках на удалении $-3H$ и $3H$ от границ слоя.

Цифрами 1 и 1' отмечено решение, полученное при параметрах газа за фронтом плоской ударной волны: $p_{sw} = 0.3$ МПа. Цифрами 2 и 2' — решение, полученное при параметрах газа за фронтом плоской ударной волны: $p_{sw} = 0.2$ МПа. Цифрами 3 и 3' — решение, полученное при параметрах газа за фронтом плоской ударной волны: $p_{sw} = 0.15$ МПа. Сплошные линии (1, 2, 3) соответствуют решению с учетом изменения коэффициента проницаемости, пунктирные линии (1', 2', 3') — решению с постоянным коэффициентом проницаемости 0.215. Влияние учета изменения проницаемости особо заметно на параметрах отраженных волн, и это влияние возрастает с ростом амплитуды набегающей волны. Эта же закономерность проявляется и для проходящих волн, но в меньшей мере.

Закключение. Численные исследования процессов нелинейного взаимодействия ударных волн с деформируемыми проницаемыми гранулированными слоями показали, что параметры проходящих и отраженных волн зависят от степени обжатия гранулированных слоев, более существенна эта зависимость для проходящих волн. Поэтому оценку защитных свойств проницаемых преград при воздействии сильных ударных волн следует проводить с учетом изменения их проницаемости вследствие деформирования. Разработанные математическая и численная модели позволяют получать параметры отраженных и проходящих волн через проницаемые гранулированные слои с учетом изменения проницаемости от степени деформационного сжатия слоя.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. И. А. Модин — проведение численных расчетов и экспериментальных исследований, обработка и анализ результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А. В. Кочетков — идея исследования, формулировка целей и задач исследования, визуализация и верификация результатов. Е. Г. Глазова — проведение численных расчетов, визуализация и верификация результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (РНФ № 20-79-00108).

Библиографический список

1. Гельфанд Б. Е., Сильников М. В. *Фугасные эффекты взрывов*. СПб.: Полигон, 2002. 272 с.
2. Гельфанд Б. Е., Губанов А. В., Тимофеев Е. И. Взаимодействие воздушных ударных волн с пористым экраном // *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1983. № 4. С. 79–84.

3. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials // *Experiments in Fluids*, 1997. vol. 22, no. 6. pp. 507–518. <https://doi.org/10.1007/s003480050078>.
4. Glam B., Igra O., Britan A., Ben-Dor G. Dynamics of stress wave propagation in a chain of photoelastic discs impacted by a planar shock wave; Part I, experimental investigation // *Shock Waves*, 2007. vol. 17, no. 1. pp. 1–14. <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0094-x>.
5. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Experimental investigation of the interaction between weak shock waves and granular layers // *Experiments in Fluids*, 1997. vol. 22, no. 5. pp. 432–443. <https://doi.org/10.1007/s003480050069>.
6. Britan A., Ben-Dor G. Shock tube study of the dynamical behavior of granular materials // *Int. J. Multiphase Flow*, 2006. vol. 32, no. 5. pp. 623–642. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007>.
7. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Development of a general approach for predicting the pressure fields of unsteady gas flows through granular media // *J. Appl. Phys.*, 2006. vol. 99, no. 9, 093519. <https://doi.org/10.1063/1.2197028>.
8. Britan A., Elperin T., Igra O., Jiang J. P. Head-on collision of a planar shock wave with a granular layer // *AIP Conf. Proc.*, 1997. vol. 370, no. 1. pp. 971–974. <https://doi.org/10.1063/1.50571>.
9. Levy A., Ben-Dor G., Sorek S. Numerical investigation of the propagation of shock waves in rigid porous materials: development of the computer code and comparison with experimental result // *J. Fluid Mech.*, 1996. vol. 324. pp. 163–179. <https://doi.org/10.1017/S0022112096007872>.
10. Britan A., Ben-Dor G., Elperin T., Igra O., Jiang J. P. Gas filtration during the impact of weak shock waves on granular layers // *Int. J. Multiphase Flow*, 1997. vol. 23, no. 3. pp. 473–491. [https://doi.org/10.1016/s0301-9322\(96\)00088-2](https://doi.org/10.1016/s0301-9322(96)00088-2).
11. Sadd M. H., Shukla A., Mei H., Zhu C. Y. The effect of voids and inclusions on wave propagation in granular materials / *Micromechanics and Inhomogeneity*. New York: Springer, 1990. pp. 367–383. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8919-4_23.
12. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Shock waves attenuation by granular filters // *Int. J. Multiphase Flow*, 2001. vol. 27, no. 4. pp. 617–634. [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(00\)00048-3](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(00)00048-3).
13. Альтшулер Л. В., Кругликов Б. С. Затухание сильных ударных волн в двухфазных и гетерогенных средах // *ПМТФ*, 1984. № 5. С. 24–29.
14. Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н., Урманчиев С. Ф. Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном // *Физика горения и взрыва*, 2000. Т. 36, № 4. С. 87–96.
15. Болдырева О. Ю., Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н., Кутушев А. Г. Численное исследование передачи ударно-волновой нагрузки экранируемой плоской стенке через слой порошкообразной среды и разделяющий их воздушный зазор // *Физика горения и взрыва*, 2007. Т. 43, № 1. С. 132–142.
16. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А., Савихин А. О. Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток // *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2018. № 52. С. 53–62. <https://doi.org/10.17223/19988621/52/6>.
17. Брагов А. М., Жегалов Д. В., Константинов А. Ю., Кочетков А. В., Модин И. А., Савихин А. О. Экспериментальное исследование деформационных свойств пакетов плетеных металлических сеток при динамическом и квазистатическом нагружении // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2016. № 3. С. 252–262. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.3.17>.
18. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019. vol. 1214, 012004. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004>.

19. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer // *AIP Conf. Proc.*, 2019. vol. 2116, 270003. <https://doi.org/10.1063/1.5114277>.
20. Игумнов Л. А., Казаков Д. А., Шишулин Д. Н., Модин И. А., Жегалов Д. В. Экспериментальные исследования высокотемпературной ползучести титанового сплава ВТ6 в условиях сложного напряженного состояния под воздействием агрессивной среды // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 286–302. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1850>.
21. Telegin S. V., Kirillova N. I., Modin I. A., Suleimanov E. V. Effect of particle size distribution on functional properties of $\text{Ce}_{0.9}\text{Y}_{0.1}\text{O}_{2-d}$ ceramics // *Ceramics Intern.*, 2021. vol. 47, no. 12. pp. 17316–17321. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.03.043>.
22. Kochetkov A. V., Modin I. A., Poverennov E. Y. Numerical study of elastoplastic dynamic compression of metal braided grid // *AIP Conf. Proc.*, 2021. vol. 2371, 050005. <https://doi.org/10.1063/5.0060905>.
23. Глазова Е. Г., Кочетков А. В. Численное моделирование взаимодействия деформируемых газопроницаемых пакетов сеток с ударными волнами // *ПМТФ*, 2012. № 3. С. 11–19.
24. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А. Деформационные свойства насыпного слоя из свинцовых шариков // *Проблемы прочности и пластичности*, 2017. Т. 79, № 4. С. 413–424. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-4-413-424>.
25. Яушев И. К. Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения / *Изв. СО АН СССР. Техн. науки*, № 8, вып. 2, 1967. С. 109–120.
26. Крайко А. Ф., Миллер Л. Г., Ширковский И. А. О течениях газа в пористой среде с поверхностями разрыва пористости // *ПМТФ*, 1982. № 1. С. 111–118.
27. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. *Газодинамика процессов истечения*. Новосибирск: Наука, 1984. 234 с.
28. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. М.: Наука, 1976. 400 с.
29. Брагов А. М., Константинов А. Ю., Кочетков А. В., Модин И. А., Савихин А. О. Экспериментальное исследование деформационных свойств насыпного слоя из свинцовых шариков при динамическом и квазистатическом нагружении // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2017. № 4. С. 5–16. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.02>.
30. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А., Турыгина И. А., Чекмарев Д. Т. Численное моделирование деформирования гранулированного слоя при сжатии // *Проблемы прочности и пластичности*, 2018. Т. 80, № 3. С. 359–367. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-3-359-367>.
31. Баженова Т. В., Гвоздева Л. Г. *Нестационарные взаимодействия ударных волн*. М.: Наука, 1977. 204 с.

MSC: 74E20, 74J99

Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable deformable granulated layer

I. A. Modin, A. V. Kochetkov, E. G. Glazova

Research Institute of Mechanics,

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,

23, korp. 6, pr. Gagarina, Nizhny Novgorod, 603022, Russian Federation.

Abstract

The article presents a mathematical model that describes, in a one-dimensional approximation, the interconnected processes of unsteady deformation of flat permeable granular layers. The model consists of solid particles and wave processes in pore and surrounding gas. The model is based on nonlinear equations of dynamics of two interpenetrating continua. As interfacial forces, drag forces are taken into account when gas flows around ball particles and friction forces. The numerical solution of the equations is carried out according to the modified scheme of S. K. Godunov, adapted to the problems of the dynamics of interpenetrating media. The contact surfaces of pure gas with the porous granular layer and pore gas are the surface of the fracture of porosity and permeability. The numerical implementation of contact conditions is based on the solution of the problem of disintegration of a gap at a jump in porosity. Solutions are obtained for the effects of plane shock waves on a deformable granular layer. We study the transformation of waves passing through an elastoplastic granular layer with and without taking into account changes in the permeability of the layer. When solving problems, the dependence of the change in the permeability of a layer on its compression is used, which is also obtained numerically when modeling the compression of symmetric fragments of granular layers in a spatial setting. Numerical studies of the processes of nonlinear interaction of shock waves

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Modin I. A., Kochetkov A. V., Glazova E. G. Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable deformable granulated layer, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 79–92. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1879> (In Russian).

Authors' Details:

Ivan A. Modin  <https://orcid.org/0000-0002-3561-4606>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Lab. of Simulation of Physical and Mechanical Processes; e-mail: mianet@mail.ru

Anatoliy V. Kochetkov  <https://orcid.org/0000-0001-7939-8207>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Theoretical, Computer and Experimental Mechanics; (Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics UNN); e-mail: kochetkov@mech.unn.ru

Elena G. Glazova  <https://orcid.org/0000-0003-4351-889X>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Dynamics of Multicomponent Media (Research Institute of Mechanics UNN); e-mail: glazova@mech.unn.ru

with deformable permeable granular layers have shown that the parameters of transmitted and reflected waves substantially depend on the degree of compression of the granular layers. Assessment of the protective properties of permeable barriers when exposed to strong shock waves should be carried out taking into account changes in their permeability due to deformation layers.

Keywords: shock wave, granular layer, permeability, interpenetrating continua, elastoplastic deformation, Godunov scheme.

Received: 25th August, 2021 / Revised: 26th December, 2021 /

Accepted: 24th January, 2022 / First online: 31st March, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I.A. Modin: Numerical calculations; Experimental research; Processing and verification of results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Kochetkov: Idea of study; Formulation of research goals and aims; Visualization and verification of results. E.G. Glazova: Numerical calculations; Visualization and verification of results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 20–79–00108).

References

1. Gelfand B. E., Silnikov M. V. *Fugasnye efekty vzryvov* [The Explosive Effects of Explosions]. St. Petersburg, Poligon, 2002, 272 pp. (In Russian)
2. Gel'fand B. E., Gubanov A. V., Timofeev E. I. Interaction of shock waves in air with a porous screen, *Fluid Dyn.*, 1983, vol. 18, no. 4, pp. 561–566. <https://doi.org/10.1007/BF01090621>.
3. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials, *Experiments in Fluids*, 1997, vol. 22, no. 6, pp. 507–518. <https://doi.org/10.1007/s003480050078>.
4. Glam B., Igra O., Britan A., Ben-Dor G. Dynamics of stress wave propagation in a chain of photoelastic discs impacted by a planar shock wave; Part I, experimental investigation, *Shock Waves*, 2007, vol. 17, no. 1, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1007/s00193-007-0094-x>.
5. Ben-Dor G., Britan A., Elperin T., et al. Experimental investigation of the interaction between weak shock waves and granular layers, *Experiments in Fluids*, 1997, vol. 22, no. 5, pp. 432–443. <https://doi.org/10.1007/s003480050069>.
6. Britan A., Ben-Dor G. Shock tube study of the dynamical behavior of granular materials, *Int. J. Multiphase Flow*, 2006, vol. 32, no. 5, pp. 623–642. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.01.007>.
7. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Development of a general approach for predicting the pressure fields of unsteady gas flows through granular media, *J. Appl. Phys.*, 2006, vol. 99, no. 9, 093519. <https://doi.org/10.1063/1.2197028>.
8. Britan A., Elperin T., Igra O., Jiang J. P. Head-on collision of a planar shock wave with a granular layer, *AIP Conf. Proc.*, 1997, vol. 370, no. 1, pp. 971–974. <https://doi.org/10.1063/1.50571>.
9. Levy A., Ben-Dor G., Sorek S. Numerical investigation of the propagation of shock waves in rigid porous materials: development of the computer code and comparison

- with experimental result, *J. Fluid Mech.*, 1996, vol. 324, pp. 163–179. <https://doi.org/10.1017/S0022112096007872>.
10. Britan A., Ben-Dor G., Elperin T., Igra O., Jiang J. P. Gas filtration during the impact of weak shock waves on granular layers, *Int. J. Multiphase Flow*, 1997, vol. 23, no. 3, pp. 473–491. [https://doi.org/10.1016/s0301-9322\(96\)00088-2](https://doi.org/10.1016/s0301-9322(96)00088-2).
 11. Sadd M. H., Shukla A., Mei H., Zhu C. Y. The effect of voids and inclusions on wave propagation in granular materials, In: *Micromechanics and Inhomogeneity*. New York, Springer, 1990, pp. 367–383. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8919-4_23.
 12. Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Shapiro H. Shock waves attenuation by granular filters, *Int. J. Multiphase Flow*, 2001, vol. 27, no. 4, pp. 617–634. [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(00\)00048-3](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(00)00048-3).
 13. Al'tshuler L. V., Kruglikov B. S. Attenuation of strong shock waves in two-phase and heterogeneous media, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1984, vol. 25, no. 5, pp. 672–676. <https://doi.org/10.1007/BF00909366>.
 14. Gubaidullin A. A., Dudko D. N., Urmancheev S. F. Modeling of the interaction between an air shock wave and a porous screen, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2000, vol. 36, no. 4, pp. 496–505. <https://doi.org/10.1007/BF02699481>.
 15. Boldyreva O. Yu., Gubaidullin A. A., Dudko D. N., Kutushev A. G. Numerical study of the transfer of shock-wave loading to a screened flat wall through a layer of a powdered medium and a subsequent air gap, *Combust. Explos. Shock Waves*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 114–123. <https://doi.org/10.1007/s10573-007-0016-3>.
 16. Kochetkov A. V., Leont'ev N. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Study of the stress-strain and strength properties of the metal woven grids, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2018, no. 52, pp. 53–62 (In Russian). <https://doi.org/10.17223/19988621/52/6>.
 17. Bragov A. M., Zhegalov D. V., Konstantinov A. Yu., Kochetkov A. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Experimental study of deformation properties of a package of woven metal mesh under dynamic and quasi-static stressing, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 3, pp. 252–262 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2016.3.17>.
 18. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1214, 012004. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1214/1/012004>.
 19. Modin I. A., Kochetkov A. V., Leontiev N. V. Numerical simulation of quasistatic and dynamic compression of a granular layer, *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2116, 270003. <https://doi.org/10.1063/1.5114277>.
 20. Igumnov L. A., Kazakov D. A., Shishulin D. N., Modin I. A., Zhegalov D. V. Experimental studies of high-temperature creep of titanium alloy VT6 under conditions of a complex stress state under the influence of an aggressive medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 286–302 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1850>.
 21. Telegin S. V., Kirillova N. I., Modin I. A., Suleimanov E. V. Effect of particle size distribution on functional properties of $\text{Ce}_{0.9}\text{Y}_{0.1}\text{O}_{2-d}$ ceramics, *Ceramics Intern.*, 2021, vol. 47, no. 12, pp. 17316–17321. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2021.03.043>.
 22. Kochetkov A. V., Modin I. A., Poverennov E. Y. Numerical study of elastoplastic dynamic compression of metal braided grid, *AIP Conf. Proc.*, 2021, vol. 2371, 050005. <https://doi.org/10.1063/5.0060905>.
 23. Glazova E. G., Kochetkov A. V. Numerical simulation of interaction of deformable gas-permeable packets of grids with shock waves, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 316–323. <https://doi.org/10.1134/S0021894412030029>.
 24. Kochetkov A. V., Leont'ev N. V., Modin I. A. Deformational properties of a filling layer of lead balls, *Problems of Strength and Plasticity*, 2017, vol. 79, no. 4, pp. 413–424 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-4-413-424>.

25. Yaushev I. K. Decay of an arbitrary discontinuity in a channel with a jump in the cross-sectional area, In: *Izv. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Nauki*, no. 8, issue 2, 1967, pp. 109–120 (In Russian).
26. Kraiko A. F., Miller L. G., Shirkovskii I. A. Gas flow in a porous medium with porosity discontinuity surfaces, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1982, vol. 23, no. 1, pp. 104–110. <https://doi.org/10.1007/BF00911987>.
27. Dulov V. G., Lukyanov G. A. *Gazodinamika protsessov istecheniia [Gas Dynamics of Processes of the Expiration]*. Novosibirsk, Nauka, 1984, 234 pp. (In Russian)
28. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Kraiko A. N., Prokopov G. P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 400 pp. (In Russian)
29. Bragov A. M., Konstantinov A. U., Kochetkov A. V., Modin I. A., Savikhin A. O. Experimental study of deformation properties of a bulk layer from plumbum balls under dynamic and quasistatic loading, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 4, pp. 16–27 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.4.02>.
30. Kochetkov A. V., Leontiev N. V., Modin I. A., Turygina I. A., Chekmarev D. T. Numerically modeling deformation of a granular bed loaded in compression, *Problems of Strength and Plasticity*, 2018, vol. 80, no. 3, pp. 359–367 (In Russian). <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-3-359-367>.
31. Bazhenova T. V., Gvozdeva L. G. *Nestatsionarnye vzaimodeistviia udarnykh voln [Unsteady Interactions of Shock Waves]*. Moscow, Nauka, 1977, 204 pp. (In Russian)



УДК 539.43

Применение метода Мюллера для определения собственных частот колебаний вязкоупругих тел с частотно-зависимыми характеристиками материала

Д. А. Ошмарин, Н. В. Севодина, Н. А. Юрлова

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

Аннотация

Поиск методами численного моделирования оптимальных по демпфирующим свойствам конструкций связан, как правило, с большим объемом вычислений. В то же время использование для этой цели механической задачи о собственных колебаниях конструкции позволяет оценить ее демпфирующие свойства вне зависимости от внешних силовых и кинематических воздействий, тем самым существенно уменьшив вычислительные затраты. Результатом решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных вязкоупругих тел являются комплексные собственные частоты колебаний, действительная часть которых представляет собой частоту, а мнимая — показатель демпфирования (скорость затухания). Механическое поведение вязкоупругого материала описывается линейной теорией Больцмана—Вольтерра, в рамках которой можно представить механические характеристики вязкоупругого материала в форме комплексных динамических модулей: модуля сдвига и модуля объемного сжатия. Как правило, данные характеристики зависят от частоты внешнего воздействия. В данной работе представлен алгоритм, позволяющий получить численное решение задачи о собственных колебаниях в случае, когда характеристики вязкоупругого материала являются функциями частоты. Алгоритм основан на использовании возможностей пакета прикладных программ ANSYS, а также на методе Мюллера, позволяющем эффективно решать частичную алгебраическую проблему комплексных собственных значений. Работоспособность и эффек-

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ошмарин Д. А., Севодина Н. В., Юрлова Н. А. Применение метода Мюллера для определения собственных частот колебаний вязкоупругих тел с частотно-зависимыми характеристиками материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 93–118. EDN: GAXLJJ. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1875>.

Сведения об авторах

Дмитрий Александрович Ошмарин  <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>

младший научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: oshmarin@icmm.ru

Севодина Наталья Витальевна  <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>

кандидат технических наук; научный сотрудник; отд. комплексных проблем механики деформируемых твердых тел; e-mail: natsev@icmm.ru

Юрлова Наталья Алексеевна  <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>

кандидат физико-математических наук, доцент; ученый секретарь; e-mail: yurlova@icmm.ru

тивность предложенного алгоритма продемонстрированы на примере двухслойной консольно заземленной пластинки, один слой которой выполнен из упругого материала, а другой — из вязкоупругого. Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением собственных частот колебаний, определенных решением задачи о собственных колебаниях такого рода конструкций, с резонансными частотами на амплитудно-частотных характеристиках перемещений из решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях в пакете прикладных программ ANSYS.

Ключевые слова: вязкоупругость, комплексные динамические модули, собственные колебания, комплексные собственные частоты, вынужденные установившиеся колебания, резонансные частоты.

Получение: 10 июня 2021 г. / Исправление: 15 февраля 2022 г. /

Принятие: 28 февраля 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

Введение. Демпфирующая способность материала играет важную роль в динамическом поведении конструкций. Она приводит к затуханию свободных колебаний и существенному снижению резонансных амплитуд перемещений и напряжений при установившихся вынужденных колебаниях [1]. Количественная оценка диссипативных свойств объектов может основываться на результатах решения двух задач. Первая из них связана с рассмотрением свободных колебаний. При этом диссипация системы проявляется в затухании колебаний, а скорость затухания является количественной оценкой диссипативных свойств системы. Вторая задача связана с рассмотрением вынужденных установившихся колебаний. При этом диссипативные свойства системы проявляются в ограничении резонансных амплитуд.

Поиск методами численного моделирования оптимальных по демпфирующим свойствам конструкций связан с большим объемом вычислений. С одной стороны, необходимо исследовать в заданном диапазоне параметры, позволяющие управлять демпфирующими свойствами. С другой стороны, требуется при каждой комбинации этих параметров проанализировать поведение исследуемого объекта в определенном спектре динамических воздействий. При рассмотрении свободных колебаний это связано с необходимостью решения динамических задач при различных начальных условиях, а в задаче о вынужденных колебаниях — с построением решений при различных частотах возмущающих воздействий. Последнее обстоятельство значительно усложняет получение оптимальных по демпфирующим свойствам конструкций.

В связи с этим в рамках рассматриваемой проблемы представляет интерес постановка механической задачи о собственных колебаниях системы, позволяющая оценить демпфирующие свойства вне зависимости от внешних силовых и кинематических воздействий.

Многие прикладные задачи механики связаны с анализом различных сред, проявляющих зависимость напряжений и деформаций от истории изменения во времени внешних силовых, кинематических, температурных и прочих воздействий.

Демпфирующие свойства конструкции можно определить, основываясь на учете временного фактора в рамках теорий сплошной среды наследственного вида: вязкого сопротивления Максвелла, вязкого трения Кельвина—

Фойгта, наследственности Больцмана—Вольтерра, реологической модели Пойтинга—Томсона, термодиффузионной теории Зинера и других [2]. Формулировка общего вида и конкретизация соотношений для изотропных, анизотропных и неоднородных материалов, развитие общих методов вязкоупругости содержатся в фундаментальных монографиях А. А. Ильюшина и Б. Е. Победри [2], Ю. Н. Работнова [3, 4], Н. Х. Арутюняна [5, 6], И. И. Бугакова [7], В. Г. Карнаухова [8], М. А. Колтунова [9], В. В. Москвитина [10], А. Р. Ржаницына [11, 12], Д. Бленда [13], Р. Кристенсена [14], Дж. Ферри [15] и других. Моделям, содержащим дробные производные и другие операторы дробного порядка, посвящены обзоры [16] и [17], в которых рассмотрено 337 и 250 работ соответственно.

Наиболее типичными представителями такого рода материалов являются полимерные и композиционные материалы, горные породы, бетонные и железобетонные конструкции. Здесь использовалась наиболее общая линейная теория Больцмана—Вольтерра, отражающая практически все особенности квазистатического и динамического поведения вязкоупругих материалов [18–20]. Использование соотношений данной теории в задачах о собственных или вынужденных установившихся колебаниях позволяет осуществить переход к описанию материальных характеристик в терминах комплексных динамических модулей. В этом случае определяющие соотношения будут иметь точно такой же вид, как и для упругого материала, но при этом коэффициенты, определяющие связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций, будут являться комплексными величинами.

Решением задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных вязкоупругих тел в приведенной постановке являются комплексные собственные частоты колебаний, действительная часть которых определяет частоту, а мнимая — показатель демпфирования (скорость затухания).

Использование комплексных динамических модулей в задачах о вынужденных установившихся колебаниях существенно упрощает процесс получения их решений как аналитическими [21–23], так и численными методами, в частности методом конечных элементов [21, 22, 24, 25]. Более того, используемые в данном случае комплексные величины модулей могут быть получены из экспериментов напрямую [26], что является большим преимуществом данного подхода при использовании в практических приложениях. На сегодняшний день процедуры численного решения задач о вынужденных установившихся колебаниях реализованы во многих пакетах конечно-элементного анализа, в том числе в ANSYS.

Однако при рассмотрении собственных колебаний использование подхода к описанию материальных характеристик на основе комплексных динамических модулей имеет ряд особенностей, приводящих к тому, что процесс получения решения такого рода задач является достаточно нетривиальным. В том числе это объясняется тем, что для большинства известных вязкоупругих материалов наблюдается ярко выраженная зависимость материальных свойств от частоты внешнего возбуждения [22, 26–32]. Так, как упоминается в [22], у механических свойств резиноподобных материалов можно выделить два разных уровня демпфирования: материалы с низким демпфированием, у которых динамический модуль и коэффициент демпфирования (обычно со значением порядка 0.1) медленно меняются при изменении частоты колебаний,

что позволяет рассматривать их как константы в диапазоне частот, обычно вызывающих проблемы с вибрацией конструкции, и материалы с высоким демпфированием, у которых как динамический модуль, так и коэффициент демпфирования значительно зависят от частоты. В последнем случае наблюдается переходная зона, в которой динамический модуль очень быстро растет с частотой, а коэффициент демпфирования велик (обычно со значениями порядка 1) и может медленно или быстро изменяться в зависимости от частоты.

Как отмечается в работе [27], на примере материала типа «ПДИ», который является механическим аналогом (имитатором) твердого ракетного топлива и представляет собой высоконаполненную полимерную композицию [10], экспериментально показано, что динамический модуль является монотонно возрастающей функцией логарифма частоты нагружения и в частотном диапазоне от 0 до 200 Гц с увеличением частоты увеличивается более чем в 5 раз.

В этой связи крайне важной оказывается необходимость учета частотной зависимости материальных характеристик при численном решении задач как о собственных, так и о вынужденных установившихся колебаниях. Но если в случае вынужденных установившихся колебаний данная особенность не приводит к дополнительным сложностям при получении решения, то при рассмотрении собственных колебаний учет частотной зависимости комплексных динамических модулей требует разработки специальных методов и подходов. Отчасти именно этим можно объяснить отсутствие в современных коммерческих пакетах программ реализованных процедур получения численного решения задач о собственных колебаниях для вязкоупругих материалов, свойства которых описываются комплексными динамическими модулями, компоненты которых зависят от частоты.

Численная реализация задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных вязкоупругих систем приводит к алгебраической проблеме действительных или комплексных собственных значений. При использовании дискретных численных методов, в частности метода конечных элементов, имеет смысл решать лишь частичную проблему собственных значений, так как такие задачи, как правило, сводятся к алгебраической задаче большой размерности. Данное обстоятельство определяет требование к алгоритму, состоящее в том, что собственные значения должны находиться строго в порядке их возрастания, при этом алгоритм должен обеспечить возможность решения алгебраической проблемы комплексных собственных значений.

Данным условиям наилучшим образом удовлетворяет метод Мюллера, который является основой представленного в данной работе способа решения задачи о собственных колебаниях вязкоупругих конструкций с учетом частотной зависимости комплексных динамических модулей, описывающих вязкоупругие свойства материала конструкции. Метод Мюллера, варианты выбора начальных приближений для решения алгебраической проблемы действительных или комплексных собственных значений подробно рассмотрены в работах [33, 34].

Метод Мюллера зарекомендовал себя как весьма универсальный и подходящий для решения широкого класса спектральных задач, сводящихся к алгебраическим проблемам на комплексные собственные значения [35–40]. Более того, стоит отметить, что данный метод позволяет получить решения задач, в характеристические уравнения которых искомый параметр входит

сложным образом (различного рода степенные зависимости, обратная зависимость и т.д.) [38–40]. Однако несмотря на все описанные выше особенности, использовать метод Мюллера напрямую для решения задачи о собственных колебаниях с учетом зависимости механических характеристик вязкоупругого материала от частоты оказалось невозможно.

Как это демонстрируется далее, компоненты комплексных динамических модулей, будучи функциями частоты внешнего возбуждения, в задачах о собственных колебаниях являются функциями только вещественной компоненты искомого характеристического параметра — комплексной собственной частоты колебаний. Поскольку характеристическое уравнение составляется относительно комплексной собственной частоты (с учетом действительной и мнимой частей), то для корректного учета частотной зависимости комплексных модулей от частоты требуется разработка специальных методов, которые позволят получить решение задачи на собственные значения, для которой коэффициенты характеристического уравнения являются функциями только действительной части характеристического параметра.

В данной работе представлен вариант алгоритма определения комплексных собственных частот колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел, выполненных из материалов с частотно-зависимыми характеристиками. Он является дальнейшим развитием подходов к построению численных решений задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных упругих или вязкоупругих тел, развиваемых под руководством В. П. Матвеевко [19, 20]. Работоспособность и эффективность предложенного метода продемонстрированы на примере двухслойной консольно защемленной пластинки, один слой которой выполнен из упругого материала, а другой — из вязкоупругого. Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением собственных частот колебаний, определенных решением задачи о собственных колебаниях такого рода конструкций, с резонансными частотами на амплитудно-частотных характеристиках перемещений, полученных решением задачи об установившихся вынужденных колебаниях в пакете прикладных программ ANSYS.

1. Математическая постановка задач о собственных и вынужденных установившихся колебаниях кусочно-однородных вязкоупругих тел. Особенности математической постановки задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных тел, имеющих в своем составе элементы, выполненные из вязкоупругого материала, механическое поведение которого описывается линейной наследственной теорией вязкоупругости с учетом зависимости механических характеристик от частоты внешнего воздействия, приводят к необходимости разработки специальных подходов к построению численных решений на основе метода конечных элементов. Для этого воспользуемся способом, сформулированным ранее в работах [18–20].

Движение однородных упругих или вязкоупругих элементов тела описывается вариационным уравнением, сформулированным на основе соотношений линейной теории упругости или вязкоупругости с использованием принципа виртуальных работ, имеющим вид

$$\sum_{n=1}^N \int_{V_1^n} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_n \ddot{u}_i \delta u_i - f_i \delta u_i) dV +$$

$$+ \sum_{m=1}^M \int_{V_2^m} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_m \ddot{u}_i \delta u_i - f_i \delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS = 0. \quad (1)$$

В случае кусочно-однородного тела объемом $V = V_1 \cup V_2$ часть объема V_1 состоит из N упругих элементов, а часть объема V_2 — из M вязкоупругих элементов. В уравнение (1) входят компоненты: σ_{ij} — симметричного тензора напряжений Коши; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ — симметричного тензора деформаций; u_i — вектора перемещений; f_i — вектора объемных усилий; вектора поверхностных усилий p_i , заданных на S_σ — части поверхности кусочно-однородного тела объемом V ; ρ_n , ρ_m — удельные плотности упругих и вязкоупругих частей кусочно-однородного тела.

Упругие и вязкоупругие слои идеально скреплены между собой. На поверхности, ограничивающей объем рассматриваемого кусочно-однородного тела, заданы кинематические и силовые граничные условия:

$$u = U_i \quad \text{на} \quad S_u, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i \quad \text{на} \quad S_\sigma, \quad (2)$$

где n_j — компоненты вектора внешней нормали к поверхности S_σ , S_u — часть поверхности кусочно-однородного тела объемом V , на которой заданы кинематические граничные условия.

Граничные условия определяются следующим образом:

- при рассмотрении собственных колебаний компоненты вектора поверхностных усилий и вектора перемещений принимают нулевые значения: $U_i = 0$, $p_i = 0$;
- в случае вынужденных установившихся колебаний компоненты векторов перемещений и поверхностных усилий изменяются по гармоническому закону: $U_i = U_i^0 \cos \Omega t$, $p_i = p_i^0 \cos \Omega t$.

Для упругих составляющих объема V_1 при малых деформациях выполняются физические соотношения для изотропного [2, 41]

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G^{(n)} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right), \quad \sigma = B^{(n)} \theta \quad (3)$$

или анизотропного материалов [2, 41]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(n)} \varepsilon_{kl}. \quad (4)$$

Здесь $G^{(n)}$, $B^{(n)}$ — упругие сдвиговые и объемные модули, σ — среднее напряжение, θ — объемная деформация, $C_{ijkl}^{(n)}$ — компоненты тензора упругих констант анизотропного тела.

Для вязкоупругих частей рассматриваемого тела выполняются соотношения линейной вязкоупругости для изотропного материала [2–20]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} &= 2G_0^{(m)} \left(e_{ij} - \int_{-\infty}^t H^{(m)}(t - \tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right), \\ \sigma &= B_0^{(m)} \left(\theta - \int_{-\infty}^t F^{(m)}(t - \tau) \theta(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $G_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$ — мгновенные сдвиговые и объемные модули; s_{ij} , e_{ij} — компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций; $F^{(m)}$, $H^{(m)}$ — ядра релаксации.

В рамках данной работы будут рассматриваться как собственные, так и вынужденные колебания кусочно-однородного вязкоупругого тела. В случае вынужденных колебаний решение задачи, описываемой уравнением (1), будет отыскиваться в виде

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x})e^{i\Omega t}. \quad (6)$$

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях вязкоупругих тел. В этом случае граничные условия являются однородными, и в записи принципа возможных перемещений останутся только слагаемые, учитывающие работу внутренних напряжений и инерционных сил. В этом случае решение задачи будет отыскиваться как

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x})e^{i\omega t}. \quad (7)$$

В выражениях (6), (7) $\bar{u}(\bar{x}, t)$ — обобщенный вектор состояния; $\bar{u}_0(\bar{x})$ — вектор перемещений, зависящий только от пространственных координат (форма колебаний); Ω — частота внешнего возбуждения; $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ комплексная собственная частота колебаний, в которой действительная часть ω_{Re} является круговой собственной частотой колебаний, а мнимая часть ω_{Im} характеризует скорость их затухания.

Переход к описанию вязкоупругих свойств материала в терминах комплексных динамических модулей в задачах о собственных и вынужденных установившихся колебаниях требует некоторых математических преобразований. При вынужденных установившихся колебаниях нижний предел интегрирования в соотношениях (5) заменяется на $-\infty$ [20]. После подстановки решения (7) в (5), замены переменной $s = t - \tau$ ($\tau = t - s$, $d\tau = ds$) и соответствующих математических преобразований уравнения, определяющие связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций, в случае изотропного материала принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} s_{ij}^0 &= 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) \left(1 - \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \cos \Omega s ds + i \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \sin \Omega s ds \right), \\ \sigma^0 &= B_0^{(m)} \theta^0(x_i) \left(1 - \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \cos \Omega s ds + i \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \sin \Omega s ds \right). \end{aligned}$$

Далее вводятся следующие обозначения, которые определяют действительную и мнимую компоненты комплексных динамических модулей сдвига и объемного сжатия [18–20]:

$$\begin{aligned} G_{\text{Re}}^{(m)} &= G_0^{(m)} \left(1 - \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \cos \Omega s ds \right), \\ G_{\text{Im}}^{(m)} &= G_0^{(m)} \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \sin \Omega s ds, \\ B_{\text{Re}}^{(m)} &= B_0^{(m)} \left(1 - \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \cos \Omega s ds \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$B_{\text{Im}}^{(m)} = B_0^{(m)} \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \sin \Omega s \, ds.$$

С учетом (8) определяющие соотношения (5) для вынужденных установившихся колебаний можно переписать в следующем виде:

$$\bar{s}_{ij} = 2\tilde{G}^{(m)} e_{ij}, \quad \bar{\sigma} = \tilde{B}^{(m)} \theta, \quad (9)$$

где $\tilde{G}^{(m)} = G_{\text{Re}}^{(m)} + iG_{\text{Im}}^{(m)}$, $\tilde{B}^{(m)} = B_{\text{Re}}^{(m)} + iB_{\text{Im}}^{(m)}$.

Аналогичные математические преобразования можно осуществить и для задачи о собственных колебаниях. Для этого необходимо подставить в (7) выражение для комплексной собственной частоты $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$. В результате с учетом этой подстановки искомое решение задачи о собственных колебаниях примет следующий вид:

$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \bar{u}_0(\bar{x}) e^{i\omega_{\text{Re}} t} e^{-\omega_{\text{Im}} t}.$$

Однако для получения конечного вида определяющих соотношений в случае собственных колебаний вводятся два допущения [18–20]:

- колебания происходят с медленно меняющимися амплитудами;
- начальные возмущения не влияют на поведение системы.

Первое допущение позволяет вынести из-под знака интеграла $e^{-\omega_{\text{Im}} t}$. Второе допущение позволяет изменить нижний предел интегрирования на $-\infty$. Подробное обоснование сделанных предположений содержится в работах [19, 20].

Осуществив математические преобразования, аналогичные тем, что были проделаны для случая вынужденных установившихся колебаний, мы получаем физические уравнения в виде

$$s_{ij}^0 = 2G_0^{(m)} e_{ij}^0(x_i) \left(1 - \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \cos \omega_{\text{Re}} s \, ds + i \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \sin \omega_{\text{Re}} s \, ds \right),$$

$$\sigma^0 = B_0^{(m)} \theta^0(x_i) \left(1 - \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \cos \omega_{\text{Re}} s \, ds + i \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \sin \omega_{\text{Re}} s \, ds \right).$$

Далее вводятся обозначения для компонент комплексных модулей, аналогичные (8):

$$G_{\text{Re}}^{(m)} = G_0^{(m)} \left(1 - \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \cos \omega_{\text{Re}} s \, ds \right),$$

$$G_{\text{Im}}^{(m)} = G_0^{(m)} \int_{-\infty}^t H^{(m)}(s) \sin \omega_{\text{Re}} s \, ds, \quad (10)$$

$$B_{\text{Re}}^{(m)} = B_0^{(m)} \left(1 - \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \cos \omega_{\text{Re}} s \, ds \right),$$

$$B_{\text{Im}}^{(m)} = B_0^{(m)} \int_{-\infty}^t F^{(m)}(s) \sin \omega_{\text{Re}} s \, ds,$$

которые определяют действительную и мнимую части комплексного динамического модуля. Соотношения (4) для задачи о собственных колебаниях примут вид

$$\bar{s}_{ij} \approx 2\tilde{G}^{(m)} e_{ij}, \quad \bar{\sigma} \approx \tilde{B}^{(m)} \theta, \quad (11)$$

где $\tilde{G}^{(m)} = G_{\text{Re}}^{(m)} + iG_{\text{Im}}^{(m)}$, $\tilde{B}^{(m)} = B_{\text{Re}}^{(m)} + iB_{\text{Im}}^{(m)}$.

Здесь следует отметить, что соотношения (9) выполняются точно, а (11) — приближенно. Анализ соотношений (8) и (10) позволяет сделать вывод о том, что с точки зрения физического смысла данные соотношения эквивалентны. Тем не менее данные соотношения имеют существенное отличие, состоящее в том, что в общем случае выражения (8) являются функциями вещественного параметра Ω , а выражения (10) — функциями действительной части ω_{Re} комплексной собственной частоты $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$. Данная особенность приводит к тому, что процесс построения алгоритма численного решения задач о собственных колебаниях методом конечных элементов (МКЭ) оказывается крайне нетривиальной задачей.

2. Численная реализация задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях вязкоупругих тел с частотно-зависимыми модулями методом конечных элементов. Решение сформулированных выше вариационных задач о собственных и о вынужденных установившихся колебаниях вязкоупругих тел с частотно-зависимыми комплексными динамическими модулями может быть осуществлено методом конечных элементов (МКЭ). Типовые процедуры МКЭ приводят рассматриваемые задачи к системам линейных алгебраических уравнений, которые могут быть записаны в матричной форме (12) или (13) для соответствующих задач:

$$([K] - \omega^2[M]) \{\xi\} = \{0\}, \quad (12)$$

$$([K] - \Omega^2[M]) \{\xi\} = \{F\}, \quad (13)$$

где $[K]$ — глобальная матрица жесткости, $[M]$ — глобальная матрица масс, $\{\xi\}$ — вектор узловых неизвестных, $\{F\}$ — глобальный вектор узловых нагрузок.

В случае кусочно-однородного вязкоупругого тела, состоящего из упругих и вязкоупругих частей, глобальную матрицу жесткости в уравнениях (12)–(13) можно представить в виде суммы упругой $[K_{\text{elast}}]$ и вязкоупругой $[K_{\text{vis}}]$ составляющих:

$$[K] = [K_{\text{vis}}] + [K_{\text{elast}}].$$

В свою очередь, в случае изотропного материала для вязкоупругих компонент рассматриваемого кусочно-однородного тела матрицу жесткости вязкоупругой части, согласно соотношениям (8), (9) и (10), (11), можно представить в виде (14), воспользовавшись алгоритмом, приведенным в [35]:

$$[K_{\text{vis}}] = \tilde{B}[K_B] + \tilde{G}[K_G], \quad (14)$$

в котором комплексные динамические модули \tilde{G} , \tilde{B} в общем случае являются либо функциями частоты внешнего возбуждения Ω (при рассмотрении вынужденных установившихся колебаний), либо функциями действительной части комплексной собственной частоты ω_{Re} (в случае анализа собственных колебаний). С учетом введенных обозначений матричные уравнения (12)–(13) можно переписать в следующем виде:

$$([K_{\text{elast}}] + \tilde{B}[K_B](\omega_{\text{Re}}) + \tilde{G}[K_G](\omega_{\text{Re}}) - \omega^2[M]) \{\xi\} = \{0\}, \quad (15)$$

$$([K_{\text{elast}}] + \tilde{B}[K_B](\Omega) + \tilde{G}[K_G](\Omega) - \Omega^2[M])\{\xi\} = \{F\}. \quad (16)$$

Здесь выражение $\tilde{G}[K_G] + \tilde{B}[K_B]$ описывает вязкоупругую часть рассматриваемого кусочно-однородного тела объемом V_2 , $[K_B]$, $[K_G]$ — объемная и сдвиговая компоненты матрицы жесткости вязкоупругой части.

При рассмотрении задачи о вынужденных установившихся колебаниях, описываемой матричным уравнением (16), ее решение в виде значений составляющих вектора узловых неизвестных $\{\xi\}$ для любого заданного значения частоты колебаний Ω отыскивается путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при помощи любого известного метода. В частности, для решения данной задачи могут быть использованы коммерческие пакеты прикладных программ, например ANSYS.

На сегодняшний день возможности данного пакета позволяют решать задачи о вынужденных установившихся колебаниях в приведенной выше постановке. При этом в рамках данного пакета существует несколько вариантов задания значений комплексных динамических модулей. Более подробную информацию о возможностях пакета ANSYS для решения задач о вынужденных установившихся колебаниях систем с вязкоупругими элементами, материальные свойства которых описываются комплексными модулями, можно найти в [42].

Однако в случае рассмотрения собственных колебаний получить решение задачи, описываемой матричным уравнением (15), в виде значений комплексных собственных частот $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$ и форм колебаний $\{\xi\} = \{\xi_{\text{Re}}\} + i\{\xi_{\text{Im}}\}$ оказывается весьма затруднительно. Согласно определению, условием существования нетривиального решения $\{\xi\} \neq \{0\}$ для СЛАУ, описываемой матричным уравнением (15), является равенство нулю определителя матрицы коэффициентов системы:

$$D = ([K_{\text{elast}}] + \tilde{B}[K_B] + \tilde{G}[K_G] - \omega^2[M]) = 0.$$

Таким образом, мы получили алгебраическую проблему комплексных собственных значений для матрицы $[\tilde{G}[K_G] + \tilde{B}[K_B] + [K_{\text{elast}}] - \omega^2[M]]$.

При выборе метода решения алгебраической проблемы собственных значений необходимо учитывать большую размерность СЛАУ и возможность решения частичной алгебраической проблемы комплексных собственных значений. Следует отметить, что для рассматриваемой задачи, описываемой матричным уравнением (15), имеет смысл решать только частичную проблему собственных значений, то есть определять не весь спектр собственных частот, а только какую-либо его часть. Последнее обстоятельство выдвигает жесткое условие, состоящее в том, что собственные значения должны быть гарантированно определены либо в заданном интервале, либо в требуемой последовательности, например, в порядке возрастания действительных частей в случае комплексных собственных значений.

Исследования динамического поведения конструкций в настоящее время активно проводятся с помощью алгоритмов, в той или иной мере реализованных в коммерческих пакетах программ инженерных расчетов, реализующих метод конечных элементов (MatLab, ANSYS, Abaqus, MSC NASTRAN и т.д.). Однако решение задачи о собственных колебаниях вязкоупругих конструкций, материал которых описывается наследственной теорией вязкоупругости

на основе комплексных динамических модулей, изменяющихся независимо друг от друга, стандартными методами в пакете ANSYS невозможно.

Процедура численного решения задачи о собственных колебаниях для систем, содержащих элементы, выполненные из материалов, свойства которых описываются комплексными динамическими модулями как с частотно-зависимыми, так и с частотно-независимыми характеристиками, до сих пор в ANSYS не реализована, что приводит к необходимости разработки специализированных численных алгоритмов ее решения.

Для случая, когда составляющие комплексных динамических модулей сдвига и объемного сжатия не зависят от частоты колебаний, т.е. являются постоянными $\tilde{G} = \text{const}$, $\tilde{B} = \text{const}$ (например, на ограниченном участке рассматриваемого частотного диапазона), разработан алгоритм численного решения задачи о собственных колебаниях, построенный на использовании возможностей пакета ANSYS, которые дают возможность записывать глобальные ансамблированные матрицы жесткости и масс, позволяющие сформировать уравнение вида (15).

Для решения алгебраической проблемы собственных значений для матриц с постоянными коэффициентами в рамках данного алгоритма используется метод Мюллера с различными сценариями выбора начальных приближений [33, 34]. В результате решения проблемы собственных значений методом Мюллера получается спектр комплексных собственных частот колебаний вязкоупругой конструкции с частотно-независимыми характеристиками материала. Так как в общем случае характеристики вязкоупругого материала зависят от частоты колебаний внешнего воздействия, коэффициенты матрицы жесткости также являются переменными величинами функциями частоты, и напрямую воспользоваться каким-либо методом для решения частичной алгебраической проблемы комплексных собственных значений (16) не представляется возможным. Авторам не удалось найти в литературе сведений о способах решения данной проблемы для наиболее общих и широко применяемых для большого класса материалов моделей вязкоупругости. При этом необходимо отметить, что предлагаемый авторами алгоритм является универсальным и подходящим для решения модальных задач при использовании различных моделей вязкоупругости, в том числе и моделей, содержащих дробные производные и другие операторы дробного порядка [16, 17].

В научной литературе [21, 22, 26–32, 43, 44] приводятся различные варианты графических зависимостей составляющих комплексного динамического модуля от частоты колебаний. Традиционно такого рода зависимости модулей сдвига и объемного сжатия определяются экспериментально на основе метода динамического механического анализа (ДМА), и строятся они в зависимости от частоты внешнего возбуждения. При переходе к задаче о собственных колебаниях данные зависимости будут являться уже функциями действительной части комплексной собственной частоты ω_{Re} (15), которая имеет смысл круговой собственной частоты колебаний. Однако ω_{Re} является лишь компонентой искомой комплексной собственной частоты $\omega = \omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}}$, что приводит к дополнительным сложностям при реализации численного решения рассматриваемой задачи. Очевидно, что в общем случае собственные

значения матрицы

$$[\tilde{G}(\omega_{\text{Re}})[K_G] + \tilde{B}(\omega_{\text{Re}})[K_B] + [K_{\text{elast}}] - \omega^2[M]]$$

будут отличаться от собственных значений матрицы

$$[\tilde{G}(\omega)[K_G] + \tilde{B}(\omega)[K_B] + [K_{\text{elast}}] - \omega^2[M]].$$

Данный факт приводит к необходимости разработки специального алгоритма, позволяющего корректно учитывать частотные зависимости свойств вязкоупругого материала конструкции как функций только действительной части комплексной собственной частоты колебаний.

3. Алгоритм определения значений собственных частот колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел, выполненных из материалов с частотно-зависимыми характеристиками. Основой алгоритма является методика расчета собственных частот колебаний систем с вязкоупругими элементами, характеристики которых не зависят от частоты, предложенная в работе [35]. Она построена на использовании возможностей пакета ANSYS, позволяющих осуществлять запись глобальных ансамблированных матриц жесткости и масс, и метода Мюллера [33], который позволяет определять искомые комплексные собственные значения матриц, т.е. комплексные собственные частоты колебаний.

Для простоты и наглядности процесс построения алгоритма численного решения задачи о собственных колебаниях для конструкций, содержащих элементы из частотно-зависимых вязкоупругих материалов, будет рассмотрен на примере изотропного вязкоупругого материала, который характеризуется четырьмя компонентами комплексных динамических модулей: $G_{\text{Re}}, G_{\text{Im}}, B_{\text{Re}}, B_{\text{Im}}$.

Пусть для каждой составляющей комплексного динамического модуля известна ее графическая зависимость от частоты внешнего воздействия Ω , аналогичная представленным на рис. 1, из которых видно, что каждому i -тому значению частоты внешнего воздействия Ω_i соответствует единственно возможный набор значений компонент комплексных динамических модулей $G_{\text{Re}}^{(i)}, G_{\text{Im}}^{(i)}, B_{\text{Re}}^{(i)}, B_{\text{Im}}^{(i)}$.

Зная значения компонент комплексных динамических модулей $G_{\text{Re}}^{(i)}, G_{\text{Im}}^{(i)}, B_{\text{Re}}^{(i)}, B_{\text{Im}}^{(i)}$, снятых с графика, можно определить значения комплексных собственных частот колебаний $\{\omega\}_i^{\text{T}} = \{\omega_{\text{Re}}\}_i^{\text{T}} + i\{\omega_{\text{Im}}\}_i^{\text{T}}$, соответствующих этим значениям материальных характеристик. Фигурные скобки в данном случае обозначают вектор-столбцы, содержащие значения комплексных собственных частот колебаний, соответствующих набору материальных констант $G_{\text{Re}}^{(i)}, G_{\text{Im}}^{(i)}, B_{\text{Re}}^{(i)}, B_{\text{Im}}^{(i)}$, полученных для i -того значения частоты внешнего воздействия Ω_i . Таким образом, полученный вектор-столбец $\{\omega\}_i^{\text{T}} = \{\omega_{\text{Re}}\}_i^{\text{T}} + i\{\omega_{\text{Im}}\}_i^{\text{T}}$ определяет спектр собственных частот колебаний, полученный для i -того набора значений компонент комплексных динамических модулей.

Если вычислить $\{\omega\}_i^{\text{T}}$ для (n) наборов материальных констант, то можно построить зависимость действительных ω_{Re} и мнимых ω_{Im} частей комплексных собственных частот колебаний от значений компонент комплексных ди-

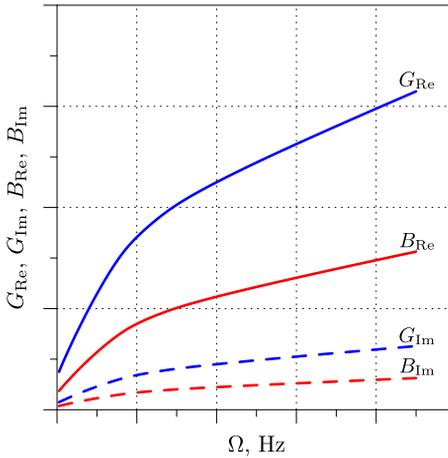


Рис. 1. Графические зависимости компонент комплексных динамических модулей от частоты внешнего воздействия
 [Figure 1. Graphical relations between components of complex dynamic moduli and frequency of external excitation]

динамических модулей. Обозначим эти зависимости как $\omega_{Re}(\Omega)$ и $\omega_{Im}(\Omega)$. При этом параметр Ω , обозначающий частоту внешнего возбуждения, определяет соответствующий этой частоте набор материальных характеристик G_{Re} , G_{Im} , B_{Re} , B_{Im} . Таким образом, зависимости $\omega_{Re}(\Omega)$ и $\omega_{Im}(\Omega)$ есть зависимости $\omega_{Re}(G_{Re}, G_{Im}, B_{Re}, B_{Im})$ и $\omega_{Im}(G_{Re}, G_{Im}, B_{Re}, B_{Im})$.

В момент резонанса значение частоты внешнего возбуждения совпадает со значением собственной частоты колебаний объекта. При этом в случае, когда собственные частоты колебаний являются комплексными, резонанс наступает при совпадении со значением частоты внешнего возбуждения значения действительной части комплексной собственной частоты ω_{Re} . Данное условие можно выразить следующим образом:

$$\omega_{Re} = \Omega. \tag{17}$$

Для определения значений действительных частей комплексных собственных частот колебаний на график зависимости значений действительных частей выбранных мод колебаний от частоты внешнего возбуждения (рис. 2, а) наносится прямая под углом 45° к оси абсцисс, графически обозначающая выполнение условия (17). Ордината точки пересечения этой прямой с каждой кривой, соответствующей определенной моде колебаний, дает значение действительной части комплексной собственной частоты для данной моды (рис. 3, а).

После определения значений действительных частей комплексных собственных частот колебаний определяются соответствующие им значения мнимых частей. Для этого на график зависимости мнимых частей выбранных мод колебаний от частоты внешнего возбуждения (рис. 2, б) наносятся прямые, параллельные оси ординат, которые пересекают ось абсцисс в точках, соответствующих условию (17). Пересечение каждой из этих прямых с кривой мнимой части для соответствующей моды даст значение мнимой части комплексной собственной частоты колебаний (рис. 3, б).

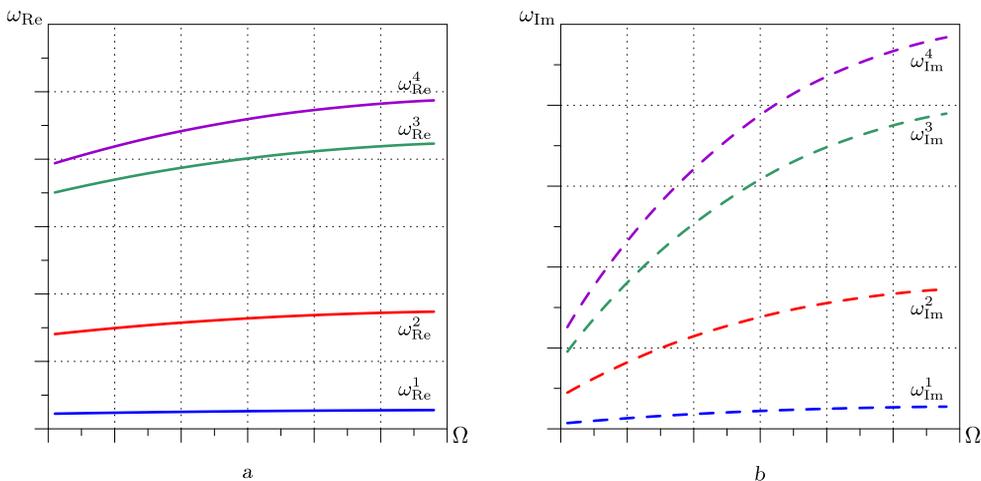


Рис. 2. Зависимости действительных ω_{Re} (a) и мнимых частей ω_{Im} (b) комплексных собственных частот колебаний от значений компонент комплексных динамических модулей [Figure 2. Relations between real parts ω_{Re} (a) and imaginary parts ω_{Im} (b) of complex natural vibration frequency and values of component of complex dynamic moduli]

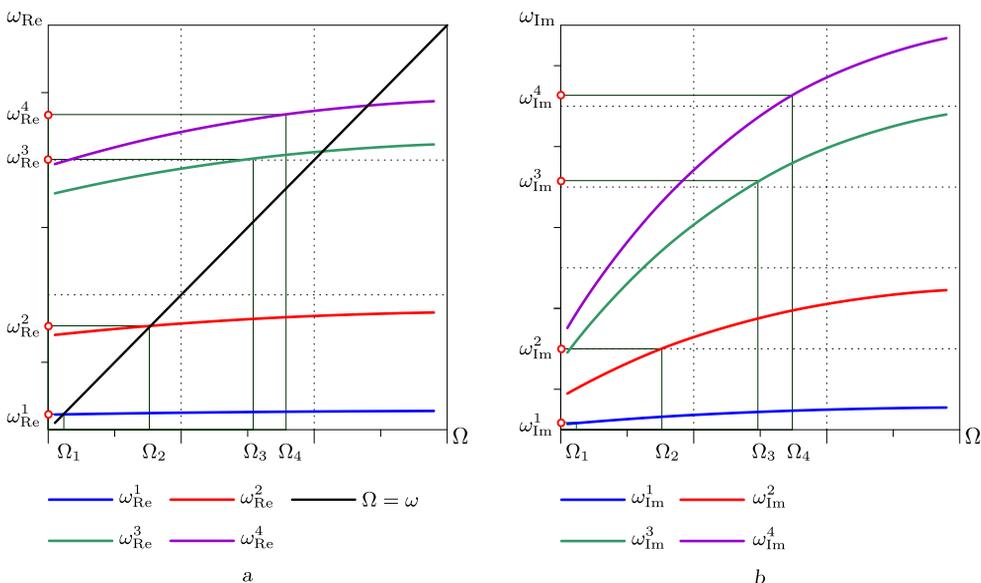


Рис. 3. Методика определения значений действительных ω_{Re} (a) и мнимых частей ω_{Im} (b) комплексных собственных частот колебаний [Figure 3. A technique for determining values of real parts ω_{Re} (a) and imaginary parts ω_{Im} (b) of complex natural vibration frequencies]

Таким образом, применение описанных выше вычислительно-графических процедур позволяет определить значения обеих компонент комплексных собственных частот колебаний кусочно-однородного вязкоупругого тела, содержащего элементы из вязкоупругих материалов с частотно-зависимыми характеристиками.

4. Апробация и верификация алгоритма. Продемонстрируем предлагаемый алгоритм определения комплексных собственных частот колебаний вязкоупругой конструкции с частотно-зависимыми характеристиками материала на примере двухслойной консольно защемленной пластинки, представленной на рис. 4. Один слой пластинки с размерами $l_p = l_v = 210$ мм, $b_p = b_v = 26$ мм, $h_p = h_v = 0.6$ мм выполнен из упругого материала (обозначен голубым цветом на рис. 4), а второй — из вязкоупругого (обозначен желтым цветом). Физико-механические характеристики упругого слоя следующие: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, удельная плотность $\rho = 7800$ кг/м³.

Пусть свойства вязкоупругого материала в диапазоне частот внешнего воздействия от 0 до 500 Гц изменяются так, как представлено на рис. 5. Данные зависимости качественно отражают один из возможных вариантов поведения компонент частотно-зависимых комплексных динамических модулей [21, 45] и выбраны исключительно для демонстрации работоспособности и эффективности предлагаемого алгоритма.

Диапазон изменения составляющих комплексных динамических модулей лежит в следующих пределах: $G_{Re} = 1.5 \cdot 10^9 \div 1.26 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{Im} = 0.2G_{Re}$, $B_{Re} = 7.45 \cdot 10^{10} \div 6.26 \cdot 10^{11}$ Па. Мнимая часть комплексного модуля объемного сжатия принята равной нулю $B_{Im} = 0$. Удельная плотность материала вязкоупругого слоя равна $\rho_v = 1200$ кг/м³.

Воспользуемся решением задачи о вынужденных установившихся колебаниях вязкоупругой конструкции, в составе которой есть элемент, выполненный из материала с частотно-зависимыми свойствами, для проверки правиль-

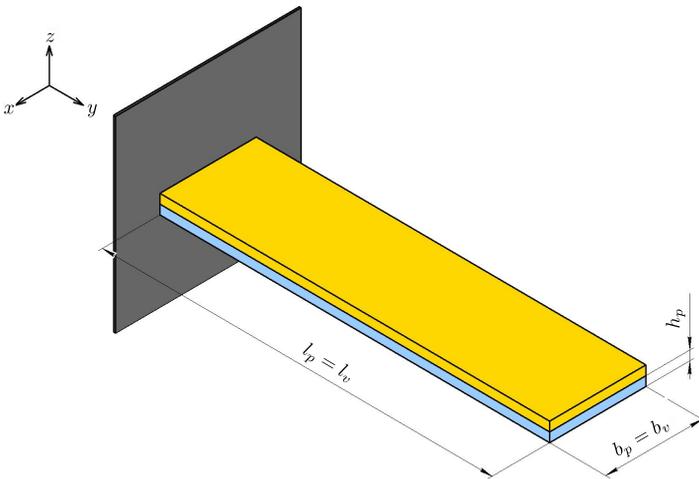


Рис. 4. Расчетная схема конструкции (онлайн в цвете)
 [Figure 4 (color online). Computational scheme of the structure]

ности определения спектра собственных частот колебаний такого рода объекта. Эта задача решена с помощью стандартных процедур, реализованных в ANSYS, при этом свойства вязкоупругого материала, описанные кривыми, представленными на рис. 5, задавались таблично в зависимости от частоты внешнего воздействия в рамках выбранного диапазона.

Комплексные собственные частоты колебаний, полученные на основе решения задачи о собственных колебаниях, и резонансные частоты, определенные на амплитудно-частотных характеристиках (АЧХ) в результате решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях в пакете прикладных программ ANSYS, сравниваются с полученными по предлагаемому алгоритму действительными составляющими собственных частот конструкции.

Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания кусочно-однородных вязкоупругих тел, свойства которых описываются частотно-зависимыми комплексными динамическими модулями. При анализе вынужденных установившихся колебаний были рассмотрены оба варианта зависимости компонент комплексных динамических модулей от частоты (возрастающие с ростом частоты и убывающие), представленные на рис. 5. Возбуждение колебаний осуществлялось путем приложения к заземленному концу пластины вектора перемещений $\vec{U}_0 = \{U_x, U_y, U_z\} = \{1, 1, 1\}$ мм.

На рис. 6 приведены первые 6 мод колебаний с указанием точки съема информации о компонентах вектора перемещений на данной моде (рис. 6, a); полученные амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) модуля вектора перемещений $|U_{sum}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$, отнесенных к модулю вектора возбуждающего усилия $|U_0| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}$ для первых шести мод в рамках выбранного диапазона частот внешнего воздействия (рис. 6, b, c).

На рис. 6, b приведены результаты, полученные для компонент комплекс-

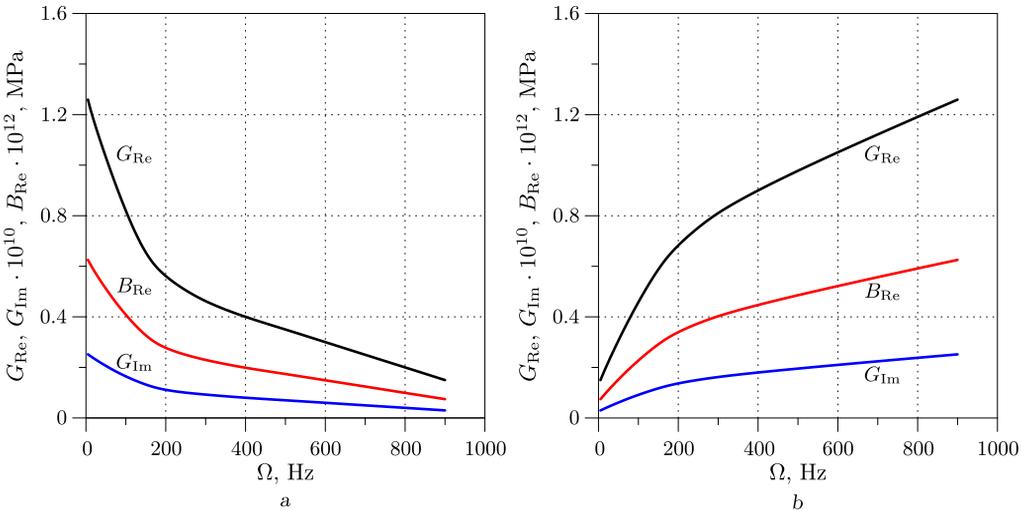
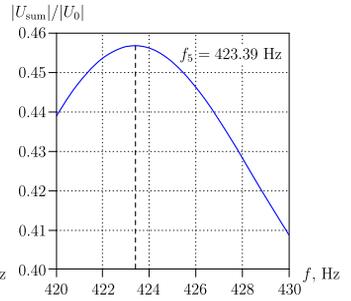
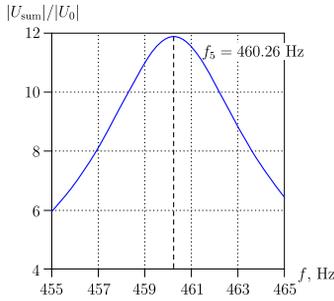
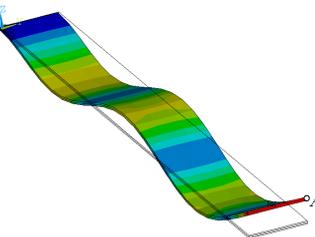
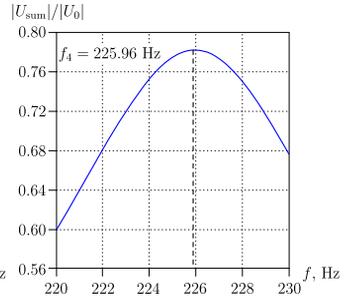
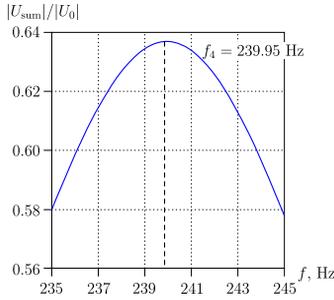
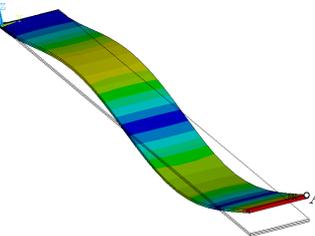
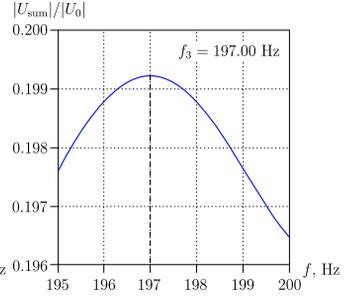
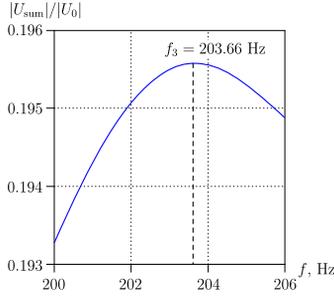
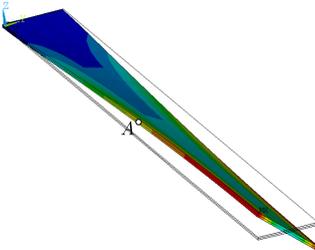
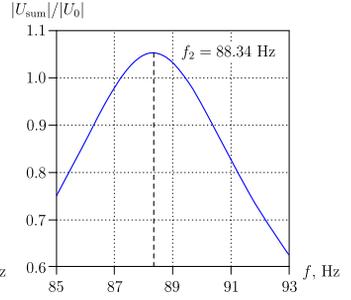
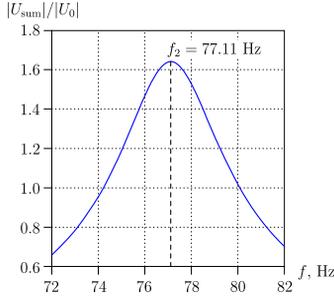
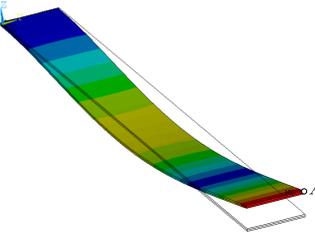
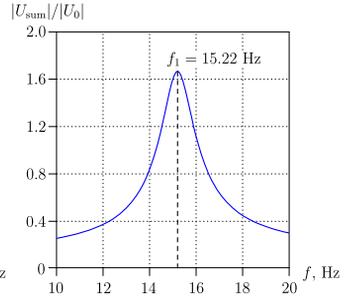
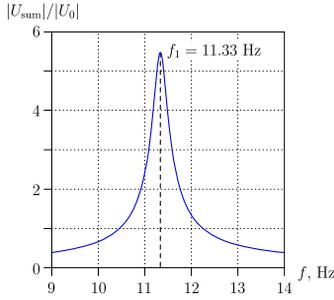
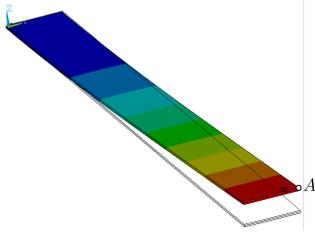


Рис. 5. Графические зависимости компонент комплексных динамических модулей от частоты внешнего воздействия: возрастающие (a) и убывающие (b)

[Figure 5. Graphical relations of components of complex dynamic moduli and frequency of external excitation: increasing (a) and decreasing (b)]

Modes of vibrations

Frequency response plots



a

b

c

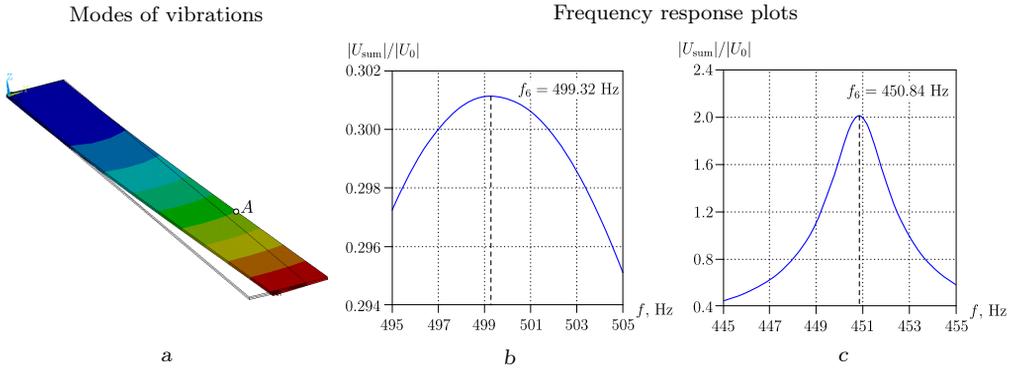


Рис. 6. Первые шесть мод колебаний пластинки (а) и амплитудно-частотные характеристики $|U_{\text{sum}}|/|U_0|$, полученные для возрастающих (b) или убывающих (c) с ростом частоты внешнего воздействия компонент комплексного динамического модуля

[Figure 6. The first six modes of vibrations of the plate (a) and frequency response plots of $|U_{\text{sum}}|/|U_0|$ obtained for increasing (b) and decreasing (c) components of complex dynamic moduli]

ных динамических модулей вязкоупругого материала, возрастающих с ростом частоты внешнего воздействия, а на рис. 6, c — для убывающих. Значения компонент вектора перемещений снимались в точке А (рис. 6, a). Стоит отметить, что для гарантированной регистрации крутильной (№ 3, рис. 6, a) и планарной (№ 6, рис. 6, a) мод колебаний расположение точки А отличается от положения остальных точек съема АЧХ для изгибных мод колебаний. Это объясняется тем, что величина перемещений на изгибных модах колебаний существенно выше, чем на крутильных или планарных модах. В результате при фиксации изгибных и, например, крутильных мод в одной и той же точке при построении АЧХ резонанс крутильной моды может попадать на восходящую или нисходящую ветвь резонансной кривой изгибной моды и в силу большой разницы в величине перемещений, будет на графике не виден. Перенос же точки съема информации позволяет его обнаружить.

Стоит отметить, что в случае убывающих с ростом частоты значений комплексных модулей для рассматриваемой системы наблюдается смена порядка чередования 5 и 6 форм колебаний. Так, для убывающих модулей мода, соответствующая значению 5-й собственной частоты $\omega_5 = 423.29$ Гц, становится изгибной, а мода, соответствующая 6-й собственной частоте $\omega_6 = 450.84$ Гц, — планарной. Тогда как для возрастающих модулей мода, соответствующая значению 5-й собственной частоты $\omega_5 = 460.20$ Гц, является планарной, а мода, соответствующая 6-й собственной частоте $\omega_5 = 499.32$ Гц, — изгибной.

Пунктирной линией на рисунках 6, b и 6, c обозначены значения собственных частот колебаний, определенных по предложенному алгоритму.

В таблице приведено сравнение собственных частот колебаний конструкции, в составе которой есть слой, выполненный из материала с частотно-зависимыми возрастающими или убывающими составляющими комплексных динамических модулей. Для сравнения в столбцах 2 и 4 данной таблицы приведены значения частот колебаний, соответствующих резонансным пикам на АЧХ и полученных в результате решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях и представленных на рис. 6.

Комплексные собственные частоты колебаний, определенные на основе предлагаемого алгоритма, и резонансные частоты, определенные на основе задачи о вынужденных колебаниях, решенной в ANSYS [Complex natural vibration frequencies determined on the basis of the proposed algorithm and resonant frequencies determined on the basis of forced steady-state vibration problem solved in ANSYS]

Modes of vibrations	Incremental moduli		Decreasing moduli	
	ANSYS	Suggested method	ANSYS	Suggested method
1	11.33	$11.34 + i 0.16$	15.21	$15.24 + i 0.72$
2	77.11	$77.09 + i 2.03$	88.34	$88.29 + i 3.63$
3	203.66	$206.26 + i 7.02$	197.00	$199.28 + i 5.97$
4	239.95	$239.99 + i 9.20$	225.96	$225.81 + i 7.19$
5	460.26	$460.20 + i 3.01$	423.39	$423.75 + i 11.14$
6	499.32	$499.36 + i 21.73$	450.84	$450.85 + i 1.22$

Результаты, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что предлагаемый алгоритм нахождения спектра собственных комплексных частот колебаний с высокой степенью достоверности позволяет определить собственные частоты колебаний вязкоупругой конструкции, в составе которой есть элементы с частотно-зависимыми свойствами.

Проверить численно определение показателей демпфирования (мнимых частей комплексных собственных частот) в этом случае не представляется возможным, поскольку решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях такой информации не дает.

Стоит отметить, что при решении задачи о вынужденных установившихся колебаниях результат решения зависит от вида нагружения, места приложения возбуждающей нагрузки и места регистрации, а также анализа всех компонент вектора перемещений. Этот факт частично отражен в результатах, представленных на рис. 6. При некорректном выборе сочетания параметров возбуждения и регистрации колебаний есть вероятность определить не все возможные резонансные режимы и, соответственно, только часть резонансных частот. В этой связи важно правильно подобрать конфигурацию указанных выше факторов для гарантированного определения всех значений собственных частот колебаний в выбранном частотном диапазоне. Эта вероятность полностью исключается в предлагаемом алгоритме определения спектра собственных комплексных частот колебаний, поскольку он построен на основе решения задачи о собственных колебаниях, результаты решения которой не зависят от способа возбуждения.

Сравнение значений действительных частей комплексных собственных частот, определенных из решения задачи о собственных колебаниях, демонстрирует хорошее согласование со значениями резонансных частот, определенных из решения задачи о вынужденных установившихся колебаниях в пакете прикладных программ ANSYS.

Поскольку предлагаемый алгоритм позволяет определить комплексные собственные частоты колебаний, появляется возможность найти для каждой моды колебаний и значения мнимых частей собственных частот, которые являются количественной характеристикой демпфирующих свойств системы.

Заключение. В работе предложен алгоритм численного решения задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных вязкоупругих конструкций с учетом частотной зависимости характеристик вязкоупругого материала, основанный на использовании возможностей пакета прикладных программ ANSYS, позволяющих записывать глобальные ансамблированные матрицы жесткости и масс, а также метода Мюллера для решения частичной проблемы собственных значений для итогового разрешающего матричного уравнения.

Эффективность предложенного алгоритма была продемонстрирована на примере определения значений комплексных собственных частот колебаний двухслойной консольно защемленной пластины, один слой которой выполнен из упругого материала, а второй — из вязкоупругого материала с частотно-зависимыми характеристиками. Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением собственных частот колебаний, определенных решением задачи о собственных колебаниях такого рода конструкций, с резонансными частотами на амплитудно-частотных характеристиках перемещений из решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях в пакете прикладных программ ANSYS. Для демонстрации универсальности предложенного алгоритма рассмотрено два варианта частотной зависимости материальных свойств вязкоупругого слоя.

Представленные результаты свидетельствуют о том, что разработанный алгоритм является эффективным инструментом для анализа динамических характеристик систем, содержащих элементы из вязкоупругих материалов, в том числе с частотно-зависимыми материальными характеристиками, и может являться основой для построения алгоритмов численной оптимизации динамических характеристик различного рода объектов.

Конкурирующие интересы. Конфликты интересов отсутствуют. Номер лицензии ANSYS в «ИМСС УрО РАН» № 1064623.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ПФИЦ УрО РАН по теме № АААА-А19-119012290100-8.

Библиографический список

1. Nashif A. D., Jones D. I. G., Henderson J. P. *Vibration Damping*. New York: John Wiley & Sons, 1985. 480 pp.
2. Ильющин А. А., Победра Б. Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 383 с.
5. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. В. *Теория ползучести неоднородных тел*. М.: Наука, 1983. 336 с.
6. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Наумов В. Э. *Механика растущих вязкоупругопластических тел*. М.: Наука, 1987. 472 с.
7. Бугаков И. И. *Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения)*. М.: Наука, 1973. 288 с.

8. Карнаухов В. Г. *Связанные задачи термовязкоупругости*. Киев: Наук. думка, 1982. 260 с.
9. Колтунов М. А. *Ползучесть и релаксация*. М.: Высш. шк., 1976. 277 с.
10. Москвитин В. В. *Сопrotивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе*. М.: Наука, 1982. 328 с.
11. Ржаницын А. Р. *Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени*. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 252 с.
12. Ржаницын А. Р. *Теория ползучести*. М.: Стройиздат, 1968. 419 с.
13. Bland D. R. *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Mineola, New York: Dover Publications, 2016. 125 pp.
14. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*. New York: Academic Press, 1982. xii+364 pp.
15. Ferry J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. New York: John Wiley & Sons, 1980. xxiv+641 pp.
16. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // *Appl. Mech. Rev.*, 2010. vol. 63, no. 1, 010801. <https://doi.org/10.1115/1.4000563>.
17. Шитикова М. В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 1. С. 3–40. <https://doi.org/10.31857/S0572329921060118>.
18. Трояновский И. Е. О построении периодических решений интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости // *Механика полимеров*, 1974. № 3. С. 529–531.
19. Адамов А. А., Матвейенко В. П., Труфанов Н. А., Шардаков И. Н. *Методы прикладной вязкоупругости*. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 398 с.
20. Matveyenko V. P., Kligman E. P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions // *J. Vibr. Contr.*, 1997. vol. 3, no. 1. pp. 87–102. <https://doi.org/10.1177/107754639700300107>.
21. Baz A. M. *Active and Passive Vibration Damping*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2019. xxii+719 pp. <https://doi.org/10.1002/9781118537619>.
22. Vasques C. M. A., Moreira R. A. S., Dias Rodrigues J. Viscoelastic damping technologies. Part I: Modeling and finite element implementation // *J. Adv. Res. Mech. Eng.*, 2010. vol. 1, no. 2. pp. 76–95.
23. Moleiro F., Araújo A. L., Reddy J. N. Benchmark exact free vibration solutions for multilayered piezoelectric composite plates // *Compos. Struct.*, 2017. vol. 182. pp. 598–605. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.035>.
24. Wang F., Wei Z., Xu B. Damping performance of viscoelastic material applied to blades // *Rev. Int. Métodos Numér. Cál. Diseño Ing.*, 2019. vol. 35, no. 1, 9. <https://doi.org/10.23967/j.rimmi.2018.09.002>.
25. Gröhlich M., Böswald M., Winter R. Vibration damping capabilities of treatments with frequency and temperature dependent viscoelastic material properties / *Proc. of 23rd Internat. Congress on Acoustics*, 2019. pp. 4273–4280. <https://pub.dega-akustik.de/ICA2019/data/articles/000565.pdf>.
26. Martinez-Agirre M., Elejabarrieta M. J. Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data // *J. Sound Vibr.*, 2011. vol. 330, no. 16. pp. 3930–3943. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.03.025>.
27. Словиков С. В., Бульбович Р. В. Экспериментальное исследование динамических механических свойств вязкоупругих материалов // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2010. № 2. С. 104–112.
28. Wang Y., Palmer R. A., Schoonover J. R., Aubuchon S. R. Dynamic mechanical analysis and dynamic infrared linear dichroism study of the frequency-dependent viscoelastic behavior of a poly(ester urethane) // *Vibr. Spectros.*, 2006. vol. 42, no. 1. pp. 74–77. <https://doi.org/10.1016/j.vibspec.2006.04.017>.

29. López-Guerra E. A., Solares S. D. On the frequency dependence of viscoelastic material characterization with intermittent-contact dynamic atomic force microscopy: avoiding mischaracterization across large frequency ranges // *Beilstein J. Nanotechnol.*, 2020. vol. 11. pp. 1409–1418. <https://doi.org/10.3762/bjnano.11.125>.
30. Lawless B. M., Sadeghi H., Temple D. K., Dhaliwal H., Espino D. M., Hukins D. W. L. Viscoelasticity of articular cartilage: Analysing the effect of induced stressand the restraint of bone in a dynamic environment // *J. Mech. Beh. Biomed. Mater.*, 2017. vol. 75. pp. 293–301. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.07.040>.
31. Durand D., Delsanti M., Adam M., Luck J. M. Frequency Dependence of Viscoelastic Properties of Branched Polymers near Gelation Threshold // *Europhysics Letters*, 1987. vol. 3, no. 3. pp. 297–301. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/3/3/008>.
32. Li W., Shepherd D. E. T., Espino D. M. Frequency dependent viscoelastic properties of porcine brain tissue // *J. Mech. Beh. Biomed. Mater.*, 2020. vol. 102, 103460. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2019.103460>.
33. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer // *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 1956. vol. 10, no. 56. pp. 208–215. <https://doi.org/10.2307/2001916>.
34. Матвеенко В. П., Севодин М. А., Севодина Н. В. Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела // *Вычисл. мех. сплош. сред.*, 2014. Т. 7, № 3. С. 331–336. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.32>.
35. Клигман Е. П., Матвеенко В. П., Севодина Н. В. Определение собственных колебаний кусочно-однородных вязкоупругих тел с использованием пакета ANSYS // *Вычисл. мех. сплош. сред.*, 2010. Т. 3, № 2. С. 46–54. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16>.
36. Корепанова Т. О., Матвеенко В. П., Севодина Н. В. Численный анализ сингулярности напряжений в вершине пространственных пересекающихся трещин // *Вычисл. мех. сплош. сред.*, 2011. Т. 4, № 3. С. 68–73. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.3.28>.
37. Бочкарев С. А., Лекомцев С. В. Гидроупругая устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, выполненных из пьезоэлектрического материала // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2019. Т. 2. С. 35–48. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.04>.
38. Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data // *Int. J. Smart Nano Mater.*, 2019. vol. 10, no. 2. pp. 156–176. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1542356>.
39. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations // *Int. J. Smart Nano Mater.*, 2018. vol. 9, no. 2. pp. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>.
40. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem // *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2021. vol. 28, no. 19. pp. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>.
41. Лехницкий С. Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 415 с.
42. *Ansys 17.2 Documentation*. SAS IP, Inc., 2016.
43. Shaw M. T., Mac Knight W. J. *Introduction to Polymer Viscoelasticity*. New York: Wiley, 2005. xix+316 pp. <https://doi.org/10.1002/0471741833>.
44. Nielsen L. E., Landel R. F. *Mechanical Properties of Polymers and Composites*. CRC Press: Boca Raton, 1993. 582 pp. <https://doi.org/10.1201/b16929>.
45. Cowans J. *The Effects of Viscoelastic Behavior on the Operation of a Delayed Resonator Vibration Absorber*: MS Thesis. 18. Clemson Univ., 2006. https://tigerprints.clemson.edu/all_theses/18.

MSC: 74H45, 74K20

An application of Mueller's method for determining eigenfrequencies of vibrations of viscoelastic bodies with frequency-dependent characteristics of a material

*D. A. Oshmarin, N. V. Sevodina, N. A. Iurlova*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev str., Perm, 614013, Russian Federation.

Abstract

A search for optimal damping properties of structures using methods of numerical modelling is as a rule associated with a large number of computations. Alongside this an application of mechanical problem of natural vibrations of structures for this purpose allows estimating damping properties of structures regardless external force and kinematic impacts. This fact leads to sufficient decrease in computational costs. The results of the solution to the problem of natural vibrations of piecewise-homogeneous viscoelastic bodies are complex natural vibration frequencies, the real part of which is a frequency of vibrations and imaginary part is damping index (rate of vibration damping). A mechanical behavior of a viscoelastic material is described by the linear theory of Boltzman–Volterra. Within the frameworks of this theory mechanical properties of a viscoelastic material can be represented as complex dynamic moduli (shear modulus and bulk modulus). As a rule, these properties depend on frequency of external excitation. In current paper an algorithm which allows obtaining solution to the problem on natural vibrations, in case when components of complex dynamic moduli are frequency-dependent, is represented. The algorithm is based on using capabilities of the ANSYS software package and also the Mueller's method which allows solving partial problem of complex eigenvalues. An efficiency and productivity of the algorithm is demonstrated on the example of a two-layered cantilever plate. One layer of the plate is made of an elastic material and

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlova N. A. An application of Mueller's method for determining eigenfrequencies of vibrations of viscoelastic bodies with frequency-dependent characteristics of a material, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 93–118. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1875> (In Russian).

Authors' Details:

Dmitrii A. Oshmarin  <https://orcid.org/0000-0002-9898-4823>

Junior Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;

e-mail: oshmarin@icmm.ru*Natalya V. Sevodina*  <https://orcid.org/0000-0001-9374-7135>

Cand. Techn. Sci.; Researcher; Dept. of Complex Problems of Deformable Solids Mechanics;

e-mail: natsev@icmm.ru*Nataliya A. Iurlova*  <https://orcid.org/0000-0003-3497-0358>Cand Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Academic Secretary; e-mail: yurlova@icmm.ru

the second one is made of a viscoelastic material. Reliability of the obtained results is proved by comparison natural vibration frequencies obtained as a result of solution to the problem of natural vibrations and resonant frequencies at frequency response plots of the displacements obtained as a result of solution to the problem of forced steady-state vibrations using the ANSYS software package.

Keywords: viscoelasticity, complex dynamic moduli, natural vibrations, complex eigenfrequencies, forced steady-state vibrations, resonance frequencies.

Received: 10th June, 2021 / Revised: 15th February, 2022 /

Accepted: 28th February, 2022 / First online: 31st March, 2022

Competing interests. Authors have no competing interests. ANSYS license number no. 1064623, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The work was supported with the State Assignment of Perm Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, no. AAAA–A19–119012290100–8.

References

1. Nashif A. D., Jones D. I. G., Henderson J. P. *Vibration Damping*. New York, John Wiley & Sons, 1985, 480 pp.
2. Ilyushin A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazkoupругosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermal Viscoelasticity]. Moscow, Nauka, 1970, 280 pp. (In Russian)
3. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Amsterdam, North-Holland Publ., 1969, ix+822 pp.
4. Rabotnov Yu. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. Mir Publ., Nauka, 1980, 387 pp.
5. Harutyunyan N. Kh., Kolmanovsky V. V. *Teoriia polzuchesti neodnorodnykh tel* [Theory of Creep of Inhomogeneous Bodies]. Moscow, Nauka, 1983, 336 pp. (In Russian)
6. Harutyunyan N. Kh., Drozdov A. D., Naumov V. E. *Mekhanika rastushchikh viazkoupругo-plasticheskikh tel* [Mechanics of Growing Viscoelastic Plastic Bodies]. Moscow, Nauka, 1987, 472 pp. (In Russian)
7. Bugakov I. I. *Polzuchest' polimernykh materialov (teoriia i prilozheniia)* [Creep of Polymeric Materials (Theory and Applications)]. Moscow, Nauka, 1973, 288 pp. (In Russian)
8. Karnaukhov V. G. *Sviazannye zadachi termoviazkoupругosti* [Coupled Problem of Thermo-viscoelasticity]. Kiev, Nauk. Dumka, 1982, 260 pp. (In Russian)
9. Koltunov M. A. *Polzuchest' i relaksatsiia* [Creep and Relaxation]. Moscow, Vyssh. Shk., 1976, 277 pp. (In Russian)
10. Moskvitin V. V. *Soprotivlenie viazkoupругikh materialov primenitel'no k zariadam raketnykh dvigatelei na tverdom toplive* [The Strength of Viscoelastic Materials as Applied to Charges of Solid-Propellant Rocket Engines]. Moscow, Nauka, 1982, 328 pp. (In Russian)
11. Rzhantsyn A. R. *Nekotorye voprosy mekhaniki sistem, deformiruiushchikhsia vo vremeni* [Some Problems in the Mechanics of Time-Deformable Systems]. Moscow, Leningrad, Gostehizdat, 1949, 252 pp. (In Russian)
12. Rzhantsyn A. R. *Teoriia polzuchesti* [Creep Theory]. Moscow, Stroiizdat, 1968, 419 pp. (In Russian)

13. Bland D. R. *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Mineola, New York, Dover Publications, 2016, 125 pp.
14. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity, An Introduction*. New York, Academic Press, 1982, xii+364 pp.
15. Ferry J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*. New York, John Wiley & Sons, 1980, xxiv+641 pp.
16. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results, *Appl. Mech. Rev.*, 2010, vol. 63, no. 1, 010801. <https://doi.org/10.1115/1.4000563>.
17. Shitikova M. V. Fractional operator vModels in dynamic problems of mechanics of solids: A review, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 1, pp. 1–33. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010022>.
18. Troyanovskii I. E. Construction of periodic solutions of integrodifferential equations of viscoelasticity, *Polymer Mechanics*, 1974, vol. 10, no. 3, pp. 447–448. <https://doi.org/10.1007/BF00865608>.
19. Adamov A. A., Matveenko V. P., Trufanov N. A., Shardakov I. N. *Metody prikladnoi viazkouprugosti* [Methods of Applied Viscoelasticity]. Ekaterinburg, UB RAS, 2003, 398 pp. (In Russian)
20. Matveyenko V. P., Kligman E. P. Natural vibration problem of viscoelastic solids as applied to optimization of dissipative properties of constructions, *J. Vibr. Contr.*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 87–102. <https://doi.org/10.1177/107754639700300107>.
21. Baz A. M. *Active and Passive Vibration Damping*. Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2019, xxii+719 pp. <https://doi.org/10.1002/9781118537619>.
22. Vasques C. M. A., Moreira R. A. S., Dias Rodrigues J. Viscoelastic damping technologies. Part I: Modeling and finite element implementation, *J. Adv. Res. Mech. Eng.*, 2010, vol. 1, no. 2, pp. 76–95.
23. Moleiro F., Araújo A. L., Reddy J. N. Benchmark exact free vibration solutions for multilayered piezoelectric composite plates, *Compos. Struct.*, 2017, vol. 182, pp. 598–605. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.035>.
24. Wang F., Wei Z., Xu B. Damping performance of viscoelastic material applied to blades, *Rev. Int. Métodos Numér. Cál. Diseño Ing.*, 2019, vol. 35, no. 1, 9. <https://doi.org/10.23967/j.rimmi.2018.09.002>.
25. Gröhlich M., Böswald M., Winter R. Vibration damping capabilities of treatments with frequency and temperature dependent viscoelastic material properties, In: *Proc. of 23rd Internat. Congress on Acoustics*, 2019, pp. 4273–4280. <https://pub.dega-akustik.de/ICA2019/data/articles/000565.pdf>.
26. Martinez-Agirre M., Elejabarrieta M. J. Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data, *J. Sound Vibr.*, 2011, vol. 330, no. 16, pp. 3930–3943. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.03.025>.
27. Slovikov S. V., Bulbovich R. V. Methodological aspects of the experimental research of viscoelastic filled polymer composites with complicated dynamic cyclical impacts, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2010, vol. 2, pp. 104–112 (In Russian).
28. Wang Y., Palmer R. A., Schoonover J. R., Aubuchon S. R. Dynamic mechanical analysis and dynamic infrared linear dichroism study of the frequency-dependent viscoelastic behavior of a poly(ester urethane), *Vibr. Spectros.*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 74–77. <https://doi.org/10.1016/j.vibspec.2006.04.017>.
29. López-Guerra E. A., Solares S. D. On the frequency dependence of viscoelastic material characterization with intermittent-contact dynamic atomic force microscopy: avoiding mischaracterization across large frequency ranges, *Beilstein J. Nanotechnol.*, 2020, vol. 11, pp. 1409–1418. <https://doi.org/10.3762/bjnano.11.125>.
30. Lawless B. M., Sadeghi H., Temple D. K., Dhaliwal H., Espino D. M., Hukins D. W. L. Viscoelasticity of articular cartilage: Analysing the effect of induced stress and the restraint of bone in a dynamic environment, *J. Mech. Beh. Biomed. Mater.*, 2017, vol. 75, pp. 293–301. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.07.040>.

31. Durand D., Delsanti M., Adam M., Luck J. M. Frequency Dependence of Viscoelastic Properties of Branched Polymers near Gelation Threshold, *Europhysics Letters*, 1987, vol. 3, no. 3, pp. 297–301. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/3/3/008>.
32. Li W., Shepherd D. E. T., Espino D. M. Frequency dependent viscoelastic properties of porcine brain tissue, *J. Mech. Beh. Biomed. Mater.*, 2020, vol. 102, 103460. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2019.103460>.
33. Muller D. E. A method for solving algebraic equations using an automatic computer, *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 1956, vol. 10, no. 56, pp. 208–215. <https://doi.org/10.2307/2001916>.
34. Matveenko V. P., Sevodin M. A., Sevodina N. V. Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics, *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 331–336 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.32>.
35. Kligman E. P., Matveenko V. P., Sevodina N. V. Determination of natural vibrations of piecewise homogeneous viscoelastic bodies using the ANSYS software package, *Computational Continuum Mechanics*, 2010, vol. 3, no. 2, pp. 46–54 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.2.16>.
36. Korepanova T. O., Matveenko V. P., Sevodina N. V. Numerical analysis of stress singularities at the tip of intersecting 3d wedge-shaped cracks, *Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 68–73 (In Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.3.28>.
37. Bochkarev S. A. and Lekomtsev S. V. Hydroelastic stability of coaxial cylindrical shells made of piezoelectric material, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, vol. 2, pp. 35–48 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.2.04>.
38. Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data, *Int. J. Smart Nano Mater.*, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 156–176. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1542356>.
39. Matveenko V. P., Iurlova N. A., Oshmarin D. A., Sevodina N. V., Iurlov M. A. An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations, *Int. J. Smart Nano Mater.*, 2018, vol. 9, no. 2, pp. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>.
40. Lekomtsev S. V., Oshmarin D. A., Sevodina N. V. An approach to the analysis of hydroelastic vibrations of electromechanical systems, based on the solution of the non-classical eigenvalue problem, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2021, vol. 28, no. 19, pp. 1957–1964. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1716120>.
41. Lekhnitskii S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day Series in Mathematical Physics. San Francisco, Holden-Day, Inc., 1963, xii+404 pp.
42. *Ansys 17.2 Documentation*. SAS IP, Inc., 2016.
43. Shaw M. T., Mac Knight W. J. *Introduction to Polymer Viscoelasticity*. New York, Wiley, 2005, xix+316 pp. <https://doi.org/10.1002/0471741833>.
44. Nielsen L. E., Landel R. F. *Mechanical Properties of Polymers and Composites*. CRC Press, Boca Raton, 1993, 582 pp. <https://doi.org/10.1201/b16929>.
45. Cowans J. *The Effects of Viscoelastic Behavior on the Operation of a Delayed Resonator Vibration Absorber*, MS Thesis. 18. Clemson Univ., 2006. https://tigerprints.clemson.edu/all_theses/18.



УДК 539.376:621.787

Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести

В. П. Радченко¹, А. Е. Либерман¹, О. Л. Блохин²

¹ Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

² Зения АИ,
Республика Беларусь, 220100, Минск, ул. Кульман, 9.

Аннотация

Разработана методика расчета релаксации остаточных напряжений в консольно закрепленном вращающемся цилиндре после процедуры поверхностно-пластического деформирования в условиях ползучести, учитывающая влияние ступенчатого изменения параметров температурно-силового нагружения (разгрузки). Задача моделирует напряженно-деформированное состояние поверхностно упрочненного цилиндра (стержня), торцевое сечение которого жестко закреплено на диске, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Методика включает метод реконструкции полей остаточных напряжений и пластических деформаций и метод расчета релаксации остаточных напряжений в процессе ползучести вращающегося цилиндрического стержня. Поскольку вызванные вращением растягивающие напряжения по длине стержня не изменяются во времени, в каждом поперечном сечении решается задача о релаксации остаточных напряжений для растягиваемого стержня при постоянном напряжении.

Выполнено детальное численное исследование влияния количества оборотов на скорость релаксации остаточных напряжений для упрочненного дробью цилиндрического образца радиусом 3.76 мм из сплава ЭИ698 при температуре 700 °С.

Анализ результатов расчетов позволил установить нетривиальный эффект, заключающийся в том, что релаксация остаточных напряжений

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

    Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Радченко В. П., Либерман А. Е., Блохин О. Л. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном вращающемся цилиндре в условиях ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 119–139. EDN: [GFBZBC. https://doi.org/10.14498/vsgtu1884](https://doi.org/10.14498/vsgtu1884).

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Александр Евгеньевич Либерман  <https://orcid.org/0000-0002-9185-2131>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: aliberman740@gmail.com

Олег Леонидович Блохин  <https://orcid.org/0000-0002-0167-4758>

инженер по машинному обучению; e-mail: olb940611@mail.ru

в сечениях, находящихся под действием осевых растягивающих напряжений вследствие вращения, происходит менее интенсивно, чем в «хвостовом» сечении, где осевая нагрузка от вращения равна нулю. Полученные в работе результаты могут быть полезными при оценке эффективности поверхностно-пластического упрочнения деталей в условиях высокотемпературной ползучести.

Ключевые слова: остаточные напряжения, поверхностное пластическое упрочнение, вращающийся цилиндр, ползучесть, релаксация.

Получение: 14 сентября 2021 г. / Исправление: 28 декабря 2021 г. /

Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 21 марта 2022 г.

Введение. Технологии поверхностного пластического деформирования (ППД) деталей ответственных конструкций, эксплуатирующихся в условиях температурно-силовых воздействий, являются одним из резервов повышения их ресурса вследствие создания в приповерхностном слое поля сжимающих остаточных напряжений (ОН), препятствующих развитию различного рода микродефектов в материале. Положительное влияние ОН отмечается для ряда характеристик надежности: повышается предел выносливости при много- и малоцикловом нагружении и микротвердость, улучшаются трибологические характеристики и другие показатели [1–10]. Поскольку теоретическая (расчетная) оценка этих показателей связана с наличием информации о законах распределения ОН по глубине упрочненного слоя, одной из первых задач является решение проблемы реконструкции (формирования) напряженно-деформированного состояния ОН после упрочнения. Подавляющее большинство публикаций в этом направлении посвящено экспериментальным методам определения ОН и их использованию в дальнейших расчетах в поле внешних термомеханических нагрузок. Однако эти методы позволяют определить одну или две компоненты тензора ОН и не позволяют установить компоненты тензора пластических деформаций [3, 4, 10–12]. Существенное продвижение в области теоретических методов реконструкции ОН связано с возросшими возможностями математического моделирования технологических процессов на основе современного программного обеспечения в многочисленных коммерческих пакетах, базирующихся на методе конечных элементов (МКЭ). В этом направлении получен ряд впечатляющих результатов. В частности, в [13] за счет варьирования технологических параметров обработки поверхности дробью (длительность обработки, скорость и направление микрошариков и др.) на основе МКЭ с помощью 3D-моделирования удалось получить поля ОН и исследовать влияние технологических параметров на их формирование. Аналогичные подходы реализованы и в работах [14–20].

Кроме самостоятельной ценности решение проблемы реконструкции ОН имеет важное значение для постановки краевых задач ползучести поверхностно упрочненных элементов конструкций с начальным напряженно-деформированным состоянием и развития методов их решения. Величина и характер распределения ОН в процессе их релаксации являются ключевой информацией для расчета остаточного ресурса по параметрическим критериям отказа при эксплуатации упрочненных элементов конструкций по техническому состоянию.

Анализ публикаций в этом направлении свидетельствует, что тематика, связанная с релаксацией ОН в условиях ползучести, находится в стадии становления. Так, в [21] применительно к сплошным поверхностно упрочненным цилиндрическим образцам разработан прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений, на основании обобщения которого решен ряд задач для полых и сплошных упрочненных цилиндрических деталей в условиях сложного нагружения внешними квазистатическими нагрузками [22–25].

В настоящей работе ставится задача разработки метода решения релаксации ОН в поверхностно упрочненном сплошном цилиндрическом образце при вращении в условиях ползучести. Первая попытка решения такой задачи предпринята в [26], однако для построения методики расчета использовался приближенный метод [27], согласно которому полагалось, что поскольку толщина поверхностного упрочненного слоя мала по сравнению с радиусом цилиндрического образца, этот слой не оказывает существенного влияния на жесткость и деформируемость самого цилиндра. Поэтому тонкий упрочненный слой можно представить «наклеенным» на цилиндр и деформирующимся с ним в режиме «жесткого» нагружения под действием осевой растягивающей силы. Однако оценить погрешность этого метода теоретически не представляется возможным. В настоящей работе решение построено на основании точного (но численного) метода решения соответствующей краевой задачи.

1. Постановка задачи. Рассматривается поверхностно упрочненный сплошной вращающийся цилиндр в условиях ползучести. Целью работы является разработка метода расчета релаксации наведенных остаточных напряжений после процедуры поверхностного пластического деформирования вследствие ползучести материала цилиндра в поле массовых сил. Рассматриваемый цилиндрический стержень длиной l и радиуса a консольно закреплен в сечении $z = R_1$ и вращается вокруг оси AA_1 с угловой скоростью ω , при этом используемая цилиндрическая система координат (r, θ, z) с центром в точке O жестко связана с вращающимся упрочненным цилиндром (рис. 1). В данной постановке задача моделирует напряженно-деформированное состояние поверхностно упрочненного цилиндра (стержня), торцевое сечение которого жестко закреплено на диске радиуса R_1 , вращающегося относи-

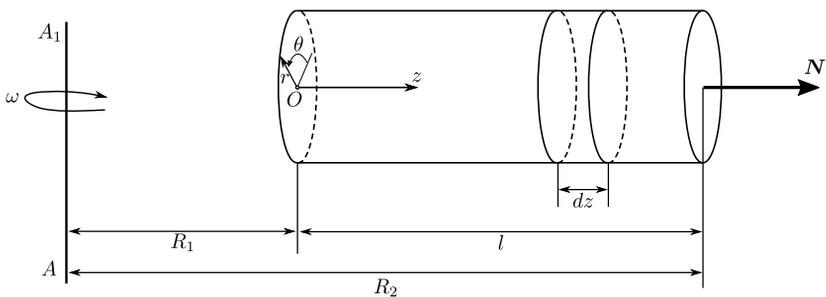


Рис. 1. Растяжение сплошного цилиндра от действия центробежной силы N при вращении с угловой скоростью ω
 [Figure 1. Stretching of a solid cylinder from the action of centrifugal force N during rotation with angular velocity ω]

тельно оси AA_1 с постоянной угловой скоростью ω . При вращении возникает неоднородное осевое напряженное состояние за счет переменной продольной нагрузки $N(z)$ (рис. 1), под действием которой развиваются деформации ползучести в каждом сечении образца и происходит релаксация остаточных напряжений в тонком приповерхностном упрочненном слое. При построении расчетной модели вводится гипотеза плоских сечений.

Схема решения поставленной задачи состоит из реализации следующих этапов:

- 1) реконструкция полей остаточных напряжений и пластических деформаций после процедуры упрочнения при нормальной («комнатной») температуре T_0 ;
- 2) перерасчет полей остаточных напряжений при приложении температурно-силовых стационарных нагрузок от вращения и изменении температуры со значения T_0 (модуль Юнга материала E_0) до температуры «эксплуатации» T_1 ($T_1 > T_0$, модуль Юнга при этой температуре E_1);
- 3) расчет релаксации остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце вследствие ползучести при температуре T_1 .

2. Напряженно-деформированное состояние вращающегося цилиндра. Предварительно найдем закон изменения осевого напряжения во вращающемся неупрочненном цилиндре. Согласно [28] центробежная сила, действующая на элемент объема dz (рис. 1), имеет вид

$$dN = \omega^2(R_1 + z)\rho F(z)dz, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость; $\rho = \gamma/g$ — плотность материала; γ — удельный вес; g — ускорение свободного падения; $F(z)$ — площадь поперечного сечения.

При определении центробежной силы элемент цилиндра рассматривается как точечная масса, сосредоточенная в центре тяжести сечения. Тогда из (1) имеем

$$N(z) = \rho\omega^2 \int_z^l (R_1 + \xi)F(\xi)d\xi,$$

откуда для напряжения $\sigma = \sigma(z)$ получаем

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F(z)} = \rho\omega^2 \frac{1}{F(z)} \int_z^l (R_1 + \xi)F(\xi)d\xi. \quad (2)$$

Так как площадь сечения рассматриваемого кругового цилиндра постоянна по длине, из (2) находим

$$\sigma(z) = \rho\omega^2 \left(R_1(l - z) + \frac{l^2 - z^2}{2} \right).$$

Далее, приняв во внимание, что $l = R_2 - R_1$ — длина цилиндра, и сделав необходимые преобразования, получим окончательную формулу распределения растягивающих напряжений во вращающемся круглом цилиндре постоянно го сечения при $\omega = \text{const}$:

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_2^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + z}{R_2} \right)^2 \right], \quad 0 \leq z \leq R_2 - R_1. \quad (3)$$

3. Методика реконструкции напряженно-деформированного состояния после поверхностного упрочнения. Основы этой методики заложены в работе [27] для изотропного поверхностно пластического упрочнения поверхности образца (обработка дробью, пневмо- и гидродробеструйное упрочнение и др.), а в дальнейших работах [22–25] выполнено ее обобщение на другие виды упрочнения (обкатка роликом, алмазное выглаживание и др.), приводящие к анизотропному характеру распределения остаточных пластических деформаций в направлениях осей θ и z цилиндрической системы координат. Обозначим через σ_r^{res} , $\sigma_\theta^{\text{res}}$, σ_z^{res} радиальное, окружное и осевое остаточные напряжения, а через q_r , q_θ , q_z — соответствующие компоненты тензора остаточных пластических деформаций после процедуры упрочнения. Недиагональными компонентами тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций будем пренебрегать в силу их малости по сравнению с диагональными компонентами.

В предположении, что в области сжатия поверхностного слоя вторичные пластические деформации отсутствуют, с использованием экспериментально определенной компоненты $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$ в работах [22–25, 27] для остальных компонент тензоров остаточных напряжений и пластических деформаций получены следующие зависимости:

$$\sigma_r^{\text{res}} = -\frac{1}{r} \int_r^a \sigma_\theta^{\text{res}}(\xi) d\xi; \quad (4)$$

$$q_\theta(r) = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E_0(1 + \alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_0^r \xi^{\nu-1} [\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1 + \alpha)\sigma_\theta^{\text{res}}(\xi)] d\xi - \frac{1 + \mu}{E_0(1 + \alpha\mu)} [(1 - \mu)\sigma_\theta^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r)], \quad \nu = \frac{2 + \alpha}{1 + \alpha\mu}; \quad (5)$$

$$q_z(r) = \alpha q_\theta(r), \quad q_r(r) = -(1 + \alpha)q_\theta(r); \quad (6)$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{2}{R^2} \int_0^a r (q_z(r) - \frac{\mu}{E} [\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_\theta^{\text{res}}(r)]) dr; \quad (7)$$

$$\sigma_z^{\text{res}}(r) = E_0(\varepsilon_z^0 - q(r)) + \mu(\sigma_r^{\text{res}}(r) + \sigma_\theta^{\text{res}}(r)), \quad (8)$$

где E_0 — модуль Юнга при температуре упрочнения; μ — коэффициент Пуассона; α — феноменологический параметр анизотропии упрочнения. В случае пневмодробеструйной обработки микрошариками $\alpha = 1$ и эпюры напряжений $\sigma_\theta^{\text{res}}$, σ_z^{res} практически совпадают [27].

Схема расчета полей остаточных напряжений и пластических деформаций в сплошном цилиндре после процедуры упрочнения его поверхности (в момент времени $t = 0 - 0$) имеет вид [22–25, 27]

$$\sigma_\theta^{\text{res}}(r) \xrightarrow{(4)} \sigma_r^{\text{res}}(r) \xrightarrow{(5)} q_\theta(r) \xrightarrow{(6)} q_r(r), q_z(r) \xrightarrow{(7)} \varepsilon_z^0 \xrightarrow{(8)} \sigma_z^{\text{res}}(r) \quad (9)$$

(числа над стрелками означают номера формул, по которым вычисляется соответствующая величина). Из схемы (9) следует, что в конечном итоге компоненты σ_r^{res} , σ_z^{res} , q_r , q_θ , q_z определяются через $\sigma_\theta^{\text{res}}$ при $\alpha = 1$.

Таким образом, феноменологическая модель (9) основана на имеющихся экспериментальных данных о распределении компоненты $\sigma_\theta^{\text{res}} = \sigma_\theta^{\text{res}}(r)$. Однако экспериментально ее можно определить только в тонком упрочненном

слое (области сжатия), поэтому эти данные необходимо экстраполировать на всю область $0 \leq r \leq a$. Для этого можно использовать аппроксимацию вида

$$\sigma_{\theta}^{\text{res}}(r) = \sigma_0 - \sigma_1 \exp\left(-\frac{(a-r)^2}{b^2}\right), \quad (10)$$

где σ_0, σ_1, b — параметры аппроксимации, методика идентификации которых хорошо известна [22–25, 27].

4. Расчет напряженно-деформированного состояния при мгновенном приложении температурно-силового нагружения. Рассматривается следующая температурно-силовая схема нагружения образца. Сначала образец мгновенно прогревается с температуры упрочнения T_0 (модуль Юнга E_0) до температуры «эксплуатации» T_1 (модуль Юнга E_1). Затем цилиндр начинает вращаться вокруг оси AA_1 с угловой скоростью ω . Предполагается, что при температурно-силовом нагружении не возникают вторичные пластические деформации, т. е. происходит упругая догрузка упрочненного образца. Поскольку $q_{\theta} = q_{\theta}(r)$ не зависит от температуры, соотношение (5) для температуры T_1 можно записать в виде

$$q_{\theta}(r) = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E_1(1+\alpha\mu)^2} r^{-\nu} \int_0^r \xi^{\nu-1} \frac{E_1}{E_0} [\sigma_r^{\text{res}}(\xi) + (1+\alpha)\sigma_{\theta}^{\text{res}}(\xi)] d\xi - \frac{1+\mu}{E_1(1+\alpha\mu)} \frac{E_1}{E_0} [(1-\mu)\sigma_{\theta}^{\text{res}}(r) - \mu\sigma_r^{\text{res}}(r)]. \quad (11)$$

Соотношение (11) по форме будет аналогично (5), если все эпоры остаточных напряжений после процедуры упрочнения умножить на коэффициент E_1/E_0 . Таким образом, получаем распределения остаточных напряжений при температуре T_1 . Учет напряженного состояния (3), вызванного вращением, позволяет найти начальные напряжения и деформации в упрочненном цилиндре в начальный момент времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z, 0) &= \frac{E_1}{E_0} \sigma_z^{\text{res}}(r) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R_2^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + z}{R_2} \right)^2 \right], \\ \sigma_i(r, z, 0) &= \frac{E_1}{E_0} \sigma_i^{\text{res}}(r), \quad i = r, \theta; \\ \varepsilon_i(r, z, 0) &= \frac{1}{E_1} [(1+\mu)\sigma_i(r, z, 0) - \mu\sigma^*(r, z, 0)] + q_i(r). \end{aligned}$$

Здесь и далее через $\sigma_i = \sigma_i(r, z, t)$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i(r, z, t)$, $i = r, \theta, z$, обозначаются зависимости для компонент тензоров напряжений и полных деформаций; $\sigma^*(r, z, t) = \sigma_r(r, z, t) + \sigma_{\theta}(r, z, t) + \sigma_z(r, z, t)$.

5. Методика расчета кинетики напряжений во вращающемся поперечно упрочненном цилиндре в условиях ползучести. Решить поставленную задачу аналитически невозможно в силу нелинейности любого закона ползучести для металлических материалов, а получение компонент тензоров напряжений ($\sigma_r^{\text{res}}, \sigma_z^{\text{res}}$) и пластических деформаций (q_z, q_r, q_{θ}) из (4)–(8) возможно только численными методами. С учетом неоднородности напряженного состояния по координате $z \in [0, l]$ при вращении выполняется

дискретизация цилиндра по этой координате: $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = l$ с постоянным шагом $\Delta z = l/N$. В дальнейшем упрочненный образец рассматривается как составной стержень из N элементарных цилиндрических стержней с образующей Δz , при этом в пределах каждого из них напряженное состояние по координате z ($z_{i-1} \leq z \leq z_i$, $i = \overline{1, N}$) можно считать однородным, а осевое растягивающее напряжение $\sigma_z(z)$, определяемое по (3), — постоянным.

В связи с этим расчет релаксации остаточных напряжений в каждом сечении вращающегося упрочненного цилиндра можно выполнить автономно. Для этой цели можно использовать разработанную ранее методику [21, 22] для расчета кинетики напряженно-деформированного состояния в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при постоянной растягиваемой нагрузке (постоянном напряжении $\sigma_z(z)$, определяемого из соотношения (3)).

Постановка краевой задачи включает следующие соотношения для k -го элементарного стержня ($k = \overline{1, N}$):

– уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r(r, z_k, t)}{dr} + \sigma_r(r, z_k, t) = \sigma_\theta(r, z_k, t); \quad (12)$$

$$\int_0^a \sigma_z(r, z_k, t) r dr = \frac{N(z_k)}{2\pi}, \quad (13)$$

где $\sigma_r(r, z_k, t)$, $\sigma_\theta(r, z_k, t)$, $\sigma_z(r, z_k, t)$ — радиальная, окружная и осевая компоненты тензора напряжений в цилиндрическом образце в сечении $z = z_k$;

– уравнение совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_\theta(r, z_k, t)}{dr} + \varepsilon_\theta(r, z_k, t) = \varepsilon_r(r, z_k, t), \quad (14)$$

где $\varepsilon_r(r, z_k, t)$, $\varepsilon_\theta(r, z_k, t)$ — радиальная и окружная компоненты тензора полных деформаций;

– гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon_z(r, z_k, t) = \varepsilon_z^*(z_k, t); \quad (15)$$

– краевые условия:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\sigma_r(r, z_k, t)}{dr} = 0; \quad \sigma_r(a, z_k, t) = 0. \quad (16)$$

Используя закон Гука, соотношение (15) и зависимость для полной деформации

$$\varepsilon_i(r, z_k, t) = e_i(r, z_k, t) + q_i(r) + p_i(r, z_k, t), \quad i = r, \theta, z, \quad (17)$$

где e_i и p_i — компоненты упругой деформации и деформации ползучести, находим зависимость для осевой компоненты тензора деформаций:

$$\sigma_z(r, z_k, t) = E_1 [\varepsilon_z^*(z_k, t) - q_z(r) - p_z(r, z_k, t)] + \mu [\sigma_\theta(r, z_k, t) + \sigma_r(r, z_k, t)], \quad (18)$$

при этом для компонент деформаций ползучести имеем начальные условия $p_i(r, z_k, 0) = 0$, $i = r, \theta, z$.

В работе [21] (и последующих работах [22–25]) на основе уравнений (6), (12)–(18) получено дифференциальное уравнение для компоненты $\sigma_r(r, z_k, t)$ в виде

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r(r, z_k, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r(r, z_k, t)}{dr} = g(r, z_k, t)$$

с граничными условиями (16), где

$$g(r, z_k, t) = \frac{E_1}{1 - \mu^2} \left[\frac{2 + \alpha}{1 + \alpha} q_r(r) + p_r(r, z_k, t) - p_\theta(r, z_k, t) - r \left(\frac{dp_\theta(r, z_k, t)}{dr} + \mu \frac{dp_z(r, z_k, t)}{dr} \right) + \frac{r}{1 + \alpha} (1 + \alpha\mu) \frac{dq_r(r)}{dr} \right],$$

решение которого записывается следующим образом:

$$\sigma_r(r, z_k, t) = - \int_r^a \frac{1}{\xi^3} \left(\int_0^\xi g(\eta, z_k, t) \eta d\eta \right) d\xi. \quad (19)$$

Далее из (12) с учетом (19) находим окружную компоненту напряжений:

$$\sigma_\theta(r, z_k, t) = \sigma_r(r, z_k, t) + r \frac{d\sigma_r(r, z_k, t)}{dr}.$$

Для определения $\sigma_z(r, z_k, t)$ из (18) необходимо знать $\varepsilon_z^*(z_k, t)$. Подставляя (18) в уравнение равновесия (13), получаем уравнение относительно величины $\varepsilon_z^*(z_k, t)$, выражая которую, находим

$$\varepsilon_z^*(z_k, t) = \frac{N(z_k)}{\pi a^2 E_1} + \frac{2}{a^2} \int_0^a \left(q_z(r) + p_z(r, z_k, t) - \frac{\mu}{E} (\sigma_r(r, z_k, t) + \sigma_\theta(r, z_k, t)) \right) r dr, \quad (20)$$

а далее с использованием (20) определяем $\sigma_z(r, z_k, t)$ по формуле (18).

Расчет осуществляется на заданном временном интервале $t \in [0, t^*]$, где t^* — финишное значение. Далее при $t = t^*$ осуществляется температурная разгрузка образца с температуры эксплуатации T_1 до температуры T_0 (предполагается, что этот процесс осуществляется мгновенно). В этом случае полученные к моменту времени зависимости для остаточных напряжений умножаются на коэффициент E_0/E_1 . Затем производится силовая разгрузка образца, т. е. полагается $\omega = 0$. Здесь в каждом сечении образца $z = z_k$ происходит ступенчатое изменение осевой компоненты тензора напряжений на величину, определяемую соотношением (3). Компоненты $\sigma_r(r, z_k, t^*)$ и $\sigma_\theta(r, z_k, t^*)$ реагируют лишь на ступенчатое изменение температурного режима с T_1 до T_0 . В итоге получаем поля остаточных напряжений при температуре T_0 после ползучести за время t^* .

6. Выбор феноменологической модели ползучести. Для реализации методики расчета релаксации остаточных напряжений в условиях ползучести требуется использование какой-либо теории ползучести. В данной работе используется реологическая модель, предложенная для описания первой и второй стадий ползучести в работе [29] и обобщенная на третью стадию

ползучести [30], основные соотношения которой при сложном напряженном состоянии имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}; \quad (21)$$

$$e_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{E}\delta_{ij}\sigma_{ss}; \quad (22)$$

$$p_{ij} = u_{ij} + v_{ij} + w_{ij}; \quad (23)$$

$$\dot{w}_{ij} = c\left(\frac{S}{\sigma_*}\right)^{m_1-1}\frac{1}{\sigma_*}\left(\frac{3}{2}\sigma_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sigma_{ss}\right); \quad (24)$$

$$\begin{cases} u_{ij}(t) = \sum_k u_{ij}^k(t), \\ \dot{u}_{ij}^k(t) = \lambda_k \left[a_k \left(\frac{S}{\sigma_*}\right)^{n_2-1} \frac{1}{\sigma_*} [(1 + \mu'_k)\sigma_{ij} - \mu'_k \delta_{ij}\sigma_{ss}] - u_{ij}^k(t) \right]; \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \nu_{\nu\nu}(t) = \sum_k \nu_{\nu\nu}^k(t), \\ \nu_{\nu\nu}^k(t) = (1 + \mu''_k)\beta_{\nu\nu}^k(t) - \mu''_k(\beta_{11}^k(t) + \beta_{22}^k(t) + \beta_{33}^k(t)), \\ \dot{\beta}_{\nu\nu}^k(t) = \begin{cases} \lambda_k \left[b_k \left(\frac{S}{\sigma_*}\right)^{n_2-1} \frac{\sigma_{\nu\nu}}{\sigma_*} - \beta_{\nu\nu}^k(t) \right], & [\dots]\sigma_{\nu\nu} > 0, \\ 0, & [\dots]\sigma_{\nu\nu} \leq 0; \end{cases} \end{cases} \quad (26)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0(1 + \omega); \quad \dot{\omega} = \alpha(S_0)\sigma_{ij}\dot{p}_{ij}. \quad (27)$$

Здесь ε_{ij} , e_{ij} , p_{ij} — полная, упругая деформация и деформация ползучести соответственно; u_{ij} , ν_{ij} , w_{ij} — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие деформации ползучести; σ_{ij} , σ_{ij}^0 — соответственно компоненты истинного и номинального тензоров напряжений; E , μ — упругие константы материала; S , S_0 — соответственно интенсивности тензоров истинных и номинальных напряжений; λ_k , a_k , b_k , c , n_2 , m_1 , σ_* — константы модели, при помощи которых описываются первая и вторая стадии ползучести материала и ее обратимая после разгрузки часть; μ'_k , μ''_k — коэффициенты Пуассона для обратимой и необратимой компонент деформаций ползучести; β_{ij}^k — активные вязкопластические деформации, наблюдаемые при отсутствии пуассоновского сужения материала; $\gamma(S_0)$ аппроксимируется соотношением вида $\gamma(S_0) = \alpha_1 S_0^{m_3}$, где α_1 , m_3 — константы модели, описывающие разупрочнение материала вследствие деформации ползучести; по повторяющемуся индексу s выполняется суммирование.

Поскольку вязкопластическая ν_{ij} деформация рассчитывается в главных осях, отсутствует суммирование по индексу ν в формулах (26).

В работе [30] приведен критерий рассеянного (объемного) разрушения энергетического вида для определения времени разрушения материала t_* :

$$\int_0^{t_*} \frac{\sigma_{ij} dp_{ij}}{A_*^C(S_0)} = 1, \quad (28)$$

где величина A_*^C в общем случае имеет аппроксимацию вида $A_*^C(S_0) = \alpha_A S_0^{m_A}$, где α_A и m_A — постоянные параметры модели. Отметим, что все параметры реологической модели могут быть найдены при наличии одоосных экспериментальных кривых ползучести вплоть до разрушения по методике работы [30]. В этой же работе приведены реологические параметры для некоторых материалов.

7. Результаты расчетов и их анализ. В модельных расчетах использовался цилиндрический поверхностно упрочненный образец радиуса $a = 3.76$ мм из сплава ЭИ698 (ХН73МБТЮ) после процедуры дробеструйной обработки (в соотношениях (6) величина $\alpha = 1$) при нормальной («комнатной») температуре $T_0 = 26^\circ\text{C}$ (модуль Юнга материала при этой температуре $E_0 = 2 \cdot 10^5$ МПа), помещенный затем в поле массовых сил от вращения при $T_1 = 700^\circ\text{C}$ (модуль Юнга $E_1 = 1.52 \cdot 10^5$ МПа). Численные значения геометрических параметров (см. рис. 1) следующие: $R_1 = 517$ мм, $R_2 = 667$ мм.¹ Значение коэффициента Пуассона $\mu = 0.33$ полагалось независимым от температуры. Расчеты для оценки кинетики остаточных напряжений во вращающемся образце в условиях ползучести выполнялись в пяти сечениях по длине $l = 150$ мм при значениях $z = 0$ (сечение 1), $z = 37.5$ мм (сечение 2), $z = 75$ мм (сечение 3), $z = 112.5$ мм (сечение 4) и $z = 150$ мм (сечение 5) при пяти величинах угловой скорости $\omega = \{1500, 1750, 2000, 2250, 2500\}$ (об/мин). В каждом сечении рассчитывалась величина осевого напряжения $\sigma = \sigma(z)$ от вращения по формуле (3) (в расчетах для сплава ЭИ698 использовалось значение $\gamma = 8.16$ г/см³), которое остается постоянным во времени при фиксированной величине координаты z , и при этих значениях осуществлялся расчет релаксации остаточных напряжений по приведенной выше методике. В качестве примера на рис. 2 приведены графики осевых напряжений по длине образца в зависимости от угловой скорости в соответствии с формулой (3).

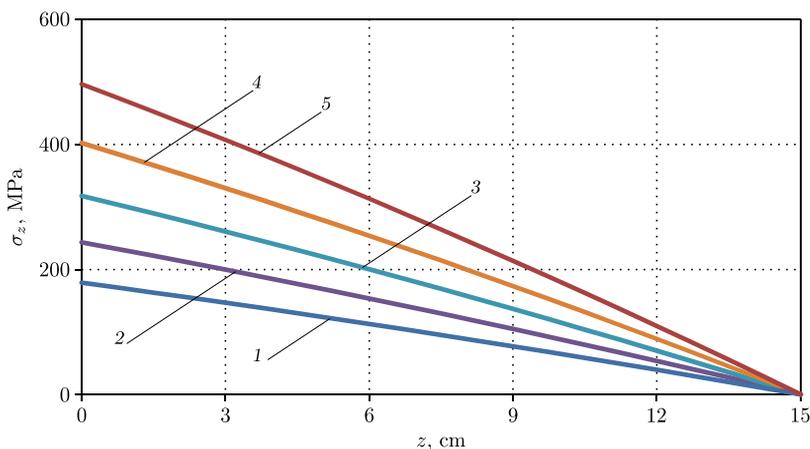


Рис. 2. Распределения осевой нагрузки $\sigma(z)$ по длине цилиндрического образца от угловой скорости ω : 1— $\omega = 1500$ об/мин; 2— $\omega = 1750$ об/мин; 3— $\omega = 2000$ об/мин; 4— $\omega = 2250$ об/мин; 5— $\omega = 2500$ об/мин

[Figure 2. Distributions of the axial load $\sigma(z)$ along the length of the cylindrical sample on the angular velocity ω : 1— $\omega = 1500$ rev/min; 2— $\omega = 1750$ rev/min; 3— $\omega = 2000$ rev/min; 4— $\omega = 2250$ rev/min; 5— $\omega = 2500$ rev/min]

В силу неоднородности полей остаточных напряжений не только по координате z , но и по координате r , осуществляется дискретизация по переменной r ($0 = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_M = a$) с шагом $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$, $i = \overline{1, M}$. Реализация рассмотренной схемы решения в условиях ползучести осуществ-

¹Значения R_1 и R_2 соответствуют длине лопатки $l = R_2 - R_1 = 150$ мм и радиусу диска R_1 одной из ступеней газотурбинного двигателя.

ляется численно шагами по времени. Для этого проводится дискретизация по переменной t ($t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots$; $t_0 = 0$) и расчет компонент деформации ползучести на основании реологической модели (21)–(28) выполняется методом Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Экспериментальные данные для диаграммы одноосной ползучести сплава ЭИ698 при температуре 700°C приведены в работе [30]. На основании этих данных в этой же работе вычислены все параметры реологической модели (21)–(28), численные значения которых приведены в таблице.

Значения параметров модели (21)–(28) для описания деформации ползучести сплава ЭИ698 (ХН73МБТЮ) при температуре 700°C [30] [Values of model parameters (21)–(28) for describing the creep deformation of the EI698 (KhN73MBTYu) alloy at a temperature of 700°C [30]]

σ_* , МПа	k	λ_k , h^{-1}	a_k , $\times 10^{-4}$	b_k , $\times 10^{-4}$	c , $\times 10^{-5}$	n_2	m_1	α_1 , MPa^{-1-m_1}	m_3	α_A , MPa^{-1-m_A}	m_A
490.5	1	0.2	2.96	4.44	2.51	2.9	10.96	$9.56 \cdot 10^3$	2.03	12.2	0

На первом этапе выполняется реконструкция полей остаточных напряжений после упрочнения образца из сплава ЭИ698 дробеструйной обработкой поверхности. Как указано выше (см. п. 3), исходной информацией является экспериментальная информация о распределении величины $\sigma_\theta^{res}(h)$ ($h = a - r$ – глубина упрочненного слоя), которая приведена в монографии [27] для образца такого же радиуса $a = 3.76$ мм и представлена на рис. 3 точками. На основе этих экспериментальных данных найдены параметры аппроксимации (10): $\sigma_0 = 11.58$ МПа; $\sigma_1 = -611.58$ МПа; $b = 0.8 \cdot 10^{-3}$ м. На основе аналитической зависимости для $\sigma_\theta^{res}(r)$ по схеме (9) с использованием зависимостей (4)–(8) получены законы распределения для $\sigma_r^{res}(h)$, $\sigma_z^{res}(h)$ и $q_i(h)$, $i = r, \theta, z$. На рис. 3 сплошными линиями представлены расчетные значения для всех компонент тензора остаточных напряжений. Как следует из представленных экспериментальных данных, зависимости для $\sigma_z(h)$ и $\sigma_\theta(h)$ близки, а величина $\sigma_r(h)$ в области сжатия материала на 3–4 порядка (по модулю) меньше значений для $\sigma_z(h)$ и $\sigma_\theta(h)$.

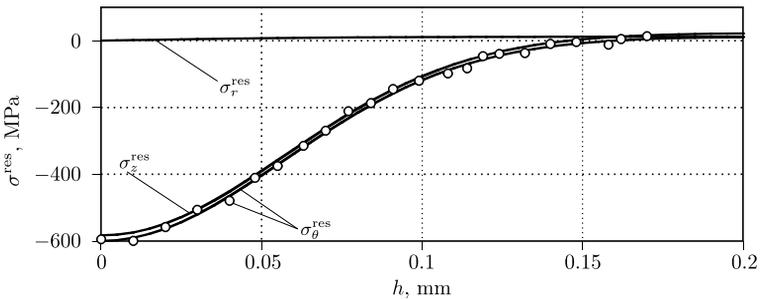


Рис. 3. Расчетные компоненты тензора остаточных напряжений (сплошные линии) и экспериментальные данные (точки) для упрочненного образца из сплава ЭИ698 (ХН73МБТЮ) по глубине упрочненного слоя $h = a - r$

[Figure 3. Calculated components of the residual stress tensor (solid lines) and experimental data (dots) for a hardened sample from EI698 (KhN73MBTYu) alloy over the depth of the hardened layer ($h = a - r$)

В качестве примера детально рассмотрим результаты расчетов релаксации остаточных напряжений в цилиндрическом образце при $\omega = 2000$ об/мин в сечениях, соответствующих $z = 0$ («корневое» сечение), $z = 75$ мм («центральное» сечение — сечение 3), $z = 150$ мм («хвостовое» сечение). Осевые напряжения от вращения, рассчитанные по формуле (3), имеют следующие значения: $\sigma_z(0) = 317.9$ МПа; $\sigma_z(75) = 169.03$ МПа; $\sigma_z(150) = 0$. На рис. 4 приведены зависимости для остаточных напряжений $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$ в процессе ползучести упрочненного образца при температуре 700°C в этих сечениях по глубине упрочнения $h = a - r$ в области сжатия материала на временной базе $t \in [0, 300]$ час, а на рис. 5 представлена аналогичная информация для осевой компоненты тензора остаточных напряжений $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$.

Отметим, что во всех расчетах при использовании критерия разрушения (28) его левая часть всегда принимала значения меньше единицы, т.е. разрушения материала не наблюдалось.

Анализ зависимостей на рис. 4 и 5 свидетельствует, что релаксация остаточных напряжений в сечениях, находящихся под действием осевых растягивающих напряжений вследствие вращения, происходит менее интенсивно, чем в «хвостовом» сечении при $z = 150$ мм, где осевая нагрузка от вращения равна нулю. Это следует из сравнения финишных кривых с маркером 4 для $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$ с исходной эшпурой с маркером 1 (см. рис. 4, а и 4, с) и кривых для $\sigma_z = \sigma_z(r, t)$ на рис. 5, а и 5, с (маркеры 1 и 6 соответственно). Другими словами, приложение растягивающих осевых напряжений приводит к замедлению процесса релаксации остаточных напряжений по сравнению с условиями чистой термоэкспозиции в сечении $z = 150$ мм, где ползучесть происходит только под действием остаточных (собственных) напряжений.

Отметим, что аналогичный нетривиальный вывод получен и в работе [31], в которой показано, что при всестороннем растяжении поверхностно упрочненной пластины в условиях плоского напряженного состояния наблюдается замедление процесса релаксации остаточных напряжений при ползучести, в отличие от условий термоэкспозиции (чисто температурное нагружение) без внешних силовых нагрузок.

Второй важный вывод состоит в том, что за время ползучести в течение 300 часов остаточные напряжения (по модулю) уменьшились на 16–20% в сечениях по длине вращающегося образца, что следует из сравнения кривых с маркерами 1 и 4 на рис. 4 и с маркерами 1 и 6 на рис. 5. Аналогичные результаты получены и при других рассмотренных значениях числа оборотов. С точки зрения эффективности поверхностно пластического упрочнения деталей, эксплуатирующихся в условиях высокотемпературной ползучести (по крайней мере при температуре 700°C и угловой скорости вращения 2000 об/мин), эти результаты носят позитивный характер.

Полученные результаты могут быть использованы в авиадвигателестроении для оценки эффективности поверхностно пластического упрочнения деталей авиационной техники, поскольку никелевый сплав ЭИ698 (ХН73МБТЮ) широко применяется для изготовления лопаток газовых турбин, термообработанных и обточенных штамповок дисков, дефлекторов, лабиринтов и других деталей с рабочей температурой до 750°C , а также крепежных и других деталей, работающих при уровне температур порядка 800°C .

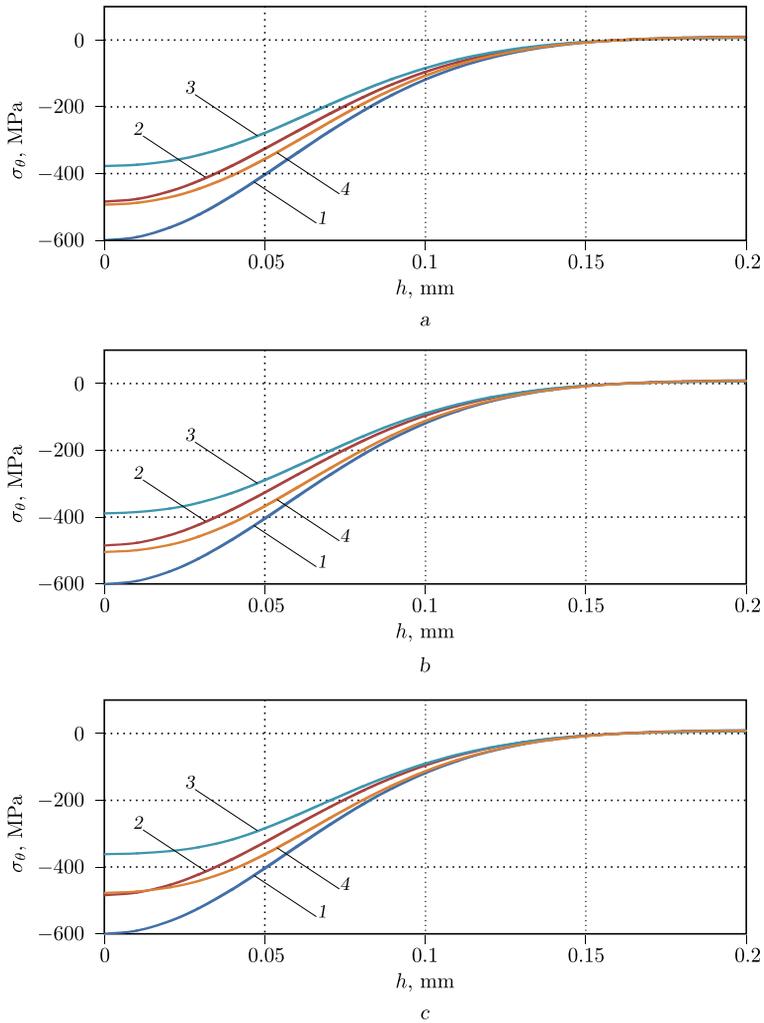


Рис. 4. Кинетика компоненты остаточных напряжений $\sigma_\theta(r, t)$ в условиях ползучести при $\omega = 2000$ об/мин в сечениях $z = 0$ (a), $z = 75$ мм (b) и $z = 150$ мм (c). Маркеры: 1 – после процедуры упрочнения при $T = 26^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 - 0$; 2 – после температурно-силовой нагрузки при $T = 700^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 + 0$; 3 – после ползучести при температурно-силовой нагрузке при $T = 700^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 300 - 0$ ч; 4 – после температурно-силовой разгрузки при $T = 26^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 300 + 0$ ч

[Figure 4. Kinetics of the residual stress component $\sigma_\theta(r, t)$ (calculated values) under creep conditions at $\omega = 2000$ rev/min in sections $z = 0$ (a), $z = 75$ mm (b), and $z = 150$ mm (c). Labels: 1 – after the hardening procedure at $T = 26^\circ\text{C}$ at time $t = 0 - 0$; 2 – after temperature-force load at $T = 700^\circ\text{C}$ at time $t = 0 + 0$; 3 – after temperature-force load at $T = 700^\circ\text{C}$ under creep conditions at time $t = 300 - 0$ h; 4 – after temperature-force unloading at $T = 26^\circ\text{C}$ at time $t = 300 + 0$ h]

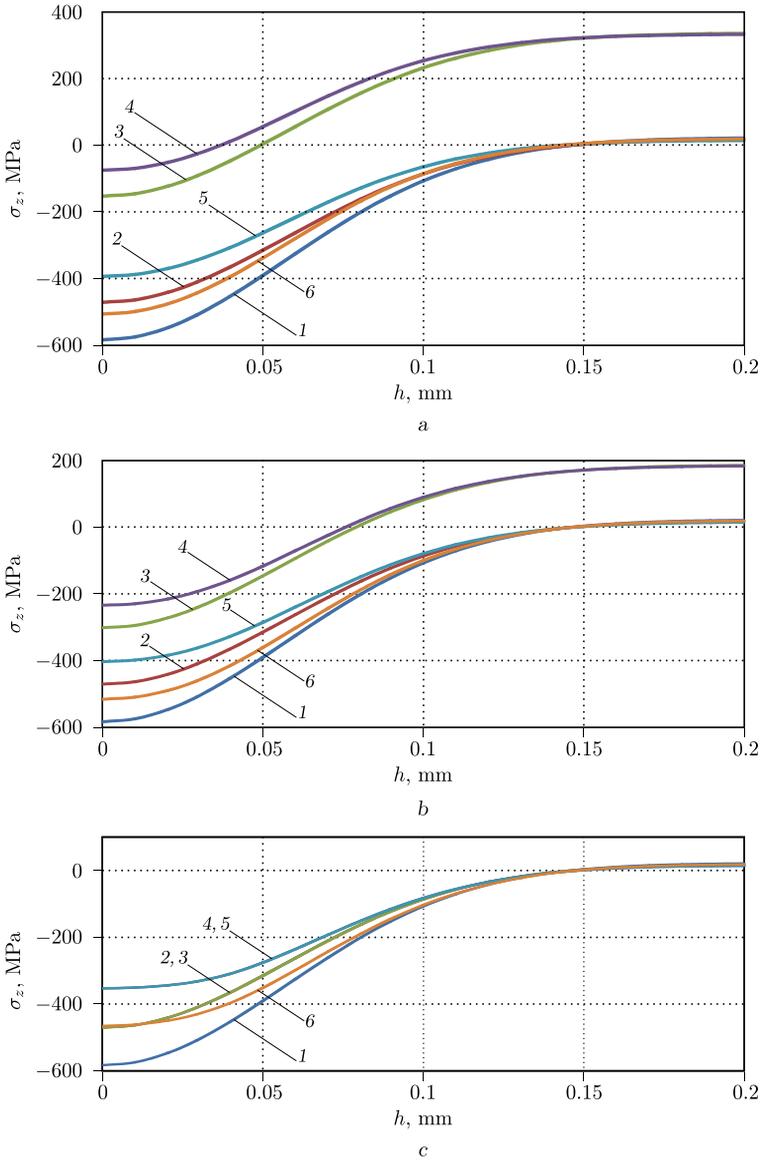


Рис. 5. Кинетика компоненты остаточных напряжений $\sigma_z(r, t)$ в условиях ползучести при $\omega = 2000$ об/мин в сечениях $z = 0$ (a), $z = 75$ мм (b) и $z = 150$ мм (c). Маркеры: 1 – расчетные значения после процедуры упрочнения при $T = 26^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 - 0$; 2 – после температурной нагрузки ($T = 700^\circ\text{C}$) в момент времени $t = 0 + 0$; 3 – после силовой нагрузки при $T = 700^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 0 + 0$; 4 – после ползучести при температурно-силовой нагрузке при $T = 700^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 300 - 0$ ч; 5 – после силовой разгрузки при $T = 700^\circ\text{C}$ в момент времени $t = 300 + 0$ ч; 6 – после температурной разгрузки ($T = 26^\circ\text{C}$) в момент времени $t = 300 + 0$ ч

[Figure 5. Kinetics of the residual stress component $\sigma_z(r, t)$ (calculated values) under creep conditions at $\omega = 2000$ rev/min in sections $z = 0$ (a), $z = 75$ mm (b), and $z = 150$ mm (c). Labels: 1 – after the hardening procedure at $T = 26^\circ\text{C}$ at time $t = 0 - 0$; 2 – after thermal load ($T = 700^\circ\text{C}$) at time $t = 0 + 0$; 3 – after force load at $T = 700^\circ\text{C}$ at time $t = 0 + 0$; 4 – after temperature-force load at $T = 700^\circ\text{C}$ under creep conditions at time $t = 300 - 0$ h; 5 – after force unloading at $T = 700^\circ\text{C}$ at time $t = 300 + 0$ h; 6 – after thermal unloading ($T = 26^\circ\text{C}$) at time $t = 300 + 0$ h]

Заключение. В работе разработана методика расчета релаксации остаточных напряжений в консольно закрепленном вращающемся поверхностно упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести с начальным напряженно-деформированным состоянием после процедуры упрочнения, учитывающая влияние ступенчатого изменения параметров температурно-силового нагружения (разгрузки) и на распределение остаточных напряжений и их кинетику в процессе ползучести.

Выполнены модельные расчеты для оценки скорости релаксации остаточных напряжений в зависимости от количества оборотов для упрочненного дробью цилиндрического образца радиусом 3.76 мм из сплава ЭИ698 при температуре 700 °С. Анализ результатов расчетов позволил установить нетривиальный эффект, заключающийся в том, что релаксация остаточных напряжений в сечениях, находящихся под действием осевых растягивающих напряжений вследствие вращения, происходит менее интенсивно, чем в «хвостовом» сечении, где осевая нагрузка от вращения равна нулю. Полученные в работе результаты могут быть полезны при оценке эффективности поверхностно-пластического упрочнения деталей в условиях высокотемпературной ползучести.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (РНФ 19–19–00062, Самарский государственный технический университет).

Библиографический список

1. Биргер И. А. *Остаточные напряжения*. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
2. Гринченко И. Г. *Упрочнение деталей из жаропрочных и титановых сплавов*. М.: Машиностроение, 1971. 120 с.
3. Сулима А. М., Шувалов В. А., Ягодкин Ю. Д. *Поверхностный слой и эксплуатационные свойства деталей машин*. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
4. Ножницкий Ю. А., Фишгойт А. В., Ткаченко Р. И., Теплова С. В. Разработка и применение новых методов упрочнение деталей ГТД, основанных на пластическом деформировании поверхностных слоев // *Вестник двигателестроения*, 2006. № 2. С. 8–16.
5. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation // *Intern. J. Fatigue*, 2008. vol. 30, no. 8. pp. 1398–1408. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010>.
6. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et al. Residual stresses and fatigue performance // *Eng. Failure Anal.*, 2007. vol. 14, no. 2. pp. 384–395. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011>.
7. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effect of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6 // *Mater. Sci. Eng. A*, 2009. vol. 516, no. 1–2. pp. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>.
8. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance // *Mater. Sci. Technol.*, 2013. vol. 29, no. 6. pp. 673–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>.

9. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach // *Mater. Design.*, 2012. vol. 35. pp. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>.
10. Павлов В. Ф., Кирпичев В. А., Вакулюк В. С. *Прогнозирование сопротивления усталости поверхностно упрочненных деталей по остаточным напряжениям*. Самара: Самар. науч. центр РАН, 2012. 125 с.
11. Радченко В. П., Павлов В. Ф., Саушкин М. Н. Исследование влияния анизотропии поверхностного пластического упрочнения на распределение остаточных напряжений в полых и сплошных цилиндрических образцах // *Вестн. Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. Механика*, 2015. № 1. С. 130–147. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>.
12. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after ultrasonic hardening under high-temperature creep conditions // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018. no. 3–4. pp. 88–98. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/eng.2018.3.09>.
13. Chen H., Wang S., Lu S., et al. Simulation and experimental validation of residual stress and surface roughness of high manganese steel after shot peening // *Procedia CIRP*, 2018. vol. 71. pp. 227–231. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.05.066>.
14. Isa M. R., Sulaiman S. N., Zaroog O. S. Experimental and simulation method of introducing compressive residual stress in ASTM A516 grade 70 steel // *Key Eng. Mater.*, 2019. vol. 803. pp. 27–31. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.803.27>.
15. Киселев И. А., Жуков Н. А., Васильев Б. Е., Селиванов А. Н. Учет остаточных напряжений при расчетах прочности элементов замковых соединений. Часть 1. Моделирование дробеструйной обработки // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018. № 11. С. 49–59. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-11-49-59>.
16. Meguid S. A., Maicic L. A. Finite element modeling of shot peening residual stress relaxation in turbine disk assemblies // *J. Eng. Mater. Technol.*, 2015. vol. 137, no. 3, 031003. <https://doi.org/10.1115/1.4030066>.
17. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., et al. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure // *Comptes Rendus Mécanique*, 2016. vol. 344, no. 4–5. pp. 355–374. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>.
18. Zimmerman M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation // *Int. J. Comput. Mater. Sci. Surf. Eng.*, 2010. vol. 3, no. 4. pp. 289–310. <https://doi.org/10.1504/ijcmsse.2010.036218>.
19. Purohil R., Verma C. S., Rana R. S., et al. Simulation of shot peening process // *Materials Today: Proceedings*, 2017. vol. 4, no. 2 A. pp. 1244–1251. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.144>.
20. Jebahi M., Gakwaya A., Lévesque J., et al. Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method // *Int. J. Mech. Sci.*, 2016. vol. 107. pp. 21–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.005>.
21. Радченко В. П., Саушкин М. Н. Прямой метод решения краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном изделии цилиндрической формы при ползучести // *ПМТФ*, 2009. Т. 50, № 6. С. 90–99.
22. Радченко В. П., Кочеров Е. П., Саушкин М. Н., Смыслов В. А. Экспериментальное и теоретическое исследование влияния растягивающей нагрузки на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2015. Т. 56, № 2. С. 169–177. <https://doi.org/10.15372/PMTF20150217>.
23. Деревянка Е. Е., Радченко В. П., Цветков В. В. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном цилиндре в условиях ползучести при жестких ограничениях на линейные и угловые деформации // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 3. С. 118–127. <https://doi.org/10.31857/S057232992103003X>.
24. Радченко В. П., Цветков В. В., Саушкин М. Н. Релаксация остаточных напряжений в упрочненном цилиндре в условиях ползучести при нагружении осевой силой, крутящим моментом и внутренним давлением // *ПМТФ*, 2020. Т. 61, № 4. С. 96–107. <https://doi.org/10.15372/PMTF20200412>.

25. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Цветков В. В. Влияние термоэкспозиции на релаксацию остаточных напряжений в упрочненном цилиндрическом образце в условиях ползучести // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 3. С. 196–207. <https://doi.org/10.15372/PMTF20160320>.
26. Просвиркина Е. А., Саушкин М. Н. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое сплошного вращающегося цилиндра в условиях ползучести / *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2006. С. 192–199.
27. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.
28. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. *Расчет на прочность деталей машин*. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.
29. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: Куйб. гос. унив., 1979. 84 с.
30. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 265 с.
31. Радченко В. П., Бербасова Т. И., Шишкин Д. М. Релаксация остаточных напряжений в поверхностно упрочненном призматическом образце в условиях ползучести при двухосном нагружении // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, № 5. С. 184–194. <https://doi.org/10.15372/PMTF20210518>.

MSC: 74A10, 74D10

Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions

V. P. Radchenko¹, A. E. Liberman¹, O. L. Blokhin²¹ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.² Zenia-AI,
9, Kulman st., Minsk, 220100, Belarus.

Abstract

A technique for calculating the relaxation of residual stresses in a cantilevered rotating cylinder after the procedure of surface plastic deformation under creep conditions has been developed, taking into account the effect of a stepwise change in the parameters of temperature-force loading (unloading). The problem simulates the stress-strain state of a surface-hardened cylinder (rod), the end section of which is rigidly fixed on a disk rotating at a constant angular velocity.

The technique includes a method for reconstructing the fields of residual stresses and plastic deformations and a method for calculating the relaxation of residual stresses during creep of a rotating cylindrical rod. Since the tensile stresses caused by rotation along the length of the rod do not change in time, the problem of relaxation of residual stresses for a stretched rod at constant stress is solved in each cross section.

A detailed numerical study of the effect of the number of revolutions on the rate of relaxation of residual stresses was performed for a shot-hardened cylindrical sample with a radius of 3.76 mm made of EI698 alloy at a temperature of 700 °C.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Radchenko V. P., Liberman A. E., Blokhin O. L. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened rotating cylinder under creep conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 119–139. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1884> (In Russian).

Authors' Details:

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ruAleksandr E. Liberman  <https://orcid.org/0000-0002-9185-2131>Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: aliberman740@gmail.comOleg L. Blokhin  <https://orcid.org/0000-0002-0167-4758>Machine Learning Engineer; e-mail: olb940611@mail.ru

Analysis of the calculation results allowed to establish a non-trivial effect, which consists in the fact that the relaxation of residual stresses in sections subjected to axial tensile stresses due to rotation occurs less intensively than in the “tail” section, where the axial load from rotation is zero. The results obtained in this work can be useful in evaluating the effectiveness of surface-plastic hardening of parts under high-temperature creep conditions.

Keywords: residual stresses, surface plastic hardening, rotating cylinder, creep, relaxation.

Received: 14th September, 2021 / Revised: 28th December, 2021 /

Accepted: 24th January, 2022 / First online: 21st March, 2022

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author’s Responsibilities. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 19–19–00062, Samara State Technical University).

References

1. Birger I. A. *Ostatochnye napriazheniia* [Residual Stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963, 232 pp. (In Russian)
2. Grinchenko I. G. *Uprochnenie detalei iz zharoprochnykh i titanovykh splavov* [Hardening Parts Made of High-Resistant and Titanium Alloys]. Moscow, Mashinostroenie, 1971, 120 pp. (In Russian)
3. Sulima G. N., Shuvalov V. A., Yagodkin Yu. D. *Poverkhnostnyi sloi i ekspluatatsionnye svoistva detalei mashin* [Surface Layer and Performance of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 240 pp. (In Russian)
4. Nozhnitskii Yu. A., Fishgoit A. V., Tkachenko R. I., Teplova S. V. Development and application of new GTE parts hardening methods based on the plastic deformation of the surface layers, *Vestn. Dvigatel.*, 2006, no. 2, pp. 8–16 (In Russian).
5. Dai K., Shaw L. Analysis of fatigue resistance improvements via surface severe plastic deformation, *Intern. J. Fatigue*, 2008, vol. 30, no. 8, pp. 1398–1408. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.10.010>.
6. James M. N., Hughes D. J., Chen Z., et al. Residual stresses and fatigue performance, *Eng. Failure Anal.*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 384–395. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2006.02.011>.
7. Majzoobi G. H., Azadikhah K., Nemati J. The effect of deep rolling and shot peening on fretting fatigue resistance of Aluminum-7075-T6, *Mater. Sci. Eng. A*, 2009, vol. 516, no. 1–2, pp. 235–247. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.03.020>.
8. Soady K. A. Life assessment methodologies incorporating shot peening process effects: mechanistic consideration of residual stresses and strain hardening. 1. Effect of shot peening on fatigue resistance, *Mater. Sci. Technol.*, 2013, vol. 29, no. 6, pp. 673–651. <https://doi.org/10.1179/1743284713Y.0000000222>.
9. Terres M. A., Laalai N., Sidhom H. Effect of nitriding and shot-peening on the fatigue behavior of 42CrMo4 steel: Experimental analysis and predictive approach, *Mater. Design.*, 2012, vol. 35, pp. 741–748. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.09.055>.
10. Pavlov V. F., Kirpichev V. A., Vakuluk V. S. *Prognozirovanie soprotivleniia ustalosti poverkhnostno uprochnennykh detalei po ostatochnym napriazheniiam* [Prediction of Fatigue Resistance of Surface Reinforced Parts by Residual Stresses]. Samara, Samara Sci. Center of RAS, 2012, 125 pp. (In Russian)

11. Radchenko V. P., Pavlov V. Ph., Saushkin M. N. Investigation of surface plastic hardening anisotropy influence on residual stresses distribution in hollow and solid cylindrical specimens, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 1, pp. 130–147 (In Russian). <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.1.09>.
12. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Bochkova T. I. Mathematical modeling and experimental study of forming and relaxation of residual stresses in plane samples made of EP742 alloy after ultrasonic hardening under high-temperature creep conditions, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3–4, pp. 88–98. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/eng.2018.3.09>.
13. Chen H., Wang S., Lu S., et al. Simulation and experimental validation of residual stress and surface roughness of high manganese steel after shot peening, *Procedia CIRP*, 2018, vol. 71, pp. 227–231. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2018.05.066>.
14. Isa M. R., Sulaiman S. N., Zaroog O. S. Experimental and simulation method of introducing compressive residual stress in ASTM A516 grade 70 steel, *Key Eng. Mater.*, 2019, vol. 803, pp. 27–31. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.803.27>.
15. Kiselev I. A., Zhukov N. A., Vasilyev B. E., Selivanov A. N. Modeling of residual stresses when calculating strength of lock joint elements. Part 1. Modeling of the shot peening process, *Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 2018, no. 11, pp. 49–59 (In Russian). <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2018-11-49-59>.
16. Meguid S. A., Maicic L. A. Finite element modeling of shot peening residual stress relaxation in turbine disk assemblies, *J. Eng. Mater. Technol.*, 2015, vol. 137, no. 3, 031003. <https://doi.org/10.1115/1.4030066>.
17. Gallitelli D., Boyer V., Gelineau M., et al. Simulation of shot peening: From process parameters to residual stress fields in a structure, *Comptes Rendus Mécanique*, 2016, vol. 344, no. 4–5, pp. 355–374. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2016.02.006>.
18. Zimmerman M., Klemenz M., Schulze V. Literature review on shot peening simulation, *Int. J. Comput. Mater. Sci. Surf. Eng.*, 2010, vol. 3, no. 4, pp. 289–310. <https://doi.org/10.1504/ijcmsse.2010.036218>.
19. Purohil R., Verma C. S., Rana R. S., et al. Simulation of shot peening process, *Materials Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, no. 2 A, pp. 1244–1251. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.01.144>.
20. Jebahi M., Gakwaya A., Lévesque J., et al. Robust methodology to simulate real shot peening process using discrete-continuum coupling method, *Int. J. Mech. Sci.*, 2016, vol. 107, pp. 21–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.01.005>.
21. Radchenko V. P., Saushkin M. N. Direct method of solving the boundary-value problem of relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 6, pp. 989–997. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0133-8>.
22. Radchenko V. P., Kocherov E. P., Saushkin M. N., Smyslov V. A. Experimental and theoretical studies of the influence of a tensile load on the relaxation of residual stresses in a hardened cylindrical specimen under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2015, vol. 56, no. 2, pp. 313–320. <https://doi.org/10.1134/S0021894415020170>.
23. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V., Derevyanka E. E. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened cylinder under creep conditions and rigid restrictions on linear and angular deformations, *Mech. Solids.*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 898–906. <https://doi.org/10.3103/S0025654420660024>.
24. Radchenko V. P., Tsvetkov V. V., Saushkin M. N. Residual stress relaxation in a hardened cylinder under creep, loaded by an axial force, torque and internal pressure, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2020, vol. 61, no. 4, pp. 583–592. <https://doi.org/10.1134/S0021894420040124>.
25. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Tsvetkov V. V. Effect of thermal exposure on the residual stress relaxation in a hardened cylindrical sample under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 559–568. <https://doi.org/10.1134/S00218944160302022>.

26. Saushkin M. N., Prosvirkina E. A. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened layer of a solid rotating cylinder under creep conditions, In: *Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference* (29–31 May 2006). Part 1, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2006, pp. 192–199 (In Russian).
27. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktssiakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Hardened Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian)
28. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B. *Raschet na prochnost' detalei mashin* [Calculation of the Strength of Machine Parts]. Moscow, Mashinostroenie, 1979, 702 pp. (In Russian)
29. Samarin Yu. P. *Urvnenniia sostoianiia materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equation of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)
30. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktssii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 265 pp. (In Russian)
31. Radchenko V. P., Berbasova T. I., Shishkin D. M. Relaxation of residual stresses in a surface-hardened prismatic sample subjected to biaxial loading under creep conditions, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 5, pp. 861–869. <https://doi.org/10.1134/S0021894421050187>.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ



УДК 517.927.4:519.624

Использование псевдоневязок при исследовании сходимости неустойчивых разностных краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

В. Н. МаклаковСамарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

При исследовании краевых задач для неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами рассмотрен предложенный ранее метод численного интегрирования, использующий средства матричного исчисления. Согласно указанному методу при составлении системы разностных уравнений можно выбрать произвольную степень многочлена Тейлора в разложении искомого решения задачи в ряд Тейлора, отказавшись при этом от аппроксимации производных конечными разностями.

Исследованы некоторые аспекты сходимости неустойчивой разностной краевой задачи второго порядка. Для обыкновенного дифференциального уравнения введено понятие псевдоневязки на некотором векторе. На основе точного решения разностной краевой задачи построено приближенное решение, на котором норма псевдоневязки отлична от тривиального значения.

Теоретически установлено, что оценка нормы псевдоневязки уменьшается при увеличении используемой степени многочлена Тейлора и при уменьшении шага дискретизации сетки. Даны определения условной устойчивости и условной сходимости; установлена теоретическая связь между ними. На основе найденного вектора псевдоневязок построено возмущенное решение и вычислена оценка нормы его отклонения от

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Маклаков В. Н. Использование псевдоневязок при исследовании сходимости неустойчивых разностных краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 140–178. EDN: HDFQTC. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1889>.

Сведения об авторе

Владимир Николаевич Маклаков  <https://orcid.org/0000-0003-1644-7424>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. прикладной математики и информатики

точного решения разностной краевой задачи, позволяющая выявить наличие условной устойчивости. Установлена теоретическая связь между сходимостью и условной сходимостью.

Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, краевые задачи, порядок аппроксимации, численные методы, многочлены Тейлора, невязки.

Получение: 20 октября 2021 г. / Исправление: 1 ноября 2021 г. /

Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 31 марта 2022 г.

1. Обозначения и постановка задачи. Далее будем придерживаться принятых в [1] обозначений:

- 1) D — область интегрирования, ограниченная отрезком $[a, b]$, D_h — узлы сетки, определяемые значениями $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n + 1$ — число узлов сетки D_h , $t_0 = a$, $t_n = b$,

$$h = \frac{b - a}{n} \text{ — шаг сетки } D_h; \quad (1)$$

- 2) $x(t)$ — непрерывная функция, являющаяся точным решением краевой задачи;
- 3) $[x]_h$ — сеточная функция, совпадающая с точным решением в узлах сетки D_h ;
- 4) $x^{(h)}$ — искомая сеточная функция;
- 5) для любой функции примем $\varphi(t_i) = \varphi_i$, где t_i — узел сетки D_h .

В дальнейшем опустим индекс h в наименованиях сеточных функций $[x]_h$, $x^{(h)}$ и для внесения ясности будем оговаривать особо случаи, в которых будет использоваться непрерывная функция $x(t)$, являющаяся точным решением.

Пусть дифференциальная краевая задача (ДКЗ) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (ОДУ2) с граничными условиями первого рода [2, 3]

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), & t \in [a, b], \\ x_0 = \tilde{x}_0, & x_n = \tilde{x}_n, \end{cases} \quad (2)$$

где \tilde{x}_0, \tilde{x}_n — заданные числа; $p(t), q(t), f(t)$ — заданные функции, дифференцируемые нужное число раз; $[a, b]$ — отрезок интегрирования; аппроксимирована (неважно каким способом) разностной краевой задачей (РКЗ) второго порядка

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ x_0 = \tilde{x}_0, & x_n = \tilde{x}_n. \end{cases} \quad (3)$$

Укажем приведенное в [1]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что решение РКЗ (3) при измельчении сетки сходится к решению ДКЗ (2), если

$$\|[x] - x\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (4)$$

Если сверх того выполнено неравенство

$$\|[x] - x\| \leq Ch^k,$$

где $C > 0$, $k > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от h , то будем говорить, что имеет место сходимость порядка h^k или что РКЗ имеет k -тый порядок точности.

В соответствии с [1–3], если разностная краевая задача аппроксимирует ДКЗ с порядком h^k и устойчива, то РКЗ является сходящейся с k -тым порядком точности.

Отметим, что устойчивость является достаточным условием сходимости. В [4, 5] приведены примеры неустойчивых РКЗ, но для которых отсутствуют основания отвергнуть их сходимость в силу практического совпадения сеточных функций $[x]$ и x при конечных n .

Поставим целью при исследовании неустойчивой РКЗ (3) построение характеристики, позволяющей при заданном числе n разбиения отрезка интегрирования $[a, b]$ в той или иной мере оценить различия между сеточными функциями $[x]$ и x независимо от существования или отсутствия аналитического решения ДКЗ (2).

2. Некоторые замечания о хорошей обусловленности и об устойчивости РКЗ второго порядка. Перечислим приведенные в [1] определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что РКЗ (3) с ограниченными в совокупности коэффициентами $|a_i|$, $|b_i|$, $|c_i| < K$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, хорошо обусловлена, если при всех достаточно больших n она имеет одно и только одно решение x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, при произвольных $\tilde{x}_0, \tilde{x}_n, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ и если значения x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, образующие решение, удовлетворяют оценке

$$|x_i| \leq M \max(|\tilde{x}_0|, |\tilde{x}_n|, |f_1|, |f_2|, \dots, |f_{n-1}|), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

где M — некоторое число, не зависящее от n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть РКЗ (3) устойчивой, если при любой правой части $F = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_n, f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ она имеет единственное решение x , причем

$$\|x\| \leq M_1 \|F\|, \quad (6)$$

где M_1 — некоторое число, не зависящее от h .

Вопрос выбора вида нормы $\|\cdot\|$ обсужден в [1].

Выбор нормы вектора в форме максимума модулей его компонентов приведет к совпадению неравенств (5) и (6) — в этом случае определения 2 и 3 совпадают.

Далее норму вектора выберем в форме максимума его компонентов. Именно такая норма рекомендована в [1] для использования.

В [1] доказан критерий, согласно которому для хорошей обусловленности РКЗ (3) необходимо и достаточно, чтобы корни q_1 и q_2 характеристического уравнения

$$c_i q^2 + b_i q + a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

были по модулю один больше, а другой меньше единицы:

$$|q_1| < 1 - \theta/2, \quad |q_2^{-1}| < 1 - \theta/2, \quad \theta > 0, \quad (7)$$

при условии гладкости коэффициентов

$$|a_l - a_j| \leq P \left| \frac{l-j}{n} \right|^m, \quad |b_l - b_j| \leq P \left| \frac{l-j}{n} \right|^m, \\ |c_l - c_j| \leq P \left| \frac{l-j}{n} \right|^m, \quad P > 0, \quad m > 0,$$

где θ, P, m — некоторые числа, не зависящие от номера уравнения i и значения n ; $l \neq j, l < n, j < n$.

Возможность контроля выполнения критерия (7) при выполнении численного эксперимента (ЧЭ) делает его использование довольно привлекательным в силу того, что значения критерия выражены через коэффициенты разностного уравнения, а не дифференциального.

3. Матричный метод численного интегрирования краевых задач для ОДУ2. Согласно матричному методу численного интегрирования [6], при фиксированных степени многочлена Тейлора k и значении n или, что то же самое, $h = (b - a)/n$, составляется система уравнений, в которую вносят:

- 1) два многочлена Тейлора степени k ($k \geq 2$), полученных из двух разложений в ряд Тейлора искомого точного решения $x(t)$ в окрестностях слева и справа от некоторого внутреннего узла t_i (центрального узла трехточечного шаблона $t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$) сетки D_h ;
- 2) уравнения

$$(q_i x_i + p_i x'_i + x''_i)^{(r)} = f_i^{(r)}, \quad r = 0, 1, \dots, k - 2,$$

полученные дифференцированием r раз обеих частей ОДУ2 задачи (2) и записанные в узле t_i .

В итоге будет получена замкнутая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} x_i - hx'_i + \frac{h^2}{2!}x''_i - \frac{h^3}{3!}x'''_i + \frac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \dots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i-1}, \\ x_i + hx'_i + \frac{h^2}{2!}x''_i + \frac{h^3}{3!}x'''_i + \frac{h^4}{4!}x_i^{(4)} + \dots + \frac{h^k}{k!}x_i^{(k)} = x_{i+1}, \\ q_i x_i + p_i x'_i + x''_i = f_i, \\ q'_i x_i + (p'_i + q_i)x'_i + p_i x''_i + x'''_i = f'_i, \\ \dots \\ q_i^{(k-2)} x_i + \dots + x_i^{(k)} = f_i^{(k-2)}. \end{cases} \quad (8)$$

В матричной форме СЛАУ (8) принимает вид

$$A^{ki} W^{ki} = G^{ki} \quad (9)$$

в обозначениях

$$A^{ki} = \begin{bmatrix} 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \dots & (-1)^k \frac{h^k}{k!} \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \dots & \frac{h^k}{k!} \\ q_i & p_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ q'_i & q_i + p'_i & p_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_i^{(k-2)} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$W^{ki} = [x_i \ x'_i \ x''_i \ x'''_i \ x_i^{(4)} \ \dots \ x_i^{(k)}]^\top, \quad G^{ki} = [x_{i-1} \ x_{i+1} \ f_i \ f'_i \ f''_i \ \dots \ f_i^{(k-2)}]^\top.$$

Здесь и ниже первый верхний индекс k означает степень используемого многочлена Тейлора, если речь не идет о показателях алгебраических степеней и степенях производных; второй из пары верхних индексов i в наименованиях матриц и их элементов, если таковой присутствует, означает номер центрального узла трехточечного шаблона, в котором записана матрица. Матрицы A^{ki} , как и ранее в [4, 5, 7], будем называть локальными матрицами.

Вычисляя $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$ (обратимость локальной матрицы A^{ki} будет показана ниже), из (9) находим

$$W^{ki} = B^{ki} G^{ki},$$

или в развернутой форме:

$$x_i = b_{11}^{ki} x_{i-1} + b_{12}^{ki} x_{i+1} + b_{13}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \quad (11)$$

$$x'_i = b_{21}^{ki} x_{i-1} + b_{22}^{ki} x_{i+1} + b_{23}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{2m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \quad (12)$$

$$x''_i = b_{31}^{ki} x_{i-1} + b_{32}^{ki} x_{i+1} + b_{33}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{3m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \quad (13)$$

...

$$x_i^{(k)} = b_{k+1,1}^{ki} x_{i-1} + b_{k+1,2}^{ki} x_{i+1} + b_{k+1,3}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{k+1,m}^{ki} f_i^{(m-3)}, \quad (14)$$

где b_{lm}^{ki} , $l = 1, 2, \dots, k+1$, $m = 1, 2, \dots, k+1$, — элементы матрицы B^{ki} в узле t_i . При $k = 2$ последние суммы в соотношениях (11)–(14) отсутствуют.

Из равенств (11), являющихся разностными уравнениями второго порядка [1] для трехточечного шаблона t_{i-1} , t_i , t_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n-1$, с учетом

граничных условий задачи (2), составляется следующая СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 - b_{12}^{k_1} x_2 = b_{13}^{k_1} f_1 + \sum_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{k_1} f_1^{(m-3)} + b_{11}^{k_1} \tilde{x}_0, \\ -b_{11}^{k_i} x_{i-1} + x_i - b_{12}^{k_i} x_{i+1} = b_{13}^{k_i} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{k_i} f_i^{(m-3)}, \quad i = 2, 3, \dots, n-2, \\ -b_{11}^{k, n-1} x_{n-2} + x_{n-1} = b_{13}^{k, n-1} f_{n-1} + \sum_{m=4}^{k+1} b_{1m}^{k, n-1} f_{n-1}^{(m-3)} + b_{12}^{k, n-1} \tilde{x}_n, \end{cases} \quad (15)$$

которая и является РКЗ, аппроксимирующей ДКЗ (2).

Вопрос оценки порядка аппроксимации (ПА) РКЗ для ОДУ2 и систем ОДУ2 исследован в [4, 7], где показано, что именно значение k определяет ПА РКЗ.

4. Псевдонеязки, точное и псевдоточные решения РКЗ. Далее под РКЗ будем понимать равенства (12)–(14) совместно с системой (15), если под ее решением подразумеваются сеточные значения искомой функции вместе со своими производными вплоть до порядка k . Такое решение назовем полным точным решением РКЗ и обозначим его как

$$\mathbf{x}_h^k = (x_0, x_n) \cup \mathbf{x}_{h,i}^k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (16)$$

где значения $x_0 = \tilde{x}_0, x_n = \tilde{x}_n$ взяты из граничных условий ДКЗ (2) и

$$\mathbf{x}_{h,i}^k = (x_i, x_i', x_i'', \dots, x_i^{(k)}) \quad (17)$$

в силу того, что соотношения (12)–(14) не позволяют вычислить производные вплоть до порядка k в граничных узлах сетки при найденном решении $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_n) \cup x_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, РКЗ (15).

Замечание 1. Решение (16) обратит в верные равенства все соотношения системы (8) в силу того, что уравнения РКЗ (12)–(15), связанные посредством элементов матриц $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}, i = 1, 2, \dots, n-1$, есть прямое следствие системы (8).

Согласно [1, 4], ДКЗ и РКЗ могут быть записаны в компактной символической форме как

$$Lx = f \quad (18)$$

и

$$L_h^k x = f_h^k \quad (19)$$

соответственно, где L — дифференциальный оператор, L_h^k — линейный оператор, k — степень используемого многочлена Тейлора, h — шаг сетки D_h .

Сеточная функция $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, являющаяся решением РКЗ, при подстановке в уравнения этой РКЗ обратит их в верные равенства. В [1] показано, что подстановка в уравнения задачи (19) значений сеточной функции $[x_i]$, отличающихся от x_i , приведет к некоторому отличию от верных

равенств. Эти отличия и характеризует невязка δf_h^k . Иными словами, подстановка $[x]$ в задачу (19) приведет к зависимости

$$L_h^k[x] = f_h^k + \delta f_h^k.$$

ПА РКЗ (19), как показано в [4], определяется оценкой

$$\|\delta f_h^k\| \leq \begin{cases} C_1 h^k, & k - \text{четное}, \\ C_2 h^{k-1}, & k - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (20)$$

где C_1, C_2 — некоторые числа, не зависящие от h .

Попытаемся выполнить аналогичную процедуру, но в качестве уравнения подстановки и вычисления невязки, которую будем далее называть псевдо-невязкой, примем задачу (18).

Для ОДУ2 $x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t)$ введем формально понятие псевдо-невязки на некотором векторе $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t), x''(t))$ как

$$\delta \mathbf{x}(t) = x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) - f(t). \quad (21)$$

Решение РКЗ (12)–(15) для вычисления псевдо-невязок

$$\mathbf{x}_h^k = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_n) \cup \mathbf{x}_{h,i}^k, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{x}_{h,i}^k = (x_i, x'_i, x''_i) \quad (23)$$

назовем точным решением.

На точном решении (23) в соответствии с (21) окажется

$$\delta \mathbf{x}_{h,i}^k = x''_i + p_i x'_i + q_i x_i - f_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (24)$$

в силу того, что значения x_i, x'_i, x''_i решения (23) обратят в верное равенство и третье соотношение СЛАУ (8) в соответствии с замечанием 1, откуда следует

$$\|\delta \mathbf{x}_h^k\| \equiv 0.$$

Поставим целью на основе точного решения (22) построение некоторого приближенного решения (псевдоточного решения), на котором норма псевдо-невязки отличалась бы от тривиального значения с дальнейшим исследованием ее поведения при изменении величин h и k .

Ряды Тейлора, содержащие только знаки «плюс» между слагаемыми, будем называть *plus*-рядами Тейлора, в противном случае — *minus*-рядами Тейлора; аналогичную терминологию примем и для многочленов Тейлора.

Пусть $\hat{x}(t)$ есть некоторая неизвестная дифференцируемая нужное число раз функция, разложение которой и ее первой и второй производных в окрестностях слева от некоторого внутреннего узла $t_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, сетки D_h запишем с использованием *minus*-рядов Тейлора:

$$\begin{cases} \hat{x}_{i-1} = \hat{x}_i - h\hat{x}'_i + \frac{h^2}{2!}\hat{x}''_i - \frac{h^3}{3!}\hat{x}'''_i + \frac{h^4}{4!}\hat{x}^{(4)}_i + \dots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}\hat{x}^{(k)}_i + R_{i-1}^k, \\ \hat{x}'_{i-1} = \hat{x}'_i - h\hat{x}''_i + \frac{h^2}{2!}\hat{x}'''_i - \frac{h^3}{3!}\hat{x}^{(4)}_i + \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\hat{x}^{(k)}_i + R_{i-1}^{k-1}, \\ \hat{x}''_{i-1} = \hat{x}''_i - h\hat{x}'''_i + \frac{h^2}{2!}\hat{x}^{(4)}_i - \dots + (-1)^k \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}\hat{x}^{(k)}_i + R_{i-1}^{k-2}, \end{cases} \quad (25)$$

а в окрестностях справа — с использованием *plus*-рядов Тейлора:

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i+1} = \widehat{x}_i + h\widehat{x}'_i + \frac{h^2}{2!}\widehat{x}''_i + \frac{h^3}{3!}\widehat{x}'''_i + \frac{h^4}{4!}\widehat{x}^{(4)}_i + \dots + \frac{h^k}{k!}\widehat{x}^{(k)}_i + R_{i+1}^k, \\ \widehat{x}'_{i+1} = \widehat{x}'_i + h\widehat{x}''_i + \frac{h^2}{2!}\widehat{x}'''_i + \frac{h^3}{3!}\widehat{x}^{(4)}_i + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\widehat{x}^{(k)}_i + R_{i+1}^{k-1}, \\ \widehat{x}''_{i+1} = \widehat{x}''_i + h\widehat{x}'''_i + \frac{h^2}{2!}\widehat{x}^{(4)}_i + \dots + \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}\widehat{x}^{(k)}_i + R_{i+1}^{k-2}, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$R_{i-1}^k, R_{i+1}^k = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}x^{(k+1)}(\xi) = O(h^{k+1}), \quad \xi \in (t_i, t_{i+1}), \quad (27)$$

есть дополнительные члены разложений в ряд Тейлора в форме Лагранжа [8].

Запишем формально многочлены Тейлора, соответствующие рядам (25), (26), но в правых частях которых вместо неизвестных $\widehat{x}_i, \widehat{x}'_i, \widehat{x}''_i, \dots, \widehat{x}_i^{(k)}$ используем найденные значения полного точного решения (17), получим

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i-1} = x_i - hx'_i + \frac{h^2}{2!}x''_i - \frac{h^3}{3!}x'''_i + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}_i + \dots + (-1)^k \frac{h^k}{k!}x_i^{(k)}, \\ \widehat{x}'_{i-1} = x'_i - hx''_i + \frac{h^2}{2!}x'''_i - \frac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_i^{(k)}, \\ \widehat{x}''_{i-1} = x''_i - hx'''_i + \frac{h^2}{2!}x^{(4)}_i - \dots + (-1)^k \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x_i^{(k)}, \end{cases} \quad (28)$$

и

$$\begin{cases} \widehat{x}_{i+1} = x_i + hx'_i + \frac{h^2}{2!}x''_i + \frac{h^3}{3!}x'''_i + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}_i + \dots + \frac{h^k}{k!}x_i^{(k)}, \\ \widehat{x}'_{i+1} = x'_i + hx''_i + \frac{h^2}{2!}x'''_i + \frac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_i^{(k)}, \\ \widehat{x}''_{i+1} = x''_i + hx'''_i + \frac{h^2}{2!}x^{(4)}_i + \dots + \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x_i^{(k)} \end{cases} \quad (29)$$

соответственно и сразу отметим, что правые части первых равенств систем (28), (29) совпадают с левыми частями двух первых равенств СЛАУ (8). Следовательно, в соответствии с замечанием 1

$$\widehat{x}_i = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (30)$$

где x_i — элементы точного решения РКЗ (12)–(15), определяемые (22).

Оставшиеся соотношения систем (28), (29) в СЛАУ (8) не входят и их точного выполнения ожидать не приходится; действительно, их правые части совпадают с многочленами Тейлора уже найденных значений x'_i, x''_i . Следовательно, например, два последних соотношения системы (28) примут вид

$$\begin{cases} \widehat{x}'_{i-1} = x'_i - hx''_i + \frac{h^2}{2!}x'''_i - \frac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x_i^{(k)} \approx x'_{i-1}, \\ \widehat{x}''_{i-1} = x''_i - hx'''_i + \frac{h^2}{2!}x^{(4)}_i - \dots + (-1)^k \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x_i^{(k)} \approx x''_{i-1}. \end{cases} \quad (31)$$

Ситуация с системой (29) аналогична. Тогда

$$\widehat{x}'_i \approx x'_i, \quad \widehat{x}''_i \approx x''_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (32)$$

где x'_i, x''_i — элементы точного решения (22).

Преобразуем вторые и третьи соотношения систем (28), (29) к виду, удобному для выполнения вычислений в конкретном узле t_i сетки D_h .

Возможно несколько способов реализации такого преобразования.

1. Два *minus*-многочлена в узлах x_0, x_1 ; в остальных узлах использованы *plus*-многочлены.
2. Два *plus*-многочлена в узлах x_{n-1}, x_n ; в остальных узлах использованы *minus*-многочлены.
3. Каждое соотношение системы есть полусумма соответствующих слагаемых многочленов Тейлора, которые расположены в узлах с одинаковыми номерами, двух перечисленных выше способов.
4. В расположенных левее середины отрезка интегрирования $[a, b]$ узлах использованы *minus*-многочлены, правее — *plus*-многочлены.

Отдать предпочтение тому или иному способу проблематично, тем не менее выпишем систему, соответствующую способу 4,

$$\begin{cases} \widehat{x}'_i = x'_{i+1} - hx''_{i+1} + \frac{h^2}{2!}x'''_{i+1} - \frac{h^3}{3!}x^{(4)}_{i+1} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_{i+1}, \\ \widehat{x}''_i = x''_{i+1} - hx'''_{i+1} + \frac{h^2}{2!}x^{(4)}_{i+1} - \dots + (-1)^k \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \\ \widehat{x}'_i = x'_{i-1} + hx''_{i-1} + \frac{h^2}{2!}x'''_{i-1} + \frac{h^3}{3!}x^{(4)}_{i-1} + \dots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_{i-1}, \\ \widehat{x}''_i = x''_{i-1} + hx'''_{i-1} + \frac{h^2}{2!}x^{(4)}_{i-1} + \dots + \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_{i-1}, \quad i = m, m+1, \dots, n, \end{cases} \quad (33)$$

где m есть целая часть дроби $n/2$.

Псевдоточным решением РКЗ (12)–(15) назовем

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \cup \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (34)$$

где

$$\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (x_i, \widehat{x}'_i, \widehat{x}''_i) \quad (35)$$

и значения $x_0 = \widetilde{x}_0, x_n = \widetilde{x}_n$ взяты из граничных условий ДКЗ (2); оставшиеся x_i в соответствии с (30) взяты из точного решения (22) или, что то же самое, вычислены с использованием первых равенств систем (28) и(или) (29); $\widehat{x}'_i, \widehat{x}''_i$ есть результат вычисления по системе соотношений одного из способов реализации, например, по (33).

Вычислим меру различий между элементами следующих пар: (x'_i, \widehat{x}'_i) и (x''_i, \widehat{x}''_i) . Система (31) и ряды Тейлора

$$\begin{cases} x'_{i-1} = x'_i - hx''_i + \frac{h^2}{2!}x'''_i - \frac{h^3}{3!}x^{(4)}_i + \dots + (-1)^{k-1} \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}x^{(k)}_i + R_{i-1}^{k-1}, \\ x''_{i-1} = x''_i - hx'''_i + \frac{h^2}{2!}x^{(4)}_i - \dots + (-1)^k \frac{h^{k-2}}{(k-2)!}x^{(k)}_i + R_{i-1}^{k-2}, \end{cases}$$

дают оценки

$$x'_{i-1} - \widehat{x}'_{i-1} = R_i^{k-1}, \quad x''_{i-1} - \widehat{x}''_{i-1} = R_i^{k-2},$$

или

$$x'_i - \widehat{x}'_i = R_i^{k-1}, \quad x''_i - \widehat{x}''_i = R_i^{k-2}. \quad (36)$$

Записывая псевдоневязку на псевдоточном решении (35) во всех узлах сетки D_h , получим оценку

$$\delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = \widehat{x}''_i + p_i \widehat{x}'_i + q_i x_i - f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (37)$$

ожидать тривиального значения которой в силу (32) в общем случае не приходится.

Вычислим оценку псевдоневязки на векторе $\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Учитывая тривиальное значение псевдоневязки (24), из (37) с учетом (36) и пренебрегая старшими степенями, имеем

$$\begin{aligned} \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k &= \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k - \delta \mathbf{x}_{h,i}^k = \widehat{x}''_i + p_i \widehat{x}'_i + q_i x_i - f_i - (x''_i + p_i x'_i + q_i x_i - f_i) = \\ &= -(x''_i - \widehat{x}''_i) - p_i (x'_i - \widehat{x}'_i) \approx -R_i^{k-2} - p_i R_i^{k-1} \approx R_i^{k-2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда, положив

$$R^{k-2} = \max(|R_1^{k-2}|, |R_2^{k-2}|, \dots, |R_{n-1}^{k-2}|), \quad (39)$$

получим оценку нормы с порядком $k-1$:

$$\|\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \approx R^{k-2} = O(h^{k-1}) \leq Ch^{k-1} \quad (40)$$

($C > 0$ не зависит от h), где в соответствии с принятым выше положением о выборе норм

$$\|\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| = \max(|\delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,1}^k|, |\delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,2}^k|, \dots, |\delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,n-1}^k|) \quad (41)$$

есть норма псевдоневязки, которая, как следует из оценки (40), монотонно убывает и при уменьшении h ($k = \text{const}$), и при увеличении k ($h = \text{const}$). Отметим, что при вычислении нормы (40) не использованы граничные узлы сетки D_h в силу отсутствия компонентов x'_0 , x'_n и x''_n , x''_0 в полном точном решении (22).

Поставим целью повысить на единицу порядок оценки нормы псевдоневязки. Попытаемся исключить влияние второй производной, как имеющей в соответствии с (36) более низкий порядок в сравнении с первой производной, на оценку нормы. Теперь псевдоточное решение определим из решения (34) путем замены \widehat{x}''_i на значения x''_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, из точного решения (22), оставив прежними значения в граничных узлах:

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \cup \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (42)$$

где

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\tilde{x}_0, \widehat{x}'_0, \widehat{x}''_0), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (x_i, \widehat{x}'_i, x''_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\tilde{x}_n, \widehat{x}'_n, \widehat{x}''_n). \end{cases} \quad (43)$$

На решении (43) вместо (38), как и ранее для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$, получим

$$\delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = -p_i(x'_i - \widehat{x}'_i) \approx R_i^{k-1},$$

откуда следует оценка нормы с порядком k :

$$\|\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \approx R^{k-1} = O(h^k) \leq Ch^k, \quad (44)$$

где R^{k-1} определено аналогично (39).

Помимо приведенных двух псевдоточных решений можно построить еще ряд псевдоточных решений, например,

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}'_0, \widehat{x}''_0), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}'_n, \widehat{x}''_n), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (x_i, x'_i, \widehat{x}''_i), & i = 1, 2, \dots, n - 1, \end{cases} \quad (45)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}'_0, \widehat{x}''_0), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}'_n, \widehat{x}''_n), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (\widehat{x}_i, \widehat{x}'_i, x''_i), & i = 1, 2, \dots, n - 1, \end{cases} \quad (46)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}'_0, \widehat{x}''_0), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}'_n, \widehat{x}''_n), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (\widehat{x}_i, x'_i, \widehat{x}''_i), & i = 1, 2, \dots, n - 1, \end{cases} \quad (47)$$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h^k = \begin{cases} \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k = (\widetilde{x}_0, \widetilde{x}'_0, \widehat{x}''_0), & \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k = (\widetilde{x}_n, \widehat{x}'_n, \widehat{x}''_n), \\ \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = (\widehat{x}_i, \widehat{x}'_i, \widehat{x}''_i), & i = 1, 2, \dots, n - 1, \end{cases} \quad (48)$$

где значения \widehat{x}_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, в решениях (46) и (48) дают соотношение (12) своим разрешением относительно искомой функции при уже вычисленных значениях \widehat{x}'_i , а в решении (47) дают соотношение (13) при уже вычисленных значениях \widehat{x}''_i . Указанное разрешение соотношений (12), (13) относительно искомой функции возможно лишь при нечетных n , что не является существенным ограничением.

Вычислим оценки порядков норм псевдоневязки $\|\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на перечисленных псевдоточных решениях $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, которые далее будем обозначать как ПНПн(\cdot), где (\cdot) — ссылка на обозначение конкретного решения. В частности,

$$\text{ПНПн}(34) = k - 1, \quad \text{ПНПн}(42) = k, \quad \text{ПНПн}(45) = k - 1. \quad (49)$$

Последняя оценка в (49) непосредственно следует из (38).

Для псевдоточного решения (46) из (12) имеем при уже вычисленных значениях x'_i и \widehat{x}'_i :

$$x'_i = b_{21}^{ki} x_{i-1} + b_{22}^{ki} x_{i+1} + b_{23}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{2m}^{ki} f_i^{(m-3)},$$

$$\widehat{x}'_i = b_{21}^{ki} \widehat{x}_{i-1} + b_{22}^{ki} \widehat{x}_{i+1} + b_{23}^{ki} f_i + \sum_{m=4}^{k+1} b_{2m}^{ki} f_i^{(m-3)},$$

откуда

$$x'_i - \widehat{x}'_i = b_{21}^{ki} (x_{i-1} - \widehat{x}_{i-1}) + b_{22}^{ki} (x_{i+1} - \widehat{x}_{i+1}). \quad (50)$$

Аналогично [4] можно показать справедливость оценок элементов обратной матрицы $B^{ki} = (A^{ki})^{-1}$:

$$b_{lm}^{ki} \approx b_{lm}^{2i}, \quad l = 2, 3, \quad m = 1, 2. \quad (51)$$

Принимая, что порядок меры различий между парами (x_i, \hat{x}_i) , как и ранее между парами (x'_i, \hat{x}'_i) и (x''_i, \hat{x}''_i) , не зависит от номера i , из (50) и (51) имеем

$$x'_i - \hat{x}'_i \approx b_{21}^{2i} R_{i-1}^w + b_{22}^{2i} R_{i+1}^w, \quad (52)$$

где w — порядок меры различий, пока неизвестное число. Непосредственными вычислениями легко убедиться в справедливости следующих формул:

$$b_{21}^{2i} = -\frac{2}{h}, \quad b_{22}^{2i} = \frac{2}{h}. \quad (53)$$

Подстановка (53) в (52) дает

$$\frac{h(x'_i - \hat{x}'_i)}{2} \approx -R_{i-1}^w + R_{i+1}^w \approx R_i^w,$$

или, с учетом первого равенства (36),

$$hR_i^{k-1} = R_i^k \approx R_i^w,$$

и окончательно

$$x_i - \hat{x}_i = R_i^k. \quad (54)$$

На решении (46) с учетом первого равенства (36) и (54) имеем

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_{h,i}^k = -p_i(x'_i - \hat{x}'_i) - q_i(x_i - \hat{x}_i) = -p_i R_i^{k-1} - q_i R_i^k \approx R_i^{k-1}. \quad (55)$$

Оценка (55) справедлива и для псевдоточного решения (48) за счет наличия компонента \hat{x}'_i в нем.

На решении (47) по аналогии с вышеизложенным получено

$$\begin{aligned} \frac{h(x''_i - \hat{x}''_i)}{p_i} &\approx R_{i-1}^w - R_{i+1}^w \approx R_i^w, \\ x_i - \hat{x}_i &= R_i^{k-1}, \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_{h,i}^k &= -(x''_i - \hat{x}''_i) - q_i(x_i - \hat{x}_i) = -R_i^{k-2} - q_i R_i^{k-1} \approx R_i^{k-2}. \end{aligned} \quad (56)$$

Оценки (55), (56) позволяют окончательно записать

$$\text{ПНПн(46)} = k, \quad \text{ПНПн(47)} = k - 1, \quad \text{ПНПн(48)} = k. \quad (57)$$

Разность и норму на некоторых решениях (точных или псевдоточных) \mathbf{x}_h^k и \mathbf{v}_h^k вида (58):

$$\mathbf{x}_h^k = \cup(x_i, x'_i, x''_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (58)$$

определим как

$$\mathbf{x}_h^k - \mathbf{v}_h^k = \cup(x_i - v_i, x'_i - v'_i, x''_i - v''_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (59)$$

$$\|\mathbf{x}_h^k\| = \max(\|x\|, \|x'\|, \|x''\|). \quad (60)$$

Вычислим порядок нормы разности между точным решением \mathbf{x}_h^k (22) и любым из перечисленных выше псевдоточных решений $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ (34), (42), (45)–(48).

Например, на решении (34) в соответствии с (36), (59), (60) имеем

$$\mathbf{x}_h^k - \widehat{\mathbf{x}}_h^k = \cup(x_i - x_i, x'_i - \widehat{x}'_i, x''_i - \widehat{x}''_i) = \cup(0, R_i^{k-1}, R_i^{k-2}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (61)$$

$$\|\mathbf{x}_h^k - \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| = \max(0, R^{k-1}, R^{k-2}) \approx R^{k-2} = O(h^{k-1}) \leq Ch^{k-1}, \quad (62)$$

откуда следует оценка нормы разности с порядком $k-1$, совпадающая с приведенной в (49) оценкой ПНПн(34). Отметим: при вычислении нормы разности (61), как и ранее при вычислении ПНПн(34), не использованы граничные узлы сетки D_h в силу отсутствия компонентов x'_0 , x'_n и x''_n , x''_0 в точном решении (22).

Использование таких операций, как

а) пренебрежение старшими степенями при вычислении псевдоневязок $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, согласно, например, (38), (55) или (56) при вычислении ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$);

б) вычисление $\max(\cdot)$ согласно (60) при вычислении нормы (62), приводит на оставшихся псевдоточных решениях $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ (42), (45)–(48) к совпадению оценки ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$) с оценкой порядка нормы разности между точным \mathbf{x}_h^k и псевдоточным $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ решениями, как это уже оказалось на решении (34).

Соотношение (62) на любом из перечисленных $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ даст

$$\|\mathbf{x}_h^k - \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ или при } k \rightarrow \infty,$$

что свидетельствует о стремлении псевдоточного решения $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ к точному решению \mathbf{x}_h^k ; при этом напомним, что на точном решении всегда $\|\delta\mathbf{x}_h^k\| \equiv 0$, тогда как на псевдоточном наоборот, а именно: $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \neq 0$, причем норма на псевдоточном решении монотонно убывает согласно, например, (40).

Анализ оценок (36), (40), (44), (62) приводит к заключению, что порядок нормы разности между точным решением \mathbf{x}_h^k и любым псевдоточным решением $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, как и ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$), определяет только степень дополнительного члена разложения в ряд Тейлора в форме Лагранжа (27) старшей производной в решении $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ при условии, что эта производная не является компонентом точного решения \mathbf{x}_h^k , и этот порядок нормы разности никак не зависит от четности или нечетности k .

Анализ оценок порядков (49) и (57) при выборе формы псевдоточного решения $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ для дальнейшего исследования рассматриваемой задачи отдает предпочтение осуществлению выбора именно среди решений (42), (46), (48) как имеющих максимально возможный ПНПн($\widehat{\mathbf{x}}_h^k$), совпадающий со степенью k используемого многочлена Тейлора и с ПА РКЗ при четном k .

Поэтому псевдоточное решение (42), как не требующее дополнительных расчетов своих компонентов в сравнении с оставшимися решениями (46), (48), будет далее использовано при выполнении численных экспериментов, и именно оно будет далее называться «псевдоточным решением» РКЗ.

Полученные выше результаты будут далее использованы при исследовании устойчивости и сходимости РКЗ.

5. Численные эксперименты (выбор дифференциальных уравнений, терминология, планирование эксперимента). В [5] показано, что классический метод сеток [1], совпадающий при $k = 2$ с матричным методом численного интегрирования [6], приводит к устойчивой в смысле определения 3 РКЗ при

$$q_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (63)$$

где $q(t)$ — входящая в ОДУ2 ДКЗ (2) заданная функция. Именно при условии нарушения неравенств (63) и были выбраны перечисленные ниже ОДУ2, которые вместе со своими общими решениями $x(t)$ взяты из [9, 10]:

$$x'' + x' \operatorname{tg} t + x \cos^2 t = 0, \quad x(t) = C_1 \sin(\sin t) + C_2 \cos(\sin t), \quad (64)$$

$$x'' - x' \operatorname{tg}^{-1} t + x \sin^2 t = 0, \quad x(t) = C_1 \cos(\cos t) + C_2 \sin(\cos t), \quad (65)$$

$$x'' - \frac{3x'}{t} + \frac{4x}{t^2} = \frac{5}{t}, \quad x(t) = 5t + C_1 t^2 + C_2 t^2 \ln |t|, \quad (66)$$

$$x'' - \frac{(t+1)x'}{t} + \frac{x}{t} = 0, \quad x(t) = C_1(t+1) + C_2 e^t, \quad t > 0, \quad (67)$$

$$x'' + \frac{x'}{t^2} - \frac{x}{t^3} = 0, \quad x(t) = C_1 t + C_2 t e^{1/t}, \quad t < 0, \quad (68)$$

$$x'' + \frac{2x'}{t} + x = \frac{1}{t}, \quad x(t) = \frac{C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + 1}{t}, \quad (69)$$

$$x'' + \frac{3x'}{t} + \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t^3}, \quad x(t) = \frac{0.5 \ln^2 |t| + C_1 + C_2 \ln |t|}{t}, \quad (70)$$

$$x'' - \frac{2x'}{t} + \frac{(t^2+2)x}{t^2} = \frac{t^2+6}{t^3}, \quad x(t) = \frac{C_1 t^2 \cos t + C_2 t^2 \sin t + 1}{t}, \quad (71)$$

$$x'' + \frac{4tx'}{t^2-1} + \frac{2x}{t^2-1} = \frac{6t}{t^2-1}, \quad x(t) = \frac{C_1}{t+1} + \frac{C_2}{t-1} + t, \quad t < -1, \quad t > 1, \quad (72)$$

$$x'' + \frac{(t-3)x'}{t^2-1} - \frac{x}{t^2-1} = 0, \quad x(t) = C_1(t-3) + \frac{C_2}{t+1}, \quad -1 < t < 1, \quad (73)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Отметим следующие особенности выбранных уравнений при конечных t :

- 1) общие решения ОДУ2 (64)–(67) ограничены;
- 2) общее решение ОДУ2 (68) имеет ограниченный левосторонний и неограниченный правосторонний пределы в точке $t = 0$; но в области $t < 0$, в которой условие (63) нарушено, общее решение ограничено;
- 3) общие решения ОДУ2 (69)–(73) имеют неограниченные левосторонний и правосторонний пределы в одной или в двух точках;
- 4) для всех перечисленных ОДУ2 имеется некоторое значение \tilde{t} , в некоторой окрестности которого хотя бы одна входящая в ОДУ2 функция неограниченна.

Каждый отдельный численный эксперимент (ЧЭ) для РКЗ выполнялся при некоторых фиксированных значениях $n \in [n_{\min}, n_{\max}] = [20, 15000]$, $k \in [k_{\min}, k_{\max}] = [2, 9]$ и границах отрезка $[a, b]$. Выбор отрезков изменения величин n, k обусловлен возможностями ПК в смысле накопления компьютерных погрешностей округления [3] и разумными временными затратами на выполнение ЧЭ. Зависимость (1) позволяет найти соответствующий отрезку $[n_{\min}, n_{\max}]$ отрезок для $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$. Границы отрезка интегрирования

$[a, b]$ при составлении каждой РКЗ были выбраны, если не оговорено особо, исходя из условия $h_{\max} = 0.2$ при $n = 20$.

В компьютерной программе для вычисления решения РКЗ (15) был реализован метод прогонки [1–3]; расчеты выполнялись с двойной точностью.

Далее примем, если не оговорено особо,

$$\tilde{t} \notin [a, b]. \quad (74)$$

Введем терминологию и будем различать:

- 1) совокупность результатов группы ЧЭ, выполненных при увеличении $n \in [n_{\min}, n_{\max}]$ при фиксированных k и $[a, b]$, назовем и обозначим
 - а) экспериментом первого типа (Э1), если в достаточно больших окрестностях числа \tilde{t} не содержатся границы отрезка $[a, b]$; наиболее приближенную к \tilde{t} границу отрезка будем называть критической границей и обозначать $\bar{a}(\bar{b})$;
 - б) Э1 \tilde{t} , если в некоторой окрестности числа \tilde{t} содержится критическая граница $\bar{a}(\bar{b})$;
- 2) совокупность результатов группы ЧЭ, выполненных при увеличении $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ при фиксированных n и $[a, b]$, назовем и обозначим
 - а) экспериментом второго типа (Э2), если в достаточно больших окрестностях числа \tilde{t} не содержится критическая граница $\bar{a}(\bar{b})$;
 - б) Э2 \tilde{t} , если в некоторой окрестности числа \tilde{t} содержится критическая граница $\bar{a}(\bar{b})$.
- 3) совокупность результатов группы ЧЭ, выполненных при изменении местоположения отрезка $[a, b]$ при фиксированных n и k , назовем и обозначим
 - а) экспериментом третьего типа (Э3), если в достаточно больших окрестностях числа \tilde{t} не содержится критическая граница $\bar{a}(\bar{b})$;
 - б) Э3 \tilde{t} , если критическая граница $\bar{a}(\bar{b})$, находясь в некоторой окрестности числа \tilde{t} , приближается к нему.

Вычисление оценки порядка нормы псевдоневязки согласно (44) не предполагает использования граничных узлов сетки D_h , поэтому

Замечание 2. Использование различных значений h в группе ЧЭ ставит в эксперименте Э1 значения вычисляемых характеристик $|\delta\hat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|, i = 0, 1, \dots, n$, и нормы $\|\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в зависимость от h . Действительно

- 1) при изменении h меняются абсолютные значения узлов t_1, t_{n-1} , что приводит к
 - а) появлению нефиксированного расстояния от узлов t_1, t_{n-1} до границ;
 - б) изменению протяженности области вычисления компонентов вектора $\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k$ соответствующей задачи;
- 2) вычисление компонентов вектора $\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k$ в фиксированной для всех h области, границы которой определяют узлы t_1, t_{n-1} , соответствующие $h = h_{\max}$, приводит к потере части приграничных узлов для всех задач группы при $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$.

Из замечания 2 следует, что достоверность результатов эксперимента Э2 несколько превышает достоверность результатов эксперимента Э1.

6. Условно устойчивая РКЗ, условно устойчивое и условно сходящееся решения. Дифференциальной задаче (18) формально придадим вид

$$L[\mathbf{x}] = f, \tag{75}$$

где $[\mathbf{x}] = (x(t), x'(t), x''(t))$ — непрерывная функция, являющаяся полным точным решением ДКЗ (75).

По аналогии с точным решением (22) сеточное решение ДКЗ (75) при фиксированном h определим как

$$[\mathbf{x}_h] = \cup[\mathbf{x}_{h,i}], \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$[\mathbf{x}_{h,i}] = ([x_i], [x'_i], [x''_i]),$$

где $[x'_i], [x''_i]$ — сеточные функции, совпадающие с точными значениями производных решения ДКЗ (75) в узлах сетки D_h . Очевидно,

$$[x''_i] + p_i[x'_i] + q_i[x_i] \equiv f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{76}$$

Пусть в результате реализации эксперимента Э2 для РКЗ (12)–(15) получена группа пар $(\mathbf{x}_h^k, \delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k)$, $k \geq 2$, $h = \text{const}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Группу векторов $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ при произвольных $k \geq 2$ будем называть группой векторов псевдовозмущений в эксперименте Э2, если норма $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ каждого вектора, начиная с некоторого $k \geq k_0$ монотонно убывает при увеличении k , причем

$$\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty. \tag{77}$$

Пусть $\mathbf{x} = (x, x', x'')$ есть пока неизвестное точное сеточное решение РКЗ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Группу РКЗ

$$L_h^k \mathbf{x} = f_h^k, \quad k \geq 2, \tag{78}$$

будем называть условно устойчивой (устойчивой условно) по k , если разностная задача

$$L_h^k \widehat{\mathbf{u}} = f_h^k + \delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k, \tag{79}$$

полученная из каждой задачи группы (78) добавлением к правой части вектора псевдовозмущений $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, начиная с некоторого $k \geq k_0$ имеет одно и только одно возмущенное решение $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}, \widehat{u}', \widehat{u}'')$, причем это решение отклоняется от решения $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_h^k$ невозмущенной задачи (78) на сеточную функцию $\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}$, удовлетворяющую оценке

$$\|\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\| \leq C_k \|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|, \tag{80}$$

где C_k — некоторое число, не зависящее от h , или, в соответствии с (60), в развинутой форме:

$$\begin{cases} \|\widehat{u} - x\| \leq C_k \|\delta\widehat{x}_h^k\|, \\ \|\widehat{u}' - x'\| \leq C_k \|\delta\widehat{x}_h^k\|, \\ \|\widehat{u}'' - x''\| \leq C_k \|\delta\widehat{x}_h^k\|. \end{cases} \tag{81}$$

Каждую РКЗ группы (78) назовем условно устойчивой (устойчивой условно) РКЗ, а ее решение — условно устойчивым (устойчивым условно) решением.

Введение термина «условная устойчивость» обусловлено исследованием уже найденного решения \mathbf{x}_h^k , соответствующего конкретной правой части РКЗ (12)–(15), тогда как в определении 3 устойчивости РКЗ речь идет о произвольной правой части и, следовательно, о решении, которое еще не найдено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что каждое решение группы РКЗ (78) является условно сходящимся (сходящимся условно) по k к решению ДКЗ (75), если при $k \rightarrow \infty$

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \rightarrow 0,$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} \| [x] - x \| \rightarrow 0, \\ \| [x'] - x' \| \rightarrow 0, \\ \| [x''] - x'' \| \rightarrow 0. \end{cases} \quad (82)$$

Если сверх того выполнено неравенство

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \leq M_k h^k,$$

где M_k — некоторое число, не зависящее от h , то будем говорить, что имеет место условная сходимостъ по k порядка h^k или что РКЗ группы имеет k -тый порядок точности.

Каждое решение РКЗ группы (78) назовем условно сходящимся (сходящимся условно).

Разностные задачи (78), (79) для найденного решения $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_h^k$ и найденного вектора $\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k$, $k \geq 2$, дают

$$L_h^k \mathbf{z} = \delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k, \quad (83)$$

где

$$\mathbf{z} = \widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}, \quad (84)$$

или в форме системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} a_i z_{i-1} + b_i z_i + c_i z_{i+1} = \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ z_0 = \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k, & z_n = \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k, \end{cases} \quad (85)$$

где коэффициенты a_i , b_i , c_i совпадают, очевидно, с аналогичными коэффициентами РКЗ (3).

Подстановка в (84) сеточной функции $\mathbf{z} = (z, z', z'')$, являющейся точным решением РКЗ (83), позволит вычислить возмущенное решение $\widehat{\mathbf{u}} = (\widehat{u}, \widehat{u}', \widehat{u}'')$ при уже найденном решении \mathbf{x}_h^k задачи (78).

Аналогичным образом для эксперимента Э1 введем определения устойчивости условно по h ($k = \text{const}$) и сходимости условно по h ($k = \text{const}$).

Аналогично [1] будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть РКЗ (78) аппроксимирует ДКЗ (75) на решении $[\mathbf{x}]$ с порядком (20) и является условно устойчивой по h или по k . Тогда решение \mathbf{x} задачи (78) сходится условно к $[\mathbf{x}]$, причем имеет место оценка

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \leq C_k \|\delta f_h^k\| \leq \begin{cases} C_k C_1 h^k, & k - \text{четное}, \\ C_k C_2 h^{k-1}, & k - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (86)$$

где C_1, C_2, C_k — числа, входящие в оценки (20), (80).

Доказательство. Положим $\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k = \delta f_h^k$, $\widehat{\mathbf{u}} = [\mathbf{x}]$. Тогда неравенство (80) с учетом (20) примет вид

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \leq C_k \|\delta f_h^k\| \leq \begin{cases} C_k C_1 h^k, & k - \text{четное}, \\ C_k C_2 h^{k-1}, & k - \text{нечетное}. \end{cases} \quad \square$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть каждое решение группы РКЗ (78) сходится условно по h или по k к решению ДКЗ (75). Тогда каждое такое решение является условно устойчивым.

Доказательство. Пусть

$$\|[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ или при } k \rightarrow \infty. \quad (87)$$

На псевдоточном решении (43) в соответствии с (21) имеем

$$x_i'' + p_i \widehat{x}_i' + q_i x_i = f_i + \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (88)$$

Вычитая равенство (76) из (88), получим

$$(x_i'' - [x_i'']) + p_i(\widehat{x}_i' - [x_i']) + q_i(x_i - [x_i]) = \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (89)$$

Подстановка первой оценки (36) в (89) дает

$$\begin{aligned} \delta \widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k &= (x_i'' - [x_i'']) + p_i(\widehat{x}_i' - [x_i']) + q_i(x_i - [x_i]) = \\ &= (x_i'' - [x_i'']) + p_i(x_i' + R_i^{k-1} - [x_i']) + q_i(x_i - [x_i]) = \\ &= (x_i'' - [x_i'']) + p_i x_i' + p_i R_i^{k-1} - p_i [x_i'] + q_i(x_i - [x_i]) \approx \\ &\approx (x_i'' - [x_i'']) + p_i(x_i' - [x_i']) + q_i(x_i - [x_i]). \end{aligned} \quad (90)$$

Выполнение (87) приводит соотношения (90) к (77) или с учетом условной сходимости по h к

$$\|\delta \widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ или при } k \rightarrow \infty. \quad (91)$$

Условие (91) превращает оценку (80) в

$$\|\widehat{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ или при } k \rightarrow \infty,$$

что равносильно наличию условной устойчивости. \square

Из теорем 1 и 2 следует, что условная устойчивость является необходимым и достаточным условием условной сходимости.

Первое неравенство (81) с учетом (44) и первый компонент соотношения (86) в соответствии с (60) запишем как

$$\|\hat{u} - x\| \leq C_k C h^k, \quad (92)$$

где C — число, входящее в оценку (44), и

$$\|[x] - x\| \leq \begin{cases} C_k C_1 h^k, & k - \text{четное}, \\ C_k C_2 h^{k-1}, & k - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (93)$$

При наличии условной сходимости оценки (92), (93) приводят к эквивалентности (в смысле бесконечно малых величин [8]) норм $C_1 \|\hat{u} - x\|$, $C \|[x] - x\|$ при четном k , и норм $C_2 \|\hat{u} - x\|$, $Ch \|[x] - x\|$ при нечетном k , или

$$\|[x] - x\| \sim \begin{cases} \frac{C_1}{C} \|\hat{u} - x\|, & k - \text{четное}, \\ \frac{C_2}{Ch} \|\hat{u} - x\|, & k - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (94)$$

Выражение (94) устанавливает некоторую связь, по крайней мере при четном k , между сходимостью (в традиционном понимании в соответствии с определением 1) и условной сходимостью, а само выражение (94) позволяет оценить меру различий с точностью до константы между сеточными функциями $[x]$ и x независимо от существования или отсутствия аналитического решения соответствующей ДКЗ в силу того, что норма в правой части выражения (94) есть не что иное, как максимум модулей значений решения РКЗ (85).

Аналогичные (94) оценки мер различий между первой и второй производными сеточных функций $[x]$ и x непосредственно следуют из (81) и (86).

Замечание 3. Наличие условной сходимости по k в соответствии с определением 6 предполагает выполнение одновременно трех условий (82). Нарушение хотя бы одного из упомянутых трех условий приводит к отсутствию условной сходимости, в силу чего отсутствие условной сходимости еще не гарантирует наличия значительных отличий между сеточными функциями $[x]$ и x , например в случае, когда первое условие (82) имеет место в ЧЭ, а хотя бы одно из двух оставшихся — нет.

Замечание 3 позволяет заключить, что определение условной сходимости по h является более «сильным» или более «требовательным» в сравнении со сходимостью в традиционном понимании (см. определение 1), где предполагается выполнение только одного условия (4).

Иллюстрация замечания 3 будет дана ниже.

7. Выбор норм для оценки погрешностей, формирование схемы исследования. При проведении каждого ЧЭ выполнялось следующее.

1. Для оценки абсолютной [1–3] и относительной [4], которую можно трактовать как некий аналог коэффициента вариации в статистике, характеризующий меру разброса в процентах [11] погрешностей, были использованы следующие нормы:

а) между сеточными функциями $[x]$, x :

$$[E_h^k] = \max [|x_i| - x_i], \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (95)$$

$$[D_h^k] = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n ([x_i] - x_i)^2}}{\sum_{i=0}^n |[x_i]|} \cdot 100\%; \quad (96)$$

б) между сеточными функциями \hat{u} , x :

$$\hat{E}_h^k = \max |\hat{u}_i - x_i| = \max |z_i|, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (97)$$

$$\hat{D}_h^k = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (\hat{u}_i - x_i)^2}}{\sum_{i=0}^n |x_i|} \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (z_i)^2}}{\sum_{i=0}^n |x_i|} \cdot 100\%; \quad (98)$$

в) между сеточными функциями \hat{u} , $[x]$:

$$[\hat{E}_h^k] = \max |\hat{u}_i - [x_i]|, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (99)$$

$$[\hat{D}_h^k] = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^n (\hat{u}_i - [x_i])^2}}{\sum_{i=0}^n |[x_i]|} \cdot 100\%. \quad (100)$$

2. Контролировались значения норм (95)–(100) для сеточных функций $[x]$, x , \hat{u} и их первой и второй производных.
3. Контролировалось выполнение критерия хорошей обусловленности (7) в каждом уравнении РКЗ.

При вычислении погрешностей между производными соответствующих функций в нормах (95)–(100) значения функций были заменены на значения своих производных.

Нормами (95), (96) и (99), (100) можно воспользоваться лишь при наличии сеточной функции $[x]$, что не предполагается в общем случае, следовательно, наибольший интерес представляют нормы (97), (98), не содержащие в себе значений $[x_i]$.

Перечислим некоторые результаты, полученные при исследовании крайних задач для ОДУ2 (64)–(73) при выполнении условия (74).

1. Отдельный ЧЭ:

- а) при достаточном удалении границы $\bar{a}(\bar{b})$ от \tilde{t} отдельные значения модулей псевдоневязок $|\delta \hat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$, $i = 0, 1, \dots, n$, оказывались достаточно равномерно распределенными по величине относительно узлов сетки, но тем не менее наблюдалось некоторое преобладание значений модулей (по величине) в граничных узлах, особенно в границе $\bar{a}(\bar{b})$;
- б) по мере приближения критической границы $\bar{a}(\bar{b})$ к \tilde{t} в узлах некоторой ее окрестности начинали увеличиваться модули отдельных значений псевдоневязок, особенно значительно на самой границе $\bar{a}(\bar{b})$; вне упомянутой окрестности модули псевдоневязок претерпевали довольно умеренные изменения; в итоге значение нормы $\|\delta \hat{\mathbf{x}}_h^k\|$ определяло значение модуля псевдоневязки в преобладающем узле, а именно в границе $\bar{a}(\bar{b})$, что находит объяснение в (37) — в силу значительного роста входящих в ОДУ2 (64)–(73) функций $p(t)$ или $p(t)$ и $q(t)$ одновременно.

2. Эксперимент Э2:

- а) зависимость $\|\delta \hat{\mathbf{x}}_h^k\|$ оказывалась монотонно убывающей функцией k ;

- б) зависимости $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$, $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$, $i = 0, 1, \dots, n$, имели совпадающий характер монотонности, причем значения оценок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$, $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ оказывались сравнимыми между собой по величине.

3. Эксперимент $\mathcal{E}2\tilde{t}$:

- а) зависимость $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ оказывалась либо монотонно убывающей функцией k , либо практически постоянной, либо имела локальный минимум, причем значения $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ во всех трех случаях достигали значительных величин (в несколько десятков порядков);
- б) в случае $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\| \approx \text{const}$ в некоторой окрестности $\bar{a}(\bar{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$, $i = 0, 1, \dots, n$, также оказывались практически постоянными (постоянные значения оказывались зависимыми от i), но по мере удаления узла с номером i от границы $\bar{a}(\bar{b})$ преобладающим становился монотонный характер, причем отдельные значения модулей псевдоневязок $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ становились сравнимыми с результатами эксперимента $\mathcal{E}2$;
- в) при наличии локального минимума в некоторой окрестности $\bar{a}(\bar{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,i}^k|$ также имели локальный минимум, причем по мере удаления узла с номером i от $\bar{a}(\bar{b})$ преобладающим становился монотонный характер.

Анализ перечисленных результатов после выполнения $\mathcal{E}2$ (или $\mathcal{E}2\tilde{t}$) позволит сделать первоначальный вывод о том, насколько правомерно можно признать вектор $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений в соответствии с определением 4.

Действительно, после выполнения $\mathcal{E}2\tilde{t}$ при ответе на вопрос о правомерности признания группы векторов $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$, $k = 2, 3, \dots, 9$, в качестве группы векторов псевдовозмущений проблема кроется именно в довольно больших значениях норм псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$, а не в наличии или отсутствии их монотонности в силу того, что наличие или отсутствие монотонности проблематично оценить при довольно больших значениях норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и довольно ограниченных $k \in [2, 9]$. Причина в наличии довольно больших значений норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ выяснена выше.

После выполнения $\mathcal{E}2$ ситуация оказалась противоположной — нормы псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ оказались довольно ограниченными и не превосходили величин в два порядка во всех исследованных РКЗ.

Исследуем теоретически полученную РКЗ (85). Напомним упомянутые ранее факты:

- 1) значение модуля псевдоневязки в одной из границ задачи определяет значение нормы псевдоневязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ всей задачи;
- 2) оба граничных условия задачи содержат в себе компоненты вектора псевдовозмущений $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,0}^k$ и $\delta\widehat{\mathbf{x}}_{h,n}^k$, которые не используются при вычислении порядка нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ согласно оценке (44).

Компоненты вектора псевдовозмущений $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в граничных узлах t_0, t_n сетки D_h могут трактоваться как начало накопления погрешностей в решении РКЗ (85) тем больше, чем больше сами значения правых частей в гранич-

ных условиях задачи. Анализ решения задачи (85) позволит выявить степень влияния псевдovозмущений в граничных условиях на накопление погрешностей в возмущенном решении \hat{u} и принять первоначальное суждение о наличии или отсутствии условной устойчивости — ситуацию назовем начальным этапом анализа рассматриваемой задачи установления условной устойчивости РКЗ.

Напомним, на начальном этапе анализа невозможно воспользоваться оценкой порядка нормы псевдоневязки в силу того, что ее вычисление согласно (44) не предполагает использования граничных узлов t_0, t_n сетки. Требуется следующий (назовем его «финальным») этап анализа.

Исключение из рассмотрения граничных узлов сетки на финальном этапе анализа вопроса о наличии условной устойчивости:

- а) приведет к возможности вычисления оценки порядка согласно (44);
- б) позволит избавиться от погрешностей в возмущенном решении \hat{u} , накопления которых обусловлены граничными условиями РКЗ (85), что особенно актуально именно при выполнении $\exists 2\tilde{t}$; для чего достаточно в задаче в качестве граничных условий положить

$$\delta\hat{x}_{h,0}^k = z_0 = \hat{u}_0 - x_0 = 0, \quad \delta\hat{x}_{h,n}^k = z_n = \hat{u}_n - x_n = 0. \quad (101)$$

Из граничных условий (101) следует, что исключение из исследования граничных узлов приведет к совпадению точного x и возмущенного \hat{u} решений в граничных узлах сетки D_h ; указанный факт проблематично признать серьезным ограничением для возмущенного решения.

Заметим, в случае тривиальных значений одновременно всех псевдоневязок $\delta\hat{x}_{h,i}^k = 0, i = 0, 1, \dots, n$, РКЗ (85) превращается в однородную задачу, откуда непосредственно следует условная устойчивость РКЗ.

Исследование результатов на начальном и финальном этапах позволит:

- 1) выявить наличие условной устойчивости задачи путем анализа норм $\|\delta\hat{x}_h^k\|$ и \hat{E}_h^k, \hat{D}_h^k на этих этапах;
- 2) определить при наличии условной устойчивости некоторую условную границу \bar{t} перехода от $\exists 3$ к $\exists 3\tilde{t}$ как значение, при котором результаты расчетов на начальном и финальном этапах не имели бы существенных различий при фиксированных $n(h), k$.

Ранее в способе построения псевдоточного решения (42) с целью повышения порядка нормы псевдоневязки на единицу предполагалось исключить влияние второй производной (как имеющей, что следует из (36), более низкий порядок в сравнении с первой производной) на значение нормы $\|\delta\hat{x}_h^k\|$, но удалось достичь цели лишь во внутренних узлах сетки D_h . Поэтому на начальном этапе анализа в соответствии с (43) оказалось учтенным влияние как первой, так и второй производной (за счет использования границ t_0, t_n сетки) на накопление погрешностей в возмущенном решении \hat{u} , несмотря на достигнутую цель способа построения псевдоточного решения (42). Исключить влияние второй производной на накопление погрешностей удалось только на финальном этапе.

8. Численные эксперименты Э1, Э2, Э3. Исследования выполнены в соответствии с принятой выше схемой, состоящей из двух этапов.

Во всех исследованных РКЗ критерий хорошей обусловленности (7) оказался нарушенным.

Все РКЗ для ОДУ2 (64)–(72) при выполнении экспериментов Э1, Э2, Э3 оказались условно устойчивыми. Результаты расчетов на начальном и финальном этапах имели различия, которые нельзя признать существенными.

Однако во всех исследованных РКЗ для ОДУ2 (73) не удалось выделить область изменения аргумента t , соответствующую Э1, Э2, Э3, возможно, вследствие довольно узкой области $t \in (-1, 1)$, где условие (63) нарушено, в которой выполнялись исследования. Для ОДУ2 (73) оказалось возможным выполнение только экспериментов Э1 \tilde{t} , Э2 \tilde{t} , Э3 \tilde{t} .

Ниже, если не оговорено особо, в таблицах будут приведены оценки погрешностей решений РКЗ, а оценки погрешностей первой и второй производных решений будут опущены в силу их

- а) несущественных различий по абсолютной величине от оценок погрешностей решений РКЗ;
- б) практически аналогичной динамики изменения в сравнении с оценками погрешностей решений РКЗ.

Полученные на финальном этапе результаты экспериментов Э1, Э2 при исследовании РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ

$$\begin{cases} x'' + \frac{4tx'}{t^2 - 1} + \frac{2x}{t^2 - 1} = \frac{6t}{t^2 - 1}, & t \in [1.5, 5.5], \\ x_0 = 8.300000, & x_n = 6.474359, \end{cases} \quad (102)$$

приведены в табл. 1, 2; результаты эксперимента Э3 при использовании ОДУ2 (72), входящего в ДКЗ (102), — в табл. 3.

9. Численные эксперименты Э1 \tilde{t} , Э2 \tilde{t} , Э3 \tilde{t} : ОДУ2 с ограниченными общими решениями. Исследования выполнены в соответствии с принятой выше схемой, состоящей из двух этапов.

Во всех исследованных РКЗ критерий хорошей обусловленности (7) оказался нарушенным.

Все РКЗ для ОДУ2 (64), (65), (67) при выполнении экспериментов Э1 \tilde{t} , Э2 \tilde{t} , Э3 \tilde{t} оказались условно устойчивыми в области изменения своих аргументов.

В эксперименте Э2 \tilde{t} при исследовании РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ, в которой использовано ОДУ2 (64)

$$\begin{cases} x'' + x' \operatorname{tg} t + x \cos^2 t = 0, & t \in (-\pi/2, -\pi/2 + 4], \\ x_0 = -1.443808, & x_n = 3.411995, \end{cases} \quad (103)$$

число π было вычислено с точностью до четырнадцатого знака, что привело к наименьшему отклонению \tilde{t} от критической границы $\bar{a}(\bar{b})$ на величину порядка 10^{-14} . В РКЗ для ОДУ2 (65), (67) аналогичные наименьшие отклонения оставались неустановленными и определялись только возможностями компьютера.

В ДКЗ (103) интервал интегрирования $(a, b]$ выбран с нарушением условия (74).

В табл. 4, 5 приведены результаты исследования РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (103), на начальном и финальном этапах.

Отметим, в случае отсутствия сеточной функции $[x]$ действительно информативными в табл. 4, 5 окажутся только данные первой строки для $\|\delta \hat{x}_h^k\|$ и третьей строки для \hat{D}_h^k .

Таблица 1

Нормы псевдосвязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (102) при $k = 4$; эксперимент Э1, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (102) for $k = 4$; experiment E1, final stage]

n	20	100	300	500	1000	3000	8000	15000
$\ \delta \hat{\mathbf{x}}_h^k\ $	$2.98 \cdot 10^{-1}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$1.58 \cdot 10^{-5}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$1.41 \cdot 10^{-8}$	$2.96 \cdot 10^{-10}$	$6.54 \cdot 10^{-11}$
$[D_h^k], \%$	$2.33 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-6}$	$1.61 \cdot 10^{-8}$	$1.62 \cdot 10^{-9}$	$7.21 \cdot 10^{-11}$	$1.58 \cdot 10^{-11}$	$2.16 \cdot 10^{-11}$	$1.75 \cdot 10^{-11}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	$2.14 \cdot 10^{-2}$	$4.03 \cdot 10^{-5}$	$3.45 \cdot 10^{-7}$	$3.59 \cdot 10^{-8}$	$1.63 \cdot 10^{-9}$	$1.19 \cdot 10^{-11}$	$1.57 \cdot 10^{-13}$	$1.85 \cdot 10^{-14}$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$4.24 \cdot 10^{-5}$	$3.61 \cdot 10^{-7}$	$3.76 \cdot 10^{-8}$	$1.71 \cdot 10^{-9}$	$1.13 \cdot 10^{-11}$	$2.17 \cdot 10^{-11}$	$1.75 \cdot 10^{-11}$

Таблица 2

Нормы псевдосвязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (102) при $n = 100$; эксперимент Э2, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (102) for $n = 100$; experiment E2, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ \delta \hat{\mathbf{x}}_h^k\ $	$6.59 \cdot 10^{-1}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	$2.21 \cdot 10^{-4}$	$3.37 \cdot 10^{-5}$	$1.57 \cdot 10^{-6}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$9.75 \cdot 10^{-9}$
$[D_h^k], \%$	$1.12 \cdot 10^{-3}$	$3.39 \cdot 10^{-3}$	$2.19 \cdot 10^{-6}$	$8.01 \cdot 10^{-6}$	$6.48 \cdot 10^{-9}$	$2.57 \cdot 10^{-8}$	$2.37 \cdot 10^{-11}$	$9.67 \cdot 10^{-11}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	$1.22 \cdot 10^{-2}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$	$4.03 \cdot 10^{-5}$	$1.37 \cdot 10^{-6}$	$1.55 \cdot 10^{-7}$	$6.16 \cdot 10^{-9}$	$6.45 \cdot 10^{-10}$	$2.77 \cdot 10^{-11}$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.03 \cdot 10^{-3}$	$4.24 \cdot 10^{-5}$	$6.37 \cdot 10^{-6}$	$1.61 \cdot 10^{-7}$	$1.85 \cdot 10^{-8}$	$6.68 \cdot 10^{-10}$	$6.48 \cdot 10^{-11}$

На начальном этапе предварительный вывод о наличии условной устойчивости проблематично сделать на основании данных первой и третьей строк табл. 4, которые

- а) не позволяют сделать вывод о наличии монотонности норм $\|\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в силу их довольно больших значений; при условии, что наличие монотонности норм является необходимым условием в соответствии с определением 4;
- б) свидетельствуют о существенном влиянии псевдовозмущения в левой границе РКЗ (85) на накопление погрешностей в возмущенном решении \hat{u} и, следовательно, на накопление погрешностей в решении РКЗ, что делает неправомерными данные третьей строки таблицы на начальном этапе.

Исключение на финальном этапе значений псевдовозмущений в граничных узлах РКЗ (85) при исследовании ДКЗ (103) привело к приемлемым (в сравнении с начальным этапом) результатам, что нашло подтверждение в первой и третьей строках и косвенное подтверждение во второй и четвертой строках табл. 5.

Анализ расчетов решения задачи (103) на финальном этапе показал, что оценка нормы $\|\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k\|$ была определена значением модуля псевдоневязки не в узле t_1 , расстояние от которого до левой границы $t_0 \approx -\pi/2$ равно $h = 0.2$, а в узле t_{16} , расстояние от которого до точки $\pi/2 \in (-\pi/2, -\pi/2 + 4]$ оказалось равным $5.84 \cdot 10^{-2}$. Использование интервала интегрирования $(-\pi/2, -\pi/2 + 2.5]$, которому не принадлежит значение $t = \pi/2$, что соответствует выполнению условия (74), в задаче

$$\begin{cases} x'' + x' \operatorname{tg} t + x \cos^2 t = 0, & t \in (-\pi/2, -\pi/2 + 2.5], \\ x_0 = -1.443808, & x_n = 3.546230 \end{cases} \quad (104)$$

привело к указанным в табл. 6 результатам.

Результаты начального этапа исследования РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ

$$\begin{cases} x'' + x' \operatorname{tg} t + x \cos^2 t = 0, & t \in [-\pi/2 + 5 \cdot 10^{-3}, -\pi/2 + 5 \cdot 10^{-3} + 2.5], \\ x_0 = -1.443807, & x_n = 3.411113, \end{cases} \quad (105)$$

приведены в табл. 7, данные которой не имеют существенных отличий от данных табл. 6; поэтому значение $\tilde{t} = -\pi/2 + 5 \cdot 10^{-3}$ можно принять в качестве условной границы между $\exists 3$ и $\exists 3\tilde{t}$ при $n = 20$ ($h = 0.2$), $k \in [2, 9]$.

Результаты исследований всех РКЗ для ОДУ2 (65), (67) не имели существенных отличий от рассмотренных выше РКЗ для ОДУ2 (64).

Не все РКЗ для ОДУ2 (66), (68) при выполнении экспериментов $\exists 1\tilde{t}$, $\exists 2\tilde{t}$, $\exists 3\tilde{t}$ оказались условно устойчивыми в области изменения своих аргументов: были обнаружены области, в которых условная устойчивость не имела места.

При исследовании РКЗ для ОДУ2 (66) при выявлении возможности признать вектор $\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений при $n = 20$ ($h = 0.2$), $k \in [2, 9]$ была выявлена точка $T \in (\tilde{t}, \bar{t}]$, $T = 0.01$, порождающая две области: $(\tilde{t}, T]$ и $(T, \bar{t}]$, в первой из которых РКЗ не являлись условно устойчивыми, во второй — являлись.

Подробнее опишем ситуацию в области $(\tilde{t}, T]$.

Таблица 3

Нормы псевдосвязок и относительные погрешности решений РКЗ для ОДУ2 (72) при $n = 100$, $k = 4$; эксперимент Э3, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem for ODE2 (72) for $n = 100$, $k = 4$; experiment E3, final stage]

$[a, b]$	[1.8, 5.8]	[1.7, 5.7]	[1.6, 5.6]	[1.5, 5.5]	[1.4, 5.4]	[1.3, 5.3]	[1.2, 5.2]	[1.1, 5.1]
$\ \delta \tilde{x}_h^k\ $	$2.72 \cdot 10^{-4}$	$6.33 \cdot 10^{-4}$	$1.66 \cdot 10^{-3}$	$5.12 \cdot 10^{-3}$	$1.98 \cdot 10^{-2}$	$1.07 \cdot 10^{-1}$	1.04	33.0
$[D_h^k], \%$	$3.20 \cdot 10^{-7}$	$5.59 \cdot 10^{-7}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$2.19 \cdot 10^{-6}$	$5.28 \cdot 10^{-6}$	$1.59 \cdot 10^{-5}$	$7.19 \cdot 10^{-5}$	$8.13 \cdot 10^{-4}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	$5.05 \cdot 10^{-6}$	$9.19 \cdot 10^{-6}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$	$1.79 \cdot 10^{-3}$	$2.40 \cdot 10^{-2}$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	$5.36 \cdot 10^{-6}$	$9.74 \cdot 10^{-6}$	$1.92 \cdot 10^{-5}$	$4.24 \cdot 10^{-5}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$	$3.64 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-3}$	$2.47 \cdot 10^{-2}$

Таблица 4

Нормы псевдосвязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (103) при $n = 20$; эксперимент Э2 \tilde{t} , начальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (103) for $n = 20$; experiment E2 \tilde{t} , initial stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ \delta \tilde{x}_h^k\ $	$3.53 \cdot 10^{13}$	$4.35 \cdot 10^{12}$	$1.13 \cdot 10^{13}$	$2.57 \cdot 10^{12}$	$1.56 \cdot 10^{11}$	$2.58 \cdot 10^{10}$	$1.68 \cdot 10^8$	$6.18 \cdot 10^7$
$[D_h^k], \%$	$3.91 \cdot 10^{-1}$	$3.36 \cdot 10^{-1}$	$5.20 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$1.20 \cdot 10^{-5}$	$4.83 \cdot 10^{-6}$	$5.59 \cdot 10^{-7}$	$1.31 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	$1.92 \cdot 10^{14}$	$2.36 \cdot 10^{13}$	$6.13 \cdot 10^{13}$	$1.39 \cdot 10^{13}$	$8.48 \cdot 10^{11}$	$1.40 \cdot 10^{11}$	$9.13 \cdot 10^8$	$3.35 \cdot 10^8$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	$1.92 \cdot 10^{14}$	$2.36 \cdot 10^{13}$	$6.13 \cdot 10^{13}$	$1.39 \cdot 10^{13}$	$8.48 \cdot 10^{11}$	$1.40 \cdot 10^{11}$	$9.13 \cdot 10^8$	$3.35 \cdot 10^8$

Таблица 5
 Нормы псевдонезынок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (103) при $n = 20$; эксперимент $E2\tilde{t}$, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (103) for $n = 20$; experiment $E2\tilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ \delta\tilde{x}_h^k\ $	$4.42 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$8.49 \cdot 10^{-3}$	$3.62 \cdot 10^{-3}$	$9.47 \cdot 10^{-5}$	$5.87 \cdot 10^{-6}$	$1.57 \cdot 10^{-6}$	$2.84 \cdot 10^{-7}$
$[D_h^k], \%$	$3.91 \cdot 10^{-1}$	$3.36 \cdot 10^{-1}$	$5.20 \cdot 10^{-3}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$1.20 \cdot 10^{-5}$	$4.83 \cdot 10^{-6}$	$5.58 \cdot 10^{-7}$	$1.31 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	$4.79 \cdot 10^{-1}$	1.91	$9.37 \cdot 10^{-2}$	$6.49 \cdot 10^{-2}$	$7.33 \cdot 10^{-4}$	$3.22 \cdot 10^{-4}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$	$7.03 \cdot 10^{-5}$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	$8.39 \cdot 10^{-1}$	2.22	$9.87 \cdot 10^{-2}$	$6.69 \cdot 10^{-2}$	$7.43 \cdot 10^{-4}$	$3.26 \cdot 10^{-4}$	$1.53 \cdot 10^{-4}$	$7.05 \cdot 10^{-5}$

Таблица 6
 Нормы псевдонезынок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (104) при $n = 20$; эксперимент $E2\tilde{t}$, финальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (104) for $n = 20$; experiment $E2\tilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ \delta\tilde{x}_h^k\ $	$3.14 \cdot 10^{-2}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$7.85 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10^{-6}$	$3.80 \cdot 10^{-7}$	$9.15 \cdot 10^{-9}$	$6.47 \cdot 10^{-10}$
$[D_h^k], \%$	$5.11 \cdot 10^{-2}$	$2.90 \cdot 10^{-2}$	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$8.66 \cdot 10^{-5}$	$5.25 \cdot 10^{-7}$	$2.19 \cdot 10^{-7}$	$1.04 \cdot 10^{-9}$	$4.74 \cdot 10^{-10}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	$8.86 \cdot 10^{-2}$	$3.19 \cdot 10^{-3}$	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$2.32 \cdot 10^{-6}$	$4.92 \cdot 10^{-8}$	$6.46 \cdot 10^{-9}$	$1.33 \cdot 10^{-10}$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$2.66 \cdot 10^{-2}$	$3.44 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-5}$	$2.77 \cdot 10^{-6}$	$2.41 \cdot 10^{-7}$	$7.30 \cdot 10^{-9}$	$5.25 \cdot 10^{-10}$

Таблица 7

Нормы псевдосвязок и относительные погрешности численных решений ДКЗ (105) при $n = 20$; эксперимент $\mathcal{E}2\tilde{t}$, начальный этап [Norms of pseudoresiduals and relative errors of numerical solutions differential boundary value problem (105) for $n = 20$; experiment $\mathcal{E}2\tilde{t}$, initial stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ \delta\tilde{x}_h^k\ $	$7.96 \cdot 10^{-1}$	$4.23 \cdot 10^{-1}$	$1.56 \cdot 10^{-1}$	$3.51 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-3}$	$3.71 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-6}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$
$[D_h^k], \%$	$4.14 \cdot 10^{-1}$	$3.65 \cdot 10^{-1}$	$5.51 \cdot 10^{-3}$	$2.38 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$5.06 \cdot 10^{-6}$	$6.04 \cdot 10^{-7}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$
$\widehat{D}_h^k, \%$	7.01	2.27	$9.94 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$	$8.88 \cdot 10^{-5}$	$5.42 \cdot 10^{-5}$
$[\widehat{D}_h^k], \%$	7.41	2.64	$9.97 \cdot 10^{-1}$	$2.06 \cdot 10^{-1}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$2.17 \cdot 10^{-3}$	$8.94 \cdot 10^{-4}$	$5.43 \cdot 10^{-5}$

Таблица 8

Погрешности решений РКЗ для ОДУ2 (66) при $n = 20$, $k \in [2, 9]$ в области изменения границы $a \in [10^{-45}, 0.01]$; эксперимент $\mathcal{E}3\tilde{t}$, финальный этап [Errors in the solutions of the difference boundary value problem for ODE2 (66) for $n = 20$, $k \in [2, 9]$ in the region of boundary variation $a \in [10^{-45}, 0.01]$; experiment $\mathcal{E}3\tilde{t}$, final stage]

quotient of derivative, m	0	1	2
$[E_h^k]_{x^{(m)}}$	8.82	10.3	9.26
$[D_h^k]_{x^{(m)}}, \%$	3.81	3.77	8.32

- На начальном этапе значения норм псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в эксперименте
- а) $\mathfrak{E}2\tilde{t}$ практически не изменяясь, оставались довольно значительными по абсолютной величине;
 - б) $\mathfrak{E}3\tilde{t}$ увеличивались.

На финальном этапе значения норм псевдоневязок $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в эксперименте

- а) $\mathfrak{E}2\tilde{t}$ практически не изменяясь, оставались довольно малыми по абсолютной величине;
- б) $\mathfrak{E}3\tilde{t}$ уменьшались.

Довольно значительные по абсолютной величине нормы $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на начальном этапе и нарушение условия монотонности норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на двух этапах не позволили признать возможным использование вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений в области $(\tilde{t}, T]$.

Результаты исследования РКЗ для ОДУ2 (66) приведены в табл. 8, где перечислены значения погрешностей решений $[E_h^k]_x$, $[D_h^k]_x$ и погрешности первой и второй производных решения $[E_h^k]_{x'}$, $[E_h^k]_{x''}$, $[D_h^k]_{x'}$, $[D_h^k]_{x''}$ при $n = 20$, $k \in [2, 9]$ и $a \in (\tilde{t}, T] \approx [10^{-45}, 0.01]$, где a — левая граница сетки D_h .

Несмотря на то, что T , \tilde{t} , определяемые только по результатам экспериментов $\mathfrak{E}2\tilde{t}$, $\mathfrak{E}3\tilde{t}$, являются довольно условными границами, отметим, что их значения оказывались зависимыми от значения n (h) — при увеличении n точки T , \tilde{t} имели тенденцию к смещению влево.

Ситуация с ОДУ2 (68) в области $t < 0$, в которой условие (63) нарушено, оказалась практически аналогичной в сравнении с изложенной для ОДУ2 (66).

10. Численные эксперименты $\mathfrak{E}1\tilde{t}$, $\mathfrak{E}2\tilde{t}$, $\mathfrak{E}3\tilde{t}$: ОДУ2 с неограниченными общими решениями. Исследования выполнены в соответствии с принятой выше схемой, состоящей из двух этапов.

Во всех исследованных РКЗ критерий хорошей обусловленности (7) оказался нарушенным.

Все РКЗ для ОДУ2 (69)–(73) при выполнении экспериментов $\mathfrak{E}1\tilde{t}$, $\mathfrak{E}2\tilde{t}$, $\mathfrak{E}3\tilde{t}$ обнаружили наличие областей $(\tilde{t}, T]$ и $(T, \tilde{t}]$.

В области $(T, \tilde{t}]$ результаты исследования всех РКЗ для перечисленных ОДУ2 с неограниченными общими решениями не имели существенных отличий от результатов исследования рассмотренных выше РКЗ для ОДУ2 с ограниченными общими решениями.

В области $(\tilde{t}, T]$ все РКЗ для перечисленных ОДУ2 с неограниченными общими решениями

- а) на начальном этапе имели практически схожие свойства с рассмотренными выше на начальном этапе РКЗ для ОДУ2 (66), (68) с ограниченными общими решениями;
- б) на финальном этапе поведение норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ практически полностью совпало с поведением норм на начальном этапе с тем лишь отличием, что значения $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на финальном этапе оказывались всегда на несколько порядков ниже соответствующих порядков норм на начальном этапе.

Довольно значительные по абсолютной величине значения норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и нарушение условия монотонности норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на двух этапах не позволили признать возможным использование вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений в области $(\tilde{t}, T]$.

Проиллюстрируем сформулированное выше замечание 3.

Результаты выполнения эксперимента $\mathcal{E}\tilde{t}$ при исследовании РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ, в которой использовано ОДУ2 (69)

$$\begin{cases} x'' + 2x't^{-1} + x = t^{-1}, & t \in [0.01, 4.01], \\ x_0 = 302.989950, & x_n = -0.643887, \end{cases} \quad (106)$$

приведены в табл. 9, где указаны оценки норм (95) и (97), согласованные с нормами $\|[x] - x\|$ и $\|\hat{u} - x\|$ соответственно.

Проанализируем данные табл. 9.

1. Данные первой строки таблицы свидетельствуют об отсутствии условной устойчивости по k группы РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (106).
2. Данные второй строки таблицы при четных k не позволяют усомниться в выполнении первого соотношения (82), тогда как при нечетных k данные второй строки свидетельствуют о невыполнении упомянутого соотношения.
3. Данные трех последних строк таблицы согласовываются с данными первой строки и решением $\mathbf{z} = (z, z', z'')$ РКЗ (83) — значительные величины псевдоневязок $\delta\hat{\mathbf{x}}_{h,i}^k$, пусть даже не для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$, в правых частях (85) привели к существенным различиям между возмущенным $\hat{\mathbf{u}}$ и точным \mathbf{x} решениями РКЗ, что и привело к оценкам норм, указанным в трех последних строках таблицы.

Условная сходимость по k разностной задачи, аппроксимирующей ДКЗ (106), имела место начиная примерно со значения $n = 4000$ ($h = 0.001$); условная сходимость по h имела место при любом $k \in [2, 9]$.

Заметим, что не следует ожидать условной сходимости по k разностных задач, аппроксимирующих ДКЗ (106), при $n = 20$ ($h = 0.2$) и при увеличении $k = 2m$ ($k > 9$), m — натуральное число.

Действительно, при увеличении k оценки x_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, могут претерпеть либо незначительные, либо значительные изменения.

Изменения x_i в первом случае приведут к незначительным отличиям

- а) оценок $[E_{0.2}^k]_x$ от $[E_{0.2}^8]_x = 2.96 \cdot 10^{-12}$ (табл. 9) в силу (95);
- б) оценок $[E_{0.2}^k]_{x'}$, $[E_{0.2}^k]_{x''}$ от $[E_{0.2}^8]_{x'} = 1.43 \cdot 10^2$, $[E_{0.2}^8]_{x''} = 1.36 \cdot 10^3$ (табл. 9) в силу (12), (13), (95).

В этом случае не следует ожидать существенных отличий значений норм $\|\delta\hat{\mathbf{x}}_h^k\|$ от приведенных в таблице при $k < 9$, откуда следует истинность замечания в силу определения 4.

Истинность замечания во втором случае очевидна.

Указанная особенность наличия или отсутствия условной сходимости не наблюдалась в остальных задачах, рассмотренных выше.

11. Замечания об одном некорректном алгоритме вычисления обратной матрицы. Известно, что определитель матрицы равен нулю, если он содержит строку (столбец) нулевых элементов, или две одинаковые строки (столбца), или две пропорциональные строки (столбца), или одна из строк (один из столбцов) есть линейная комбинация его других строк (столбцов) [12].

Обратимся к локальной матрице A^{ki} (10) и перечислим очевидные замечания для нее.

Таблица 9
 Нормы псевдоневязок и абсолютные погрешности численных решений ДКЗ (106) при $n = 20$; эксперимент $\mathcal{E}2\mathcal{I}$,
 финальный этап [Norms of pseudoresiduals and absolute errors of numerical solutions of differential boundary value
 problem (106) for $n = 20$; experiment $\mathcal{E}2\mathcal{I}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$\ \delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\ $	$6.53 \cdot 10^3$	$1.51 \cdot 10^3$	$3.10 \cdot 10^3$	$1.53 \cdot 10^3$	$1.94 \cdot 10^3$	$1.27 \cdot 10^3$	$1.37 \cdot 10^3$	$1.02 \cdot 10^3$
$[E_h^k]_x$	$6.94 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^2$	$9.33 \cdot 10^{-6}$	63.3	$6.67 \cdot 10^{-9}$	45.6	$2.96 \cdot 10^{-12}$	35.0
$[E_h^k]_{x'}$	$6.64 \cdot 10^2$	$2.63 \cdot 10^2$	$3.17 \cdot 10^2$	$1.81 \cdot 10^2$	$2.01 \cdot 10^2$	$1.33 \cdot 10^2$	$1.43 \cdot 10^2$	$1.03 \cdot 10^2$
$[E_h^k]_{x''}$	$6.32 \cdot 10^3$	$2.40 \cdot 10^3$	$3.02 \cdot 10^3$	$1.66 \cdot 10^3$	$1.91 \cdot 10^3$	$1.22 \cdot 10^3$	$1.36 \cdot 10^3$	$9.44 \cdot 10^2$
$\widehat{E}_h^k _x$	$2.14 \cdot 10^2$	31.9	$1.00 \cdot 10^2$	36.9	62.6	33.0	44.3	27.9
$\widehat{E}_h^k _{x'}$	$4.55 \cdot 10^2$	69.8	$1.75 \cdot 10^2$	81.8	$1.08 \cdot 10^2$	72.8	81.0	60.9
$\widehat{E}_h^k _{x''}$	$4.66 \cdot 10^3$	$8.57 \cdot 10^2$	$1.66 \cdot 10^3$	$7.62 \cdot 10^2$	$9.25 \cdot 10^2$	$5.84 \cdot 10^2$	$6.12 \cdot 10^2$	$4.46 \cdot 10^2$

1. Ни одна из строк (столбцов) не состоит из нулевых элементов хотя бы в силу наличия ненулевых элементов на главной диагонали матрицы.
2. Две одинаковые строки (столбца) отсутствуют.
3. Пропорциональность первых двух строк невозможна в силу противоположности знаков элементов в столбцах с четными номерами и равенства модулей соответствующих элементов этих строк.
4. Первая и вторая строки не могут быть пропорциональны оставшимся строкам, кроме последней, в силу наличия различного количества ненулевых элементов на этих строках.
5. Пропорциональность второй и последней строк, имеющих одинаковое количество элементов, приведет к соотношениям

$$q_i^{(k-2)} = \frac{p_i^{(k-2)} + (k-2)q_i^{(k-3)}}{h} = \dots = \frac{k!}{h^k},$$

выполнение которых точно одновременно во всех узлах сетки при любом h практически невозможно. Ситуация с первой и последней строками аналогична.

6. Пропорциональность первого и второго, второго и третьего столбцов невозможна в силу противоположности знаков и равенства модулей соответствующих элементов этих столбцов в первых двух строках.
7. Первый, второй и третий столбцы не могут быть пропорциональны оставшимся столбцам в силу наличия различного количества ненулевых элементов на этих столбцах.
8. Пропорциональность первого и третьего столбцов, имеющих одинаковое количество элементов, приведет к соотношениям

$$q_i = \frac{q'_i}{p_i} = \frac{q''_i}{2p'_i + q_i} = \dots = \frac{2!}{h^2},$$

выполнение которых точно одновременно во всех узлах сетки при любом h практически невозможно.

9. Приведенные замечания не оставляют возможности допустить наличие представления строки (столбца) в форме линейной комбинации оставшихся строк (столбцов).

Перечисленные замечания позволяют сделать вывод об обратимости локальной матрицы (10).

Далее метод Гаусса вычисления обратной матрицы [3], не требующий вычисления определителя матрицы, будем называть корректным алгоритмом.

Алгоритм вычисления обратной матрицы средствами MS EXCEL, который реализован функцией MINVERSE(), предполагает использование значения определителя матрицы. Выяснить особенности используемых в MS EXCEL алгоритмов вычисления определителя матрицы и обратной матрицы не представилось возможным. Однако следует заметить, что эти алгоритмы нельзя признать корректными; для подтверждения замечания достаточно запрограммировать вычисления обратной матрицы (с использованием функции MINVERSE()) от локальной матрицы A^{ki} , определителя матрицы (с использованием реализованной в MS EXCEL функции MDETERM()) и обратиться к конкретной ДКЗ.

Положим в РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (103), $n = 175$.

В узле t_1 при $k = 7$ функция MDETERM() вернула результат $\det A^{7,1} = 0.028571111 \neq 0$, а при $k = 8$ вернула $\det A^{8,1} = 0$. Однако разложение определителя матрицы $A^{8,1}$ по последнему столбцу [12] приводит к обратному: $\det A^{8,1} \neq 0$. Далее при $k = 8$ функция MINVERSE() вернула не обратную матрицу, а сообщение об ошибке.

Заметим, что если положить равными нулю два верхних элемента последнего столбца матрицы $A^{8,1}$, модули которых равны $4.30225 \cdot 10^{-20}$, все равно функция MDETERM() вернет результат $\det A^{8,1} = 0$. Однако при таком допущении, очевидно, из разложения по последнему столбцу матрицы $A^{8,1}$ следует неверное соотношение $0 = \det A^{8,1} = (-1)^{9+9} \cdot 1 \cdot \det A^{7,1} = \det A^{7,1} = 0.028571111$. В этом случае также очевидно, что значения элементов последней строки матрицы $A^{8,1}$, кроме последнего элемента, не могут влиять на значение определителя $\det A^{8,1}$ и могут быть произвольными. Однако изменение на ту или иную величину первого из них и оставшихся с четными номерами столбцов приводило к $\det A^{8,1} \neq 0$. Следовательно, функция MDETERM() не всегда возвращает верное значение определителя матрицы, а функция MINVERSE() не всегда возвращает верную обратную матрицу.

Далее метод вычисления обратной матрицы средствами MS EXCEL будем называть некорректным алгоритмом. Очевидно, что в случае обратимости любой матрицы A нарушение известного равенства [12]

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \quad (107)$$

может быть вызвано как некорректностью алгоритмов методов вычисления, так и наличием вычислительных погрешностей компьютера при нахождении A^{-1} , $\det A^{-1}$, $\det A$.

Перечислим абсолютные погрешности между левой и правой частями соотношения (107):

$$\Delta^{k1} = |1 - \det A^{k1} \cdot \det(A^{k1})^{-1}|,$$

полученные при использовании различных методов:

- а) при использовании метода LU -разложения для вычисления определителя [3], реализация которого не предполагает вычисления алгебраических дополнений элементов матрицы, и метода Гаусса для вычисления обратной матрицы (корректный алгоритм) [3] были получены значения $\Delta^{k1} = 0$, $k = 2, 3, \dots, 9$;
- б) при использовании функций (некорректные алгоритмы) MDETERM(), MINVERSE() был получен следующий набор значений:

$$\Delta^{k1} = \{0, 0, 1.15 \cdot 10^{-9}, 6.79 \cdot 10^{-9}, 3.67 \cdot 10^{-5}, 8.86 \cdot 10^{-6}\}$$

при $k = 2, 3, \dots, 7$ соответственно; значения $\Delta^{8,1}$, $\Delta^{9,1}$ указанными функциями возвращены не были.

Отметим, при нахождении численного решения ДКЗ (103) при $n = 150$ корректный и некорректный алгоритмы вернули практически совпадающие обратные матрицы от локальных матриц только при $k = 2, 3$, что приводит лишь к частичному совпадению приведенных ниже результатов расчетов (см. соответствующие $k = 2, 3$ столбцы в табл. 10, 11).

Таблица 10

Погрешности численных решений ДКЗ (104) и нормы псевдосвязок на псевдоточном (42) и точном (22) решениях; $n = 150$; некорректный алгоритм вычисления обратной матрицы; эксперимент $\mathcal{E}2\tilde{t}$, финальный этап [Errors in numerical solutions of differential boundary value problem (104) and norms of pseudoresiduals on pseudoeexact (42) and exact (22) solutions; $n = 150$; incorrect algorithm for calculating the inverse matrix; experiment $\mathcal{E}2\tilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$[D_h^k], \%$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$9.45 \cdot 10^{-5}$	5.14	$6.37 \cdot 10^{-1}$	9.72	9.75
$[E_h^k], \%$	$7.94 \cdot 10^{-4}$	$5.55 \cdot 10^{-4}$	$5.31 \cdot 10^{-5}$	$3.84 \cdot 10^{-5}$	2.09	$2.74 \cdot 10^{-1}$	3.95	3.96
$\ \delta\tilde{\mathbf{x}}_h^k\ $	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	$2.06 \cdot 10^{-4}$	11.2	1.50	$1.14 \cdot 10^4$	$2.32 \cdot 10^3$
$\ \delta\mathbf{x}_h^k\ $	$1.34 \cdot 10^{-14}$	$1.39 \cdot 10^{-14}$	$1.56 \cdot 10^{-14}$	$5.16 \cdot 10^{-14}$	$1.31 \cdot 10^{-11}$	$4.22 \cdot 10^{-11}$	$2.48 \cdot 10^{-8}$	$5.41 \cdot 10^{-8}$
$\ \Delta_h^k\ $	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$7.77 \cdot 10^{-16}$	$1.68 \cdot 10^{-8}$	$9.56 \cdot 10^{-9}$	$7.71 \cdot 10^{-3}$	$9.35 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{10}$	$1.24 \cdot 10^7$

Таблица 11

Погрешности численных решений ДКЗ (104) и нормы псевдосвязок на псевдоточном (42) и точном (22) решениях, $n = 150$, корректный алгоритм вычисления обратной матрицы; эксперимент $\mathcal{E}2\tilde{t}$, финальный этап [Errors in numerical solutions of differential boundary value problem (104) and norms of pseudoresiduals on pseudoeexact (42) and exact (22) solutions; $n = 150$; correct algorithm for calculating the inverse matrix; experiment $\mathcal{E}2\tilde{t}$, final stage]

k	2	3	4	5	6	7	8	9
$[D_h^k], \%$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$3.32 \cdot 10^{-7}$	$1.22 \cdot 10^{-7}$	$2.72 \cdot 10^{-11}$	$1.26 \cdot 10^{-11}$	$9.00 \cdot 10^{-11}$	$7.44 \cdot 10^{-10}$
$[E_h^k], \%$	$7.94 \cdot 10^{-4}$	$5.55 \cdot 10^{-4}$	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$6.70 \cdot 10^{-8}$	$1.07 \cdot 10^{-11}$	$6.80 \cdot 10^{-12}$	$3.66 \cdot 10^{-11}$	$3.03 \cdot 10^{-10}$
$\ \delta\tilde{\mathbf{x}}_h^k\ $	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$8.85 \cdot 10^{-3}$	$4.08 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-6}$	$5.61 \cdot 10^{-10}$	$2.22 \cdot 10^{-10}$	$9.96 \cdot 10^{-11}$	$9.85 \cdot 10^{-10}$
$\ \delta\mathbf{x}_h^k\ $	$9.12 \cdot 10^{-15}$	$1.59 \cdot 10^{-14}$	$1.66 \cdot 10^{-14}$	$1.80 \cdot 10^{-14}$	$1.73 \cdot 10^{-14}$	$2.16 \cdot 10^{-14}$	$2.21 \cdot 10^{-14}$	$2.10 \cdot 10^{-14}$
$\ \Delta_h^k\ $	$4.44 \cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-15}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$2.66 \cdot 10^{-15}$	$1.33 \cdot 10^{-15}$	$1.05 \cdot 10^{-14}$	$1.43 \cdot 10^{-13}$	$6.53 \cdot 10^{-13}$

Для отдельных Δ^{ki} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, введем в соответствии с обозначением (41) норму

$$\|\Delta_h^k\| = \max(|\Delta_{h,1}^k|, |\Delta_{h,2}^k|, \dots, |\Delta_{h,n-1}^k|),$$

где, например, $\Delta_{h,1}^k = \Delta^{k1}$.

Обозначим систему разностных уравнений (15) как $Px = f$. В силу того, что левые и правые части уравнений системы (15) содержат элементы обратной матрицы от локальной матрицы (10), использование некорректного алгоритма приводит к появлению погрешностей (возмущений):

- 1) в матрице P (речь идет о коэффициентной устойчивости, когда возмущается только матрица P , а правая часть f остается неизменной [3]);
- 2) в правой части f (речь идет об устойчивости по правой части, когда возмущается только правая часть f , а матрица P остается неизменной [3]).

Вопрос возмущения коэффициентов матрицы P исследован в [1].

Заметим, преобразование РКЗ (15) к РКЗ (3) по форме отдаст предпочтение появлению погрешностей именно в коэффициентах матрицы P .

Вычисление отдельных Δ^{ki} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$, и $\|\Delta_h^k\|$ в процессе выполнения ЧЭ позволяет контролировать наличие погрешностей (возмущений) в коэффициентах каждого разностного уравнения и всей задачи (15) в целом.

12. Численные эксперименты $\mathcal{E}2\tilde{t}$: ОДУ2 с ограниченными об- щими решениями — некорректный алгоритм вычисления обратной матрицы. При исследовании РКЗ для ОДУ2 (64), (65) при использовании в эксперименте $\mathcal{E}2\tilde{t}$ некорректного алгоритма проявились следующие результаты.

1. Оценки $\|\delta\hat{x}_h^k\|$ имели локальный минимум.
2. В некоторой окрестности границы $\bar{a}(\bar{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta\hat{x}_{h,i}^k|$ также имели локальный минимум; причем по мере удаления узла с номером i от $\bar{a}(\bar{b})$ преобладающим становился монотонный характер.
3. Нормы $\|\delta x_h^k\|$ переставали быть тривиальными и имели возрастающий участок, начало которого практически совпадало с точкой локального минимума оценок $\|\delta\hat{x}_h^k\|$.
4. В некоторой окрестности границы $\bar{a}(\bar{b})$ при фиксированном номере i во внутренних узлах сетки значения $|\delta x_{h,i}^k|$ также имелся возрастающий участок, в котором эти значения отличались от тривиальных, причем по мере удаления узла с номером i от границы $\bar{a}(\bar{b})$ оценки $|\delta x_{h,i}^k|$ в области возрастания уменьшались вплоть до тривиальных значений.
5. При использовании некорректного алгоритма вычисления обратной матрицы нормы $\|\Delta_h^k\|$, $k = 2, 3, \dots, 9$, оказались тривиальными не для всех k .

Результаты эксперимента $\mathcal{E}2\tilde{t}$ для РКЗ, аппроксимирующих ДКЗ (104), на финальном этапе при использовании некорректного алгоритма вычисления обратной матрицы приведены в табл. 10; при использовании корректного алгоритма — в табл. 11.

Данные табл. 10 свидетельствуют, что имеет место чувствительность норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и $\|\delta\mathbf{x}_h^k\|$ к погрешностям (возмущениям) в коэффициентах РКЗ.

Характер изменения норм $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ в табл. 10 не позволил признать возможным использование $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ в качестве вектора псевдовозмущений, что привело к отсутствию условной сходимости, тогда как данные табл. 11 свидетельствуют о наличии условной сходимости.

Результаты исследования РКЗ для ОДУ2 (65) в отрезке интегрирования $[10^{-45}, 10^{-45} + 2.5]$ оказались незначительно отличными от приведенных данных в табл. 10, 11.

Исследования РКЗ для оставшихся ОДУ2 не выявили существенного влияния некорректного алгоритма вычисления обратной матрицы на результаты.

Выводы

1. На основе точного сеточного решения \mathbf{x}_h^k разностной краевой задачи построено приближенное сеточное решение (псевдоточное решение) $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$.
2. Введено понятие псевдосвязки для обыкновенного дифференциального уравнения и вычислена оценка порядка нормы псевдосвязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ на псевдоточном решении $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$. Теоретически показан монотонно убывающий характер поведения этой нормы при увеличении используемой степени многочлена Тейлора k и уменьшении шага дискретизации h сетки.
3. Установлена теоретическая связь между порядком нормы псевдосвязки $\|\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k\|$ и порядком нормы разности между точным решением \mathbf{x}_h^k и псевдоточным решением $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$.
4. Показано стремление псевдоточного решения $\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ к точному решению \mathbf{x}_h^k при увеличении используемой степени многочлена Тейлора k и уменьшении шага дискретизации h сетки.
5. Даны определения условной устойчивости и условной сходимости группы РКЗ; установлена теоретическая связь между ними.
6. На основе найденного вектора $\delta\widehat{\mathbf{x}}_h^k$ построено возмущенное решение и вычислена оценка нормы его отклонения от точного решения РКЗ, позволяющая выявить наличие или отсутствие условной устойчивости.
7. Установлена теоретическая связь между сходимостью (в традиционном понимании) и условной сходимостью группы РКЗ. Получено соотношение, позволяющее оценить меру различий с точностью до константы между искомой сеточной функцией x и сеточной функцией $[x]$, совпадающей с точным решением $x(t)$ ДКЗ в узлах сетки D_h , значения которого в общем случае неизвестны.
8. Показана обратимость локальной матрицы.
9. Исследована содержащая погрешности (возмущения) в своих коэффициентах группа РКЗ, в которой выявлено отсутствие условной устойчивости и, как следствие, отсутствие условной сходимости.
10. Приведены результаты исследований с использованием псевдосвязок неустойчивых в традиционном понимании групп РКЗ, для которых отсутствуют основания отвергнуть их сходимость в силу практического совпадения сеточных функций $[x]$ и x при конечных n .

Библиографический список

1. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977. 656 с.
2. Формалеев В. Ф., Ревизников Д. Л. *Численные методы*. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
3. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. М.: Наука, 1973. 432 с.
4. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 2. Краевые задачи с граничными условиями второго и третьего рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 1. С. 55–79. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1528>.
5. Сходимость матричного метода численного интегрирования краевых задач для линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 3. С. 559–577. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1426>.
6. Радченко В. П., Усов А. А. Модификация сеточных методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе тейлоровских разложений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. № 2(17). С. 60–65. <https://doi.org/10.14498/vsgtu646>.
7. Маклаков В. Н. Оценка порядка аппроксимации матричного метода численного интегрирования краевых задач для систем линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Сообщение 1. Краевые задачи с граничными условиями первого рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 3. С. 389–409. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1511>.
8. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1. М.: Наука, 1970. 608 с.
9. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1976. 576 с.
10. Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Либроком, 2013. 208 с.
11. Закс Л. *Статистическое оценивание*. М.: Статистика, 1976. 598 с.
12. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1975. 431 с.

MSC: 34B99

The use of pseudoresiduals in the study of convergence of unstable difference boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary second-order differential equations

V. N. Maklakov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The paper considers the previously proposed method of numerical integration using the matrix calculus in the study of boundary value problems for nonhomogeneous linear ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. According to the indicated method, when compiling a system of difference equations, an arbitrary degree of the Taylor polynomial in expanding the unknown solution of the problem into a Taylor series can be chosen while neglecting the approximation of the derivatives by finite differences.

Some aspects of the convergence of an unstable second-order difference boundary value problem are investigated. The concept of a pseudo-residual on a certain vector is introduced for an ordinary differential equation. On the basis of the exact solution of the difference boundary value problem, an approximate solution has been built, where the norm of pseudo-residuals is different from the trivial value.

It has been established theoretically that the estimate of the pseudo-residual norm decreases with an increase in the used degree of the Taylor polynomial and with a decrease in the mesh discretization step. The definitions of conditional stability and conditional convergence are given; a theoretical connection between them is established. The perturbed solution has been built on the basis of the found vector of pseudo-residuals, the estimate of the norm of its deviation from the exact solution of the difference boundary value problem has been calculated, which allows one to identify the presence of conditional stability. A theoretical relationship between convergence and conditional convergence is established.

The results of numerical experiments are presented.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Maklakov V. N. The use of pseudoresiduals in the study of convergence of unstable difference boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary second-order differential equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 140–178. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1889> (In Russian).

Author's Details:

Vladimir N. Maklakov  <https://orcid.org/0000-0003-1644-7424>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics and Computer Science

Keywords: ordinary differential equations, boundary value problems, approximation order, numerical methods, Taylor polynomials, residuals.

Received: 20th October, 2021 / Revised: 1st November, 2021 /

Accepted: 24th January, 2022 / First online: 31st March, 2022

References

1. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977, 656 pp. (In Russian)
2. Formaleev V. F., Reviznikov D. L. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 400 pp. (In Russian)
3. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1973 (In Russian).
4. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 2. Boundary value problems with boundary conditions of the second and third kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 55–79 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1528>.
5. Maklakov V. N. Convergence of the matrix method of numerical integration of the boundary value problems for linear nonhomogeneous ordinary differential second order equations with variable coefficients, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 3, pp. 559–577 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1426>.
6. Radchenko V. P., Usov A. A. Modified grid method for solving linear differential equation equipped with variable coefficients based on Taylor series, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 2(17), pp. 60–65 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu646>.
7. Maklakov V. N. The evaluation of the order of approximation of the matrix method for numerical integration of the boundary value problems for systems of linear non-homogeneous ordinary differential equations of the second order with variable coefficients. Message 1. Boundary value problems with boundary conditions of the first kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 389–409 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1511>.
8. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung*. I [Differential and integral calculus. I], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 61. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, xiv+572 pp. (In German)
9. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nyim uravneniiam* [Manual of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka, 1976, 576 pp. (In Russian)
10. Filippov A. F. *Sbornik zadach po differentsial'nyim uravneniiam* [Collection of Problems on Differential Equations]. Moscow, Librokom, 2013, 208 pp.
11. Zaks L. *Statisticheskoe otsenivanie* [Statistical estimation]. Moscow, Statistika, 1976, 598 pp. (In Russian)
12. Kurosh A. G. *Kurs vysshei algebry* [A Course of Higher Algebra]. Moscow, Nauka, 1975, 431 pp. (In Russian)



УДК 517.958:531.332

О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях

*И. А. Максименко*¹, *В. В. Марков*^{2,3,4}¹ Мюнхенский технический университет,

Германия, 80333, Мюнхен, Арцисштрассе, 21.

² Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.

³ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

Научно-исследовательский институт механики,

Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

⁴ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,

Россия, 117218, Москва, Нахимовский проспект, 36, корп. 1.

Аннотация

Цель исследования состоит в распространении на пространственный случай разработанного Г. Б. Сизых подхода к эволюции завихренности для двумерных течений, базирующегося на представлении эволюции завихренности в виде такого движения вихревых линий и вихревых трубок, при котором интенсивность этих трубок меняется со временем по любому наперед заданному закону. **Метод.** Строгий анализ уравнений, описывающих поле скорости течения идеальной несжимаемой жидкости и вязкого газа в общем пространственном случае с использованием представления о движении воображаемых частиц. **Результаты.** Для любого заданного временного закона изменения циркуляции скорости (например, для экспоненциального убывания) реальной жидкости по контурам предложен способ построения поля скорости движения этих контуров и вихревых трубок (т. е. построение поля скорости переносящих их воображаемых частиц). Установлено, что при заданной функции времени скорость воображаемых частиц определяется неоднозначно, и предложен способ коррекции их движения при сохранении выбранного закона изменения циркуляции. **Заключение.** Предложен новый лагранжевый подход к эволюции завихренности в пространственных течениях и получены выражения для скорости движения контуров, обеспечивающие заданное изменение со временем циркуляции скорости реальной жидкости по любому контуру. Данный теоретический результат может быть

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Максименко И. А., Марков В. В. О новом лагранжевом взгляде на эволюцию завихренности в пространственных течениях // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 179–189. EDN: HFRFPX. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1907>.

Сведения об авторах

Иван Александрович Максименко  <https://orcid.org/0000-0001-8159-8531>

студент; департамент гражданской, гео- и экологической инженерии;

e-mail: maksimenko.ia@phystech.edu*Владимир Васильевич Марков*  <https://orcid.org/0000-0003-2188-2201>доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; отд. механики²; лаб. газодинамики взрыва и реагирующих систем³; отд. вычислительной математики⁴; e-mail: markov@mi-ras.ru

использован в пространственных модификациях метода вязких вихревых доменов для ограничения количества учитываемых в расчетах векторных трубок.

Ключевые слова: скорость движения контуров, интенсивность контуров, движение воображаемой жидкости, критерий Зоравского, теорема Фридмана, метод вязких вихревых доменов.

Получение: 7 февраля 2022 г. / Исправление: 23 февраля 2022 г. /
Принятие: 24 февраля 2022 г. / Публикация онлайн: 16 марта 2022 г.

Введение. В середине прошлого столетия был создан бессеточный метод расчета пространственных вихревых течений идеальной несжимаемой жидкости (метод дискретных вихрей [1–3]), основанный на теоремах Гельмгольца о вихрях. Этот метод успешно применяется до сих пор (см., например, [4–6]). Позже теоремы Гельмгольца были обобщены на случай вязкой несжимаемой жидкости, но только для двумерных (плоскопараллельных [7] и незакрученных осесимметричных [8]) течений, и были найдены формулы для скорости \mathbf{U} переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности. Обе формулы статей [7, 8], используя принятые обозначения для скорости потока, завихренности и кинематического коэффициента вязкости, можно представить в виде $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu(\boldsymbol{\Omega} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega})/\Omega^2$.

В работе [9] был предложен численный метод исследования двумерных вязких течений, так называемый «метод вязких вихревых доменов» (ВВД), в котором используется представление о движении вихревых трубок постоянной интенсивности со скоростью \mathbf{U} , полученной в [7, 8]. Исчерпывающее объяснение этого метода приводится, например, в [10], а краткое — в [11]. Являясь бессеточным методом, ВВД обладает рядом преимуществ, в частности, возможностью удовлетворить граничным условиям в неограниченных пространственных течениях [12], что необходимо при моделировании природных явлений (циклоны, океанические течения и т. д.). Однако использование метода ВВД сопряжено с трудностями, такими как неограниченный рост общего числа рассматриваемых доменов, генерируемых на каждом расчетном шаге. В настоящее время ограничение общего числа доменов производится путем перераспределения их положений и интенсивностей [13–15]. В качестве одного из способов «борьбы» с неограниченным ростом числа доменов в работе [16] была предложена новая формула скорости переноса вихревых трубок для любого наперед заданного закона изменения их интенсивности во время движения, которая в случае экспоненциального закона убывания со временем позволяет пренебречь каждым доменом спустя некоторое конечное число шагов по времени и тем самым ограничить количество учитываемых в расчете доменов. Внедрение такой скорости в метод ВВД представляет собой отдельную содержательную задачу вычислительной гидродинамики и требует времени, а статья [16] опубликована недавно. Поэтому, несмотря на отсутствие примеров использования скорости [16], авторы настоящей статьи выражают уверенность в том, что это отсутствие временное, и результат [16] будет полезен для развития метода ВВД.

Как сказано выше, метод ВВД и разработанная для этого метода в [16] новая скорость позволяют рассчитывать только двумерные течения. Более точно формулы для скорости [16] работают только в таких течениях, в которых завихренность и ее ротор ортогональны. Следует заметить, что идеи работ [7, 8] удалось распространить на закрученные осесимметричные течения

благодаря разделённому рассмотрению эволюции завихренностей радиально-осевой и окружной скоростей в [17, 18]. При таком разделённом взгляде роторы этих завихренностей ортогональны им. Поэтому формулы [16] можно применять для каждого из двух полей завихренности (при этом даже можно задать различными законы убывания интенсивностей вихревых трубок каждой из них). В общем пространственном случае такое распространение невозможно, поскольку (как уже было сказано) в двумерных течениях завихренность и ее ротор ортогональны, вследствие чего допускаются такие преобразования уравнений Навье—Стокса (использованные в [7, 8]), которые невозможны в общем пространственном случае, где завихренность и ее ротор могут быть не ортогональны (подробно см. [7, 8]). Поэтому длительное время после опубликования работ [7, 8] среди известных авторам исследователей считалось, что в общем пространственном случае скорость \mathbf{U} не существует. Уверенность в этом вселяла статья [19], в которой было «доказано» отсутствие скорости \mathbf{U} в общем пространственном случае. Однако потом в [19] была обнаружена ошибка. Это произошло после того, как в [11] было доказано, что в общем пространственном случае скорость \mathbf{U} все-таки существует, причем для течений жидкостей всех типов: от идеальной несжимаемой жидкости до вязкого газа. Неточность [19] состоит в том, что решение одного из уравнений, имеющее в этой статье номер (22), не единственно в ограниченных областях, в то время как предложенное авторами решение уравнения (22) единственно только в неограниченном случае, когда значение искомой функции полагается равным нулю на бесконечности (данное указание на ошибку [19] публикуется впервые).

Для вычисления скорости \mathbf{U} в общем пространственном случае в [11] был предложен так называемый нелокальный метод, требующий интегрирования вдоль вихревых линий. Это делает расчеты очень громоздкими, и теоретический результат [11] несколько лет не применялся для развития метода ВВД, который оставался двумерным. Однако недавно появился первый пространственный вариант метода ВВД [20], основанный на обобщении [11] двумерных вязких аналогов теорем Гельмгольца [7, 8] на общий пространственный случай. Сложилась ситуация, подобная той, которая была недавно разрешена в [16] для двумерных течений. Появилась проблема неограниченного роста количества вихревых трубок в процессе расчета, но уже в пространственном случае. В настоящей статье с целью преодоления этой проблемы предпринята попытка в общем пространственном случае найти аналог скорости \mathbf{U} работы [16], при которой интенсивность вихревых трубок во время движения менялась бы со временем по заданному закону.

1. Представление динамического уравнения движения жидкости и газа. Поле скорости течения жидкости и газа (от идеальной несжимаемой жидкости до вязкого газа) в общем пространственном случае подчиняется уравнению вида

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{F} - \nabla f, \quad (1)$$

где t — время, \mathbf{F} — удельная плотность всех непотенциальных сил, а f — некоторое скалярное поле, содержащее в качестве слагаемого удельную кинетическую энергию $\mathbf{V}^2/2$. Ниже считаем все параметры течения достаточно гладкими для обоснованности выкладок и рассуждений. Пусть $\alpha = \alpha(t)$ — произвольная гладкая функция времени.

Воспользуемся идеей доказательства существования скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности, которое было предложено

и применено Г. Б. Сизых в работе [11] (вклад другого соавтора [11], В. В. Маркова, состоит в обнаружении неоднозначности такой скорости). В пространственной области вихревого течения ($\Omega \neq \mathbf{0}$) рассмотрим такую плоскую область σ , нормаль к которой во всех точках имеет острый угол с вихревыми линиями, пересекающими σ в течение некоторого отрезка времени $[t_1, t_2]$. Выделим пространственный односвязный фрагмент G_σ , который принадлежит пересечению всех вихревых трубок, проходящих через σ в различные моменты времени $t \in [t_1, t_2]$, и содержит σ . Пусть на поверхности σ задана любая не зависящая от времени функция g_σ . Интегрированием вдоль вихревых линий для каждого t из $[t_1, t_2]$ продолжим g_σ из σ в G_σ функцией $g(x, y, z, t)$, градиент которой удовлетворяет равенству

$$\Omega \cdot \nabla g = \Omega \cdot (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V}). \quad (2)$$

Рассмотрим векторное произведение

$$\Omega \times (\Omega \times (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \nabla g)) = \Omega(\Omega \cdot (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \nabla g)) - (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \nabla g)\Omega^2,$$

из которого с учетом (2) получим

$$\mathbf{F} = -\Omega \times \frac{\Omega \times (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \nabla g)}{\Omega^2} - \alpha \mathbf{V} + \nabla g. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), после перегруппировки слагаемых имеем

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \Omega \times \mathbf{U} = -\alpha \mathbf{V} + \nabla(g - f), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\Omega \times (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \nabla g)}{\Omega^2}. \quad (5)$$

2. Критерий Зоравского. Далее воспользуемся представлением о движении частиц воображаемой жидкости, впервые предложенном в [11, 21] и продуктивно использующимся в последнее время [22–28]. Для этого сформулируем критерий Зоравского [29, 30], который также известен как теорема Фридмана [31], в терминах движения вихревых трубок вместе с частицами воображаемой среды.

Пусть G — область пространства, заполненная одновременно двумя воображаемыми жидкостями, которые никак не взаимодействуют между собой (и не препятствуют движению друг друга). Частицы первой воображаемой жидкости движутся со скоростью $\mathbf{U}(x, y, z, t)$, а частицы второй — со скоростью $\tilde{\mathbf{V}}(x, y, z, t)$. Течение второй воображаемой жидкости является вихревым ($\tilde{\Omega} = \text{rot } \tilde{\mathbf{V}} \neq \mathbf{0}$) в течение некоторого интервала времени (t_1, t_2) . Пусть в области G при $t \in (t_1, t_2)$ завихренность второй воображаемой жидкости $\tilde{\Omega}$ и скорость первой воображаемой жидкости \mathbf{U} связаны уравнением

$$\partial \tilde{\Omega} / \partial t + \text{rot}(\tilde{\Omega} \times \mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Тогда, как следует из критерия Зоравского, при $t \in (t_1, t_2)$ вихревые линии и вихревые трубки $\tilde{\Omega}$ двигаются со скоростью \mathbf{U} , а интенсивность вихревых трубок (равная циркуляции $\tilde{\Gamma}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ по любому контуру, единожды

описывающему трубку поля $\tilde{\Omega}$) сохраняется, пока эти частицы находятся внутри G .

Это следствие будет использовано ниже при исследовании связи поля завихренности реальной жидкости Ω с полями скоростей частиц некоторых воображаемых жидкостей.

3. Движение вихревых трубок. В этом разделе для применения критерия Зоравского будем рассматривать сразу две воображаемые жидкости с использованием поля скорости реальной жидкости \mathbf{V} . Считаем, что частицы первой воображаемой жидкости движутся со скоростью \mathbf{U} , определяемой через \mathbf{V} по формуле (5), а частицы второй воображаемой жидкости — со скоростью $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} \exp\left(\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right)$. Подставляя $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} \exp\left(-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right)^1$ в (4), получаем

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial t} + \tilde{\Omega} \times \mathbf{U} = \nabla(g - f) \exp\left(\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right). \quad (7)$$

Применяя оператор ротации к левой и правой частям (7), приходим к уравнению, имеющему вид (6): $\partial \tilde{\Omega} / \partial t + \text{rot}(\tilde{\Omega} \times \mathbf{U}) = \mathbf{0}$. Следовательно (критерий Зоравского), вихревые трубки $\tilde{\Omega}$ перемещаются вместе с частицами первой воображаемой жидкости, движущимися со скоростью (5). При этом циркуляция $\tilde{\Gamma}$ скорости $\tilde{\mathbf{V}}$ второй воображаемой жидкости по контурам, перемещающимся вместе с частицами первой воображаемой жидкости со скоростью (5), сохраняется с течением времени и равна $\tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}(t_1)$. Учитывая, что завихренность второй воображаемой жидкости $\tilde{\Omega}$ и завихренность реальной жидкости Ω связаны соотношением $\Omega = \tilde{\Omega} \exp\left(-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right)$, приходим к основному результату. *Вихревые линии и вихревые трубки поля скорости (реальной) жидкости перемещаются вместе с частицами воображаемой жидкости, движущимися со скоростью (5), и при этом перемещении интенсивность всех вихревых трубок меняется по закону*

$$\Gamma(t) = \Gamma(t_1) \exp\left(-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right). \quad (8)$$

Таким образом, установлено, что в пространственном случае существует аналог скорости [16], с которой движутся вихревые трубки, а их интенсивность меняется по заданному закону (8). По известной функции $\alpha = \alpha(t)$ эта скорость определяется формулой (5), где $g = g(x, y, z, t)$ получается с помощью интегрирования уравнения (2) вдоль вихревых линий. Должный выбор g_σ позволяет менять в некотором диапазоне величину и направление скорости частиц воображаемой жидкости \mathbf{U} . Различным α и g_σ будут соответствовать различные скорости \mathbf{U} и, как следствие, различные точки зрения на эволюцию завихренности, которые, согласно [11], все равноправны.

Как и в [16], предлагаемый новый способ вычисления скорости \mathbf{U} представляет собой обобщение способа [11], поскольку совпадает с последним при $\alpha = 0$.

¹Таким образом, $\Omega = \tilde{\Omega} \exp\left(-\int_{t_1}^t \alpha(\tau) d\tau\right)$.

4. Вязкая несжимаемая жидкость. Уравнение Навье—Стокса для несжимаемой жидкости имеет вид (1), в котором скалярное поле f может быть представлено как $f = p/\rho + \mathbf{V}^2/2 + \Pi$, где p/ρ — отношение давления к плотности, Π — потенциал объемных сил, а функция $\mathbf{F} = -\nu \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}$. Поэтому, согласно (5), имеем

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} - \nu(\boldsymbol{\Omega} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega})/\Omega^2 + \alpha(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V})/\Omega^2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \nabla g)/\Omega^2.$$

При перемещении контуров (доменов) с такой скоростью их интенсивность будет изменяться по закону (8). При реализации метода ВВД с использованием данной скорости функции α и g_σ должны удовлетворять определенным условиям гладкости в течение одного временного шага. Эти требования, вообще говоря, неизвестны, и их определение на сегодняшний день представляет собой актуальную задачу математической физики. Однако для справедливости представленных рассуждений, как следует из курса дифференциальных уравнений, указанные функции должны быть как минимум непрерывно дифференцируемыми в исследуемой области течения. При этом допускается скачкообразное изменение этих функций при переходе от одного временного шага к другому, поскольку это будет соответствовать смене «старой» лагранжевой точки зрения на «новую». Слова «старая» и «новая» взяты в кавычки, потому что эти точки зрения существовали и продолжают существовать на всех временных шагах, но одна из них применяется раньше, а другая — позже. Возможные варианты для выбора α предложены, например, в [16].

5. Неоднозначность скорости \mathbf{U} . С математической точки зрения, формула (5) отражает не все возможные варианты скоростей переноса (убывающей) завихренности \mathbf{U} , удовлетворяющие уравнению (4). А именно, следует внести добавок $\gamma \boldsymbol{\Omega}$, коллинеарный вектору завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ (γ — произвольная гладкая функция времени и пространства), так как на общий вид (4) это не повлияет.

Однако принципиальная неоднозначность в вычислении скорости (5) возникает из-за наличия слагаемого с функцией $g(x, y, z, t)$, которая получается путем интегрирования g_σ вдоль вихревых линий $\boldsymbol{\Omega}$ для каждого момента времени в область вихревого фрагмента жидкости и, таким образом, определяется с точностью до некоторого скалярного поля $W(x, y, z)$, постоянного вдоль этих же вихревых линий: $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla W = 0$ (аналогичные рассуждения были применены в работе [11]). Поэтому, опуская детальные выкладки, (5) может быть обобщена как

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{F} + \alpha \mathbf{V} - \nabla g + \nabla W)}{\Omega^2} + \gamma \boldsymbol{\Omega}.$$

Заключение. Новая точка зрения на эволюцию завихренности в течениях жидкости и газа, предложенная в [16] для двумерных течений, распространена на общий пространственный случай. Эта точка зрения состоит в представлении эволюции завихренности в виде такого движения вихревых линий и вихревых трубок, при котором интенсивность вихревых трубок меняется по любому наперед заданному временному закону, в частности, при $\alpha = 1$ она экспоненциально убывает. Разумеется, разным законам изменения интенсивности, т. е. разным $\alpha = \alpha(t)$, будут соответствовать разные скорости движения вихревых линий и вихревых трубок. С точки зрения сложности

реализации предложенного подхода, связанной с необходимостью интегрирования вдоль вихревых линий, никаких дополнительных проблем по сравнению с [11] не возникает, поскольку в обоих случаях вдоль вихревых линий интегрируется уравнение типа (2).

Предлагаемая новая точка зрения на эволюцию завихренности в пространственных модификациях метода ВВД может быть использована для ограничения количества учитываемых в расчетах векторных трубок.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Вклад авторов: И. А. Максименко — 50%, В. В. Марков — 50%. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity // *P. Roy. Soc. Lond.*, 1931. pp. 170–192. <https://doi.org/10.1098/RSPA.1931.0189>.
2. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. *Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью*. М.: Наука, 1978. 352 с.
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods. Theory and Practice*: Cambridge Univ. Press, 2000. xiv+313 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511526442>.
4. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method // *AIP Conference Proceedings*, 2014. vol. 1629, no. 1, 69. <https://doi.org/10.1063/1.4902260>.
5. Апаринов А. А., Крицкий Б. С., Сетуха А. В. Численное моделирование работы несущего винта вертолета вблизи посадочной площадки ограниченных размеров вихревым методом // *Изв. вузов. Авиационная техника*, 2017. № 4. С. 21–27.
6. Aparinov A. A., Aparinov V. A., Setukha A. V. Supercomputer modeling of parachute flight dynamics // *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2018. vol. 5, no. 3. pp. 121–125. <https://doi.org/10.14529/jsfi180323>.
7. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1987. № 3. С. 176–178.
8. Брутян М. А., Голубкин В. Н., Крапивский П. Л. Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // *Уч. зап. ЦАГИ*, 1988. Т. 19, № 2. С. 98–100.
9. Дынникова Г. Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // *Докл. РАН*, 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.
10. Андронов П. Р., Гувернюк С. В., Дынникова Г. Я. *Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок*. М.: Моск. унив., 2006. 184 с.
11. Марков В. В., Сизых Г. Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // *Изв. РАН. МЖГ*, 2015. № 2. С. 8–15.
12. Дынникова Г. Я. Расчет обтекания кругового цилиндра на основе двумерных уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса с высоким разрешением в пограничном слое // *Докл. РАН*, 2008. Т. 422, № 6. С. 755–757.
13. Dynnukova G. Ya., Dynnukov Ya. A., Guvernyuk S. V., Malakhova T. V. Stability of a reverse Karman vortex street // *Physics of Fluids*, 2021. vol. 33, no. 2, 024102. <https://doi.org/10.1063/5.0035575>.
14. Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application

- for data storing and analyzing // *Entropy*, 2021. vol. 23, no. 1, 118. <https://doi.org/10.3390/e23010118>.
15. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation // *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2019. vol. 126. pp. 255–267. <https://doi.org/10.2495/BE420231>.
 16. Сизых Г. Б. Новый лагранжев взгляд на эволюцию завихренности в двухмерных течениях жидкости и газа // *Изв. вузов. ПНД*, 2022. Т. 30, № 1. С. 30–36. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36>.
 17. Сизых Г. Б. Эволюция завихренности в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2015. Т. 46, № 3. С. 14–20.
 18. Просвиряков Е. Ю. Восстановление радиально-осевой скорости в закрученных осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости при лагранжевом рассмотрении эволюции завихренности // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2021. Т. 31, № 3. С. 505–516. <https://doi.org/10.35634/vm210311>.
 19. Grant J. R., Marshall J. S. Diffusion velocity for a three-dimensional vorticity field // *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2005. vol. 19, no. 6. pp. 377–390. <https://doi.org/10.1007/s00162-005-0004-8>.
 20. Коцур О. С. Математическое моделирование эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости методом вихревых петель // *Математика и математическое моделирование*, 2021. № 3. С. 46–61. <https://doi.org/10.24108/mathm.0321.0000263>.
 21. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
 22. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019. vol. 23, no. 3. pp. 407–416. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1723>.
 23. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
 24. Коцур О. С. О существовании локальных способов вычисления скорости переноса вихревых трубок с сохранением их интенсивности // *Труды МФТИ*, 2019. Т. 11, № 1. С. 76–85.
 25. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176. https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.
 26. Сизых Г. Б. О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // *Труды МФТИ*, 2021. Т. 13, № 3. С. 144–147. https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_3_144.
 27. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
 28. Сизых Г. Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 742–747. <https://doi.org/10.31857/S0032823521060102>.
 29. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950. vol. 1. pp. 32–34.
 30. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington: Indiana Univ. Press, 1954. xx+232 pp.
 31. Фридман А. А. *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости*. М.: ОНТИ, 1934. 368 с.

MSC: 76N15

On a new Lagrangian view on the evolution of vorticity in spatial flows

I. A. Maksimenko¹, V. V. Markov^{2,3,4}¹ Technical University of Munich, 21, Arcisstraße, Munich, 80333, Germany.² Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, 8, Gubkina st., Moscow, 119991, Russian Federation.³ Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, 1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.⁴ Scientific Research Institute of System Analysis, 36, Nakhimovsky Ave., Moscow, 117218, Russian Federation.

Abstract

The purpose of the study is to extend to the spatial case proposed by G. B. Sizykh approach to a two-dimensional vorticity evolution, which is based on the idea of considering a vorticity evolution in the form of such a motion of vortex lines and tubes that the intensity of these tubes changes over time according to a predefined law. **Method.** Thorough analysis is determined by describing the flow velocity field of an ideal incompressible fluid and a viscous gas in the general case, using the idea of the movement of imaginary particles. **Results.** For any given time law of change of velocity circulation (i. e. for an exponential decay) of a real fluid along the contours the method of evaluating the field of velocity of such contours and vortex tubes is proposed (e. g. getting a field of imaginary particles, which transfer them). It is established that for a given time law the velocity of imaginary particles is determined ambiguously, and the method of how to adjust their motion preserving defined law of circulation change is proposed. **Conclusion.** A new Lagrangian approach to the evolution of vorticity in three-dimensional flows is derived, as well as the expressions for the contours' velocity, which imply stated changing over the time of the velocity circulation of a real fluid along any contour. This theoretical result can be utilized in spatial modifications of the viscous vortex domain method to limit the number of vector tubes used in calculations.

Keywords: contour velocity, contour intensity, imaginary fluid motion, Zoravski's criterion, Friedmann's theorem, viscous vortex domain method.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Maksimenko I. A., Markov V. V. On a new Lagrangian view on the evolution of vorticity in spatial flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 179–189. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1907> (In Russian).

Authors' Details:

Ivan A. Maksimenko  <https://orcid.org/0000-0001-8159-8531>

Student; Dept. of Civil, Geo and Environmental Engineering;

e-mail: maksimenko.ia@phystech.edu

Vladimir V. Markov  <https://orcid.org/0000-0003-2188-2201>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Leading Researcher; Dept. of Mechanics²; Lab. of Gas Dynamics of Explosion and Reacting Systems³; Dept. of Computational Mathematics⁴;

e-mail: markov@mi-ras.ru

Received: 7th February, 2022 / Revised: 23rd February, 2022 /
 Accepted: 24th February, 2022 / First online: 16th March, 2022

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Wrote the paper: I. A. Maksimenko (50%) and V. V. Markov (50%). The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Rosenhead L. The formation of vortices from a surface of discontinuity, *P. Roy. Soc. Lond.*, 1931, pp. 170–192. <https://doi.org/10.1098/RSPA.1931.0189>.
2. Belotserkovskii S. M., Nisht M. I. *Otryvnoe i bezotryvnoe obtekanie tonkikh kryl'ev ideal'noi zhidkost'iu* [Separated and Unseparated Ideal Liquid Flow around thin Wings]. Moscow, Nauka, 1978, 352 pp. (In Russian)
3. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. *Vortex Methods. Theory and Practice*, Cambridge Univ. Press, 2000, xiv+313 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09780511526442>.
4. Aparinov A. A., Setukha A. V., Zhelannikov A. I. Numerical simulation of separated flow over three-dimensional complex shape bodies with some vortex method, *AIP Conference Proceedings*, 2014, vol. 1629, no. 1, 69. <https://doi.org/10.1063/1.4902260>.
5. Aparinov A. A., Kritskii B. S., Setukha A. V. Numerical modeling of helicopter main rotor behavior near a small-scale helideck by the vortex method, *Russ. Aeronaut.*, 2017, vol. 60, no. 4, pp. 500–507. <https://doi.org/10.3103/S1068799817040043>.
6. Aparinov A. A., Aparinov V. A., Setukha A. V. Supercomputer modeling of parachute flight dynamics, *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2018, vol. 5, no. 3, pp. 121–125. <https://doi.org/10.14529/jsfi180323>.
7. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Some general properties of plane-parallel viscous flows, *Fluid Dyn.*, 1987, vol. 22, no. 3, pp. 479–481.
8. Brutyan M. A., Golubkin V. N., Krapivskii P. L. On the Bernoulli equation for axisymmetric viscous fluid flows, *Uch. zap. TsAGI* [TsAGI Science Journal], 1988, vol. 19, no. 2, pp. 98–100 (In Russian).
9. Dynnikova G. Ya. The Lagrangian approach to the solution of non-stationary Navier–Stokes equations, *Dokl. Math.*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 648–652.
10. Andronov P. R., Guvernuyuk S. V., Dynnikova G. Ya. *Vikhrevyye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex Methods for Calculating Non-Stationary Hydrodynamic Loads]. Moscow, Moscow Univ., 2006, 184 pp. (In Russian)
11. Markov V. V., Sizykh G. B. Vorticity evolution in liquids and gases, *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 186–192. <https://doi.org/10.1134/S0015462815020027>.
12. Dynnikova G. Ya. Calculation of flow around a circular cylinder on the basis of two-dimensional Navier–Stokes equations at large Reynolds numbers with high resolution in a boundary layer, *Dokl. Phys.*, 2008, vol. 53, no. 10, pp. 544–547. <https://doi.org/10.1134/S102833580810011X>.
13. Dynnikova G. Ya., Dynnikov Ya. A., Guvernuyuk S. V., Malakhova T. V. Stability of a reverse Karman vortex street, *Physics of Fluids*, 2021, vol. 33, no. 2, 024102. <https://doi.org/10.1063/5.0035575>.
14. Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing, *Entropy*, 2021, vol. 23, no. 1, 118. <https://doi.org/10.3390/e23010118>.

15. Leonova D., Marchevsky I., Ryatina E. Fast methods for vortex influence computation in meshless lagrangian vortex methods for 2D incompressible flows simulation, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2019, vol. 126, pp. 255–267. <https://doi.org/10.2495/BE420231>.
16. Sizykh G. B. New Lagrangian view of vorticity evolution in two-dimensional flows of liquid and gas, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 30, no. 1, pp. 30–36 (In Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-1-30-36>.
17. Sizykh G. B. Evolution of vorticity in swirling axisymmetric flows of a viscous incompressible fluid, *TsAGI Science Journal*, 2015, vol. 46, no. 3, pp. 209–217. <https://doi.org/10.1615/tsagiscij.2015014086>.
18. Prosviryakov E. Yu. Recovery of radial-axial velocity in axisymmetric swirling flows of a viscous incompressible fluid in the Lagrangian consideration of vorticity evolution, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 505–516 (In Russian). <https://doi.org/10.35634/vm210311>.
19. Grant J. R., Marshall J. S. Diffusion velocity for a three-dimensional vorticity field, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 2005, vol. 19, no. 6, pp. 377–390. <https://doi.org/10.1007/s00162-005-0004-8>.
20. Kotsur O. S. Mathematical modelling of the elliptical vortex ring in a viscous fluid with the vortex filament method, *Mathematics and Mathematical Modeling*, 2021, no. 3, pp. 46–61 (In Russian). <https://doi.org/10.24108/mathm.0321.0000263>.
21. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. <https://doi.org/10.1134/S0015462819070139>.
22. Sizykh G. B. Closed vortex lines in fluid and gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 3, pp. 407–416. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1723>.
23. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
24. Kotsur O. S. On the existence of local formulae of the transfer velocity of local tubes that conserve their strengths, *Proceedings of MIPT*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 76–85 (In Russian).
25. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proceedings of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian). https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.
26. Sizykh G. B. On the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock, *Proceedings of MIPT*, 2021, vol. 13, no. 3, pp. 144–147 (In Russian). https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_3_144.
27. Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
28. Sizykh G. B. Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1027–1030. <https://doi.org/10.1134/S0015462821080097>.
29. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski’s criterion for permanent vector-lines, *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, pp. 32–34.
30. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*. Bloomington, Indiana Univ. Press, 1954, xx+232 pp.
31. Friedmann A. A. *Opyt gidromekhaniki szhimaemoi zhidkosti* [Experience in the Hydromechanics of Compressible Fluid]. Moscow, ONTI, 1934, 368 pp. (In Russian)

УДК 532.516

Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками

*Г. Б. Сизых*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4.

Аннотация

В рамках уравнений Навье–Стокса рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости между неподвижными параллельными проницаемыми стенками, на которых выставляется условие равенства нулю только продольной компоненты скорости. Ищутся решения, в которых поперечная к плоскости пластин компонента скорости постоянна. Получены как стационарные, так и нестационарные решения, среди которых есть нетривиальное решение с постоянным давлением и экспоненциально затухающей со временем продольной скоростью. Устанавливается, что для стационарных течений вынос погранслоя в глубь течения от одной пластины при одновременном всасывании погранслоя на другой пластине приводит к росту сопротивления по сравнению с классическим течением Пуазейля. В случае непроницаемых стенок получено точное нестационарное решение, профиль скорости которого в фиксированные моменты времени отличается от профиля в классическом течении Пуазейля и в пределе (при стремлении времени к бесконечности) соответствует покою.

Ключевые слова: точные решения, уравнения Навье–Стокса, течение Пуазейля, проницаемые стенки.

Получение: 19 января 2022 г. / Исправление: 13 февраля 2022 г. /

Принятие: 28 февраля 2022 г. / Публикация онлайн: 15 марта 2022 г.

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Течение пуазейлевского типа в канале с проницаемыми стенками // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 1. С. 190–201. EDN: JGEZYS. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1900>.

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики; e-mail: ol2o3@yandex.ru

Введение. Около полувека назад появилась проблема верификации численных программ расчета течений. Сравнение численного и точного решений является одним из таких методов верификации. При использовании этого метода условия на любой границе берутся исходя из точного решения, а техническая сторона реализации этих условий в натурном эксперименте перестала иметь значение. Поэтому любые точные решения в настоящее время имеют практическое значение для верификации. Кроме верификации, точные решения используются для отладки программ. Для этого необходимо иметь набор различных точных решений, среди которых должны быть и достаточно простые, например двумерные, которые используются на начальной стадии отладки. Если в программе используется метод установления, то для начальной стадии ее отладки будут полезны двумерные стационарные точные решения (и даже одномерные, например, равномерный поток). Кроме того, как замечено в [1], на точных решениях «... апробируются подходы к обоснованию приближенных моделей ...». Очевидно, что и в этом случае целесообразно начинать с простых точных решений. В научных публикациях последних двух десятилетий рассмотрены различные обобщения течения Пуазейля [1–6], описывающие слоистые и сдвиговые потоки, в которых нет протекания жидкости через проницаемые границы (нет вдува или отсоса жидкости). Обобщений для течений с протеканием мало, так как они очень сложны и труднообозримы. Например, в [7] представлено существенно трехмерное нестационарное точное решение, выраженное через интеграл Дюамеля. Автору настоящей статьи известно только одно относительно простое точное решение — течение вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами с проницаемыми стенками [8]. Таким образом, имеет место недостаток «простых» точных решений с проницаемыми стенками, которые можно было бы применять как для отладки программ, так и для качественного анализа влияния вдува или отсоса погранслоя на картину течения (т.е. для качественного анализа физических процессов на основе точных решений). Поэтому в данной статье предпринята попытка найти точное решение для двумерного течения между проницаемым стенками.

Эффективным методом получения точных решений является задание вида зависимости компонент скорости или функции тока от координат и времени [9–20]. Однако при этом может оказаться, что попытка найти решение будет безуспешной, как в [21], или что удастся доказать, что решения при выбранном виде зависимости не существует [22]. Поэтому выбор зависимости, приводящий в итоге к новым решениям, является ключевым моментом исследования. В данной статье также предложен новый вид зависимости (формула (2)) для описания течения пуазейлевского типа между проницаемыми пластинами, в котором из-за протекания жидкости через пластины скорость имеет ненулевые как продольную, так и поперечную к пластинам компоненты. В результате удалось получить ряд новых точных решений. Эти решения относятся к классу задач с уравнениями Навье—Стокса в области между двумя параллельными (плоскими) границами, на которых заданы ненулевые значения скорости. Однако найденные ниже решения имеют одну специфическую особенность на границах течения. В отличие от общего случая упомянутых задач, ниже рассматриваются только такие, в которых на границе продольная к границе компонента скорости равна нулю, а поперечная — от-

лична от нуля. Такие условия соответствуют неподвижным горизонтальным проницаемым пластинам. Трение на неподвижных проницаемых пластинах обеспечивает нулевые значения горизонтальной компоненты скорости на этих стенках, а проницаемость — отличие от нуля поперечной компоненты скорости. Поэтому представляется естественным назвать рассматриваемые течения «течениями между горизонтальными проницаемыми пластинами (или стенками)».

1. Уравнения движения и общий вид решения. В безразмерных переменных система уравнений Навье—Стокса для вязкой несжимаемой жидкости представляется следующим образом:

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \text{rot } \boldsymbol{\Omega} / \text{Re} = -\nabla [p + \mathbf{V}^2 / 2], \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{V} и p — безразмерные скорость и давление, отнесенные к плотности, соответственно; $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$; Re — число Рейнольдса.

Рассмотрим плоское течение между двумя неподвижными горизонтальными пластинами с протеканием жидкости через пластины, в котором поперечная компонента скорости постоянна во времени и пространстве. При обезразмеривании системы (1) в качестве характерной длины возьмем расстояние между пластинами, а в качестве характерной скорости — поперечную компоненту скорости. Тогда в безразмерных переменных расстояние между пластинами и поперечная компонента скорости будут равны единице. Начало декартовой прямоугольной системы координат Oxy расположим на нижней пластине, а ось Ox — горизонтально. Пусть \mathbf{i} и \mathbf{j} — базисные векторы этой системы координат. Будем искать скорость решения (1) в виде

$$\mathbf{V} = (TY) \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad (2)$$

где $T = T(t)$, $Y = Y(y)$ (последнее уравнение (1) выполняется «автоматически»).

При протекании жидкости через пластины условие прилипания заменяется на условие равенства нулю горизонтальной скорости, т.е. $Y(0) = Y(1) = 0$. Получим выражение для левой части первого уравнения (1). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= T'Y \mathbf{i}, \\ \boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V} &= -TY' \mathbf{k}, \quad \text{где } \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}, \\ \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} &= TY' \mathbf{i} - Y'T^2Y \mathbf{j}, \\ \text{rot } \boldsymbol{\Omega} / \text{Re} &= -TY'' \mathbf{i} / \text{Re}. \end{aligned}$$

Поэтому левая часть первого уравнения (1) принимает вид

$$[T'Y + TY' - TY'' / \text{Re}] \mathbf{i} + [-Y'T^2Y] \mathbf{j}. \quad (3)$$

Для существования решения (1) необходимо и достаточно, чтобы выражение (3) представляло собой градиент некоторой функции, что для односвязной области (каковой является пространство между пластинами) равносильно условию

$$\frac{\partial}{\partial y} [T'Y + TY' - TY'' / \text{Re}] = \frac{\partial}{\partial x} [-Y'T^2Y].$$

Поскольку правая часть равна нулю, это условие окажется выполненным, если и левая часть будет равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial y}[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}] = 0 \quad (4)$$

или

$$[T'Y' + TY'' - TY'''/\text{Re}] = 0.$$

Отбрасывая тривиальные случаи $T = 0$ и $Y' = 0$, получаем

$$\text{Re } T'/T = Y'''/Y' - \text{Re } Y''/Y' = \beta = \text{const.}$$

Поэтому

$$T = T(t) = \exp(\beta t/\text{Re}), \quad (5)$$

а функция $Y = Y(y)$ определяется как решение однопараметрической (параметр β при фиксированном числе Re) задачи

$$Y''' - \text{Re } Y'' - \beta Y' = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0. \quad (6)$$

(Случаю $\beta = 0$ соответствует стационарное течение $T(t) \equiv 1$.)

Итак, для функций $T = T(t)$, $Y = Y(y)$, определяемых по формулам (5) и (6), скорость (2) обеспечивает равенство левой части первого уравнения (1) градиенту некоторой функции (функции Бернулли $p + \mathbf{V}^2/2$). Чтобы получить выражение для давления, найдем сначала эту функцию. Из уравнения (4) следует, что величина $[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}]$ не зависит от y . Поэтому искомая функция с точностью до аддитивной константы есть

$$p + \mathbf{V}^2/2 = -[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}]x + T^2Y^2/2.$$

Отсюда, поскольку $\mathbf{V}^2/2 = T^2Y^2/2 + 1/2$, получаем

$$p = -[T'Y + TY' - TY''/\text{Re}]x + p_0. \quad (7)$$

Формулы (5)–(7) задают общий вид решения, в котором скорость имеет вид (2).

Заметим, что, как и в классическом течении Пуазейля, давление не зависит от поперечной координаты и линейно меняется вдоль горизонтальной координаты.

2. Случай нулевого градиента давления. С учетом (5) из (7) следует, что давление не будет зависеть от x только для одного частного случая задачи (6). Это случай, когда $Y'' - \text{Re } Y' - \beta Y = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Если исключить решение $Y(y) \equiv 0$, такая задача (с такими краевыми условиями) имеет решения только при $\text{Re}^2 + 4\beta = -(2\pi k)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При заданном натуральном k имеем $Y(y) = \exp(\text{Re } y/2) \sin k\pi y$, а горизонтальная скорость стационарного течения определяется с точностью произвольного постоянного множителя $C_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(-((2\pi k)^2 + \text{Re}^2)t/(4\text{Re}) + \text{Re } y/2) \sin(k\pi y) \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad p = p_0.$$

Поскольку в выражении для скорости множитель $\exp(-((2\pi k)^2 + \text{Re}^2)t/(4\text{Re}))$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, с ростом времени течение устанавливается и скорость стремится к предельному значению $\mathbf{V} = \mathbf{j}$.

3. Стационарное течение. Стационарное течение имеет место при $\beta = 0$. Задача (6) принимает вид $Y''' - \text{Re} Y'' = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Она имеет решение при любом значении Re . При $\beta = 0$ горизонтальная скорость стационарного течения (1) определяется с точностью до произвольного постоянного множителя $C_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{V} = C_0 [\exp(\text{Re} y) - (\exp(\text{Re}) - 1)y - 1] \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad p = C_0(\exp(\text{Re}) - 1)x + p_0. \quad (8)$$

При очень малых значениях числа Рейнольдса ($\text{Re} \leq 1$) профиль горизонтальной скорости «похож» на симметричный квадратичный профиль классического течения Пуазейля. С ростом числа Рейнольдса профиль становится несимметричным и почти прямолинейным всюду, кроме тонкого пограничного слоя вблизи верхней пластины (рис. 1). (Для удобства сравнения формы профилей с помощью рис. 1 произвольная константа C_0 при различных числах Рейнольдса подбиралась так, чтобы максимальное значение горизонтальной скорости было одинаково на всех профилях, изображенных на рис. 1.)

Сравним горизонтальные расходы жидкости в этом течении и в классическом (стационарном) течении Пуазейля (здесь его приводить не будем). Непосредственной проверкой (интегрированием горизонтальной компоненты скорости по y от 0 до 1) можно убедиться, что при одинаковом (горизонтальном) градиенте давления суммарные расходы Q и Q_P жидкости через поперечное сечение между пластинами (т.е. расход в горизонтальном направлении) для течения (8) и для классического решения Пуазейля соответственно связаны соотношением

$$Q/Q_P = 12[0.5\text{Re}^{-1} + \text{Re}^{-1}(\exp(\text{Re}) - 1)^{-1} - \text{Re}^{-2}]. \quad (9)$$

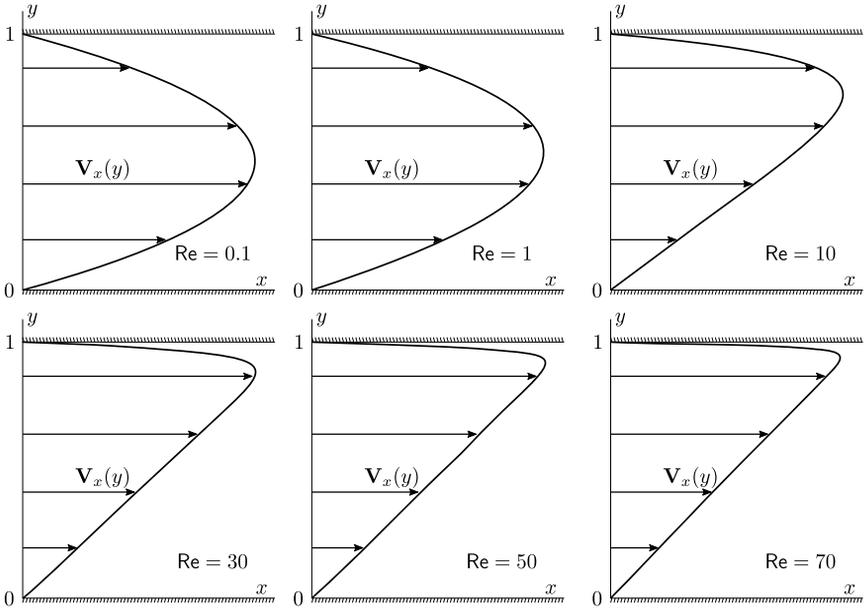


Рис. 1. Профиль горизонтальной скорости в стационарном течении Пуазейля с проницаемыми стенками для различных чисел Рейнольдса [Figure 1. Horizontal velocity profile for a stationary Poiseuille flow with permeable walls for various Reynolds numbers]

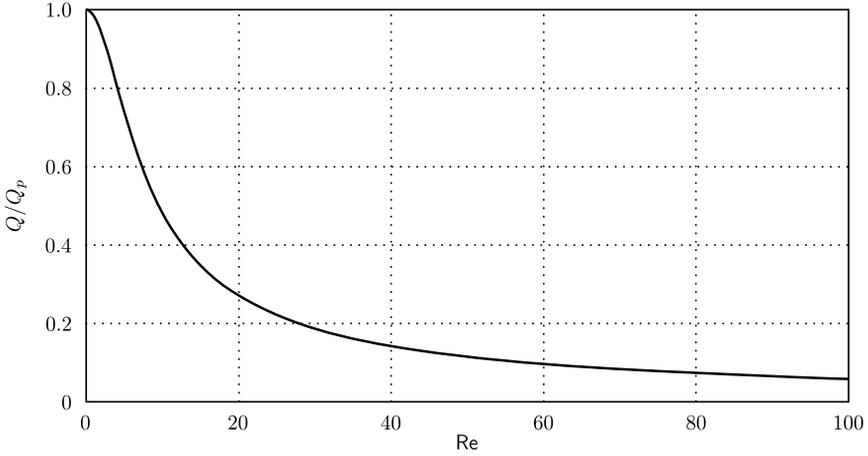


Рис. 2. График зависимости (9) [Figure 2. The graph of dependence (9)]

График зависимости (9) изображен на рис. 2. Отношение Q/Q_P стремится к единице при $Re \rightarrow 0$ и, убывая, стремится к нулю с ростом Re .

Отсюда следует вывод, что вынос погранслоя в глубь течения от одной пластины при одновременном всасывании погранслоя на другой пластине приводит к росту сопротивления потоку в горизонтальном направлении.

4. Нестационарное течение с ненулевым (горизонтальным) градиентом давления. В этом случае $Re^2 + 4\beta \neq -(2\pi k)^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Если величина $Re^2 + 4\beta < 0$, то выражения для скорости и давления имеют вид

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(\beta t/Re) \left[\exp(Re y/2) \left(\frac{\cos \gamma - \exp(-Re/2)}{\sin \gamma} \sin(\gamma y) - \cos(\gamma y) \right) + 1 \right] \mathbf{i} + \mathbf{j},$$

где $\gamma = \sqrt{|Re^2 + 4\beta|/2}$; $p = -C_0 \beta \exp(\beta t/Re) x/Re + p_0$, $C_0 = \text{const}$.

Если же $Re^2 + 4\beta > 0$, то

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(\beta t/Re) [A \exp(\nu_1 y) + B \exp(\nu_2 y) + 1] \mathbf{i} + \mathbf{j},$$

$$p = -C_0 \beta \exp(\beta t/Re) x/Re + p_0,$$

где

$$A = (1 - \exp(\nu_2)) / (\exp(\nu_2) - \exp(\nu_1)),$$

$$B = (\exp(\nu_1) - 1) / (\exp(\nu_2) - \exp(\nu_1)),$$

$$\nu_1 = \left(Re - \sqrt{Re^2 + 4\beta} \right) / 2, \quad \nu_2 = \left(Re + \sqrt{Re^2 + 4\beta} \right) / 2, \quad C_0 = \text{const}.$$

5. Нестационарное течение Пуазейля (непроницаемые пластины). В таком течении будем искать скорость не в виде (2), а в виде $\mathbf{V} = (TY) \mathbf{i}$. Повторяя выкладки первого раздела, получим $Y''' - \beta Y' = 0$, $Y(0) = Y(1) = 0$. Ограничимся случаем $\beta = -4k^2 \pi^2$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Решение имеет вид

$$\mathbf{V} = C_0 \exp(-4k^2 \pi^2 t/Re) [1 - \cos(2k\pi y)] \mathbf{i},$$

$$p = C_0 4k^2 \pi^2 \exp(-4k^2 \pi^2 t / \text{Re}) x / \text{Re} + p_0, \quad C_0 = \text{const.}$$

Интересно, что профиль нестационарного течения Пуазейля отличается от (квадратичного) профиля стационарного течения.

6. Течение Куэтта. Для течения Куэтта ограничимся стационарным случаем. Как видно из (5), в стационарном течении $\beta = 0$. В течении Куэтта верхняя пластина движется в горизонтальном направлении. Поэтому в задаче (6) нужно изменить второе краевое условие, и она примет вид

$$Y''' - \text{Re} Y'' = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(1) = 1. \quad (10)$$

Такая задача имеет решение при любом значении Re . Однако могут получаться решения, в которых давление не постоянно, а меняется в горизонтальном направлении. Потребуем, чтобы давление было постоянно. Из формулы (7) для стационарного случая ($T \equiv 1$) получаем условие постоянства давления $Y' \text{Re} - Y'' = 0$. Это условие будет выполнено для следующего решения задачи (10), которое определяется с точностью до произвольного постоянного множителя $C_0 = \text{const}$:

$$\mathbf{V} = C_0 [\exp(\text{Re} y) - 1] \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad p = p_0 = \text{const.}$$

Эта простая формула позволяет проиллюстрировать влияние выноса погранслоя в глубь течения от одной пластины и при одновременном всасывании погранслоя на другой пластине. В частности, видно (см. рис. 3), что вертикальный градиент скорости больше на верхней пластине (где происходит всасывание), и поэтому сила, которая требуется для движения верхней

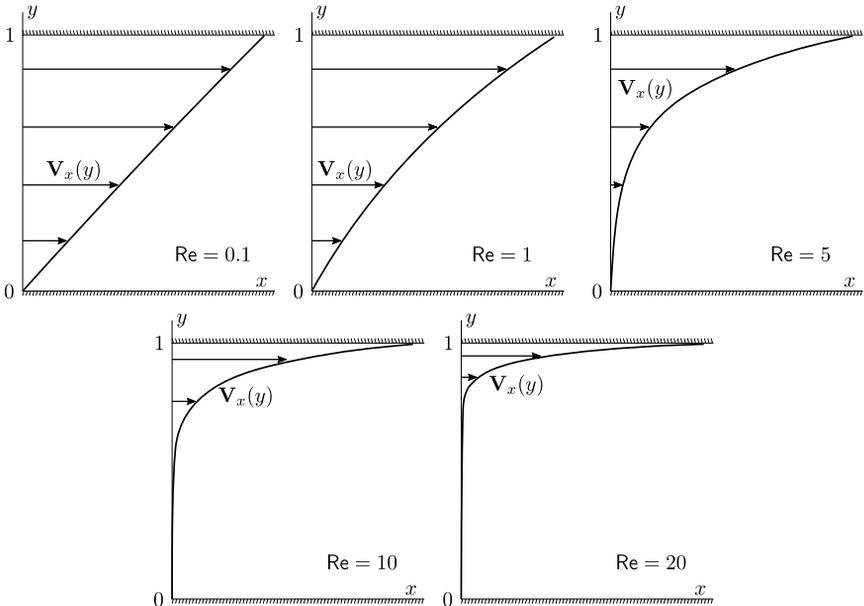


Рис. 3. Профиль горизонтальной скорости в стационарном течении Куэтта с проницаемыми стенками для различных чисел Рейнольдса [Figure 3. Horizontal velocity profile in a stationary Couette flow with permeable walls for various Reynolds numbers]

пластины, больше силы, которая требуется для удержания на месте нижней пластины (в классическом течении Куэтта эти силы равны по величине). Интересно также отметить, что при стремлении числа Рейнольдса к нулю профиль горизонтальной скорости приближается к линейному профилю классического течения Куэтта. А при числах Рейнольдса $Re \geq 20$ горизонтальная скорость почти везде равна нулю, кроме узкого пограничного слоя вблизи верхней пластины.

Заключение. В результате предположения о специальном виде зависимости (2) компонент скорости от координат получено новое семейство точных решений, описывающих плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными проницаемыми пластинами (течение пуазейлевского типа). При отсутствии протекания через пластины получено точное решение для нестационарного течения Пуазейля. Полученное однопараметрическое семейство решений включает в себя классическое решение Пуазейля и потому обобщает его. Для стационарных течений показано, что протекание приводит к росту сопротивления по сравнению с классическим течением Пуазейля.

Конкурирующие интересы. В публикации статьи отсутствуют конкурирующие финансовые или нефинансовые интересы.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*, 2006. № 6. С. 3–76.
2. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // *Nonlinear Dynamics*, 2004. vol. 36, no. 1. pp. 47–68. <https://doi.org/10.1023/B:NDY.0000034646.18621.73>.
3. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Тр. Института математики и механики УрО РАН*, 2020. Т. 26, № 2. С. 79–87. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.
4. Prosviryakov E. Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid // *CEUR Workshop Proceedings*, 2016. vol. 1825. pp. 164–172.
5. Князев Д. В., Колшаков И. Ю. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом // *Нелинейная динам.*, 2015. Т. 11, № 1. С. 89–97.
6. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // *Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика*. Т. 32. С. 33–48. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33>.
7. Гурченков А. А. Неустановившиеся пограничные слои на пористых пластинах вращающейся щели при наличии вдува (отсоса) среды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2001. Т. 41, № 3. С. 443–449.

8. Башкин В. А., Егоров И. В. *Семинары по теоретической гидродинамике. 1.* М.: МФТИ, 2003. 194 с.
9. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations. A Classification of Flows and Exact Solutions* / London Mathematical Society Lecture Note Series. vol. 334. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. x+196 pp. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526459>.
10. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. xiv+470 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09781139226516>.
11. Shtern V. *Cellular Flows. Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2018. xiv+574 pp. <https://doi.org/10.1017/9781108290579>.
12. Bogoyavlenskij O. I. Exact solutions to the Navier–Stokes equations // *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 2002. vol. 24, no. 4. pp. 138–143.
13. Bogoyavlenskij O. I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations // *Mosc. Math. J.*, 2003. vol. 3, no. 2. pp. 263–272. <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2003-3-2-263-272>.
14. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // *Теор. основы хим. технол.*, 2006. Т. 43, № 5. С. 547–566.
15. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*, 2016. Т. 51, № 2. С. 25–31. <https://doi.org/10.7868/S0568528116020055>.
16. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Волны Стокса в завихренной жидкости // *Нелинейная динам.*, 2014. Т. 10, № 3. С. 309–318.
17. Голубкин В. Н., Сизых Г. Б. Течение вязкого газа между вертикальными стенками // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667. <https://doi.org/10.31857/S003282350002271-8>.
18. Сизых Г. Б. Метод тиражирования точных решений уравнений Эйлера для несжимаемых течений Бельтрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 790–798. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802>.
19. Хорин А. Н., Конохова А. А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
20. Барановский Е. С., Домнич А. А. О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 3. С. 317–327. <https://doi.org/10.1134/S0374064120030036>.
21. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // *Изв. вузов. ПНД*, 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
22. Сизых Г. Б. Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости // *Изв. вузов. Матем.*, 2019. № 2. С. 49–56. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-2-49-56>.

MSC: 76D05, 35G20

Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls

*G. B. Sizykh*Moscow Aviation Institute (National Research University),
4, Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation.

Abstract

In the framework of the Navier–Stokes equations, the flow of a viscous incompressible fluid between immovable parallel permeable walls is considered, on which only the longitudinal velocity component is equal to zero. Solutions are sought in which the velocity component transverse to the plane of the plates is constant. Both stationary and non-stationary solutions are obtained, among which there is a non-trivial solution with a constant pressure and a longitudinal velocity exponentially decaying with time. These solutions show the influence on the profile of the horizontal velocity component of the removal of the boundary layer into the depth of the flow from one plate with simultaneous suction of the boundary layer on the other plate. It is established that for stationary flows the removal of the boundary layer into the depth of the flow from one plate and, with simultaneous suction of the boundary layer on the other plate, leads to an increase in the drag compared to the classical Poiseuille flow. In the case of impermeable walls, an exact non-stationary solution is obtained, the velocity profile of which at fixed times differs from the profile in the classical Poiseuille flow and, in the limit (as time tends to infinity), corresponds to rest.

Keywords: exact solutions, Navier–Stokes equations, Poiseuille flow, permeable walls.

Received: 19th January, 2022 / Revised: 13th February, 2022 /Accepted: 28th February, 2022 / First online: 15th March, 2022

Competing interests. There are no financial or non-financial competing interests in the publication of the paper.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this paper in press as:

Sizykh G. B. Poiseuille-type flow in a channel with permeable walls, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 190–201. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1900> (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Acknowledgments. The author is grateful to the reviewers for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Pukhnachev V. V. Symmetries in Navier–Stokes equations, *Uspehi Mehaniki*, 2006, no. 6, pp. 3–76 (In Russian).
2. Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations, *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 36, no. 1, pp. 47–68. <https://doi.org/10.1023/B:NODY.0000034646.18621.73>.
3. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 79–87 (In Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87>.
4. Prosviryakov E. Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid, *CEUR Workshop Proceedings*, 2016, vol. 1825, pp. 164–172.
5. Knyazev D. V., Kolpakov I. Yu. The exact solutions of the problem of a viscous fluid flow in a cylindrical domain with varying radius, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 89–97 (In Russian).
6. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 32, pp. 33–48 (In Russian). <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33>.
7. Gurchenkov A. A. Unsteady boundary layers on the porous plates in a rotating slot with injection and suction, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 3, pp. 413–419.
8. Bashkin V. A., Egorov I. V. *Seminary po teoreticheskoi gidrodinamike. 1* [Seminars on Theoretical Hydrodynamics. Part 1]. Moscow, MIPT, 2003, 194 pp. (In Russian)
9. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations. A Classification of Flows and Exact Solutions*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 334. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2006, x+196 pp. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511526459>.
10. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2012, xiv+470 pp. <https://doi.org/10.1017/CB09781139226516>.
11. Shtern V. *Cellular Flows. Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2018, xiv+574 pp. <https://doi.org/10.1017/9781108290579>.
12. Bogoyavlenskij O. I. Exact solutions to the Navier–Stokes equations, *C. R. Math. Acad. Sci., Soc. R. Can.*, 2002, vol. 24, no. 4, pp. 138–143.
13. Bogoyavlenskij O. I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations, *Mosc. Math. J.*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 263–272. <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2003-3-2-263-272>.
14. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables, *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2006, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>.
15. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 148–154. <https://doi.org/10.1134/S0015462816020034>.
16. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Stokes waves in vortical fluid, *Nelin. Dinam.*, 2014, vol. 10, no. 3, pp. 309–318 (In Russian).
17. Golubkin V. N., Sizykh G. B. Viscous gas flow between vertical walls, *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 11–18. <https://doi.org/10.1134/S0015462818060046>.
18. Sizykh G. B. A method for replicating exact solutions of the Euler equations for incompressible Beltrami flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 790–798 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1802>.

19. Khorin A. N., Konyukhova A. A. Couette flow of hot viscous gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378 (In Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1751>.
20. Baranovskii E. S., Domnich A. A. Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain, *Differ. Equ.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 304–314. <https://doi.org/10.1134/S0012266120030039>.
21. Markov V. V., Sizykh G. B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity, *Izv. VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652 (In Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
22. Sizykh G. B. Axisymmetric helical flows of viscous fluid, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2019, vol. 63, no. 2, pp. 44–50. <https://doi.org/10.3103/S1066369X19020063>.

ПОДПИСКА – 2022

на январь–декабрь
в «Объединенном каталоге «Пресса России»
на сайтах www.pressa-rf.ru и www.akc.ru

Уважаемые читатели!
Обратите внимание, что проводится
подписная кампания на журналы
Самарского государственного технического
университета на 2022 год.

- 18106 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки»
- 18107 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки»
- 18108 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»
- 41340 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Философия»
- 70570 Градостроительство и архитектура

*Условия оформления подписки Вы найдете
на сайтах www.pressa-rf.ru и www.akc.ru*