

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 26, № 2 – 2022

Вестник Самарского государственного технического университета

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Июнь — 2022

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 26, № 2 – 2022)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвирыков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 26, № 2 – 2022)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244
Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, [Zentralblatt MATH](#), [DOAJ](#) и входит в ядро [Российского индекса научного цитирования](#).

Журнал включен в [Перечень рецензируемых научных изданий](#), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
June — 2022

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2022, vol. 26, no. 2

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
14A-M, Zastavskay st., Saint Petersburg, 196084, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Zentralblatt MATH](#), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, and [DOAJ](#).

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Быков Д. Е., Ненашев М. В., Радченко В. П. “К 60-летию со дня рождения проф. Юрия Николаевича Радаева” 207

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Аоуаоуда М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. “Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости” 222

Киржинов Р. А. “Аналог задачи Дезина для уравнения парабола-гиперболического типа с условиями периодичности” 259

Уринов А. К., Азизов М. С. “Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя” 273

Механика деформируемого твёрдого тела

Пантелеев И. А., Зайцев А. В., Устинов К. Б., Мубассарова В. А., Шевцов Н. И., Химуля В. В., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф. “Ориентационная природа эффекта деформационной памяти при трехосном циклическом неравнокомпонентном сжатии песчаника” 293

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Иванов Д. В., Жданов А. И. “Неявный итерационный алгоритм для решения задачи регуляризированных полных наименьших квадратов” 311

Понькин Е. И. “Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косою стенкой” 322

Соломин Е. В., Терехин А. А., Мартьянов А. С., Ковалёв А. А., Исмагилов Д. Р., Рявкин Г. Н., Кулганатов А. З., Погорелов Б. Т. “Оценка влияния моделей турбулентности на описание процессов вихреобразования в ветроэнергетике” 339

Краткие сообщения

Дурдиев Д. К. “Обратная задача об источнике для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с дробной производной по времени в цилиндрической области” 355

Юлдашев Т. К. “Периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями и максимумами” 368

Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С. “Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения” 380

Contents

<i>Bykov D. E., Nenashev M. V., Radchenko V. P.</i> “On the 60 th anniversary of Professor Yuri N. Radayev”	207
--	-----

Differential Equations and Mathematical Physics

<i>Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H.</i> “Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane”	222
<i>Kirzhinov R. A.</i> “Dezin problem analog for a parabolic-hyperbolic type equation with periodicity condition”	259
<i>Urinov A. K., Azizov M. S.</i> “An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator”	273

Mechanics of Solids

<i>Panteleev I. A., Zaitsev A. V., Ustinov K. B., Mubassarova V. A., Shevtsov N. I., Khimulia V. V., Karev V. I., Kovalenko Yu. F.</i> “Orientation nature of the damage-memory effect under triaxial cyclic nonproportional compression of a sandstone”	293
--	-----

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

<i>Ivanov D. V., Zhdanov A. I.</i> “Implicit iterative algorithm for solving regularized total least squares problems”	311
<i>Pon'kin E. I.</i> “The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall”	322
<i>Solomin E. V., Terekhin A. A., Martyanov A. S., Kovalyov A. A., Ismagilov D. R., Ryavkin G. N., Kulganatov A. Z., Pogorelov B. T.</i> “Evaluation of influence of turbulence models on the vortex formation processes modeling in wind power”	339

Short Communications

<i>Durdiev D. K.</i> “Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain”	355
<i>Yuldashev T. K.</i> “Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima”	368
<i>Beylin A. B., Bogatov A. V., Pulkina L. S.</i> “A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation”	380



УДК 53(092)

К 60-летию со дня рождения проф. Юрия Николаевича Радаева

Д. Е. Быков, М. В. Ненашев, В. П. Радченко

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

10 февраля 2022 г. исполнилось 60 лет известному ученому в области механики деформируемого твердого тела и прикладной математики, педагогу, организатору науки и высшего образования в России Юрию Николаевичу Радаеву. В статье приведены основные библиографические данные Ю. Н. Радаева, в краткой форме представлены главные научные направления и результаты научной деятельности по фундаментальным проблемам математической теории пластичности, механике растущих тел и рассеянного накопления поврежденности, теории трещин, микрополярной упругости, связанной гиперболической термоупругости и термомеханике, общим математическим вопросам механики сплошных сред, механике сыпучих и гранулированных сред.

Ключевые слова: механика деформируемого твердого тела, пластичность, разрушение, микрополярный континуум, термомеханика, растущие тела, Ю. Н. Радаев.

Получение: 24 января 2022 г. / Исправление: 17 апреля 2022 г. /

Принятие: 17 апреля 2022 г. / Публикация онлайн: 18 апреля 2022 г.

Personalia

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Быков Д. Е., Ненашев М. В., Радченко В. П. К 60-летию со дня рождения проф. Юрия Николаевича Радаева // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 207–221. EDN: JHSQBO. DOI: 10.14498/vsgtu1905.

Сведения об авторах

Дмитрий Евгеньевич Быков  <https://orcid.org/0000-0002-4230-2926>

доктор технических наук, профессор; ректор; e-mail: rector@samgtu.ru

Максим Владимирович Ненашев  <https://orcid.org/0000-0003-3918-5340>

доктор технических наук, профессор; первый проректор – проректор по научной работе; e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Владимир Павлович Радченко  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Юрий Николаевич Радаев родился 10 февраля 1962 г. в г. Куйбышев (сейчас г. Самара). В 1979 г. окончил с золотой медалью среднюю политехническую школу. В этом же году он поступает в Куйбышевский государственный университет (КуГУ), который в 1984 г. оканчивает с отличием, получив квалификацию «механик». Его научным руководителем в эти годы был проф. **Г. И. Быковцев** — создатель и заведующий кафедрой механики деформируемого твердого тела КуГУ, один из самых перспективных отечественных ученых в области механики твердого тела и жидкости и газа. Заложенные в этой научной школе строгие подходы к постановке краевых задач и методам их решения на основе фундаментальных законов механики сплошных сред являлись «визитной карточкой» во всех научных исследованиях Ю. Н. Радаева. После обучения в Куйбышевском университете Юрий Николаевич был призван в армию и проходил срочную воинскую службу в рядах ВВС СССР в течение двух лет, после окончания которой он поступил в аспирантуру Института проблем механики Академии наук СССР (ИПМ АН СССР). В 1989 г. в совете при ИПМ АН СССР он успешно защитил кандидатскую диссертационную работу на тему «Упругопластическое кручение призматических стержней» по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, выполнявшуюся под руководством **Н. Х. Арутюняна**. Оппонентами по диссертации выступили **В. О. Геогджаев** и **Р. Л. Салганик**.

После защиты кандидатской диссертации Ю. Н. Радаев в 1989 г. возвращается в Куйбышевский (затем — Самарский) государственный университет, где проходит путь от ассистента кафедры механики деформируемого твердого тела (1989–1991 гг.) до профессора, заведующего кафедрой механики сплошных сред (2002–2010 гг.). В 1996 г. Ю. Н. Радаеву присвоено ученое звание доцента, а в 2005 г. — ученое звание профессора.

За время преподавательской деятельности Юрий Николаевич подготовил и прочитал студентам механико-математического факультета Самарского университета ряд дисциплин: «Математическая теория пластичности», «Механика разрушения», «Динамические задачи теории упругости», «Реологические модели сплошных сред», «Математическая физика и ее приложения», «Двумерные задачи теории упругости», «Вязкоупругие и наследственные среды». На основе этих курсов и научных исследований впоследствии был издан ряд пособий и научных монографий [1–7 и др].

В 2000 г. Ю. Н. Радаев успешно защитил докторскую диссертационную работу на тему «Континуальные модели поврежденности твердых тел» по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела в диссертационном совете при Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН). Оппонентами выступили **Б. Д. Аннин**, **Е. М. Морозов**, **В. Н. Кукуджанов**.

С 2010 г. и по настоящее время Ю. Н. Радаев работает в должности ведущего научного сотрудника лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела ИПМех РАН.

Спектр научных интересов Юрия Николаевича достаточно широк — им опубликовано более 400 научных работ, включая 9 монографий, по различным проблемам механики деформируемого твердого тела и фундаментальным проблемам механики сплошных сред в отечественных и зарубежных научных журналах. Как постоянный участник различных международных

конференций и других мероприятий Ю. Н. Радаев всегда в курсе наиболее острых проблем, стоящих перед механикой деформируемого твердого тела. Так, в 1993–1995 гг. он проходил двухгодичную научную стажировку под руководством проф. [Sumio Murakami](#) в университете Нагоя, Япония (Dept. of Mechanical Engineering, Nagoya University, Nagoya, Japan); в 1999–2000 гг. проводил научно-исследовательскую работу под руководством проф. [Gérard A. Maugin](#) в университете Пьера и Марии Кюри, Франция (Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Pierre Marie Curie, Paris, France); в 2017–2018 гг. читал курсы по механике разрушения и механике поврежденности в Университете Киото, Япония (Dept. of Energy Conversion Science, Graduate School of Energy Science, Kyoto University, Japan).

В 2004–2007 гг. под руководством Ю. Н. Радаева был выполнен перевод трехтомника «Основания математики» А. Уайтхеда и Б. Рассела [8].

Начиная с ранних работ в области упругопластического кручения призматических стержней [9, 10], Ю. Н. Радаев во многих своих работах (см., например, [5, 11–30 и др.]) систематически развивал теорию пластичности в двух- и трехмерных постановках, в которых отражены фундаментальные результаты в этой области; им решен ряд новых краевых задач; рассмотрены вопросы формирования собственных напряжений, оценки скрытой свободной энергии и поврежденности у вершины трещины нормального отрыва; с использованием групп симметрий и алгебры симметрий исследованы трехмерные уравнения математической теории пластичности; решены и другие задачи, требующие использования тонкого математического аппарата. В работах [31–37] рассмотрены фундаментальные проблемы динамически нарастающих деформируемых тел, современная проблематика механики континуального разрушения отражена в многочисленных публикациях (см., например, [4, 38–44]). Большая систематическая научная работа проведена в цикле публикаций Ю. Н. Радаева, в том числе в соавторстве с [В. А. Ковалевым](#), [6, 7, 45–71 и др.] в области создания физических основ и математического аппарата современной волновой термомеханики сплошных сред. В этих публикациях указывается, что выбор теории поля в качестве единственного источника вывода соотношений волновой термомеханики диктуется тем обстоятельством, что большинство разделов физики и механики к настоящему времени уже приведены в соответствие с принципами теории поля и в значительной степени опираются на ее формализм, в рамках которого развиваются принципы теории поля в 4-мерном искривленном пространстве-времени, Лагранжев полевого формализм, связанный с принципом наименьшего действия и возможностью вариационного описания поля с помощью указанного принципа. Рассматриваемая теория поля применяется в качестве альтернативного подхода к математическому моделированию процесса теплопроводности в твердых телах с помощью дифференциальных уравнений гиперболического аналитического типа, обеспечивающих конечную скорость транспорта тепла и возможность распространения незатухающих тепловых волн «второго звука» в твердых телах. Методами волновой термоупругости изучены особенности распространения гармонических термоупругих волн произвольного азимутального порядка вдоль длинного цилиндрического волновода, боковая поверхность которого непроницаема для тепла. Исследование реализовано в трех термодинамически корректных вариантах: GNI/СТЕ, GNII,

GNIII. Значительное внимание в этих работах уделено вычислительному аспекту и особенно тепловым волнам со вторыми, третьими и более высокими азимутальными числами.

Обычно мы «знакомы» с учеными по их публикациям в научных журналах, изданным монографиям, учебным пособиям. Однако нам мало что известно об их жизненном пути, полученном образовании, формировании научного мировоззрения, общественной педагогической деятельности, достигнутых творческих успехах. В этом плане заслуживает внимания ряд публикаций Ю. Н. Радаева с соавторами о выдающихся ученых современности [72–81 и др.].

Научная деятельность юбиляра многогранна. В разные годы Ю. Н. Радаев выступал руководителем научных грантов РФФИ, а также руководил в 2010 г. программой ФЦП «Математическая физика и ее приложения». За годы работы в ИПМех РАН Ю. Н. Радаев осуществлял руководство следующими научными проектами РФФИ: «Моделирование термомеханических процессов в сложных средах с помощью принципа термомеханической ортогональности», «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой», «Волновые задачи связанной гиперболической термоупругости»; участвовал в крупных научных проектах «Моделирование процессов производства тканых 3D-материалов» и «Механические аспекты дизайна и анализа изделий аддитивного производства: теория и эксперимент».

Ю. Н. Радаев принимает активное участие в подготовке кадров высшей квалификации. Он является ключевым организатором серии Всероссийских конференций по механике деформируемого твердого тела. В разные годы совместно с А. В. Манжировым и Е. В. Мурашкиным было проведено более десяти конференций.

Юрий Николаевич — член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике; член Научного совета РАН по механике деформируемого твердого тела; член нескольких диссертационных советов; эксперт РАН; эксперт по крупным научным проектам Министерства высшего образования и науки РФ; член редакционных советов и редакционных коллегий научных журналов: «Известия Российской академии наук. Механика твердого тела», «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика», «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки», «Проблемы прочности и пластичности»; ответственный редактор научного журнала «Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния»; со-руководитель регулярного научного семинара ИПМех РАН им. Л. А. Галина.

У Юрия Николаевича Радаева сложились тесные научные связи с Самарским государственным техническим университетом (СамГТУ). В 2014–2016 гг. он руководил крупным научным проектом, реализованным в СамГТУ, является активным членом диссертационного совета по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ при СамГТУ, членом редколлегии журнала «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки» (входит в Web of Sciences, Scopus и RSCI) и членом оргкомитетов ряда международных и всероссийских конференций по механике, математическом моделировании, урав-

нениям математической физики, прикладной математике, проводившихся в разное время на базе СамГТУ.

Ректорат Самарского государственного технического университета, редакционная коллегия журнала «Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки» поздравляют Юрия Николаевича с 60-летием и желают ему выдающихся достижений в науке, талантливых учеников и успехов в его многогранной деятельности.

Библиографический список

1. Радаев Ю. Н. *Задачи и теоремы по курсу «Математическая теория пластичности»*. Самара: Самар. гос. ун-т, 1996. 80 с.
2. Радаев Ю. Н. *Теория конечных деформаций сплошных сред*. Самара: Самар. гос. ун-т, 1997. 103 с.
3. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. *Прикладные задачи механики разрушения*. Самара: Самар. гос. ун-т, 1999. 195 с.
4. Астафьев В. И., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В. *Нелинейная механика разрушения*. Самара: Самар. гос. ун-т, 2001. 632 с. EDN: [RVXEBX](#).
5. Радаев Ю. Н. *Пространственная задача математической теории пластичности*. Самара: Самар. гос. ун-т, 2006. 340 с. EDN: [QJSBCN](#).
6. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты*. М.: Физматлит, 2009. 156 с. EDN: [MWDGDN](#).
7. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Саратов. ун-т, 2010. 328 с. EDN: [QJXSPX](#).
8. Яровой Г. П., Радаев Ю. Н. О новом прочтении «Оснований математики» А. Уайтхеда и Б. Рассела // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2004. № 4(34). С. 5–19.
9. Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Упругопластическое кручение призматических стержней // *Докл. АН СССР*, 1987. Т. 297, № 3. С. 563–566; Arutyunyan N. Kh., Radayev Yu. N. Elastoplastic torsional loading of prismatic rods // *Sov. Phys., Dokl.*, 1987. vol. 32, no. 11. pp. 935–937.
10. Арутюнян Н. Х., Радаев Ю. Н. Упругопластическое кручение цилиндрического стержня при конечных деформациях // *ПММ*, 1989. Т. 53, № 6. С. 1014–1022.
11. Радаев Ю. Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // *Изв. РАН. МТТ*, 2000. № 5. С. 27–45.
12. Радаев Ю. Н. Об оценке скрытой свободной энергии и поврежденности у вершины трещины нормального отрыва // *ПМТФ*, 2000. Т. 41, № 6. С. 106–117. EDN: [ONTINH](#).
13. Радаев Ю. Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2001. № 2(20). С. 55–86.
14. Радаев Ю. Н., Бахарева Ю. Н., Рябова Ю. Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2003. № 2(28). С. 96–112.
15. Радаев Ю. Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности // *Изв. РАН. МТТ*, 2003. № 5. С. 102–120.
16. Радаев Ю. Н. Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2004. № 2(32). С. 41–61.
17. Радаев Ю. Н. Об одном принципе классификации уравнений осесимметричной задачи теории пластичности // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2005. № 3(37). С. 43–56.
18. Радаев Ю. Н., Курнышева Н. А. О гиперболичности связанных уравнений математической теории пластичности // *Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер.*, 2005. № 6(40). С. 89–112. EDN: [HSRPVV](#).

19. Радаев Ю. Н. Группы симметрий дифференциальных уравнений плоской задачи математической теории пластичности // *Вестн. Самар. гос. ун-в. Естественнонаучн. сер.*, 2006. № 4(44). С. 66–84. EDN: **HSSWKT**.
20. Радаев Ю. Н. Точный анализ распределения напряжений у вершины трещины нормального отрыва в условиях пластического плоского напряженного состояния // *Вестн. Самар. гос. ун-в. Естественнонаучн. сер.*, 2007. № 4(54). С. 336–365. EDN: **HZZZQV**.
21. Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности (кинематические соотношения, определяющие течение на грани и ребре призмы Кулона–Треска) // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2008. Т. 8, № 2. С. 34–76. EDN: **JVRXRH**. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-2-34-76>.
22. Радаев Ю. Н. О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке // *Изв. РАН. МТТ*, 2008. № 5. С. 79–89. EDN: **JSHRXZ**.
23. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Трехмерные определяющие соотношения теории идеальной пластичности и течение на ребре призмы Кулона–Треска // *Изв. РАН. МТТ*, 2010. № 2. С. 171–188. EDN: **LBDDBF**.
24. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Оптимальные системы одномерных подалгебр алгебры симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 196–220. EDN: **NUPPWT**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu860>.
25. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Алгоритм построения оптимальных систем одномерных подалгебр трехмерных уравнений математической теории пластичности // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2011. Т. 11, № 2. С. 61–77. EDN: **GWXKMB**. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-61-77>.
26. Радаев Ю. Н. Траектории нарушений сплошности в идеально пластических телах // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 4. С. 85–103. EDN: **NXQHCHN**.
27. Радаев Ю. Н. О достижимой нижней границе трехмерного инварианта Кулона–Треска // *Изв. РАН. МТТ*, 2012. № 6. С. 87–94. EDN: **PJBYOL**.
28. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On plastic flow of solids for stress states corresponding to an edge of the Coulomb-Tresca prism // *Mat. Phys. Mech.*, 2016. vol. 28, no. 1/2. pp. 57–61. EDN: **XCQJYP**.
29. Радаев Ю. Н. К теории неплотно связанных сред Кулона–Мора и обобщенных пластических тел Прандтля // *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-в. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2018. № 4(38). С. 3–24. EDN: **YZAXVZ**.
30. Радаев Ю. Н. Об одной гиперболической модели плоских необратимо сжимаемых течений сред Кулона–Мора и пластических тел Прандтля // *Вестн. Чуваш. гос. пед. ун-в. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2019. № 4(42). С. 6–68. EDN: **GKZRNI**.
31. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 1. Кинематика и меры деформации растущего тела // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1990. № 6. С. 85–98.
32. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Математическая модель динамически наращиваемого деформируемого тела. Ч. 2. Эволюционная граничная задача теории растущих тел // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1991. № 1. С. 72–86.
33. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 1. Движение потока осаждаемых частиц с переменной скоростью // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1992. № 5. С. 6–24.
34. Арутюнян Н. Х., Наумов В. Э., Радаев Ю. Н. Динамическое наращивание упругого слоя. Ч. 2. Случай падения приращиваемых частиц с постоянной скоростью // *Изв. АН СССР. МТТ*, 1992. № 6. С. 99–112.
35. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 2019. № 6. С. 38–46. EDN: **NUJRKS**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919060102>.

36. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Об одном классе определяющих уравнений на растущей поверхности // *Вестн. Чуваш. гос. пед. унив. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2019. № 3(41). С. 11–29. EDN: KAXTAY. DOI: <https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.40.2.012>.
37. Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019. vol. 23, no. 4. pp. 646–656. EDN: LEWIBV. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.
38. Radaev Yu. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical description of anisotropic damage state in continuum damage mechanics // *Trans. Japan Soc. Mech. Engrn., Ser. A*, 1994. vol. 60, no. 580. pp. 2750–2758 (In Japanese). DOI: <https://doi.org/10.1299/kikaia.60.2750>.
39. Radaev Yu. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part I. Canonical dynamic state variables of continuum damage mechanics and thermodynamical functions of three-dimensional anisotropic damage state // *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 1996. vol. 21, no. 2. pp. 129–152. DOI: <https://doi.org/10.1515/jnet.1996.21.2.129>.
40. Radaev Yu. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part II. Canonical damage growth rate equations and theory of damage invariants // *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 1996. vol. 21, no. 3. pp. 197–222. DOI: <https://doi.org/10.1515/jnet.1996.21.3.197>.
41. Мураками С., Радаев Ю. Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // *Изв. РАН. МТТ*, 1996. № 4. С. 93–110.
42. Radaev Yu. N., Stepanova L. V. On the effect of the residual stresses on the crack opening displacement in a cracked sheet // *Int. J. Fract.*, 2001. vol. 107, no. 4. pp. 329–360. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007686929863>.
43. Radaev Y. N. On directional average of the local anisotropic damage // *Int. J. Fract.*, 2004. vol. 128. pp. 293–307. EDN: LIMFGH. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000040993.88107.c5>.
44. Kovalev V. A., Radaev Y. N. A strain-damage coupled model and its application to near crack tip localization analysis // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2009. vol. 181, 012068. EDN: MXCLSD. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/181/1/012068>.
45. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Волновые числа плоских ГНИИ-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Информатика*, 2010. Т. 10, № 3. С. 46–53. EDN: NYFFLV. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-3-46-53>.
46. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Ревинский Р. А. Прохождение термоупругого гармонического сигнала через волновод с теплопроницаемой стенкой // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 221–227. EDN: NUPPXD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu851>.
47. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Вывод тензоров энергии-импульса в теориях микрополярной гиперболической термоупругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2011. № 5. С. 58–77. EDN: OJMYDH.
48. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Формы нулевых лагранжианов в полевых теориях механики континуума // *Изв. РАН. МТТ*, 2012. № 1. С. 169–192. EDN: OWNVGF.
49. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Термомеханическая ортогональность в нелинейной термоупругости третьего типа (ГНИИ) // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Информатика*, 2012. Т. 12, № 3. С. 72–82. EDN: STJIRN. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-3-72-82>.
50. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанная термомеханическая ортогональность в нелинейных моделях термоупругости третьего типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 207–214. EDN: QCJAKR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1167>.
51. Радаев Ю. Н. Асимптотические оси тензоров напряжений и приращения деформации в механике сжимаемых континуумов // *Изв. РАН. МТТ*, 2013. № 5. С. 77–85. EDN: RFKVGF.

52. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об оценке азимутальных чисел, ассоциированных с элементарными волновыми функциями эллиптического цилиндра // *Изв. РАН. МТТ*, 2014. № 3. С. 23–43. EDN: SJUNVX.
53. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Об одной форме первой вариации интегрального функционала действия по растущей области // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2014. Т. 14, № 2. С. 199–209. EDN: SHHIFJ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>.
54. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О нелинейных тензорах и векторах экстрадеформации в теории и механике континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1(34). С. 66–85. EDN: TFGEQJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1310>.
55. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua // *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015. vol. 15, no. 1. pp. 79–89. EDN: TMMCMH. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89>.
56. Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Гиперболические теории и задачи механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 1. С. 186–202. EDN: TYFXSZ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1412>.
57. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Модели микрополярных термоупругих континуумов со связанными параметрами микроструктуры // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2015. Т. 15, № 4. С. 451–461. EDN: VIZDSJ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-451-461>.
58. Ковалев В. А., Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Экстрадеформации микроструктурного континуума с одним свободным директором // *Вестн. Чуваш. гос. пед. унив. им. И. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2015. № 3(25). С. 61–65. EDN: VNXOEJ.
59. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Рационально алгебраически полные системы тензоров конечных деформаций сложных континуумов // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2017. Т. 17, № 1. С. 71–84. EDN: YNBVCF. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84>.
60. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
61. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled multi-physics modelling in continuum mechanics // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol. 468, 012043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012043>.
62. Murashkin E. V., Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Microrotation waves propagating in a cylindrical waveguide // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018. vol. 468, 012030. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012030>.
63. Radayev Yu. N. Asymmetric tensor representations in micropolar continuum mechanics theories // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019. vol. 23, no. 2. pp. 246–255. EDN: SQBZGH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1669>.
64. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. О волновых решениях динамических уравнений гемитропной микрополярной термоупругости // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2019. Т. 19, № 4. С. 454–463. EDN: EVFCSA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463>.
65. Радаев Ю. Н. О факторизации основного гиперболического дифференциального оператора микрополярной теории упругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2020. № 6. С. 24–32. EDN: BQYHQJ. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329920060136>.
66. Радаев Ю. Н. Кинематические соотношения вдоль характеристик в сжимаемых течениях на гранях произвольного кусочно-линейного условия пластичности // *Изв. РАН. МТТ*, 2020. № 5. С. 161–164. EDN: FPMPY. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329920040169>.

67. Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
68. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Проблемы прочности и пластичности*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
69. Радаев Ю. Н. Представление перемещений в пространственной гармонической задаче теории упругости с помощью двух винтовых векторов // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 2. С. 148–156. EDN: CNXSGO. DOI: <https://doi.org/10.31857/S057232992102015X>.
70. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона–Кэли // *Изв. РАН. МТТ*, 2021. № 6. С. 130–138. EDN: VGJNSG. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329921060106>.
71. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
72. Манжиров А. В., Радаев Ю. Н. К 90-летию Н. Х. Арутюняна // *Вестн. Самар. гос. унив. Естественнонаучн. сер.*, 2002. № 4(26). С. 39–58.
73. Кабытов П. С., Радаев Ю. Н. К 60-летию Г. П. Ярового // *Вестн. Самар. гос. унив. Естественнонаучн. сер.*, 2003. № 4(30). С. 5–20.
74. Радаев Ю. Н. К 75-летию Д. Д. Ивлева // *Вестн. Самар. гос. унив. Естественнонаучн. сер.*, 2005. № 5(39). С. 5–32. EDN: HRNEXP.
75. Яровой Г. П., Панов А. Н., Радаев Ю. Н. Профессор Валентин Евгеньевич Воскресенский (к восьмидесятилетию со дня рождения) // *Вестн. Самар. гос. унив. Естественнонаучн. сер.*, 2007. № 2(52). С. 5–18.
76. Яровой Г. П., Радаев Ю. Н. К 70-летию Г. И. Быковцева // *Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия*, 2007. № 9/1(59). С. 9–30.
77. Яровой Г. П., Кабытов П. С., Радаев Ю. Н. Памяти профессора Игоря Степановича Загузова // *Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия*, 2008. № 3(62). С. 5–26.
78. Ивлев Д. Д., Радаев Ю. Н., Матченко Н. М. К 80-летию Владимира Георгиевича Зубчанинова // *Вестн. Чуваш. гос. пед. унив. им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2011. № 1(9). С. 3–22. EDN: NXVXQN.
79. Коссович Л. Ю., Радаев Ю. Н. Профессор А. О. Ватульян. К 60-летию со дня рождения // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2013. Т. 13, № 3. С. 111–118.
80. Radaev Yu. N., Radchenko V. P. К 60-летию профессора Александра Владимировича Манжирова // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017. Т. 21, № 3. С. 401–416. EDN: YLDELE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1563>.
81. Радаев Ю. Н. Профессор Леонид Юрьевич Коссович (к 70-летию со дня рождения) // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2018. Т. 18, № 4. С. 507–521. EDN: YSUCYP. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-507-521>.

MSC: 01A70

On the 60th anniversary of Professor Yuri N. Radayev

D. E. Bykov, M. V. Nenashev, V. P. Radchenko

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

February 10, 2022 the famous scientist in mechanics of solids and applied mathematics, teacher, organizer of science and higher education in Russia Yuri N. Radayev is celebrating his 60th anniversary. Yuri N. Radayev is known as a prominent scientist in the field of mechanics and applied mathematics. The principal directions of his academic activity are the Mathematical Theory of Plasticity, Fracture Mechanics, the Theory of Cracks and Microdamages, Coupled Hyperbolic Thermoelasticity and Thermomechanics, Micropolar Elasticity, Mechanics of Granular Solids, Mechanics of Growing Solids. In this biographical background we discuss the scientific and educational work of Prof. Yuri N. Radayev, give an information on his achievements and a list of his main publications.

Keywords: mechanics of solids, plasticity, fracture, micropolar continuum, thermomechanics, growing bodies, Yuri N. Radayev.

Received: 24th January, 2022 / Revised: 17th April, 2022 /

Accepted: 17th April, 2022 / First online: 18th April, 2022

Personalia

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Bykov D. E., Nenashev M. V., Radchenko V. P. On the 60th anniversary of Professor Yuri N. Radayev, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 207–221. EDN: [JHSQB0](https://doi.org/10.14498/vsgtu1905). DOI: [10.14498/vsgtu1905](https://doi.org/10.14498/vsgtu1905) (In Russian).

Authors' Details:

Dmitriy E. Bykov  <https://orcid.org/0000-0002-4230-2926>

Dr. Tech. Sci., Professor; Rector; e-mail: rector@samgtu.ru

Maxim V. Nenashev  <https://orcid.org/0000-0003-3918-5340>

Dr. Tech. Sci., Professor; First Vice-Rector — Vice-Rector for Research;
e-mail: nenashev.mv@samgtu.ru

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept.; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

References

1. Radayev Yu. N. *Mathematical Theory of Plasticity. Problems and Theorems*. Samara, Samara State Univ., 1996, 80 pp. (In Russian)
2. Radayev Yu. N. *Theory of Finite Deformations of Solids*. Samara, Samara State Univ., 1997, 103 pp. (In Russian)
3. Astaf'ev V. I., Radayev Yu. N., Stepanova L. V. *Applied Problems of Fracture Mechanics*. Samara, Samara State Univ., 1999, 195 pp. (In Russian)
4. Astaf'ev V. I., Radayev Yu. N., Stepanova L. V. *Nonlinear Fracture Mechanics*. Samara, Samara State Univ., 2001, 632 pp (In Russian). EDN: [RVXEBX](#).
5. Radayev Yu. N. *Spatial Problem of Mathematical Theory of Plasticity*. Samara, Samara State Univ., 2006, 340 pp (In Russian). EDN: [QJSBCN](#).
6. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Elements of Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants*. Moscow, Fizmatlit, 2009, 156 pp (In Russian). EDN: [MWDGDN](#).
7. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. *Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics*. Saratov, Saratov Univ., 2010, 328 pp (In Russian). EDN: [QJXSPX](#).
8. Yarovoy G. P., Radayev Yu. N. On a new reading of the “Principia Mathematica” by A. Whitehead and B. Russell, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2004, no. 4(34), pp. 5–19 (In Russian).
9. Arutyunyan N. Kh., Radayev Yu. N. Elastoplastic torsional loading of prismatic rods, *Sov. Phys., Dokl.*, 1987, vol. 32, no. 11, pp. 935–937.
10. Arutyunyan N. Kh., Radayev Yu. N. Elastoplastic torsion of a cylindrical rod for finite deformations, *J. Appl. Math. Mech.*, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 804–811. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90090-7](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90090-7).
11. Radayev Yu. N. Canonical invariants of coupled plasticity and damage equations, *Mech. Solids*, 2000, vol. 35, no. 5, pp. 21–35.
12. Radayev Yu. N. Estimate of the latent free energy and damage at the tip of an opening-mode crack, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 6, pp. 1054–1063. EDN: [EQZRLT](#).
13. Radayev Yu. N. On the theory of three-dimensional equations of the mathematical theory of plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2001, no. 2(20), pp. 55–86 (In Russian).
14. Radayev Yu. N., Bakhareva Yu. N., Ryabova Yu. N. Self-similar solutions of an axially-symmetric problem of the mathematical theory of plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2003, no. 2(28), pp. 96–112 (In Russian).
15. Radayev Yu. N. To the theory of 3D equations of mathematical plasticity, *Mech. Solids.*, 2003, vol. 38, no. 5, pp. 85–99.
16. Radayev Yu. N. Complementary theorems in the theory of the plane and axisymmetric problems of the mathematical theory of plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2004, no. 2(32), pp. 41–61 (In Russian).
17. Radayev Yu. N. A classifying principle for the equations of axially-symmetric problem of the theory of perfect plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2005, no. 3(37), pp. 43–56 (In Russian).
18. Radayev Yu. N., Kurnysheva N. A. Hyperbolicity of coupled equations in the mathematical theory of plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2005, no. 6(40), pp. 89–112 (In Russian). EDN: [HSRPVV](#).
19. Radayev Yu. N. On symmetry groups of differential equations for a plane problem in the mathematical theory of plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2006, no. 4(44), pp. 66–84 (In Russian). EDN: [HSSWKT](#).
20. Radayev Yu. N. Exact analysis of stress distribution near a mode I crack tip in a perfectly plastic solid under plane stress conditions, *Vestn. Samar. Gos. Univ., Estestvennonauchn. Ser.*, 2007, no. 4(54), pp. 336–365 (In Russian). EDN: [HZZZQV](#).
21. Radayev Yu. N. Three-dimensional problem of perfect plasticity (kinematic equations determining three-dimensional plastic flow for a facet and edge of the Tresca prism), *Izv.*

- Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2008, vol. 8, no. 2, pp. 34–76 (In Russian). EDN: JVRXRH. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-2-34-76>.
22. Radayev Yu. N. On the hyperbolicity of 3D plasticity equations in isostatic coordinates, *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 5, pp. 756–764. EDN: MWRMCJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654408050105>.
23. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Three-dimensional constitutive relations of ideal plasticity and the flow on the Coulomb–Tresca prism edge, *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 295–308. EDN: MXNMJZ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654410020159>.
24. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. An optimal system of one-dimensional subalgebras for the symmetry algebra of three-dimensional equations of the perfect plasticity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, vol. 1(22), pp. 196–220 (In Russian). EDN: NUPPWT. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu860>.
25. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. An optimal system constructing algorithm for symmetry algebra of three-dimensional equations of the perfect plasticity, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2011, vol. 11, no. 2, pp. 61–77 (In Russian). EDN: GWXKMB. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2011-11-2-61-77>.
26. Radayev Yu. N. Continuity violation trajectories in perfectly plastic bodies, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 4, pp. 563–578. EDN: PEGAHR. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411040078>.
27. Radayev Yu. N. On attainable lower boundary of the three-dimensional Coulomb–Tresca invariant, *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 6, pp. 671–676. EDN: RGHQTJ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441206009X>.
28. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On plastic flow of solids for stress states corresponding to an edge of the Coulomb–Tresca prism, *Mat. Phys. Mech.*, 2016, vol. 28, no. 1/2, pp. 57–61. EDN: XCQJYP.
29. Radayev Yu. N. On the theory of the Coulomb–Mohr media and generalized prandtl plastic solids, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2018, no. 4(38), pp. 3–24 (In Russian). EDN: YZAXVZ.
30. Radayev Yu. N. On a hyperbolic model of plane irreversibly compressible flows of Coulomb–Mohr and prandtl perfectly plastic media, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2019, no. 4(42), pp. 6–68 (In Russian). EDN: GKZRNI.
31. Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Mathematical model of a dynamically accreted deformable body. Part 1. Kinematics and measure of deformation of the growing body, *Mech. Solids*, 1990, vol. 25, no. 6, pp. 86–99.
32. Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Mathematical model of a dynamically accreted deformable body. Part 2. Evolution boundary-value problem of the theory of the growing bodies, *Mech. Solids*, 1991, vol. 26, no. 1, pp. 67–80.
33. Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Dynamic build-up of the elastic layer. Part 1. Motion of a flow of deposited particles with a variable velocity, *Mech. Solids*, 1992, vol. 27, no. 5, pp. 6–24.
34. Arutyunyan N. K., Naumov V. E., Radayev Yu. N. Dynamic build-up of the elastic layer. Part 2. The case of the fall of the incrementing particles with a constant velocity, *Mech. Solids*, 1992, vol. 27, no. 6, pp. 99–112.
35. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1157–1164. EDN: RRPFD5. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419080053>.
36. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. On a class of constitutive equations on propagating growing surface, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2019, no. 3(41), pp. 11–29 (In Russian). EDN: KAXTAY. DOI: <https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.40.2.012>.

37. Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a differential constraint in the continuum theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 646–656. EDN: LEWIBV. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1696>.
38. Radaev Yu. N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical description of anisotropic damage state in continuum damage mechanics, *Trans. Japan Soc. Mech. Engr., Ser. A*, 1994, vol. 60, no. 580, pp. 2750–2758 (In Japanese). DOI: <https://doi.org/10.1299/kikaia.60.2750>.
39. Radaev Yu. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part I. Canonical dynamic state variables of continuum damage mechanics and thermodynamical functions of three-dimensional anisotropic damage state, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 1996, vol. 21, no. 2, pp. 129–152. DOI: <https://doi.org/10.1515/jnet.1996.21.2.129>.
40. Radaev Yu. N. Thermodynamical model of anisotropic damage growth. Part II. Canonical damage growth rate equations and theory of damage invariants, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 1996, vol. 21, no. 3, pp. 197–222. DOI: <https://doi.org/10.1515/jnet.1996.21.3.197>.
41. Murakami S., Radaev Yu. N. A mathematical model of a 3D anisotropic damage state, *Mech. Solids*, 1996, vol. 31, no. 4, pp. 77–92.
42. Radaev Yu. N., Stepanova L. V. On the effect of the residual stresses on the crack opening displacement in a cracked sheet, *Int. J. Fract.*, 2001, vol. 107, no. 4, pp. 329–360. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007686929863>.
43. Radaev Y. N. On directional average of the local anisotropic damage, *Int. J. Fract.*, 2004, vol. 128, pp. 293–307. EDN: LIMFGH. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000040993.88107.c5>.
44. Kovalev V. A., Radaev Y. N. A strain-damage coupled model and its application to near crack tip localization analysis, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2009, vol. 181, 012068. EDN: MXCLSD. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/181/1/012068>.
45. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. On wavenumbers of plane harmonic type III thermoelastic waves, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2010, vol. 10, no. 3, pp. 46–53 (In Russian). EDN: NYFFLV. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2010-10-3-46-53>.
46. V. A. Kovalev, Yu. N. Radaev, Revinskiy R. A. Propagation of thermoelastic impulse through a cylindrical waveguide under sidewall heat interchanging, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 1(22), pp. 221–227 (In Russian). EDN: NUPPXD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu851>.
47. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Derivation of energy-momentum tensors in theories of micropolar hyperbolic thermoelasticity, *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 705–720. EDN: PEGXLF. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411050062>.
48. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Forms of null Lagrangians in field theories of continuum mechanics, *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 137–154. EDN: PDMXEH. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441201013X>.
49. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Thermomechanical orthogonality in nonlinear type-III thermoelasticity (GNIII), *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 72–82 (In Russian). EDN: STJJRN. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-3-72-82>.
50. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Coupled thermodynamic orthogonality in non-linear models of type-III thermoelasticity, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 207–214 (In Russian). EDN: QCJAKR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1167>.
51. Radaev Yu. N. Asymptotic axes of stress tensors and strain increment tensors in mechanics of compressible continua, *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 546–552. EDN: SLGQAD. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654413050105>.

52. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Estimates of azimuthal numbers associated with elementary elliptic cylinder wave functions, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 3, pp. 253–269. EDN: UEMRRT. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654414030029>.
53. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On a form of the first variation of the action integral over a varied domain, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 199–209 (In Russian). EDN: SHHIFJ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-2-199-209>.
54. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On nonlinear strain vectors and tensors in continuum theories of mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 1(34), pp. 66–85 (In Russian). EDN: TFGEQJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1310>.
55. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On weak discontinuities and jump equations on wave surfaces in micropolar thermoelastic continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 79–89. EDN: TMMCMH. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-1-79-89>.
56. Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Hyperbolic theories and problems of continuum mechanics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 1, pp. 186–202 (In Russian). EDN: TYFXSZ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1412>.
57. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. Micropolar thermoelastic continuum models with constrained microstructural parameters, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 4, pp. 451–461 (In Russian). EDN: VIZDSJ. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-451-461>.
58. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Extrastains of the microstructural continuum with free director, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2015, no. 3(25), pp. 61–65 (In Russian). EDN: VNXOEJ.
59. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On rationally complete algebraic systems of finite strain tensors of complex continua, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2017, vol. 17, no. 1, pp. 71–84 (In Russian). EDN: YNBYCF. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-1-71-84>.
60. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
61. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Coupled multi-physics modelling in continuum mechanics, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 468, 012043. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012043>.
62. Murashkin E. V., Radayev Yu. N., Kovalev V. A. Microrotation waves propagating in a cylindrical waveguide, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 468, 012030. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012030>.
63. Radayev Yu. N. Asymmetric tensor representations in micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 2, pp. 246–255. EDN: SQBZGH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1669>.
64. Kovalev V. A., Radayev Yu. N. On wave solutions of dynamic equations of hemitropic micropolar thermoelasticity, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 454–463 (In Russian). EDN: EVFCSA. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-4-454-463>.
65. Radayev Y. N. Factorization of the main hyperbolic differential operator of the micropolar elasticity theory, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 776–783. EDN: GKRTZO. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420060126>.
66. Radayev Y. N. Kinematic equations along characteristics in compressible flows on the facets of an arbitrary piecewise linear yield criterion, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 5, pp. 737–740. EDN: XQEBAN. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420300032>.

67. Murashkin E. V., Radaev Y. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
68. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
69. Radayev Yu. N. Representation of displacements in a spatial harmonic problem of the theory of elasticity using two screw vectors, *Mech.Solids*, 2021, vol. 56, no. 2, pp. 263–270. EDN: QMVSZB DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421020114>.
70. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. Generalization of the algebraic Hamilton–Cayley theory, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 996–1003. EDN: KNBMUV. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421060145>.
71. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786 (In Russian). EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
72. Manzhurov A. V., Radayev Yu. N. On the 90th anniversary of N. Kh. Arutyunyan, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2002, no. 4(26), pp. 39–58 (In Russian).
73. Kabytov P. S., Radayev Yu. N. On the 60th anniversary of G. P. Yarovoy, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2003, no. 4(30), pp. 5–20 (In Russian).
74. Radayev Yu. N. On the 75th anniversary of D. D. Ivlev, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2005, no. 5(39), pp. 5–32 (In Russian). EDN: HRNEXP.
75. Yarovoy G. P., Panov A. N., Radayev Yu. N. Professor Valentin Evgen'evich Voskresenskii (on the occasion of his eightieth birthday), *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2007, no. 2(52), pp. 5–18 (In Russian).
76. Yarovoy G. P., Radayev Yu. N. G. I. Bykovtsev – on the seventieth anniversary of his birth, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2007, no. 9/1(59), pp. 9–30 (In Russian).
77. Yarovoy G. P., Kabytov P. S., Radayev Yu. N. In memory of Professor Igor' Stepanovich Zaguzov, *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2008, no. 3(62), pp. 5–26 (In Russian).
78. Ivlev D. D., Radayev Yu. N., Matchenko N. M. On the 80th anniversary of Vladimir Georgievich Zubchaninov, *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Ser. Mechanics of Limit State*, 2011, no. 1(9), pp. 3–22 (In Russian). EDN: NXVXQN.
79. Kossovich L. Yu., Radayev Yu. N. To 60th anniversary of professor A. O. Vatulyan, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 3, pp. 111–118 (In Russian).
80. Radayev Yu. N., Radchenko V. P. To the 60th anniversary of Professor Alexander Vladimirovich Manzhurov, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 3, pp. 401–416 (In Russian). EDN: YLDELE. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1563>.
81. Radayev Yu. N. Professor Leonid Yu. Kossovich (to the 70th anniversary), *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 507–521 (In Russian). EDN: YSUCYP. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2018-18-4-507-521>.



УДК 517.956.4

Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости

*М. Аоуаода¹, А. Аяди¹, Х. Фуджита Яшима²*¹ Университет им. Л. Бен Мхиди,

Алжир, 04000, Оум-эл-Буаги.

² Высшая нормальная школа им. А. Джебар,

Алжир, 25000, Константина, Али Менжели.

Аннотация

Рассматривается уравнение параболического типа (уравнение переноса-диффузии), которое используется, например, в задачах распространения загрязняющих веществ в атмосферном воздухе или водной среде. Имеется несколько классических методов решения этого параболического уравнения, но также хорошо известно и вероятностное представление решения уравнения переноса-диффузии. Поскольку плотность распределения винеровского процесса соответствует ядру уравнения теплопроводности, с использованием ядра теплопроводности и оператора переноса на каждом шаге дискретизации времени можно построить приближенные решения уравнения переноса-диффузии в \mathbb{R}^d . В предыдущих работах была доказана равномерная сходимость этих приближенных решений к функции, удовлетворяющей уравнению переноса-диффузии и начальному условию. Так как эти приближенные решения определяются только интегральным оператором и оператором переноса, доказательство их сходимости проводится без использования вероятностных понятий. В данной работе рассматривается уравнение переноса-диффузии в полуплоскости \mathbb{R}_+^2 с граничным условием на $\{x_2 = 0\}$

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Аоуаода М., Аяди А., Фуджита Яшима Х. Сходимость приближенных решений ядром теплопроводности для уравнения переноса-диффузии в полуплоскости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 222–258. EDN: JNGCBE. DOI: 10.14498/vsgtu1881.

Сведения об авторах

Мерием Аоуаода  <https://orcid.org/0000-0002-8826-374X>аспирант-математик; сотрудник лаборатории; лаб. динамических систем и управления; e-mail: meriyem.aouaouda@gmail.com*Абделхамид Аяди*  <https://orcid.org/0000-0002-5600-7493>профессор; руководитель исследовательской группы; лаб. динамических систем и управления; e-mail: facmaths@yahoo.fr*Хисао Фуджита Яшима*  <https://orcid.org/0000-0001-9937-8406>профессор; руководитель исследовательской группы; лаб. прикладной математики и дидактики; e-mail: hisafujitayashima@yahoo.com; hisafujitayashima@qq.com

и доказывается сходимость приближенных решений, построенных ядром теплопроводности и оператором переноса, к функции, удовлетворяющей уравнению переноса-диффузии в \mathbb{R}_+^2 , начальному и граничному условиям. Для получения этого результата используется метод нечетного продолжения заданных в \mathbb{R}_+^2 функций на \mathbb{R}^2 , поэтому применяются технические приемы предыдущих работ для задач в \mathbb{R}^d . Тем не менее из-за наличия граничного условия остается проблема гладкости приближенных решений, для разрешения которой получаются оценки для производных приближенных решений, на которые влияют особенные данные на $\{x_2 = 0\}$.

Ключевые слова: уравнение переноса-диффузии, приближенное решение, ядро теплопроводности.

Получение: 26 августа 2021 г. / Исправление: 5 мая 2022 г. /

Принятие: 23 мая 2022 г. / Публикация онлайн: 1 июня 2022 г.

Введение. Процесс переноса-диффузии веществ в газе или жидкости можно описать уравнением параболического типа

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad t \geq 0, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

где u — плотность вещества, v — вектор скорости переноса, κ — коэффициент диффузии, $f(t, x, u)$ — источник из-за возможной химической реакции и вклад из-за изменения плотности среды, $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})^\top$, Δ — оператор Лапласа (см., например, [1], гл. VI, [2]). Это уравнение широко используется в приложениях, например, в задачах о загрязнении воздуха и воды (см. [3–9] и многие другие). С теоретической точки зрения хорошо известны некоторые методы решения уравнения этого типа, которые можно найти, например, в [10–12]. Также хорошо известно вероятностное представление решения u (см., например, [13], гл. VIII), а в случае, когда f является нелинейной функцией от u , требуются немного более сложные рассуждения (см. [14–16]). Используя вероятностное представление, языком теории вероятностей можно описать поведение решения u при $\kappa \rightarrow 0$ (см. [17]).

Так как функция

$$\frac{e^{|x|^2/(4\kappa t)}}{(4\pi\kappa t)^{d/2}}$$

является ядром уравнения теплопроводности $\partial_t u - \kappa \Delta u = 0$, мы считаем, что семейство функций $\{u_k(x)\}_{k=0,1,2,\dots}$, определенных соотношением

$$u_k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{\frac{|y|^2}{4\kappa(t_k - t_{k-1})}}}{(4\pi\kappa(t_k - t_{k-1}))^{d/2}} u_{k-1}(x - (t_k - t_{k-1})v(t_k, x) - y) dy + f(t_{k-1}, x, u_{k-1}(x)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

является естественным приближением решения $u(t, x)$ уравнения (1) в \mathbb{R}^d с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$.

Допуская сходимость определенного в (2) приближения к решению $u(t, x)$, можно интерпретировать его как одну из аналитических версий вероятностного представления решения $u(t, x)$. Действительно, ядро интегрального оператора, использованного в (2), соответствует плотности распределения винеровского процесса. Но поскольку $u_k(x)$ определяются только интегрированием и сложением, свойства приближения (2) и их следствия также могут быть получены на языке математического анализа без использования вероятностных понятий.

Приближение (2) имеет аспекты, немного похожие на метод Эйлера—Маруямы для стохастических уравнений (см. [18]). Действительно, согласно этому методу решение X_t стохастического уравнения

$$dX_t = -v(t, X_t)dt + a(t, X_t)dW_t$$

(где $a(t, x)$ — матрица размера $m \times m'$, а W_t — броуновское движение в $\mathbb{R}^{m'}$) приближается семейством случайных величин $\{X_k\}_{k=0,1,2,\dots}$, определяемых соотношением

$$X_k = X_{k-1} - v(t_{k-1}, X_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + a(t_{k-1}, X_{k-1})[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}].$$

Изучена сходимость по математическому ожиданию этого приближения X_k к решению X_t стохастического уравнения [19–21]. Но для построения решения $u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, уравнения (1) с использованием этого приближения требуется много шагов.

В [22, 23] с использованием дискретизации по времени

$$t_k^{[n]} = k2^{-n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

и определением $u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ как в (2) и $u^{[n]}(t, x)$ для $t_{k-1}^{[n]} < t < t_k^{[n]}$ через соотношение

$$u^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{2^n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{2^n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$$

в предположении гладкости данных доказана равномерная сходимость функций $u^{[n]}(t, x)$ и их производных первого и второго порядка по x к решению $u(t, x)$ и его соответствующим производным в $[0, \tau] \times \mathbb{R}^d$ для любого $\tau > 0$.

В настоящей работе уравнение (1) рассматривается в полуплоскости \mathbb{R}_+^2 с однородным граничным условием Дирихле. Предполагается, что функция переноса $v(t, x)$ «параллельна» оси x_1 . С использованием нечетного продолжения (см., например, [24], гл. III, § 3, п. 2) задача на полуплоскости \mathbb{R}_+^2 преобразуется в задачу на целой плоскости \mathbb{R}^2 , поэтому мы широко используем технические приемы, разработанные в [22, 23]. Тем не менее для оценки гладкости приближенных решений наличие граничного условия значительно усложняет задачу. Для разрешения этой проблемы мы применяем приближение, немного отличное от использованного в [22, 23], а для получения оценок также используем некоторые элементарные свойства обобщенных функций (распределений) (см., например, [25]). В результате использования этих подходов мы получили сходимость приближенных решений к функции, которая

удовлетворяет поточечно уравнению, начальному и граничному условиям. Также приводится простой численный эксперимент, показывающий возможность использования полученных результатов для решения конкретных задач математической физики.

Обобщение полученных результатов на случай, когда коэффициент диффузии необязательно постоянен или перенос необязательно «горизонтален», потребует дополнительного исследования.

1. Постановка задачи и основной результат. Основным результатом работы является доказательство сходимости приближенных решений $u^{[n]}(t, x)$, которые мы определим ниже, к функции, удовлетворяющей уравнению

$$\partial_t u(t, x) + v(t, x) \partial_{x_1} u(t, x) = \kappa \Delta u(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \quad (3)$$

и условиям

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(t, x_1, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}, \quad (6)$$

κ — положительная постоянная, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа. Ниже уточним условия на функции $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$.

1.1. Условия на заданные функции. Для уточнения условий будем использовать обозначения

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \quad D_{x,u}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial u^{\alpha_3}},$$

где

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{для } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \dots,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{для } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Заданные функции и их производные будут рассматриваться в $\mathbb{R}_+^2 = \bar{\Omega}$ (см. (6)). Для их производных, как обычно, рассматривается непрерывное продолжение на границе $\partial\Omega = \{x_2 = 0\}$. Через $C_b(\mathbb{R}_+^2)$ (соотв. $C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})$) обозначим класс непрерывных ограниченных в \mathbb{R}_+^2 (соотв. $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$) функций, а через $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2))$ (соотв. $C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}))$) — класс непрерывных в $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2$ (соотв. $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$) функций, которые ограничены в $[0, \tau] \times \mathbb{R}_+^2$ (соотв. $[0, \tau] \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$) при любом $\tau > 0$.

Предположим, что для функций $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$ выполняется следующее:

$$D_x^\alpha v(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \quad |\alpha| \leq 3, \quad (7)$$

$$\partial_t D_x^\alpha v(t, x) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \quad |\alpha| \leq 2, \quad (8)$$

$$\partial_{x_2} v(t, x)|_{x_2=0} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{f(t, x, u)}{1 + |u|} \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})), \quad (10)$$

$$D_{x,u}^\alpha f(t, x, u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, 1 \leq |\alpha| \leq 3, \quad (11)$$

$$\partial_t D_{x,u}^\alpha f(t, x, u) \in C_{b,loc}(\mathbb{R}_+; C_b(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 2,$$

$$f(t, x_1, 0, 0) = 0, \quad (12)$$

$$D_x^\alpha u_0(x) \in C_b(\mathbb{R}_+^2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq 3, \quad (13)$$

$$u_0(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

1.2. Определение приближенных решений. Для определения приближенных решений определим шаги

$$\delta_n = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и соответствующую шагам δ_n дискретизацию по времени:

$$0 = t_0^{[n]} < t_1^{[n]} < \dots < t_{k-1}^{[n]} < t_k^{[n]} < \dots, \quad t_k^{[n]} = k\delta_n.$$

Для каждого $n = 1, 2, \dots$ положим также

$$\vartheta_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\delta_n\kappa}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\delta_n\kappa}\right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

$$\Theta_n(x) = \Theta_n(x_1, x_2) = \vartheta_n(x_1)\vartheta_n(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Через $\Lambda(\cdot)$ обозначим оператор нечетного продолжения заданной на $\{r > 0\}$ функции на \mathbb{R} :

$$\Lambda(\varphi(\cdot))(r) = \begin{cases} \varphi(r), & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -\varphi(-r), & r < 0. \end{cases}$$

Полезно напомнить, что решение $\eta(t, r)$ задачи

$$\partial_t \eta(t, r) = \kappa \partial_r^2 \eta(t, r), \quad t > 0, \quad r > 0;$$

$$\eta(0, r) = \psi(r), \quad r > 0; \quad \eta(t, 0) = 0, \quad t > 0$$

может быть построено как сужение $\eta = \tilde{\eta}|_{\{r \geq 0\}}$ на $\{r \geq 0\}$ решения $\tilde{\eta}(t, r)$ задачи

$$\partial_t \tilde{\eta}(t, r) = \kappa \partial_r^2 \tilde{\eta}(t, r), \quad t > 0, \quad r \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{\eta}(0, r) = \Lambda(\psi(\cdot))(r) = \begin{cases} \psi(r), & r > 0, \\ 0, & r = 0, \\ -\psi(-r), & r < 0 \end{cases}$$

(подробности см., например, в [24, гл. III, § 3, п. 2]).

Пусть $u_0(x)$ — непрерывная ограниченная функция, определенная в Ω . Используя оператор $\Lambda(\cdot)$, определим приближенные решения $u^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, соотношениями

$$u^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & u^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \\
 & = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) \Lambda(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n v(t_k^{[n]}, x) - y_1, \cdot))(x_2 - y_2) dy_1 dy_2 + \\
 & + \delta_n \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \left[\int_{-\infty}^{x_2} \vartheta_n(y_2) f(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2)) dy_2 + \right. \\
 & \left. + \int_{x_2}^{\infty} \vartheta_n(y_2) (-f(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, y_2 - x_2, u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, y_2 - x_2))) dy_2 \right] dy_1, \\
 & x \in \Omega, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$u^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} u^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

Функции $u^{[n]}(t, x)$, определенные соотношениями (16), (17) и (18), назовем приближенными решениями.

1.3. Основной результат. Для определенных в п. 1.2 приближенных решений справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. *Если функции $v(t, x)$, $f(t, x, u)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют условиям (7)–(14), то каково бы ни было $\tau > 0$, определенные в (16)–(18) функции $u^{[n]}(t, x)$ и их первые производные по x_1 и x_2 сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \Omega$, а их вторые производные по x_1 и x_2 сходятся поточечно при всяких (t, x) , $t > 0$, $x \in \Omega$, причем предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3) и условиям (4) и (5).*

В следующих разделах изложено доказательство теоремы, которое, по существу, будет проводиться на продолжении $U^{[n]}(t, x)$ функций $u^{[n]}(t, x)$ на \mathbb{R}^2 . После некоторых замечаний, необходимых для последующих шагов, установим оценки $U^{[n]}(t, x)$ и их производных, а затем, используя эти оценки, докажем сходимость $U^{[n]}(t, x)$ и их производных по x_1 и x_2 первого и второго порядка. Наконец, путем предельного перехода докажем, что предельная функция удовлетворяет уравнению переноса-диффузии.

2. Преобразование задачи и некоторые предварительные замечания. Если положить

$$U_0(x) = (\Lambda(u_0(x_1, \cdot)))(x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (19)$$

$$V(t, x_1, x_2) = V(t, x_1, -x_2) = v(t, x_1, x_2), \quad t \geq 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \geq 0, \quad (20)$$

$$F(t, x_1, x_2, U) = \begin{cases} f(t, x_1, x_2, U), & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 = 0, \\ -f(t, x_1, -x_2, -U), & x_2 < 0, \end{cases} \\
 t \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad U \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

то приближенные решения $u^{[n]}(t, x)$ можно определять другим способом. Для этого определим

$$U^{[n]}(t_0^{[n]}, x) = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) &= \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) - y_1, x_2 - y_2) dy_1 dy_2 + \\
 &+ \delta_n \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad k = 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$U^{[n]}(t, x) = \frac{t_k^{[n]} - t}{\delta_n} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_{k-1}^{[n]}}{\delta_n} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad t_{k-1}^{[n]} \leq t \leq t_k^{[n]}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{24}$$

Напишем первое слагаемое правой части (23) в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy, \quad \vec{e}_1 = (1, 0)^T \tag{25}$$

тогда, когда это удобно.

Напомним, что из условия (9) и определения (20) следует, что $V(t, x)$, $\partial_{x_2} V(t, x)$ и $\partial_{x_2}^2 V(t, x)$ непрерывны в точках $\{x_2 = 0\}$.

Сужение $U^{[n]}(t, x)$ на Ω совпадает с определенным в (16)–(18) приближенным решением $u^{[n]}(t, x)$. Чтобы убедиться в этом совпадении, вспомним следующее соотношение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Предположим, что $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ непрерывна и ограничена в \mathbb{R}^2 и нечетна по x_2 . Тогда $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$, определенная в (23), также непрерывна и ограничена в \mathbb{R}^2 и нечетна по x_2 .*

Доказательство. Заметим, что согласно (21), если $x_2 < 0$, то имеем

$$F(t, x_1, x_2, U) = -F(t, x_1, -x_2, -U).$$

Итак, учитывая нечетность $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$, имеем

$$F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2)) = -F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, -x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, -x_2)).$$

Значит, функция $F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2))$ нечетна по x_2 . Таким образом, учитывая соотношение $\vartheta_n(y_2) = \vartheta_n(-y_2)$, имеем

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) F(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, x_2 - y_2)) dy_1 dy_2 = \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) F(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, -x_2 - y_2, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - y_1, -x_2 - y_2)) dy_1 dy_2.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Напомним также, что согласно нашей гипотезе функция $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ непрерывна по x и нечетна по x_2 , поэтому $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0) = 0$. Таким образом, в силу (21) и (12) получим

$$F(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0)) = 0 = f(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, 0)). \tag{27}$$

Учитывая также (10), видим, что функция $F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ непрерывна по $x \in \mathbb{R}_+^2$, а в силу симметрии между x_2 и $-x_2$ она непрерывна в \mathbb{R}^2 . Согласно условию (10), определению (21) и гипотезе ограниченности $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$, функция $F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ ограничена.

С другой стороны, поскольку $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2)$ нечетна по x_2 , учитывая опять соотношение $\vartheta_n(y_2) = \vartheta_n(-y_2)$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x_1, x_2) - y_1, x_2 - y_2) dy_1 dy_2 = \\ & = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_n(y_1) \vartheta_n(y_2) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1 - \delta_n V(t_k^{[n]}, x_1, -x_2) - y_1, -x_2 - y_2) dy_1 dy_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Что касается ограниченности и непрерывности, из предположения об ограниченности и непрерывности $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)$ и $v(t, x)$ (и, следовательно, $V(t, x)$) выводим, что выражение

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy$$

ограничено и непрерывно по $x \in \mathbb{R}^2$.

Оба слагаемых правой части (23) непрерывны и ограничены в \mathbb{R}^2 и нечетны по x_2 (см (26), (28)), так же как и их сумма, что и требовалось доказать. \square

Напомним, что функция $F(t, x, U)$, определенная в (21), необязательно непрерывна в точках $(x_1, 0)$. Поэтому, чтобы доказать непрерывность функции $F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$, нам нужно равенство (27).

Утверждение замечания 1 и рассуждения, используемые при его доказательстве, позволяют сформулировать

ЗАМЕЧАНИЕ 2. *Функции $U^{[n]}(t, x)$, определенные в (22)–(24), непрерывны и ограничены в \mathbb{R}^2 и нечетны по x_2 :*

$$U^{[n]}(t, x_1, x_2) = -U^{[n]}(t, x_1, -x_2), \quad t \geq 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

в частности

$$U^{[n]}(t, x_1, 0) = 0 \quad \forall (t, x_1) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}. \quad (29)$$

Кроме того, имеет место равенство

$$U^{[n]}(t, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t, x_1, \cdot)))(x_2), \quad t \geq 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (30)$$

где $u^{[n]}(t, x)$ – функция, определенная в (16)–(18).

Доказательство. Напомним, что согласно определениям (19), (22) и условиям (13)–(14) функция $U^{[n]}(t_0^{[n]}, x)$ непрерывна и ограничена в \mathbb{R}^2 и нечетна по x_2 . Поэтому из утверждения замечания 1 следует, что для всех $k \in \mathbb{N}$ функция $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ непрерывна и ограничена в \mathbb{R}^2 и нечетна по x_2 .

Из определения (24) следует также, что при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ функция $U^{[n]}(t, x)$ непрерывна и ограничена в \mathbb{R}^2 и нечетна по x_2 .

Рассуждая как при доказательстве замечания 1, нетрудно увидеть, что если

$$U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x_1, \cdot)))(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

то

$$U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2) = (\Lambda(u^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, \cdot)))(x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Определения (18) и (24) позволяют получить (30). □

Равенство (30) позволяет определить $u^{[n]}(t, x)$ соотношением

$$u^{[n]}(t, x_1, x_2) = U^{[n]}(t, x_1, x_2), \quad t \geq 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 > 0. \quad (31)$$

В дальнейшем докажем сходимость $U^{[n]}(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что из этого факта в силу равенства (31) следует сходимость $u^{[n]}(t, x)$.

3. Ограниченность приближенных решений и их производных.

В этом разделе докажем ограниченность приближенных решений $U^{[n]}(t, x)$ и их производных. Для этого воспользуемся приемом из [22, 23] с учетом того факта, что нам необходимо учитывать поведение производных $U^{[n]}(t, x)$, вызванное специфическими условиями для $U_0(x)$ и $F(t, x, U)$ на $\{x_2 = 0\}$.

Для доказательства следующих лемм введем обозначение

$$\tau_\delta = \tau + \delta_1, \quad \tau > 0. \quad (32)$$

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда существует функция $\Phi_0(t)$, которая является непрерывной на \mathbb{R}_+ , возрастающей независимой от n и такой, что

$$\sup_{x \in \Omega} |U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_0(t). \quad (33)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$A_k^{[0, n]} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leq \frac{\tau_\delta}{\delta_n},$$

$$C_f = \sup_{(t, x, U) \in [0, \tau_\delta] \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}} \frac{|F(t, x, U)|}{1 + |U|}.$$

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} |\Theta_n(y)| dy = 1,$$

имеем

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy \right| \leq A_{k-1}^{[0, n]},$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) dy \right| \leq C_f (1 + A_{k-1}^{[0, n]}).$$

Следовательно, из (23) получим

$$A_k^{[0,n]} \leq (1 + \delta_n C_f) A_{k-1}^{[0,n]} + \delta_n C_f.$$

Отсюда с учетом соотношения $t_k^{[n]} = k\delta_n$ следует

$$A_k^{[0,n]} \leq A_0^{[0,n]} (1 + \delta_n C_f)^k + \delta_n C_f \sum_{j=1}^k (1 + \delta_n C_f)^{k-j} \leq A_0^{[0,n]} e^{t_k^{[n]} C_f} + e^{t_k^{[n]} C_f} - 1 \quad (34)$$

для $t_k^{[n]} \leq \tau_\delta$. Так как $A_0^{[0,n]} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U_0(x)|$ не зависит от n , учитывая определение (24) и произвольность $\tau > 0$, из (34) выведем существование независимой от n функции $\Phi_0(t)$, которая удовлетворяет неравенству (33). \square

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существует функция $\Phi_1(t)$, которая является непрерывной на \mathbb{R}_+ , возрастающей, независимой от n и такой, что

$$\sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t, x) \right| \leq \Phi_1(t). \quad (35)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Положим

$$w_{i,k}^{[1,n]}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leq \frac{\tau_\delta}{\delta_n}. \quad (36)$$

Так как дифференциальный оператор ∂_{x_i} коммутирует со сверткой, вычислив производную по x_i обеих частей (23), получим

$$\begin{aligned} w_{i,k}^{[1,n]}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[w_{i,k-1}^{[1,n]}(\xi(x, y)) - \delta_n \frac{\partial V(t_k^{[n]}, x)}{\partial x_i} w_{1,k-1}^{[1,n]}(\xi(x, y)) \right] dy + \\ &+ \delta_n \int_{\mathbb{R}^d} \Theta_n(y) \left[\frac{\partial F(t_k^{[n]}, \xi, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x))}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi=x-y} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial F(t_k^{[n]}, x-y, U)}{\partial U} \Big|_{U=U^{[n]}(t_k^{[n]}, x-y)} w_{i,k-1}^{[1,n]}(x-y) \right] dy, \quad (37) \end{aligned}$$

где

$$\xi(x, y) = x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y. \quad (38)$$

Из равенства (37) и условий теоремы A следует, что если положим

$$A_k^{[1,n]} = \sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |w_{i,k}^{[1,n]}(x)|,$$

то аналогично доказательству леммы 1 получим

$$A_k^{[1,n]} \leq (1 + \delta_n C) A_{k-1}^{[1,n]} + \delta_n C, \quad (39)$$

где C — независимая от n постоянная. Учитывая, что

$$A_0^{[1,n]} = \sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \Omega} |\partial_{x_i} u_0(x)|$$

не зависит от n , аналогично доказательству леммы 1 из (39) получим существование функции $\Phi_1(t)$, удовлетворяющей неравенству (35). \square

Чтобы оценить производные второго порядка функции $U^{[n]}(t, x)$ по x , напомним, что согласно условиям (13), (14) (см. также (19) и (22)), имеем

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x_1, x_2) = u''_{00}(x_1), \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t_0^{[n]}, x_1, x_2) = -u''_{00}(x_1),$$

где

$$u''_{00}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u_0(x_1, x_2), \quad (40)$$

а вообще $u''_{00}(x_1)$ не равняется нулю, поэтому $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t, x)$ не определяется при $0 \leq t < t_1^{[n]}$, $x_2 = 0$. Но так как $u''_{00}(x_1)$ равномерно ограничен, это не вызывает трудностей для оценки $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t, x)$. Для упрощения записи условимся считать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} U^{[n]}(t, x) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad 0 \leq t < t_1^{[n]} = \delta_n.$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда существует функция $\Phi_2(t)$, которая является непрерывной на \mathbb{R}_+ , возрастающей, независимой от n и такой, что

$$\sum_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_2(t). \quad (41)$$

Доказательство. Пусть $\tau > 0$. Для $\alpha \in \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$ положим

$$w_{\alpha,k}^{[2,n]}(x) = D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leq \frac{\tau\delta}{\delta_n}.$$

Используя введенное в (38) обозначение $\xi(x, y)$, имеем

$$\begin{aligned} D_x^\alpha U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi(x, y)) &= w_{\alpha,k-1}^{[2,n]}(\xi(x, y)) + \\ &+ \sum_{|\beta|=2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'} P_{\beta,m'}(DV) w_{\beta,k-1}^{[2,n]}(\xi(x, y)) - \\ &- \delta_n w_{1,k-1}^{[1,n]}(\xi(x, y)) D^\alpha V(t_k^{[n]}, x), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} D_x^\alpha F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial U} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) w_{\alpha,k-1}^{[2,n]}(x) + R(DF, DU^{[n]}), \end{aligned} \quad (43)$$

где $P_{\beta, m'}(DV)$ — сумма произведений m' производных первого порядка функции V по x_1 или x_2 , а $R(DF, DU^{[n]})$ — сумма производных второго порядка функции F , возможно, умноженных на производные первого порядка функции $U^{[n]}$ (здесь $w_{1, k-1}^{[1, n]}(\cdot)$ — функция, определенная в (36)). В случае $\alpha = (0, 2)$, как правило, производная $D_x^\alpha F$ в (43) не определена в точках $x \in \{x_2 = 0\}$. Но так как $\partial_{x_2} F$ непрерывна, значение производной $\partial_{x_2}^2 F$, которое не определяется на одной линии, не влияет на результат вычисления интеграла на \mathbb{R}^2 , который будем рассматривать для мажорирования $|D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|$.

Положим

$$A_k^{[2, n]} = \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |w_{\alpha, k}^{[2, n]}(x)|.$$

Применяя дифференциальный оператор D^α к обеим частям (23), подставляя выражения (42), (43) под интеграл правой части (23) и принимая во внимание условия теоремы A и результат леммы 2, получим неравенство

$$A_k^{[2, n]} \leq (1 + \delta_n C_1) A_{k-1}^{[2, n]} + \delta_n R_1(t_k^{[n]})$$

с независимой от n постоянной C_1 и возрастающей непрерывной функцией $R_1(t)$. Рассуждая аналогично доказательству лемм 1 и 2, из последнего неравенства обычным способом получим функцию $\Phi_2(t)$, удовлетворяющую (41). \square

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы A. Тогда существуют функция $\Phi_3(t)$ и постоянная \bar{C}_3 , удовлетворяющие следующим условиям:

- i) $\Phi_3(t)$ не зависит от n и является непрерывной на \mathbb{R}_+ и возрастающей;
- ii) \bar{C}_3 не зависит от n ;
- iii) каково бы ни было $\varepsilon_1 > 0$, существует такое число $\bar{n}(\varepsilon_1) \in \mathbb{N}$, что при любом $n \geq \bar{n}(\varepsilon_1)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_3(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} \bar{C}_3, \quad t \geq \varepsilon_1. \quad (44)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При каждом $\varepsilon_1 > 0$ существует убывающая функция $c_{\varepsilon_1}(\varrho)$, $\varrho > 0$, такая, что

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0^+} c_{\varepsilon_1}(\varrho) = +\infty, \quad \lim_{\varrho \rightarrow \infty} c_{\varepsilon_1}(\varrho) = 0;$$

$$\sum_{|\alpha|=3} \sup_{|x_2| \geq \varrho} |D_x^\alpha U^{[n]}(t, x)| \leq \Phi_3(t) + c_{\varepsilon_1}(\varrho), \quad 0 \leq t \leq \varepsilon_1.$$

Доказательство леммы 4. Введем вспомогательные функции $\nu(x)$ и $H_{[n]k}(x)$. Функция $\nu(x) = \nu(x_1, x_2)$ определяется соотношением

$$\nu(x_1, x_2) = \begin{cases} u''_{00}(x_1) \zeta(x_2) \frac{x_2^2}{2}, & x_2 \geq 0, \\ -u''_{00}(x_1) \zeta(-x_2) \frac{x_2^2}{2}, & x_2 \leq 0, \end{cases} \quad (45)$$

где $u''_{00}(x_1)$ — определенное в (40) значение, а $\zeta(x_2)$ — убывающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, такая, что

$$\zeta(x_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x_2 \leq 1, \\ 0, & x_2 \geq 2. \end{cases}$$

Функция $H_{[n]k}(x) = H_{[n]k}(x_1, x_2)$ определяется соотношением

$$H_{[n]k}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(t_k^{[n]}, x_1, r, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, r)), & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 = 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0^-} \frac{\partial^2}{\partial r^2} F(t_k^{[n]}, x_1, r, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, r)), & x_2 < 0. \end{cases} \quad (46)$$

Нетрудно видеть, что свойства, употребленные в доказательстве леммы 3, гарантируют существование пределов, находящихся в правой части (46). Положим также

$$H'_{[n]k}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} H_{[n]k}(x_1, x_2).$$

Здесь производная должна пониматься как обобщенная функция. Как хорошо известно, $H'_{[n]k}(x_1, x_2)$ можно выражать с помощью δ -функции Дирака. Но чтобы избежать неоднозначностей из-за слишком похожих символов, мы используем обозначение $H'_{[n]k}(x_1, x_2)$.

Введем оператор

$$G_n(\varphi)(x) = G_{n,k'}(\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \varphi(x - \delta_n V(t_{k'}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy. \quad (47)$$

Даже если оператор $G_{n,k'}$ зависит от $t_{k'}^{[n]}$, для упрощения записи мы пишем

$$G_n^1(\varphi)(x) = G_n(\varphi)(x) = G_{n,k'}(\varphi)(x), \quad G_n^{k+1}(\varphi)(x) = G_n(G_n^k(\varphi))(x).$$

Действительно, зависимость оператора $G_{n,k'}$ от $t_{k'}^{[n]}$ не влияет на его основные свойства, которые мы будем использовать. Используя оператор G_n , определим

$$\tilde{z}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) = D_x^\alpha (G_n^k \nu)(x)$$

и разложим $D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ на $\tilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)$ и $\tilde{z}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x)$:

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) = \tilde{w}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x) + \tilde{z}_{\alpha,k}^{[3,n]}(x). \quad (48)$$

Сначала рассмотрим вклад производной первого интегрального слагаемого правой части (23). Рассуждая аналогично (42) и принимая во внимание (48), имеем

$$D_x^\alpha U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \xi(x, y)) = \tilde{w}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) + \tilde{z}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{|\beta|=3} \sum_{m'=1}^3 (-\delta_n)^{m'} P_{\alpha,\beta,m'}(DV) (\tilde{w}_{\beta,k-1}^{[3,n]}(\xi(x,y)) + \tilde{z}_{\beta,k-1}^{[3,n]}(\xi(x,y))) + \\
 & + \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'} Q_{\alpha,\beta,m'}(DV) w_{\beta,k-1}^{[|\beta|,n]}(\xi(x,y)). \quad (49)
 \end{aligned}$$

Здесь $\xi(x, y)$ — введенная в (38) функция, $P_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ — сумма произведений m' производных первого порядка функции V по x_1 или x_2 , $Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)$ — сумма произведений m' производных q -го порядка функции V по x_1 или x_2 , $q \leq 3$. Напомним, что поскольку перенос $V(t, x)\vec{e}_1$ идет только в направлении x_1 , вычисление производной сложной функции (от $U^{[n]}$ и V) показывает, что для всех α , $|\alpha| = 3$, и для всех $x \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$P_{\alpha,(0,3),m'}(DV) = 0. \quad (50)$$

Что касается вклада производной второго интегрального слагаемого правой части (23), напомним, что из условия (11) относительно гладкости функции $f(t, x, u)$ и нечетного продолжения с условием (12) с учетом соотношения (29) следует, что $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ непрерывна и в точках $\{x_2 = 0\}$, и, следовательно, даже если $\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ не определена в точках $\{x_2 = 0\}$, мы можем пренебречь этим тогда, когда выполняем интегрирование.

С другой стороны, предельные значения

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} F(t_k^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2))$$

и

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} F(t_k^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2)),$$

как правило, не совпадают. Следовательно, когда выполняем интегрирование функции

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} F(t_k^{[n]}, x_1, x_2, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x_1, x_2)),$$

нужно рассмотреть обобщенную функцию, имеющую ненулевую меру, сосредоточенную на $\{x_2 = 0\}$. Для этого нам удобно отделить часть производной $D_x^\alpha F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x))$ на $\{x_2 = 0\}$ от ее части на $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$. Ясно, что часть на $\{x_2 = 0\}$ должна рассматриваться как обобщенная функция. Итак, рассуждая аналогично (43), имеем

$$\begin{aligned}
 & D_x^\alpha F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) = \\
 & = \left[\frac{\partial}{\partial U} F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) (\tilde{w}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(x) + \tilde{z}_{\alpha,k-1}^{[3,n]}(x)) + \right. \\
 & \quad \left. + R_\alpha(DF, DU^{[n]}) \right]_{\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} + I_{\alpha,k-1}(x),
 \end{aligned}$$

где $R_\alpha(DF, DU^{[n]})$ — сумма произведений производных первого, второго или третьего порядка функции F и производных первого или второго порядка функции $U^{[n]}$, а

$$I_{\alpha,k-1}(x) = \begin{cases} H'_{[n]k-1}(x), & \alpha = (0, 3), \\ 0, & \alpha \neq (0, 3). \end{cases} \quad (51)$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k^{[3,n]}(x) &= (\tilde{w}_{(3,0),k}^{[3,n]}(x), \tilde{w}_{(2,1),k}^{[3,n]}(x), \tilde{w}_{(1,2),k}^{[3,n]}(x), \tilde{w}_{(0,3),k}^{[3,n]}(x)), \\ \tilde{z}_k^{[3,n]}(x) &= (\tilde{z}_{(3,0),k}^{[3,n]}(x), \tilde{z}_{(2,1),k}^{[3,n]}(x), \tilde{z}_{(1,2),k}^{[3,n]}(x), \tilde{z}_{(0,3),k}^{[3,n]}(x)). \end{aligned}$$

Введем оператор

$$(\Pi\tilde{w})_\alpha = -G_n \left(\sum_{|\beta|=3} \sum_{m'=1}^3 (-\delta_n)^{m'-1} P_{\alpha,\beta,m'}(DV)\tilde{w}_\beta \right) + \Theta_n * \left(\frac{\partial F}{\partial U} \tilde{w}_\alpha \right), \quad (52)$$

который действует на $\tilde{w} = (\tilde{w}_{(3,0)}, \tilde{w}_{(2,1)}, \tilde{w}_{(1,2)}, \tilde{w}_{(0,3)})$. Здесь и в дальнейшем $*$ обозначает свертку. Введем также функцию

$$\begin{aligned} (\Psi_k)_\alpha &= -G_n \left(\sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'-1} Q_{\alpha,\beta,m'}(DV)w_{\beta,k}^{[|\beta|,n]} \right) + \\ &+ \Theta_n * [R_\alpha(DF, DU^{[n]})]_{\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Кроме того, запишем соотношение (51) в виде

$$I_k = (0, 0, 0, H'_{[n]k}(\cdot)).$$

Оператор Π также зависит от k . Но так как его зависимость от k не влияет на интересующие нас оценки, для упрощения записи мы пишем его без указания зависимости от k . Наконец, положим

$$D_x^{[3]} = (D_x^{(3,0)}, D_x^{(2,1)}, D_x^{(1,2)}, D_x^{(0,3)}).$$

С этими обозначениями часть на $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2 = 0\}$ производных третьего порядка формулой (23) можно переписать в виде

$$\tilde{w}_k^{[3,n]} = (G_n + \delta_n \Pi)\tilde{w}_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n \Pi \tilde{z}_{k-1}^{[3,n]} + \delta_n \Psi_{k-1} + \delta_n G_{0,n}(I_{k-1}), \quad k \geq 1, \quad (54)$$

где

$$G_{0,n}(I_{k-1}) = \Theta_n * I_{k-1}. \quad (55)$$

Так как $\tilde{w}_0^{[3,n]}$ не зависит от n , положим

$$\tilde{w}_0 = \tilde{w}_0^{[3,n]} = D_x^{[3]}(U_0 - \nu).$$

Тогда, в частности, имеем

$$\tilde{w}_1^{[3,n]} = (G_n + \delta_n \Pi) \tilde{w}_0 + \delta_n \Pi \tilde{z}_0^{[3,n]} + \delta_n \Psi_0 + \delta_n G_{0,n}(I_0),$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2^{[3,n]} = & (G_n + \delta_n \Pi)^2 \tilde{w}_0 + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{2-1-j} \Pi \tilde{z}_j^{[3,n]} + \\ & + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{2-1-j} \Psi_j + \delta_n \sum_{j=0}^{2-1} G_n^{2-1-j} G_{0,n}(I_j) + \\ & + \delta_n^2 \sum_{h=0}^{2-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{2-2-h} G_n^{2-2-h-j} G_{0,n}(I_j). \end{aligned} \quad (56)$$

Кроме того, если $w_k^{[3,n]}$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \tilde{w}_k^{[3,n]} = & (G_n + \delta_n \Pi)^k \tilde{w}_0 + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Pi \tilde{z}_j^{[3,n]} + \\ & + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Psi_j + \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j) + \\ & + \delta_n^2 \sum_{h=0}^{k-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{k-2-h} G_n^{k-2-h-j} G_{0,n}(I_j), \end{aligned} \quad (57)$$

то из (54) следует, что $\tilde{w}_{k+1}^{[3,n]}$ имеет выражение (57), где k заменяется на $k+1$. Таким образом, учитывая (56), выводим, что при $k \geq 2$, $\tilde{w}_k^{[3,n]}$ имеет выражение (57).

Будем оценивать слагаемые правой части (57). Для этого введем обозначение

$$\|\tilde{w}\|_A = \sum_{|\alpha|=3} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\tilde{w}_\alpha(x)|. \quad (58)$$

Теперь рассмотрим фиксированное число $\tau > 0$ и целые числа k , удовлетворяющие условию $0 \leq k \leq \tau_\delta / \delta_n$. Тогда, согласно определению (52) (см. также (7), (11)), существует постоянная C_π такая, что

$$\|\Pi \tilde{w}\|_A \leq C_\pi \|\tilde{w}\|_A \quad (59)$$

для Π , определенного в отрезке $[0, \tau_\delta]$. Аналогично, согласно определению (53) (см. также (7), (9), (11) и лемму 3), существует постоянная C_ψ такая, что

$$\|\Psi_k\|_A \leq C_\psi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leq \frac{\tau_\delta}{\delta_n}. \quad (60)$$

Чтобы оценить слагаемые, относящиеся к I_j и ν , используем лемму 5, которую докажем ниже. Действительно, поскольку, согласно условию (11)

и лемме 5, для функции $H_{[n]k}(x)$, определенной в (46), существует постоянная C_H такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |H_{[n]k}(x)| \leq C_H, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leq \frac{\tau\delta}{\delta_n},$$

в силу леммы 5 имеем

$$\|G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j)\|_A \leq \frac{2}{\sqrt{4\pi\kappa(k-j)\delta_n}} C_H \equiv \frac{1}{\sqrt{(k-j)\delta_n}} C_H. \quad (61)$$

Что касается $\tilde{z}_j^{[3,n]}$, имеющей вид

$$\tilde{z}_j^{[3,n]}(x) = D_x^{[3]} G_n^j \nu(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) D_x^{[3]} [G_n^{j-1} \nu(\xi(x, y))] dy$$

(см. (47), (38)), полезно напомнить равенство

$$\begin{aligned} D_x^\alpha [G_n^{j-1} \nu(\xi(x, y))] &= \tilde{z}_{\alpha, j-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) + \\ &+ \sum_{|\beta|=3} \sum_{m'=1}^3 (-\delta_n)^{m'} P_{\alpha, \beta, m'}(DV) \tilde{z}_{\beta, j-1}^{[3,n]}(\xi(x, y)) + \\ &+ \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sum_{m'=1}^2 (-\delta_n)^{m'} Q_{\alpha, \beta, m'}(DV) D_\xi^\beta G_n^{j-1} \nu(\xi)|_{\xi=\xi(x, y)}, \end{aligned} \quad (62)$$

которое получается аналогично (49).

Напомним также, что, рассуждая аналогично доказательству лемм 2 и 3 (но с $F = 0$), нетрудно проверить, что существует возрастающая функция $\Phi_{\nu,0}(t)$ такая, что

$$\sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\beta G_n^j \nu(x)| \leq \Phi_{\nu,0}(j\delta_n).$$

Для $\alpha = (3, 0), (2, 1), (1, 2)$ положим

$$\|D_x^{[3]} G_n^j \nu\|_{A'} = \sum_{\alpha \in \{(3,0), (2,1), (1,2)\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |D_x^\alpha G_n^j \nu(x)|.$$

Если $\alpha \in \{(3, 0), (2, 1), (1, 2)\}$, то в силу (50) правая часть (62) не зависит от $\partial_{x_2}^3 G_n^{j-1} \nu(\xi(x, y))$, что позволяет вывести из равенства (62) и определения оператора G_n (см. (47)) неравенство

$$\|D_x^{[3]} G_n^j \nu\|_{A'} \leq (1 + C_1 \delta_n) \|D_x^{[3]} G_n^{j-1} \nu\|_{A'} + \delta_n C_1 \Phi_{\nu,0}((j-1)\delta_n),$$

где C_1 — независимая от n постоянная. Из этого неравенства обычным образом выводим, что существует возрастающая функция $\Phi_{\nu,1}(t)$ такая, что

$$\|D_x^{[3]} G_n^j \nu\|_{A'} \leq \Phi_{\nu,1}(j\delta_n). \quad (63)$$

Что касается $\tilde{z}_{(0,3),j}^{[3,n]}(x) = \partial_{x_2}^3 G_n^j \nu(x)$, проверим соотношение

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j(\nu)(x) = I_{\nu,j}(x) + f_{\nu,j}(x) + g_{\nu,j}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (64)$$

где

$$I_{\nu,j} = G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu \Big|_{\{x_2=0\}} \right), \quad f_{\nu,j} = G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu \Big|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} \right),$$

а $g_{\nu,j}$ — такая функция, что существует независимая от n возрастающая функция $\Phi_{\nu,g}(\cdot)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} |g_{\nu,j}(\xi)| \leq \Phi_{\nu,g}(j\delta_n).$$

Действительно, имеем

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^{j-1}(\nu)(\xi(x, y)) = \frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G_n^{j-1}(\nu)(\zeta) \Big|_{\zeta=\xi(x,y)} + \delta_n \tilde{g}_{j-1},$$

где $\xi(x, y) = x - \delta_n V(t_j^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y$, а \tilde{g}_{j-1} является суммой произведений производной первого, второго или третьего порядка функции $G_n^{j-1}(\nu)$ и производных первого, второго или третьего порядка функции $V(t_j^{[n]}, x)$ по x_2 . Итак, имеем

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j(\nu)(x) = G_n \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^{j-1}(\nu) \right)(x) + \delta_n G_n(\tilde{g}_{j-1})(x).$$

Повторяя это рассуждение j раз, мы получим

$$\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} G_n^j(\nu)(x) = G_n^j \left(\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu \right)(x) + \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G_n^{j-j'}(\tilde{g}_{j'})(x).$$

Так как $P_{(0,3),(0,3),m'}(DV) = 0$ (см. (50)), внутри членов $G_n^{j-j'}(\tilde{g}_{j'})(x)$ нет производной $\frac{\partial^3}{\partial \zeta_2^3} G_n^{j'}(\nu)$. Поэтому можно их оценить мажорированиями, которые мы уже проверили. Следовательно, существует независимая от n возрастающая функция $\Phi_{\nu,g}(\cdot)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G_n^{j-j'}(\tilde{g}_{j'})(x) \right| \leq \Phi_{\nu,g}(j\delta_n).$$

Тем самым, если положим

$$g_{\nu,j} = \delta_n \sum_{j'=0}^{j-1} G_n^{j-j'}(\tilde{g}_{j'})(x),$$

то получим (64).

Напомним, что в силу (45) $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu|_{\{x_2=0\}}$ удовлетворяет соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_2) \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu|_{\{x_2=0\}}(x_1, x_2) dx_2 = 2u''_{00}(x_1) \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{R}),$$

т.е. $\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu|_{\{x_2=0\}}(x_1, x_2)$ является δ -функцией Дирака на $-\infty < x_2 < \infty$, умноженной на $2u''_{00}(x_1)$. Итак, согласно лемме 3, имеем

$$|f_{\nu,j}(x)| \leq \bar{C}_f, \quad |I_{\nu,j}(x)| \leq \frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi j \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4j \delta_n \kappa}\right),$$

где

$$\bar{C}_f = \sup_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x_2=0\}} \left| \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \nu(x) \right|, \quad \bar{C}_I = 2 \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} |u''_{00}(x_1)|.$$

Следовательно, имеем

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} (G_n^j \nu)(x) \right| \leq \bar{C}_f + \frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi j \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4j \delta_n \kappa}\right) + \Phi_{\nu,g}(j \delta_n). \quad (65)$$

Положив $\Phi_{\nu}(t) = \Phi_{\nu,1}(t) + \Phi_{\nu,g}(t)$ и напомним $D_x^{[3]} G_n^j \nu = \tilde{z}_j^{[3,n]}$, из соотношений (59)–(61), (63), (65) сделаем вывод, что при $t = k \delta_n$ справедливы неравенства

$$\|(G_n + \delta_n \Pi)^k \tilde{w}_0\|_A \leq (1 + \delta_n C_{\pi})^k \|\tilde{w}_0\|_A \leq e^{t C_{\pi}} \|\tilde{w}_0\|_A,$$

$$\left\| \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Pi \tilde{z}_j^{[3,n]} \right\|_A \leq C_{\pi} \int_0^t e^{(t-s)C_{\pi}} \left(\Phi_{\nu}(s) + \bar{C}_f + \frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi \kappa s}} \right) ds,$$

$$\left\| \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} (G_n + \delta_n \Pi)^{k-1-j} \Psi_j \right\|_A \leq C_{\psi} \int_0^t e^{(t-s)C_{\pi}} ds,$$

$$\left\| \delta_n \sum_{j=0}^{k-1} G_n^{k-1-j} G_{0,n}(I_j) \right\|_A \leq C_{\eta} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds,$$

$$\begin{aligned} \left\| \delta_n^2 \sum_{h=0}^{k-2} (G_n + \delta_n \Pi)^h \Pi \sum_{j=0}^{k-2-h} G_n^{k-2-h-j} G_{0,n}(I_j) \right\|_A &\leq \\ &\leq C_{\pi} \int_0^t e^{s C_{\pi}} \int_0^{t-s} \frac{1}{\sqrt{t-s-r}} dr ds. \end{aligned}$$

Так как правая часть этих неравенств ограничена постоянной, которая зависит от τ_{δ} , но не зависит ни от $t = k \delta_n \in [0, \tau_{\delta}]$, ни от n , из этих неравенств и равенства (57) следует, что существует функция $\tilde{\Phi}_3(\tau)$ такая, что

$$\|\tilde{w}_k^{[3,n]}\|_A \leq \tilde{\Phi}_3(\tau), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad k \leq \frac{\tau_{\delta}}{\delta_n}. \quad (66)$$

Учитывая определения (48) и (58) и переход от $\{t_k^{[n]}\}$ к $t \in [0, \tau]$ (см. (24)), с учетом произвольности $\tau > 0$, из неравенств (63), (65) и (66) мы выводим, что существуют независимая от n возрастающая функция $\Phi_3(t)$ и независимая от n постоянная \bar{C}_3 , которые удовлетворяют соотношению (44). Лемма доказана. \square

Доказательство замечания 3. Уделяя внимание выражению

$$\frac{\bar{C}_I}{\sqrt{4\pi j \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4j \delta_n \kappa}\right),$$

находящемуся в правой части (65), из (63), (65), (66) получаем утверждение замечания. \square

ЛЕММА 5. Пусть G_n — определенный в (47) оператор.

i) Пусть $f(x_1, x_2)$ — измеримая функция, определенная на \mathbb{R}^2 . Пусть $g(x_2)$ — неотрицательная измеримая функция, определенная на \mathbb{R} . Если

$$|f(x_1, x_2)| \leq g(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (67)$$

то имеем

$$|(G_n^k f)(x_1, x_2)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi k \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{4k \delta_n \kappa}\right) g(x_2 - y_2) dy_2. \quad (68)$$

ii) Пусть $\eta(x_1)$ — ограниченная измеримая функция, определенная на \mathbb{R} . Тогда имеем

$$|(G_n^k(\eta(\cdot)\delta(\cdot)))(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi k \delta_n \kappa}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{4k \delta_n \kappa}\right) \sup_{x'_1 \in \mathbb{R}} |\eta(x'_1)|, \quad (69)$$

где $\delta(\cdot)$ — δ -функция Дирака на $-\infty < x_2 < \infty$.

В неравенствах (68), (69) G_n^k можно заменить на $G_n^{k-1}G_{0,n}$, где $G_{0,n}$ — определенный в (55) оператор.

Доказательство. Поскольку перенос $V\vec{e}_1$ действует только в направлении x_1 , из условия (67) следует, что при любом $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ имеем

$$|f(x_1 - \delta_n V(t, x), x_2)| \leq g(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

откуда следует

$$|(G_{n,k'} f)(x_1, x_2)| \leq (\vartheta_n * g)(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

(для ϑ_n см. (15)). Повторив это рассуждение и напомним соотношение свертки между гауссовскими распределениями, получим (68).

Чтобы доказать второе утверждение, достаточно вспомнить, что $(\vartheta_n * \delta(\cdot))(x_2) = \vartheta_n(x_2)$, что позволяет получить непосредственно неравенство (69) при $k = 1$. Тогда, согласно первому утверждению, имеем (69) при любом $k \in \mathbb{N}$. Оператор $G_{0,n}$ есть случай G_n , когда $V = 0$. \square

4. Сходимость приближенных решений. В этом разделе, используя ограниченность функций $U^{[n]}(t, x)$ и их производных первого, второго и третьего порядка по x , доказанную в леммах 1–4, мы докажем сходимость $U^{[n]}(t, x)$ и их производных первого и второго порядка. Для равномерной сходимости $U^{[n]}(t, x)$ и их производных первого порядка будем следовать схеме предложений 5.1 и 6.1 статьи [22], а для поточечной сходимости производных второго порядка будем использовать другое рассуждение. Когда аргументы доказательства аналогичны изложенным в [22] аргументам (даже если определение приближенных решений несколько отличается), для подробности расчета будем ссылаться на [22].

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда, каково бы ни было $\tau > 0$, функции $U^{[n]}(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, определенные в (22)–(24), сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ к предельной функции $U(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства предложения 5.1 из статьи [22]. Пусть $\tau > 0$ и моменты времени $t_k^{[n]}$ таковы, что $0 \leq t_k^{[n]} \leq \tau_\delta$ (для τ_δ см. (32)). Если положим

$$\xi_{k'}^{[n']}(x, y) = x - \delta_{n'} V(t_{k'}^{[n']}, x) \bar{e}_1 - y \quad (70)$$

($k' = k + 1$ или $= 2k + 1$ или $= 2k + 2$ и $n' = n$ или $= n + 1$), то имеем

$$U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) = I_{2k}^{[n+1]} + J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]}, \quad (71)$$

где

$$I_{2k}^{[n+1]} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi^*(y^{(1)}, y^{(2)})) dy^{(1)} dy^{(2)}, \quad (72)$$

$$\xi^*(y^{(1)}, y^{(2)}) = \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \bar{e}_1 - y^{(2)}),$$

$$J_{a,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \times \\ \times (\Theta_{n+1} * F(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot, U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot))) (\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) dy^{(1)}, \quad (73)$$

$$J_{b,2k}^{[n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F(t_{2k+1}^{[n+1]}, x - y^{(1)}, \bar{U}_1 + \bar{U}_2) dy^{(1)}, \quad (74)$$

$$\bar{U}_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \xi_{2k+1}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)})) dy^{(2)},$$

$$\bar{U}_2 = \bar{U}_2(x - y^{(1)}) = \delta_{n+1} (\Theta_{n+1} * F(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot, U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, \cdot))) (x - y^{(1)}).$$

Здесь и далее используем запись со сверткой $*$, если с ней запись выражений становится проще.

Для $I_{2k}^{[n+1]}$, используя соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(z) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, z)) dz = \\ & = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) U^{[n]}(t_k^{[n]}, \xi_{k+1}^{[n]}(x, y^{(1)} + y^{(2)})) dy^{(1)} dy^{(2)} \end{aligned} \quad (75)$$

и неравенство

$$\begin{aligned} & |\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) - y^{(2)} - \xi_{k+1}^{[n]}(x, y^{(1)} + y^{(2)})| \leq \\ & \leq \delta_{n+1}^2 \sup |\partial_t V| + \delta_{n+1} \sup |\nabla V| (\delta_{n+1} \sup |V| + |y^{(1)}|) \end{aligned}$$

(здесь и далее для простоты записи пишем $\sup |\partial_t V|$ и т. д., если из контекста ясно, на каком множестве берется \sup), получим

$$\begin{aligned} & \left| I_{2k}^{[n+1]} - \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) U^{[n]}(t_k^{[n]}, x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) dy \right| \leq \\ & \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| + K_1 \delta_n^{3/2} \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|, \end{aligned} \quad (76)$$

где K_1 — независимая от n постоянная (подробнее см. [22, лемма 5.1]).

С другой стороны, для

$$J_{a,2k}^{[n+1]} + J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_n (\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)))(x),$$

используя предположения о гладкости $V(t, x)$ и $F(t, x, U)$, получим

$$\begin{aligned} & |J_{a,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} (\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)))(x)| \leq \\ & \leq K_2 \delta_{n+1}^2 (1 + \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|) + \\ & + K_2 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} & |J_{b,2k}^{[n+1]} - \delta_{n+1} (\Theta_n * F(t_k^{[n]}, \cdot, U^{[n]}(t_k^{[n]}, \cdot)))(x)| \leq \\ & \leq K_3 (\delta_{n+1}^2 (1 + \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|) + \delta_{n+1}^3) + \\ & + K_3 \delta_{n+1} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \end{aligned} \quad (78)$$

где K_2 и K_3 — независимые от n постоянные (подробнее см. [22, леммы 5.2 и 5.3]).

Оценивая $\sup_{y \in \mathbb{R}^2} |\nabla U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y)|$ в (76)–(78) с помощью леммы 2, из соотношений (71), (76)–(78) выводим, что существует независимая от n постоянная K_4 такая, что

$$\begin{aligned} & |U^{[n+1]}(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x)| \leq \\ & \leq (1 + K_4 \delta_{n+1}) \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, y) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, y)| + K_4 \delta_{n+1}^3. \end{aligned}$$

В частности, при $k = 0$ на основании равенства

$$U^{[n+1]}(t_0^{[n+1]}, y) = U_0(y) = U^{[n]}(t_0^{[n]}, y)$$

имеем

$$|U^{[n+1]}(t_2^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_1^{[n]}, x)| \leq K_4 \delta_{n+1}^{3/2}.$$

Отсюда следует, что при $t = 2k\delta_{n+1}$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t, x) - U^{[n]}(t, x)| \leq \sqrt{\delta_{n+1}} e^{tK_4}. \quad (79)$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} < \infty,$$

из неравенства (79) и определения (24) следует, что при любом $\tau > 0$ последовательность $\{U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ к одной функции, которую обозначим через $U(t, x)$. \square

ЛЕММА 7. Пусть выполнены условия теоремы А. Пусть $U^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные в (22)–(24), $n = 1, 2, \dots$. Тогда, каково бы ни было $\tau > 0$, их производные первого порядка $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t, x)$ ($j = 1, 2$) сходятся равномерно на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ к $\frac{\partial}{\partial x_j} U(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$, где $U(t, x)$ — предельная функция последовательности $\{U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства предложения 6.1 из статьи [22]. Пусть $\tau > 0$. Дифференцируя по x_i обе части (71) (см. также (72)–(74)) и пользуясь обозначениями $w_{i,k}^{[1,n]}(x)$ и $\xi_{k'}^{[n]}(x, y)$, введенными в (36) и (70), имеем

$$w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) = I_{a,2k}^{[1,n+1]} + I_{b,2k}^{[1,n+1]} + J_{a,2k}^{[1,n+1]} + J_{b,2k}^{[1,n+1]}, \quad (80)$$

$$I_{a,2k}^{[1,n+1]} = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) dy^{(1)} dy^{(2)},$$

$$I_{b,2k}^{[1,n+1]} = -\delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \Theta_{n+1}(y^{(2)}) w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) \times \\ \times \left(V'_{i,2k+2}(x) + \sum_{j=1}^2 V'_{j,2k+1}(\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) \partial_{x_i} \xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \right) dy^{(1)} dy^{(2)},$$

$$J_{a,2k}^{[1,n+1]} = \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) \left(\Theta_{n+1} * \sum_{j=1}^2 \left[F'_{j,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) + \right. \right. \\ \left. \left. + F'_{u,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) w_{j,2k}^{[1,n+1]}(\cdot) \right] \partial_{x_i} \xi_{2k+2,j}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) \right) (\xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) dy^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
 J_{b,2k}^{[1,n+1]} &= \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F'_{i,2k+1}(x - y^{(1)}, \bar{U}_1 + \bar{U}_2) dy^{(1)} + \\
 &\quad + \delta_{n+1} \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(1)}) F'_{u,2k+1}(x - y^{(1)}, \bar{U}_1 + \bar{U}_2) \times \\
 &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_{n+1}(y^{(2)}) \sum_{j=1}^2 w_{j,2k}^{[n+1]}(\xi_{2k+1}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)})) \partial_{x_i} \xi_{2k+1,j}^{[n+1]}(x - y^{(1)}, y^{(2)}) dy^{(2)} + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{n+1} \left(\Theta_{n+1} * \left(F'_{i,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) + F'_{u,2k}(\cdot, U_{2k}^{[n+1]}(\cdot)) w_{i,2k}^{[n+1]} \right) \right) (x - y^{(1)}) \right] dy^{(1)},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \xi^* &= \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}) - \delta_{n+1} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)})) \vec{e}_1 - y^{(2)}, \quad U_k^{[n]}(x) = U^{[n]}(t_k^{[n]}, x), \\
 V'_{j,2k+1} &= \partial_{x_j} V(t_{2k+1}^{[n+1]}, x), \quad F'_{i,k} = \partial_{x_i} F(t_k^{[n]}, x, U), \quad F'_{u,k} = \partial_U F(t_k^{[n]}, x, U).
 \end{aligned}$$

С другой стороны, дифференцируя по x_i обе части (23) (см. также (25), (75)), получим

$$w_{i,k+1}^{[1,n]}(x) = I_{a,k}^{[1,n]} + I_{b,k}^{[1,n]} + 2J_k^{[1,n]}, \quad (81)$$

$$\begin{aligned}
 I_{a,k}^{[1,n]} &= (\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * w_{i,k}^{[1,n]})(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1), \\
 I_{b,k}^{[1,n]} &= -2\delta_{n+1} V'_{i,2k+2}(x) (\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * w_{1,k}^{[1,n]})(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1), \\
 J_k^{[1,n]} &= \delta_{n+1} (\Theta_{n+1} * \Theta_{n+1} * \partial_{x_i} F(t_k^{[n]}, \cdot, U_k^{[n]}(\cdot)))(x).
 \end{aligned}$$

Из (80) и (81) следует, что

$$\begin{aligned}
 w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k+1}^{[1,n]}(x) &= \\
 &= I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]} + I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]} + J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]} + J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}. \quad (82)
 \end{aligned}$$

Чтобы оценить $I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}$, отметим, что

$$\begin{aligned}
 \xi^* - (x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y^{(1)} - y^{(2)}) &= \\
 &= \delta_{n+1} (V(t_{2k+2}^{[n+1]}, x) - V(t_{2k+1}^{[n+1]}, \xi_{2k+2}^{[n+1]}(x, y^{(1)}))) \vec{e}_1,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(\xi^*) - w_{i,k}^{[1,n]}(x - \delta_n V(t_{k+1}^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y^{(1)} - y^{(2)})| &\leq \\
 &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + \\
 &\quad + \delta_{n+1} \sup |\nabla w_{i,2k}^{[1,n+1]}| (\delta_{n+1} \sup |\partial_t V| + \sup |\nabla V| (\delta_{n+1} \sup |V| + |y^{(1)}|)).
 \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом леммы 3 имеем

$$|I_{a,2k}^{[1,n+1]} - I_{a,k}^{[1,n]}| \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + C(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}), \quad (83)$$

где C — независимая от n постоянная.

Чтобы оценить $|I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]}|$, $|J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$, $|J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$, напомним, что согласно условиям (7), (8) и (11), производные V и F , находящиеся в их оценке, равномерно ограничены, и, согласно лемме 3, производные второго порядка $U^{[n+1]}(t, x)$ по x также равномерно ограничены. Итак, делая явные вычисления, которые немного длинны, но довольно элементарны, мы можем оценить $|I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]}|$, $|J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$, $|J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}|$. Так как вычисления аналогичны вычислениям, сделанным в доказательстве предложения 6.1 статьи [22] (даже если определение приближенных решений формально отличается, аргументы довольно схожи), отсылаем детали вычисления к [22]. Уделяя внимание наличию фактора δ_n в слагаемых $I_{b,2k}^{[1,n+1]} - I_{b,k}^{[1,n]}$, $J_{a,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}$, $J_{b,2k}^{[1,n+1]} - J_k^{[1,n]}$ и напоминая оценку (83), из (82) получим

$$\begin{aligned} & |w_{i,2k+2}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k+1}^{[1,n]}(x)| \leq \\ & \leq \sup_{y \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(y) - w_{i,k}^{[1,n]}(y)| + C_0(\delta_{n+1}^2 + \delta_{n+1}^{3/2}) + \delta_{n+1}C_0(Y_k + Y_k^{[1]}), \end{aligned} \quad (84)$$

где C_0 — независимая от n постоянная в отрезке $[0, \tau]$, а

$$Y_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |U^{[n+1]}(t_{2k}^{[n+1]}, x) - U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)|, \quad Y_k^{[1]} = \sum_{i=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |w_{i,2k}^{[1,n+1]}(x) - w_{i,k}^{[1,n]}(x)|.$$

Из неравенства (84) выведем обычным образом равномерную сходимость последовательности $\{\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$ ($j = 1, 2$) на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ (подробнее см. [22, предложение 6.1]). Так как $\frac{\partial}{\partial x_j} U^{[n]}(t, x)$ сходятся равномерно, предельная функция совпадает с $\frac{\partial}{\partial x_j} U(t, x)$, где $U(t, x)$ — предельная функция последовательности $\{U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$. \square

ЛЕММА 8. Пусть выполнены условия теоремы А. Пусть $U^{[n]}(t, x)$ — функции, определенные в (22)–(24), $n = 1, 2, \dots$. Тогда их производные второго порядка $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, x)$ ($i, j = 1, 2$) поточечно сходятся на $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ к $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U(t, x)$ при $n \rightarrow \infty$, где $U(t, x)$ — предельная функция последовательности $\{U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Пусть $t > 0$. Рассмотрим число $M > 0$ и замкнутое множество

$$Q_M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \leq M, |x_2| \leq M\}.$$

В силу лемм 3 и 4 функции $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, x)$ равномерно ограничены и равномерно липшицевы в \mathbb{R}^2 (при фиксированном $t > 0$). Следовательно, согласно теореме Асколи—Арцела, существует подпоследовательность

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n_m]}(t, \cdot) \right\}_{m=1}^{\infty},$$

сходящаяся равномерно на Q_M .

Так как согласно лемме 7 последовательность $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} U^{[n]}(t, \cdot) \right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\frac{\partial}{\partial x_i} U(t, \cdot)$, предельная функция сходящейся равномерно на Q_M подпоследовательности $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n_m]}(t, \cdot) \right\}_{m=1}^{\infty}$ равна $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U(t, x)$. Итак, нетрудно убедиться, что не существует подпоследовательности, которая не сходится к функции $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U(t, x)$. Т. е. последовательность $\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, \cdot) \right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U(t, x)$ на Q_M . Следовательно, если построить последовательность $\left\{ Q_{M_q} \right\}_{q=1}^{\infty}$ такую, что

$$Q_{M_q} \subset Q_{M_{q+1}}, \quad \bigcup_{q=1}^{\infty} Q_{M_q} = \mathbb{R}^2,$$

то можно расширить предельную функцию $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U(t, x)$ на \mathbb{R}^2 , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U^{[n]}(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} U(t, x)$$

поточечно на \mathbb{R}^2 . Лемма доказана. \square

5. Предельный переход. Чтобы доказать, что предельная функция $U(t, x)$ последовательности приближенных решений $U^{[n]}(t, x)$ удовлетворяет уравнению переноса-диффузии, сначала напомним следующие свойства приближенных решений $U^{[n]}(t, x)$.

ЛЕММА 9. Пусть выполнены условия теоремы А. Пусть ε_1 и τ — действительные числа такие, что $0 < \varepsilon_1 < \tau < \infty$. Пусть $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ — определенная в (22), (23) функция. Тогда при $\varepsilon_1 \leq t_{k-1}^{[n]} \leq t_k^{[n]} \leq \tau$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\delta_n} &= -V(t_k^{[n]}, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &+ \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + R, \end{aligned} \quad (85)$$

где

$$|R| \leq \delta_n^{1/2} C_0, \quad (86)$$

а C_0 — независимая от n постоянная.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \vec{e}_1 - y) &= \\ &= U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - \delta_n V(t_k^{[n]}, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) - y \cdot \nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_n^2 (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2} + \delta_n \sum_{j=1}^2 V(t_k^{[n]}, x) y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1 \partial x_j} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^2 \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h}, \end{aligned} \quad (87)$$

где $\mu_1 = -\delta_n V - y_1$, $\mu_2 = -y_2$, а \tilde{x} — точка, находящаяся между точками x и $x - \delta_n V(t_k^{[n]}, x)\tilde{e}_1 - y$.

Так как

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y)y_j dy = 0; \quad \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y)y_i y_j dy = 0, \quad i \neq j; \quad \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y)y_i^2 dy = 2\delta_n \kappa,$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y)y \cdot \nabla U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) dy = 0, \quad (88)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \left[\frac{1}{2} \delta_n^2 (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2} + \right. \\ & \left. + \delta_n \sum_{j=1}^2 V(t_k^{[n]}, x) y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1 \partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 y_i y_j \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] dy = \\ & = \delta_n \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n^2 \frac{1}{2} (V(t_k^{[n]}, x))^2 \frac{\partial^2 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)}{\partial x_1^2}. \quad (89) \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку $|\mu_1| \leq \delta_n |V| + |y_1|$ и $|\mu_2| = |y_2|$, существует постоянная C такая, что

$$\left| \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^2 \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \right| \leq C(\delta_n |V| + |y|)^3 \left| \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} \right|.$$

Так как согласно лемме 4 производные третьего порядка функции $U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \cdot)$ при $0 < \varepsilon_1 \leq t_{k-1}^{[n]} < \tau$ равномерно ограничены, существует постоянная C' такая, что

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) \frac{1}{6} \sum_{i,j,h=1}^2 \mu_i \mu_j \mu_h \frac{\partial^3 U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, \tilde{x})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h} dy \right| \leq (\delta_n^3 + \delta_n^{3/2}) C'. \quad (90)$$

Что касается слагаемого, относящегося к F , имеем

$$\begin{aligned} & F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) = \\ & = F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) - \sum_{i=1}^2 y_i (F'_{i,k-1}(\tilde{x}) + F'_{u,k-1}(\tilde{x}) w_{i,k-1}^{[1,n]}(\tilde{x})), \end{aligned}$$

где $F'_{i,k-1}(\tilde{x})$ и $F'_{u,k-1}(\tilde{x})$ — введенные в (80) обозначения (вычисленные в \tilde{x} вместо x) и $w_{i,k-1}^{[1,n]}$ — введенные в (36) обозначения, а \tilde{x} — точка, находящаяся между x и $x - y$.

Поскольку согласно условию (11) и лемме 2 функции $F'_{i,k-1}$, $F'_{u,k-1}$ и $w_{i,k-1}^{[1,n]}$ равномерно ограничены, получим оценку

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \Theta_n(y) F(t_{k-1}^{[n]}, x - y, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x - y)) dy - F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) \right| \leq C'' \sqrt{\delta_n}, \quad (91)$$

где C'' — независимая от n постоянная.

Из (87)–(91) следует, что

$$\begin{aligned} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) - U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) &= -\delta_n V(t_k^{[n]}, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \\ &+ \delta_n \kappa \Delta U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \delta_n F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) + R', \\ |R'| &\leq (\delta_n^3 + \delta_n^{3/2}) C_0, \end{aligned}$$

где C_0 — независимая от n постоянная. Отсюда, разделив обе части этого равенства на δ_n , получим (85). \square

Следствие. Пусть ε_1 и τ — действительные числа такие, что $0 < \varepsilon_1 < \tau < \infty$. Тогда существует постоянная K , которая зависит от ε_1 и τ , но не зависит от n и удовлетворяет соотношениям

$$|U^{[n]}(t_1, x) - U^{[n]}(t_2, x)| \leq K |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [\varepsilon_1, \tau], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (92)$$

$$|U(t_1, x) - U(t_2, x)| \leq K |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [\varepsilon_1, \tau], \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (93)$$

где $U(t, x)$ — предельная функция последовательности $\{U^{[n]}(t, x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство. Так как правая часть (85) ограничена постоянной K , неравенство (92) следует из (85) и (24).

Неравенство (93) следует из (92) и предельного перехода. \square

Теперь положим

$$\zeta^{[n]}(t, x) = \frac{U^{[n]}(t, x) - U^{[n]}(t - \delta_n, x)}{\delta_n}.$$

ЛЕММА 10. Пусть выполнены условия теоремы А. Пусть ε_1 и τ — действительные числа такие, что $0 < \varepsilon_1 < \tau < \infty$. Пусть $U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)$ — определенная в (22), (23) функция. Тогда при $\varepsilon_1 + 2\delta_n \leq t \leq \tau - \delta_n$ и $x \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\begin{aligned} \zeta^{[n]}(t, x) &= -V(t, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \kappa \Delta U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \\ &+ F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x)) + R_1, \end{aligned} \quad (94)$$

где

$$|R_1| \leq \delta_n^{1/2} C_0, \quad (95)$$

а C_0 — постоянная, которая зависит от ε_1 и τ , но не зависит от n .

Доказательство. Если $t = k\delta_n$ ($k \in \mathbb{N}$), то соотношения (94), (95) совпадают с (85), (86). Если $t_k^{[n]} < t < t_{k+1}^{[n]}$, то согласно (24) имеем

$$\zeta^{[n]}(t, x) = \frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n} \zeta^{[n]}(t_k^{[n]}, x) + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} \zeta^{[n]}(t_{k+1}^{[n]}, x). \quad (96)$$

Следовательно, если положим

$$D_V = - \left[\frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n} (V(t_k^{[n]}, x) - V(t, x)) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x) + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} (V(t_{k+1}^{[n]}, x) - V(t, x)) \partial_{x_1} U^{[n]}(t_k^{[n]}, x) \right],$$

$$D_F = \frac{t_{k+1}^{[n]} - t}{\delta_n} [F(t_{k-1}^{[n]}, x, U^{[n]}(t_{k-1}^{[n]}, x)) - F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x))] + \frac{t - t_k^{[n]}}{\delta_n} [F(t_k^{[n]}, x, U^{[n]}(t_k^{[n]}, x)) - F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x))],$$

то из (85) и (24) следует, что

$$\zeta^{[n]}(t, x) = -V(t, x) \partial_{x_1} U^{[n]}(t - \delta_n, x) + \kappa \Delta U^{[n]}(t - \delta_n, x) + F(t - \delta_n, x, U^{[n]}(t - \delta_n, x)) + D_V + D_F + R, \quad |R| \leq \delta_n^{1/2} C_0.$$

Кроме того, из условий о гладкости функций v и f , леммы 2 и следствия леммы 9 вытекает неравенство

$$|D_V + D_F| \leq \delta_n C_0,$$

где C_0 — постоянная, которая зависит от ε_1 и τ , но не зависит от n . Суммируя эти соотношения, получим (94). \square

Теперь перейдем к доказательству теоремы А.

Доказательство теоремы А. Леммы 6, 7, 8 позволяют перейти к пределу в (94), так что мы имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta^{[n]}(t, x) \equiv \zeta^{[*]}(t, x) = -V(t, x) \partial_{x_1} U(t, x) + \kappa \Delta U(t, x) + F(t, x, U(t, x)). \quad (97)$$

С другой стороны, из соотношений (96) и (24) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^{[*]}(t, x) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \zeta^{[n]}(t, x) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dh \int_{t_1 - \delta_n h}^{t_2 - \delta_n h} \partial_t U^{[n]}(t, x) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 dh [U^{[n]}(t_2 - \delta_n h, x) - U^{[n]}(t_1 - \delta_n h, x)] = U(t_2, x) - U(t_1, x), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\zeta^{[*]}(t, x) = \partial_t U(t, x). \quad (98)$$

Так как $u^{[n]}(t, x) = U^{[n]}(t, x)$ при $t \geq 0, x_2 > 0$ (см. (31)), имеем

$$U(t, x)|_{\{x_2 > 0\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} U^{[n]}(t, x)|_{\{x_2 > 0\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} u^{[n]}(t, x) \equiv u(t, x). \quad (99)$$

Следовательно, принимая во внимание равномерную сходимость $U^{[n]}(t, x)$ и их производных первого порядка по x на $[0, \tau] \times \mathbb{R}^2$ при любом $\tau > 0$ (см. леммы 6 и 7) и поточечную сходимость их производных второго порядка по x при $t > 0, x \in \mathbb{R}^2$ (см. лемму 8), из (97) и (98) выводим, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению (3) ($t > 0$). Кроме того, из начального условия (22) для $U^{[n]}(t, x)$ и соотношения (99) непосредственно следует, что $u(t, x)$ удовлетворяет начальному условию (4). Аналогично, из соотношений (29) и (99), с учетом непрерывности $U^{[n]}(t, x)$ и $U(t, x)$, следует, что $u(t, x)$ удовлетворяет граничному условию (5). Теорема доказана. \square

6. Численный эксперимент для задач испарения и диффузии водяного пара над морем. Чтобы показать возможность использования полученных результатов для решения конкретных задач математической физики, приведем простой численный эксперимент для задач испарения и диффузии водяного пара над морем. Данные процессы могут быть описаны поставленной в п. 1 задачей.

6.1. Физические предпосылки. Испарение воды с поверхности теплого моря и диффузия водяного пара в воздух играют важную роль в формировании штормовых явлений типа тропического циклона или Эль-Ниньо (см., например, [26–30]). Поэтому поиск действенного математического описания этого процесса является актуальным.

Напомним, что когда действительная плотность пара превышает плотность насыщенного пара, начинается процесс конденсации, который может вызвать грозовое явление, а плотность насыщенного пара определяется температурой (см., например, [31]). Поэтому нас интересует эволюция плотности пара в ситуации, когда влажность воздуха над морем близка к насыщению при возможном горизонтальном ветре.

6.2. Численная схема. Будем использовать сетку

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, \quad t_k - t_{k-1} = \delta_t, \quad (100)$$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N_x} = \bar{X}_1, \quad x_i - x_{i-1} = \delta_x, \quad (101)$$

$$0 = y_0 < y_1 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_{N_y} = \bar{Y}_1, \quad y_j - y_{j-1} = \delta_y, \quad (102)$$

где t_k, x_i, y_j — текущий момент времени, текущее горизонтальное положение и текущая высота соответственно. Пусть $v(t_k, x_i, y_j)$ — скорость переноса (только в горизонтальном направлении). Для простоты предположим, что $v(t_k, x_i, y_j) \geq 0$. На этой сетке с переносом $v(t_k, x_i, y_j)$ и дискретизируемой диффузией построим функцию $u(t_k, x_i, y_j)$, представляющую плотность водяного пара.

Для $k = 0$ это просто начальное условие $u(t_0, x_i, y_j) = u_0(x_i, y_j)$. Если известны $u(t_{k-1}, x_{i'}, y_{j'})$, $i' = 0, 1, \dots, N_x$, $j' = 0, 1, \dots, N_y$, то определим $u(t_k, x_i, y_j)$ соотношением

$$\begin{aligned} u(t_k, x_i, y_j) &= \\ &= \frac{\tilde{x} - x_{i^*-1}}{\delta_x} \left[(1 - \varepsilon)u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_{j-1}) \right] + \\ &+ \frac{x_{i^*} - \tilde{x}}{\delta_x} \left[(1 - \varepsilon)u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_{j+1}) + \frac{\varepsilon}{2}u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_{j-1}) \right], \quad (103) \end{aligned}$$

где ε — такой параметр, что $0 < \varepsilon < 1$, а x_{i^*-1} и x_{i^*} — два положения такие, что

$$x_{i^*-1} < x_i - \delta_t v(t_k, x_i, y_j) \leq x_{i^*}.$$

Если $x_i - \delta_t v(t_k, x_i, y_j) \leq 0$, то $u(t_{k-1}, x_{i^*}, y_{j'})$ и $u(t_{k-1}, x_{i^*-1}, y_{j'})$ заменяются данными условия входа. Определение (103) является простейшим дискретным вариантом определения (17).

Поскольку при схеме (103) в определении $u(t_k, x_i, y_j)$ участвуют только значения уровней y_{j-1} , y_j и y_{j+1} , то можно построить $u(\cdot, \cdot, \cdot)$ непосредственно с ненулевым граничным условием.

6.3 Результаты численного эксперимента. В (101), (102) и (103) выберем $\delta_x = 50$ м, $N_x = 400$, $\delta_y = 40$ м, $N_y = 25$, $\varepsilon = 0.4$ и

$$v(t_k, x_i, y_j) = 2 \ln\left(\frac{y_j + \eta}{\eta}\right), \quad \eta = \frac{5}{e - 1}.$$

Для температуры $T(y_j)$ и плотности насыщенного пара $\bar{u}_{vs}(T(y_j))$ на каждой высоте y_j примем использованные в [30] значения, которые соответствуют распределению температуры в гидростатическом состоянии влажного воздуха. Выберем граничные условия

$$u(t_k, x_i, y_0) = \bar{u}_{vs}(T(y_0)), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u(t_k, x_i, y_{N_y}) = 0.95 \cdot \bar{u}_{vs}(T(y_{N_y})), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

условия входа

$$u(t_k, \cdot, y_j) = 0.95 \cdot \bar{u}_{vs}(T(y_j)), \quad j = 1, 2, \dots, N_y; \quad u(t_k, \cdot, y_0) = \bar{u}_{vs}(T(y_0))$$

и начальное условие

$$u(t_0, x_i, y_j) = 0.95 \cdot \bar{u}_{vs}(T), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Результаты расчетов приводятся в таблице. В первом столбце указана высота y (м) каждого уровня. Во втором и третьем столбцах — температура T (К) и плотность насыщенного пара \bar{u}_{vs} ($\text{г}/\text{м}^3$) соответственно. В следующих

Эволюция плотности пара при $x = 18$ км на шкале времени $0 \leq k \leq 500$ ($t = k\delta_t$)
 [Vapor density evolution at $x = 18$ km on the time scale $0 \leq k \leq 500$ ($t = k\delta_t$)]

$y, \text{ m}$	$T, \text{ K}$	$\bar{u}_{vs}, (\text{g/m}^3)$	$k = 0$	$k = 100$	$k = 200$	$k = 300$	$k = 400$	$k = 500$
600	294.1	183.3	174.2	175.9	178.1	179.9	180.7	180.7
480	295.3	196.2	186.4	188.8	191.6	193.7	194.7	194.7
360	296.5	209.9	199.4	203.0	206.3	208.4	209.3	209.3
240	297.7	224.4	213.2	219.1	222.0	223.7	224.5	224.5
120	298.8	239.7	227.8	236.9	238.7	239.7	240.2	240.2
0	300.0	255.9	255.9	255.9	255.9	255.9	255.9	255.9

столбцах приведены значения плотности пара в моменты времени $k = 0, 100, 200, 300, 400$ и 500 . Отметим, что согласно расчетам при $k = 400$ ($t = k\delta_t$) на уровнях $y = 120$ м и $y = 240$ м плотность пара u достигает плотности насыщенного пара $\bar{u}_{vs}(T(y))$, что приводит к конденсации водяного пара и, следовательно, может начаться процесс «конденсация – нагревание воздуха – восходящее движение воздуха», характеризующийся своим бурным развитием.

Выводы. В данной работе доказана сходимость приближенных решений для уравнения переноса-диффузии с горизонтальным переносом в полуплоскости \mathbb{R}_+^2 , построенных ядром теплопроводности и переносом на каждом шаге дискретизации времени, к функции, удовлетворяющей уравнению в полуплоскости, начальному условию и однородному граничному условию Дирихле на $\{x_2 = 0\}$. Равномерна сходимость приближенных решений и их производных по x_1 и x_2 первого порядка, а сходимость их производных по x_1 и x_2 второго порядка поточечна. Тем самым мы дали ответ на основной вопрос о приближении ядром теплопроводности решения уравнения переноса-диффузии с граничным условием. На основе этого результата придется проводить исследование случаев более общих условий с новыми разработками.

Конкурирующие интересы. Мы заявляем об отсутствии явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Авторский вклад и ответственность. Мы несем полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательной версии рукописи нами одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика / Теоретическая физика*. Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
- Алоян А. Е. *Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере*. М.: Наука, 2008. 415 с. EDN: QKHODT.
- Носов А. В., Крылов А. Л., Киселев В. П., Казаков С. В. *Моделирование миграции радионуклидов в поверхностных водах*. М.: Наука, 2010. 253 с. EDN: YLEGPB.
- Moreira D. M., Moraes A. C., Goulart A. G., Toledo de Almeida Albuquerque T. A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance // *Atmospheric Environment*, 2014. vol. 83. pp. 254–259. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2013.10.045>.
- Цыденов Б. О. Численное исследование распространения примеси в пресном озере на основе распределения мутности // *Вычислительные технологии*, 2017. Т. 22 (спец. вып. 1). С. 113–124. EDN: YPLUKT.

6. Esmail S., Agrawal P., Shaban Aly A novel analytical approach for advection diffusion equation for radionuclide release from area source // *Nuclear Eng. Techn.*, 2020. vol. 6. pp. 816–826. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.net.2019.09.018>.
7. Essa Kh. S. M., El-Otaify M. S. Mathematical model for atmospheric dispersion equation (a review) // *J. Rad. Nucl. Appl.*, 2021. vol. 52, no. 2. pp. 119–128. DOI: <https://doi.org/10.18576/jrna/060203>.
8. Давыдова М. А., Еланский Н. Ф., Захарова С. А., Постыляков О. В. Применение численно-асимптотического подхода в задаче восстановления параметров локального стационарного источника антропогенного загрязнения // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, 2021. Т. 496. С. 34–39. EDN: RBHKAN. DOI: <https://doi.org/10.31857/S2686954321010021>.
9. Khoshgou H., Neyshabouri S. A. A. S. Using the backward probability method in contaminant source identification with a finite-duration source loading in a river // *Environ. Sci. Pollut. Res.*, 2021. vol. 29, no. 4. pp. 6306–6316. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11356-021-15372-6>.
10. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967. 736 с. EDN: VLRBIL.
11. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса*. М.: Факториал, 1998. 368 с. EDN: TVLOTF.
12. Evans L. C. *Partial Differential Equations* / Graduate Studies in Mathematics. vol. 19. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. xxii+749 pp. DOI: <https://doi.org/10.1090/gsm/019>.
13. Гихман И. И., Скороход А. В. *Введение в теорию случайных процессов*. М.: Наука, 1977. 567 с.
14. Pardoux É., Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasi-linear SPDEs // *Prob. Theory Rel. Fields*, 1994. vol. 98, no. 2. pp. 209–227. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf01192514>.
15. Pardoux É., Veretennikov A. Yu. Averaging of backward stochastic differential equations, with application to semi-linear PDE's // *Stochastics Stochastics Rep.*, 1997. vol. 60, no. 3–4. pp. 255–270. DOI: <https://doi.org/10.1080/17442509708834109>.
16. Pardoux É., Răşcanu A. *Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations* / Stochastic Modelling and Applied Probability. vol. 69. Heidelberg: Springer, 2014. xvii+667 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05714-9>.
17. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems* / Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. vol. 260. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. xxviii+458 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3>.
18. Milstein G. N., Tretyakov M. V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics* / Scientific Computation. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xix+596 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9>.
19. Desmond J. H., Mao X., Stuart A. M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002. vol. 40, no. 3. pp. 1041–1063. DOI: <https://doi.org/10.1137/s0036142901389530>.
20. Higham D. J. Stochastic ordinary differential equations in applied and computational mathematics // *IMA J. Appl. Math.*, 2011. vol. 76, no. 3. pp. 449–474. DOI: <https://doi.org/10.1093/imat/hxr016>.
21. Mao X. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations // *J. Comput. Appl. Math.*, 2015. vol. 290. pp. 370–384. EDN: USCLFN DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.06.002>.
22. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2020. vol. 8. pp. 71–90 (In French).
23. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion // *Afr. Math. Ann.*, 2021. vol. 9. pp. 89–108 (In French).

24. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977. 735 с.
25. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979. 280 с.
26. Emanuel K. A similarity hypothesis for air-sea exchange at extreme wind speeds // *J. Atmos. Sci.*, 2003. vol. 60, no. 11. pp. 1420–1428. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(2003\)060<1420:ASHFAE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2003)060<1420:ASHFAE>2.0.CO;2).
27. Du Y., Xie S., Huang G., Hu K. Role of air-sea interaction in the long persistence of El Niño-induced North Indian Ocean warming // *J. Climate*, 2009. vol. 22, no. 8. pp. 2023–2038. DOI: <https://doi.org/10.1175/2008JCLI2590.1>.
28. Власова Г. А., Нгуен Ба Суан, Деменок М. Н. Циркуляция вод Южно-Китайского моря в зоне Вьетнамского течения в условиях южного тропического циклона весной 1999 г.: результаты численного моделирования // *Фундам. прикл. гидрофиз.*, 2016. Т. 9, № 4. С. 25–34. EDN: XELWBN.
29. Shi Y., Zhang Q., Wang S., Yang K., Yang Y., Ma Y. Impact of typhoon on evaporation dust in the Northwest Pacific Ocean // *IEEE Access*, 2019. vol. 7. pp. 109111–109119. DOI: <https://doi.org/10.1109/access.2019.2932969>.
30. Аоуаоуда М., Аяди А., Фужита-Яшима Х. Математическое моделирование тропических циклонов на основе описания траекторий ветра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019. Т. 59, № 9. С. 1554–1569. EDN: JJUVVC. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919090047>.
31. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. *Storm and Cloud Dynamics. The Dynamics of Clouds and Precipitating Mesoscale Systems* / International Geophysics Series. vol. 99. Amsterdam: Academic Press, 2011. xvi+809 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/c2009-0-02127-8>.

MSC: 35K20, 35K58, 35K08

Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane

*M. Aouaouda*¹, *A. Ayadi*¹, *H. Fujita Yashima*²¹ Université Larbi Ben M'hidi,
Oum El Bouaghi, 04000, Algeria.² École Normale Supérieure Assia Djebar,
Ali Mendjeli, Constantine, 25000, Algeria.

Abstract

In this paper, by using the heat kernel and the transport operator on each step of time discretization, approximate solutions for the transport-diffusion equation on the half-plane \mathbb{R}_+^2 are constructed, and their convergence to a function which satisfies the transport-diffusion equation and the initial and boundary conditions is proved. These approximate solutions can be considered as a deterministic version of (the approximation of) the stochastic representation of the solution to parabolic equation, realized by the relationship between the heat kernel and the Brownian motion. But as they are defined only by an integral operator and transport, their properties and their convergence are proved without using probabilistic notions. The result of this paper generalizes that of recent papers about the convergence of analogous approximate solutions on the whole space \mathbb{R}^n . In case of the half-plane, it is necessary to elaborate (not trivial) estimates of the smoothness of the approximate solutions influenced by boundary condition.

Keywords: transport-diffusion equation, approximate solution, heat kernel.Received: 26th August, 2021 / Revised: 5th May, 2022 /Accepted: 23rd May, 2022 / First online: 1st June, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Convergence of approximate solutions by heat kernel for transport-diffusion equation in a half-plane, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 222–258. EDN: JNGCBE. DOI: [10.14498/vsgtu1881](https://doi.org/10.14498/vsgtu1881) (In Russian).

Authors' Details:

Meryem Aouaouda  <https://orcid.org/0000-0002-8826-374X>

PhD Student; Member of Laboratory; Lab. of Dynamical System and Control;

e-mail: meryem.aouaouda@gmail.com*Abedlhamid Ayadi*  <https://orcid.org/0000-0002-5600-7493>

Professor; Chief of Research Team; Lab. of Dynamical System and Control;

e-mail: facmaths@yahoo.fr*Hisao Fujita Yashima*  <https://orcid.org/0000-0001-9937-8406>

Professor; Chief of Research Team; Lab. of Applied Mathematics and Didactics;

e-mail: hisaofujitayashima@yahoo.com; hisaofujitayashima@qq.com

Competing interests. We declare that we have no apparent or potential conflicts of interest related to the publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

References

1. Landau L. D., Lifchitz E. M. *Gidrodinamika / Teoreticheskaia fizika* [Hydrodynamics / Theoretical Physics] Vol. 6. Moscow, Nauka, 1986, 736 pp. (In Russian)
2. Aloyan A. E. *Modelirovanie dinamiki i kinetiki gazovykh primesei i aerozolei v atmosfere* [Modeling, Dynamics and Kinetics of Gas Admixtures in the Atmosphere]. Moscow, Nauka, 2008, 415 pp. (In Russian)
3. Nosov A. V., Krylov A. L., Kiselev V. P., Kazakov S. V. *Modelirovanie migratsii radionuklidov v poverkhnostnykh vodakh* [Modeling of Migration of Radioactive Substances in Surface Water]. Moscow, Nauka, 2010, 253 pp. (In Russian)
4. Moreira D. M., Moraes A. C., Goulart A. G., Toledo de Almeida Albuquerque T. A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance, *Atmospheric Environment*, 2014, vol. 83, pp. 254–259. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2013.10.045>.
5. Tsydenov B. O. A numerical study of impurity propagation in a freshwater lake on the basis of water turbidity distribution, *Vych. Tekhn.*, 2017, vol. 22, no. 1 (Special Issue), pp. 113–124 (In Russian).
6. Esmail S., Agrawal P., Shaban Aly A novel analytical approach for advection diffusion equation for radionuclide release from area source, *Nuclear Eng. Techn.*, 2020, vol. 6, pp. 816–826. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.net.2019.09.018>.
7. Essa Kh. S. M., El-Otaify M. S. Mathematical model for atmospheric dispersion equation (a review), *J. Rad. Nucl. Appl.*, 2021, vol. 52, no. 2, pp. 119–128. DOI: <https://doi.org/10.18576/jrna/060203>.
8. Davydova M. A., Zakharova S. A., Elansky N. F., Postylyakov O. V. Application of a numerical-asymptotic approach to the problem of restoring the parameters of a local stationary source of anthropogenic pollution, *Dokl. Math.*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 26–31. EDN: RLGVG. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562421010026>.
9. Khoshgou H., Neyshabouri S. A. A. S. Using the backward probability method in contaminant source identification with a finite-duration source loading in a river, *Environ. Sci. Pollut. Res.*, 2021, vol. 29, no. 4, pp. 6306–6316. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11356-021-15372-6>.
10. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraltseva N. N. *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 23. Providence, RI, American Mathematical Society, 1968, xi+648 pp. EDN: VLRBJF.
11. Polyanin A. D., Vyazmin A. V., Zhurov A. I., Kazenin D. A. *Spravochnik po tochnym resheniiam uravnenii teplo- i massoperenosa* [Handbook of Exact Solutions of Heat- and Mass-Transfer Equations]. Moscow, Faktorial, 1988, 368 pp. (In Russian)
12. Evans L. C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19. Providence, RI, American Mathematical Society, 2010, xxii+749 pp. DOI: <https://doi.org/10.1090/gsm/019>.
13. Gikhman I., Skorokhod A. *Introduction à la théorie des processus aléatoires*. Moscow, Mir Publ., 1980, 557 pp. (In French)
14. Pardoux É., Peng S. Backward doubly stochastic differential equations and systems of quasi-linear SPDEs, *Prob. Theory Rel. Fields*, 1994, vol. 98, no. 2, pp. 209–227. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf01192514>.

15. Pardoux É., Veretennikov A. Yu. Averaging of backward stochastic differential equations, with application to semi-linear PDE's, *Stochastics Stochastics Rep.*, 1997, vol. 60, no. 3–4, pp. 255–270. DOI: <https://doi.org/10.1080/17442509708834109>.
16. Pardoux É., Răşcanu A. *Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, vol. 69. Heidelberg, Springer, 2014, xvii+667 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05714-9>.
17. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 260. Berlin, Heidelberg, Springer, 2012, xxviii+458 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25847-3>.
18. Milstein G. N., Tret'yakov M. V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics*, Scientific Computation. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xix+596 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9>.
19. Desmond J. H., Mao X., Stuart A. M. Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002, vol. 40, no. 3, pp. 1041–1063. DOI: <https://doi.org/10.1137/s0036142901389530>.
20. Higham D. J. Stochastic ordinary differential equations in applied and computational mathematics, *IMA J. Appl. Math.*, 2011, vol. 76, no. 3, pp. 449–474. DOI: <https://doi.org/10.1093/imamat/hxr016>.
21. Mao X. The truncated Euler–Maruyama method for stochastic differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, vol. 290, pp. 370–384. EDN: USCFLN DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.06.002>.
22. Taleb L., Selvaduray S., Fujita Yashima H. Approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2020, vol. 8, pp. 71–90 (In French).
23. Smaali H., Fujita Yashima H. Une généralisation de l'approximation par une moyenne locale de la solution de l'équation de transport-diffusion, *Afr. Math. Ann.*, 2021, vol. 9, pp. 89–108 (In French).
24. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*, International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, vol. 39. New York, Pergamon Press, 1963, xvi+765 pp.
25. Vladimirov V. S. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Moscow, Mir Publ., 1979, 280 pp.
26. Emanuel K. A similarity hypothesis for air-sea exchange at extreme wind speeds, *J. Atmos. Sci.*, 2003, vol. 60, no. 11, pp. 1420–1428. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(2003\)060<1420:ASHFAE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(2003)060<1420:ASHFAE>2.0.CO;2).
27. Du Y., Xie S., Huang G., Hu K. Role of air-sea interaction in the long persistence of El Niño-induced North Indian Ocean warming, *J. Climate*, 2009, vol. 22, no. 8, pp. 2023–2038. DOI: <https://doi.org/10.1175/2008JCLI2590.1>.
28. Vlasova G. A., Nguen Ba Suan, Demenok M. N. The water circulation of the South China Sea in a zone of the Vietnamese Current under the influence of southern tropical cyclone in spring of 1999: Results of numerical modeling, *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 25–34 (In Russian).
29. Shi Y., Zhang Q., Wang S., Yang K., Yang Y., Ma Y. Impact of typhoon on evaporation dust in the Northwest Pacific Ocean, *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 109111–109119. DOI: <https://doi.org/10.1109/access.2019.2932969>.
30. Aouaouda M., Ayadi A., Fujita Yashima H. Mathematical modeling of tropical cyclones on the basis of wind trajectories, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 9, pp. 1493–1507. EDN: FMCFRG. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542519090045>.
31. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. *Storm and Cloud Dynamics. The Dynamics of Clouds and Precipitating Mesoscale Systems*, International Geophysics Series, vol. 99. Amsterdam, Academic Press, 2011, xvi+809 pp. DOI: <https://doi.org/10.1016/c2009-0-02127-8>.



УДК 517.956.6

Аналог задачи Дезина для уравнения парабола-гиперболического типа с условиями периодичности

Р. А. Киржинов

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

В прямоугольной области рассматривается неоднородное уравнение смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка. Для данного уравнения исследуется аналог задачи А. А. Дезина, который заключается в отыскании решения уравнения, удовлетворяющего внутренне-краевому условию, связывающему значение искомой функции на линии изменения типа уравнения со значением нормальной производной на границе в области гиперболическости, и неоднородным нелокальным краевым условиям периодичности. Приводится подстановка, позволяющая свести задачу к эквивалентной и, не теряя общности, ограничиться исследованием задачи с однородными условиями для неоднородного уравнения. Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи, решение выписано в явном виде.

Решение поставленной задачи ищется в виде суммы ряда Фурье по ортонормированной системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлен критерий единственности решения задачи. Для случая, когда нарушен критерий единственности, приведен пример нетривиального решения однородной задачи и получено необходимое и достаточное условие существования решения неоднородной задачи.

При обосновании существования решения возникает проблема малых знаменателей в сумме ряда отношения сторон прямоугольника в гиперболической части области. Получена оценка определенности знаменателя от нуля при некоторых условиях относительно параметров задачи, которая при определенных условиях на заданные функции позволяет доказать абсолютную и равномерную сходимость как формально построенного решения, так и соответствующих производных, входящих в уравнение.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Киржинов Р. А. Аналог задачи Дезина для уравнения парабола-гиперболического типа с условиями периодичности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 259–272. EDN: LJNJZP. DOI: 10.14498/vsgtu1892.

Сведения об авторе

Ромазан Анатольевич Киржинов  <https://orcid.org/0000-0001-6645-7175>

магистр; стажер-исследователь; отд. уравнений смешанного типа;

e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

Ключевые слова: аналог задачи Дезина, уравнение парабола-гиперболического типа, нелокальные краевые условия.

Получение: 29 октября 2021 г. / Исправление: 7 декабря 2021 г. /

Принятие: 24 января 2022 г. / Публикация онлайн: 13 мая 2022 г.

Введение. В 1963 г. А. А. Дезин в работе [1] рассмотрел вопрос о разрешимых расширениях для дифференциальных операторов смешанного типа и тогда же для уравнения с оператором Лаврентьева—Бицадзе в прямоугольной области сформулировал задачу с условием 2π -периодичности и нелокальным условием, связывающим значение искомой функции внутри области со значением ее производной на границе.

В [2, с. 18] приводится формулировка нелокальных краевых условий по терминологии Дезина. В работе [3] в специальной прямоугольной области для уравнения Лаврентьева—Бицадзе доказаны принцип экстремума, теоремы единственности и существования решения задачи Дезина.

В работах [4–7] для различных уравнений смешанного эллипτικο-гиперболического типа в прямоугольной области изучены задачи с условием периодичности по переменной x и нелокальным условием Дезина. Установлены критерии единственности, решения задач построены в виде суммы ортогонального ряда по собственным функциям соответствующих одномерных спектральных задач. Исследована проблема малых знаменателей, возникающая при обосновании сходимости рядов, установлена оценка отдаленности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой.

Для уравнения парабола-гиперболического типа в [8, с. 174] доказана однозначная разрешимость аналога задачи Дезина в специальной прямоугольной области, исследован вопрос о спектре однородной задачи.

В данной работе исследуется аналог задачи Дезина в прямоугольной области $\{(x, y): 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$ для неоднородного уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка с неоднородными нелокальными краевыми условиями, где r, α, β — вещественные положительные числа. Установлен критерий единственности решения исследуемой задачи. Решение построено в виде суммы ряда по ортонормированной системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей для отношения сторон α/r прямоугольника в части области, где рассматривается гиперболическое уравнение. При некоторых условиях относительно заданных функций и чисел λ, α, r показано, что сумма построенного ряда является решением задачи в искомом классе.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega = \{(x, y): 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$ — область евклидовой плоскости точек (x, y) ; $\Omega^+ = \Omega \cap \{(x, y): y > 0\}$; $\Omega^- = \Omega \cap \{(x, y): y < 0\}$; r, α, β — вещественные положительные числа. Обозначим через $C_x^k(\Omega)$ пространство функций $f(x, y)$ таких, что $\frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, y) \in C(\Omega)$.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$Lu = f, \quad (1)$$

где

$$L u = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0; \end{cases} \quad f = \begin{cases} f^+(x, y), & y > 0, \\ f^-(x, y), & y < 0; \end{cases}$$

$u = u(x, y)$ — неизвестная функция, $f = f(x, y)$ — заданная функция.

Исследуется следующая

ЗАДАЧА 1. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса

$$C^1(\bar{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_y^2(\Omega^-),$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) - u(r, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) - u_x(r, y) = \psi(y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (2)$$

$$u_y(x, -\alpha) = \lambda u(x, 0), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (3)$$

где $\lambda = \text{const}$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям: $\varphi'(-\alpha) = \lambda\varphi(0)$, $\psi'(-\alpha) = \lambda\psi(0)$.

С помощью подстановки

$$v(x, y) = u(x, y) + w(x, y),$$

где

$$w(x, y) = \frac{x}{r} \left(\varphi(y) + \frac{x-r}{2} \psi(y) \right),$$

задачу 1 можно привести к эквивалентной задаче относительно новой функции $v(x, y)$ с однородными условиями вместо (2), при этом уравнение (1) примет вид $\tilde{f}(x, y) = L v(x, y)$, где $\tilde{f}(x, y) = f(x, y) - L w(x, y)$. Поэтому, не нарушая общности, дальнейшие рассуждения будем проводить при $\varphi(y) \equiv \equiv \psi(y) \equiv 0$.

2. Единственность решения. Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи 1. По аналогии с работой [9] рассмотрим функции

$$u_k(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r u(x, y) e^{i\mu_k x} dx, \quad (4)$$

где $\mu_k = 2\pi k/r$, $k \in \mathbb{Z}$.

На основании (4) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} u(x, y) e^{i\mu_k x} dx, \quad (5)$$

где ε — достаточно малое положительное вещественное число.

Дифференцируя (5) по переменной y , с учетом уравнения (1) при $y > 0$ получим

$$u'_{k,\varepsilon}(y) + f_k^+(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_\varepsilon^{r-\varepsilon} \{u_y(x, y) + f^+(x, y)\} e^{i\mu_k x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} u_{xx}(x, y) e^{i\mu_k x} dx. \quad (6)$$

Дифференцируя (5) дважды по переменной y , с учетом уравнения (1) при $y < 0$ получим

$$\begin{aligned} u''_{k,\varepsilon}(y) + f_k^-(y) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} \{u_{yy}(x, y) + f^-(x, y)\} e^{i\mu_k x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{\varepsilon}^{r-\varepsilon} u_{xx}(x, y) e^{i\mu_k x} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

В равенствах (6), (7), интегрируя два раза по частям интегралы, содержащие $u_{xx}(x, y)$, и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом граничных условий (2) получим

$$\begin{cases} u'_k(y) + \mu_k^2 u_k(y) + f_k^+(y) = 0, & y > 0, \\ u''_k(y) + \mu_k^2 u_k(y) + f_k^-(y) = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$f_k^+(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r f^+(x, y) e^{i\mu_k x} dx, \quad (9)$$

$$f_k^-(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r f^-(x, y) e^{i\mu_k x} dx. \quad (10)$$

Общие решения дифференциальных уравнений (8) выписываются в следующем виде:

$$u_k(y) = \begin{cases} c_k e^{-\mu_k^2 y} - \int_0^y f_k^+(\eta) e^{-\mu_k^2(y-\eta)} d\eta, & y > 0, \\ a_k \cos \mu_k y + b_k \sin \mu_k y - \int_y^0 f_k^-(\eta) \frac{\sin \mu_k(\eta - y)}{\mu_k} d\eta, & y < 0, \end{cases} \quad (11)$$

где a_k, b_k, c_k — произвольные постоянные.

С учетом того, что $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$, (4) и полноты системы функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\mu_k x} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (12)$$

в пространстве $L_2[0, r]$ имеем

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad u'_k(0+0) = u'_k(0-0). \quad (13)$$

Удовлетворяя (11) условиям (13), находим

$$b_k = -\mu_k a_k - f_k^+(0) \frac{1}{\mu_k}, \quad c_0 = a_0, \quad c_k = a_k, \quad k \neq 0.$$

Тогда функции (11) примут вид

$$u_k(y) = \begin{cases} a_k e^{-\mu_k^2 y} - \int_0^y f_k^+(\eta) e^{-\mu_k^2(y-\eta)} d\eta, & y > 0, \\ a_k (\cos \mu_k y - \mu_k \sin \mu_k y) - \\ - f_k^+(0) \frac{\sin \mu_k y}{\mu_k} - \int_y^0 f_k^-(\eta) \frac{\sin \mu_k(\eta - y)}{\mu_k} d\eta, & y < 0. \end{cases} \quad (14)$$

Дифференцируя равенства (4) по переменной y , с учетом нелокального условия (3) получаем

$$u'_k(-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r u_y(x, -\alpha) e^{i\mu_k x} dx = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \lambda u(x, 0) e^{i\mu_k x} dx = \lambda u_k(0).$$

Пусть

$$\delta_k(\alpha, \lambda) = \mu_k^2 \cos \mu_k \alpha - \mu_k \sin \mu_k \alpha + \lambda \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

тогда находим

$$a_k = -f_k^+(0) \frac{\cos \mu_k \alpha}{\delta_k(\alpha, \lambda)} + \int_{-\alpha}^0 f_k^-(\eta) \frac{\cos \mu_k(\eta + \alpha)}{\delta_k(\alpha, \lambda)} d\eta. \quad (16)$$

Выясним, при каких α , λ , r и k выражение $\delta_k(\alpha, \lambda) = 0$. Представим $\delta_k(\alpha, \lambda)$ в следующем виде:

$$\delta_k(\alpha, \lambda) = \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2} \sin(\gamma_k - \mu_k \alpha) + \lambda, \quad (17)$$

где

$$\gamma_k = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\mu_k^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \text{при } k \rightarrow +\infty.$$

Из представления (17) видно, что $\delta_k(\alpha, \lambda) = 0$ только в том случае, когда

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2}} \leq 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и

$$\alpha = \frac{1}{\mu_k} \left[(-1)^n \arcsin \frac{\lambda}{\sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2}} + \pi n + \gamma_k \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть при некоторых значениях α , λ и $k = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ нарушено условие (15), тогда a_p может принимать любое значение и однородная задача, соответствующая задаче 1 при $f \equiv 0$, имеет нетривиальное решение вида

$$u_p(x, y) = \begin{cases} a_p e^{i\mu_p x} e^{-\mu_p^2 y}, & 0 \leq y \leq \beta, \\ a_p e^{i\mu_p x} (\cos \mu_p y - \mu_p \sin \mu_p y), & -\alpha \leq y \leq 0, \end{cases}$$

причем неоднородная задача 1 будет иметь решение только в том случае, когда для f выполнено условие

$$f_p^+(0) \cos \mu_p \alpha = \int_{-\alpha}^0 f_p^-(\eta) \cos \mu_p(\eta + \alpha) d\eta. \quad (18)$$

Из (14) и (16) видно, что если $f^+(x, y) \equiv 0$, $f^-(x, y) \equiv 0$, то из (4) имеем

$$u_k(y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r u(x, y) e^{i\mu_k x} dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда в силу полноты системы функций (12) в пространстве $L_2[0, r]$ и непрерывности $u(x, y)$ в $\bar{\Omega}$ следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если существует решение $u(x, y)$ задачи 1, то оно однозначно определяется только тогда, когда выполнено условие (15).*

3. Существование решения. Решение задачи 1 при выполнении условий (15) будем искать формально в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(y) e^{-i\mu_k x}, \quad (19)$$

где коэффициенты $u_k(y)$ определяются формулами (14), (16).

Поскольку $\delta_k(\alpha, \lambda)$ входит в знаменатель ряда (19), для обоснования существования решения задачи 1 необходимо показать, что существуют числа α , λ и r такие, что выражение $\delta_k(\alpha, \lambda)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Оценим выражение

$$\delta_k(\alpha, \lambda) = \mu_k^2 \cos \mu_k \alpha - \mu_k \sin \mu_k \alpha + \lambda, \quad \mu_k = \frac{2\pi k}{r}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

и выясним, существуют ли α , λ , r и постоянная C_0 такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\inf_k |\delta_k(\alpha, \lambda)| \geq \frac{\mu_k^2}{C_0} > 0. \quad (21)$$

ЛЕММА 1. *Если $2\alpha/r = \tilde{\alpha} \in \mathbb{N}$ и $|\lambda| < (2\pi/r)^2$, то существует положительная \tilde{C}_1 , зависящая от λ и r , такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\delta_k(\alpha, \lambda)| \geq \mu_k^2 \tilde{C}_1 > 0.$$

Доказательство. Пусть $2\alpha/r = \tilde{\alpha} \in \mathbb{N}$. Тогда (20) примет вид

$$\delta_k(\alpha, \lambda) = \mu_k^2 (-1)^{k\tilde{\alpha}} + \lambda.$$

Если $|\lambda| < (2\pi/r)^2$, то из последнего заключаем

$$|\delta_k(\alpha, \lambda)| = |\mu_k^2(-1)^{k\tilde{\alpha}} + \lambda| \geq \mu_k^2 \left| 1 - \frac{|\lambda|}{\mu_k^2} \right| \geq \mu_k^2 \tilde{C}_1,$$

где

$$\tilde{C}_1 = 1 - \frac{|\lambda|}{(2\pi/r)^2} > 0.$$

Лемма 1 доказана. □

ЛЕММА 2. Пусть $2\alpha/r = \tilde{\alpha} = p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(p, q) = 1$, q — нечетное число, $|\lambda| \leq \lambda_0 = 2(\sqrt{2 - q^{-2}} - 1)$, $r \leq r_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\sqrt{q^2-1}}$. Тогда существует положительная \tilde{C}_2 , зависящая от λ, r , такая, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\delta_k(\alpha, \lambda)| > \mu_k^2 \tilde{C}_2 > 0.$$

Доказательство. Пусть $2\alpha/r = \tilde{\alpha} = p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(p, q) = 1$, q — нечетное число. Разделим kp на q с остатком:

$$kp = sq + t, \quad s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 0 \leq t < q.$$

Тогда из (17) получим

$$|\delta_k(\alpha, \lambda)| = \left| \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2}(-1)^s \sin\left(\gamma_k - \frac{\pi t}{q}\right) + \lambda \right|.$$

Если $t = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше случаю $2\alpha/r = \tilde{\alpha} \in \mathbb{N}$.

Пусть $t > 0$, $r \leq r_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\sqrt{q^2-1}}$, $|\lambda| \leq \lambda_0 = 2(\sqrt{2 - q^{-2}} - 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\sin(\gamma_k - \mu_k \alpha)| &= \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} - \frac{\pi t}{q}\right) \right| \geq \\ &\geq \left| \sin\left(\frac{\pi}{2q} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}\right) \right| \geq \frac{2}{\pi} \left| \frac{\pi}{2q} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} \right| \geq \\ &\geq \left| \frac{1}{q} - \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} \right| > \frac{1}{q} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2 - q^{-2}}} \right) > \frac{1}{4q}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} |\delta_k(\alpha, \lambda)| &> \mu_k^2 \sqrt{1 + \mu_k^{-2}} \frac{1}{4q} - |\lambda| = \mu_k^2 \sqrt{1 + \mu_k^{-2}} \left[\frac{1}{4q} - \frac{|\lambda|}{|\mu_k| \sqrt{1 + \mu_k^2}} \right] \geq \\ &\geq \mu_k^2 \left[\frac{1}{4q} - \frac{|\lambda|}{\mu_1 \sqrt{1 + \mu_1^2}} \right] \geq \mu_k^2 \left[\frac{1}{4q} - \frac{2(\sqrt{2 - q^{-2}} - 1)}{\sqrt{2}\sqrt{q^2 - 1}q\sqrt{2 - q^{-2}}} \right] > \mu_k^2 \tilde{C}_2 > 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_2 = 1/(8q) > 0$. Лемма 2 доказана. □

ЛЕММА 3. Пусть $2\alpha/r = \tilde{\alpha}$ является иррациональным числом. Тогда существуют положительные постоянные λ_0, r_0 и \tilde{C}_3 , для которых при всех $|\lambda| < \lambda_0$ и $r < r_0$, и $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|\delta_k(\alpha, \lambda)| > \mu_k^2 \tilde{C}_3 > 0.$$

Доказательство. Пусть $2\alpha/r = \tilde{\alpha}$ является иррациональным числом. В силу известных неравенств

$$|x| \leq |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}|x|, \quad |x| \leq 1,$$

справедлива оценка

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} \leq \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}. \quad (22)$$

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ можно подобрать $n \in \mathbb{Z}$ такое, что имеет место неравенство [10, с. 37]

$$|k\tilde{\alpha} - n| < \frac{1}{\sqrt{5k}}.$$

Пусть $n \in \mathbb{Z}$ такое, что выполнено последнее неравенство или равносильное ему

$$\pi|k\tilde{\alpha} - n| < \frac{\pi}{\sqrt{5k}}. \quad (23)$$

Из (22) и (23) имеем

$$\begin{aligned} \left| \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} + \pi(k\tilde{\alpha} - n) \right| &\leq \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} + \pi k \left| \tilde{\alpha} - \frac{n}{k} \right| < \\ &< \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} + \frac{\pi}{\sqrt{5k}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} + \frac{2}{\sqrt{5k}} \right) \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

при условии

$$r \leq r_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{5\sqrt{5} - 11} \leq \pi k \sqrt{\frac{2k^2 - 4\sqrt{5}k + 4}{\sqrt{5}k - 1}}.$$

С учетом этого и того, что $1 - \frac{2}{\pi}|x| \leq \cos x$ при $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, имеем

$$|\sin(\gamma_k - \mu_k \alpha)| = \left| \cos \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}} + \pi(k\tilde{\alpha} - n) \right] \right| > \cos \frac{\pi}{2} r_0 \geq 1 - r_0.$$

Возвращаясь к $\delta_k(\alpha, \lambda)$, из (17) при $r < r_0$, $|\lambda| < \lambda_0$ имеем

$$\begin{aligned}
 |\delta_k(\alpha, \lambda)| &\geq \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2(1-r_0)} - |\lambda| \geq \\
 &\geq \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2} \left(1 - r_0 - \frac{|\lambda|}{\sqrt{(2\pi/r)^4 + (2\pi/r)^2}} \right) = \\
 &= \sqrt{\mu_k^4 + \mu_k^2(1-r_0)} \left(1 - \frac{|\lambda|}{\lambda_0} \right) > \mu_k^2 \tilde{C}_3 > 0,
 \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_3 = (1-r_0)(1-|\lambda|/\lambda_0)$, $\lambda_0 = (1-r_0)\sqrt{(2\pi/r)^4 + (2\pi/r)^2}$.

Лемма 3 доказана. □

Теперь при определенных условиях на функцию $f(x, y)$ покажем, что функция $u(x, y)$, представимая в виде (19), где $u_k(y)$ определяются формулами (14) и (16), является решением задачи 1.

Формально из (19) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_{xx}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k^2 u_k(y) e^{-i\mu_k x}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (24)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u'_k(y) e^{-i\mu_k x}, \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (25)$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u''_k(y) e^{-i\mu_k x}, \quad (x, y) \in \Omega^-. \quad (26)$$

Из (14) и соответствующих производных при $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
 |u_0(y)| &\leq \frac{1}{|\lambda|} |f_0^+(0)| + \frac{\alpha}{|\lambda|} \|f_0^-\|_{\bar{C}} + \begin{cases} \beta \|f_0^+\|_C^+, & y \geq 0, \\ \frac{\alpha^2}{2} \|f_0^-\|_{\bar{C}}, & y \leq 0, \end{cases} \\
 |u'_0(y)| &\leq |f_0^+(y)| \leq \|f_0^+\|_C^+, \quad y > 0, \\
 |u''_0(y)| &\leq |f_0^-(y)| \leq \|f_0^-\|_{\bar{C}}, \quad y < 0,
 \end{aligned}$$

где

$$\|f_0^+\|_C^+ = \max_{0 \leq y \leq \beta} |f_0^+(y)|, \quad \|f_0^-\|_{\bar{C}} = \max_{-\alpha \leq y \leq 0} |f_0^-(y)|.$$

Теперь, для доказательства сходимости (19) и соответствующих производных (24), (25), (26), достаточно доказать сходимость сумм при $k \neq 0$.

Далее нам понадобится

ЛЕММА 4. Если

$$\begin{aligned}
 f^-(x, y) &\in C_{x,y}^{1,0}(\bar{\Omega}^-), \quad f^+(x, y) \in C_{x,y}^{1,0}(\bar{\Omega}^+), \\
 f^+(x, 0) &\in C^2[0, r], \quad f_x^+(0, 0) = f_x^+(r, 0), \\
 f^-(0, y) &= f^-(r, y), \quad -\alpha \leq y \leq 0, \\
 f^+(0, y) &= f^+(r, y), \quad 0 \leq y \leq \beta,
 \end{aligned}$$

то для коэффициентов $f_k^-(y)$ ряда Фурье (10) функции $f^-(x, y)$ и коэффициентов $f_k^+(y)$ ряда Фурье (9) функции $f^+(x, y)$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ справедливы оценки

$$|f_k^-(y)| \leq \frac{C_1}{\mu_k^2}, \quad -\alpha \leq y \leq 0, \quad (27)$$

$$|f_k^+(0)| \leq \frac{C_1}{|\mu_k|^3}, \quad |f_k^+(y)| \leq \frac{C_1}{\mu_k^2}, \quad 0 < y \leq \beta, \quad (28)$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная.

Справедливость леммы 4 следует из теории рядов Фурье (см., напр., [11, гл. 11, § 4, п. 2]).

ЛЕММА 5. Пусть имеют место оценки (21), (27), (28). Тогда при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ справедливы оценки

$$|u_k(y)| \leq \frac{C_2}{\mu_k^4}, \quad -\alpha \leq y \leq \beta,$$

$$|u'_k(y)| \leq \frac{C_2}{\mu_k^2}, \quad 0 < y < \beta,$$

$$|u''_k(y)| \leq \frac{C_2}{\mu_k^2}, \quad -\alpha < y < 0,$$

где C_2 — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. С учетом (21) и второй теоремы о среднем значении [12] имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} |e^{-\mu_k^2 y}| &\leq 1, \quad \left| \int_0^y f_k^+(\eta) e^{-\mu_k^2 (y-\eta)} d\eta \right| \leq \frac{1}{\mu_k^2} S(f_k^+), \quad y > 0, \\ \left| f_k^+(0) \frac{\cos \mu_k \alpha}{\delta_k(\alpha, \lambda)} \right| &\leq \frac{C_0}{\mu_k^2} |f_k^+(0)|, \quad \left| \int_{-\alpha}^0 f_k^-(\eta) \frac{\cos \mu_k (\eta + \alpha)}{\delta_k(\alpha, \lambda)} d\eta \right| \leq \frac{2C_0}{|\mu_k|^3} S(f_k^-), \\ |\cos \mu_k y - \mu_k \sin \mu_k y| &\leq 1 + |\mu_k|, \quad y < 0, \\ \left| f_k^+(0) \frac{\sin \mu_k y}{\mu_k} \right| &\leq \frac{1}{|\mu_k|} |f_k^+(0)|, \quad y < 0, \\ \left| \int_y^0 f_k^-(\eta) \frac{\sin \mu_k (\eta - y)}{\mu_k} d\eta \right| &\leq \frac{2}{\mu_k^2} S(f_k^-), \quad y < 0, \end{aligned}$$

где

$$S(f_k^+) = \sum_{i=1}^m (|f_k^+(y_{i-1})| + |f_k^+(y_i)|), \quad S(f_k^-) = \sum_{i=1}^n (|f_k^-(y_{i-1})| + |f_k^-(y_i)|),$$

y_i разбивают область определения соответствующей функции на (наименьшее) конечное число частей, в каждой из которых данная функция монотонна.

Из оценок выше, а также (14), (16) находим:

$$|u_k(y)| \leq \begin{cases} \frac{C_0}{\mu_k^2} |f_k^+(0)| + \frac{2C_0}{|\mu_k|^3} S(f_k^-) + \frac{1}{\mu_k^2} S(f_k^+), & y \geq 0, \\ \left(\frac{2\pi + r}{2\pi} C_0 + 1 \right) \left(\frac{1}{|\mu_k|} |f_k^+(0)| + \frac{2}{\mu_k^2} S(f_k^-) \right), & y \leq 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$|u'_k(y)| \leq C_0 |f_k^+(0)| + \frac{2C_0}{|\mu_k|} S(f_k^-) + S(f_k^+) + |f_k^+(y)|, \quad y > 0, \quad (30)$$

$$|u''_k(y)| \leq \left(\frac{2\pi + r}{2\pi} C_0 + 1 \right) (|\mu_k| |f_k^+(0)| + 2S(f_k^-)) + |f_k^-(y)|, \quad y < 0. \quad (31)$$

Если положить

$$C_2 = C_1 \left(1 + \max \left\{ (4n + 1)C_0 + 2m, \left(\frac{2\pi + r}{2\pi} C_0 + 1 \right) (4n + 1) \right\} \right),$$

то из (29), (30), (31) с учетом (27), (28) следует справедливость леммы 5. \square

Из оценок леммы 5 по признаку Вейерштрасса следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (24), (25), (26) и, значит, можно непосредственно показать, что (19) является решением $u(x, y)$ задачи 1.

Таким образом доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия одной из лемм 1–3 и $f(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда существует единственное решение задачи 1, причем решение $u(x, y)$ полностью определяется равенством (19) с учетом (9), (10), (14), (16). Если при каких-то значениях α , λ и $k = p \in \mathbb{Z}$ нарушено условие (15), то задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (18).

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Дезин А. А. Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // Докл. АН СССР, 1963. Т. 148, № 5. С. 1013–1016.
2. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. EDN: PDBU1H.
3. Нахушева З. А. Об одной нелокальной задаче А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Диффер. уравн., 2009. Т. 45, № 8. С. 1199–1203. EDN: KUEVX.
4. Сабитов К. Б. Задача Дезина для уравнения смешанного типа со степенным вырождением // Диффер. уравн., 2019. Т. 55, № 10. С. 1426–1431. EDN: HCBKMU. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064119100133>.
5. Сабитов К. Б., Новикова В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Матем., 2016. № 6. С. 61–72. EDN: VPQASJ.
6. Сабитов К. Б., Гущина В. А. Задача А. А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Матем., 2017. № 3. С. 37–50. EDN: XEDKCH.

7. Гущина В. А. Нелокальная задача А. А. Дезина для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 22–32. EDN: [WQPWFT](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1470>.
8. Нахушева З. А. *Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений*. Нальчик: КБНЦ РАН, 2012. 196 с. EDN: [PFJSRF](#).
9. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2007. Т. 413, № 1. С. 23–26. EDN: [IAALPP](#).
10. Чандрасекхаран К. *Введение в аналитическую теорию чисел*. М.: Мир, 1974. 188 с.
11. Будак Б. М., Фомин С. В. *Кратные интегралы и ряды*. М.: Наука, 1967. 608 с.
12. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 864 с. EDN: [QJMDGD](#).

MSC: 35M10

Dezin problem analog for a parabolic-hyperbolic type equation with periodicity condition

R. A. Kirzhinov

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

In this paper we consider an inhomogeneous second-order parabolic-hyperbolic mixed type equation, represented as one-dimensional heat equation in the parabolic part and the one-dimensional wave equation in the hyperbolic part. For the equation, an analog of the Dezin problem is investigated, which means to find a solution to the equation that satisfies inner-boundary condition, relating the value of the desired function on the equation type change line to the value of the normal derivative on the hyperbolicity region boundary, and inhomogeneous periodicity nonlocal boundary conditions. A substitution is given that allows us to reduce the problem to an equivalent one and, without losing generality, restrict ourselves to investigate the problem with homogeneous conditions for an inhomogeneous equation.

The solution is constructed as the Fourier series on the orthonormal system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. A criterion for the solution uniqueness to the problem is established.

In case when the uniqueness criterion is violated, an example of a non-trivial solution to a homogeneous problem is given, and a necessary and sufficient condition for the existence of a solution to an inhomogeneous problem is obtained.

In justifying the solution existence, the problem of small denominators in the sum of the series with respect to the ratio of the rectangle sides in the hyperbolic part of the domain. An estimate of the denominator separation from zero under certain conditions with respect to the problem parameters is obtained. This estimate allows us to substantiate the uniform convergence of the series and their derivatives up to the second-order inclusive under certain conditions for given functions.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kirzhinov R. A. Dezin problem analog for a parabolic-hyperbolic type equation with periodicity condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 259–272. EDN: LJNZP. DOI: [10.14498/vsgtu1892](https://doi.org/10.14498/vsgtu1892) (In Russian).

Author's Details:

Romazan A. Kirzhinov  <https://orcid.org/0000-0001-6645-7175>M.Sc.; Trainee Researcher; Dept. of Mixed-Type Equations; e-mail: kirzhinov.r@mail.ru

Keywords: Dezin problem analog, parabolic-hyperbolic type equation, non-local boundary conditions.

Received: 29th October, 2021 / Revised: 7th December, 2021 /

Accepted: 24th January, 2022 / First online: 13th May, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Dezin A. A. The simplest solvable extensions of ultrahyperbolic and pseudoparabolic operators, *Sov. Math., Dokl.*, 1963, vol. 4, pp. 208–211.
2. Nakhshuev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlia uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with Shifts for Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (in Russian)
3. Nakhshueva Z. A. On a nonlocal problem of A. A. Dezin for the Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Differ. Equat.*, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1223–1228. EDN: MWSRUF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266109080151>.
4. Sabitov K. B. Dezin problem for an equation of the mixed type with a power-law degeneracy, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 10, pp. 1384–1389. EDN: BCTAQW. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119100136>.
5. Sabitov K. B., Novikova V. A. Nonlocal Dezin's problem for Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 52–62. EDN: WTXQCH. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X16060074>.
6. Sabitov K. B., Gushchina V. A. Dezin's problem for inhomogeneous Lavrent'ev–Bitsadze equation, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 3, pp. 31–43. EDN: YVEDKR. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X17030045>.
7. Gushchina V. A. The nonlocal A. A. Desin's problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 22–32 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1470>.
8. Nakhshueva Z. A. *Nelokal'nye kraevye zadachi dlia osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravnenii* [Nonlocal Boundary-Value Problems for Basic and Mixed Types of Differential Equations]. Nalchik, KBNTs RAN, 2012, 196 pp. (in Russian)
9. Sabitov K. B. Dirichlet problem for mixed-type equations in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2007, vol. 75, no. 1, pp. 193–196. EDN: LKMREP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562407020056>.
10. Chandrasekharan K. *Introduction to Analytic Number Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 148. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1968, viii+144 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-46124-8>.
11. Budak B. M., Fomin S. V. *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in higher mathematics*. Moscow, Mir Publ., 1973, 640 pp.
12. Fichtenholz G. M. *Differential- und Integralrechnung. II* [Differential and integral calculus. II], Hochschulbücher für Mathematik [University Books for Mathematics], vol. 62. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1986, 836 pp. (In German)



УДК 517.956

Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя

А. К. Уринов^{1,2}, М. С. Азизов¹¹ Ферганский государственный университет, Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.² Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

В данной статье для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике сформулирована начально-граничная задача. На основе метода разделения переменных к поставленной задаче получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения высокого четного порядка. Доказана самосопряженность последней задачи, откуда следует существование системы ее собственных функций, а также ортонормированность и полнота этой системы. Далее исследованы равномерная сходимости некоторых билинейных рядов и порядок коэффициентов Фурье, зависящих от найденных собственных функций. Решение изучаемой задачи найдено в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Доказана равномерная сходимости этого ряда, а также рядов, полученных из него почленным дифференцированием. Методом спектрального анализа доказана единственность решения задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных четного порядка, оператор Бесселя, начально-граничная задача, спектральный метод, функция Грина, интегральное уравнение, существование, единственность и устойчивость решения.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292. EDN: LKMGUE. DOI: 10.14498/vsgtu1893.

Сведения об авторах

Ахмаджон Кушакович Уринов  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; ведущий научный сотрудник²; e-mail: urinovak@mail.ru

Музаффар Сулаймонович Азизов  <https://orcid.org/0000-0002-2091-9300>

докторант; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; e-mail: muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Получение: 29 октября 2021 г. / Исправление: 9 марта 2022 г. /
 Принятие: 12 марта 2022 г. / Публикация онлайн: 23 мая 2022 г.

Введение. Известно, что дифференциальные уравнения в частных производных имеют многочисленные приложения в науке и технике [1, 2]. В настоящее время эта теория развивается быстрыми темпами в различных направлениях. Особое место занимают дифференциальные уравнения в частных производных высокого четного порядка. Имеются многочисленные научные работы, в которых сформулированы и изучены начальные и начально-граничные задачи для таких уравнений. Например, в работе [3] в области $\Delta = \{(x, t) : 0 < x < p; 0 < t < T\}$ для уравнения $u_{tt} - u_{xxxx} = f(x, t)$ поставлена и исследована задача с условиями

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(p, t) = u_{xx}(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

а в работе [4] — с условиями

$$u(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p,$$

$$u_x(0, t) = u_{xxx}(0, t) = u_x(p, t) = u_{xxx}(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

В работах [5, 6] в области Δ аналогичные задачи изучены для уравнений $u_{xxxx} - u_{tt} - \lambda u = f(x, t)$ и $u_{xxxx} - u_{tt} - c(x, t)u = f(x, t)$ соответственно, а в работах [7–9] — для уравнения $u_{xxxx} + u_{tt} = f(x, t)$. В работе [10] для уравнения $u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0$ в верхней полуплоскости изучена задача Коши, а в работах [11–13] в области Δ исследованы начально-граничные задачи для уравнения $u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x, t)$ с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq p$ и различными граничными условиями, в том числе с условиями $u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(p, t) = u_{xxx}(p, t) = 0$, $0 \leq t \leq T$. Начально-граничная задача в области Δ для уравнения $u_{xxxx} + u_{tt} + (2\gamma/t)u_t = f(x, t)$, где $\gamma \in (0, 1/2) - \text{const}$, с начальными $u(x, 0) = \varphi_1(x)$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} u_t(x, t) = \varphi_2(x)$ и граничными условиями (1), (2) исследована в работах [14, 15] соответственно.

В работе [16] в области Δ рассмотрена задача об определении решения уравнения

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (3)$$

удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} u(0, t) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} u(p, t) = 0, \quad m = \overline{0, k-1}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k \geq 2 \quad (4)$$

и одной из следующих пар условий:

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p;$$

$$u(x, 0) = u_t(x, T) = 0, \quad 0 \leq x \leq p; \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u(x, T), \quad u_t(x, 0) = u_t(x, T), \quad 0 \leq x \leq p,$$

причем здесь подробно исследована задача (3)–(5). В [16] также поставлена задача для уравнения (3) с условиями (5) и

$$\frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} u(0, t) = \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x^{2m+1}} u(p, t) = 0, \quad m = \overline{0, k-1}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k \geq 2.$$

В работе [17] для уравнения (3) в области Δ исследована задача с условиями (4) и

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq p.$$

В работе [18] в области $D = \{(x, t) : 0 < x < \pi; 0 < t < 2\pi\}$ для уравнения (3) при $f(x, t) \equiv 0$, $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ исследована некорректная задача с условиями

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(0, t) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} u(\pi, t) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$u(\alpha\pi, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

а в [19] для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(t, x, u(t, x)), \quad k \in \mathbb{N}$$

в области $D_T = \{(t, x) : 0 < t < T; 0 < x < \pi\}$ рассмотрена задача с начальными

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(T, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

и периодическими условиями вида

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \Big|_{x=\pi}, \quad j = 0, 1, \dots, 2k-1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

В работе [20] в области Δ для уравнения

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, t)$$

исследованы задачи с условиями (4), (5) и (4), $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$.

В работе [21] изучены начально-краевые задачи для уравнения вида

$$u_{tt} + A(x, D)u(x, t) = f(x, t),$$

где $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ — произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m = 2l$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ — мультииндекс и $D = (D_1, D_2, \dots, D_N)$, $D_j = \partial/\partial x_j$, а в [22] — задачи для уравнения

$$\partial_t^\rho u(x, t) + A(x, D)u(x, t) = f(x, t),$$

где $\partial_t^\rho u(x, t)$ — дифференциальный оператор Римана—Лиувилля дробного порядка $\rho \in (0, 1]$.

Кроме приведенного выше, в [23–27] исследована задача Коши в верхней полуплоскости для уравнений высокого четного порядка с оператором Бесселя.

1. Постановка задачи. Исследование спектральной задачи. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$B_{\gamma-1/2}^t u + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = f(x, t), \quad (6)$$

где γ, T — заданные действительные числа, причем $0 < \gamma < 1/2$, $f(x, t)$ — заданная функция, а $B_{\omega}^t \equiv \partial^2 / \partial t^2 + [(1 + 2\omega)/t] \partial / \partial t$ — оператор Бесселя.

Исследуем следующую начально-граничную задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{2k-1,0}(\bar{\Omega}) \cap C_{x,t}^{2k,2}(\Omega)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (6), а на границе области Ω следующим начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{2\gamma} u_t(x, t) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1; \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \dots = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(1, t) = \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} u(1, t) = \dots = \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывные функции.

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения задачи 1. Нетривиальные решения однородного уравнения

$$B_{\gamma-1/2}^t u + (-1)^k \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0,$$

удовлетворяющего условиям (8), ищем в виде $u(x, t) = v(x)T(t)$. В результате относительно функции $T(t)$ получим уравнение

$$B_{\gamma-1/2}^t T(t) + \lambda T(t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

а относительно функции $v(x)$ получим следующую спектральную задачу:

$$Mv \equiv (-1)^k v^{(2k)}(x) = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} v(0) = v'(0) = \dots = v^{(k-1)}(0) = 0, \\ v^{(k)}(1) = v^{(k+1)}(1) = \dots = v^{(2k-1)}(1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Рассмотрим задачу (9), (10). Пусть $v(x), w(x) \in C^{(2k-1)}[0, 1] \cap C^{(2k)}(0, 1)$ и $v^{(2k)}(x), w^{(2k)}(x) \in C(0, 1) \cap L[0, 1]$. Тогда интегрированием по частям нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\int_0^1 w Mv \, dx = \int_0^1 v M w \, dx + (-1)^k \left[w v^{(2k-1)} - w' v^{(2k-2)} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^{k-1} w^{(k-1)} v^{(k)} + (-1)^k w^{(k)} v^{(k-1)} + \dots + (-1)^{2k-1} w^{(2k-1)} v \right]_{x=0}^{x=1}.$$

Отсюда следует, что если функции $v(x)$ и $w(x)$ удовлетворяют условиям (10), то имеет место равенство $\int_0^1 wMv dx = \int_0^1 vLw dx$, откуда следует, что задача $Mv = 0$, (10) самосопряженная. Теперь выясним, при каких λ задача (9), (10) имеет нетривиальные решения. С этой целью сначала умножим уравнение (9) на функцию $v(x)$, а затем проинтегрируем по x на отрезке $[0, 1]$:

$$(-1)^k \int_0^1 v^{(2k)}(x)v(x) dx = \lambda \int_0^1 v^2(x) dx.$$

Применим правило интегрирования по частям k раз к первому интегралу:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 v^2(x) dx &= \int_0^1 [v^{(k)}(x)]^2 dx + \\ &+ (-1)^k \left[v^{(2k-1)}(x)v(x) - v^{(2k-2)}(x)v'(x) + \dots + (-1)^{k-1}v^{(k)}(x)v^{(k-1)}(x) \right]_0^1. \end{aligned}$$

В силу условия (10) из последнего соотношения следует равенство

$$\lambda \int_0^1 v^2(x) dx = \int_0^1 [v^{(k)}(x)]^2 dx.$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq 0$.

Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Здесь уравнение (9) принимает вид $v^{(2k)}(x) = 0$. Общее решение этого уравнения определяется равенством

$$v(x) = c_1 \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + c_2 \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + \dots + c_{2k-2} \frac{x^2}{2!} + c_{2k-1} \frac{x}{1!} + c_{2k},$$

где $c_j, j = \overline{1, 2k}$ — произвольные постоянные. Подчиняя эту функцию условиям (10), получим $c_j = 0, j = \overline{1, 2k}$. Тогда $v(x) \equiv 0, x \in [0, 1]$.

Следовательно, задача (9), (10) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Предполагая $\lambda > 0$, приведем задачу (9), (10) к эквивалентному интегральному уравнению. С этой целью построим функцию Грина:

$$\begin{aligned} G(x, s) &= \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!0!} + \frac{(-1)^{k-2}x^{2k-2}s}{(2k-2)!1!} + \dots + \frac{x^k s^{k-1}}{k!(k-1)!}, & 0 \leq x < s, \\ \frac{(-1)^{k-1}s^{2k-1}}{(2k-1)!0!} + \frac{(-1)^{k-2}s^{2k-2}x}{(2k-2)!1!} + \dots + \frac{s^k x^{k-1}}{k!(k-1)!}, & s < x \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Функция Грина (11) по переменной x удовлетворяет условиям (9), ее производные по x до порядка $2k - 2$ включительно непрерывны при $x \in (0, 1)$, производная порядка $2k - 1$ при $x = s \in (0, 1)$ имеет скачок вида

$$\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} G(x, s) \Big|_{x=s+0} - \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} G(x, s) \Big|_{x=s-0} = (-1)^k, \quad (12)$$

а производная порядка $2k$ удовлетворяет уравнению $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x, s) = 0$ при $x \neq s \in (0, 1)$.

Пользуясь этими свойствами функции $G(x, s)$, нетрудно убедиться, что решение уравнения $Mv(x) = g(x)$, удовлетворяющее условиям (10), определяется формулой

$$v(x) = \int_0^1 G(x, s)g(s) ds, \quad (13)$$

где $g(x)$ — заданная непрерывная функция.

Докажем, что при (13) выполняется равенство $Mv(x) = g(x)$.

В силу свойств функции $G(x, s)$ из (13) сразу следует выполнение условий (10). Перепишем (13) в виде

$$v(x) = \int_0^x G(x, s)g(s) ds + \int_x^1 G(x, s)g(s) ds.$$

Это равенство последовательно продифференцируем $2k$ раз. Тогда, принимая во внимание непрерывность функции $g(x)$ и производных функции $G(x, s)$ до $(2k - 2)$ порядка включительно, получим

$$\begin{aligned} v^{(2k)}(x) &= \int_0^x G_x^{(2k)}(x, s)g(s) ds + \int_x^1 G_x^{(2k)}(x, s)g(s) ds + \\ &+ [G_x^{(2k-1)}(x, x-0) - G_x^{(2k-1)}(x, x+0)]g(x-0) + \\ &+ [g(x-0) - g(x+0)]G_x^{(2k-1)}(x, x+0). \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств (12) и $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})G(x, s) = 0$, $x \neq s$, а также непрерывности функции $g(x)$ следует, что $v^{(2k)}(x) = (-1)^k g(x)$, т. е. $Mv(x) = g(x)$.

Из доказанного выше следует, что задача (9), (10) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s)v(s) ds. \quad (14)$$

Так как $\lambda > 0$ и ядро $G(x, s)$ симметрично и непрерывно, согласно теории интегральных уравнений [28], уравнение (14) и, следовательно, задача (9), (10) имеет счетное число собственных значений

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow +\infty,$$

а соответствующие им собственные функции

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad v_3(x), \quad \dots, \quad v_n(x), \quad \dots$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, 1)$; при этом любая функция $g(x) \in L_2(0, 1)$ разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям. Так как задача $Mv = 0$, (10) самосопряженная, система функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ полна в пространстве $L_2(0, 1)$ [29].

2. Сходимость основных билинейных рядов. Сформулируем и докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Следующие ряды равномерно сходятся на $[0, 1]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[v_n^{(j)}(x)]^2}{\lambda_n^2}, \quad j = \overline{1, 2k-1}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3}. \quad (15)$$

Доказательство. Так как ядро $G(x, s)$ интегрального уравнения (14) симметрично, непрерывно и положительно, согласно теореме Мерсера [28] справедливо равенство

$$G(x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n(x)v_n(s)}{\lambda_n}.$$

Отсюда в силу непрерывности ядра $G(x, s)$ при $x = s$ следует неравенство

$$G(x, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n} \leq K, \quad (16)$$

где K — некоторое действительное положительное число. Следовательно, первый ряд в (15) сходится равномерно.

Далее согласно (14) справедливы следующие равенства:

$$v_n^{(j)}(x) = \lambda_n \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) v_n(s) ds, \quad j = \overline{1, 2k-1}$$

или

$$\frac{v_n^{(j)}(x)}{\lambda_n} = \int_0^1 \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) v_n(s) ds, \quad j = \overline{1, 2k-1}.$$

Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ ортонормированная система, из последнего равенства следует, что $v_n^{(j)}(x)/\lambda_n$ являются коэффициентами Фурье функции $(\partial^j/\partial x^j)G(x, s)$ по аргументу s . Тогда, учитывая, что $(\partial^j/\partial x^j)G(x, s)$, $j = \overline{1, 2k-1}$, $\forall x \in [0, 1]$ квадратично суммируемы, согласно неравенству Бесселя имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{v_n^{(j)}(x)}{\lambda_n} \right]^2 \leq \int_0^1 \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, s) \right]^2 ds \leq K_j, \quad j = \overline{1, 2k-1},$$

где K_j — некоторые действительные положительные числа. Следовательно, вторые ряды в (15) равномерно сходятся.

Далее, учитывая уравнение (9) и неравенство (16), имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\lambda_n(-1)^k v_n(x)]^2}{\lambda_n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[v_n(x)]^2}{\lambda_n} \leq K,$$

откуда следует, что последний ряд в (15) сходится равномерно. \square

3. Порядок коэффициентов Фурье. Сформулируем и докажем следующие леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $g(x) \in C^{k-1}[0, 1]$, $g^{(k)}(x) \in L_2(0, 1)$ и $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-2)}(0) = g^{(k-1)}(0) = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n g_n^2 \leq \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx, \quad (17)$$

где g_n — коэффициенты Фурье функции $g(x)$ по системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее выражение:

$$J = \int_0^1 \left[g^{(k)}(x) - \sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n^{(k)}(x) \right]^2 dx \geq 0.$$

Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx + \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n^{(k)}(x) \right]^2 dx - 2 \int_0^1 g^{(k)}(x) \left[\sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n^{(k)}(x) \right] dx = \\ &= \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx + \int_0^1 \sum_{n=1}^{m-1} [g_n v_n^{(k)}(x)]^2 dx + 2 \sum_{\substack{n,l=1 \\ n \neq l}}^{m-1} g_n g_l \int_0^1 v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x) dx - \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{m-1} g_n \int_0^1 g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя правило интегрирования по частям k раз, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x) dx &= \left[v_n^{(k)}(x) v_l^{(k-1)}(x) - v_n^{(k+1)}(x) v_l^{(k-2)}(x) + \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^{k-1} v_n^{(2k-1)}(x) v_l(x) \right]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 v_n^{(2k)}(x) v_l(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу равенств (10) и $(-1)^k v_n^{(2k)}(x) = \lambda v_n(x)$ следует, что

$$\int_0^1 v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x) dx = \lambda_n \int_0^1 v_n(x) v_l(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq l, \\ \lambda_n, & n = l. \end{cases} \quad (19)$$

Аналогично, принимая во внимание условия леммы 2, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x) dx &= \left[g^{(k-1)}(x) v_n^{(k)}(x) - g^{(k-2)}(x) v_n^{(k+1)}(x) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k-1} g(x) v_n^{(2k-1)}(x) \right]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 v_n^{(2k)}(x) g(x) dx = \\ &= \lambda_n \int_0^1 g(x) v_n(x) dx = \lambda_n g_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая равенства (19), (20) и $J \geq 0$, из равенства (18) получим

$$J = \int_0^1 [g^{(k)}(x)]^2 dx - \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n g_n^2 \geq 0.$$

Так как это неравенство имеет место $\forall m \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство (17). \square

ЛЕММА 3. Пусть $g(x) \in C^{2k-1}[0, 1]$, $g^{(2k)}(x) \in L_2(0, 1)$ и $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-2)}(0) = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(1) = g^{(k+1)}(1) = \dots = g^{(2k-1)}(1) = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \leq \int_0^1 [g^{(2k)}(x)]^2 dx. \quad (21)$$

Доказательство. Применяя правило интегрирования по частям $2k$ раз, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 g^{(2k)}(x)v_n(x) dx &= \left[g^{(2k-1)}(x)v_n(x) - g^{(2k-2)}(x)v_n'(x) + \right. \\ &+ \dots + (-1)^{2k-1} g(x)v_n^{(2k-1)}(x) \Big]_0^1 + (-1)^{2k} \int_0^1 g(x)v_n^{(2k)}(x) dx = \\ &= (-1)^k \lambda_n \int_0^1 g(x)v_n(x) dx = (-1)^k \lambda_n g_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(-1)^k \lambda_n g_n$ — коэффициенты Фурье функции $g^{(2k)}(x)$ по системе функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$. Так как $g^{(2k)}(x) \in L_2(0, 1)$, согласно неравенству Бесселя справедливо неравенство (21). \square

ЛЕММА 4. Пусть $g(x) \in C^{3k-1}[0, 1]$, $g^{(3k)}(x) \in L_2(0, 1)$ и $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-2)}(0) = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(1) = g^{(k+1)}(1) = \dots = g^{(2k-1)}(1) = 0$, $g^{(2k)}(0) = g^{(2k+1)}(0) = \dots = g^{(3k-1)}(0) = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \leq \int_0^1 [g^{(3k)}(x)]^2 dx. \quad (22)$$

Доказательство. Функция $g^{(2k)}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2 и, как доказано выше, $(-1)^k \lambda_n g_n$ — ее коэффициенты Фурье. Тогда согласно (17) получаем справедливость неравенства (22). \square

4. Существование решения задачи 1. Сформулируем и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет этим условиям по аргументу x равномерно по t . Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n t}) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n t}) + \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \left[\int_0^t J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n t}) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n \tau}) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau - \int_0^t J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n t}) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n \tau}) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau \right] \right\} v_n(x) \quad (23)$$

определяет решение задачи 1, где λ_n и $v_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи (9), (10);

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\right)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2 - \gamma) \varphi_{2n}, \quad b_n = \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2}\right)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2 + \gamma) \varphi_{1n}; \quad (24)$$

$$\varphi_{1n} = \int_0^1 \varphi_1(x) v_n(x) dx, \quad \varphi_{2n} = \int_0^1 \varphi_2(x) v_n(x) dx;$$

$$f_n(t) = \int_0^1 f(x, t) v_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Решение задачи 1 ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) v_n(x), \quad (25)$$

где $u_n(t)$ — неизвестные функции, которые подлежат определению. Разложим функцию $f(x, t)$ в ряд по системе $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) v_n(x). \quad (26)$$

Подставив (25) и (26) в уравнение (6), а (25) — в условие (7), имеем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [(-1)^k u_n(t) v_n^{(2k)}(x) + B_{\gamma-1/2}^t u_n(t) v_n(x)] = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) v_n(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{1n} v_n(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{2\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(t) v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{2n} v_n(x).$$

Из этих равенств, учитывая равенства $(-1)^k v_n^{(2k)} = \lambda_n v_n$ и ортонормированность системы функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, относительно неизвестных функций $u_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, получим следующую задачу:

$$B_{\gamma-1/2}^t u_n(t) + \lambda_n u_n(t) = f_n(t), \quad t \in (0, T), \quad n \in \mathbb{N}; \quad (27)$$

$$u_n(0) = \varphi_{1n}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{2\gamma} u_n'(t) = \varphi_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (28)$$

Применяя метод Лагранжа, легко убедиться, что решение задачи (27), (28) существует, единственно и определяется равенством

$$\begin{aligned} u_n(t) = & a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n t}) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n t}) + \\ & + \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n t}) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n \tau}) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau - \\ & - \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n t}) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n \tau}) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (29) \end{aligned}$$

где a_n и b_n — постоянные, определенные равенствами (24). Подставляя (29) в (25), получим формальное решение задачи 1 в виде (23).

Докажем, что ряд (23) и ряды $(\partial^{2k}/\partial x^{2k})u$, $t^{2\gamma}(\partial/\partial t)u$, $B_{\gamma-1/2}^t u$, полученные из (23) почленным дифференцированием, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$. При этом воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 5. Для функций $u_n(t)$, определяемых равенствами (29), справедливы неравенства

$$|u_n(t)| \leq |\varphi_{1n}| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} |\varphi_{2n}| + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Доказательство. Функции (29) с помощью функции Бесселя—Клиффорда $\bar{J}_w(z) = \Gamma(w+1)(z/2)^{-w} J_w(z)$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_n(t) = & \frac{a_n t^{1-2\gamma} (\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n t}) + \frac{b_n (\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} \bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n t}) + \\ & + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n t}) \bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n \tau}) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-2\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \bar{J}_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n t}) \bar{J}_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n \tau}) \tau f_n(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание $|\bar{J}_\nu(x)| \leq 1$ при $\nu > -1/2$, получим

$$\begin{aligned} |u_n(t)| \leq & |a_n| \frac{t^{1-2\gamma} (\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n| \frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} + \\ & + \frac{t^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} \int_0^t \tau^{2\gamma} |f_n(\tau)| d\tau + \frac{1}{1-2\gamma} \int_0^t \tau |f_n(\tau)| d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая $0 \leq \tau \leq t \leq T$ и применяя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$|u_n(t)| \leq |a_n| \frac{(T^2 \sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n| \frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2T}{1-2\gamma} \left(\int_0^T d\tau \cdot \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \leq \\
 \leq & |a_n| \frac{(T^2 \sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n| \frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_n\|_{L_2(0,T)}, \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (24), получим неравенства (30).

Лемма 5 доказана. □

Переходим к доказательству равномерной сходимости рядов (23) и

$$\begin{aligned}
 (\partial^j / \partial x^j) u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) v_n^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, 2k-1}, \\
 (\partial^{2k} / \partial x^{2k}) u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) v_n^{(2k)}(x), \tag{31}
 \end{aligned}$$

$$t^{2\gamma} u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{2\gamma} u'_n(t) v_n(x), \quad B_{\gamma-1/2}^t u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_{\gamma-1/2}^t u_n(t) v_n(x).$$

Рассмотрим ряд (31). Согласно (30), из (31) следует, что для доказательства равномерной сходимости этого ряда достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{1n} v_n^{(2k)}(x), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{2n} v_n^{(2k)}(x), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} v_n^{(2k)}(x).$$

К каждому из этих рядов применяем неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_{jn} v_n^{(2k)}(x) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi_{jn} v_n^{(2k)}(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sqrt{\lambda_n^3} \varphi_{jn} \frac{v_n^{(2k)}(x)}{\sqrt{\lambda_n^3}} \right| \leq \\
 &\leq \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 \varphi_{jn}^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3} \right]^{1/2}, \quad j = \overline{1, 2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} v_n^{(2k)}(x) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} v_n^{(2k)}(x) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\lambda_n^3 \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau \right)^{1/2} \frac{v_n^{(2k)}(x)}{\sqrt{\lambda_n^3}} \right| \leq \\
 &\leq \left(\int_0^T \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^3 f_n^2(\tau) d\tau \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[v_n^{(2k)}(x)]^2}{\lambda_n^3} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условий теоремы 1 согласно леммам 1 и 4 равномерно сходятся. Следовательно, ряды, стоящие в левых частях, сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Аналогично доказывается абсолютная и равномерная сходимость в $\bar{\Omega}$ и остальных рядов.

Из доказанного выше следует, что все ряды, соответствующие каждому члену уравнения (6) и условиям (7), (8), сходятся абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$. Тогда сумма этих рядов удовлетворяет уравнению (6) и условиям (7), (8). Следовательно, сумма ряда (23) является решением задачи 1. \square

5. Единственность решения задачи. Сформулируем и докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Задача (6)–(8) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача (6)–(8) имеет два решения: $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Введем обозначение

$$u_1(x, t) - u_2(x, t) = u_0(x, t). \quad (32)$$

Тогда функция $u_0(x, t)$ является решением однородной задачи, соответствующей задаче 1.

Рассмотрим следующие функции:

$$w_n(t) = \int_0^1 u_0(x, t)v_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (33)$$

где $v_n(x)$ — собственные функции задачи (9), (10).

Согласно (33) введем функции

$$w_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_0(x, t)v_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (34)$$

где $(\varepsilon, 1 - \varepsilon) \neq \emptyset$. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_{n,\varepsilon}(t) = w_n(t)$.

Вычислим первые и вторые производные функций (34):

$$w'_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} u_0(x, t)v_n(x) dx, \quad w''_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_0(x, t)v_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из этих равенств следует, что

$$B_{\gamma-1/2}^t w_{n,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} B_{\gamma-1/2}^t u_0(x, t)v_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу $B_{\gamma-1/2}^t u_0(x, t) = (-1)^{k+1}(\partial^{2k}/\partial x^{2k})u_0(x, t)$ последнее равенство переписывается в виде

$$B_{\gamma-1/2}^t w_{n,\varepsilon}(t) = (-1)^{k+1} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} u_0(x, t)v_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям $2k$ раз, имеем

$$B_{\gamma-1/2}^t w_{n,\varepsilon}(t) = (-1)^{k+1} \left[\frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} u_0(x, t)v_n(x) - \frac{\partial^{2k-2}}{\partial x^{2k-2}} u_0(x, t)v'_n(x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u_0(x, t) v_n^{(k-1)}(x) + (-1)^k \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} u_0(x, t) v_n^{(k)}(x) + \\
 & + (-1)^{2k-1} u_0(x, t) v_n^{(2k-1)}(x) \Big]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} + (-1)^{2k} (-1)^{k+1} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} u_0(x, t) v_n^{(2k)}(x) dx.
 \end{aligned}$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате, учитывая условия (8) и (10), а также уравнение (9) и обозначение (33), получим

$$B_{\gamma-1/2}^t w_n(t) + \lambda_n w_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

Согласно однородным начальным условиям, соответствующим (7), из (33) находим

$$w_n(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{2\gamma} w_n'(t) = 0. \quad (36)$$

Общее решение уравнения (35) согласно формуле (29) имеет вид

$$w_n(t) = \alpha_{1n} t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + \alpha_{2n} t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (37)$$

где α_{jn} — произвольные постоянные, $j = \overline{1, 2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Подчиняя функции (37) условиям (36), находим $\alpha_{jn} = 0$, $j = \overline{1, 2}$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $w_n(t) \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (33) следует, что

$$\int_0^1 u_0(x, t) v_n(x) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как система функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ полна в $L_2(0, 1)$, из последнего равенства следует, что $u_0(x, t) \equiv 0$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Тогда на основании (32) $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. \square

ТЕОРЕМА 3. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет этим условиям по x равномерно по t . Тогда для решения задачи 1 справедлива оценка

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left[\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \right], \quad (38)$$

где K_0 — некоторое действительное положительное число.

Доказательство. Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ — ортонормированная система, из (23) согласно обозначениям (29) и оценкам (30) следует такое неравенство:

$$\begin{aligned}
 \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 &= \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) v_n(x) \right]^2 dx = \\
 &= \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2(t) v_n^2(x) + 2 \sum_{\substack{n,k=1 \\ n \neq k}}^{+\infty} u_k(t) u_k(t) v_n(x) v_k(x) \right] dx = \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2(t) \leq \tilde{K} \sum_{n=1}^{+\infty} [|\varphi_{1n}| + |\varphi_{2n}| + \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}]^2 \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \tilde{K} \sum_{n=1}^{+\infty} [|\varphi_{1n}|^2 + |\varphi_{2n}|^2 + \|f_n\|_{L_2(0,T)}^2 + \\ &+ 2|\varphi_{1n}| \cdot |\varphi_{2n}| + 2|\varphi_{1n}| \cdot \|f_n\|_{L_2(0,T)} + 2|\varphi_{2n}| \cdot \|f_n\|_{L_2(0,T)}], \end{aligned}$$

где $\tilde{K} = \sup\{1, T^{1-2\gamma}/(1-2\gamma), 2T^{3/2}/(1-2\gamma)\}$. Заменяя последние три слагаемых по неравенству $a^2 + b^2 \geq 2ab$, а затем применяя неравенство Бесселя и обозначая $3\tilde{K}$ через K_0 , получим

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left(\|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \quad (39)$$

Оценим последнее слагаемое правой части (39).

Принимая во внимание первое из равенств (26) и ортонормированность системы $\{v_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$, находим

$$\begin{aligned} \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= (f(x, t), f(x, t))_{L_2(\Omega)} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)v_n(x), \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)v_n(x) \right)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)v_n(x) \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(t)v_m(x) dxdt = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^T [f_n(t)]^2 dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_{L_2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2 = \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (39), получим (38). □

Заключение. В данной работе в прямоугольной области рассмотрена начально-граничная задача для дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка с оператором Бесселя. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

Конкурирующие интересы. Мы не имеем конкурирующих интересов.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1972. 736 с.
2. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. EDN: PDBBNB.
3. Салахитдинов М. С., Аманов Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2005. № 3. С. 72–77.
4. Аманов Д., Юлдашева А. В. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2007. № 4. С. 3–8.
5. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка со спектральным параметром // *Узб. мат. ж.*, 2012. № 3. С. 22–30.
6. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2013. № 1. С. 3–10. EDN: PXPPOF.
7. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2008. № 2. С. 74–80.
8. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения четвертого порядка // *Докл. АН РУз*, 2008. № 1. С. 10–14.
9. Отарова Ж. А. Вольтеррова краевая задача для уравнения четвертого порядка // *Докл. АН РУз.*, 2008. № 6. С. 18–22.
10. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. EDN: YSXNEH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117050090>.
11. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. EDN: UGXNZR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>.
12. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. EDN: XRBXOV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117010083>.
13. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66. EDN: SXRWIP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845>.
14. Azizov M. S. A boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficient in a rectangular region // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 6. pp. 1043–1050. EDN: HDCKMU. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220060050>.
15. Азизов М. С. Смешанная задача для неоднородного уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике // *Бюл. инст. мат.*, 2020. № 4. С. 50–59.
16. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order // *Malays. J. Math. Sci.*, 2009. vol. 3, no. 2. pp. 227–248. <https://mjms.upm.edu.my/lihatmakalah.php?kod=2009/July/3/2/227-248>.
17. Amanov D. About correctness of boundary value problems for equation of even order // *Uzbek Math. J.*, 2011. no. 4. pp. 20–35.
18. Юлдашева А. В. Об одной задаче для уравнения высокого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2014. № 2(9). С. 17–22. EDN: TBECFX. DOI: <https://doi.org/10.18454/2079-6641-2014-9-2-17-22>.
19. Юлдашева А. В. Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка // *Дифференциальные уравнения. Математическая физика / Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, Т. 140. М.: ВИНТИ РАН, 2017. С. 43–49.
20. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // *AIP Conference Proceedings*, 2012. vol. 1470, no. 1, 3. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4747625>.

21. Ашуров Р. Р., Мухиддинова А. Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 30, № 1. С. 8–19. EDN: UDRGAX. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19>.
22. Ashurov R. R., Muhiddinova O. T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 2. pp. 517–525. EDN: WSMCML. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030070>.
23. Каримов Ш. Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя // *Изв. вузов. Матем.*, 2017. № 8. С. 27–41. EDN: YNLHGN.
24. Karimov Sh. T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order // *Filomat*, 2018. vol. 32, no. 3. pp. 873–883. EDN: YBVBZJ. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1803873K>.
25. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order // *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018. no. 15. pp. 853–862. EDN: VUTMHO. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.073>.
26. Каримов Ш. Т., Уринов А. К. Решение задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя // *Владикавказ. матем. журн.*, 2018. Т. 20, № 3. С. 57–68. EDN: VKJWUR. DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2018.3.17991>.
27. Urinov A. K., Karimov Sh. T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type // *Lobachevskii J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 1. pp. 102–110. EDN: FNVWZQ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508022001014X>.
28. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям*. М.: Физматлит, 1959. 234 с.
29. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Физматлит, 1969. 528 с.

MSC: 35G15

An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator

A. K. Urinov^{1,2}, *M. S. Azizov*¹¹ Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Fergana, 150100, Uzbekistan.² Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

In present paper, an initial-boundary value problem is formulated in a rectangle for a higher even order partial differential equation with the Bessel operator. Applying the method of separation of variables to the considered problem a spectral problem is obtained for an ordinary differential equation of higher even order. The self-adjointness of the last problem is proved, which implies the existence of the system of its eigenfunctions, as well as the orthonormality and completeness of this system. The uniform convergence of some bilinear series and the order of the Fourier coefficients, depending on the found eigenfunctions, is investigated. The solution of the considered problem is found as the sum of the Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The absolute and uniform convergence of this series, as well as the series obtained by its differentiating, have been proved. The uniqueness of the solution of the problem is proved by the method of spectral analysis. An estimate is obtained for the solution of the problem which implies the continuous dependence of the solution on the given functions.

Keywords: even order partial differential equation, Bessel operator, initial-boundary value problem, spectral method, Green's function, integral equation, existence, uniqueness and stability of the solution.

Received: 29th October, 2021 / Revised: 9th March, 2022 /Accepted: 12th March, 2022 / First online: 23rd May, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Urinov A. K., Azizov M. S. An initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with a Bessel operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 273–292. EDN: LKMGUE. DOI: [10.14498/vsgtu1893](https://doi.org/10.14498/vsgtu1893) (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹; Leading Researcher²; e-mail: urinovak@mail.ru*Muzaffar S. Azizov*  <https://orcid.org/0000-0002-2091-9300>Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹;e-mail: muzaffar.azizov.1988@mail.ru

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1972, 736 pp. (In Russian)
2. Nakhshiev A. M. *Uravneniia matematicheskoi biologii* [Equations of Mathematical Biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 pp. (In Russian). EDN: PDBBNB.
3. Salakhitdinov M. S., Amanov D. Solvability and spectral properties of a selfadjoint problem for a fourth-order equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2005, no. 3, pp. 72–77 (In Russian).
4. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of a selfadjoint problem for a fourth-order equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2007, no. 4, pp. 3–8 (In Russian).
5. Amanov D., Murzambetova M. B. Boundary value problems for a fourth order equation with a spectral parameter, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2012, no. 3, pp. 22–30 (In Russian).
6. Amanov D., Murzambetova M. B. A boundary value problem for a fourth order partial differential equation with the lowest term, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 3–10 (In Russian). EDN: PXPCOF.
7. Otarova Zh. A. The solvability and spectral properties of selfadjoint problems for a fourth-order equation, *Uzbek. Mat. Zh.*, 2008, no. 2, pp. 74–80 (In Russian).
8. Otarova Zh. A. Solvability and spectral properties of a selfadjoint problem for a fourth-order equation, *Dokl. AN RUz.*, 2008, no. 1, pp. 10–14 (In Russian).
9. Otarova Zh. A. Volterra boundary value problem for a fourth order equation, *Dokl. AN RUz.*, 2008, no. 6, pp. 18–22 (In Russian).
10. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. EDN: XNIRNN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117050093>.
11. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). EDN: UGXNZR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>.
12. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ. Equ.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. EDN: YVJCOJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117010086>.
13. Sabitov K. B., Fadeeva O. V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 1, pp. 51–66 (In Russian). EDN: SXRWIP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845>.
14. Azizov M. S. A boundary problem for the fourth order equation with a singular coefficient in a rectangular region, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 6, pp. 1043–1050. EDN: HDCKMU. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220060050>.
15. Azizov M. S. A mixed problem for a fourth-order nonhomogeneous equation with singular coefficients in a rectangular, *Bul. Inst. Math.*, 2020, no. 4, pp. 50–59 (In Russian).
16. Amanov D., Yuldasheva A. V. Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order, *Malays. J. Math. Sci.*, 2009, vol. 3, no. 2, pp. 227–248. <https://mjms.upm.edu.my/lihatmakalah.php?kod=2009/July/3/2/227-248>.
17. Amanov D. About correctness of boundary value problems for equation of even order, *Uzbek Math. J.*, 2011, no. 4, pp. 20–35.
18. Yuldasheva A. V. On one proble for higher-order equation, *Bulletin KRASEC. Phys. Math. Sci.*, 2014, vol. 9, no. 2, pp. 18–22. DOI: <https://doi.org/10.18454/2313-0156-2014-9-2-18-22>.

19. Yuldasheva A. V. On a problem for a quasi-linear equation of even order, *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 241, no. 4, pp. 423–429. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04434-3>.
20. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order, *AIP Conference Proceedings*, 2012, vol. 1470, no. 1, 3. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4747625>.
21. Ashurov R. R., Muhiddinova O. T. Initial-boundary value problem for hyperbolic equations with an arbitrary order elliptic operator, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 8–19 (In Russian). EDN: UDRGAX. DOI: <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19>.
22. Ashurov R. R., Muhiddinova O. T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 2, pp. 517–525. EDN: WSMCML. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221030070>.
23. Karimov Sh. T. Method of solving the Cauchy problem for one-dimensional polywave equation with singular Bessel operator, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2017, vol. 61, no. 8, pp. 22–35. EDN: XNXGZY. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X17080035>.
24. Karimov Sh. T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order, *Filomat*, 2018, vol. 32, no. 3, pp. 873–883. EDN: YBVBZJ. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1803873K>.
25. Karimov Sh. T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2018, no. 15, pp. 853–862. EDN: VUTMHO. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.073>.
26. Karimov Sh. T., Urinov A. K. Solution of the Cauchy problem for the four-dimensional hyperbolic equation with Bessel operator, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 57–68 (In Russian). EDN: VKJWUR. DOI: <https://doi.org/10.23671/VNC.2018.3.17991>.
27. Urinov A. K., Karimov Sh. T. On the Cauchy problem for the iterated generalized two-axially symmetric equation of hyperbolic type, *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 1, pp. 102–110. EDN: FNVWZQ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508022001014X>.
28. Mikhlin S. G. *Linear Integral Equations*. Mineola, NY, Dover Publ., 2020, xv+223 pp.
29. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Fizmatlit, 1969, 528 pp. (In Russian)



УДК 539.3

Ориентационная природа эффекта деформационной памяти при трехосном циклическом неравнокомпонентном сжатии песчаника

И. А. Пантелеев¹, А. В. Зайцев², К. Б. Устинов³,
В. А. Мубассарова¹, Н. И. Шевцов³, В. В. Химуля³,
В. И. Карев³, Ю. Ф. Коваленко³

¹ Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Россия, 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1.

² Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

³ Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Для описания механизмов и условий проявления эффекта деформационной памяти (эффекта Кайзера) в горных породах, подвергающихся трехмерному непропорциональному циклическому нагружению с изменением ориентации и формы эллипсоида Ламе, проведены эксперименты с кубическими образцами из полимиктового песчаника на Испытательной системе трехосного независимого нагружения с непрерывной записью сигналов акустической эмиссии. Результаты непропорционального трехосного сжатия по разработанной 9-цикловой программе нагружения показали, что доминирующим механизмом проявления эффекта памяти повреждений в каждом определенно ориентированном ансамбле дефектов является развитие микротрещин нормального отрыва, ориентированных субнормально к направлению минимального главного напряжения. Было обнаружено, что проявление эффекта Кайзера определяется не столько фактом раскрытия существующих «благоприятно» ориентированных микротрещин, сколько их дискретным ростом

Механика деформируемого твердого тела Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Пантелеев И. А., Зайцев А. В., Устинов К. Б., Мубассарова В. А., Шевцов Н. И., Химуля В. В., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф. Ориентационная природа эффекта деформационной памяти при трехосном циклическом неравнокомпонентном сжатии песчаника // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 293–310. EDN: [MMKNTJ](https://www.edn.ru/). DOI: [10.14498/vsgtu1890](https://doi.org/10.14498/vsgtu1890).

Сведения об авторах

Иван Алексеевич Пантелеев  <https://orcid.org/0000-0002-7430-3667>

кандидат физико-математических наук; зав. лабораторией цифровизации горнотехнических процессов; e-mail: pia@icmm.ru

Алексей Вячеславович Зайцев  <https://orcid.org/0000-0003-0578-7917>

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент каф. механики композиционных материалов и конструкций; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

и появлением новых дефектов. Полученные экспериментальные результаты могут рассматриваться в качестве триггера для развития моделей деформирования и разрушения горных пород, учитывающих анизотропную природу и ориентационные эффекты развития поврежденности при различных сложных напряженно-деформированных состояниях и реальных условиях трехосного непропорционального нагружения, которые наблюдаются в природных и антропогенных системах.

Ключевые слова: эффект Кайзера, акустическая эмиссия, истинное трехосное нагружение, непропорциональное циклическое сжатие, вращение эллипсоида Ламе, изменение формы эллипсоида Ламе, ориентационная природа эффекта деформационной памяти.

Получение: 25 октября 2021 г. / Исправление: 28 апреля 2022 г. /

Принятие: 23 мая 2022 г. / Публикация онлайн: 28 июня 2022 г.

Введение. В настоящее время эффект Кайзера [1] — эффект памяти о ранее приложенных в испытаниях напряжениях используется в современных методах оценки напряженного состояния массива горных пород [2–12], а также при исследовании характера воздействия циклических вулканических процессов и их результатов — циклической деформации геосреды [7, 13]. Земная кора в районе активных разломных зон и вулканических построек может испытывать не только циклические деформации, но и переориентацию (вращение) напряженного состояния [14–16], приводящую к формированию анизотропной трещиноватости. Несмотря на многочисленные исследования эффекта Кайзера при циклическом деформировании горных пород, условия его проявления при трехосном сжатии по произвольным траекториям трехосного непропорционального нагружения, характеризующимся изменением формы и вращением эллипсоида приложенных напряжений (эллипсоида Ламе), остаются не до конца ясными. Изучение влияния вращения эллипсоида Ламе на проявление эффекта Кайзера проводилось различными научными

Константин Борисович Устинов  <https://orcid.org/0000-0001-5852-3355>

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник; главный научный сотрудник лаб. геомеханики; e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Виргиния Анатольевна Мубassarова  <https://orcid.org/0000-0001-7593-6776>

кандидат физико-математических наук; научный сотрудник лаб. термомеханики твердых тел; e-mail: mubassarova.v@icmm.ru

Николай Иванович Шевцов  <https://orcid.org/0000-0003-0792-2262>

младший научный сотрудник лаб. геомеханики; e-mail: red3991@yandex.ru

Валерий Владимирович Химуля  <https://orcid.org/0000-0003-2116-6483>

кандидат физико-математических наук; младший научный сотрудник лаб. геомеханики; e-mail: valery.khim@gmail.com

Владимир Иосифович Карев  <https://orcid.org/0000-0003-3983-4320>

доктор технических наук; профессор; заместитель директора по науке; главный научный сотрудник лаб. геомеханики; e-mail: wikarev@ipmnet.ru

Юрий Федорович Коваленко  <https://orcid.org/0000-0002-6128-1737>

доктор физико-математических наук; профессор; заведующий лаб. геомеханики; e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru

коллективами преимущественно в экспериментах на одноосное сжатие и косвенное растяжение горных пород для каждого типа нагружения в отдельности и с их чередованием [17–25].

В пионерских работах [26, 27] впервые были представлены результаты исследования эффекта Кайзера при истинном трехосном нагружении с вращением эллипсоида главных напряжений (эллипсоида Ламе). Было показано, что эффект Кайзера является эффектом памяти поврежденности, при этом его проявление зависит от взаимной ориентации ансамбля трещиноватости и приложенных напряжений. В экспериментах на истинное и традиционное трехосное нагружение была продемонстрирована возможность избирательного повторного инициирования ортогонально ориентированных ансамблей микротрещин. При этом вопрос о том, какие параметры напряженно-деформированного состояния, за исключением ориентации и величины максимального сжимающего напряжения, контролируют эффект памяти материала, остается открытым.

Настоящее исследование является продолжением изучения проявления эффекта Кайзера при трехосном циклическом нагружении песчаника с изменением ориентации эллипсоида Ламе. При этом в отличие от работ [26, 27] акцент сделан на изучении ориентационной природы эффекта деформационной памяти. Для этого разработана и реализована 9-цикловая экспериментальная программа непропорционального нагружения, отличающегося возможными механизмами развития микротрещин. В этой программе были последовательно реализованы циклы истинного трехосного и традиционного нагружения со сменой направлений активного сжатия.

1. Экспериментальное оборудование и материал. Для испытаний был выбран полимиктовый песчаник, относящийся к Шешминской свите уфимского яруса пермской системы. Образцы песчаника отобраны в районе Верхнекамского месторождения калийных солей, расположенного в Соликамской впадине Предуральяского прогиба. Песчаник характеризуется слоистой структурой, обусловленной чередованием прослоек, обогащенных эпидотом и обломками кремней. SEM-исследования показали, что распределение зерен минералов по объему равномерное с размером от 150 до 450 мкм. Пористость песчаника составляет 9.5 % и развита в основном по границам зерен, что вызвано выщелачиванием кальцита грунтовыми водами. Кубические образцы с размером ребра 40 мм были изготовлены на специально спроектированном стенде лаборатории геомеханики ИПМех РАН с высокой точностью. Непараллельность граней не превышала 20 мкм.

Механические испытания проводились на испытательной системе трехосного независимого нагружения (ИСТНН) в лаборатории геомеханики ИПМех РАН. Подробное описание установки и ее характеристики можно найти в работах [28–33]. Независимое трехосное нагружение осуществлялось благодаря примененной в конструкции нагружающего узла оригинальной кинематической схеме, которая позволяет нажимным плитам сближаться в трех взаимно ортогональных направлениях, не препятствуя друг другу. Автоматизированный комплекс управления и сбора данных ИСТНН включал LVDT-датчики перемещения и датчики усилия с разрешающей способностью 0.2 мкм и 0.03 МПа соответственно. Перед испытаниями между гранями образца и на-

конечниками нажимных плит устанавливались тонкие фторопластовые прокладки со смазкой для минимизации трения при сжатии образца.

Для регистрации акустической эмиссии (АЭ) была использована многоканальная система Amsy-6 Vallen с широкополосными датчиками SMEG-2P (частотный диапазон 200–2000 кГц), закрепленными на каждой из трех нажимных плит ИСТНН. В работе [34] было показано, что расположение датчиков на плитах позволяет регистрировать данные скорости и суммарного счета АЭ, аналогичные результатам, полученным от датчиков, установленных непосредственно на гранях образца.

2. Протокол эксперимента. Для исследования особенностей проявления эффекта деформационной памяти в песчанике при трехосном непропорциональном нагружении с изменением формы и ориентации эллипсоида Ламе была разработана и реализована 9-цикловая программа, которая включала три последовательных «блока» по три цикла активного нагружения – разгрузки в каждом, отработка которых начиналась после предварительного гидростатического сжатия образца до 10 МПа. В первом цикле каждого блока осуществляется двухосное сжатие до величины 58 МПа при неизменном напряжении в третьем направлении. В первом блоке происходит рост σ_{xx} и σ_{yy} при $\sigma_{zz} = 10$ МПа, во втором – рост σ_{zz} и σ_{yy} при постоянном σ_{xx} , в третьем – рост σ_{zz} и σ_{xx} при постоянном σ_{yy} соответственно (рис. 1). Во втором и третьем циклах каждого блока происходило последовательное одноосное сжатие в одном из двух направлений до величины 77 МПа, по которым осуществлялось сжатие в первом цикле этого блока. При этом в двух других направлениях напряжения поддерживались постоянными, равными 10 МПа. В первом блоке были реализованы второй $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ и третий $\sigma_{yy} > \sigma_{xx} = \sigma_{zz}$ циклы; во втором блоке – второй $\sigma_{yy} > \sigma_{xx} = \sigma_{zz}$ и третий $\sigma_{zz} > \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ циклы; в третьем блоке – второй $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ и третий $\sigma_{zz} > \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ циклы соответственно (см. рис. 1). Нагрузка и разгрузка в каждом из девяти циклов осуществлялась со скоростью 31 кПа/с. Увеличение амплитуды сжатия во втором и третьем циклах относительно первого цикла в каждом из блоков нагружения позволяло исследовать проявления

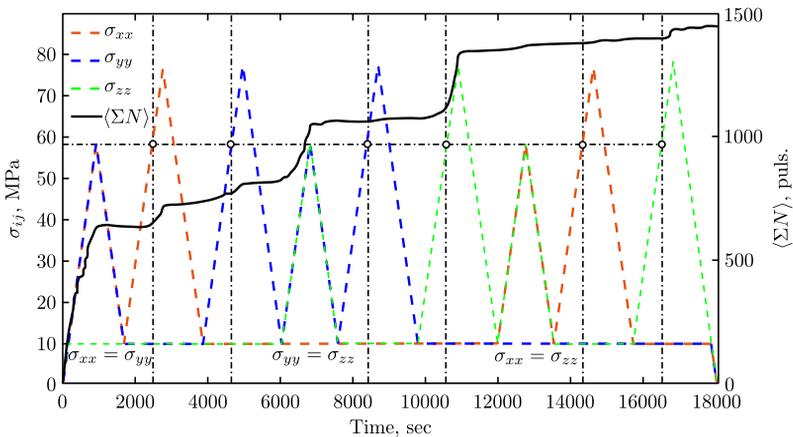


Рис. 1. Программа нагружения 9-циклового непропорционального сжатия и средний суммарный счет АЭ
 [Figure 1. Loading program of the 9-cycle nonproportional compression and the average total sum of acoustic emission (AE)]

ориентационной природы эффекта Кайзера при изменении формы и вращении эллипсоида Ламе.

3. Результаты экспериментов и их обсуждение. Реализация 9-цикловой программы экспериментов по трехосному непропорциональному сжатию образцов песчаника показала, что эффект Кайзера, характеризующийся резким ростом активности АЭ при достижении максимального уровня напряжений предыдущего цикла, наблюдается избирательно в каждом из трех блоков нагружения. Так, например, в первой тройке циклов активизация АЭ отчетливо наблюдается во втором цикле и слабо проявляется в третьем (рис. 1). Во второй тройке циклов «активное нагружение – разгрузка» регистрируется всплеск АЭ в третьем цикле, в то время как второй цикл характеризуется отсутствием активизации АЭ. В третьем блоке циклов в целом рост АЭ незначительный с небольшой активизацией в третьем цикле.

Для определения причин избирательного проявления эффекта памяти был проведен анализ деформированного состояния образца песчаника и определены осевые деформации ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{zz} в трех взаимно ортогональных направлениях Ox , Oy и Oz , вдоль которых осуществляется «активное непропорциональное нагружение – разгрузка». На рис. 2 представлены совмещенные траектория деформирования и зависимость относительного среднего суммарного счета АЭ (ΣN)/ N_{\max} от времени (N_{\max} – максимальное количество сигналов АЭ, зарегистрированных во время проведения эксперимента). Деформации ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{zz} образца, соответствующие окончанию этапа всестороннего сжатия, принимались за реперные отсчетные величины. Далее от цикла к циклу определялись приращения $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$ и $\Delta\varepsilon_{zz}$ относительного сжатия по каждому из направлений. Так, во втором цикле первого блока ε_{yy} и ε_{zz} меньше соответствующих реперных значений. Это может быть объяснено увеличением деформации относительного сжатия в этих направлениях. В каждом случае фиксировался момент времени превышения предыдущего уровня относительных деформаций сжатия и амплитуда приращения в абсолютных единицах. Если в рассматриваемом цикле превышение не наблюда-

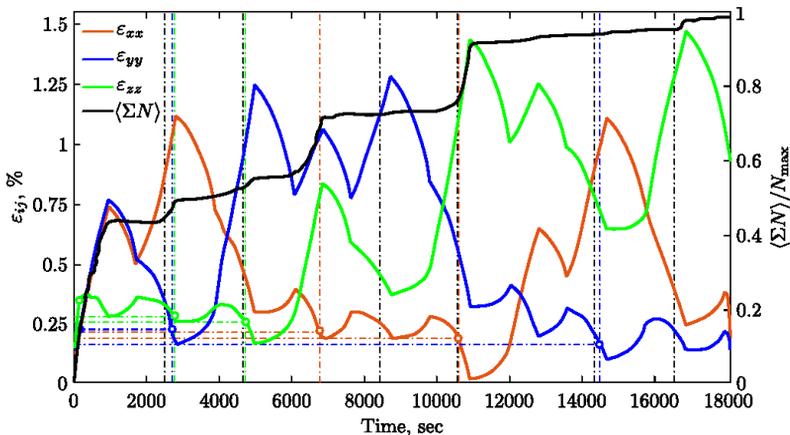


Рис. 2. Траектория деформирования (зависимость осевых деформаций ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{zz} от времени) и относительный средний суммарный счет АЭ $(\Sigma N)/N_{\max}$

[Figure 2. Time dependences of axial strains ε_{xx} , ε_{yy} , and ε_{zz} (i.e. strain path) the relative average total sum of AE $(\Sigma N)/N_{\max}$]

лось ни по одному из трех направлений, приращение принималось равным нулю и относилось либо к моменту окончания этапа активного нагружения, либо к моменту окончания разгрузки.

На рис. 3 представлены зависимости приращений деформации относительного сжатия $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$ и $\Delta\varepsilon_{zz}$ в трех взаимно ортогональных направлениях Ox , Oy и Oz и относительного среднего суммарного счета АЭ от времени, совмещенные с обезразмеренными по оси напряжений (нормировка выполнена на 77 МПа) траекториями нагружения. Точками черного цвета на траекториях отмечены моменты превышения напряжения, достигнутого в первом цикле каждого блока.

Рассмотрим результаты по каждому блоку циклов нагружения отдельно.

3.1. Циклы 1–3 (рис. 3, а). Во втором цикле рост σ_{xx} не сопровождается АЭ активностью вплоть до напряжения, соответствующего максимальному напряжению первого цикла. При этом момент превышения напряжения предыдущего уровня (отмечен черной точкой) не сопровождается ростом деформации относительного сжатия в направлениях, по которым напряжение поддерживается постоянным. Рост $\Delta\varepsilon_{yy}$ и $\Delta\varepsilon_{zz}$ наблюдается спустя 230 сек. и сопровождается увеличением активности АЭ, изменением наклона на кривой суммарного счета. В третьем цикле момент превышения напряжения первого цикла и начало роста $\Delta\varepsilon_{zz}$ совпадают (см. рис. 3, а) и сопровождаются слабовыраженным изменением наклона кривой суммарного счета при существенном увеличении $\Delta\varepsilon_{zz}$.

В первом цикле образец песчаника подвергается истинному непропорциональному трехосному сжатию. В этом случае ансамбль возникающих дефектов, согласно [27], характеризуется плоской трансверсальной изотропией (planar transverse isotropy): возникающие трещины принадлежат плоскостям, субнормальным к $\sigma_3 = \sigma_{zz}$. Во втором цикле истинное трехосное сжатие сменяется традиционным трехосным сжатием с возможностью роста трещин, ориентированных преимущественно параллельно $\sigma_1 = \sigma_{xx}$ с нормалью, произвольно ориентированной в плоскости $\sigma_{yy} - \sigma_{zz}$. Во втором цикле рост трещин и дефектов, субнормальных к σ_{zz} , начинается только после достижения максимального напряжения, при котором они были сформированы в первом цикле. При этом рост трещин, субнормальных к σ_{yy} , ожидаемо вызывает больший прирост деформации относительного сжатия. По абсолютной величине за два цикла $\Delta\varepsilon_{zz}$ больше, чем $\Delta\varepsilon_{yy}$, что отражает факт более интенсивного развития ансамбля трещин, субнормальных к σ_{zz} . Задержка между моментом превышения напряжения первого цикла и превышения деформациями своих реперных значений, по мнению авторов, с одной стороны, связана с тем, что макроскопическое деформационное проявление раскрытия микротрещин является пороговым процессом, требующим некоторой критической плотности одинаково ориентированных трещин. С другой стороны, эта задержка может быть связана с чувствительностью используемого метода измерения деформаций. По сравнению с деформационными измерениями метод АЭ, безусловно, более чувствителен к росту микротрещиноватости.

В третьем цикле происходит смена направления активного сжатия. Оно осуществляется в направлении OY при постоянных напряжениях σ_{zz} и σ_{xx} . Такая конфигурация приложенных нагрузок допускает рост трещиноватости субпараллельной σ с произвольно ориентированными нормальями в плоско-

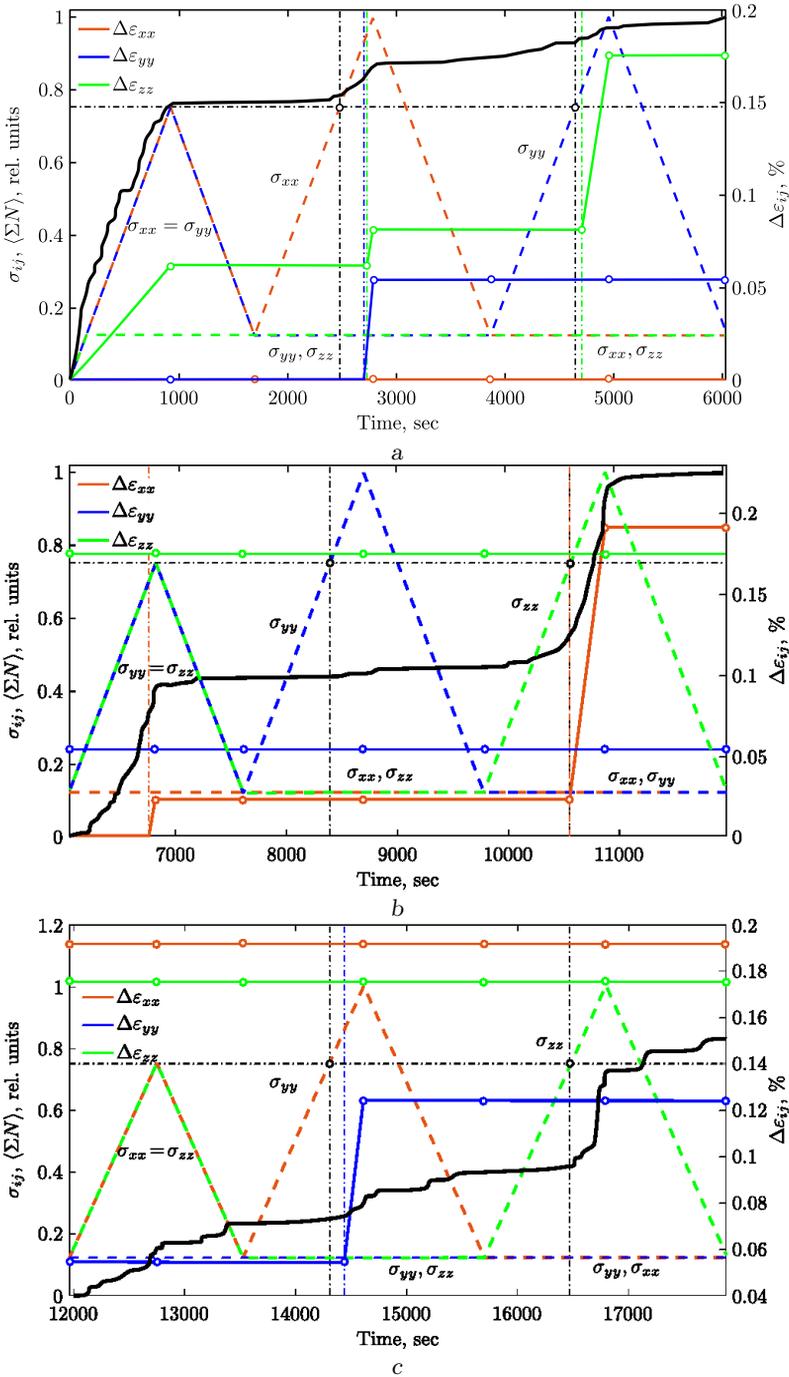


Рис. 3. Зависимости приращений деформаций относительного сжатия $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$ и $\Delta\varepsilon_{zz}$ (сплошная линия) в трех взаимно ортогональных направлениях и относительный средний суммарный счет АЭ ΣN (черная линия) для первого (а), второго (b) и третьего (c) блока циклического нагружения от времени. Пунктирная линия — участки программы нагружения

[Figure 3. Time dependences for increment of compression strain $\Delta\varepsilon_{xx}$, $\Delta\varepsilon_{yy}$, and $\Delta\varepsilon_{zz}$ (solid line) in three mutually orthogonal directions and the relative average total sum of AE ΣN (black line) for the first (a), the second (b), and the third (c) triple of cycles. Dotted line — a loading program]

сти $\sigma_{xx} - \sigma_{zz}$. Деформации относительного сжатия $\Delta\varepsilon$ за цикл нагружения не превосходит реперную величину (рис. 3). При этом рост $\Delta\varepsilon_{zz}$ продолжается. Незначительное изменение суммарного счета АЭ в третьем цикле после достижения максимального по абсолютной величине напряжения первого цикла вместе с ощутимым приростом $\Delta\varepsilon_{zz}$ позволяет сделать вывод о том, что основной вклад в деформацию относительного сжатия в этом направлении дают микротрещины, сформировавшиеся на предыдущих этапах нагружения. Фактором, сдерживающим активный рост трещинообразования в третьем цикле нагружения (появление новых и увеличение длины имеющихся трещин), может служить многочастичное взаимодействие в ансамблях уже сформированных разноориентированных дефектов. Необходимо также отметить, что от цикла к циклу наблюдался рост $\Delta\varepsilon_{zz}$ с различной интенсивностью при последовательном уменьшении общего числа импульсов АЭ.

3.2. Циклы 4–6 (рис. 3, б). Для второй тройки циклов характерен рост деформации относительного сжатия в направлении Ox , который в течение первых трех циклов не наблюдался. При этом если в четвертом цикле $\Delta\varepsilon_{xx}$ сравнительно невелико (0.23 %), то в пятом цикле прирост уже составил 1.68 %. Примечательно, что после четвертого цикла изменение конфигурации приложенных напряжений (изменение формы эллипсоида Ламе) при увеличении максимального сжимающего напряжения в пятом цикле не приводит к росту $\Delta\varepsilon_{xx}$ и АЭ активности. Переход от пятого цикла к шестому сопровождается разворотом эллипсоида Ламе на угол $\pi/2$, т. е. сменой направления активного сжатия. Достижение наибольшего по абсолютной величине напряжения третьего цикла и момент начала роста $\Delta\varepsilon_{xx}$ совпадают по времени и сопровождаются существенным увеличением АЭ активности. Суммарная деформация $\Delta\varepsilon_{xx}$ превосходит достигнутую к этому моменту деформацию $\Delta\varepsilon_{zz}$ в ортогональном к Ox направлении Oz .

По аналогии с первой тройкой циклов в пятом цикле следовало ожидать продолжения роста (или раскрытия) трещин и дефектов, сформировавшихся в четвертом цикле и ориентированных субнормально к σ_{xx} . Отсутствие такого роста вместе с отсутствием интенсификации АЭ позволяет предположить, что на развитие раскрытия и увеличения длины трещин влияет как вид напряженного состояния, так и характер взаимодействия в уже сформированном к этому моменту ансамбле разноориентированных дефектов. В пятом цикле при активном нагружении в направлении σ_{yy} имеет место формирование трещин, субнормальных к Ox и Oz . Активное сжатие в предыдущем (четвертом) цикле по двум ортогональным направлениям Ox и Oz создало условие для формирования системы трещин и дефектов в ансамбле, субнормальных к Ox . В пятом цикле на ее развитие влияет наличие наиболее развитой в образце к этому циклу подсистемы дефектов, ориентированной субнормально к Oz . Прикладываемые нагрузки недостаточны для ее развития, но именно она определяет возможность эволюции ансамбля трещин с преимущественно ортогональной ориентацией. Данное предположение подтверждается в шестом цикле, когда активное сжатие в направлении σ_{zz} , приводящее к частичному закрытию и блокировке наиболее представительного ансамбля трещин, субнормальных к σ_{zz} , инициирует активный рост и развитие трещин, субнормально ориентированных к σ_{xx} . Это выражается как в существенном росте деформации $\Delta\varepsilon_{xx}$, имеющей максимальное за шесть циклов значение

по сравнению с деформациями в двух других ортогональных направлениях, так и в активном росте АЭ. Суммарное количество импульсов АЭ, зарегистрированных за шестой цикл, превышает аналогичное количество импульсов третьего цикла.

3.3. Циклы 7–9 (рис. 3, с). В восьмом цикле (втором цикле блока) наблюдается эффект Кайзера. Об этом свидетельствует наблюдаемый рост АЭ активности после достижения максимального по абсолютной величине напряжения предыдущего цикла. Проявление этого эффекта не такое яркое, как во втором или шестом циклах, но оно также сопровождается ростом $\Delta\varepsilon_{yy}$ с временной задержкой. Как было отмечено ранее, рост деформации относительного сжатия $\Delta\varepsilon_{yy}$ на фоне незначительного роста АЭ указывает на то, что основной вклад в деформацию дает раскрытие уже существующих трещин и дефектов без увеличения их длины. В девятом цикле при развороте эллипсоида Ламе наблюдается противоположная ситуация. На фоне отсутствия приращения деформации относительного сжатия в трех взаимно ортогональных направлениях наблюдается рост суммарного счета АЭ начиная с момента достижения максимального по абсолютной величине напряжения первого цикла в этом блоке. С точки зрения авторов, причиной активизации АЭ в этом случае является взаимодействие трех систем трещин, имеющих преимущественную взаимно ортогональную друг относительно друга ориентацию. Эта дефектная система была сформирована в предыдущих восьми циклах. Необходимо отметить, что по сравнению со всплесками АЭ активности в предыдущих циклах наблюдаемое увеличение накопленных сигналов АЭ в девятом цикле можно охарактеризовать как незначительное.

Заключение. Проведенные эксперименты, по мнению авторов, позволяют продвинуться в понимании механизмов и условий проявления эффекта деформационной памяти в горных породах, подвергающихся трехмерному непропорциональному циклическому нагружению с изменением ориентации и формы эллипсоида Ламе. Подобные условия нагружения наблюдаются в различных природных системах: это и вулканические постройки, и разломные зоны различного масштаба и происхождения, и такие элементы подземных сооружений, как резервуары природного газа и хранилища отходов различного типа [35]. Циклическая смена ориентации и формы эллипсоида Ламе приводит к формированию анизотропной поврежденности: системы разноориентированных ансамблей дефектов и трещин различного масштаба, каждый из которых может демонстрировать независимый контролируемый эффект памяти повреждений (эффект Кайзера). Результаты непропорционального трехосного сжатия по разработанной 9-цикловой программе нагружения показали, что преобладающим механизмом проявления эффекта памяти повреждений в каждом определенно ориентированном ансамбле трещин является развитие микротрещин нормального отрыва, ориентированных субнормально к направлению минимального главного напряжения. В случае традиционного трехосного напряженно-деформированного состояния $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ вклад в АЭ-отклик на превышение напряжения предыдущего цикла могут давать ансамбли разноориентированных дефектов и трещин, нормаль которых произвольно ориентирована в плоскости $\sigma_2 - \sigma_3$. Необходимо также отметить, что проявление эффекта памяти повреждений определяется не столько фактом раскрытия существующих «благоприятно»

ориентированных микротрещин, сколько дискретным ростом (увеличением длины) существующих и появлением новых микротрещин.

Полученные результаты являются основой для развития моделей механики деформирования и разрушения горных пород, учитывающих анизотропный характер накопления повреждений [36,37]. Действительно, подавляющее большинство моделей, описывающих неупругое поведение горных пород и их разрушение, оперирует критериями, базирующимися на линейном, квадратичном и третьем инвариантах тензоров напряжений и/или деформаций без учета естественной анизотропной природы материалов. Использование этих инвариантов исключает возможность описания преимущественной ориентации повреждений по отношению к приложенным главным напряжениям и их ориентациям. Полученные результаты, по мнению авторов, могут послужить триггером для развития подходов, учитывающих ориентационные эффекты развития поврежденности при различных сложных напряженно-деформированных состояниях и в реальных условиях трехосного непропорционального нагружения, которые наблюдаются на практике при эксплуатации подземных сооружений.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. И.А. Пантелеев — разработка программы экспериментальных исследований, проведение испытаний, обработка и анализ экспериментальных данных, интерпретация полученных результатов, подготовка первичного варианта рукописи, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.В. Зайцев — разработка программы экспериментальных исследований, отбор материала для экспериментов и обоснование его выбора, проведение испытаний, обработка и анализ экспериментальных данных, интерпретация полученных результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. К.Б. Устинов — интерпретация полученных результатов, подготовка первичного варианта рукописи, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. В.А. Мубассарова — проведение испытаний, обработка и анализ экспериментальных данных. Н.И. Шевцов — подготовка и изготовление образцов, проведение испытаний, обработка и анализ экспериментальных данных. В.В. Химуля — подготовка и изготовление образцов, проведение испытаний. В.И. Карев — идея исследования, разработка программы экспериментальных исследований, интерпретация полученных результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Ю.Ф. Коваленко — разработка программы экспериментальных исследований, интерпретация полученных результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ FSNM–2020–0027 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2020 г. и плановый период 2021 и 2022 гг.

Библиографический список

1. Kaiser J. *An Investigation into the Occurrence of Noises in Tensile Tests or a Study of Acoustic Phenomena in Tensile Tests*: Ph.D. Thesis, Tech. Hosch. Munchen, Munich, Germany, 1950.
2. Holcomb D. J., Costin L. S. Detecting damage surfaces in brittle materials using acoustic emissions // *J. Appl. Mech.*, 1986. vol. 53, no. 3. pp. 536–544. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3171807>.
3. Lockner D. The role of acoustic emission in the study of rock fracture. International loading rates // *Mech. Materials*, 1993. vol. 33, no. 11. pp. 669–677.
4. Villaescusa E., Seto M., Baird G. Stress measurements from oriented core // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2002. vol. 39, no. 5. pp. 603–615. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(02\)00059-X](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(02)00059-X).
5. Zang A., Stephansson O. *Stress Field of the Earth's Crust*. Dordrecht: Springer, 2010. xix+324 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8444-7>.
6. Lehtonen A., Cosgrove J. W., Hudson J. A., Johansson E. An examination of in situ rock stress estimation using the Kaiser effect // *Eng. Geol.*, 2012. vol. 124. pp. 24–37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2011.09.012>.
7. Heimisson E. R., Einarsson P., Sigmundsson F., Brandsdóttir B. Kilometer-scale Kaiser effect identified in Krafla volcano, Iceland // *Geophys. Res. Lett.*, 2015. vol. 42, no. 19. pp. 7958–7965. DOI: <https://doi.org/10.1002/2015gl065680>.
8. Рассказов М. И., Терешкин А. А., Цой Д. И. Оценка напряженного состояния массива месторождения “Пионер” на основе акустико-эмиссионного эффекта памяти горных пород // *Проблемы недропользования*, 2019. № 2(21). С. 62–67. EDN: NTLVU. DOI: <https://doi.org/10.25635/2313-1586.2019.02.062>.
9. Белютюков Н. Л. Особенности использования эффекта Кайзера для оценки напряженного состояния массива горных пород // *Горное эхо*, 2019. № 3(76). С. 24–31. EDN: UCRGVR. DOI: <https://doi.org/10.7242/echo.2019.3.7>.
10. Шкуратник В. Л., Николенко П. В. Об использовании эффекта Кайзера в эпоксидной смоле с кварцевым наполнителем для оценки напряжений в массиве горных пород // *Горный информационно-аналитический бюллетень*, 2012. № S1. С. 97–104. EDN: QCLEQZ.
11. Николенко П. В., Шкуратник В. Л., Чекур М. Д., Кошелев А. Е. Использование эффекта Кайзера в композиционных материалах для контроля напряженного массива горных пород // *ФТПРПИ*, 2018. № 1. С. 25–31. EDN: YTIKTM. DOI: <https://doi.org/10.15372/FTRPI20180103>.
12. Shkuratnik V. L., Nikolenko P. V. Spectral characteristics of acoustic emission in carbon fiber-reinforced composite materials subjected to cyclic loading // *Adv. Mat. Sci. Eng.*, 2018, 1962679. DOI: <https://doi.org/10.1155/2018/1962679>.
13. Kilburn C. Precursory deformation and fracture before brittle rock failure and potential application to volcanic unrest // *J. Geophys. Res.*, 2012. vol. 117, no. B2, B02211. DOI: <https://doi.org/10.1029/2011JB008703>.
14. Faulkner D. R., Mitchell T. M., Healy D., Heap M. J. Slip on ‘weak’ faults by the rotation of regional stress in the fracture damage zone // *Nature*, 2006. vol. 444, no. 7121. pp. 922–925. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature05353>.
15. Gudmundsson A., Philipp S. L. How local stress fields prevent volcanic eruptions // *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 2006. no. 3–4. pp. 257–268. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2006.06.005>.
16. Karaoğlu Ö., Browning J., Bazargan M., Gudmundsson A. Numerical modelling of triple-junction tectonics at Karlova, Eastern Turkey, with implications for regional magma transport // *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2016. no. 452. pp. 157–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2016.07.037>.
17. Lavrov A. V. The Kaiser effect in rocks: principles and stress estimation techniques // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2003. vol. 40, no. 2. pp. 151–171. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(02\)00138-7](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(02)00138-7).

18. Lavrov A., Vervoort A., Wevers M., Napier J. A. L. Experimental and numerical study of the Kaiser effect in cyclic Brazilian tests with disk rotation // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2002. vol. 39, no. 3. pp. 287–302. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(02\)00038-2](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(02)00038-2).
19. Chen Z. H., Tham L. G., Xie H. Experimental and numerical study of the directional dependency of the Kaiser effect in granite // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2007. vol. 44, no. 7. pp. 1053–1061. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2006.09.009>.
20. Li C., Nordlund E. Experimental verification of the Kaiser effect in rocks // *Rock Mech. Rock Engng.*, 1993. vol. 26, no. 4. pp. 333–351. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf01027116>.
21. Pestman B. J., Van Munster J. G. An acoustic emission study of damage development and stress-memory effects in sandstone // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstracts*, 1996. vol. 33, no. 6. pp. 585–593. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(96\)00011-3](https://doi.org/10.1016/0148-9062(96)00011-3).
22. Pestman B. J., Kenter C. J., Van Munster J. G. Estimation of in-situ stress magnitudes from measurements on cores // *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*, 1998 (Trondheim, Norway, July 1998), SPE-47239-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/47239-ms>.
23. Pestman B. J., Holt R. M., Kenter C. J., Van Munster J. G. Field application of a novel core-based in-situ stress estimation technique // *SPE/ISRM Rock Mechanics Conference*, 2002 (Irving, Texas, October 2002), SPE-78158-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/78158-ms>.
24. Шкуратник В. Л., Лавров А. В. *Эффекты памяти в горных породах. Физические закономерности, теоретические модели*. М.: Акад. горных наук, 1997. 159 с.
25. Лавров А. В., Шкуратник В. Л., Филимонов Ю. Л. *Акустэмиссионный эффект памяти в горных породах*. М.: МГГУ, 2004. 456 с. EDN: SDSUPF.
26. Browning J., Meredith P. G., Stuart C. E., Healy D., Harland S., Mitchell T. M. Acoustic characterization of crack damage evolution insandstone deformed under conventional and true triaxial loading // *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 2017. vol. 122, no. 6. pp. 4395–4412. DOI: <https://doi.org/10.1002/2016jb013646>.
27. Browning J., Meredith P. G., Stuart C., Harland S., Healy D., Mitchell T. M. A directional crack damage memory effect in sandstone under true triaxial loading // *Geophys. Res. Lett.*, 2018. vol. 45, no. 14. pp. 6878–6886. DOI: <https://doi.org/10.1029/2018GL078207>.
28. Карев В. И., Климов Д. М., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б. О разрушении осадочных горных пород в условиях сложного трехосного напряженного состояния // *Изв. РАН. МТТ*, 2016. №5. С. 15–21. EDN: WRJKER.
29. Климов Д. М., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф. Экспериментальное исследование влияния неравнокомпонентного трехосного напряженного состояния на проницаемость горных пород // *Изв. РАН. МТТ*, 2015. №6. С. 39–48. EDN: VKACQZ.
30. Shevtsov N., Zaitsev A., Pantelev I. Deformation and destruction of rocks on the true triaxial loading system with continuous acoustic emission registration / *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes*. Cham: Springer, 2019. pp. 424–432. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_42.
31. Пантелеев И. А., Мубассарова В. А., Зайцев А. В., Шевцов Н. И., Коваленко Ю. Ф., Карев В. И. Эффект Кайзера при трехосном сжатии песчаника с последовательным вращением эллипсоида заданных напряжений // *ФТПРПИ*, 2020. №3. С. 47–55. EDN: BFAPJC. DOI: <https://doi.org/10.15372/FTPRPI20200305>.
32. Пантелеев И. А., Мубассарова В. А., Зайцев А. В., Карев В. И., Коваленко Ю. Ф., Устинов К. Б., Шевцов Н. И. Эффект Кайзера при многоосном непропорциональном сжатии песчаника // *Докл. РАН. Физ., техн. науки*, 2020. Т. 495, №1. С. 63–67. EDN: QWRQGD. DOI: <https://doi.org/10.31857/S2686740020060152>.
33. Шевцов Н. И., Зайцев А. В., Пантелеев И. А. Исследование связи напряженно-деформированного состояния горных пород с потоком акустической эмиссии на испытательной системе трехосного независимого нагружения // *Процессы в геосредах*, 2019. №1(19). С. 129–136. EDN: RQVKMG.
34. Пантелеев И. А., Коваленко Ю. Ф., Сидорин Ю. В., Зайцев А. В., Карев В. И., Устинов К. Б., Шевцов Н. И. Эволюция поврежденности при сложном неравнокомпонент-

- ном сжатия песчаника по данным акустической эмиссии // *Физ. мезомех.*, 2019. Т. 22, № 4. С. 56–63. EDN: QXJPUS. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-14006>.
35. Healy D., Blenkinsop T. G., Timms N. E., Meredith P. G., Mitchell T. M., Cooke M. L. Polymodal faulting: Time for a new angle on shear failure // *J. Struct. Geol.*, 2015. vol. 80. pp. 57–71. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsg.2015.08.013>.
36. Pantelev I., Lyakhovsky V., Browning J., Meredith P. G., Healy D., Mitchell T. M. Non-linear anisotropic damage rheology model: Theory and experimental verification // *Eur. J. Mech., A/Solids*, 2021. vol. 85, 104085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104085>.
37. Lyakhovsky V., Pantelev I., Shalev E., Browning J., Mitchell T. M., Healy D., Meredith P. G. A new anisotropic poroelasticity model to describe damage accumulation during cyclic triaxial loading of rock // *Geophys. J. Int.*, 2022. vol. 230, no. 1. pp. 179–201. EDN: FEJKUL. DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggac062>.

MSC: 74L10

Orientation nature of the damage-memory effect under triaxial cyclic nonproportional compression of a sandstone

I. A. Panteleev¹, A. V. Zaitsev², K. B. Ustinov³,
V. A. Mubassarova¹, N. I. Shevtsov³, V. V. Khimulia³,
V. I. Karev³, Yu. F. Kovalenko³

¹ Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS,
1, Academician Korolev st., Perm, 614013, Russian Federation.

² Perm State National Research Polytechnical University,
29, Komsomolskiy pr., 614990, Perm, Russian Federation.

³ Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper describes the mechanisms and conditions for the damage-memory effect (Kaiser effect) in rocks subjected to a three-dimensional nonproportional cyclic loading with changes in the rocks' shape and orientation of the Lamé-ellipsoid. The experiments with the cubic samples taken from polymictic sandstone were conducted on Triaxial Independent Loading Testing System with continuous recording of an acoustic emission signals. The results of a nonproportional triaxial compression under the developed protocol, it is 9-cycle loading program, have shown that a dominate mechanism of the damage-memory effect in each ensemble of cracks (vectored differently) is the development of micro-cracks of opening fracture mode oriented subnormally to the minimum main stress. It was found that the Kaiser damage-memory effect is detected not so much to the fact of opening cracks, friendly oriented, as to a discrete growing (increase of length) of already existing and newly emerging micro-cracks. The obtained results can be considered as a trigger for models development oriented to strain and destruction of rocks, taking into account the anisotropic nature of damage accumulation.

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Panteleev I. A., Zaitsev A. V., Ustinov K. B., Mubassarova V. A., Shevtsov N. I., Khimulia V. V., Karev V. I., Kovalenko Yu. F. Orientation nature of the damage-memory effect under triaxial cyclic nonproportional compression of a sandstone, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 293–310. EDN: MMKNTJ. DOI: [10.14498/vsgtu1890](https://doi.org/10.14498/vsgtu1890) (In Russian).

Authors' Details:

Ivan A. Panteleev  <https://orcid.org/0000-0002-7430-3667>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Head of Laboratory of Digitalization of Mining Processes;
e-mail: pia@icmm.ru

Alexey V. Zaitsev  <https://orcid.org/0000-0003-0578-7917>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mechanics of Composite Material and Structures; e-mail: a-zaitsev@mail.ru

Keywords: Kaiser effect, acoustic emission, true triaxial loading, rotation of Lamé-ellipsoid, changes in Lamé-ellipsoid shape, nonproportional cyclic compression, orientation nature of the damage-memory effect.

Received: 25th October, 2021 / Revised: 28th April, 2022 /

Accepted: 23rd May, 2022 / First online: 28th June, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. I.A. Panteleev: Development of an experimental research program; Carrying out tests; Processing and analysis of experimental data; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Zaitsev: Development of an experimental research program; Selection of materials for testing and justification of its choice; Carrying out tests; Processing and analysis of experimental data; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. K.B. Ustinov: Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. V.A. Mubassarova: Carrying out tests; Processing and analysis of experimental data. N.I. Shevtsov: Sample preparation and fabrication; Carrying out tests; Processing and analysis of experimental data. V.V. Himulya: Sample preparation and fabrication; Carrying out tests. V.I. Karev: Idea of study; Development of an experimental research program; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. Yu.F. Kovalenko: Development of an experimental research program; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The study is supported by the Russian Ministry of Science and Education (State Assignment FSNM-2020-0027 for Basic Researches in 2020-2022).

Konstantin B. Ustinov  <https://orcid.org/0000-0001-5852-3355>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Chief Researcher; Lab. of Geomechanics; e-mail: ustinov@ipmnet.ru

Virginia A. Mubassarova  <https://orcid.org/0000-0001-7593-6776>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Researcher; Lab. of Thermomechanics of Solids;
e-mail: mubassarova.v@icmm.ru

Nikolai I. Shevtsov  <https://orcid.org/0000-0003-0792-2262>

Junior Researcher; Lab. of Geomechanics; e-mail: red3991@yandex.ru

Valerii V. Khimulia  <https://orcid.org/0000-0003-2116-6483>

Cand. Phys. & Math. Sci. Junior Researcher; Lab. of Geomechanics;
e-mail: valery.khim@gmail.com

Vladimir I. Karev  <https://orcid.org/0000-0003-3983-4320>

Dr. Techn. Sci.; Professor; Deputy Director for Science; Chief Researcher; Lab. of Geomechanics; e-mail: wikarev@ipmnet.ru

Yurii F. Kovalenko  <https://orcid.org/0000-0002-6128-1737>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Head of Laboratory; Lab. of Geomechanics;
e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru

References

1. Kaiser J. *An Investigation into the Occurrence of Noises in Tensile Tests or a Study of Acoustic Phenomena in Tensile Tests*, Ph.D. Thesis, Tech. Hosch. Munchen, Munich, Germany, 1950.
2. Holcomb D. J., Costin L. S. Detecting damage surfaces in brittle materials using acoustic emissions, *J. Appl. Mech.*, 1986, vol. 53, no. 3, pp. 536–544. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3171807>.
3. Lockner D. The role of acoustic emission in the study of rock fracture. International loading rates, *Mech. Materials*, 1993, vol. 33, no. 11, pp. 669–677.
4. Villaescusa E., Seto M., Baird G. Stress measurements from oriented core, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2002, vol. 39, no. 5, pp. 603–615. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(02\)00059-x](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(02)00059-x).
5. Zang A., Stephansson O. *Stress Field of the Earth's Crust*. Dordrecht, Springer, 2010, xix+324 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8444-7>.
6. Lehtonen A., Cosgrove J. W., Hudson J. A., Johansson E. An examination of in situ rock stress estimation using the Kaiser effect, *Eng. Geol.*, 2012, vol. 124, pp. 24–37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2011.09.012>.
7. Heimisson E. R., Einarsson P., Sigmundsson F., Brandsdóttir B. Kilometer-scale Kaiser effect identified in Krafla volcano, Iceland, *Geophys. Res. Lett.*, 2015, vol. 42, no. 19, pp. 7958–7965. DOI: <https://doi.org/10.1002/2015gl065680>.
8. Rasskazov M. I., Tereshkin A. A., Tsoi D. I. Estimate of the stress-strain state of the rock mass in the pioner deposit based on acoustic emission memory effect of rocks, *Problems of Subsoil Use*, 2019, no. 2(21), pp. 62–67 (In Russian). EDN: NTLVU. DOI: <https://doi.org/10.25635/2313-1586.2019.02.062>.
9. Belyutyukov N. L. Features of Kaiser effect use to estimate stress state of the rock mass, *Gornoe Ekho*, 2019, no. 3(76), pp. 24–31 (In Russian). EDN: UCRGVR. DOI: <https://doi.org/10.7242/echo.2019.3.7>.
10. Shkuratnik V. L., Nikolenko P. V. About using the Kaiser effect in epoxy resin with quartz filler to estimate stresses in the rock mass, *Mining Informational and Analytical Bulletin*, 2012, no. S1, pp. 97–104 (In Russian).
11. Nikolenko P. V., Shkuratnik V. L., Chepur M. D., Koshelev A. E. Using the Kaiser effect in composites for stressed rock mass control, *J. Min. Sci.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 21–26. EDN: FFEHBR. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1062739118013282>.
12. Shkuratnik V. L., Nikolenko P. V. Spectral characteristics of acoustic emission in carbon fiber-reinforced composite materials subjected to cyclic loading, *Adv. Mat. Sci. Eng.*, 2018, 1962679. DOI: <https://doi.org/10.1155/2018/1962679>.
13. Kilburn C. Precursory deformation and fracture before brittle rock failure and potential application to volcanic unrest, *J. Geophys. Res.*, 2012, vol. 117, no. B2, B02211. DOI: <https://doi.org/10.1029/2011JB008703>.
14. Faulkner D. R., Mitchell T. M., Healy D., Heap M. J. Slip on ‘weak’ faults by the rotation of regional stress in the fracture damage zone, *Nature*, 2006, vol. 444, no. 7121, pp. 922–925. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature05353>.
15. Gudmundsson A., Philipp S. L. How local stress fields prevent volcanic eruptions, *J. Volcanol. Geotherm. Res.*, 2006, no. 3–4, pp. 257–268. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2006.06.005>.
16. Karaoglu Ö., Browning J., Bazargan M., Gudmundsson A. Numerical modelling of triple-junction tectonics at Karlova, Eastern Turkey, with implications for regional magma transport, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2016, no. 452, pp. 157–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2016.07.037>.
17. Lavrov A. V. The Kaiser effect in rocks: principles and stress estimation techniques, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2003, vol. 40, no. 2, pp. 151–171. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(02\)00138-7](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(02)00138-7).

18. Lavrov A., Vervoort A., Wevers M., Napier J. A. L. Experimental and numerical study of the Kaiser effect in cyclic Brazilian tests with disk rotation, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2002, vol. 39, no. 3, pp. 287–302. DOI: [https://doi.org/10.1016/s1365-1609\(02\)00038-2](https://doi.org/10.1016/s1365-1609(02)00038-2).
19. Chen Z. H., Tham L. G., Xie H. Experimental and numerical study of the directional dependency of the Kaiser effect in granite, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2007, vol. 44, no. 7, pp. 1053–1061. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2006.09.009>.
20. Li C., Nordlund E. Experimental verification of the Kaiser effect in rocks, *Rock Mech. Rock Engng.*, 1993, vol. 26, no. 4, pp. 333–351. DOI: <https://doi.org/10.1007/bf01027116>.
21. Pestman B. J., Van Munster J. G. An acoustic emission study of damage development and stress-memory effects in sandstone, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstracts*, 1996, vol. 33, no. 6, pp. 585–593. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(96\)00011-3](https://doi.org/10.1016/0148-9062(96)00011-3).
22. Pestman B. J., Kenter C. J., Van Munster J. G. Estimation of in-situ stress magnitudes from measurements on cores, *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*, 1998 (Trondheim, Norway, July 1998), SPE-47239-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/47239-ms>.
23. Pestman B. J., Holt R. M., Kenter C. J., Van Munster J. G. Field application of a novel core-based in-situ stress estimation technique, *SPE/ISRM Rock Mechanics Conference*, 2002 (Irving, Texas, October 2002), SPE-78158-MS. DOI: <https://doi.org/10.2118/78158-ms>.
24. Shkuratnik V. L., Lavrov A. V. *Effekty pamiati v gornyx porodakh. Fizicheskie zakonomernosti, teoreticheskie modeli* [Memory Effects in Rocks. Physical Laws, Theoretical Models]. Moscow, Akad. Gornyx Nauk, 1997, 159 pp. (In Russian)
25. Lavrov A. V., Shkuratnik V. L., Filimonov Yu. L. *Akustoemissionnyi effekt pamiati v gornyx porodakh* [Acoustic Emission Memory Effect in Rocks]. Moscow, Moscow State Mining University, 2004, 456 pp. (In Russian). EDN: SDSUPF.
26. Browning J., Meredith P. G., Stuart C. E., Healy D., Harland S., Mitchell T. M. Acoustic characterization of crack damage evolution in sandstone deformed under conventional and true triaxial loading, *J. Geophys. Res. Solid Earth*, 2017, vol. 122, no. 6, pp. 4395–4412. DOI: <https://doi.org/10.1002/2016jb013646>.
27. Browning J., Meredith P. G., Stuart C., Harland S., Healy D., Mitchell T. M. A directional crack damage memory effect in sandstone under true triaxial loading, *Geophys. Res. Lett.*, 2018, vol. 45, no. 14, pp. 6878–6886. DOI: <https://doi.org/10.1029/2018GL078207>.
28. Karev V. I., Klimov D. M., Kovalenko Yu. F., Ustinov K. B. Fracture of sedimentary rocks under a complex triaxial stress state, *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 522–526. EDN: YVFUNL. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416050022>.
29. Klimov D. M., Karev V. I., Kovalenko Yu. F. Experimental study of the influence of a triaxial stress state with unequal components on rock permeability, *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 6, pp. 633–640. EDN: WPQWWR. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415060047>.
30. Shevtsov N., Zaitsev A., Pantelev I. Deformation and destruction of rocks on the true triaxial loading system with continuous acoustic emission registration, In: *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes*. Cham, Springer, 2019, pp. 424–432. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-11533-3_42.
31. Pantelev I. A., Mubassarova V. A., Zaitsev A. V., Shevtsov N. I., Kovalenko Yu. F., Karev V. I. Kaiser effect in sandstone in polyaxial compression with multistage rotation of an assigned stress ellipsoid, *J. Min. Sci.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 370–377. EDN: LHZ0JI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1062739120036653>.
32. Pantelev I. A., Mubassarova V. A., Zaitsev A. V., Karev V. I., Kovalenko Yu. F., Ustinov K. B., Shevtsov N. I. The Kaiser effect under multiaxial nonproportional compression of sandstone, *Dokl. Phys.*, 2020, vol. 65, no. 11, pp. 396–399. EDN: SPBANH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335820110075>.
33. Shevtsov N. I., Zaitsev A. V., Pantelev I. A. Studying the relationship between the stress-strain state of the rock mass and acoustic emission flux using triaxial independent loading test system, *Protsessy v geosredakh*, 2019, no. 1(19), pp. 129–136 (In Russian). EDN: RQBKMG.

34. Panteleev I. A., Kovalenko Yu. F., Sidorin Yu. V., Zaitsev A. V., Karev V. I., Ustinov K. B., Shevtsov N. I. Damage evolution under complex nonuniform compression of sandstone according to acoustic emission data, *Phys. Mesomech.*, 2019, vol. 22, no. 4, pp. 56–63 (In Russian). EDN: QXJPUS. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-14006>.
35. Healy D., Blenkinsop T. G., Timms N. E., Meredith P. G., Mitchell T. M., Cooke M. L. Polymodal faulting: Time for a new angle on shear failure, *J. Struct. Geol.*, 2015, vol. 80, pp. 57–71. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsg.2015.08.013>.
36. Panteleev I., Lyakhovsky V., Browning J., Meredith P. G., Healy D., Mitchell T. M. Non-linear anisotropic damage rheology model: Theory and experimental verification, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 2021, vol. 85, 104085. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104085>.
37. Lyakhovsky V., Panteleev I., Shalev E., Browning J., Mitchell T. M., Healy D., Meredith P. G. A new anisotropic poroelasticity model to describe damage accumulation during cyclic triaxial loading of rock, *Geophys. J. Int.*, 2022, vol. 230, no. 1, pp. 179–201. EDN: FEJKUL DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggac062>.

MSC: 65F10, 65F22

Implicit iterative algorithm for solving regularized total least squares problems



D. V. Ivanov^{1,2}, *A. I. Zhdanov*³

¹ Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

² Samara State University of Transport,
2 B, Svobody str., Samara, 443066, Russian Federation.

³ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The article considers a new iterative algorithm for solving total least squares problems. A new version of the implicit method of simple iterations based on singular value decomposition is proposed for solving a biased normal system of algebraic equations. The use of the implicit method of simple iterations based on singular value decomposition makes it possible to replace an ill-conditioned problem with a sequence of problems with a smaller condition number. This makes it possible to significantly increase the computational stability of the algorithm and, at the same time, ensures its high rate of convergence. Test examples shown that the proposed algorithm has a higher accuracy compared to the solutions obtained by non-regularized total least squares algorithms, as well as the total least squares solution with Tikhonov regularization.

Keywords: implicit regularization, total least squares, singular value decomposition, ill-conditioning, iterative regularization methods.

Received: 15th May, 2022 / Revised: 6th June, 2022 /

Accepted: 7th June, 2022 / First online: 30th June, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

  The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Ivanov D. V., Zhdanov A. I. Implicit iterative algorithm for solving regularized total least squares problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 311–321. EDN: **NFBOXC**. DOI: [10.14498/vsgtu1930](https://doi.org/10.14498/vsgtu1930).

Authors' Details:

Dmitriy V. Ivanov  <https://orcid.org/0000-0002-5021-5259>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Information Systems Security¹; Dept. of Mechatronics²; e-mail: dvi85@list.ru

Aleksandr I. Zhdanov  <https://orcid.org/0000-0001-6082-9097>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science³; e-mail: zhdanovaleksan@yandex.ru

Introduction. Total least squares (TLS) are widely used in solving systems of linear algebraic equations with inaccurate data on the right and left sides.

Total least squares are widely used in many applied fields [1]. Including for system identification [2–5], image restoration [6, 7], tomography [8, 9], speech processing [10,11].

There are many algorithms for solving total least squares problems. The classical algorithm for solving the total least squares problem based on SVD (singular value decomposition) [12]. The solution of the total least squares problem based on augmented systems is considered in [13, 14]. To solve large-scale linear systems of equations or linear systems of equations with a sparse matrix, iterative algorithms for total least squares are used: the Newton method [15, 16], Rayleigh iterations [17], Lanczos iterations [18].

Various regularization methods are used to solve very ill-conditioned total least squares problems. Today, there are two main approaches to the regularization of total least squares problems: based on the truncated SVD [19] and Tikhonov's regularization [20], as well as their modifications [21–24].

One way to improve the accuracy of the solution is to use iterative methods of regularization [25]. In [26], an implicit iterative algorithm for ordinary least squares based on SVD was proposed.

The condition number for total least squares is always greater than the condition number for ordinary least squares. Tikhonov's regularization for total least squares makes it possible to approximate the condition number to the condition number of ordinary least squares [20].

This article proposes an implicit iterative algorithm to solve total least squares problems. When using the proposed algorithm, the condition numbers at each iteration turn out to be less than the condition numbers of ordinary least squares. This makes it possible to find the total least squares solution for very ill-conditioned problems.

It is proposed to use a restriction on the length of the solution vector as a stopping criterion for the iterative algorithm. The simulation results showed the high solution accuracy of the proposed implicit iterative algorithm to solve regularized total least squares problems.

1. Problem Statement. Let the overdetermined system of equations be defined as

$$Ax = f, \quad (1)$$

where $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $f \in \mathbb{R}^m$, $m > n$.

We will assume that the matrix A and vector f contain errors

$$A = \tilde{A} + \Xi, \quad f = \tilde{f} + \xi.$$

It is required to find a solution for the overdetermined system (1) using perturbed data A and f .

To find an approximate solution vector from the errors data, the total least squares can be applied [12]. The total least squares approach minimizes the squares of errors in the values of both dependent and independent variables

$$\min_x \|\xi \quad \Xi\|_F, \text{ s.t. } (\tilde{A} + \Xi)x = \tilde{f} + \xi,$$

where $(\xi \quad \Xi)$ is the augmented matrix and $\|\cdot\|_F$ is the Frobenius norm.

The solving of total least squares is reduced to finding the minimum of the objective function:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax - f\|^2}{1 + \|x\|^2}, \quad (2)$$

where $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ is the Euclidean norm.

The article proposes an implicit iterative algorithm for the regularized solution of the system of equations (1) according to the data with errors using the total least squares.

2. Implicit iterative algorithm for solving regularized TLS problems.

Using the SVD, an arbitrary matrix A can be represented as follows:

$$A = U\Sigma V^\top, \quad (3)$$

where $U = (u_1 \ \cdots \ u_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $V = (v_1 \ \cdots \ v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ are orthogonal matrices; $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1(A) \ \cdots \ \sigma_n(A))$; $\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A)$ are singular numbers of matrix A ; u_i and v_i are respectively left and right singular vectors of matrix A .

Let the augmented matrix of the system of equations be defined as

$$\bar{A} = (A, f).$$

A solution to the total least squares problem exists and is unique if the following condition is satisfied [27]:

$$\sigma = \sigma_{n+1}(\bar{A}) < \sigma_n(A). \quad (4)$$

When condition (4) is satisfied, the solution to problem (2) can be obtained from a biased normal system of equations [27]:

$$(A^\top A - \sigma^2 E_n)x = A^\top f. \quad (5)$$

Let μ be a positive constant. Equation (5) is equivalent to the following equation:

$$\mu A^\top A x + x = \mu \sigma^2 x + x + \mu A^\top f. \quad (6)$$

The implicit iterative algorithm for equation (6) has the following form:

$$(\mu^{-1} E_n + A^\top A)x_{k+1} = (\sigma^2 + \mu^{-1})x_k + A^\top f. \quad (7)$$

We write (7) as

$$x_{k+1} = (\mu^{-1} E_n + A^\top A)^{-1}((\sigma^2 + \mu^{-1})x_k + A^\top f),$$

or

$$x_{k+1} = \Phi_\mu x_k + g_\mu, \quad (8)$$

where $\Phi_\mu = (\sigma_{\min}^2 + \mu^{-1})(\mu^{-1} E_n + A^\top A)^{-1}$, $g_\mu = (\mu^{-1} E_n + A^\top A)^{-1} A^\top f$.

Using the SVD decomposition of the matrix A (3), let us perform the following transformations:

$$\begin{aligned}\Phi_\mu &= (\sigma^2 + \mu^{-1})(\mu^{-1}E_n + A^\top A)^{-1} = \\ &= (\sigma^2 + \mu^{-1})V(\Sigma + \mu^{-1}E_n)^{-1}V^\top = (\sigma^2 + \mu^{-1})\sum_{i=1}^n \frac{v_i v_i^\top}{\sigma_i^2 + \mu^{-1}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_\mu &= (\mu^{-1}E_n + A^\top A)^{-1}A^\top f = \\ &= [V(\Sigma + \mu^{-1}E_n)V^\top]^{-1}V\Sigma U^\top f = V(\Sigma + \mu^{-1}E_n)^{-1}V^\top V\Sigma U^\top f = \\ &= V(\Sigma + \mu^{-1}E_n)^{-1}\Sigma U^\top f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \mu^{-1}} u_i^\top f.\end{aligned}$$

Then the implicit scheme (8) can be written based on the singular value decomposition in the following form:

$$x_{k+1} = (\sigma^2 + \mu^{-1})\sum_{i=1}^n \frac{v_i^\top v_i}{\sigma_i^2 + \mu^{-1}} x_k + \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i u_i^\top v_i}{\sigma_i^2 + \mu^{-1}} f, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9)$$

3. Convergence and conditionality of an implicit iterative algorithm.

The spectral radius of the transition matrix Φ_μ is

$$\rho(\Phi_\mu) = (\mu\sigma^2 + 1)\lambda_{\max}[(E_n + \mu A^\top A)^{-1}] = \frac{\mu\sigma^2 + 1}{\lambda_{\min}(E_n + \mu A^\top A)} = \frac{\mu\sigma^2 + 1}{1 + \mu\sigma_n^2(A)},$$

where λ_{\max} , λ_{\min} are the maximum and minimum eigenvalues of the matrices, respectively.

The convergence condition of the implicit method of simple iterations (7) can be written as follows:

$$\rho(\Phi_\mu) = \frac{\mu\sigma^2 + 1}{1 + \mu\sigma_n^2(A)} < 1. \quad (10)$$

If condition (4) is satisfied and $\mu > 0$, condition (10) is always satisfied. This means that the iterative algorithm (8) converges for all cases where the biased normal system of equations has a unique solution.

It can be shown that the larger the value μ , the higher the rate of convergence of the algorithm.

Let us show that algorithms (8) and (9) have different values of the condition numbers. The simple iteration method can be written as follows:

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\mu^{-1}}E_n \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} f \\ \sqrt{\mu^{-1} + \sigma^2}x_k \end{pmatrix} \right\|_2^2. \quad (11)$$

Formula (11) can be represented in the following form

$$x_{k+1} = A_\mu^+ f_\mu^{(k)},$$

where $A_\mu = \begin{pmatrix} A \\ \sqrt{\mu^{-1}}E_n \end{pmatrix}$, $f_\mu^{(k)} = \begin{pmatrix} f \\ \sqrt{\mu^{-1} + \sigma^2}x_k \end{pmatrix}$; A_μ^+ is a pseudoinverse Moore–Penrose matrix.

Since $\text{rank}(A_\mu) = n$, then A_μ^+ can be calculated by the formula:

$$A_\mu^+ = (A_\mu^\top A_\mu)^{-1} A_\mu^\top.$$

In this case, the problem corresponds to the classical form of the implicit method of simple iterations:

$$x_{k+1} = (A_\mu^\top A_\mu)^{-1} A_\mu^\top f_\mu^{(k)} = (A^\top A + \mu^{-1}E_n)^{-1} (A^\top f + (\mu^{-1} + \sigma^2)x_k),$$

$$\kappa_2(A^\top A + \mu^{-1}E_n) = \frac{\lambda_{\max}(A^\top A + \mu^{-1}E_n)}{\lambda_{\min}(A^\top A + \mu^{-1}E_n)} = \frac{\sigma_1^2 + \mu^{-1}}{\sigma_n^2 + \mu^{-1}}.$$

For the implicit method based on SVD decomposition, the condition number is equal to the condition number of the matrix A_μ :

$$\kappa_2(A_\mu) = \left(\frac{\sigma_1^2 + \mu^{-1}}{\sigma_n^2 + \mu^{-1}} \right)^{1/2}.$$

4. Stopping rule for an implicit iterative algorithm. There are a large number of stopping rules for iterative regularized algorithms [28–30]. In this article, we will use to stop the algorithm (5) the restriction on the value of the norm of the solution:

$$\|x_{k+1}\| \leq \delta, \quad (12)$$

where δ is the maximum allowable value of the Euclidean norm of the solution vector.

In contrast to Tikhonov’s total least squares regularization [20], condition (12) is verified directly without calculating indirect parameters.

5. Simulation results. Regularization Toolbox [31] was used to generate test cases. A matrix $A_{2000 \times 4}$ with singular values $\sigma = (5 \cdot 10^{-4} \ 10^4 \ 10^6 \ 10^7)$ was generated.

The true vector is $x_{\text{true}} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^\top$.

The vector f is $f = A_{2000 \times 4}u$.

Gaussian white noise with zero mean and standard deviation $\sigma_f = \sigma_A = 10^{-2}$ was added to the matrix $A_{2000 \times 4}$ and the vector f .

The algorithm (5) was compared with the classical SVD-based TLS algorithm [12], the solution based on augmented systems [13], and regularized total least squares [20]:

$$(A^\top A - \sigma^2 E_n + \alpha E_n)x = A^\top f. \quad (13)$$

The condition number of the matrix $A^\top A - \sigma^2 E_n + \alpha E_n$ is

$$\kappa_2(A^\top A - \sigma^2 E_n + \alpha E_n) = \frac{\sigma_1^2 - (\sigma^2 - \alpha)}{\sigma_n^2 - (\sigma^2 - \alpha)}.$$

The parameter α was selected from the interval $(0, \sigma^2)$ with a step $10^{-4}\sigma^2$:

$$\alpha_i = 10^{-4}\sigma^2 i, \quad i = 0, 1, \dots, 10000.$$

The algorithms were compared by the relative mean square error (RMSE) of the solution

$$\delta x_k = \frac{\|x_k - x_{\text{true}}\|_2}{\|x_{\text{true}}\|_2} \cdot 100 \%.$$

The simulation results are presented in Table 1. Figure 1 shows the relative root mean square error of the solution (8) in the k -th iteration for various values of the parameter μ^{-1} . Figure 2 shows the relative root mean square error of solution (13) depending on the choice of parameter α_i .

Table 1

RMSE of the solution		
Algorithm for estimating parameters	$\delta x, 100 \%$	κ_2
Algorithm (5) with $\mu^{-1} = 10^{-1}\sigma$	$7.53 \cdot 10^{-2}$	$2.02 \cdot 10^7$
Algorithm (5) with $\mu^{-1} = 10^{-2}\sigma$	0.2045	$2.20 \cdot 10^7$
Algorithm (5) with $\mu^{-1} = 10^{-5}\sigma$	$8.63 \cdot 10^{-2}$	$2.23 \cdot 10^7$
TLS [12]	49.51	$4.75 \cdot 10^9$
TLS [13]	49.51	$6.34 \cdot 10^{10}$
RTLS [20]	17.73	$5.32 \cdot 10^{16}$

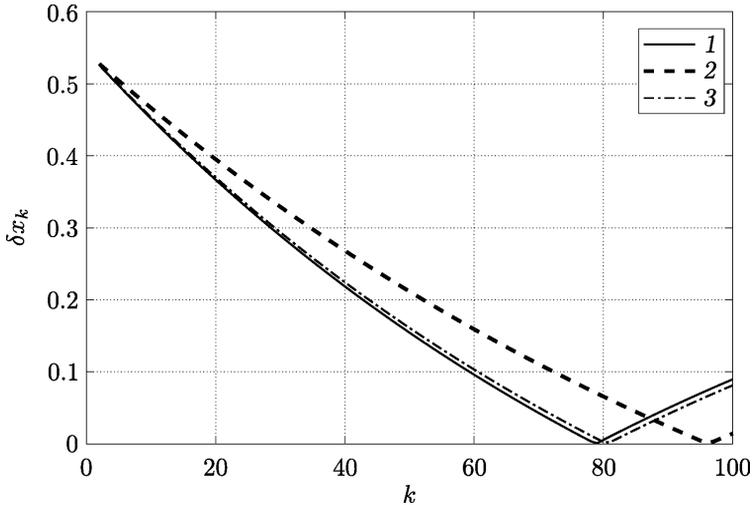


Figure 1. RMSE of the solution (8) at the k th iteration for various values of the parameter μ^{-1} :
 1 - $\mu^{-1} = 10^{-5}\sigma$, 2 - $\mu^{-1} = 10^{-1}\sigma$; 3 - $\mu^{-1} = 10^{-2}\sigma$

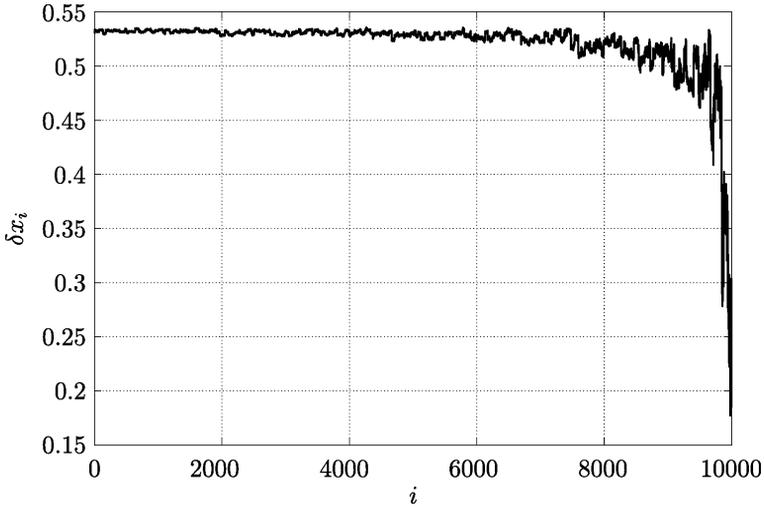


Figure 2. RMSE of the solution (13) for various values of the parameter $\alpha_i = 10^{-4}\sigma^2i$

Conclusion. The paper proposes a new implicit iterative algorithm for solving regularized total least squares problems. The simulation showed that the proposed algorithm has a higher accuracy compared to the solutions obtained by total least squares algorithms, as well as the total least squares solution with Tikhonov regularization.

The proposed implicit iterative algorithm makes it possible to implement a constraint on the length of the solution vector without solving additional nonlinear equations.

The condition number of problems solved at each iteration is less than the condition number of systems with Tikhonov regularization.

Competing interests. We have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for the submission of the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. This work was supported by the Federal Agency of Railway Transport (projects nos. 122022200429-8, and 122022200432-8).

Acknowledgments. The authors thank the referees for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Markovsky I. Bibliography on total least squares and related methods, *Stat. Interface*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 329–334. DOI: <https://doi.org/10.4310/SII.2010.v3.n3.a6>.
2. Pintelon R., Schoukens J. *System Identification: A Frequency Domain Approach*. Piscataway, NJ, IEEE Press, 2012, xlv+743 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118287422>.
3. Pillonetto G., Chen T., Chiuso A., De Nicolao G., Ljung L. *Regularized System Identification. Learning Dynamic Models from Data*, Communications and Control Engineering. Cham, Springer, 2022, xxiv+377 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95860-2>.
4. Markovsky I., Willems J. C., Van Huffel S., Bart De Moor, Pintelon R. Application of structured total least squares for system identification and model reduction, *IEEE Trans.*

- Autom. Control*, 2005, vol. 50, no. 10, pp. 1490–1500. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.856643>.
5. Ivanov D. V. Identification of linear dynamic systems of fractional order with errors in variables based on an augmented system of equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 508–518. EDN: RCYACI. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1854>.
 6. Fu H., Barlow J. A regularized structured total least squares algorithm for high-resolution image reconstruction, *Linear Algebra Appl.*, 2004, vol. 391, pp. 75–98. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(03\)00660-8](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00660-8).
 7. Mesarovic V. Z., Galatsanos N. P., Katsaggelos A. K. Regularized constrained total least squares image restoration, *IEEE Trans. Image Process.*, 1995, vol. 4, no. 8, pp. 1096–1108. DOI: <https://doi.org/10.1109/83.403444>.
 8. Zhu W., Wang Y., Yao Y., Chang J., Graber H. L., Barbour R. L. Iterative total least-squares image reconstruction algorithm for optical tomography by the conjugate gradient method, *J. Opt. Soc. Am. A*, 1997, vol. 14, no. 4, pp. 799–807. DOI: <https://doi.org/10.1364/josaa.14.000799>.
 9. Zhu W., Wang Y., Zhang J. Total least-squares reconstruction with wavelets for optical tomography, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, no. 10, pp. 2639–2650. DOI: <https://doi.org/10.1364/josaa.15.002639>.
 10. Lemmerling P., Mastronardi N., Van Huffel S. Efficient implementation of a structured total least squares based speech compression method, *Linear Algebra Appl.*, 2003, vol. 366, pp. 295–315. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(02\)00465-2](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00465-2).
 11. Khassina E. M., Lomov A. A. Audio files compression with the STLS-ESM method, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Computer Science. Telecommunications and Control Systems*, 2015, vol. 229, no. 5, pp. 88–96. EDN: VAWFWT. DOI: <https://doi.org/10.5862/JCSTCS.229.9>.
 12. Golub G. H., Van Loan C. An analysis of the total least squares problem, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1980, vol. 17, no. 6, pp. 883–893. DOI: <https://doi.org/10.1137/0717073>.
 13. Zhdanov A. I., Shamarov P. A. The direct projection method in the problem of complete least squares, *Autom. Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 4, pp. 610–620. EDN: LGBGAF.
 14. Ivanov D., Zhdanov A. Symmetrical augmented system of equations for the parameter identification of discrete fractional systems by generalized total least squares, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 24, 3250. EDN: QFMGJB. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9243250>.
 15. Björck Å. Newton and Rayleigh quotient methods for total least squares problem, In: *Recent Advances in Total Least Squares Techniques and Errors in Variables Modeling*, Proceedings of the Second Workshop on Total Least Squares and Errors-in-Variables Modeling (Leuven, Belgium, August 21–24, 1996). Philadelphia, PA, USA, SIAM, 1997, pp. 149–160.
 16. Björck Å., Heggernes P., Matstoms P. Methods for large scale total least squares problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2000, vol. 22, no. 2, pp. 413–429. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0895479899355414>.
 17. Fasino D., Fazzi A. A Gauss–Newton iteration for total least squares problems, *BIT Numer. Math.*, 2018, vol. 58, no. 2, pp. 281–299. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10543-017-0678-5>.
 18. Mohammedi A. Rational–Lanczos technique for solving total least squares problems, *Kuwait J. Sci. Eng.*, 2001, vol. 28, no. 1, pp. 1–12.
 19. Fierro R. D., Golub G. H., Hansen P. C., O’Leary D. P. Regularization by truncated total least squares, *SIAM J. Sci. Comp.*, 1997, vol. 18, no. 4, pp. 1223–1241. DOI: <https://doi.org/10.1137/S1064827594263837>.
 20. Golub G. H., Hansen P. C., O’Leary D. P. Tikhonov regularization and total least squares, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 185–194. DOI: <https://doi.org/10.1137/S0895479897326432>.
 21. Lampe J., Voss H. Solving regularized total least squares problems based on eigenproblems, *Taiwanese J. Math.*, 2010, vol. 14, no. 3A, pp. 885–909. DOI: <https://doi.org/10.11650/twjmath/1500405873>.

22. Sima D. M., Van Huffel S., Golub G. H. Regularized total least squares based on quadratic eigenvalue problem solvers, *BIT Numer. Math.*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 793–812. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10543-004-6024-8>.
23. Lampe J., Voss H. Efficient determination of the hyperparameter in regularized total least squares problems, *Appl. Numer. Math.*, 2012, vol. 62, no. 9, pp. 1229–1241. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2010.06.005>.
24. Zhdanov A. I. Direct recurrence algorithms for solving the linear equations of the method of least squares, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1994, vol. 34, no. 6, pp. 693–701. EDN: VKRSPF.
25. Vainiko G. M., Veretennikov A. Yu. *Iteratsionnye protsedury v nekorrektno postavlennykh zadachakh* [Iteration Procedures in Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1986, 177 pp.
26. Zhdanov A. I. Implicit iterative schemes based on singular decomposition and regularizing algorithms, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 549–556. EDN: PJITAX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1592>.
27. Zhdanov A. I. The solution of ill-posed stochastic linear algebraic equations by the maximum likelihood regularization method, *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1988, vol. 28, no. 5, pp. 93–96. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(88\)90014-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(88)90014-6).
28. Gfrerer H. An a posteriori parameter choice for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates, *Math. Comp.*, 1987, vol. 49, no. 180, pp. 507–522. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1987-0906185-4>.
29. Hämarik U., Tautenhahn U. On the monotone error rule for parameter choice in iterative and continuous regularization methods, *BIT Numer. Math.*, 2001, vol. 41, no. 5, pp. 1029–1038. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1021945429767>.
30. Tautenhahn U., Hämarik U. The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems, *Inverse Probl.*, 1999, vol. 15, no. 6, pp. 1487–1505. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/6/307>.
31. Hansen P. C. Regularization tools version 4.0 for Matlab 7.3, *Numer. Algorithms*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 189–194. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-007-9136-9>.

УДК 519.612

Неявный итерационный алгоритм для решения задачи регуляризованных полных наименьших квадратов

Д. В. Иванов^{1,2}, А. И. Жданов³

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

² Самарский государственный университет путей сообщения, Россия, 443066, Самара, ул. Свободы, 2 В.

³ Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Рассмотрен новый итерационный алгоритм для решения задач полных наименьших квадратов. Предложен новый вариант неявного метода простых итераций на основе сингулярного разложения для решения смещенной нормальной системы алгебраических уравнений. Применение неявного метода простых итераций на основе сингулярного разложения позволяет заменить плохо обусловленную задачу на последовательность задач с лучшей обусловленностью. Это дает возможность существенно повысить вычислительную устойчивость алгоритма и при этом обеспечивает высокую скорость его сходимости. Тестовые примеры показали, что предложенный алгоритм обладает более высокой точностью по сравнению с решениями, полученными нерегуляризованными алгоритмами полных наименьших квадратов, а также с решением полных наименьших квадратов с регуляризацией по Тихонову.

Ключевые слова: неявная регуляризация, полные наименьшие квадраты, сингулярное разложение, плохая обусловленность, итерационные методы регуляризации.

Получение: 15 мая 2022 г. / Исправление: 6 июня 2022 г. /

Принятие: 7 июня 2022 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2022 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ivanov D. V., Zhdanov A. I. Implicit iterative algorithm for solving regularized total least squares problems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 311–321. EDN: NFB0XC. DOI: 10.14498/vsgtu1930.

Сведения об авторах

Дмитрий Владимирович Иванов   <https://orcid.org/0000-0002-5021-5259>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. безопасности информационных систем¹; доцент каф. мехатроники²; e-mail: dvi85@list.ru

Александр Иванович Жданов  <https://orcid.org/0000-0001-6082-9097>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. прикладная математика и информатика³; e-mail: zhdanovaleksan@yandex.ru

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Федерального агентства железнодорожного транспорта (проекты №№ 122022200429-8, 122022200432-8).

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.



УДК 517.958:531.332

Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косо́й стенки

Е. И. Понькин

Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,
Россия, 456776, Снежинск, Комсомольская ул., 8.

Аннотация

Начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики, решение которой описывает разлет политропного газа в вакуум с косо́й стенки в пространстве автомодельных переменных x/t , y/t в общем несогласованном случае, приведена к характеристической задаче Коши стандартного вида в пространстве новых независимых переменных ϑ , ζ . Уравнение $\vartheta = 0$ задает характеристическую поверхность, через которую двойная волна примыкает к известному решению — центрированной волне Римана. Уравнение $\zeta = 0$ означает, что за новую координатную ось выбирается косо́я стенка, на которой выполняется условие непротекания. Для этой новой начально-краевой задачи в отличие от известного решения аналогичной задачи, полученного С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным в пространстве специальных переменных, доказана теорема существования и единственности решения системы уравнений газовой динамики в пространстве физических автомодельных переменных в виде сходящегося бесконечного ряда. Описан алгоритм построения коэффициентов ряда.

Ключевые слова: характеристическая задача Коши стандартного вида, аналог теоремы Ковалевской, характеристическая поверхность, косо́я стенка, алгоритм построения коэффициентов ряда.

Получение: 26 апреля 2022 г. / Исправление: 28 мая 2022 г. /
Принятие: 7 июня 2022 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2022 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Понькин Е. И. Характеристическая задача Коши стандартного вида для описания истечения политропного газа в вакуум с косо́й стенки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 322–338. EDN: QYHKRK. DOI: [10.14498/vsgtu1922](https://doi.org/10.14498/vsgtu1922).

Сведения об авторе

Евгений Игоревич Понькин  <https://orcid.org/0000-0002-7848-3167>
аспирант; e-mail: epnk@rambler.ru

Введение. В настоящее время в мире проводятся интенсивные исследования в области лазерного управляемого термоядерного синтеза (ЛТС). Перспективность данного научного направления связана с тем, что при успешной реализации ЛТС человечество получает неисчерпаемый источник относительно дешевой энергии. В отличие от зарядов, где зажигание термоядерных реакций осуществляется ядерным взрывом, в ЛТС инициация «горения» легких ядер реализуется за счет воздействия лазерного излучения на ДТ-мишень. Математическое описание подобных экспериментов привело к возникновению целого направления, объединяющего класс задач, описывающих сжатие мишеней или истечение газа в вакуум [1–4].

Еще в 50-е годы прошлого века стало понятно, что вложение энергии в мишень необходимо осуществлять безударным способом без образования ударной волны (сильного разрыва), что дает существенный энергетический выигрыш. Данную схему пытаются реализовать в экспериментах по ЛТС. Для получения безударной волны сжатия, которая будет сжимать газ до бесконечной плотности, разрабатывают специальные мишени [5, 6], которые имеют сферически или цилиндрически симметричную геометрию. Это связано с тем, что наибольшее количество результатов в области построения аналитических решений было получено для одномерных течений (плоско-, цилиндрически-, сферически симметричные мишени).

Для построения аналитических решений двумерных течений используемый математический аппарат приводил к сложного вида дифференциальным уравнениям, что давало возможность построить только частные решения рассматриваемых уравнений. Так, в 1963 году В. А. Сучков опубликовал работу «Истечение в вакуум на косой стенке» [7]. В ней получено частное точное решение системы уравнений газовой динамики (СУГД), описывающее двумерное течение газа — двойная волна (ДВ) — при выполнении конкретного соотношения между показателем политропы γ газа и тангенсом угла α наклона косой стенки:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}. \quad (1)$$

Метод решения задачи состоял в том, что СУГД сводилась к одному дифференциальному уравнению для функции потенциала $\Phi = \Phi(t, x, y)$, где $u = \Phi_x$, $v = \Phi_y$; u , v — компоненты вектора скорости газа \mathbf{V} в прямоугольной системе координат. Затем с помощью преобразования Лежандра осуществлялся переход к уравнению для функции $\Psi = \Psi(u, v)$, для которой и строилось одно конкретное частное решение. Полученное таким образом решение $\Psi = \Psi(u, v)$ и связанная с ним функция $c = c(u, v)$ — скорость звука газа — определялись в пространстве годографа, то есть в пространстве независимых переменных u , v . Для нахождения значений газодинамических параметров u , v , c в пространстве физических переменных t , x , y необходимо выполнять обратное преобразование Лежандра, которое в общем случае выполнить в явном виде затруднительно.

Связь между задачами сжатия конкретных мишеней и соответствующего истечения газа в вакуум была показана в работе А. Ф. Сидорова [8]. Так, двумерное истечение газа в вакуум с косой стенки в работе [8] было интерпретировано для описания сильного сжатия газа, заполняющего специальный призматический объем, и была установлена принципиально большая степень

кумуляции газа, чем при неограниченном сжатии плоских, цилиндрических и сферических объемов газа.

С. П. Баутиным и С. Л. Дерябиным [9, с. 196–214] в пространстве специальных независимых переменных рассмотрена задача об истечении газа в вакуум при произвольном значении угла α ($0 < \alpha < \pi/2$) — наклона косо́й стенки, не связанном со значением γ . Доказано существование и единственность локально-аналитических решений соответствующих начально-краевых задач. В случае общих течений связь задач об истечении газа в вакуум и задач о неограниченном сжатии газа в конечный момент времени установлена С. П. Баутиным [3].

В настоящей работе исходная начально-краевая задача для системы уравнений газовой динамики, решение которой описывает истечение политропного газа в вакуум с косо́й стенки в пространстве физических автомодельных переменных x/t , y/t для несогласованного случая, т. е. когда не выполняется равенство (1), сводится в результате двух невырожденных замен к характеристической задаче Коши стандартного вида (ХЗК). Для этой новой начально-краевой задачи доказана теорема существования и единственности решения СУГД в виде сходящихся бесконечных рядов. Описан алгоритм построения коэффициентов ряда.

Необходимо отметить следующий момент. В работе [9] решалась точно такая же задача, что и в данной работе, только решение строилось для функции Ψ в пространстве годографа. То есть рассматривалось одно уравнение, а не вся СУГД, и для этого уравнения задача сводилась к ранее доказанной теореме существования и единственности решения. Выполнить переход от функции Ψ в пространстве годографа u , v к значениям функций s , u и v в пространстве физических автомодельных переменных x/t , y/t в аналитическом виде не представляется возможным. При этом проверить отличие от нуля якобиана преобразования независимых переменных из пространства годографа в пространство физических переменных затруднительно, так как решение $\Psi(u, v)$ в явном виде в работе [9] не построено. Следовательно, для рассматриваемой задачи теорема существования и единственности решения СУГД в пространстве физических автомодельных переменных не доказана.

Положительный опыт построения аналитических решений СУГД [10, 11] как решения характеристической задачи Коши стандартного вида без сведения СУГД к одному ДУ для функции потенциала дает надежду на получение новых аналитических результатов для задачи истечения газа в вакуум на косо́й стенке. Ценность полученного результата заключается также в том, что он переносится на случай сжатия призматического объема газа в несогласованном случае [12].

1. Постановка задачи об истечении газа в вакуум с косо́й стенкой. Пусть в момент времени $t = 0$ политропный газ со скоростью звука c , равной единице, покоится в клиновидной области плоскости xOy , затемненной на рис. 1, *a* и ограниченной двумя прямыми непроницаемыми стенками: вертикальная стенка $x = 0$ (при $y \geq 0$), и косо́я стенка $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

В момент времени $t = 0$ вертикальная стенка $x = 0$ мгновенно убирается, после чего начинается истечение газа в вакуум (помечено цифрой 3 на рис. 1) вдоль косо́й стенки $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

На рис. 1, *b* приведена конфигурация течения, имеющего место при исте-

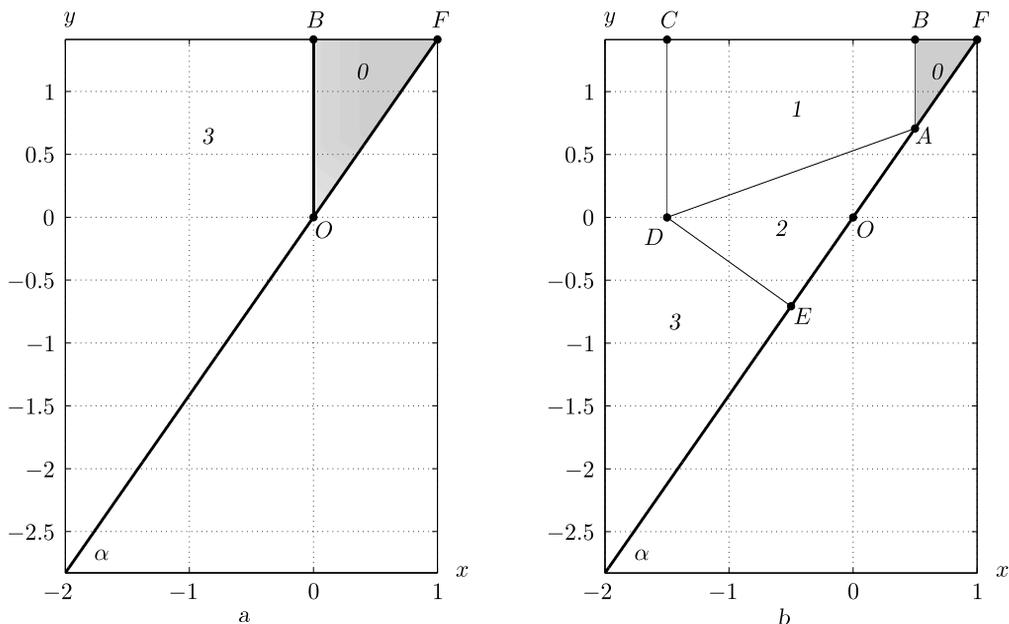


Рис. 1. Начальная конфигурация в момент $t = 0$ (a) и конфигурация потока в момент $t > 0$ (b): 0 — область, в которой находится покоящийся газ; 1 — область течения в виде централизованной волны; 2 — область течения в виде ДВ; 3 — область вакуума

[Figure 1. (a) Initial configuration ($t = 0$); (b) the flow configuration at $t > 0$: quiescent gas region (0), the flow region in the form of a centered wave (1), the flow region in the form of a double wave (2), and the vacuum region (3)

чения газа в вакуум вдоль косой стенки в момент времени $t > 0$. В области, помеченной цифрой 0 , находится покоящийся однородный газ. Этот покоящийся газ отделен звуковой характеристикой — вертикальной прямой [13]

$$AB : x = t$$

от области известного течения, то есть от области централизованной волны (ЦВ) Римана, задаваемой следующими формулами [13]:

$$c = \frac{(\gamma - 1)x}{(\gamma + 1)t} + \frac{2}{(\gamma + 1)}, \quad u = \frac{2}{(\gamma + 1)} \frac{x}{t} - \frac{2}{(\gamma + 1)}, \quad v = 0.$$

Течение ЦВ расположено в области, помеченной цифрой 1 (см. рис. 1, b). С другой стороны ЦВ примыкает к вакууму через свободную границу, являющуюся вертикальной прямой CD и распространяющуюся в вакуум по закону [13]

$$CD : x = -\frac{2}{\gamma - 1}t.$$

В области, помеченной цифрой 2 (см. рис. 1, b), находится ДВ — искомое двумерное течение. Это течение отделено от ЦВ звуковой характеристикой AD , которая в общем случае известна в пространстве годографа [3, 9]. В согласованном случае [7] звуковая характеристика AD является прямой в плоскости переменных (t, x) . Область ДВ примыкает к вакууму через свободную

границу, обозначенную на рис. 1, b как линия DE . Эта свободная граница в согласованном случае (когда выполняется соотношение (1)) есть прямая в плоскости переменных (t, x) , перпендикулярная непроницаемой стенке AE . Поскольку стенка AE является непроницаемой, вектор скорости газа направлен вдоль нее, и поэтому на этой стенке выполняется соотношение (условие непротекания):

$$v|_{AE} = u \operatorname{tg} \alpha|_{AE}.$$

В рассматриваемой задаче требуется найти звуковую характеристику AD и параметры течения газа ДВ.

2. Начально-краевая задача для СУГД, описывающей истечение газа с косо́й стенки в переменных $\xi = x/t, \eta = y/t$. Исходная начально-краевая задача для СУГД, описывающей истечение газа в вакуум с косо́й стенки, в физических автомодельных переменных $\xi = x/t, \eta = y/t$ для вектора $\mathbf{U} = (c, u, v)^\top$ имеет вид [12]:

$$\begin{cases} A\mathbf{U}_\xi + B\mathbf{U}_\eta = \mathbf{0}, \\ \mathbf{U}|_{C^+} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (2)$$

Матрицы A и B задачи (2) следующие:

$$A = \begin{pmatrix} u - \xi & \varkappa c & 0 \\ c/\varkappa & u - \xi & 0 \\ 0 & 0 & u - \xi \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v - \eta & 0 & \varkappa c \\ 0 & v - \eta & 0 \\ c/\varkappa & 0 & v - \eta \end{pmatrix}.$$

Здесь неизвестная звуковая характеристика C^+ задается функцией $f(\xi)$. Для упрощения записи введено обозначение $\varkappa = (\gamma - 1)/2$. Входные данные (начальные и граничные условия, коэффициенты матриц A и B) задачи (2) предполагаются аналитическими функциями.

3. Первая замена переменных. Для сведения задачи (2) к ХЗК стандартного вида делается первая замена переменных

$$\begin{cases} \vartheta = \eta - f(\xi), \\ \xi' = \xi, \end{cases} \quad (3)$$

где линия $\vartheta = 0$, то есть линия $\eta = f(\xi)$, задает звуковую характеристику C^+ . Якобиан J замены (3) равен единице:

$$J = \begin{vmatrix} \vartheta_\eta & \vartheta_\xi \\ \xi'_\eta & \xi'_\xi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -f' \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 \cdot f' = 1.$$

При выполнении условия $|f'| < \infty$ замена (3) невырожденная. При введенной замене производные в (2) заменяются по следующим формулам:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi'} - f'(\xi') \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

В результате исходная начально-краевая задача (2) будет иметь вид

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]U_{\vartheta} + AU_{\xi} = 0, \\ \mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{y=x \operatorname{tg} \alpha} = u \operatorname{tg} \alpha|_{y=x \operatorname{tg} \alpha}. \end{cases} \quad (4)$$

При этом вид матрицы $[B - f'(\xi)A]$ следующий:

$$[B - f'(\xi)A] = \begin{pmatrix} v - \vartheta - f - f'(u - \xi) & -\varkappa c f' & \varkappa c \\ -\frac{c}{\varkappa} f' & v - \vartheta - f - f'(u - \xi) & 0 \\ \frac{c}{\varkappa} & 0 & v - \vartheta - f - f'(u - \xi) \end{pmatrix}.$$

4. Нахождение звуковой характеристики $f(\xi)$. После приравнивания к нулю определителя матрицы

$$\det[B - f'(\xi)A]|_{\substack{U=U_0 \\ \vartheta=0}} \equiv 0$$

функция $f(\xi)$ определяется в явном виде. Найдем определитель матрицы $[B - f'(\xi)A]$ при $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$, $\vartheta = 0$:

$$\begin{aligned} \det[B - f'(\xi)A]|_{\substack{U=U_0 \\ \vartheta=0}} &= \begin{vmatrix} c_0 f' - f & -\varkappa c_0 f' & \varkappa c_0 \\ -\frac{c_0}{\varkappa} f' & c_0 f' - f & 0 \\ \frac{c_0}{\varkappa} & 0 & c_0 f' - f \end{vmatrix} = \\ &= (c_0 f' - f)[(c_0 f' - f)^2 - c_0^2 f'^2 - c_0^2]. \end{aligned}$$

Здесь $c_0 = (\varkappa \xi + 1)/(\varkappa + 1)$.

Определитель матрицы $[B - f'(\xi)A]$ тождественно равен нулю, если удовлетворяется одно из уравнений:

$$c_0 f' - f = 0, \quad (c_0 f' - f)^2 - c_0^2 f'^2 - c_0^2 = 0.$$

Найдем неизвестную звуковую характеристику C^+ как решение нелинейного дифференциального уравнения:

$$(c_0 f' - f)^2 - c_0^2 f'^2 - c_0^2 = 0. \quad (5)$$

После раскрытия скобок в уравнении (5) и приведения подобных слагаемых получим следующее уравнение:

$$f^2 - 2c_0 f f' - c_0^2 = 0. \quad (6)$$

Справедливо соотношение $2f f' = (f^2)'$, тогда (6) после замены $f^2 = y$ преобразуется к виду

$$c_0 y' - y + c_0^2 = 0. \quad (7)$$

Получим решение (7) методом вариации постоянной. Вначале построим решение однородного уравнения

$$c_0 y' - y = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{y} = \frac{(\varkappa + 1)d\xi}{\varkappa\xi + 1}.$$

Решением последнего уравнения будет выражение

$$y(\xi) = C_1 [c_0(\xi)]^{(\varkappa+1)/\varkappa}, \quad (8)$$

где $C_1 = \text{const}$.

Получим решение неоднородного уравнения (7), полагая константу C_1 неотрицательной функцией независимой переменной ξ , то есть $C_1 = C_1(\xi)$. Подставляя выражение для $y(\xi) = C_1(\xi)[c_0(\xi)]^{(\varkappa+1)/\varkappa}$ в исходное уравнение (7), получим

$$c_0 C_1' c_0^{1+1/\varkappa} + c_0 C_1 \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} c_0^{1/\varkappa} c_0' - C_1 c_0^{(\varkappa+1)/\varkappa} + c_0^2 = 0.$$

С учетом $c_0' = \varkappa/(\varkappa + 1)$ второе и третье слагаемые в уравнении сокращаются. После сокращения оставшихся слагаемых на c_0^2 окончательно получим дифференциальное уравнение для функции C_1 :

$$C_1' = -c_0^{-1/\varkappa}. \quad (9)$$

При $\varkappa = 1$ ($\gamma = 3$) решением (9) будет выражение

$$C_1(\xi) = -2 \ln(\xi + 1) + C_2. \quad (10)$$

Подставим выражение (10) в (8), с учетом замены $y = f^2(\xi)$ получим выражение для характеристики:

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{C_2 - 2 \ln(\xi + 1)}.$$

Для функции $f(\xi)$ область определения $-1 < \xi < 1$:

- при $\xi = -1$ скорость звука на характеристике AD принимает значение $c_0(-1) = 0$, что задает границу газа с вакуумом;
- при $\xi = 1$ скорость звука на характеристике AD принимает значение $c_0(1) = 1$, что задает границу газа с покоем.

Из данных условий определим константу интегрирования C_2 .

В результате получим окончательное выражение для характеристики при $\varkappa = 1$ ($\gamma = 3$):

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\text{tg}^2 \alpha - 2 \ln c_0}. \quad (11)$$

Здесь $c_0 = (\xi + 1)/2$. В рассматриваемом диапазоне изменения ξ подкоренное выражение в (11) всегда положительно.

Рассмотрим случай, когда $\varkappa \neq 1$ ($\gamma \neq 3$). Тогда уравнение (9) имеет вид

$$\frac{dC_1}{d\xi} = -\frac{1}{c_0^{1/\varkappa}} = -\frac{1}{\left(\frac{\varkappa\xi+1}{\varkappa+1}\right)^{1/\varkappa}}.$$

В результате интегрирования дифференциального уравнения получим

$$C_1(\xi) = \beta \left(\frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} \right)^{1-1/\varkappa} + C_2, \quad (12)$$

где $\beta = (\varkappa + 1)/(1 - \varkappa)$.

Подставим выражение (12) в (8), с учетом замены $y = f^2(\xi)$ получим выражение для характеристики:

$$f(\xi) = \pm \sqrt{C_2 \left(\frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} \right)^{(\varkappa+1)/\varkappa} + \beta \left(\frac{\varkappa \xi + 1}{\varkappa + 1} \right)^2} = \pm c_0 \sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa} C_2}. \quad (13)$$

Здесь $c_0 = (\varkappa \xi + 1)/(\varkappa + 1)$. При этом $c_0(0) > 0$, т. е. функции c_0 и c_0^{-1} являются аналитическими в некоторой окрестности точки $\xi = 0$.

Константу C_2 в (13) определим из условий на границе с вакуумом $c_0(-1/\varkappa) = 0$ и покоем $c_0(1) = 1$. Окончательное выражение для звуковой характеристики при $\varkappa \neq 1$ ($\gamma \neq 3$):

$$f(\xi) = \pm c_0 \sqrt{\beta + c_0^{(1-\varkappa)/\varkappa} (\text{tg}^2 \alpha - \beta)}. \quad (14)$$

Функции (11) и (14) также являются аналитическими в некоторой окрестности точки $\xi = 0$.

5. Вторая замена переменных. Далее делается новая замена переменных. Вместо переменных ϑ и ξ по формулам

$$\begin{cases} \vartheta' = \vartheta, \\ \zeta = \vartheta + f(\xi) - \xi \text{tg} \alpha \end{cases} \quad (15)$$

берутся новые независимые переменные ϑ' и ζ .

Уравнение косой стенки $y = x \text{tg} \alpha$, или $y/t = (x/t) \text{tg} \alpha$, отсюда $\eta = \xi \text{tg} \alpha$. С учетом замен (3) и (15) эта прямая в переменных ζ и ϑ имеет вид $\zeta = 0$, то есть при замене (15) косая стенка берется за новую координатную ось.

Якобиан последней замены переменных (15) следующий:

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} & \frac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) - \text{tg} \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \text{tg} \alpha - f'(\xi).$$

Чтобы замена (15) была невырожденной, необходимо выполнение следующего неравенства:

$$J_2 = \text{tg} \alpha - f'(\xi) \neq 0, \quad (16)$$

то есть наклон косой стенки не равен наклону звуковой характеристики, разделяющей ЦВ и ДВ.

Производную функции $f(\xi)$ можно выразить из уравнения (5):

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{c_0} - \frac{c_0}{f} \right). \quad (17)$$

Докажем неравенство (16) методом от противного. Пусть $\operatorname{tg} \alpha - f'(\xi) = 0$, тогда с учетом (17) получим

$$\frac{f^2 - 2c_0 \operatorname{tg} \alpha f - c_0^2}{c_0 f} = 0. \quad (18)$$

Знаменатель дроби (18) не равен нулю, отсюда получим квадратное уравнение для функции $f(\xi)$:

$$f^2 - 2c_0 \operatorname{tg} \alpha f - c_0^2 = 0. \quad (19)$$

Решением (19) будет выражение для функции $f(\xi)$:

$$f(\xi) = c_0(\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}).$$

Видно, что выражение для функции $f(\xi)$ не совпадает с полученным ранее (14) и (11), следовательно, неравенство (16) выполняется, что и требовалось доказать.

Из соотношения

$$\zeta - \vartheta = f(\xi) - \xi \operatorname{tg} \alpha, \quad (20)$$

неявно задающего с учетом неравенства (16) функцию ξ от $(\zeta - \vartheta)$, однозначно определяется равенство

$$\xi = \varphi(\zeta - \vartheta). \quad (21)$$

Однако дальше для простоты записи будем сохранять обозначения $f(\xi)$, $f'(\xi)$, $c_0(\xi)$, естественно, подразумевая наличие связи (21).

При второй замене производные заменяются по следующим формулам:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta'} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = [f'(\xi) - \operatorname{tg} \alpha] \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

В результате система уравнений с частными производными задачи (4) будет иметь следующий вид:

$$[B - f'(\xi)A][\mathbf{U}_\vartheta + \mathbf{U}_\zeta] + [f'(\xi) - \operatorname{tg} \alpha]A\mathbf{U}_\zeta = 0,$$

где штрих у переменной ϑ' опущен. Отсюда начально-краевая задача (4) будет иметь вид

$$\begin{cases} [B - f'(\xi)A]\mathbf{U}_\vartheta + [B - \operatorname{tg} \alpha A]\mathbf{U}_\zeta = 0, \\ \mathbf{U}|_{\vartheta=0} = \mathbf{U}_0, \\ v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (22)$$

При этом вид матрицы $[B - \operatorname{tg} \alpha A]$ следующий:

$$[B - \operatorname{tg} \alpha A] = \begin{pmatrix} v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha(u - \xi) & -\varkappa c \operatorname{tg} \alpha & \varkappa c \\ -\frac{c}{\varkappa} \operatorname{tg} \alpha & v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha(u - \xi) & 0 \\ \frac{c}{\varkappa} & 0 & v - \vartheta - f - \operatorname{tg} \alpha(u - \xi) \end{pmatrix}.$$

6. Приведение начально-краевой задачи к ХЗК стандартного вида. Приведем начально-краевую задачу (22) к ХЗК стандартного вида. Для этого построим две невырожденные матрицы, элементы которых есть функции независимой переменной ξ :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_0 f' - f & \varkappa c_0 f' & -\varkappa c_0 \end{pmatrix}, \quad T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ f' & (c_0 f' - c_0)/\varkappa c_0 & -1/\varkappa c_0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_0 f' - f \\ 0 & 1 & c_0 f'/\varkappa \\ 0 & 0 & -c_0/\varkappa \end{pmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varkappa(c_0 f' - f)/c_0 \\ 0 & 1 & f' \\ 0 & 0 & -\varkappa/c_0 \end{pmatrix}.$$

СУГД из задачи (22) слева умножается на матрицу T_1 , а вектор \mathbf{U} заменяется новым вектором \mathbf{W} , который определяется следующим образом:

$$\mathbf{W} = T_2^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + v \frac{\varkappa}{c_0} (c_0 f' - f) \\ u + v f' \\ -\frac{\varkappa}{c_0} v \end{pmatrix}.$$

Эти преобразования невырожденные. Для вектора \mathbf{W} записывается начально-краевая задача — задача (22), приведенная к ХЗК стандартного вида:

$$\begin{cases} T_1[B - f'(\xi)A]T_2 \mathbf{W}_\vartheta + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A]T_2 \mathbf{W}_\zeta + \\ \quad + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A] \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{\mathbf{W}}{f' - \operatorname{tg} \alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \\ v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (23)$$

Входные данные задачи (23) являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки ($\vartheta = 0, \zeta = 0$).

Далее используется двойной индекс. Первый из них обозначает номер искомой функции, второй — номер коэффициента в разложении этой функции в степенной ряд по ϑ . Отсюда определяется вектор \mathbf{W}_0 :

$$\mathbf{W}_0 = (w_{1,0}, w_{2,0}, w_{3,0})^\top = (c_0, u_0, 0)^\top.$$

Построим краевое условие для задачи (23) через компоненты вектора \mathbf{W} . Поскольку

$$w_1 = c + [c_0(\xi)f'(\xi) - f(\xi)] \frac{\varkappa}{c_0(\xi)} v, \quad w_2 = u + f'(\xi)v, \quad w_3 = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} v,$$

можно записать, что

$$v = -\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} w_3, \quad u = w_2 + \frac{\varkappa}{c_0(\xi)} f'(\xi) w_3.$$

Краевое условие (условие непротекания)

$$v|_{\zeta=0} = u \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0}$$

записывается таким образом:

$$-\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} w_3|_{\zeta=0} = \operatorname{tg} \alpha \left[w_2 + \frac{\varkappa}{c_0(\xi)} f'(\xi) w_3 \right] |_{\zeta=0},$$

то есть

$$-\frac{\varkappa}{c_0(\xi)} [1 + f'(\xi) \operatorname{tg} \alpha] w_3|_{\zeta=0} = w_2 \operatorname{tg} \alpha|_{\zeta=0},$$

или

$$w_3|_{\zeta=0} = -\frac{c_0(\xi)}{\varkappa} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f'(\xi) \operatorname{tg} \alpha} w_2|_{\zeta=0}.$$

Запишем краевое условие задачи (23) с учетом неявной связи между переменными ζ , ϑ и ξ , задаваемой соотношениями (20) и (21):

$$w_3|_{\zeta=0} = -\left[\frac{c_0(\varphi(\zeta - \vartheta))}{\varkappa} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f'_\xi(\varphi(\zeta - \vartheta)) \operatorname{tg} \alpha} \right] |_{\zeta=0} w_2|_{\zeta=0}.$$

Множитель, стоящий перед коэффициентом w_2 , обозначим следующим образом:

$$g(\vartheta) = -\left[\frac{c_0(\varphi(\zeta - \vartheta))}{\varkappa} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + f'_\xi(\varphi(\zeta - \vartheta)) \operatorname{tg} \alpha} \right] |_{\zeta=0}. \quad (24)$$

Окончательно начально-краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} T_1[B - f'(\xi)A]T_2 \mathbf{W}_\vartheta + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A]T_2 \mathbf{W}_\zeta + \\ \quad + T_1[B - \operatorname{tg} \alpha A] \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{\mathbf{W}}{f' - \operatorname{tg} \alpha} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{W}|_{\vartheta=0} = \mathbf{W}_0, \\ w_3|_{\zeta=0} = g(\vartheta)w_2|_{\zeta=0}. \end{cases} \quad (25)$$

Входные данные задачи (25), включая краевое условие, также являются аналитическими функциями в некоторой окрестности точки ($\vartheta = 0, \zeta = 0$).

Система из задачи (25) на плоскости $\vartheta = 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{c_0}{\varkappa} f'_\xi & c_0 f'_\xi - f & 0 \\ c_0 f'_\xi - f & -\varkappa c_0 f'_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_0}{\varkappa} \operatorname{tg} \alpha & c_0 \operatorname{tg} \alpha - f & -\frac{c_0}{\varkappa} f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \\ c_0 \operatorname{tg} \alpha - f & -\varkappa c_0 \operatorname{tg} \alpha & c_0 f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \\ c_0 f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) & -\varkappa c_0 f(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) & -c_0(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha)(f^2 + c_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_{1,0\zeta} \\ w'_{2,0\zeta} \\ w'_{3,0\zeta} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c_0}{\varkappa} f' \operatorname{tg} \alpha + \frac{c_0}{\varkappa} f f'' + u'_0 f f' \\ 0 & 0 & \frac{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha}{c_0 f' \operatorname{tg} \alpha - c_0 f f'' + u'_0 f f' - c'_0 c_0} \\ 0 & 0 & \frac{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha}{c_0 f f'' (c_0 - \varkappa) - u'_0 f f' (c_0 + \varkappa) - c'_0 c_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ w_{3,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Проверим необходимое условие разрешимости системы (26). Для этого распишем третье уравнение системы:

$$0 + c_0 f (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (w'_{1,0\zeta} - \varkappa w'_{2,0\zeta}) - c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2) w'_{3,0\zeta} + [c_0 f f'' (c_0 - \varkappa) - u'_0 f f' (c_0 + \varkappa) - c'_0 c_0^2] w_{3,0} = 0. \quad (27)$$

С учетом явного вида $w_{1,0}$, $w_{2,0}$, $w_{3,0}$ будем иметь

$$(w'_{1,0\zeta} - \varkappa w'_{2,0\zeta}) = \frac{1}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} (w'_{1,0\xi} - \varkappa w'_{2,0\xi}) = \frac{c'_0 - \varkappa u'_0}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \equiv 0.$$

Для второго слагаемого будем иметь

$$w'_{3,0\zeta} = w'_{3\zeta} \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} v'_\zeta \Big|_{\vartheta=0} = -\frac{\varkappa}{c_0} \frac{v_\xi \Big|_{\vartheta=0}}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\varkappa}{c_0} \frac{v'_0}{f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha} \equiv 0.$$

Так как $w_3 \Big|_{\vartheta=0} = w_{3,0} = 0$, последнее слагаемое уравнения (27) равно нулю, и уравнение (27) обращается в тождество — необходимое условие разрешимости выполняется.

Таким образом, для системы из задачи (26) вид матриц удовлетворяет условиям аналога теоремы Ковалевской [14]:

1) матрица размерностью 3×3 при векторе производных \mathbf{W}_ϑ на плоскости $\vartheta = 0$ в левом верхнем углу имеет ненулевой минор размерностью 2×2 :

$$\begin{vmatrix} -\frac{c_0}{\varkappa} f'_\xi & c_0 f'_\xi - f \\ c_0 f'_\xi - f & -\varkappa c_0 f'_\xi \end{vmatrix} = c_0^2 f_\xi'^2 - (c_0 f'_\xi - f)^2 \neq 0;$$

остальные элементы матрицы равны нулю;

2) в матрице, стоящей перед вектором производных \mathbf{W}_ζ , элемент из третьей строки и третьего столбца

$$-c_0 (f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) (f^2 + c_0^2)$$

не равен 0, т. к. справедливо неравенство $f' - \operatorname{tg} \alpha \neq 0$.

Следовательно, получившаяся задача (25) является ХЗК стандартного вида [14]. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. *Поставленная задача (25) при найденной функции $f(\xi)$ является характеристической задачей Коши стандартного вида и поэтому у нее в некоторой окрестности точки $(\zeta = 0, \vartheta = 0)$ существует единственное локально-аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$\mathbf{W}(\zeta, \vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(\zeta) \frac{\vartheta^k}{k!}; \quad \mathbf{W}_k(\zeta) = \frac{\partial^k \mathbf{W}}{\partial \vartheta^k} \Big|_{\vartheta=0}. \quad (28)$$

7. Алгоритм построения решения рассматриваемой ХЗК. Коэффициенты ряда (28) с номером ноль $w_{1,0}$, $w_{2,0}$, $w_{3,0}$ определяются из начальных условий.

Для определения коэффициентов ряда с номером один в системе из задачи (25) полагается $\vartheta = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы задачи (25) как из системы линейных алгебраических выражений (СЛАУ) для $w_{1,1}$, $w_{2,1}$ находятся в виде аналитических функций коэффициенты ряда (28) с номером один для двух первых искомых функций: $w_{1,1}$, $w_{2,1}$.

А третье уравнение из системы задачи (25) при $\vartheta = 0$ становится *необходимым условием разрешимости* рассматриваемой ХЗК — дополнительным соотношением на коэффициенты $w_{1,0}$, $w_{2,0}$, $w_{3,0}$. В данной задаче эти необходимые условия выполняются автоматически, поскольку начальные условия в задаче (25) являются ее частным решением, и это напрямую проверено предыдущими выкладками.

После этого третье уравнение из задачи (25) дифференцируется по ϑ и полагается $\vartheta = 0$. В полученном соотношении коэффициенты перед коэффициентами $w_{1,2}$, $w_{2,2}$, $w_{3,2}$ равны нулю. В оставшихся слагаемых величины $w_{1,1}$, $w_{2,1}$ и их производные по ζ известны, а неизвестным является коэффициент $w_{3,1}$ и его производная по ζ .

Это соотношение рассматривается как обыкновенное дифференциальное уравнение для $w_{3,1}$ с производной этой искомой функции по переменной ζ (транспортное уравнение). Для однозначной разрешимости этого уравнения требуются два условия:

- 1) коэффициент перед соответствующей производной $w_{3,1\zeta}$, то есть коэффициент $-c_0(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha)(f^2 + c_0^2)$, отличен от нуля при $\vartheta = \zeta = 0$, поскольку $(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha) \neq 0$;
- 2) для функции $w_{3,1}$ задано начальное условие при $\zeta = 0$.

Выше показано, что оба условия выполняются. Начальное условие для транспортного уравнения получается следующим образом: краевое условие из задачи (25) дифференцируется по ϑ и в получившемся соотношении

$$w_{3\vartheta}|_{\zeta=0} = [g'(\vartheta)w_2 + g(\vartheta)w_{2\vartheta}]|_{\zeta=0}$$

полагается $\vartheta = 0$

$$w_{3,1}|_{\zeta=0} = [g'(0)w_{2,0} + g(0)w_{2,1}]|_{\zeta=0}. \quad (29)$$

Здесь $g(0)$ и $g'(0)$ — значения функции $g(\vartheta)$ (24) и ее производной по ϑ при $\vartheta = 0$.

Поскольку коэффициенты $w_{2,0}$ и $w_{2,1}$ известны, а значит известны их значения при $\zeta = 0$, последнее соотношение (29) и дает начальное условие для обыкновенного дифференциального уравнения для коэффициента $w_{3,1}$, которое имеет единственное аналитическое решение.

Построение следующих коэффициентов ряда (28) производится следующим образом.

Первые два уравнения системы из задачи (25) дифференцируются k раз по ϑ и полагается $\vartheta = 0$. Из этих двух получившихся соотношений как из СЛАУ с отличным от нуля определителем находятся коэффициенты $w_{1,k+1}$, $w_{2,k+1}$ в виде аналитических функций.

После этого третье уравнение системы из задачи (25) дифференцируется $(k+1)$ раз по ϑ и полагается $\vartheta = 0$. В получившемся соотношении коэффициенты перед величинами $w_{1,k+2}$, $w_{2,k+2}$, $w_{3,k+2}$ равны нулю и это последнее соотношение становится обыкновенным дифференциальным уравнением для искомой функции $w_{3,k+1}$. Коэффициент перед соответствующей производной отличен от нуля, то есть функция $-c_0(f'_\xi - \operatorname{tg} \alpha)(f^2 + c_0^2)$ при $\zeta = 0$ отлична от нуля. Поэтому при задании для этого обыкновенного дифференциального уравнения начального условия функция $w_{3,k+1}$ определится однозначно в виде аналитической функции. Требуемое начальное условие получится после дифференцирования $(k+1)$ раз по ϑ краевого условия из задачи (25) и после подстановки в получившееся соотношение значения $\vartheta = 0$. Все коэффициенты $w_{2,l}$, $0 \leq l \leq k+1$ к этому моменту известны.

Построение решения задачи (25) в виде ряда (28) закончено.

Заключение.

1. В данной работе поставлена начально-краевая задача для СУГД, решение которой описывает движение газа при истечении в вакуум с косой стенки в пространстве физических автомодельных переменных x/t , y/t .
2. В результате двух невырожденных замен исходная задача приведена к виду стандартной ХЗК в пространстве переменных ϑ , ζ , где значение $\vartheta = 0$ означает, что за новую координатную ось выбирается звуковая характеристика, а значение $\zeta = 0$ означает, что за новую координатную ось выбирается косая стенка.
3. Из анализа элементов матриц системы, стоящих перед производными \mathbf{W}_ϑ и \mathbf{W}_ζ в системе с частными производными, доказана теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи для СУГД, решение которой описывает истечение газа с косой стенки в вакуум.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор выражает благодарность и признательность своему научному руководителю профессору С. П. Баутину и рецензентам рукописи статьи за внимание, помощь и поддержку.

Библиографический список

1. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. vol. 2: Partial Differential Equations. New York, London: John Wiley & Sons, 1962. xxii+830 pp.
2. Станюкович К. П. *Неустановившиеся движения сплошной среды*. М.: ГИТТЛ, 1955. 804 с.
3. Баутин С. П. *Математическое моделирование сильного сжатия газа*. Новосибирск: Наука, 2007. 312 с.
4. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. *Явления неограниченной кумуляции*. М.: Наука, 1988. 177 с.
5. Долголева Г. В., Забродин А. В. *Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия*. М.: Физматлит, 2004. 69 с. EDN: [UGLKZR](#).
6. Bernstein L. A. *Reactions on Excited States using the National Ignition Facility. Nuclear Astrophysics using NIF*: Preprint No. UCRL PRES-233342. Livermore: Lawrence Livermore Nat. Lab., 2007.
7. Сучков В. А. Истечение в вакуум на косо́й стенке // *ПММ*, 1963. Т. 27, № 4. С. 739–740.
8. Сидоров А. Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа // *Докл. АН СССР*, 1991. Т. 318, № 3. С. 548–552.
9. Баутин С. П., Дерябин С. Л. *Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум*. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с. EDN: [QJPIDD](#).
10. Кубанова А. К. Об одной форме аналитического решения истечения газа в пористой среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003. № 19. С. 38–41. EDN: [EBRVIL](#). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu137>.
11. Дерябин С. Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // *Вычислительные технологии*, 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44. EDN: [KZAREX](#).
12. Баутин С. П., Понькин Е. И. Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косо́й стенки // *ПМТФ*, 2021. Т. 62, № 1. С. 32–40. EDN: [KCQUYF](#). DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20210104>.
13. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М., Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 335 с. EDN: [QJPLMV](#).
14. Баутин С. П. *Характеристическая задачи Коши и ее приложения в газовой динамике*. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

MSC: 76N15, 35C06, 35Q35

The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall

*E. I. Pon'kin*Snezhinsk Physic Institute of the National Research Nuclear University MEPhI,
8, Komsomolskay st., Snezhinsk, 456776, Russian Federation.

Abstract

The initial-boundary value problem for the system of equations of gas dynamics, the solution of which describes the expansion of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall in the space of self-similar variables x/t , y/t in the general inconsistent case, is reduced to the characteristic Cauchy problem of standard form in the space of new independent variables ϑ , ζ . Equation $\vartheta = 0$ defines the characteristic surface through which the double wave adjoins the well-known solution known as the centered Riemann wave. Equation $\zeta = 0$ means that an oblique wall is chosen for the new coordinate axis, on which the impermeability condition is satisfied. For this new initial-boundary value problem, in contrast to the well-known solution of a similar problem obtained by S. P. Bautin and S. L. Deryabin in the space of special variables, the theorem of existence and uniqueness for the solution of the system of equations of gas dynamics in the space of physical self-similar variables in the form of a convergent infinite series was proved. An algorithm is described to build the series coefficients.

Keywords: characteristic Cauchy problem of standard form, analogue of Kovalevskaya's theorem, characteristic surface, oblique wall, series coefficient construction algorithm.

Received: 26th April, 2022 / Revised: 28th May, 2022 /Accepted: 7th June, 2022 / First online: 30th June, 2022

Competing interests. No competing interests.

Author's Responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Pon'kin E. I. The characteristic Cauchy problem of standard form for describing the outflow of a polytropic gas into vacuum from an oblique wall, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 322–338. EDN: QYHKRK. DOI: [10.14498/vsgtu1922](https://doi.org/10.14498/vsgtu1922) (In Russian).

Author's Details:

Eugeny I. Pon'kin  <https://orcid.org/0000-0002-7848-3167>Postgraduate Student; e-mail: epnk@rambler.ru

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author expresses his gratitude and appreciation to his supervisor, Professor S. P. Bautin, and the reviewers of the manuscript for their attention, help, and support.

References

1. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, Partial Differential Equations. New York, London, John Wiley & Sons, 1962, xxii+830 pp.
2. Stanyukovich K. P. *Unsteady motion of Continuous Media*. London, Pergamon Press, 1960, xv+745 pp.
3. Bautin S. P. *Matematicheskoe modelirovanie sil'nogo szhatiia gaza* [Mathematical Modeling of Strong Gas Compression]. Novosibirsk, Nauka, 2007, 312 pp. (In Russian)
4. Zababakhin E. I., Zababakhin I. E. *Iavleniia neogranichennoi kumuliatsii* [Phenomena of Unlimited Cumulation]. Moscow, Nauka, 1988, 177 pp. (In Russian)
5. Dolgoleva G. V., Zabrodin A. V. *Kumuliatsiia energii v sloistykh sistemakh i realizatsiia bezudarnogo szhatiia* [Energy Accumulation in Layered Systems and Implementation of Shockless Compression]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 69 pp. (In Russian). EDN: UGLKZR.
6. Bernstein L. A. *Reactions on Excited States using the National Ignition Facility. Nuclear Astrophysics using NIF*, Preprint No. UCRL PRES-233342. Livermore, Lawrence Livermore Nat. Lab., 2007.
7. Suchkov V. A. Flow into a vacuum along an oblique wall, *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 4, pp. 1132–1134. EDN: YQXWVA. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90195-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90195-3).
8. Sidorov A. F. Some estimates for the degree of energy cumulation in two- and three-dimensional shockless compression of a gas, *Dokl. Math.*, 1991, vol. 36, no. 5, pp. 347–349.
9. Bautin S. P., Deryabin S. L. *Matematicheskoe modelirovanie istecheniia ideal'nogo gaza v vakuum* [Mathematical Modeling of Ideal Gas Flow into Vacuum]. Novosibirsk, Nauka, 2005, 390 pp. (In Russian). EDN: QJPIDD.
10. Kubanova A. K. On one form of analytical solution of gas outflow in a porous medium, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2003, no. 19, pp. 38–41 (In Russian). EDN: EBRVIL. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu137>.
11. Deryabin S. L. One-dimension escape of self-gravitating ideal gas into vacuum, *Vychisl. Tekhnol.* [Comput. Technol.], 2003, vol. 8, no. 4, pp. 32–44 (In Russian). EDN: KZAREX.
12. Bautin S. P., Pon'kin E. I. Self-similar solutions of the problem of polytropic gas flow along an oblique wall into vacuum, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 1, pp. 32–40. EDN: YQXWVA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894421010041>.
13. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the Fundamentals of Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Inst. Comp. Studies, 2003, 335 pp. (In Russian). EDN: QJPLMV.
14. Bautin S. P. *Kharakteristicheskaia zadachi Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [Characteristic Cauchy Problem and its Applications in Gas Dynamics]. Novosibirsk, Nauka, 2009, 368 pp. (In Russian)



УДК 517.958:621.311.245

Оценка влияния моделей турбулентности на описание процессов вихреобразования в ветроэнергетике

*Е. В. Соломин, А. А. Терехин, А. С. Мартьянов,
А. А. Ковалёв, Д. Р. Исмагилов, Г. Н. Рязкин,
А. З. Кулганатов, Б. Т. Погорелов*

Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет),
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.

Аннотация

Проведено сравнение результатов математического моделирования внешнего обтекания горизонтально-осевой ветроэнергетической установки Siemens модели SWT-3.6-120 (профиль лопасти B52) с применением осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых моделями турбулентности $k-\varepsilon$, $k-\omega$ Shear Stress Transport и Eddy Viscosity Transport. Задача верного определения угла отклонения вектора скорости над гондолой ветроэнергетической установки обусловлена работой системы ориентации, от которой зависит эффективность всей установки. В качестве критерия сравнения выбрано число Струхала, определенного для поперечного обтекания цилиндра, описывающего частоту формирования вихревой структуры за комлевой частью лопасти ветроэнергетической установки. Расчетная область состоит из трех миллионов тетраэдрических элементов с призматическим слоем на поверхности гондолы с применением локального измельчения. Место регистрации параметров направления потока расположено на высоте 3 м над гондолой и на расстоянии 8 м от комлевой части лопасти, что соответствует стандартному расположению анеморумбометра. Анализ полученных результатов показал, что модели турбулентности $k-\varepsilon$ и Eddy Viscosity Transport практически одинаково описывают параметры потока над гондолой ветроэнергетической установки, но модель Eddy Viscosity Transport имеет одно

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Соломин Е. В., Терехин А. А., Мартьянов А. С., Ковалёв А. А., Исмагилов Д. Р., Рязкин Г. Н., Кулганатов А. З., Погорелов Б. Т. Оценка влияния моделей турбулентности на описание процессов вихреобразования в ветроэнергетике // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 339–354. EDN: SVRJGF. DOI: [10.14498/vsgtu1885](https://doi.org/10.14498/vsgtu1885).

Сведения об авторах

Евгений Викторович Соломин  <https://orcid.org/0000-0002-4694-0490>

доктор технических наук, профессор; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: solominev@susu.ru

Александр Александрович Терехин  <https://orcid.org/0000-0002-5744-2104>

кандидат технических наук, доцент; каф. летательных аппаратов;
e-mail: aleksandr.terekhin@gmail.com

дифференциальное уравнение, тем самым ее применение является более предпочтительным по критерию вычислительных затрат. Преимущество модели Eddy Viscosity Transport также заключается в меньшем количестве замыкающих полуэмпирических констант, анализ которых позволяет расширить область применения инженерных методик описания турбулентных процессов для решения практических задач, связанных с проектированием систем управления ветроэнергетическими установками, повышающих коэффициент полезного действия таких установок.

Ключевые слова: ветер, горизонтально-осевая ветроэнергетическая установка, число Струхала, флюгер, электроэнергия, лопасть, аэродинамический профиль, вихрь.

Получение: 18 сентября 2021 г. / Исправление: 21 декабря 2021 г. /
Принятие: 25 декабря 2021 г. / Публикация онлайн: 15 июня 2022 г.

Введение. Ориентация анеморумбометра горизонтально-осевых ветроэнергетических установок (ГО ВЭУ) по направлению потока ветра влияет на эффективность управления положением установки и на ее коэффициент полезного действия. При прохождении через комлевую часть лопасти вектор скорости потока деформируется, что влияет на показания анеморумбометра и приводит к некорректной работе системы управления ориентацией ВЭУ. Математическое моделирование движения газа в области установки анеморумбометра позволяет проводить анализ влияющих факторов на показания анеморумбометра и прогнозировать работу системы управления ориентацией таких установок не проводя дорогостоящих натурных или модельных экспериментов.

Для точного разрешения пространственно-временных масштабов турбулентности, соответствующих процессам течения вблизи ГО ВЭУ, наиболее подходящими для моделирования турбулентных течений являются метод крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) и метод прямого численного

Андрей Сергеевич Мартьянов  <https://orcid.org/0000-0002-9997-9989>
кандидат технических наук, доцент; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: martianovas@susu.ru

Антон Александрович Ковалёв  <https://orcid.org/0000-0001-6952-277X>
аспирант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: alpenglow305@yandex.ru

Денис Рашидович Исмагилов  <https://orcid.org/0000-0002-9312-295X>
инженер-исследователь; НОЦ «Аэрокосмические технологии»; e-mail: drismagilov@gmail.com

Глеб Николаевич Рякин  <https://orcid.org/0000-0002-7637-0310>
магистрант; каф. электрических станций, сетей и систем электроснабжения; e-mail: amd3@bk.ru

Аскар Зайдакбаевич Кулганатов  <https://orcid.org/0000-0002-7576-7949>
аспирант; каф. электрические станции, сети и системы электроснабжения; e-mail: kulganatov97@gmail.com

Богдан Тарасович Погорелов  <https://orcid.org/0000-0002-2922-6615>
магистрант; каф. электрические станции, сети и системы электроснабжения; e-mail: boga-rap@mail.ru

моделирования (Direct Numerical Simulation, DES) [1,2]. Однако практическое использование этих методов связано с крайней вычислительной трудоемкостью, что затрудняет их широкое распространение. Математические модели турбулентности, базирующиеся на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье—Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes, RANS), получили более широкое распространение, но они не всегда позволяют учесть все эффекты турбулентного течения. Поэтому задача оценки влияния математических моделей турбулентности (RANS) на описание процессов вихреобразования для задач обтекания ГО ВЭУ является актуальной.

Для правильной работы системы управления ориентацией ГО ВЭУ необходимо знать фактическое направление ветра. Направление ветра измеряется анеморумбометром, устанавливаемым на корпусе гондолы ВЭУ. Неправильное определение оптимального расположения анеморумбометра влияет на работу системы ориентации установки, что ведет к снижению ее коэффициента полезного действия. Решить задачу определения оптимального местоположения анеморумбометра на корпусе гондолы ВЭУ можно только методами численного моделирования внешнего обтекания. Процессы вихреобразования над корпусом гондолы являются достаточно сложными для моделирования из-за наличия крупновихревых структур, сопоставимых с размерами самой гондолы. В таких случаях необходимо применять методы моделирования крупных вихрей (LES) или методы моделирования отсоединенного вихря (DES) [1,2]. Однако их практическое применение связано с большой затратой вычислительных ресурсов, что затрудняет их широкое распространение. Применение математических моделей турбулентности, базирующихся на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье—Стокса (RANS), получило более широкое распространение, но не всегда позволяет учесть все эффекты турбулентного течения, связанного с наличием крупновихревых структур. Оценка влияния математических моделей, основанных на подходе RANS к описанию процессов вихреобразования, позволяет расширить область применения инженерных методик описания турбулентных процессов для решения практических задач, связанных с проектированием систем управления ГО ВЭУ, повышающих коэффициент полезного действия ВЭУ.

1. Математическая модель. В качестве математической модели описания движения вязкого турбулентного газа выбрана система уравнений, усредненная по Рейнольдсу (RANS) [3–10]. Неизвестные компоненты пульсации определяются на основе теории Буссинеска [3] о дифференциальных моделях турбулентности $k-\varepsilon$, $k-\omega$ Shear Stress Transport ($k-\omega$ SST) и Eddy Viscosity Transport (EVT) [4, 11–15]. В расчете используется неструктурированная тетраэдрическая сетка с локальным измельчением (параметры пристеночного слоя по критерию Y^+ не более 100) в области анализа параметров. Размер сетки составляет 3 миллиона ячеек.

Уравнения турбулентности имеют ряд эмпирических констант, влияющих непосредственно на отклонение вектора скорости в области расположения анеморумбометра, которые выводятся из дифференциальных уравнений турбулентности.

1.1. Модель $k-\varepsilon$ содержит два дифференциальных уравнения [4] с пятью модельными константами (см. табл. 1):

– уравнение кинетической энергии турбулентности:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right],$$

– уравнение скорости рассеивания:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right],$$

где k — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, $\text{м}^2/\text{с}^2$; ε — скорость рассеивания энергии турбулентности, $\text{м}^2/\text{с}^3$; ρ — плотность воздуха, $\text{кг}/\text{м}^3$; t — время, с; U_i, U_j — средние значения скоростей ветра в направлениях x_i, x_j , $\text{м}/\text{с}$; τ_{ij} — сила трения, Па; μ — коэффициент динамической вязкости, $\text{Па} \cdot \text{с}$; $\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon$ — турбулентная динамическая вязкость, $\text{Па} \cdot \text{с}$; $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ — турбулентные числа Прандтля (константы стандартной модели турбулентности k – ε); $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ — константы стандартной модели турбулентности k – ε ; C_μ — эмпирическая константа замыкания.

1.2. Модель k – ω SST является продвинутой версией модели k – ω и имеет два дифференциальных уравнения [16, 17], содержащих семь основных констант и десять дополнительных (они же — основные константы для стандартной модели k – ω , см. табл. 1):

– уравнение кинетической энергии турбулентности пульсаций:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tilde{G}_k - Y_k + S_k,$$

– уравнение производной затухающей поперечной диффузии:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega,$$

где \tilde{G}_k — выработка кинетической энергии турбулентности пульсаций за счет средних градиентов скорости; Y_k, Y_ω — рассеивания k и ω из-за турбулентности; G_ω — выработка производной затухающей поперечной диффузии; D_ω —

Таблица 1

Численные значения модельных констант [Numerical values of model constants]

k – ε	k – ω SST (basic)	k – ω SST (additional)	EVT
$\sigma_k = 1$	$\sigma_{k1} = 1.176$	$\alpha_\infty^* = 1$	$\alpha = 5/9$
$\sigma_\varepsilon = 1.3$	$\sigma_{k2} = 1$	$\alpha_\infty = 0.52$	$\beta = 0.075$
$C_{\varepsilon 1} = 1.44$	$\sigma_{\omega 1} = 2$	$\alpha_0 = 1/9$	$\sigma = 0.5$
$C_{\varepsilon 2} = 1.92$	$\sigma_{\omega 2} = 1.168$	$\beta_\infty^* = 0.09$	$\beta^* = 0.09$
$C_\mu = 0.09$	$a_1 = 0.31$	$\beta_i = 0.072$	
	$\beta_{i1} = 0.075$	$R_\beta = 8$	
	$\beta_{i2} = 0.0828$	$R_k = 6$	
		$R_\omega = 2.95$	
		$\zeta^* = 1.5$	
		$M_{t0} = 0.25$	

перекрестная диффузия; S_k, S_ω — определяемые пользователем исходные показатели; $\Gamma_k = \mu + \mu_t/\sigma_k$, $\Gamma_\omega = \mu + \mu_t/\sigma_\omega$ — эффективные диффузивности k и ω ; σ_k, σ_ω — турбулентные числа Прандтля.

Для модели SST турбулентные числа Прандтля σ_k, σ_ω представлены уравнениями, а не константами, как в стандартной модели k - ε :

$$\sigma_k = \left(\frac{F_1}{\sigma_{k1}} + \frac{1 - F_1}{\sigma_{k2}} \right)^{-1}, \quad \sigma_\omega = \left(\frac{F_1}{\sigma_{\omega1}} + \frac{1 - F_1}{\sigma_{\omega2}} \right)^{-1},$$

где F_1 — первая функция смешивания; $\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \sigma_{\omega1}, \sigma_{\omega2}$ — константы модели SST.

Уравнение турбулентной динамической вязкости имеет вид

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \left(\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{S F_2}{a_1 \omega} \right] \right)^{-1},$$

где α^* — коэффициент гашения турбулентной вязкости; S — модуль тензора средней скорости деформации; F_2 — вторая функция смешивания; a_1 — константа модели SST.

Коэффициент гашения турбулентной вязкости вычисляется по формуле

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \frac{\alpha_0^* + \frac{Re_t}{R_k}}{1 + \frac{Re_t}{R_k}},$$

где α_∞^*, R_k — константы стандартной модели k - ω ; Re_t — число Рейнольдса.

Выработка производной затухающей поперечной диффузии вычисляется по формулам

$$G_\omega = \frac{\alpha}{\tilde{\nu}_t} \tilde{G}_k, \quad \alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \frac{\alpha_0 + \frac{Re_t}{R_\omega}}{1 + \frac{Re_t}{R_\omega}},$$

где $\tilde{\nu}_t$ — кинематическая турбулентная вязкость, m^2/c ; $\alpha_\infty, \alpha_0, R_\omega$ — константы стандартной модели k - ω (при больших числах Рейнольдса $\alpha = \alpha_\infty$).

Для модели турбулентности SST

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty2},$$

где

$$\alpha_{\infty1} = \frac{\beta_{i1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega1} \sqrt{\beta_\infty^*}}, \quad \alpha_{\infty2} = \frac{\beta_{i2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega2} \sqrt{\beta_\infty^*}}.$$

Здесь β_1, β_2 — константы модели SST; β_∞^* — константа стандартной модели k - ω ; $\kappa = 0.41$.

Уравнение производной затухающей поперечной диффузии имеет вид

$$Y_\omega = \rho \beta f_\beta \omega^2, \quad \beta = \beta_i \left[1 - \frac{\beta_i^*}{\beta_i} \zeta^* F(M_t) \right],$$

где f_β — коэффициент рассеивания; β_i, ζ^* — константы стандартной модели k - ω ; β_i^* — коэффициент сжимаемости (при высоких числах Рейнольдса $\beta_i^* = \beta_\infty^*$, а в несжимаемой форме $\beta_i^* = \beta^*$);

$$F(M_t) = \begin{cases} 0, & M_t \leq M_{t0}, \\ M_t^2 - M_{t0}^2, & M_t > M_{t0} \end{cases}$$

— функция сжимаемости; M_t — переменная функции сжимаемости; M_{t0} — константа стандартной модели $k-\omega$.

Коэффициент сжимаемости задается формулой

$$\beta_i^* = \beta_\infty^* \frac{\frac{4}{15} + \left(\frac{Re_t}{R_\beta}\right)^4}{1 + \left(\frac{Re_t}{R_\beta}\right)^4},$$

где R_β — константа стандартной модели $k-\omega$.

1.3. Модель EVT состоит из уравнения турбулентности (для больших чисел Рейнольдса) [15]:

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = c_1\tilde{\nu}_t \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| + c_2\tilde{\nu}_t \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|}{\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|} \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \tilde{\nu}_t \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial y} \right),$$

где

$$\frac{D\tilde{\nu}_t}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial t} + U_j \left(\frac{\partial \tilde{\nu}_t}{\partial x_j} \right), \quad c_1 = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^*}} - \sqrt{\beta^*} \alpha, \quad c_2 = 2\sigma,$$

и содержит 4 модельные константы α , β , σ , β^* .

Численные значения модельных констант представлены в табл. 1.

2. Настройки модели ГО ВЭУ. Исходная геометрия ГО ВЭУ [18] приведена на рис. 1, а. Так как на вихревой след влияет только комлевая часть лопасти, в расчетной области рассматривается усеченный вариант ВЭУ (рис. 1, б).

Локальное измельчение расчетной области позволяет сократить количество контрольных объемов для более рационального использования ресурса ЭВМ. В области наличия градиента скорости, на комлевом участке лопасти и в части объема над поверхностью гондолы необходимо добавление призматического слоя для приведения критерия применимости моделей турбулентности (число Рейнольдса) к значениям до 150 (рис. 2). Место установки анеморумбометра находится на расстоянии 8 м от комлевой части лопасти на высоте 3 м от гондолы [18] (рис. 1, с).

Технические характеристики ГО ВЭУ Siemens SWT-3.6-120 [18, 19] сведены в табл. 2.

Таблица 2
Значения параметров ГО ВЭУ SWT-3.6-120 [The parameter values of the horizontal-axis wind turbine SWT-3.6-120]

Parameter names	Values
Nominal power P , kW	3 600
Lower limit of wind speed V_{\min} , m/s	3
Upper limit of wind speed V_{\max} , m/s	25
Nominal wind speed V_{nom} , m/s	12.5
Circumferential speed of the rotor ω , rad/s	1
Rotor diameter D , m	120
Swept area of rotor S , m ²	11 300

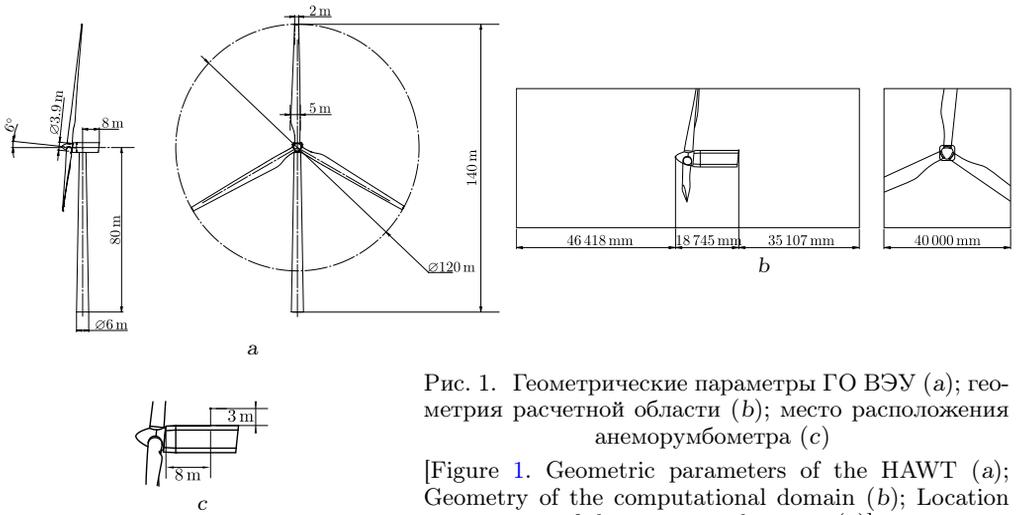


Рис. 1. Геометрические параметры ГО ВЭУ (а); геометрия расчетной области (b); место расположения анеморумбометра (с)

[Figure 1. Geometric parameters of the HAWT (a); Geometry of the computational domain (b); Location of the anemometer (c)]

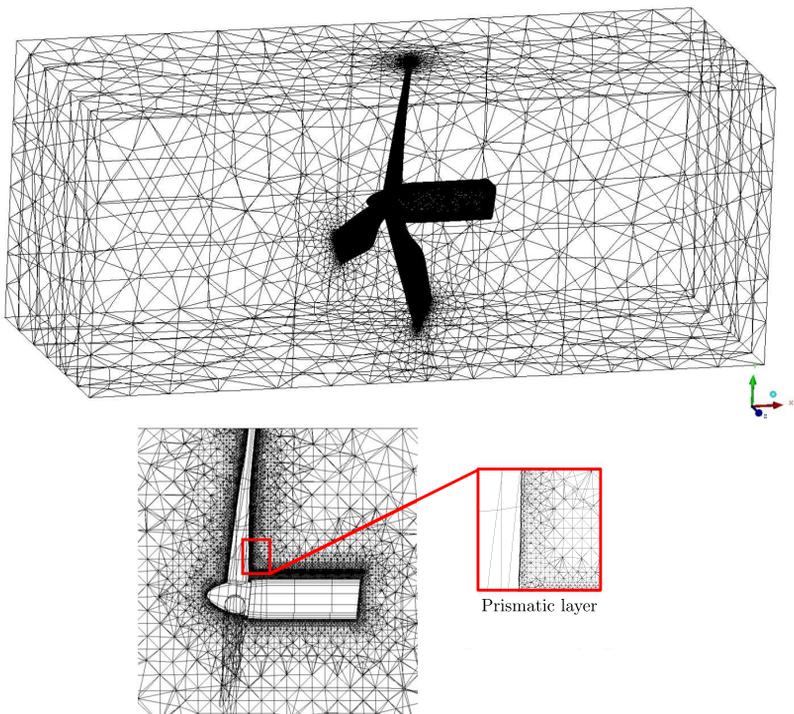


Рис. 2. Сеточное разбиение (общий вид и в разрезе)
Figure 2. Grid partitioning (general view and cross-section)]

3. Расчет временного шага интегрирования. Число Рейнольдса определяется через поперечный диаметр комлевой части лопасти на уровне рассматриваемой точки:

$$Re = VD_k\rho/\mu = 1.2041 \cdot 12 \cdot 2.41/(1.8 \cdot 10^{-5}) = 1.93 \cdot 10^6,$$

где ρ — плотность воздуха при температуре 20°C [20], кг/м³; D_k — поперечный диаметр комлевой части лопасти на уровне регистрации параметров потока, м; μ — коэффициент динамической вязкости для воздуха при температуре 20°C [20], Па·с.

Число Струхала S определяет частоту пульсации параметров скорости в вихревом следе при поперечном обтекании цилиндра:

$$n = SV_{\text{ном}}/D_k, \text{ с}^{-1},$$

где $V_{\text{ном}}$ — номинальная скорость ветра, м/с (см. табл. 2).

В соответствии с измерениями А. Рошко [21] для чисел $Re > 6000$ число Струхала S приближается к постоянному значению, равному 0.21 (см. рис. 3). Частота пульсации параметров скорости для числа Рейнольдса, равного $1.93 \cdot 10^6$, и числа Струхала, равного 0.21, соответствует

$$n = 0.21 \cdot 12.5/2.41 = 1.089 \text{ с}^{-1}.$$

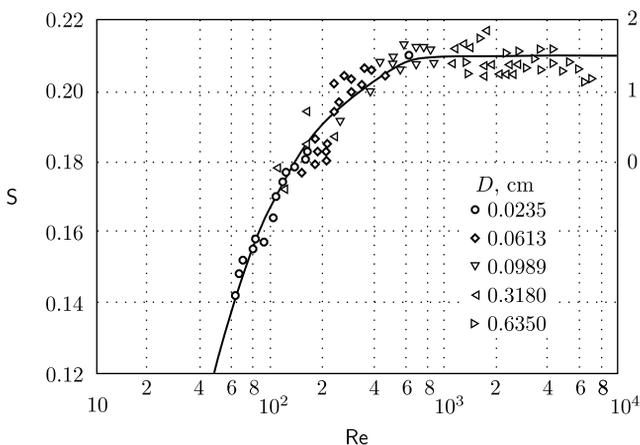


Рис. 3. Зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса для течения около круглого цилиндра [19]

[Figure 3. Dependence of the Strouhal number on the Reynolds number for a flow near a round cylinder [19]]

Период пульсаций условно разбивается на 10 равных частей, что определяет шаг интегрирования основной системы уравнений, описывающих движение вязкого турбулентного газа: $t = 1/(10n) = 1/(10 \cdot 1.089) = 0.092 \text{ с}$.

4. Критерии сравнения результатов. В качестве критерия оценки полученных результатов численного моделирования служат значения углов отклонения прибора по осям z и y , которые вычисляются через вертикальную v , поперечную w и продольную u составляющие вектора скорости:

$$\Theta_z = a \cos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + w^2}}\right) \frac{w}{|w|}, \quad \Theta_y = a \cos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right) \frac{v}{|v|}.$$

5. Результаты численного моделирования. В процессе нестационарного расчета параметров наблюдается зона установления расчета относительно начальных условий (рис. 4, a и b). Зона устойчивого счета начинается примерно с восьмой секунды.

Наиболее четко периодическое изменение вектора скорости выражено на вертикальной составляющей профиля скорости (рис. 4, c – e). Из периодического процесса по характерным точкам выделяется частота изменения параметров скорости в вихревом следе.

Для сравнения параметров используется среднеарифметическое значение частоты изменения параметров. Сравниваются полученные результаты с результатами пульсации параметров вихревого следа (1.089 c^{-1}) при поперечном обтекании цилиндра (табл. 3) [22].

Таблица 3

Сравнительный анализ частоты пульсации вертикальной составляющей вектора скорости и турбулентной вязкости [Comparative analysis of the pulsation frequency of the vertical component of the velocity vector and turbulent viscosity]

Parameters	Values	Values, %
$\bar{n}_{k-\varepsilon}$	0.84	12.2
$\bar{n}_{k-\omega \text{ SST}}$	0.61	41
\bar{n}_{EVT}	0.7	26.8
$\mu_{t k-\varepsilon}, \text{ Pa} \cdot \text{s}$	0.00158	—
$\mu_{t k-\omega \text{ SST}}, \text{ Pa} \cdot \text{s}$	0.00237	—
$\mu_{t \text{EVT}}, \text{ Pa} \cdot \text{s}$	0.00778	—

Наиболее близкий к частоте пульсации результат показали две модели турбулентности: $k-\varepsilon$ и EVT, причем различия численного моделирования течения в области вихревого следа между ними менее 15 %. У модели турбулентности $k-\omega \text{ SST}$ значительно завышен период изменения параметров из-за высокой турбулентной вязкости в следе (табл. 3, рис. 5), что приводит к более выраженной картине вихреобразования и более устойчивому счету.

Сила трения, Па:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}.$$

Тензор напряжения Рейнольдса, Па:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \rho k \right) \delta_{ij},$$

где $\mu_{t k-\varepsilon} = f_\mu C_\mu \rho k^2 / \varepsilon$ – турбулентная вязкость, обусловленная моделью турбулентности $k-\varepsilon$, Па · с; $\mu_{t k-\omega \text{ SST}} = \rho k / \omega$ – турбулентная вязкость, обусловленная моделью турбулентности $k-\omega \text{ SST}$, Па · с; $\mu_{t \text{EVT}} = \rho D_{\text{EVT}} \bar{\nu}_t$ – турбулентная вязкость, обусловленная моделью турбулентности EVT, Па · с; f_μ – функция демпфирования [4–7]; D_{EVT} – безразмерная функция [8].

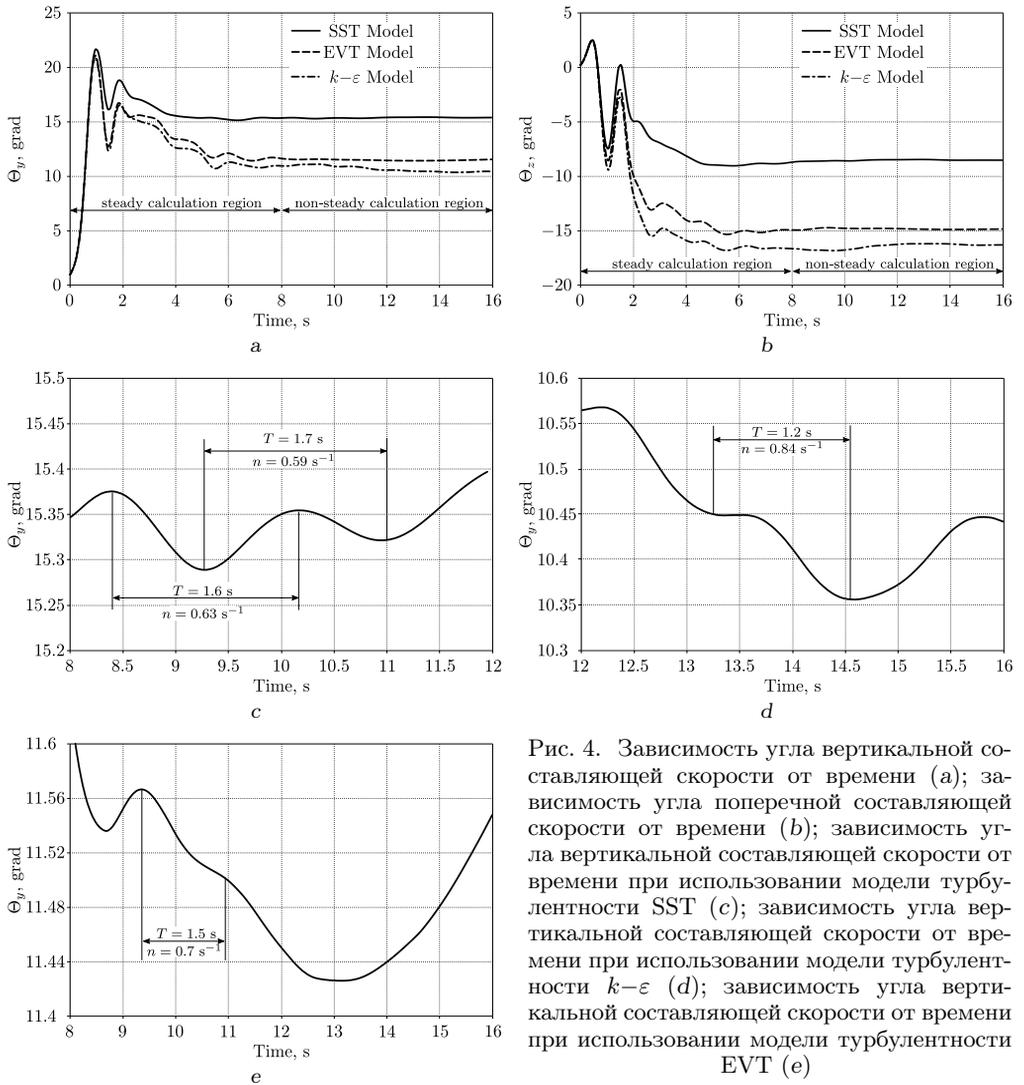


Рис. 4. Зависимость угла вертикальной составляющей скорости от времени (а); зависимость угла поперечной составляющей скорости от времени (б); зависимость угла вертикальной составляющей скорости от времени при использовании модели турбулентности SST (с); зависимость угла вертикальной составляющей скорости от времени при использовании модели турбулентности $k-\varepsilon$ (д); зависимость угла вертикальной составляющей скорости от времени при использовании модели турбулентности EVT (е)

[Figure 4. Dependence of the angle of the vertical component of the velocity on the time (a); dependence of the angle of the transverse component of the velocity on the time (b); dependence of the angle of the vertical velocity component of the velocity on the time when using the SST turbulence model (c); dependence of the angle of the vertical velocity component of the velocity on the time when using the $k-\varepsilon$ turbulence model (d); dependence of the angle of the vertical velocity component of the velocity on the time when using the EVT turbulence model (e)]

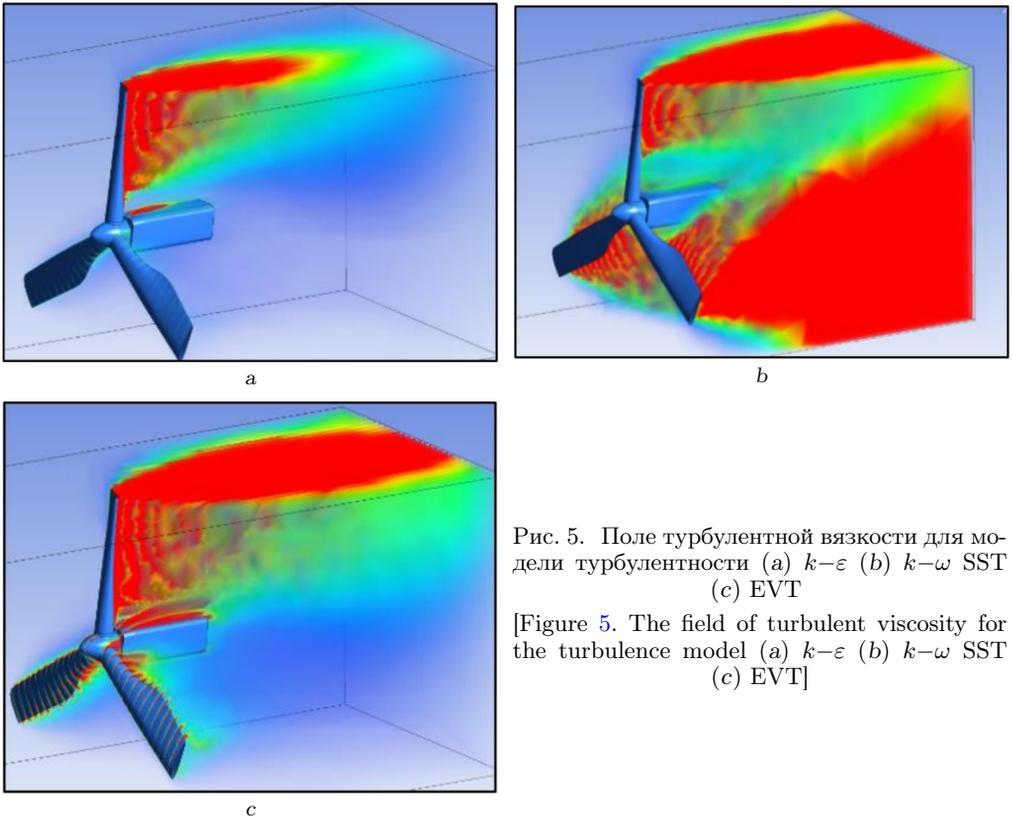


Рис. 5. Поле турбулентной вязкости для модели турбулентности (a) $k-\varepsilon$ (b) $k-\omega$ SST (c) EVT

[Figure 5. The field of turbulent viscosity for the turbulence model (a) $k-\varepsilon$ (b) $k-\omega$ SST (c) EVT]

Выводы. Для моделирования параметров вихревого следа предпочтительны модели турбулентности $k-\varepsilon$ и EVT, дающие почти одинаковые результаты. Данные модели достаточно точно спрогнозировали частоту изменения параметров в вихревом следе. Модель EVT использует одно дифференциальное уравнение и имеет шесть констант замыкания, в результате чего она более предпочтительна по затратам машинного времени. Модели $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ SST имеют два дифференциальных уравнения и не менее десяти констант замыкания, а также дополнительные функциональные и логические зависимости, которые необходимо учитывать при их использовании. Моделирование крупномасштабной турбулентности выходит за рамки применимости RANS-подхода со стандартными параметрами замыкания критериев турбулентности, но проделанный численный эксперимент показал, что для инженерного применения RANS-подход в совокупности со стандартными моделями турбулентности вполне применим при моделировании параметров вихревого следа.

Найдены константы замыкания (коэффициенты замыкания турбулентности модели EVT) для оптимального применения модели в широком диапазоне случаев. Определены изменения вектора скорости за хвостовой частью лопасти ГО ВЭУ для частного случая. Интересным и перспективным является формирование моделей турбулентности (в частности модели EVT) путем определения констант замыкания в зависимости от изменения вектора скорости за хвостовой частью лопасти ГО ВЭУ.

Одним из вариантов для дальнейшего исследования является изменение значений констант замыкания с использованием более сложных методов моделирования крупновихревых структур, таких как модели DES и LES, а также сравнение экспериментальных значений результатов измерений. Анализ вихревых структур за хвостовой частью лопастей ГО ВЭУ может помочь в разработке упрощенной модели турбулентности, основанной на едином дифференциальном уравнении переноса, с помощью которого можно было бы определить параметры отклонения вектора скорости ветра за лопастями ГО ВЭУ. Это может повысить эффективность моделирования процессов для ГО ВЭУ.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Е. В. Соломин — общие корректировки статьи, написание введения и заключения, перевод на английский язык. А.А. Терехин — написание основной части статьи. А.С. Мартьянов — обработка, анализ и описание полученных результатов моделирования. А.А. Ковалёв — приведение и описание уравнений моделей турбулентности и их составляющих для определения количества эмпирических констант замыкания, оформление статьи в L^AT_EX. Д.Р. Исмагилов — консультации по теме моделирования и моделей турбулентности, помощь с описанием уравнений. Г.Н. Рявкин — выполнение моделирования в ANSYS® CFX. А.З. Кулганатов — построение геометрии ветроэнергетической установки в SolidWorks. Б.Т. Погорелов — работа с источниками, библиографическим списком и графиками. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-20011.

Библиографический список

1. Ahmadi M. H. B., Yang Z. The evolution of turbulence characteristics in the wake of a horizontal axis tidal stream turbine // *Renewable Energy*, 2020. vol. 151. pp. 1008–1015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.11.092>.
2. Posa A., Broglia R., Balaras E. Instability of the tip vortices shed by an axial-flow turbine in uniform flow // *J. Fluid Mech.*, 2021. vol. 920, 920A19-1. DOI: <https://doi.org/10.1017/JFM.2021.433>.
3. Wilcox D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. California: DCW Industries, 1994. 460 pp.
4. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA J.*, 1994. vol. 32, no. 8. pp. 1598–1605. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.12149>.
5. Chung T. J. *Computational Fluid Dynamics*. London: Cambridge Univ. Press, 2010. xxii+1034 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511780066>.
6. Versteeg H., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. London: Prentice Hall, 2007. xiii+503 pp.
7. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. xiv+426 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>.
8. ANSYS® CFX – *Solver Theory Guide, Release 16.0*. Canonsburg, PA: Ansys ANSYS, Inc., 2016.
9. Anderson J. D. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications* / McGraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering. New York: McGraw-Hill, Inc., 1995. xxv+547 pp.
10. Wesseling P. *Principles of Computational Fluid Dynamics* / Springer Series in Com-

- putational Mathematics. vol. 29. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. xii+644 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05146-3>.
11. Белов И. А. *Моделирование турбулентных течений*. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. 108 с.
 12. El Tahry S. H. $k-\epsilon$ equation for compressible reciprocating engine flows // *J. Energy*, 1983. vol. 7, no. 4. pp. 345–353. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.48086>.
 13. Troshko A. A, Hassan Y. A. A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows // *Int. J. Multiphase Flow*, 2001. vol. 27, no. 11. pp. 1965–2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0301-9322\(01\)00043-x](https://doi.org/10.1016/s0301-9322(01)00043-x).
 14. Menter F. R. *Eddy viscosity transport equations and their relation to the $k-\epsilon$ model*: NASA Technical Memorandum 108854, 1994.
 15. Menter F. R. Eddy viscosity transport equations and their relation to the $k-\epsilon$ model // *J. Fluids Eng.*, 1997. vol. 119, no. 4. pp. 876–884. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2819511>.
 16. *Ansys Fluent 12.0 Theory Guide – 4.5.2 Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ Model*: Technical Documentation, 2009. <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node67.htm>.
 17. Снегирев А. Ю. *Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений*. СПб.: Политехн. ун-т, 2009. 143 с.
 18. *Wind power plant Siemens: SWT-3.6-120*: Technical documentation, 2021. <https://pdf.archiexpo.com/pdf/siemens-gamesa/swt-36-120/88089-134487.html>.
 19. Соломин Е. В., Терехин А. А., Мартыянов А. С., Ковалёв А. А., Исмагилов Д. Р., Мирошниченко А. А., Ян Ю., Рявкин Г. Н. Дифференциальная ошибка угла ориентации анеморумбометра горизонтально-осевой ветроэнергетической установки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 2. С. 365–380. EDN: FKAAFI. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1839>.
 20. Богданов С. Н., Бурцев С. И., Иванов О. П., Куприянова А. В. *Холодильная техника. Кондиционирование воздуха*. СПб.: СПбГАХИТ, 1999. 320 с.
 21. Roshko A. *On the development of turbulent wakes from vortex streets*: Technical Report no. 1191. Washington, D.C.: National Advisory Committee for Aeronautics, 1954. 25 pp. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:R0Snacarpt1191>.
 22. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. М.: Наука, 1974. 637 с.

MSC: 76G25, 76N15, 76F05

Evaluation of influence of turbulence models on the vortex formation processes modeling in wind power

*E. V. Solomin, A. A. Terekhin, A. S. Martyanov,
A. A. Kovalyov, D. R. Ismagilov, G. N. Ryavkin,
A. Z. Kulganatov, B. T. Pogorelov*

South Ural State University (National Research University),
76, Lenin pr., Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.

Abstract

The paper studies the results of mathematical modeling of the external flow of Siemens 3D model SWT-3.6-120 (B52 air foil) horizontal axis wind turbine (HAWT), using the Navier-Stokes equations averaged by Reynolds (RANS) closed by $k-\varepsilon$, $k-\omega$ Shear Stress Transport (SST) and Eddy Viscosity Transport (EVT) turbulence models. The task of correct determination of the wind speed vector deviation angle over the nacelle of the HAWT is required by operation of the yawing system, which determines in turn the efficiency of the entire turbine. The Struhal number was chosen as a comparison criterion, defined for the transverse flow around the cylinder, describing the frequency of the formation of vortex structure behind the butt part of the blade of the HAWT. The calculated area consists of 3 million tetrahedral volumes with prismatic layer on the surface of the nacelle, using local grinding. The place of flow direction parameters registration is located at a height of 3 m above the nacelle and at a distance of 8 m from the blade shank, which corresponds to the standard location of the weather vane. The analysis of the obtained results showed that the $k-\varepsilon$ and EVT turbulence models describe the flow parameters over the HAWT nacelle in almost the same way, but the EVT model represents just one differential equation, thereby it is preferable by the computational cost criterion. Also, one of the advantages of one-parameter turbulence model (EVT model) is a smaller number of closing semi-empirical constants, the analysis of which

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Solomin E. V., Terekhin A. A., Martyanov A. S., Kovalyov A. A., Ismagilov D. R., Ryavkin G. N., Kulganatov A. Z., Pogorelov B. T. Evaluation of influence of turbulence models on the vortex formation processes modeling in wind power, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 339–354. EDN: SVRJGF. DOI: [10.14498/vsgtu1885](https://doi.org/10.14498/vsgtu1885) (In Russian).

Authors' Details:

Eugeny V. Solomin  <https://orcid.org/0000-0002-4694-0490>

Dr. Tech. Sci., Professor; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems;
e-mail: solominev@susu.ru

Aleksandr A. Terekhin  <https://orcid.org/0000-0002-5744-2104>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Flying Apparatus;
e-mail: aleksandr.terekhin@gmail.com

allows the expanding of the engineering techniques scope for the modeling of turbulent processes in solving the practical problems related to the design of control systems for the wind turbines, increasing their efficiency.

Keywords: wind, horizontal-axial wind power plant, Strouhal number, weather vane, electricity, blade, aerodynamic profile, vortex.

Received: 18th September, 2021 / Revised: 21st December, 2021 /

Accepted: 25th December, 2021 / First online: 15th June, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. E.V. Solomin: General corrections of the article, writing the introduction and conclusion; translation into English. A.A. Tereshkin: Writing the main part of the article. A.S. Martyanov: Processing, analysis and description of the obtained modeling results. A.A. Kovalyov: Reduction and description of the equations of turbulence models and their components to determine the number of empirical closure constants; the design of the article in L^AT_EX. D.R. Ismagilov: Consultations on the topic of modeling and turbulence models, help with the description of equations. G.N. Ryavkin: Performing simulation in ANSYS® CFX. A.Z. Kulganatov: Creating the geometry of a wind power plant in SolidWorks. B.T. Pogorelov: Working with sources, bibliographic list and graphs. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. The study was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 22-19-20011.

References

1. Ahmadi M. H. B., Yang Z. The evolution of turbulence characteristics in the wake of a horizontal axis tidal stream turbine, *Renewable Energy*, 2020, vol.151, pp. 1008–1015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2019.11.092>.
2. Posa A., Broglia R., Balaras E. Instability of the tip vortices shed by an axial-flow turbine

Andrey S. Martyanov  <https://orcid.org/0000-0002-9997-9989>

Cand. Techn. Sci., Associate Professor; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: martianovas@susu.ru

Anton A. Kovalyov  <https://orcid.org/0000-0001-6952-277X>

Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: alpenglow305@yandex.ru

Denis R. Ismagilov  <https://orcid.org/0000-0002-9312-295X>

Research Engineer; Aerospace Technologies Research and Educational Center; e-mail: drismagilov@gmail.com

Gleb N. Ryavkin  <https://orcid.org/0000-0002-7637-0310>

Master's Degree Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: amd30bk.ru

Askar Z. Kulganatov  <https://orcid.org/0000-0002-7576-7949>

Postgraduate Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: kulganatov97@gmail.com

Bogdan T. Pogorelov  <https://orcid.org/0000-0002-2922-6615>

Master's Degree Student; Dept. of Power Stations, Networks and Power Supply Systems; e-mail: boga-rap@mail.ru

- in uniform flow, *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 920, 920A19-1. DOI: <https://doi.org/10.1017/JFM.2021.433>.
3. Wilcox D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. California, DCW Industries, 1994, 460 pp.
 4. Menter F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1598–1605. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.12149>.
 5. Chung T. J. *Computational Fluid Dynamics*. London, Cambridge Univ. Press, 2010, xxii+1034 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09780511780066>.
 6. Versteeg H., Malalasekera W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. London, Prentice Hall, 2007, xiii+503 pp.
 7. Ferziger J. H., Peric M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Berlin, Springer-Verlag, 2002, xiv+426 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>.
 8. *ANSYS® CFX – Solver Theory Guide, Release 16.0*. Canonsburg, PA, Ansys ANSYS, Inc., 2016.
 9. Anderson J. D. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, McGraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering. New York, Mcgraw-Hill, Inc., 1995, xxv+547 pp.
 10. Wesseling P. *Principles of Computational Fluid Dynamics*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 29. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2001, xii+644 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05146-3>.
 11. Belov I. A. *Modelirovanie turbulentnykh techenii* [Simulation of Turbulent Flows]. St. Petersburg, Baltic State Techn. Univ., 2001, 108 pp. (In Russian)
 12. El Tahry S. H. $k-\epsilon$ equation for compressible reciprocating engine flows, *J. Energy*, 1983, vol. 7, no. 4, pp. 345–353. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.48086>.
 13. Troshko A. A., Hassan Y. A. A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows, *Int. J. Multiphase Flow*, 2001, vol. 27, no. 11, pp. 1965–2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0301-9322\(01\)00043-x](https://doi.org/10.1016/s0301-9322(01)00043-x).
 14. Menter F. R. *Eddy viscosity transport equations and their relation to the $k-\epsilon$ model*, NASA Technical Memorandum 108854, 1994.
 15. Menter F. R. Eddy viscosity transport equations and their relation to the $k-\epsilon$ model, *J. Fluids Eng.*, 1997, vol. 119, no. 4, pp. 876–884. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.2819511>.
 16. *Ansys Fluent 12.0 Theory Guide – 4.5.2 Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ Model*, Technical Documentation, 2009. <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node67.htm>.
 17. Snegirev A. Yu. *Vysokoproizvoditel'nye vychisleniia v tekhnicheskoi fizike. Chislennoe modelirovanie turbulentnykh techenii* [Computer-Intensive Simulations in Technical Physics. Modeling and Simulations of Turbulent Flows]. St. Petersburg, Politechn. Univ., 2009, 143 pp. (In Russian)
 18. *Wind power plant Siemens: SWT-3.6-120*, Technical documentation, 2021. <https://pdf.archiexpo.com/pdf/siemens-gamesa/swt-36-120/88089-134487.html>.
 19. Solomin E. V., Terekhin A. A., Martyanov A. S., Kovalyov A. A., Ismagilov D. R., Miroshnichenko A. A., Yang Yu., Ryavkin G. N. Horizontal-axis wind turbine weathervane yaw differential error, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 365–380 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1839>.
 20. Bogdanov S. N., Burtsev S. I., Ivanov O. P., Kupriianova A. V. *Kholodil'naia tekhnika. Konditsionirovanie vozdukh* [Refrigeration Equipment. Air Conditioning]. St. Petersburg, SPbGAKhPT, 1999, 320 pp. (In Russian)
 21. Roshko A. *On the development of turbulent wakes from vortex streets*, Technical Report no. 1191. Washington, D.C., National Advisory Committee for Aeronautics, 1954, 25 pp. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:ROSnacarpt1191>.
 22. Shlikhting G. *Boundary-Layer Theory*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000, xxiii+799 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85829-1>.



MSC: 35K15, 35R30, 35R09

Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain

D. K. Durdiev

- ¹ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.
- ² Bukhara State University, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

This article is devoted to the study of an inverse source problem for a mixed type equation with a fractional diffusion equation in the parabolic part and a wave equation in the hyperbolic part of a cylindrical domain. The solution is obtained in the form of Fourier–Bessel series expansion using an orthogonal set of Bessel functions. The theorems of uniqueness and existence of a solution are proved.

Keywords: inverse problem, equation of mixed type, Fourier–Bessel series, Mittag–Leffler function, uniqueness and existence.

Received: 25th April, 2022 / Revised: 27th May, 2022 /

Accepted: 7th June, 2022 / First online: 30th June, 2022

1. Formulation of Problem

The importance of considering equations of mixed type, when an equation of parabolic type is given on one part of the domain and an equation of hyperbolic type on the other, was first pointed out by I. M. Gelfand in 1959 [1]. The study of electrical oscillations in wires leads to a problem for a mixed parabolic-hyperbolic type of equations. In a homogeneous medium, in the case of its low conductivity, the strength of the electromagnetic field satisfies the wave equation, but in the

Differential Equations and Mathematical Physics
Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Durdiev D. K. Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 355–367. EDN: TWHCKX. DOI: [10.14498/vsgtu1921](https://doi.org/10.14498/vsgtu1921).

Author's Details:

Durdimurod K. Durdiev  <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Head of Branch¹; Professor; Dept. of Differential Equations²;

e-mail: durdiev65@mail.ru

case of relatively high conductivity, when displacement currents can be neglected in comparison with conduction currents, the mentioned value satisfies the heat equation (see [2, pp. 443–447]). Problems of this kind are also encountered in studying the motion of a fluid in a channel surrounded by a porous medium; so, in a channel, the hydrodynamic pressure of a liquid satisfies the wave equation, and in a porous medium it satisfies the filtration equation, which in this case coincides with the diffusion equation [3]. In this case, some matching conditions are satisfied at the channel boundary. Such equations arise in a number of other areas of natural science.

Direct problems for mixed parabolic-hyperbolic equation types were studied in [4–8]. Inverse problems about determining the right side or the initial function in the initial-boundary value problems for the equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain were considered in the monograph [9] (see also references there). On the basis of the spectral method, criteria for uniqueness and existence are established.

In this paper, we study direct and inverse problems related to finding a solution to an initial-boundary value problem for a mixed equation, when on one part of the domain the fractional diffusion equation and on another part the wave equation are given, and the unknown right-hand side of this equation in a cylindrical domain.

Consider in a cylinder $G := \{(x, y, t) : 0 < r < 1, -a < t < b\}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ the equation of mixed type

$$Lu = \begin{cases} \partial_t^\alpha u - \Delta u = f(r), & t > 0, \\ u_{tt} - \Delta u = f(r), & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where a, b are given positive numbers, $\partial_t^\alpha u$ is the Gerasimov–Caputo fractional derivative of order α ($0 < \alpha \leq 1$) in the time variable and it is defined by formula (see [10, p. 90]):

$$\partial_t^\alpha g(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} g'(\tau) d\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ g'(t), & \alpha = 1; \end{cases}$$

Δ is the Laplace operator in variables x and y .

We pose the following problem: find in the domain G the functions $u(x, y, t)$ and $f(r)$ satisfying the equation (1) and conditions

$$((x, y), \nabla u)|_{r=0} = u|_{r=1} = 0, \quad -a \leq t \leq b, \quad (2)$$

$$u|_{t=-a} = \varphi(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (3)$$

$$u|_{t=b} = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (4)$$

Here $((x, y), \nabla u)$ is scalar product of vectors (x, y) and ∇u ; $\varphi(\cdot)$ and $\psi(\cdot)$ are given sufficiently smooth functions.

Denote $G_+ = G \cap \{t > 0\}$, $G_- = G \cap \{t < 0\}$.

DEFINITION 1. The solution of problem (1)–(4) are the functions $u(x, y, t)$ and $f(r)$ from the classes $C_{x,y,t}^{2,\alpha}(G_+ \cup \{t = b\}) \cap C^2(G_- \cup \{t = -a\})$ and $C[0, 1]$,

respectively, satisfying relations (1)–(4) and the following conjugation conditions:

$$u(x, y, +0) = u(x, y, -0), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \partial_t^\alpha u(x, y, t) = u_t(x, y, -0), \quad r \in (0, 1). \quad (5)$$

Here $C_{x,y,t}^{2,\alpha}(\Omega) := \{v(x, y, t) : v \in C(\Omega), (\Delta v, \partial_t^\alpha v) \in C(\Omega)\}$.

If $\alpha = 1$, then conditions (5) mean the continuity of the solution $u(x, y, t)$ and its derivative with respect to t on the line of change of equation type $t = 0$.

In the parabolic part of the domain, the function $u(x, y, t)$ satisfies the fractional diffusion equation (1). Fractional differential equations become an important tool in mathematical modeling many problems arising in applications. The time fractional diffusion equations can be used to describe superdiffusion and subdiffusion phenomena [11–13] (see also references there). Direct problems, i.e. well-posed initial value problems (Cauchy problem), initial boundary value problems for one time-fractional diffusion equations and various inverse problems, have attracted much more attention in recent years. For instance, on some uniqueness and existence results we refer readers to works [14–17] on direct and inverse source problems (see also references in [17]), and on direct and inverse coefficient problems to [18–23].

The paper organized as follows. Section 2 provides some definitions and known results that will be used later in this article. In Section 3, by using the Fourier method a formal solution of the inverse problem is obtained. In Section 4, the existence and uniqueness of a solution to the inverse problem are proved. Finally, a conclusion and a list of references are given.

2. Preliminaries

In this section, we provide some definitions and results that will be used later in this article.

The classical Mittag–Leffler $E_\alpha(z)$ function with one parameter is defined by the following series:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

where $\alpha, z \in \mathbb{C}$ with $\text{Re}(\alpha) > 0$. This function and its generalizations play an important role in describing solutions to fractional-order differential equations. The Mittag–Leffler function has been studied by many authors who have proposed and studied various generalizations and applications. A very interesting work that has received many results on this function is due to Haubold et al. [24].

If $z = \lambda t^\alpha$, with $\lambda > 0$ and $t > 0$, then

$$\partial_t^\alpha E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = -\lambda E_\alpha(-\lambda t^\alpha).$$

Moreover, The Mittag–Leffler function $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ is bounded [24]:

$$0 < E_\alpha(-\lambda t^\alpha) < 1. \quad (6)$$

Here and throughout this article, M denotes a positive constant.

In studying the problem under consideration, we also need the Bessel function and the conditions for the convergence of the Fourier–Bessel series. The linear

differential Bessel equation (or the equation of cylindrical functions) with a parameter λ of order or index $\nu \geq 0$ with respect to the function z of the real variable x has the form [25, ch. 8]:

$$z'' + \frac{1}{x}z' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)z = 0. \quad (7)$$

The solution of Equation (7), except for very particular values ν , is not expressed in terms of elementary functions (in the final form) and leads to the so-called Bessel functions, which have large applications in the natural sciences [26]. When ν is an integer number, then Equation (7) has the following solution:

$$z(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x),$$

where J_ν and Y_ν are the Bessel functions of the first and second kind of order ν , respectively. Bessel functions of the second kind are not bounded near the point $x = 0$, so for a bounded solution near zero it is necessary that $C_2 = 0$, i.e. solution (7) has the following form:

$$z(x) = C J_\nu(\lambda x).$$

Furthermore, if the boundary condition $z(1) = 0$ is imposed, then the parameter λ must satisfy $J_\nu(\lambda) = 0$, i.e. the values of λ are the zeros of the Bessel function $J_\nu(x)$, which has the following asymptotic representation [25, p. 213]:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{r_\nu(x)}{x\sqrt{x}},$$

where the function $r_\nu(x)$ is bounded for $x \rightarrow \infty$. Therefore, for any large k , the zeros of $J_\nu(x)$ are given by the expression [25, p. 214]:

$$k\pi + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

We define the Fourier–Bessel expansion of the given function $f(x)$ as follows: for any function $f(x)$, absolutely integrable on $[0, 1]$, one can compose a Fourier series in the system $J_\nu(\lambda_k x)$, $k = 1, 2, \dots$, or, in briefly, the Fourier–Bessel series

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_\nu(\lambda_k x), \quad (8)$$

where the constants c_k are determined by the formula:

$$c_k = \frac{2}{J_{\nu+1}^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_k x) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

and are called the Fourier–Bessel coefficients.

Let us give without proof the most important criteria for the convergence of the Fourier–Bessel series to the function for which it is composed. These criteria are similar to those known to us for the convergence of trigonometric Fourier series.

THEOREM 1 [25, P. 282]. *If $\nu \geq 0$ and for all sufficiently large k , we have the estimate*

$$|c_k| \leq \frac{M}{\lambda_k^{1+\varepsilon}},$$

where $\varepsilon > 0$ and $M > 0$ are constants, then series (8) converges absolutely and uniformly on $[0, 1]$.

THEOREM 2 [25, PP. 289–291]. *Let the function $f(x)$ is defined and $2s$ times continuously differentiable on the interval $[0, 1]$ ($s \geq 1$), and*

- 1) $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(2s-1)}(0) = 0$,
- 2) $f^{(2s)}(x)$ is bounded (this derivative may not exist at some points),
- 3) $f(1) = f'(1) = \dots = f^{(2s-2)}(1) = 0$.

Then, for the Fourier–Bessel coefficients of the function $f(x)$, the inequality is valid:

$$|c_k| \leq \frac{M}{\lambda_k^{2s-(1/2)}} \quad (M = \text{const}).$$

We now turn to the study of the problem (1)–(4).

3. Formal Construction of the Solution

Note that since the right-hand side of equation (4) and the functions of (6) and (7) depend on the distance r , then $u(x, y, t) = u(r, t)$, i.e. we have an axisymmetric case. Then the operator Laplace on the function $u(x, y, t)$ in polar coordinate systems will not depend on the angle and has the form:

$$\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Therefore, equation (4) in these coordinate systems is written as follows:

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + f(r), \quad t > 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + f(r), \quad t < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Conditions (2)–(4) take the following form:

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} u(r, t) \right]_{r=0} = 0, \quad u|_{r=1} = 0, \quad -a \leq t \leq b, \tag{10}$$

$$u(r, -a) = \varphi(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{11}$$

$$u(r, b) = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq 1. \tag{12}$$

Thus, the inverse problem (2)–(4) is reduced to the problem definitions of the functions $u(r, t)$, $f(r)$ from equalities (9)–(12).

According to the Fourier method, searching partial solutions of equation (9) for the case $f = 0$ in form

$$u(r, t) = R(r)T(t),$$

we get the following relations:

$$\partial_t^\alpha T(t)R(r) = \frac{1}{r}T(t)R'(r) + T(t)R''(r), \quad t > 0,$$

$$T''(t)R(r) = \frac{1}{r}T(t)R'(r) + T(t)R''(r), \quad t < 0.$$

Therefore, separating the variables, we have

$$\frac{\partial_t^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{R''(r)}{R(r)} = -\lambda^2, \quad t > 0,$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{R''(r)}{R(r)} = -\lambda^2, \quad t < 0,$$

where λ is an arbitrary real parameter. Hence, to find the function $R(r)$ we get the problem of the equation

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0$$

with boundary conditions

$$\lim_{r \rightarrow 0} (rR'(r)) = 0, \quad R(1) = 0, \tag{13}$$

which is a self-adjoint problem.

The solutions of equation (10) are the following zero-order Bessel functions of the first kind:

$$R_k(r) = J_0(\lambda_k r), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

They also are eigenfunctions. We find the eigenvalues using the second boundary condition of (13) (the validity of the first boundary condition in (13) is obvious), positive roots of the equation $J_0(\lambda_k) = 0$. As noted in the previous section, they look like:

$$\lambda_k = k\pi - \frac{\pi}{4} = (4k - 1)\frac{\pi}{4}.$$

Expand now all functions in a Fourier–Bessel series in terms of eigenfunctions $J_0(\lambda_k r)$ i.e.

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0(\lambda_k r), \tag{14}$$

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k J_0(\lambda_k r), \tag{15}$$

where

$$u_k(t) = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 r u(r, t) J_0(\lambda_k r) dr, \quad f_k = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_k r) dr.$$

Substituting (14), (15) into (9), we obtain

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u_k(t) &= -\lambda_k^2 u_k(t) + f_k, \quad t > 0, \\ u_k''(t) &= -\lambda_k^2 u_k(t) + f_k, \quad t < 0. \end{aligned}$$

It is not difficult to find that these differential equations have general solutions:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= c_k E_\alpha(-\lambda_k^2 t^\alpha) + \frac{f_k}{\lambda_k^2}, & t > 0, \\ u_k(t) &= d_k \cos(\lambda_k t) + e_k \sin(\lambda_k t) + \frac{f_k}{\lambda_k^2}, & t < 0, \end{aligned} \tag{16}$$

where $E_\alpha(\cdot)$ is the Mittag-Leffler function; d_k, e_k, c_k are arbitrary constants.

To find the coefficients d_k, e_k, c_k , we use conditions

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \quad \partial_t^\alpha u_k(0+0) = u'_k(0-0),$$

which follow from conditions (5). In view of this, from (16) we have

$$d_k = c_k, \quad e_k = -\lambda_k c_k.$$

From the initial and additional conditions (11), (12), we get:

$$d_k \cos(\lambda_k a) - e_k \sin(\lambda_k a) + \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \varphi_k,$$

$$c_k E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) + \frac{f_k}{\lambda_k^2} = \psi_k,$$

where φ_k, ψ_k are Fourier-Bessel coefficients of functions φ, ψ , respectively:

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0(\lambda_k r), \quad \psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0(\lambda_k r).$$

Substituting the values d_k, e_k found through c_k , into the previous equations and solving the resulting system with respect to c_k and f_k , we find

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\psi_k - \varphi_k}{E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) - (\cos(\lambda_k a) + \lambda_k \sin(\lambda_k a))}, \\ f_k &= \lambda_k^2 (\psi_k - c_k E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha)). \end{aligned} \tag{17}$$

Introduce the notation

$$A_{ab}(k) = E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) - (\cos(\lambda_k a) + \lambda_k \sin(\lambda_k a)). \tag{18}$$

4. Existence and Uniqueness of the Solution

We find the values of a and b for which (18) takes values not equal to zero. To do this, we rewrite (18) in the following form:

$$A_{ab}(k) = E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2 \pi^2}{16} b^\alpha\right) - \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2 \pi^2}{16}} \sin\left(\frac{4k-1}{4} a\pi + \gamma_k\right), \tag{18'}$$

where $\gamma_k = \arcsin\left(1/\sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}}\right)$. Obtain the values of a for which $A_{ab}(k) = 0$. It equals

$$a = \frac{4}{(4k-1)\pi} \left(\arcsin\left(\frac{E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}b^\alpha\right)}{\sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}}}\right) + \pi n - \gamma_k \right).$$

We now find the values of a and b , for which the following condition is met:

$$|A_{ab}(k)| \geq C_0 > 0. \tag{19}$$

For this, we calculate

$$|A_{ab}(k)| = \left| E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}b^\alpha\right) - \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}} \sin\left(\frac{4k-1}{4}a\pi + \gamma_k\right) \right|.$$

If $a = 4n$, $n \in \mathbb{N}$, then

$$\begin{aligned} |A_{ab}(k)| &= \left| E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}b^\alpha\right) - \sqrt{1 + \frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}} \sin\left(\frac{4k-1}{4}a\pi + \gamma_k\right) \right| \geq \\ &\geq \left| E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}b^\alpha\right) \pm 1 \right| \geq \left| 1 - E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}b^\alpha\right) \right|. \end{aligned}$$

According to (6) we have $0 < E_\alpha\left(-\frac{(4k-1)^2\pi^2}{16}b^\alpha\right) < 1$, for all $k = 1, 2, \dots$, then $|A_{ab}(k)| \geq C_0 > 0$. As C_0 , it can be taken $1 - E_\alpha\left(-\frac{9\pi^2}{16}b^\alpha\right)$ as the largest of all possible such constants.

Thus, we have obtained the following uniqueness criterion:

THEOREM A. *If there exists a solution to problem (1)–(4), then it is unique for the values $a = 4n$, $n \in \mathbb{N}$ for any $b > 0$.*

We now investigate the existence of a solution. To this end, we prove the following assertion:

THEOREM B. *Assume that $\{\varphi(r), \psi(r)\} \in C^6[0, 1]$ and, in addition, condition (19) and the equalities*

$$\varphi^{(i)}(0) = 0, \quad \psi^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5,$$

$$\varphi^{(j)}(1) = 0, \quad \psi^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 4$$

are satisfied.

Then there is a unique solution to problem (1)–(4), which is defined (20)–(22), where $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$ are i -th derivatives of the functions φ , ψ , and φ_k , ψ_k are the Fourier–Bessel coefficients of the functions φ and ψ , respectively.

To prove the theorem, substituting the found values of the coefficients d_k , e_k , c_k in (16), (17), we find $u_k(t)$ and f_k :

$$u_k(t) = \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 t^\alpha) + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}} E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha), \quad t > 0,$$

$$u_k(t) = \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \cos(\lambda_k t) - \lambda_k \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \sin(\lambda_k t) + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha), \quad t < 0,$$

$$f_k = \lambda_k^2 \left(\psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) \right).$$

Taking into account these relations, from (14) and (15) we obtain the formal solution of problem in the form of series:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 t^\alpha) + \right. \\ \left. + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) \right] J_0(\lambda_k r), \quad t > 0, \quad (20)$$

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \cos(\lambda_k t) - \lambda_k \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \sin(\lambda_k t) + \right. \\ \left. + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) \right] J_0(\lambda_k r), \quad t < 0, \quad (21)$$

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_\alpha(-\lambda_k^2 b^\alpha) \right] J_0(\lambda_k r). \quad (22)$$

To prove the existence of a solution, we need to show that the series in (20)–(22) and the series obtained as a result of the action of fractional differentiation ∂_t^α , by differentiating with respect to r twice, in domain G_+ and by differentiating twice in r, t , in domain G_- , converge uniformly. To this end, we calculate $\partial_t^\alpha u(r, t)$, $(\partial^2/\partial t^2)u(r, t)$, $(\partial^2/\partial r^2)u(r, t)$, by formally performing differentiation under the signs of sums. Using properties of the Bessel functions, namely (see [24]) $J'_0(r) = -J_1(r)$, $2J'_1(r) = J_0(r) - J_2(r)$, from formulas (20), (21) we obtain the following:

$$\partial_t^\alpha u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \partial_t^\alpha u_k(t) J_0(\lambda_k r) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} [-\lambda_k^2 E_\alpha(-\lambda_k^2 t^\alpha)] \frac{(\psi_k - \varphi_k)}{A_{ab}(k)} J_0(\lambda_k r), \quad t > 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k(t)}{\partial t^2} J_0(\lambda_k r) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} [-\lambda_k^2 \cos(\lambda_k t) + \lambda_k^3 \sin(\lambda_k t)] \frac{(\psi_k - \varphi_k)}{A_{ab}(k)} J_0(\lambda_k r), \quad t < 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \frac{d^2 J_0(\lambda_k r)}{dr^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_{\alpha}(-\lambda_k^2 t^{\alpha}) + \right. \\ &\quad \left. + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_{\alpha}(-\lambda_k^2 b^{\alpha}) \right] \frac{\lambda_k^2}{2} (J_2(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k r)), \quad t > 0, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \frac{d^2 J_0(\lambda_k r)}{dr^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \cos(\lambda_k t) - \lambda_k \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \sin(\lambda_k t) + \right. \\ &\quad \left. + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_{\alpha}(-\lambda_k^2 b^{\alpha}) \right] \frac{\lambda_k^2}{2} (J_2(\lambda_k r) - J_0(\lambda_k r)), \quad t < 0. \quad (26) \end{aligned}$$

Let the functions $\varphi(r)$ and $\psi(r)$ satisfy the conditions of Theorem 2 with some $s \geq 1$ (we define the number s later). Then for the Fourier–Bessel coefficients of these functions are true the following estimates:

$$|\varphi_k| \leq \frac{M_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad |\psi_k| \leq \frac{M_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}.$$

Now we will evaluate the expressions at Bessel functions on the right-hand sides of equalities (20)–(26). In this case, the expressions in (20), (21) are estimated as follows:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_{\alpha}(-\lambda_k^2 t^{\alpha}) + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_{\alpha}(-\lambda_k^2 b^{\alpha}) \right| &\leq \\ &\leq M \left(\frac{M_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}} + \frac{M_2}{\lambda_k^{2s-(1/2)}} \right) \leq \frac{N_1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t < 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \cos(\lambda_k t) - \lambda_k \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} \sin(\lambda_k t) + \psi_k - \frac{\psi_k - \varphi_k}{A_{ab}(k)} E_{\alpha}(-\lambda_k^2 b^{\alpha}) \right| &\leq \\ &\leq N_2 \frac{\lambda_k + 1}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

where M, M_1, M_2, N_1, N_2 are positive constants.

Similarly, it is established that the expressions in (22), (23), (25) are less than $N_3 \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}$, and the expressions in (24), (26) are less than $N_4 \frac{\lambda_k^2 + \lambda_k^3}{\lambda_k^{2s-(1/2)}}$, N_3, N_4 are positive constants.

It follows from these estimates that if $s = 3$, then, according to Theorem 1, the series in (23)–(26) and the series obtained as a result of the action of fractional differentiation ∂_t^{α} , by differentiating with respect to r twice, in domain G_+ and by differentiating twice in r, t , in domain G_- , converge uniformly. Thus, Theorem B is proved.

5. Conclusion

This paper concerns the existence and uniqueness of a solution to the inverse source problem for a mixed-type equation with a fractional diffusion equation in the parabolic part and a wave equation in the hyperbolic part of a cylindrical domain. The solution is obtained in the form of Fourier-Bessel series expansion using an orthogonal set of Bessel functions.

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript for printing. I approve the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Gel'fand I. M. Some questions of analysis and differential equations, *Am. Math. Soc., Transl., II. Ser.*, 1963, vol. 26, pp. 201–219. DOI: <https://doi.org/10.1090/trans2/026>.
2. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977, 735 pp. (In Russian)
3. Leibenzon L. S. *Dvizhenie prirodnnykh zhidkosti i gazov v poristoi srede* [Flow of Natural Liquids and Gases through a Porous Medium]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1947, 244 pp. (In Russian)
4. Tricomi F. *O lineinykh uravneniakh smeshannogo tipa* [On Linear Equations of Mixed Type]. Moscow, Gostekhizdat, 1947, 192 pp. (In Russian)
5. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic parabolic equations of second order, In: *Boundary Problems in Differential Equations, Proc. Sympos.* (Madison, April 20–22, 1959). Madison, Univ. of Wisconsin, 1960, pp. 97–120.
6. Dzhuraev T. D., Sopuev A., Mamazhanov M. *Kraevye zadachi dlia uravnenii parabolopiperbolicheskogo tipa* [Boundary Value Problems for Equations of Parabolic-Hyperbolic Type]. Tashkent, FAN, 1986, 220 pp. (In Russian)
7. Sabitov K. B. On the theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter, *Differ. Uravn.*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 117–126 (In Russian). EDN: TVVHKL.
8. Sabitov K. B., Martem'yanova N. V. On the question of the correctness of inverse problems for the inhomogeneous Helmholtz equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 269–292 (In Russian). EDN: UXHTKM. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1600>.
9. Sabitov K. B. *Priamyie i obratnye zadachi dlia uravnenii smeshannogo parabolopiperbolicheskogo tipa* [Direct and Inverse Problems for Equations Mixed Parabolic-Hyperbolic Type]. Ufa, Gilem, 2015, 271 pp. (In Russian). EDN: QWYOF.
10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xv+523 pp. EDN: YZECAT.
11. Metzler R., Klafter J. Subdiffusive transport close to thermal equilibrium: From the Langevin equation to fractional diffusion, *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, no. 6, pp. 6308–6311. DOI: <https://doi.org/10.1103/physreve.61.6308>.
12. Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus and continuous-time finance, *Physica A*, 2000, vol. 284, no. 1–4, pp. 376–384. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(00\)00255-7](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00255-7).
13. Sokolov I. M., Klafter J. From diffusion to anomalous diffusion: A century after Einstein's Brownian motion, *Chaos*, 2005, vol. 15, no. 2, 026103. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1860472>.
14. Sakamoto K., Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, vol. 382, no. 1, pp. 426–447. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.04.058>.

15. Wei T., Li X. L., Li Y. S. An inverse time-dependent source problem for a time-fractional diffusion equation, *Inverse Probl.*, 2016, vol. 32, no. 8, 085003. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/32/8/085003>.
16. Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2013, vol. 2013, no. 270, pp. 1–16. <https://www.emis.de/journals/EJDE/2013/270/abstr.html>.
17. Liu Y., Li Zh., Yamamoto M. Inverse problems of determining sources of the fractional partial differential equations, In: *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, vol. 2, Fractional Differential Equations. Berlin, De Gruyter, 2019, pp. 411–430, arXiv: 1904.05501 [math.AP]. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110571660-018>.
18. Li G. S., Zhang D. L., Jia X. Z., Yamamoto M. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation, *Inverse Probl.*, 2013, vol. 29, no. 6, 065014. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/29/6/065014>.
19. Durdiev D. K., Rahmonov A. A., Bozorov Z. B. A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2021, vol. 44, no. 13, pp. 10753–10761. EDN: RVTMGQ. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.7442>.
20. Durdiev D. K. Inverse coefficient problem for the time-fractional diffusion equation, *Euras. J. Math. Comp. Appl.*, 2021, vol. 9, no. 1, pp. 44–54. EDN: CCQZGT. DOI: <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2021-9-1-44-54>.
21. Subhonova Z. A., Rahmonov A. A. Problem of determining the time dependent coefficient in the fractional diffusion-wave equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 687–700. EDN: HAEXYF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222030209>.
22. Wei T., Zhang Z. Q. Robin coefficient identification for a time-fractional diffusion equation, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2016, vol. 24, no. 4, pp. 647–666. DOI: <https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1055261>.
23. Durdiev U. K. Problem of determining the reaction coefficient in a fractional diffusion equation, *Differ. Equ.*, 2021, vol. 57, no. 9, pp. 1195–1204. EDN: XQJICE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266121090081>.
24. Haubold H. J., Mathai A. M., Saxena R. K. Mittag–Leffler functions and their applications, *J. Appl. Math.*, 2011, vol. 2011, 298628. DOI: <https://doi.org/10.1155/2011/298628>.
25. Tolstov G. P. *Fourier Series*. New York, Dover Publ., 1976, x+336 pp.
26. Petrova T. S. Application of Bessel’s functions in the modelling of chemical engineering processes, *Bulg. Chem. Commun.*, 2009, vol. 41, no. 4, pp. 343–354.

УДК 517.956.6

Обратная задача об источнике для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа с дробной производной по времени в цилиндрической области

Д. К. Дурдиев

¹ Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

² Бухарский государственный университет, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

Аннотация

Исследуется обратная задача об источнике для уравнения смешанного типа с дробным уравнением диффузии в параболической части и волновым уравнением в гиперболической части цилиндрической области. Решение задачи получено в виде ряда Фурье–Бесселя с использованием ортогонального множества функций Бесселя. Доказаны теоремы единственности и существования решения.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение смешанного типа, ряд Фурье–Бесселя, функция Миттаг–Леффлера, единственность и существование.

Получение: 25 апреля 2022 г. / Исправление: 27 мая 2022 г. /

Принятие: 7 июня 2022 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2022 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Durdiev D. K. Inverse source problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with the time fractional derivative in a cylindrical domain, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 355–367. EDN: TWHCKX. DOI: 10.14498/vsgtu1921.

Сведения об авторе

Дурдимурод Каландарович Дурдиев  <https://orcid.org/0000-0002-6054-2827>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий отделением¹; проф. кафедры дифференциальных уравнений²; e-mail: durdiev65@mail.ru

MSC: 34C25, 34B15

Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima

*T. K. Yuldashev*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
4, Vuzgorodok, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

A periodical boundary value problem for a first-order system of ordinary integro-differential equations with impulsive effects and maxima is investigated. A system of nonlinear functional-integral equations is obtained and the existence and uniqueness of the solution of the periodic boundary value problem are reduced to the solvability of the system of nonlinear functional-integral equations. The method of successive approximations in combination with the method of compressing mapping is used in the proof of one-valued solvability of nonlinear functional-integral equations. We define the way with the aid of which we could prove the existence of periodic solutions of the given periodical boundary value problem.

Keywords: impulsive integro-differential equations, periodical boundary value condition, nonlinear kernel, compressing mapping, existence and uniqueness of periodic solution.

Received: 16th March, 2022 / Revised: 25th April, 2022 /Accepted: 23rd May, 2022 / First online: 30th June, 2022

1. Problem Statement

The mathematical models of many problems of modern sciences, technology, and economics are described by differential and integro-differential equations, the solutions of which are functions with first-kind discontinuities at fixed or non-fixed times. Such differential and integro-differential equations are called equations with impulsive effects. Various publications are appearing on the study of differential

Differential Equations and Mathematical Physics Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 368–379. EDN: TYZLDB. DOI: [10.14498/vsgtu1917](https://doi.org/10.14498/vsgtu1917).

Author's Details:

Tursun K. Yuldashev  <https://orcid.org/0000-0002-9346-5362>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Uzbek-Israel Joint Faculty;

e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

and integro-differential equations with impulsive effects, describing many natural and technical processes (see for instance [1–13]).

As is known, in recent years, interest in the study of differential and integro-differential equations with periodical boundary conditions has increased. In particular, in the works [14–17], periodic solutions of differential equations with impulsive effects are studied.

In this paper, we investigate a periodical boundary value problem for a system of first-order integro-differential equations with impulsive effects, nonlinear kernel depending on construction of maxima. The questions of existence and uniqueness of the solution to the periodical boundary value problem are investigated. We note that differential and integro-differential equations with maxima have singularity in the study of the questions of solvability [18].

On the interval $[0, T]$ for $t \neq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) we consider the questions of existence and constructive methods of calculating the periodic solutions of the system of nonlinear ordinary first-order integro-differential equations with impulsive effects and maxima

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds\right). \tag{1}$$

We study the integro-differential equation (1) with periodic conditions

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), & t \in (-\infty, 0], \\ x(0) = x(T), \end{cases} \tag{2}$$

and nonlinear impulsive effect

$$x(t_i^+) - x(t_i^-) = F_i(x(t_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p, \tag{3}$$

where $0 < \bar{t} < T$, $\bar{t} \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$; $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = T$; $x, y \in X$; X is the closed bounded domain in the space \mathbb{R}^n , ∂X is its border; $f \in \mathbb{R}^n$, $-\infty < \lambda_1(t) < \lambda_2(t) \leq t$, $\varphi(t) \in C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$; $\varphi(0^-) = x(0^+)$; $x(t_i^+) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} x(t_i + \nu)$, $x(t_i^-) = \lim_{\nu \rightarrow 0^-} x(t_i - \nu)$ are the limits of the function on the right and left sides $x(t)$ at the point $t = t_i$, respectively. The function f is T -periodic $F_i = F_{i+p}$, $t_{i+p} = t_i + T$,

$$\int_{-\infty}^t |K(t, s, x)| ds < \infty.$$

By $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ denoted the Banach space, which consists continuous vector function $x(t)$, defined on the segment $[0, T]$, with the norm

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{0 \leq t \leq T} |x_j(t)|}.$$

By $PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ is denoted the following linear vector space:

$$PC([0, T], \mathbb{R}^n) = \{x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n; x(t) \in C((t_i, t_{i+1}], \mathbb{R}^n), i = 1, 2, \dots, p\},$$

where $x(t_i^+)$ and $x(t_i^-)$ ($i = 0, 1, \dots, p$) exist and bounded; $x(t_i^-) = x(t_i)$. Note, that the linear vector space $PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ is Banach space with the following norm:

$$\|x(t)\|_{PC} = \max\{\|x(t)\|_{C((t_i, t_{i+1}))}, i = 1, 2, \dots, p\}.$$

FORMULATION OF PROBLEM. Find the T -periodic function $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$, which for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) satisfies the system of differential equations (1), periodic condition (2) and for $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$ satisfies the nonlinear limit condition (3) and goes through x_0 at $t = 0$.

2. Reduction to Functional-Integral Equation

Let the function $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ be a solution of the periodic boundary value problem (1)–(3). Then by integration of the equation (1) on the intervals $(0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, \dots , $(t_p, t_{p+1}]$, we obtain the following:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} f(s, x, y) ds &= \int_0^{t_1} x'(s) ds = x(t_1^-) - x(0^+), \quad t \in (0, t_1], \\ \int_{t_1}^{t_2} f(s, x, y) ds &= \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds = x(t_2^-) - x(t_1^+), \quad t \in (t_1, t_2], \\ &\vdots \\ \int_{t_p}^{t_{p+1}} f(s, x, y) ds &= \int_{t_p}^{t_{p+1}} x'(s) ds = x(t_{p+1}^-) - x(t_p^+), \quad t \in (t_p, t_{p+1}], \end{aligned}$$

where

$$f(s, x, y) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds\right).$$

Hence, taking $x(0^+) = x(0)$, $x(t_{k+1}^-) = x(t)$ into account, on the interval $[0, T]$ we have

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s, x, y) ds &= [x(t_1) - x(0^+)] + [x(t_2) - x(t_1^+)] + \dots + [x(t) - x(t_p^+)] = \\ &= -x(0) - [x(t_1^+) - x(t_1)] - [x(t_2^+) - x(t_2)] - \dots - [x(t_p^+) - x(t_p)] + x(t). \end{aligned}$$

Taking into account the condition (3), we rewrite the last equality as

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x, y) ds + \sum_{0 < t_i < t} F_i(x(t_i)). \tag{4}$$

We subordinate the function $x(t) \in PC([0, T], \mathbb{R}^n)$ in (4) to satisfy the periodic condition (2):

$$x(T) = x(0) + \int_0^T f(s, x, y) ds + \sum_{0 < t_i < T} F_i(x(t_i)).$$

Hence, taking the condition (2) into account, we obtain the following:

$$\int_0^T f(s, x, y) ds + \sum_{0 < t_i < T} F_i(x(t_i)) = 0.$$

Consequently, the integro-differential equation (1) can be written as

$$\begin{aligned} x'(t) = & f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds\right) - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds\right) dt - \\ & - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x(t_i)). \end{aligned} \quad (5)$$

Then by integration of equation (5) into the intervals $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_p, t_{p+1}]$ instead of (4) we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \int_0^t \left[f\left(s, x(s), \int_{-\infty}^s K(s, \theta, \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)]\}) d\theta\right) - \right. \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(\theta, x(\theta), \int_{-\infty}^{\theta} K(\theta, \xi, \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)]\}) d\xi\right) d\theta - \\ & \left. - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x(t_i)) \right] ds + \sum_{0 < t_i < t} F_i(x(t_i)). \end{aligned} \quad (6)$$

3. Preliminaries

LEMMA 1. For the equation (6) the following estimate is true:

$$\|x(t) - x_0\|_{PC} \leq M_1 \frac{T}{2} + 2M_2 p, \quad (7)$$

where

$$M_1 = \|f(t, x(t), y(t))\|, \quad M_2 = \max_{1 \leq i \leq p} \|F_i(t, x(t))\|.$$

Proof. We rewrite the equation (6) as follows:

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 = & \int_0^t \left[f(s, x(s), y(s)) - \right. \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta, x(\theta), y(\theta)) d\theta - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x(t_i)) \left. \right] ds + \sum_{0 < t_i < t} F_i(x(t_i)) = \\ = & \int_0^t f(s, x(s), y(s)) ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x(s), y(s)) ds - \end{aligned}$$

$$-\frac{t}{T} \int_t^T f(s, x(s), y(s)) ds - \frac{t}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x(t_i)) + \sum_{0 < t_i < t} F_i(x(t_i)).$$

Hence, this implies that the following estimate is true:

$$\|x(t) - x_0\|_{PC} \leq \alpha(t) \|f(t, x(t), y(t))\| + 2p \max_{1 \leq i \leq p} \|F_i(t, x(t))\|, \quad (8)$$

where $\alpha(t) = 2t(1 - t/T)$. It is easy to check that from (8) follows (7). Lemma 1 is proved. \square

REMARK. T -periodic solution $x_{\varphi(t)} = \psi(t)$ of the system (1) with the initial value function $\varphi(t)$ in the initial set $(-\infty, 0]$ is defined by the initial value function $\varphi(t)$, which is a periodic continuation of the solution $\psi(t)$ in the initial set $(-\infty, 0]$.

LEMMA 2. For the difference of two functions with maxima, we have the following estimate:

$$\begin{aligned} \|\max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} - \max\{y(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\}\| &\leq \\ &\leq \|x(t) - y(t)\| + 2h \left\| \frac{\partial}{\partial t} [x(t) - y(t)] \right\|, \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$h = \sup_{-\infty < t \leq T} |\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|.$$

Proof. We use obvious true relations:

$$\begin{aligned} \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} &= \max\{[x(\tau) - y(\tau) + y(\tau)] : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} \leq \\ &\leq \max\{[x(\tau) - y(\tau)] : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} + \max\{y(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\}. \end{aligned}$$

Hence, we obtain the following:

$$\begin{aligned} \max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} - \max\{y(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} &\leq \\ &\leq \max\{[x(\tau) - y(\tau)] : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\}. \end{aligned} \quad (10)$$

We denote by t_1 and t_2 the points of the interval $[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$, on which the maximums of the functions $x(t)$ and $y(t)$ are reached:

$$\begin{aligned} \max\{x(\tau) | \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} &= x(t_1), \max\{y(\tau) | \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} = y(t_1), \\ \max\{[x(\tau) - y(\tau)] | \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} &= x(t_2) - y(t_2). \end{aligned}$$

Then, taking (10) and last equalities, we have

$$\begin{aligned} \|\max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} - \max\{y(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} - x(t) + y(t)\| &\leq \\ &\leq \|[x(t) - y(t)] - [x(t_1) - y(t_1)]\| + \|[x(t_2) - y(t_2)] - [x(t_1) - y(t_1)]\|. \end{aligned} \quad (11)$$

From another side, it is obvious that the estimate is valid:

$$\|[x(\bar{t}) - y(\bar{t})] - [x(\bar{\bar{t}}) - y(\bar{\bar{t}})]\| \leq h \left\| \frac{d}{dt} [x(t^*) - y(t^*)] \right\| \leq h \left\| \frac{d}{dt} [x(t) - y(t)] \right\|, \quad (12)$$

where $\bar{t}, \bar{t} \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]$, $t^* \in (\bar{t}, \bar{t})$. From the estimates (11) and (12) we come to the following estimate:

$$\begin{aligned} \|\max\{x(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} - \max\{y(\tau) : \tau \in [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]\} - x(t) + y(t)\| &\leq \\ &\leq 2h \left\| \frac{d}{dt} [x(t) - y(t)] \right\|. \end{aligned}$$

Therefore, it is easy to check that the inequality (9) and we complete the proof of Lemma 2. □

4. Main Results

THEOREM 1. *Assume that for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) the following conditions are satisfied:*

- 1) $\|f(t, x(t), y(t))\| \leq M_1 < \infty$, $\max_{1 \leq i \leq p} \|F_i(t, x(t))\| \leq M_2 < \infty$;
- 2) $\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leq L_1 [\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|]$;
- 3) $\|K(t, s, x_1) - K(t, s, x_2)\| \leq L_2(s) \|x_1 - x_2\|$, $0 < \sup_t \int_{-\infty}^t L_2(s) ds < \infty$;
- 4) $\|F_i(t, x_1) - F_i(t, x_2)\| \leq L_3 \|x_1 - x_2\|$;
- 5) *the radius of the inscribed ball in X is greater than $M_1 T/2 + 2M_2 p$;*
- 6) $\rho < 1$, where

$$\rho = \max \left\{ L_1 \left(1 + M_3 \right) \left(1 + \frac{T}{2} \right) + p L_3 \left(2 + \frac{1}{T} \right), 2L_1 M_3 (T + 1) h \right\}.$$

If the system (1) has a solution for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$), then this solution can be founded by the system of nonlinear functional-integral equations

$$\begin{aligned} x(t, x_0) = x_0 + & \\ + \int_0^t \left[f \left(s, x(s, x_0), \int_{-\infty}^s K(s, \theta, \max\{x(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)]\}) d\theta \right) - \right. & \\ - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\theta, x(\theta, x_0), \int_{-\infty}^\theta K(\theta, \xi, \max\{x(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)]\}) d\xi \right) d\theta - & \\ \left. - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x(t_i, x_0)) \right] ds + \sum_{0 < t_i < t} F_i(x(t_i, x_0)). \end{aligned} \quad (13)$$

Proof. The theorem we proof by the method of successive approximations, defining the iteration process as

$$\begin{aligned} x_0(t, x_0) = x_0, \quad x_{k+1}(t, x_0) = x_0 + & \\ + \int_0^t \left[f \left(s, x_k(s, x_0), \int_{-\infty}^s K(s, \theta, \max\{x_k(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)]\}) d\theta \right) - \right. & \\ - \frac{1}{T} \int_0^T f \left(\theta, x_k(\theta, x_0), \int_{-\infty}^\theta K(\theta, \xi, \max\{x_k(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)]\}) d\xi \right) d\theta - & \\ \left. - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x_k(t_i, x_0)) \right] ds + \sum_{0 < t_i < t} F_i(x_k(t_i, x_0)). \end{aligned} \quad (14)$$

We will show that the right-hand side of the system of equations (13) as an operator maps a ball with radius $M_1T/2 + 2M_2p$ into itself and is a contraction operator. So, according to Lemma 1, from (7) and (14) we have

$$\|x_{k+1}(t, x_0) - x_0\|_{PC} \leq M_1 \frac{T}{2} + 2M_2p. \tag{15}$$

From the system of integro-differential equations

$$\begin{aligned} x'(t, x_0) = & f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds\right) - \\ & - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(t, x(t, x_0), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds\right) dt - \\ & - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x(t_i, x_0)) \end{aligned} \tag{16}$$

we obtain the following:

$$\|x'_{k+1}(t, x_0)\|_{PC} \leq 2M_1 + \frac{p}{T}M_2. \tag{17}$$

We consider a difference $x_{k+1}(t, x_0) - x_k(t, x_0)$ of two approximations, where the functions $x_{k+1}(t, x_0)$ and $x_k(t, x_0)$ are defined from the approximations of the system of equations (14). By the conditions of the theorem, from (14) we have

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(t, x_0) - x_k(t, x_0)\| \leq & L_1 \int_0^t \left\{ \|x_k(s, x_0) - x_{k-1}(s, x_0)\| + \right. \\ & + \int_{-\infty}^s L_2(\theta) \|\max\{x_k(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)]\} - \\ & \quad \left. - \max\{x_{k-1}(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)]\}\| d\theta + \right. \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T \left[\|x_k(\theta, x_0) - x_{k-1}(\theta, x_0)\| + \right. \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\theta} L_2(\xi) \|\max\{x_k(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)]\} - \\ & \quad \left. \left. - \max\{x_{k-1}(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(\xi), \lambda_2(\xi)]\}\| d\xi \right] d\theta \right\} ds + \\ & + 2 \sum_{i=1}^p L_3 \|x_k(t_i, x_0) - x_{k-1}(t_i, x_0)\| \leq \\ \leq & \alpha(t)L_1[(1 + M_3)\|x_k(t, x_0) - x_{k-1}(t, x_0)\|_{PC} + \\ & + 2hM_3\|x'_k(t, x_0) - x'_{k-1}(t, x_0)\|_{PC}] + 2pL_3\|x_k(t, x_0) - x_{k-1}(t, x_0)\|_{PC} \leq \\ \leq & \left(L_1(1 + M_3) \frac{T}{2} + 2pL_3 \right) \|x_k(t, x_0) - x_{k-1}(t, x_0)\|_{PC} + \\ & + 2L_1M_3Th\|x'_k(t, x_0) - x'_{k-1}(t, x_0)\|_{PC}, \end{aligned} \tag{18}$$

where

$$M_3 = \sup_t \int_{-\infty}^t L_2(s)ds < \infty.$$

Similarly, by the assumptions of Theorem 1, from (16) we have the following:

$$\begin{aligned} \|x'_{k+1}(t, x_0) - x'_k(t, x_0)\|_{PC} &\leq \\ &\leq \left(L_1(1 + M_3) + L_3 \frac{p}{T} \right) \|x_k(t, x_0) - x_{k-1}(t, x_0)\|_{PC} + \\ &\quad + 2L_1M_3h \|x'_k(t, x_0) - x'_{k-1}(t, x_0)\|_{PC}. \end{aligned} \tag{19}$$

Adding both sides of (19) to (18), we obtain

$$\|y_{k+1}(t, x_0) - y_k(t, x_0)\|_{PC} \leq \rho \|y_k(t, x_0) - y_{k-1}(t, x_0)\|_{PC}, \tag{20}$$

where

$$\begin{aligned} \|y_{k+1}(t, x_0) - y_k(t, x_0)\| &= \|x_{k+1}(t, x_0) - x_k(t, x_0)\| + \|x'_{k+1}(t, x_0) - x'_k(t, x_0)\|, \\ \rho &= \max \left\{ L_1(1 + M_3) \left(1 + \frac{T}{2} \right) + pL_3 \left(2 + \frac{1}{T} \right), 2L_1M_3(T + 1)h \right\}. \end{aligned}$$

According to the last condition of Theorem 1, $\rho < 1$. Since

$$\|x_{k+1}(t, x_0) - x_k(t, x_0)\| \leq \|y_{k+1}(t, x_0) - y_k(t, x_0)\|,$$

from the estimate (20) we deduce that the operator on right-hand side of (13) is compressing. From the estimates (15), (17) and (20) implies that there exists a unique fixed point $x(t, x_0)$. Theorem 1 is proved. \square

From the estimate (20) it is easy to see that for $x_0, \bar{x}_0 \in X$ holds

$$\|x(t, x_0) - x(t, \bar{x}_0)\|_{BD} \leq \frac{|x_0 - \bar{x}_0|}{1 - \rho}.$$

Now we will show the existence of periodic solutions of the system of impulsive integro-differential equations (1). We introduce the following designations:

$$\begin{aligned} \Delta(x_0) &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x_\infty(t_i, x_0)) + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T f \left(t, x_\infty(t, x_0), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x_\infty(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds \right) dt, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k(x_0) &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^p F_i(x_k(t_i, x_0)) + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T f \left(t, x_k(t, x_0), \int_{-\infty}^t K(t, s, \max\{x_k(\tau, x_0) : \tau \in [\lambda_1(s), \lambda_2(s)]\}) ds \right) dt, \end{aligned} \tag{22}$$

where $x(t, x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t, x_0) = x_\infty(t, x_0)$ is the solution of the non-linear system (13). Therefore, $x_\infty(t, x_0)$ is the solution of the system of impulsive integro-

differential equations (1) for $\Delta(x_0) = 0$ through x_0 at $t = 0$. Consequently, the questions of the existence of a solution of the system of impulsive integro-differential equations (1) were reduced to the questions of the existence of zeros of the function $\Delta(x_0)$ and we solve this problem by finding zeros of the function $\Delta_k(x_0)$.

THEOREM 2. *Assume that*

- 1) *all the conditions of Theorem 1 are fulfilled;*
- 2) *there is a natural number k such that the function $\Delta_k(x_0)$ has an isolated singular point x_0^0 that $\Delta_k(x_0^0) = 0$ and the index of isolated singular point x_0^0 is nonzero;*
- 3) *there is a closed convex region $X_0 \subset X$, containing a single singular point such that on its border ∂X_0 is an estimate fulfilled:*

$$\inf_{x \in \partial X_0} \|\Delta_k(x)\| \geq \frac{M\rho^{k+1}}{1 - \rho}. \tag{23}$$

Then the system of impulsive integro-differential equations (1) has a periodic solution for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) that $x(0) \in X_0$.

Proof. By definition, the index of an isolated singular point x_0^0 of continuous mapping $\Delta_k(x_0)$ is equal to the characteristic of the vector field, generated by mapping $\Delta_k(x_0)$ on a sufficiently small sphere S^n with the center in x_0^0 . Since in X_0 there is no other singular point, which will be different from x_0^0 and X_0 is homeomorphic to the unit ball E^n , then the characteristic of the vector field $\Delta_k(x_0)$ on the sphere S^n is equal to the characteristic of this vector field on ∂X_0 . The fields $\Delta_k(x_0)$ and $\Delta(x_0)$ are homotopic on ∂X_0 . Let us consider families of everywhere continuous on ∂X vector fields

$$V(\sigma, x_0) = \Delta_k(x_0) + \sigma(\Delta(x_0) - \Delta_k(x_0)),$$

which connect the fields

$$V(0, x_0) = \Delta_k(x_0), \quad V(1, x_0) = \Delta(x_0).$$

We note that the estimate is true:

$$\|\Delta(x_0) - \Delta_k(x_0)\| \leq \frac{M\rho^{k+1}}{1 - \rho}. \tag{24}$$

Therefore, the vector field $V(\sigma, x_0)$ does not vanish anywhere on ∂X_0 . Indeed, from (23) and (24) implies that

$$\|V(\sigma, x_0)\| \geq \|\Delta_k(x_0)\| - \|\Delta(x_0) - \Delta_k(x_0)\| > 0. \tag{25}$$

The fields $\Delta_k(x_0)$ and $\Delta(x_0)$ are homotopic on ∂X and the rotations of the homotopic fields in the compact are equal. Therefore, taking into account (25), we conclude that the rotation of the field $\Delta(x_0)$ on the ∂X_0 is equal to the index of the singular point x_0 of the field $\Delta_k(x_0)$ and nonzero. Consequently, the vector field $\Delta(x_0)$ on X_0 has a singular point x_0 , for which $\Delta(x_0) = 0$. Therefore, the system of impulsive integro-differential equations (1) has a periodic solution for

all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$) that $x(0) \in X_0$. In addition, we note that for $x_0, \bar{x}_0 \in X$ from (21) and (22) we have

$$\|\Delta(x_0)\|_{PC} \leq M \left(1 + \frac{p}{T}\right), \quad \|\Delta(x_0) - \Delta(\bar{x}_0)\|_{BD} \leq \frac{|x_0 - \bar{x}_0|}{1 - \rho}.$$

Theorem 2 is proved. □

Conclusion

The theory of differential and integro-differential equations plays an important role in solving many applied problems. Especially, local and nonlocal periodical boundary value problems for differential and integro-differential equations with impulsive actions have many applications in mathematical physics, mechanics and technology, in particular in nanotechnology. In this paper, we investigate the system of first-order integro-differential equations (1) with periodical boundary value condition (2), with nonlinear kernel and with nonlinear condition (3) of impulsive effects for $t = t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T$. The nonlinear right-hand side of this equation consists of the construction of maxima. The questions of the existence and uniqueness of the T -periodic solution of the boundary value problem (1)–(3) are studied. If the system (1) has a solution for all $t \in [0, T]$, $t \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, then this solution can be proven to be based on the system of nonlinear functional-integral equations (13). The questions of the existence of a solution of the system of impulsive differential equations (1) we reduce to the questions of the existence of zeros of function $\Delta(x_0)$ in (21) and we solve this problem by finding zeros of function $\Delta_k(x_0)$ in (22).

The results obtained in this work will allow us in the future to investigate other kind of periodical boundary value problem for the heat equation and the wave equation with impulsive actions.

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Anguraj A., Arjunan M. M. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations, *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2005, vol. 2005, no. 111, pp. 1–8. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2005/111/abstr.html>.
2. Ashyralyev A., Sharifov Ya. A. Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions, *Adv. Diff. Eqns.*, 2013, vol. 2013, 173. DOI: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-173>.
3. Ashyralyev A., Sharifov Ya. A. Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions, *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2013, vol. 2013, no. 80, pp. 1–11. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2013/80/abstr.html>.
4. Liu B., Liu X., Liao X. Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems, *Acta Math. Sci.*, 2005, vol. 25, no. 1, pp. 161–169. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(17\)30273-4](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30273-4).
5. Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. *Theory of Impulsive Differential Equations*, Series in Modern Applied Mathematics, vol. 6. Singapore, World Scientific, 1989, x+273 pp. DOI: <https://doi.org/10.1142/0906>.

6. Mardanov M. J., Sharifov Ya. A., Habib M. H. Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions, *Electron. J. Diff. Eqns.*, 2014, vol. 2014, no. 259, pp. 1–8. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2014/259/abstr.html>.
7. Samoilenko A. M., Perestyk N. A. *Impulsive Differential Equations*, World Scientific Series on Nonlinear Science Series A, vol. 14. Singapore, World Scientific, 1995, ix+462 pp. DOI: <https://doi.org/10.1142/2892>.
8. Sharifov Ya. A. Optimal control problem for the impulsive differential equations with non-local boundary conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, vol. 4(33), pp. 34–45 (In Russian). EDN: RVARRH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1134>.
9. Sharifov Ya. A. Optimal control for systems with impulsive actions under nonlocal boundary conditions, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 2, pp. 65–72. EDN: KKVHUX. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13020084>.
10. Sharifov Ya. A., Mammadova N. B. Optimal control problem described by impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *Diff. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 401–409. EDN: XLBLAD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266114030148>.
11. Sharifov Ya. A. Optimality conditions in problems of control over systems of impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions, *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 64, no. 6, pp. 958–970. EDN: XNBIVX DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0691-4>.
12. Yuldashev T. K., Fayziev A. K. On a nonlinear impulsive differential equations with maxima, *Bull. Inst. Math.*, 2021, vol. 4, no. 6, pp. 42–49.
13. Yuldashev T. K., Fayziev A. K. On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima, *Nanosyst., Phys. Chem. Math.*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 36–44. EDN: SHAUGO DOI: <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2022-13-1-36-44>.
14. Bai Ch., Yang D. Existence of solutions for second-order nonlinear impulsive differential equations with periodic boundary value conditions, *Bound. Value Probl.*, 2007, vol. 2007, 41589. DOI: <https://doi.org/10.1155/2007/41589>.
15. Chen J., Tisdell C. C., Yuan R. On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 331, no. 2, pp. 902–912. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.09.021>.
16. Li X., Bohner M., Wang Ch.-K. Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications, *Automatica*, 2015, vol. 52, pp. 173–178. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.11.009>.
17. Hu Z., Han M. Periodic solutions and bifurcations of first order periodic impulsive differential equations, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, 2009, vol. 19, no. 8, pp. 2515–2530. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127409024281>.
18. Yuldashev T. K. Limit value problem for a system of integro-differential equations with two point mixed maximums, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2008, no. 1(16), pp. 15–22 (In Russian). EDN: JTBCJT. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu567>.

УДК 517.968.78

Периодические решения системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями и максимумами

Т. К. Юлдашев

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4.

Аннотация

Исследуется краевая задача для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с импульсными эффектами и максимумами. Получена система нелинейных функционально-интегральных уравнений и, таким образом, существование и единственность решения периодической краевой задачи сводятся к разрешимости системы нелинейных функционально-интегральных уравнений. Метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений используется при доказательстве однозначной разрешимости нелинейных функционально-интегральных уравнений. Определим способ, с помощью которого можно будет доказать существование периодических решений данной периодической краевой задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями, периодическое краевое условие, нелинейное ядро, сжимающее отображение, существование и единственность периодического решения.

Получение: 16 марта 2022 г. / Исправление: 25 апреля 2022 г. /

Принятие: 23 мая 2022 г. / Публикация онлайн: 30 июня 2022 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Yuldashev T. K. Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 368–379. EDN: TYZLDB. DOI: 10.14498/vsgtu1917.

Сведения об авторе

Турсун К. Юлдашев  <https://orcid.org/0000-0002--9346-5362>

доктор физико-математических наук; профессор; Узбекско-Израильский совместный факультет; e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com



УДК 517.95

Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения

А. Б. Бейлин¹, А. В. Богатов², Л. С. Пулькина²

¹ Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

² Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для параболического уравнения. Доказана ее однозначная разрешимость в пространстве Соболева. Доказательство единственности решения и его существования базируется на выведенных в работе априорных оценках. Отмечена связь заданных нелокальных условий с условиями В. А. Стеклова и интегральными условиями I рода, что дало основание интерпретировать рассматриваемую задачу как задачу с возмущенными нелокальными условиями В. А. Стеклова. Обращено внимание на классы задач, в том числе обратных, для изучения которых полученные в статье результаты могут оказаться полезными.

Ключевые слова: параболическое уравнение, краевая задача, нелокальные условия, обобщенное решение, пространства Соболева.

Получение: 24 января 2022 г. / Исправление: 2 марта 2022 г. /

Принятие: 23 мая 2022 г. / Публикация онлайн: 26 мая 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Бейлин А. Б., Богатов А. В., Пулькина Л. С. Задача с нелокальными условиями для одномерного параболического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 2. С. 380–395. EDN: **USPHOK**. DOI: [10.14498/vsgtu1904](https://doi.org/10.14498/vsgtu1904).

Сведения об авторах

Александр Борисович Бейлин  <https://orcid.org/0000-0002-4042-2860>

кандидат технических наук, доцент; доцент каф. технологии машиностроения, станков и инструментов; e-mail: abeilin@mail.ru

Андрей Владимирович Богатов  <https://orcid.org/0000-0001-5797-1930>

аспирант; каф. дифференциальных уравнений и теории управления;
e-mail: andrebogato@mail.ru

Людмила Степановна Пулькина  <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. дифференциальных уравнений и теории управления; e-mail: louise@samdiff.ru

Задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому классу задач подкреплен необходимостью построения математических моделей, отвечающих потребностям современного естествознания [1]. В статье [2], положившей начало систематическим исследованиям нелокальных задач с интегральными условиями, рассматривалось одномерное уравнение теплопроводности. Вскоре после выхода этой статьи, а также [3], появился ряд работ, в которых в том или ином качестве присутствуют нелокальные интегральные условия: либо вместо граничных [4–9], либо в качестве условий переопределения в обратных задачах [10–13]. Однако задолго до появления всех этих работ была опубликована статья В. А. Стеклова [14], в которой обосновано появление нелокальных граничных условий при исследовании задачи об охлаждении стержня:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$a_{i1}u_x(0, t) + a_{i2}u_x(l, t) + b_{i1}u(0, t) + b_{i2}u(l, t) = g_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (S)$$

Через много лет после выхода этой статьи на волне возникшего интереса к нелокальным задачам обнаружена связь между условиями (S) и интегральными условиями по пространственным переменным [4, 15, 16]. Оказалось, что условия вида

$$\int_0^l K_i(x)u(x, t)dx = E_i(t)$$

при выполнении условий согласования с начальными данными эквивалентны нелокальным условиям В. А. Стеклова (S), возмущенным интегральными слагаемыми [10].

В предлагаемой статье изучается задача с возмущенными условиями (S) в случае $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. Задачи с нелокальными условиями, в том числе интегральными, продолжают привлекать внимание исследователей. Особо отметим работы [17–20].

В области $Q = (0, l) \times (0, T)$ рассмотрим следующую задачу: *найти решение уравнения*

$$\mathcal{M}u \equiv u_t - (au_x)_x + cu = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ и нелокальным условиям

$$\begin{aligned} a(0, t)u_x(0, t) + \alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t)dx &= g_1(t), \\ a(l, t)u_x(l, t) + \alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t)dx &= g_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты уравнения (1) суть функции переменных x, t , $a(x, t) > 0$ всюду в \bar{Q} .

Условия вида (2) возникают при изучении процессов распространения тепла и массопереноса в среде с меняющимися свойствами, например, происходящими между твердым телом и жидкостью. В этом случае следует считать тепловой поток пропорциональным разности температур на границах

сред, а коэффициенты α_i, β_i представляют собой коэффициенты пропорциональности [12, 14]. Заметим, что к условиям (2) можно прийти формальным путем, а именно, если даны интегральные условия

$$\int_0^l K_i(x)u(x, t)dx = E_i(t), \quad i = 1, 2,$$

которые представляют собой заданную тепловую энергию, то, интегрируя равенство (1), умноженное предварительно на $K_i(x)$, получим условия вида (2) [15]. Мы приведем подробности этой процедуры ниже. Заметим также, что мы рассматриваем в качестве коэффициентов как уравнения (1), так и условия (2) функций соответствующих переменных.

Прежде всего введем понятие решения поставленной задачи. Обозначим

$$W_2^{1,0}(Q) = \{u : u \in L_2(Q), u_x \in L_2(Q)\},$$

$$\hat{W}_2^1(Q) = \{v : v \in W_2^1(Q), v(x, T) = 0\},$$

где $W_2^1(Q)$ — пространство Соболева. Следуя известной процедуре [22], выведем из равенства

$$\int_0^T \int_0^l v \mathcal{M} u \, dx dt = \int_0^T \int_0^l f v \, dx dt,$$

интегрируя по частям, равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-uv_t + au_x v_x + cuv) \, dx dt - \int_0^l \varphi(x)v(x, 0) \, dx - \\ & - \int_0^T v(0, t)[\alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t) \, dx] \, dt + \\ & + \int_0^T v(l, t)[\alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t) \, dx] \, dt \\ & = \int_0^T \int_0^l f(x, t)v(x, t) \, dx dt - \int_0^T v(0, t)g_1(t) \, dt + \int_0^T v(l, t)g_2(t) \, dt. \quad (3) \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи (1), (2) будем называть функцию $u(x, t)$, принадлежащую $W_2^{1,0}(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (3) при всех $v \in \hat{W}_2^1(Q)$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:

- a) $a, a_t, c \in C(\bar{Q})$, $f \in L_2(Q)$, $\alpha, \beta \in C^1([0, T])$, $H_i \in C(\bar{Q})$, $\varphi \in C([0, l])$;
- b) $\alpha_2 + \beta_1 = 0$;
- c) $\alpha_1(t)\xi^2 - 2\alpha_2(t)\xi\eta - \beta_2(t)\eta^2 \leq 0$, $t \in [0, T]$.

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2).

Доказательство. Единственность решения докажем, как обычно, от противного. Предположим, что существует два различных решения задачи $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда их разность, $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, удовлетворяет соответствующей однородной задаче, т.е. в силу определения — тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-uv_t + au_x v_x + cuv) dx dt - \\ & - \int_0^T v(0, t) \left[\alpha_1(t)u(0, t) + \beta_1(t)u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t)u(x, t) dx \right] dt + \\ & + \int_0^T v(l, t) \left[\alpha_2(t)u(0, t) + \beta_2(t)u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t)u(x, t) dx \right] dt = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Положим в (4)

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x, \eta) d\eta, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

После интегрирования по частям и элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l a(x, 0)v_x^2(x, 0) dx = \int_0^\tau \int_0^l cvv_t dx dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha'_1(t)v^2(0, t) dt - \frac{1}{2} \int_0^\tau \beta'_2(t)v^2(l, t) dt - \int_0^\tau \alpha'_2(t)v(0, t)v(l, t) dt - \\ & - \int_0^\tau (\alpha_2(t) + \beta_1(t))v(0, t)v_t(l, t) dt + \frac{1}{2}\alpha_1(0)v^2(0, 0) - \\ & - \alpha_2(0)v(0, 0)v(l, 0) - \frac{1}{2}\beta_2(0)v^2(l, 0) - \\ & - \int_0^\tau v(0, t) \int_0^l H_1(x, t)v_t(x, t) dx dt + \int_0^\tau v(l, t) \int_0^l H_2(x, t)v_t(x, t) dx dt. \quad (5) \end{aligned}$$

Условия теоремы обеспечивают существование положительных чисел $a_0, c_0, \bar{\alpha}, h_i$ таких, что

$$a(x, t) \geq a_0, \quad |c(x, t)| \leq c_0, \quad |\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_2| \leq \bar{\alpha}, \quad \max_{[0, T]} \int_0^l H_i^2 dx \leq h_i.$$

Обозначим $h = \max_i \{h_i\}$. Тогда из (5), применяя неравенства Коши, Коши—Буняковского и Коши с эpsilon, а также учитывая условия b) и c) теоремы, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l a_0 v_x^2(x, 0) dx \leq \varepsilon \int_0^\tau \int_0^l v_t^2 dx dt + c(\varepsilon) \int_0^\tau \int_0^l v^2 dx dt + \\ & + \frac{a_1}{2} \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt + \bar{\alpha} \int_0^\tau v^2(0, t) dt + \bar{\alpha} \int_0^\tau v^2(l, t) dt + \end{aligned}$$

$$+ c(\varepsilon) \int_0^\tau [v^2(0, t) + v^2(l, t)] dt + h\varepsilon \int_0^\tau \int_0^l v_t^2 dx dt.$$

Выберем ε так, чтобы $\nu = a_0 - (1 + h)\varepsilon > 0$, например, $\varepsilon = a_0/2(1 + h)$. Тогда, перенеся интеграл от $v_t(x, t) = u(x, t)$ в силу выбора $v(x, t)$ в левую часть неравенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{a_0}{2} \int_0^l v_x^2(x, 0) dx &\leq c(\varepsilon) \int_0^\tau \int_0^l v^2 dx dt + \frac{a_1}{2} \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt + \\ &+ \bar{\alpha} \int_0^\tau v^2(0, t) dt + \bar{\alpha} \int_0^\tau v^2(l, t) dt + c(\varepsilon) \int_0^\tau [v^2(0, t) + v^2(l, t)] dt. \end{aligned}$$

Продолжим оценку правой части неравенства. Прежде всего заметим, что из представления функции $v(x, t)$ следует, что для $t < \tau$

$$v^2(x, t) \leq \tau \int_0^\tau u^2(x, \eta) d\eta,$$

поэтому

$$\int_0^\tau \int_0^l v^2 dx dt \leq \tau^2 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt. \quad (6)$$

Для оценки интегралов, содержащих следы функции $v(x, t)$ на боковых границах, применим неравенства [15]

$$v^2(z_i, t) \leq 2l \int_0^l v_x^2(x, t) dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x, t) dx, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = l.$$

Получим, обозначив $C_1 = c(\varepsilon) + \bar{\alpha}$,

$$C_1 \int_0^\tau [v^2(0, t) + v^2(l, t)] dt \leq 4C_1 l \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt + \frac{4C_1}{l} \int_0^\tau \int_0^l v^2(x, t) dx dt.$$

В результате приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{a_0}{2} \int_0^l v_x^2(x, 0) dx \leq C_2 \int_0^\tau \int_0^l v^2 dx dt + C_3 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt,$$

где мы обозначили $C_2 = c(\varepsilon) + 4C_1/l$, $C_3 = 4C_1 l + a_1/2$. Теперь воспользуемся неравенством (6). Это приводит нас к неравенству

$$\frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{a_0}{2} \int_0^l v_x^2(x, 0) dx \leq C_2 \tau^2 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + C_3 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dx dt.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\mu = 1/2 - C_2 \tau^2 > 0$. Пусть $\tau \leq 1/(2\sqrt{C_2})$. Тогда для всех $\tau \in [0, 1/(2\sqrt{C_2})]$

$$\mu \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt + \frac{a_0}{2} \int_0^l v_x^2(x, 0) dx \leq C_3 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt. \quad (7)$$

Из (7), в частности,

$$\frac{a_0}{2} \int_0^l v_x^2(x, 0) dx \leq C_3 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt. \quad (8)$$

Введем функцию $w(x, t) = \int_0^t u(x, \eta) d\eta$. Так как интеграл в правой части этой формулы можно представить как сумму

$$\int_0^t u(x, \eta) d\eta = \int_0^\tau u_x d\eta + \int_\tau^t u_x d\eta,$$

легко увидеть, что $v_x(x, t) = w(x, t) - w(x, \tau)$, $v_x(x, 0) = w(x, \tau)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x, t) dx dt &= \int_0^\tau \int_0^l (w(x, t) - w(x, \tau))^2 \leq \\ &\leq 2 \int_0^\tau \int_0^l w^2(x, t) dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx dt. \end{aligned}$$

Заметив, что подынтегральная функция второго слагаемого правой части последнего соотношения не зависит от переменной интегрирования, получим

$$\int_0^\tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx dt = \tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx.$$

С учетом проведенных рассуждений из (8) следует

$$\int_0^l w^2(x, \tau) dx \leq \frac{4C_3}{a_0} \int_0^\tau \int_0^l w^2 dx dt + \frac{4C_3}{a_0} \tau \int_0^l w^2(x, \tau) dx.$$

Выберем τ так, чтобы $\nu = a_0 - 4C_3\tau > 0$, например $\tau \leq a_0/(8C_3)$, и перенесем последний интеграл правой части последнего неравенства в левую его часть. Тогда

$$\nu \int_0^l w^2(x, \tau) dx \leq \frac{4C_3}{a_0} \int_0^\tau \int_0^l w^2 dx dt.$$

К этому неравенству можно применить лемму Гронуолла, но прежде чем это сделать, вспомним, что мы уже выбирали τ . Поэтому теперь будем рассматривать те значения τ , которые удовлетворяют как $\tau \leq a_0/(8C_3)$, так и $\tau \leq 1/(2\sqrt{C_2})$. Обозначим $b_1 = \min\{1/(2\sqrt{C_2}), a_0/(8C_3)\}$. Тогда для всех $\tau \in [0, b_1]$

$$\int_0^l w^2(x, \tau) dx \leq 0$$

и, стало быть, $w(x, t) = 0$ для всех t из $[0, b_1]$. А это значит, что $v_x(x, 0) = 0$. Возвращаясь к (7), получим

$$\int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt \leq 0,$$

откуда $u(x, t) = 0$ для всех $t \in [0, b_1]$, т.е. в $Q_{b_1} = (0, l) \times (0, b_1)$. Повторяя рассуждения и оценки для $(0, l) \times (b_1, 2b_1)$ и продолжая этот процесс, через конечное число шагов убедимся в том, что $u(x, t) = 0$ во всем цилиндре Q , а это означает, что существует не более одного обобщенного решения задачи (1), (2).

Существование решения. Пусть $\{w_k(x)\}$ — фундаментальная система в $W_2^1(0, l)$. Будем искать приближенные решения задачи (1), (2) в виде $u^m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_{km}(t)w_k(x)$ из соотношений

$$\begin{aligned} & \int_0^l (u_t^m w_i + a u_x^m w_i' + c u^m w_i) dx - \\ & - w_i(0) \left[\alpha_1 u^m(0, t) + \beta_1 u^m(l, t) + \int_0^l H_1 u^m dx \right] + \\ & + w_i(l) \left[\alpha_2 u^m(0, t) + \beta_2 u^m(l, t) + \int_0^l H_2 u^m dx \right] = \\ & = \int_0^l f w_i dx - w_i(0) g_1(t) + w_i(l) g_2(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (9) есть не что иное, как система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_{km}(t)$. Запишем ее в виде

$$\sum_{k=1}^m A_{ki} c'_{km}(t) + \sum_{k=1}^m B_{ki} c_{km}(t) = f_i(t), \quad (10)$$

где обозначено

$$A_{ki} = \int_0^l w_k w_i dx,$$

$$\begin{aligned} B_{ki} = & \int_0^l (a w_k' w_i' + c w_k w_i) dx - \\ & - w_i(0) \left[\alpha_1 w_k(0) + \beta_1 w_k(l) + \int_0^l H_1 w_k dx \right] + \\ & + w_i(l) \left[\alpha_2 w_k(0) + \beta_2 w_k(l) + \int_0^l H_2 w_k dx \right], \end{aligned}$$

$$f_i(t) = \int_0^l f(x, t) w_i(x) dx - w_i(0) g_1(t) + w_i(l) g_2(t).$$

Добавив равенства $c_{km}(0) = (\varphi, w_k)$, получим задачу Коши для системы (10). Так как функции $w_k(x)$ линейно независимы, матрица коэффициентов при $c'_{km}(t)$ — матрица Грамма и, стало быть, ее определитель отличен от нуля и система (10) может быть записана в нормальной форме. Коэффициенты при $c_{km}(t)$ ограничены, а свободные члены суммируемы на $(0, T)$, что гарантировано условиями теоремы. Поэтому задача Коши для системы (10) однозначно

разрешима и определяет абсолютно непрерывные на $[0, T]$ функции $c_{km}(t)$. Это означает, что последовательность приближенных решений $u^m(x, t)$ построена.

Перейдем к выводу оценок. Для этого умножим каждое из соотношений (9) на $c_{jm}(t)$, просуммируем полученные равенства по j от 1 до m , а затем проинтегрируем по t от 0 до $\tau \leq T$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_0^l [u_t^m u^m + a(u_x^m)^2 + c(u^m)^2] dx dt - \int_0^\tau u^m(0, t) [\alpha_1 u^m(0, t) + \beta_1 u^m(l, t)] dt - \\ & - \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt + \int_0^\tau u^m(l, t) [\alpha_2 u^m(0, t) + \beta_2 u^m(l, t)] dt + \\ & + \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt + \int_0^\tau (\beta_2 - \alpha_1) u^m(0, t) u^m(l, t) dt = \\ & = \int_0^\tau \int_0^l f u^m dx dt - \int_0^\tau u^m(0, t) g_1(t) dt + \int_0^\tau u^m(l, t) g_2(t) dt. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по частям первое слагаемое этого равенства, сделав элементарные преобразования и учтя при этом условие $\alpha_2 + \beta_1 = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + \int_0^\tau \int_0^l a(u_x^m)^2 dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx - \int_0^\tau \int_0^l c(u^m)^2 dx dt + \\ & + \int_0^\tau \alpha_1 (u^m(0, t))^2 dt - \int_0^\tau \beta_2 (u^m(l, t))^2 dt - 2 \int_0^\tau \alpha_2 u^m(0, t) u^m(l, t) dt - \\ & - \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt + \\ & + \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt + \\ & + \int_0^\tau \int_0^l f u^m dx dt - \int_0^\tau u^m(0, t) g_1(t) dt + \int_0^\tau u^m(l, t) g_2(t) dt. \quad (11) \end{aligned}$$

Из равенства (11) с учетом условия c) теоремы вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + \int_0^\tau \int_0^l a_0(u_x^m)^2 dx dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx + \int_0^\tau \int_0^l |c|(u^m)^2 dx dt + \\ & + \left| \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt \right| + \\ & + \left| \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt \right| + \end{aligned}$$

$$+ \left| \int_0^\tau \int_0^l f u^m dx dt \right| + \left| \int_0^\tau u^m(0, t) g_1(t) dt \right| + \left| \int_0^\tau u^m(l, t) g_2(t) dt \right|. \quad (12)$$

Оценим правую часть (12) с помощью неравенств Коши и Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau u^m(0, t) \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx dt \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau (u^m(0, t))^2 dt + \frac{h_1}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\tau u^m(l, t) \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx dt \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^\tau (u^m(l, t))^2 dt + \frac{h_2}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt; \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^\tau \int_0^l f u^m dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt;$$

$$\left| \int_0^\tau u^m(0, t) g_1(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau (u^m(0, t))^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau g_1^2(t) dt;$$

$$\left| \int_0^\tau u^m(l, t) g_2(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau (u^m(l, t))^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau g_2^2(t) dt.$$

Следуя [22, с. 77], нетрудно получить неравенства

$$(u^m(0, t))^2 \leq \varepsilon \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon l} \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx;$$

$$(u^m(l, t))^2 \leq \varepsilon \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx + \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon l} \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx.$$

Тогда, продолжив оценку, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\tau [(u^m(0, t))^2 + (u^m(l, t))^2] dt &\leq \\ &\leq 2\varepsilon \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m(x, t))^2 dx dt + 2 \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon l} \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt. \end{aligned}$$

Выберем ε так, чтобы $a_0 - 2\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon = a_0/4$. Тогда неравенство (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx + \frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dx dt &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx + C_4 \int_0^\tau \int_0^l (u^m)^2 dx dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau [g_1^2(t) + g_2^2(t)] dt, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$C_4 = c_0 + 2\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon l} + \frac{1}{2}.$$

Из (13), в частности,

$$\begin{aligned} \int_0^l (u^m(x, \tau))^2 dx \leq & \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx + 2C_4 \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt + \\ & + \int_0^\tau \int_0^l f^2(x, t) dx dt + \int_0^\tau [g_1^2(t) + g_2^2(t)] dt, \end{aligned}$$

откуда в силу неравенства Гронуолла в дифференциальной форме [21, с. 536]

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^l (u^m(x, t))^2 dx dt \leq & e^{2C_4\tau} \int_0^\tau \left[\int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx + \right. \\ & \left. + \int_0^{\tau'} \int_0^l f^2(x, t) dx dt + \int_0^{\tau'} [g_1^2(t) + g_2^2(t)] dt \right] d\tau'. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$f \in L_2(Q), \quad g_i \in L_2(0, T), \quad \int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx \leq \|\varphi\|_{L_2(0, l)}^2,$$

справедливо неравенство

$$\int_0^\tau \left[\int_0^l (u^m(x, 0))^2 dx + \int_0^{\tau'} \int_0^l f^2(x, t) dx dt + \int_0^{\tau'} [g_1^2(t) + g_2^2(t)] dt \right] d\tau' \leq N(\tau),$$

а функция $N(\tau)$ ограничена, что обеспечено условиями теоремы. Таким образом, мы получили следующую оценку:

$$\|u^m\|_{L_2(Q_\tau)}^2 \leq C(\tau)N(\tau), \quad (14)$$

справедливую для всех $\tau \in [0, T]$, причем правая часть (14) не зависит от m . Возвращаясь к неравенству (13), получим оценку второго слагаемого в его левой части:

$$\frac{a_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u_x^m)^2 dx dt \leq C_4 C(\tau) N(\tau) + \frac{1}{2} C(\tau) N'(\tau).$$

Отсюда

$$\|u_x^m\|_{L_2(Q_\tau)}^2 \leq P(\tau), \quad (15)$$

где функция $P(\tau)$ в силу условий теоремы ограничена. Так как (14) и (15) выполняются для всех $\tau \in [0, T]$, для $u^m(x, t)$ имеем оценку

$$\|u^m\|_{W_2^{1,0}(Q)} \leq R \quad (16)$$

с постоянной R , не зависящей от m .

Благодаря (16) из последовательности $\{u^m\}$ можно выделить подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение во избежание громоздкости, слабо сходящуюся вместе с производными u_x^m к некоторому элементу $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Покажем, что этот элемент является искомым решением задачи (1), (2). Для этого умножим (9) на произвольную абсолютно непрерывную функцию $d_i(t)$ такую, что $d'(t) \in L_2(0, T)$ и $d_i(T) = 0$. Полученные равенства сложим по всем i от 1 до m , а затем проинтегрируем по t от 0 до T . После интегрирования по частям в первом слагаемом приходим к тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u^m \eta_t + au_x^m \eta_x + cu^m \eta) dx dt - \int_0^l u^m(x, 0) \eta(x, 0) dx - \\ & - \int_0^T \eta(0, t) \left[\alpha_1(t) u^m(0, t) + \beta_1(t) u^m(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u^m(x, t) dx \right] dt + \\ & + \int_0^T \eta(l, t) \left[\alpha_2(t) u^m(0, t) + \beta_2(t) u^m(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u^m(x, t) dx \right] dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f(x, t) \eta(x, t) dx dt - \int_0^T \eta(0, t) g_1(t) dt + \int_0^T \eta(l, t) g_2(t) dt, \quad (17) \end{aligned}$$

которое очень похоже на тождество (3), но пока можно утверждать его выполнимость для функций $\eta(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i(t) w_i(x)$, а не для любых $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

Обозначим через Θ_m множество функций $\eta(x, t)$ с указанными свойствами. Как показано в [22, с. 169], совокупность $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Theta_j$ плотна в $\hat{W}_2^1(Q_T)$, поэтому,

перейдя к пределу в (17) при $m \rightarrow \infty$ и фиксированной $\eta(x, t)$, можем утверждать, что полученное при этом тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l (-u \eta_t + au_x \eta_x + cu \eta) dx dt - \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx - \\ & - \int_0^T \eta(0, t) \left[\alpha_1(t) u(0, t) + \beta_1(t) u(l, t) + \int_0^l H_1(x, t) u(x, t) dx \right] dt + \\ & + \int_0^T \eta(l, t) \left[\alpha_2(t) u(0, t) + \beta_2(t) u(l, t) + \int_0^l H_2(x, t) u(x, t) dx \right] dt = \\ & = \int_0^T \int_0^l f(x, t) \eta(x, t) dx dt - \int_0^T \eta(0, t) g_1(t) dt + \int_0^T \eta(l, t) g_2(t) dt \end{aligned}$$

выполняется для любой $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. А это и означает, что функция $u(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} u^m(x, t)$ есть искомое решение задачи (1), (2).

Теорема полностью доказана. \square

Замечания и дополнения. В качестве дополнения приведем некоторые вычисления, иллюстрирующие сделанное во введении замечание о связи условий (2), интегральных условий первого рода и условий Стеклова. Действительно, пусть заданы условия первого рода

$$\int_0^l K_i(x) u(x, t) dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Проинтегрировав умноженное на $K_i(x)$ уравнение (1), получим

$$-K_i(l)a(l,t)u_x(l,t) + K_i(0)a(0,t)u_x(0,t) + K_i'(l)a(l,t)u(l,t) - K_i'(0)a(0,t)u(0,t) + \int_0^l [c(x,t)K_i(x) - (K_i'(x)a(x,t))_x]u(x,t)dx = \int_0^l K_i(x)f(x,t)dx, \quad i = 1, 2.$$

Если в уравнении (1) $c = 0$, $a = \text{const}$, а именно такое уравнение рассмотрено в [14], и, кроме того, $K_i''(x) = 0$, то интегралы в этих соотношениях обращаются в нуль и мы приходим к условиям Стеклова.

Считая выполненным естественное условие $\Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0$, получим соотношения (2), где

$$\alpha_1(t) = \frac{K_1'(0)K_2(l) - K_2'(0)K_1(l)}{\Delta}, \quad \alpha_2(t) = \frac{[K_2'(0)K_1(0) - K_1'(0)K_2(0)]a(0,t)}{a(l,t)\Delta};$$

$$\beta_1(t) = \frac{(K_1'(0)K_2(0) - K_2'(0)K_1(0))a(l,t)}{a(0,t)\Delta}, \quad \beta_2(t) = \frac{(K_1'(l)K_2(0) - K_2'(l)K_1(0))}{\Delta};$$

$$H_1(x,t) = \frac{[cK_1 - (K_1'a)_x]K_2(l) - [cK_2 - (K_2'a)_x]K_1(l)}{a(l,t)\Delta},$$

$$H_2(x,t) = \frac{[cK_1 - (K_1'a)_x]K_2(0) - [cK_2 - (K_2'a)_x]K_1(0)}{a(0,t)\Delta}.$$

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарности. Авторы благодарят анонимных рецензентов за их комментарии, которые помогли улучшить эту статью, а также редакционную коллегию журнала за четкую координацию.

Библиографический список

1. Bažant, Zdeněk P., Jirásek M. Nonlocal integral formulation of plasticity and damage: Survey of progress // *J. Eng. Mech.*, 2002. vol. 128, no. 11. pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Quart. Appl. Math.*, 1963. vol. 21, no. 2. pp. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/160437>.
3. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024.
4. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // *Диффер. уравн.*, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
5. Картынный А. В. Трехточечная смешанная задача с интегральным условием по пространственной переменной для параболических уравнений второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1990. Т. 26, № 9. С. 1568–1575.
6. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition // *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2002. vol. 31, no. 4. pp. 201–213. DOI: <https://doi.org/10.1155/S0161171202005860>.

7. Кереев А. А., Шхануков–Лафишев М. Х., Кулиев Р. С. Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова / *Неклассические уравнения математической физики*. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2005. С. 152–159.
8. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.
9. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // *Диффер. уравн.*, 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564.
10. Оразов И., Садыбеков М. А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 2. С. 70–75. EDN: OJXYSV.
11. Cannon J. R., van der Hoek J. The classical solution of the one-dimensional two-phase Stefan problem with energy specification // *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.*, 1982. vol. 130, no. 1. pp. 385–398. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01761503>.
12. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // *Inverse Problems*, 1988. vol. 4, no. 1. pp. 35–45. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>.
13. Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // *Матем. заметки*, 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217. EDN: RLRMZR DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9370>.
14. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // *Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2*, 1896. Т. 5, № 3–4. С. 136–181.
15. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // *Изв. вузов. Матем.*, 2012. № 4. С. 74–83. EDN: OOUKMT.
16. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equation from the view point of strongly regular boundary conditions // *Electron. J. Differ. Equ.*, 2020. vol. 2020, no. 28. pp. 1–20. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html>.
17. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка // *Изв. Иркутск. гос. унив. Сер. Математика*, 2021. Т. 36. С. 14–28. EDN: YGBIKR. DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14>.
18. Данилюк И. М., Данилюк А. О. Задача Неймана с интегро-дифференциальным оператором в краевом условии // *Матем. заметки*, 2016. Т. 100, № 5. С. 701–709. EDN: XAMYJB. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11013>.
19. Кожанов А. И. О разрешимости некоторых нелокальных и связанных с ними обратных задач для параболических уравнений // *Мат. заметки ЯГУ*, 2011. Т. 18, № 2. С. 64–78. EDN: PMEХNH.
20. Кожанов А. И., Дюжева А. В. Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 423–434. EDN: ZAKEGT. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1859>.
21. Эванс Л. К. *Уравнения с частными производными*. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003. 560 с.
22. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973. 407 с.

MSC: 35L20, 35B45, 35D30

A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation

A. B. Beylin¹, A. V. Bogatov², L. S. Pulkina³¹ Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.² Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

In present paper, we consider a problem with nonlocal conditions for parabolic equation and show that there exists a unique weak solution in Sobolev space. The main tool to prove the existence of a unique weak solution to the problem is a priori estimates derived by authors. We also note a connection between Steklov nonlocal conditions and first kind integral conditions. This connection enables interpret the problem under consideration as a problem with perturbed Steklov nonlocal conditions. Obtained results may be useful for certain class of problems including inverse problems.

Keywords: parabolic equation, boundary-value problem, nonlocal conditions, generalized solution, Sobolev spaces.

Received: 24th January, 2022 / Revised: 2nd March, 2022 /Accepted: 23rd May, 2022 / First online: 26th May, 2022

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Differential Equations and Mathematical Physics

Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beylin A. B., Bogatov A. V., Pulkina L. S. A problem with nonlocal conditions for a one-dimensional parabolic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 2, pp. 380–395. EDN: USPHOK. DOI: [10.14498/vsgtu1904](https://doi.org/10.14498/vsgtu1904) (In Russian).

Authors' Details:

Alexander B. Beylin  <https://orcid.org/0000-0002-4042-2860>

Cand. of Techn. Sci., Associate Professor; Dept. Mechanical Engineering, Machine Tools and Tools; e-mail: abeillin@mail.ru

Andrey V. Bogatov  <https://orcid.org/0000-0001-5797-1930>

Postgraduate Student; Dept. of Differential Equations and Control Theory;
e-mail: andrebogato@mail.ru

Ludmila S. Pulkina  <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Dept. of Differential Equations and Control Theory;
e-mail: louise@samdiff.ru

responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. Not applicable.

Acknowledgements. The authors thank the anonymous reviewers for their comments that improve this article, and the editorial board of the journal for managing this submission.

References

1. Bažant, Zdeněk P., Jirásek M. Nonlocal integral formulation of plasticity and damage: Survey of progress, *J. Eng. Mech.*, 2002, vol. 128, no. 11, pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
2. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 21, no. 2, pp. 155–160. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/160437>.
3. Kamynin L. I. On certain boundary problem of heat conduction with nonclassical boundary conditions, *Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 33–59. EDN: XNNPFM. DOI: [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90080-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1).
4. Ionkin N. I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differ. Uravn.*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304 (In Russian).
5. Kartynnik A. V. A three-point mixed problem with an integral condition with respect to the space variable for second-order parabolic equations, *Differ. Equ.*, 1990, vol. 26, no. 9, pp. 1160–1166.
6. Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2002, vol. 31, no. 4, pp. 201–213. DOI: <https://doi.org/10.1155/S0161171202005860>.
7. Kerefov A. A., Shkhanukov–Lafishev M. Kh., Kuliev R. S. Boundary-value problems for a loaded heat equation with nonlocal Steklov-type conditions, In: *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki* [Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Inst. Math. SB RAS, 2005, pp. 152–159 (In Russian).
8. Kozhanov A. I. On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. EDN: PJGDYR. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0>.
9. Ivanchov N. I. Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions, *Differ. Equ.*, 2004, vol. 40, no. 4, pp. 591–609. EDN: XLSR JL. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44>.
10. Orazov I., Sadybekov M. A. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 60–64. EDN: XMXTBB. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X12020089>.
11. Cannon J. R., van der Hoek J. The classical solution of the one-dimensional two-phase Stefan problem with energy specification, *Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser.*, 1982, vol. 130, no. 1, pp. 385–398. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01761503>.
12. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations, *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 35–45. DOI: <https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>.
13. Kamynin V. L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation, *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 2, pp. 205–213. EDN: RFQRGX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434613070201>.
14. Steklov V. A. The problem of cooling of inhomogeneous solid, *Commun. Kharkov Math. Soc.*, 1896, vol. 5, no. 3–4, pp. 136–181 (In Russian).
15. Pul'kina L. S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 4, pp. 62–69. EDN: PDSZMV. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081>.

16. Pulkina L. S. Nonlocal problems for hyperbolic equation from the view point of strongly regular boundary conditions, *Electron. J. Differ. Equ.*, 2020, vol. 2020, no. 28, pp. 1–20. <https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2020/28/abstr.html>.
17. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations, *Bulletin of Irkutsk State University, Ser. Mathematics*, 2021, vol. 36, pp. 14–28 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14>.
18. Danyliuk I. M., Danyliuk A. O. Neumann problem with the integro-differential operator in the boundary condition, *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 5, pp. 687–694. EDN: XNSUDH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434616110055>.
19. Kozhanov A. I. On the solvability of some nonlocal and associated with them inverse problems for parabolic equations, *Math. Notes of Yakutsk State Univ.*, 2011, vol. 18, no. 2, pp. 64–78 (In Russian).
20. Kozhanov A. I., Dyuzheva A. V. The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 423–434 (In Russian). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1859>.
21. Evans L. C. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Novosibirsk, Tamara Rozhkovskaya, 2003, 560 pp. (In Russian)
22. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)

ПОДПИСКА – 2022

на январь–декабрь
в «Объединенном каталоге «Пресса России»
на сайтах www.pressa-rf.ru и www.akc.ru

Уважаемые читатели!
Обратите внимание, что проводится
подписная кампания на журналы
Самарского государственного технического
университета на 2022 год.

- 18106 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки»
- 18107 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки»
- 18108 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки»
- 41340 Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Философия»
- 70570 Градостроительство и архитектура

*Условия оформления подписки Вы найдете
на сайтах www.pressa-rf.ru и www.akc.ru*