

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 26, № 3 – 2022

**Вестник
Самарского
государственного
технического
университета**

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Сентябрь — 2022

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 26, № 3 – 2022)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвираков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 26, № 3 – 2022)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:
ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244
Тел.: +7 (846) 337 04 43
Факс: +7 (846) 278 44 00
E-mail: vsgtu@samgtu.ru
URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, [Zentralblatt MATH](#), [DOAJ](#) и входит в ядро [Российского индекса научного цитирования](#).

Журнал включен в [Перечень рецензируемых научных изданий](#), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

Полный текст статей журнала также можно найти в базах данных компании EBSCO Publishing на платформе EBSCOhost™.

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1
----------------	--

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
September — 2022

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2022, vol. 26, no. 3

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
14A-M, Zastavskay st., Saint Petersburg, 196084, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Zentralblatt MATH](#), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, and [DOAJ](#).

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

In 2019, the Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences has entered into an electronic licensing relationship with EBSCO Publishing, the world's leading aggregator of full text journals, magazines and eBooks. The full text of journal can be found in the EBSCOhost™ databases.

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Карахан Д.* “Об q -аналоге оператора Штурма–Лиувилля с условиями разрыва” 407
- Рапопорт Э. Я.* “Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами” 419
- Хачатрян Х. А., Петросян А. С.* “Вопросы существования и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой” 446

Механика деформируемого твёрдого тела

- Буренин А. А., Ткачева А. В., Фирсов С. В.* “Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв” 480
- Радченко В. П., Афанасьева Е. А.* “Прогнозирование индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций по изделию-лидеру” . . . 500

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Коваленко А. В., Узденова А. М., Овсянникова А. В., Уртенев М. Х., Бостанов Р. А.* “Математическое моделирование влияния спейсеров на массоперенос в электромембранных системах” 520
- Сизых Г. Б.* “Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа” 544
- Шапеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А.* “hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения би-гармонического уравнения” 556
- Энатская Н. Ю.* “Вероятностные модели для анализа обратных экстремальных задач комбинаторики” 573

Краткие сообщения

- Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.* “К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида” 592

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

<i>Karahan D.</i> “On a q -analogue of the Sturm–Liouville operator with discontinuity conditions”	407
<i>Rapoport E. Ya.</i> “Uniform optimization of controlled systems with distributed parameters”	419
<i>Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.</i> “Problems of the existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear integral equations on the whole line”	446

Mechanics of Solids

<i>Burenin A. A., Tkacheva A. V., Firsov S. V.</i> “Gadolin’s problem on the assembly of a two-layer shaft by a shrink fit with a test of the connection for separation” 480	
<i>Radchenko V. P., Afanaseva E. A.</i> “Prediction of individual deformation characteristics of structural elements by a “leader” product”	500

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

<i>Kovalenko A. V., Uzdenova A. M., Ovsyannikova A. V., Urtenov M. Kh., Bostanov R. A.</i> “Mathematical modeling of the effect of spacers on mass transfer in electromembrane systems”	520
<i>Sizykh G. B.</i> “General principle of maximum pressure in stationary flows of inviscid gas”	544
<i>Shapeev V. P., Bryndin L. S., Belyaev V. A.</i> “The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation” 556	
<i>Enatskaya N. Yu.</i> “Probabilistic models for the analysis of inverse extremal problems in combinatorics”	573

Short Communications

<i>Murashkin E. V., Radayev Yu. N.</i> “On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces”	592
--	-----

MSC: 34L10, 39A13, 47B25, 94A20



On a q -analogue of the Sturm–Liouville operator with discontinuity conditions

*D. Karahan*Harran Üniversitesi,
Sanliurfa, Turkey.

Abstract

In this paper, a q -analogue of the Sturm–Liouville problem with discontinuity condition on a finite interval is studied. It is proved that the q -Sturm–Liouville problem with discontinuity conditions is self-adjoint in $L_q^2(0, \pi)$. The completeness theorem and the sampling theorem are proved.

Keywords: q -Sturm–Liouville operator, completeness of eigenfunctions, self-adjoint operator.

Received: 3rd June, 2021 / Revised: 1st September, 2021 /Accepted: 13th September, 2022 / First online: 27th September, 2022

1. Introduction

Let us consider a q -analogue of the Sturm–Liouville equation in the form

$$l(y) := -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(t) + u(t)y(t) = \nu y(t), \quad 0 < t < \pi, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

together with the discontinuity conditions at a point $a \in (0, \pi)$

$$y(a+0) = \alpha y(a-0), \quad D_{q^{-1}}y(a+0) = \alpha^{-1}D_{q^{-1}}y(a-0), \quad (2)$$

and boundary conditions

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad (3)$$

where $0 < q < 1$, $u(t) \in L_q^2(0, \pi)$ is a real function, α is real; $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$.

In [1], it is worth mentioning that this work is based on the q -difference operator, which is attributed to Jackson. In recent years, many papers have been

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Karahan D. On a q -analogue of the Sturm–Liouville operator with discontinuity conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 407–418. EDN: ZNKLPD. DOI: [10.14498/vsgtu1934](https://doi.org/10.14498/vsgtu1934).

Author's Details:

Döne Karahan  <https://orcid.org/0000-0001-6644-5596>Mathematics Department, Science and Letter Faculty; e-mail: dkarahan@harran.edu.tr

published subject to boundary value problems consisting of a q -Jackson derivative in the classical Sturm–Liouville problem. In [2–4], the q -analogues of Sturm–Liouville problems are investigated, and a space of boundary values of the minimal operator is created, and all maximal dissipative, self-adjoint, maximal accretive operators are described, and other extensions of the q -analogue of Sturm–Liouville operators in terms of boundary conditions are raised. A theorem on completeness of the system of eigenfunctions and associated functions of dissipative operators are proved by using the Lidskii’s theorem.

In the current decade, many authors have investigated the q -sampling theory of signal analysis. [6–8] are the first studies in this subject. In these studies, the construction of expansions in the q -Fourier series [5] was followed by the derivation of the q -sampling theorems. The sampling theory associated with q -type of Sturm–Liouville equations is conceived (see [9]). In [10], M. Annaby and Z. Mansour obtained asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of q -type of Sturm–Liouville problems.

In [11–13], B. Allahverdiev and H. Tuna investigated the continuous spectrum of the singular q -Sturm–Liouville operators and established some criteria under which the q -Sturm–Liouville equation is of limit-point case at infinity. In [14], authors established a Parseval equality and an expansion formula in eigenfunctions for a singular q -Sturm–Liouville operator on the entire line. (Also, B. Allahverdiev and H. Tuna investigated the resolvent operator of a singular q -Dirac system (see [15])). In [16], the spectral properties of the eigenvalues and the eigenfunctions of the q -Sturm–Liouville boundary value problem are investigated.

Also, there are many physical models involving q -difference and their related problems in [21–23]. In these studies, several physical models involving q -functions, q -derivatives, q -integrals and their related problems are investigated. However, to our knowledge, there is no study of the general problem as we do in the present setting. At this point, it is worth mentioning that this work is based on the q -difference operator, which is attributed to Jackson and a similar study of the Sturm–Liouville systems generated by the Askey–Wilson derivative.

In [24] and [25], the Sturm–Liouville problems are generalized by a fractional derivative of order α , $0 < \alpha \leq 1$. The numerical solutions of fractional Sturm–Liouville problems were examined.

2. Preliminaries

In this section, we give some of the q -notations and we use these q -notations throughout the paper. These standard notations are based on [18].

If $q \in \mathbb{R}$ is fixed, a subset A of \mathbb{C} is called q -geometric if $qt \in A$ whenever $t \in A$. Let h be a function, real or complex valued, defined on a q -geometric set A , $q \neq 1$. Let q be a positive number with $0 < q < 1$. The q -difference operator D_q is defined as

$$D_q h(t) = \frac{h(t) - h(qt)}{t(1 - q)} \quad \forall t \in A \setminus \{0\}.$$

The q^{-1} -derivative at zero is defined by

$$D_{q^{-1}} h(t) = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{h(tq^{-n}) - h(0)}{tq^{-n}} = D_q h(0).$$

When required, we will replace q by q^{-1} . We can demonstrate the correctness of the following facts using the definition and will often use it

$$D_{q^{-1}}h(t) = (D_qh)(q^{-1}t), \quad D_q^2h(q^{-1}t) = qD_q[D_qh(q^{-1}t)] = D_{q^{-1}}D_qh(t).$$

Associated with this operator, there is a non-symmetric formula for the q -differentiation of a product of the functions h and g defined in the q -geometric set.

$$D_q[h(t)g(t)] = h(qt)D_qg(t) + g(t)D_qh(t). \tag{4}$$

The q -integral called Jackson integral is given by

$$\int_0^\pi h(t)d_qt = (1 - q) \sum_{n=0}^\infty h(\pi q^n)\pi q^n.$$

$L_q^2(0, \pi)$ is the space of all complex-valued functions defined in $(0, \pi)$ with the norm

$$\|h\| = \left(\int_0^\pi |h(t)|^2 d_qt \right)^{1/2} < \infty$$

and it is a separable Hilbert space (see [6]) with the inner product

$$\langle h, g \rangle = \int_0^\pi h(t)\overline{g(t)}d_qt.$$

The space $C_q^2(0)$ is the space of all continuous functions with the q -derivative first order at the point zero.

DEFINITION. A function f that is defined on a q -geometric set A , $0 \in A$, is said to be q -regular at zero if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(tq^n) = f(0), \quad \forall t \in A.$$

If h and g are both q -regular at zero, there is a rule of q -integration by parts given by

$$\int_0^\pi g(t)D_qh(t)d_qt = (hg)(\pi) - (hg)(0) - \int_0^\pi D_qg(t)h(qt)d_qt.$$

An important special case, we have

$$\int_0^\pi D_qh(t)d_qt = (h)(\pi) - (h)(0). \tag{5}$$

The q -Wronskian of two functions h and g is defined as

$$W_q(h, g)(t) = h(t)D_qg(t) - g(t)D_qh(t).$$

LEMMA 1 (SEE [2]). Let $h(\cdot)$, $g(\cdot)$ in $L_q^2(0, \pi)$ be defined on $[0, q^{-1}\pi]$. Then, for $t \in (0, \pi]$ we have

$$\langle D_qh, g \rangle = h(\pi)\overline{g(\pi q^{-1})} - \lim_{n \rightarrow \infty} h(\pi q^n)\overline{g(\pi q^{n-1})} + \left\langle h, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}g \right\rangle, \tag{6}$$

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}h, g \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\pi q^{n-1})\overline{g(\pi q^n)} - h(\pi q^{-1})\overline{g(\pi)} + \langle h, D_q g \rangle. \quad (7)$$

3. The self-adjoint problem

THEOREM 1. *The q -analogue of the Sturm–Liouville eigenvalue problem (1)–(3) is self-adjoint on $C_q^2(0) \cap L_q^2(0, \pi)$.*

Proof. We first prove that $\kappa(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ in $L_q^2(0, \pi)$, we have the following q -Lagrange’s identity

$$\int_0^\pi (l\kappa(t)\overline{\sigma(t)} - \kappa(t)\overline{l\sigma(t)})d_q t = [\kappa, \sigma](\pi) - \lim_{n \rightarrow \infty} [\kappa, \sigma](\pi q^n), \quad (8)$$

where

$$[\kappa, \sigma](t) := \kappa(t)\overline{D_{q^{-1}}\sigma(t)} - D_{q^{-1}}\kappa(t)\overline{\sigma(t)}.$$

Applying (7) with $h(t) = D_q \kappa(t)$ and $g(t) = \sigma(t)$, we obtain the following:

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \kappa(t), \sigma(t) \right\rangle &= \\ &= -(D_q \kappa)(\pi q^{-1})\overline{\sigma(\pi)} + \lim_{n \rightarrow \infty} (D_q \kappa)(\pi q^{n-1})\overline{\sigma(\pi q^n)} + \langle D_q \kappa, D_q \sigma \rangle = \\ &= -D_{q^{-1}}\kappa(\pi)\overline{\sigma(\pi)} + \lim_{n \rightarrow \infty} D_{q^{-1}}\kappa(\pi q^n)\overline{\sigma(\pi q^n)} + \langle D_q \kappa, D_q \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Applying (6) to $h(t) = \kappa(t)$, $g(t) = D_q \sigma(t)$, we obtain

$$\begin{aligned} \langle D_q \kappa, D_q \sigma \rangle &= \\ &= \kappa(\pi)\overline{D_q \sigma(\pi q^{-1})} - \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(\pi q^n)\overline{D_q \sigma(\pi q^{n-1})} + \left\langle \kappa, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \sigma \right\rangle = \\ &= \kappa(\pi)\overline{D_{q^{-1}}\sigma(\pi)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(\pi q^n)\overline{D_{q^{-1}}\sigma(\pi q^n)} + \left\langle \kappa, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \sigma \right\rangle. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \kappa(t), \sigma(t) \right\rangle = [\kappa, \sigma](\pi) - \lim_{n \rightarrow \infty} [\kappa, \sigma](\pi q^n) + \left\langle \kappa, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \sigma \right\rangle. \quad (9)$$

The Lagrange’s identity (8) is the result of (9) and the reality of $u(t)$. Letting $\kappa(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ in $C_q^2(0)$ and assuming that they satisfy (2), (3), we obtain the following:

$$\kappa(0) = 0, \quad \sigma(0) = 0. \quad (10)$$

The continuity of $\kappa(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ at zero implies that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\kappa, \sigma](\pi q^n) = [\kappa, \sigma](0).$$

Then (9) will be

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \kappa, \sigma \right\rangle = [\kappa, \sigma](\pi) - [\kappa, \sigma](0) + \left\langle \kappa, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q \sigma \right\rangle.$$

From (10), we have

$$[\kappa, \sigma](0) = \kappa(0)\overline{D_{q^{-1}}\sigma(0)} - D_{q^{-1}}\kappa(0)\overline{\sigma(0)} = 0.$$

Similarly,

$$[\kappa, \sigma](\pi) = \kappa(\pi)\overline{D_{q^{-1}}\sigma(\pi)} - D_{q^{-1}}\kappa(\pi)\overline{\sigma(\pi)} = 0.$$

Since $u(t)$ is real valued,

$$\begin{aligned} \langle l(\kappa), \sigma \rangle &= \left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q\kappa(t) + u(t)\kappa(t), \sigma(t) \right\rangle = \\ &= \left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q\kappa(t), \sigma(t) \right\rangle + \langle u(t)\kappa(t), \sigma(t) \rangle = \\ &= \left\langle \kappa, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q\sigma \right\rangle + \langle \kappa(t), u(t)\sigma(t) \rangle = \langle \kappa, l(\sigma) \rangle, \end{aligned}$$

i.e. l is a self-adjoint operator. □

4. Completeness of eigenfunctions

LEMMA 2. *Let h and g be q -regular at zero. The Wronskian $W_q(h, g)(t)$ of the q -analogue of the Sturm–Liouville problem (1) does not depend on t .*

Proof. The proof can be done similarly to [9]. □

Let $\eta(t, \nu)$ be the solution of equation (1) with discontinuity conditions (2) and initial conditions

$$\eta(0, \nu) = 0, \quad D_{q^{-1}}\eta(0, \nu) = 1, \tag{11}$$

and $\xi(t, \nu)$ be the solution of (1) with discontinuity conditions (2) and

$$\xi(\pi, \nu) = 0, \quad D_{q^{-1}}\xi(\pi, \nu) = 1.$$

Since the q -Wronskian is independent of t , we can evaluate it at $t = 0$ and use the above conditions at ξ in order to write

$$W_q(\eta, \xi)(\nu) = W_q(\nu) = -\xi(0, \nu). \tag{12}$$

It follows from condition (3) that $W_q(\nu) = 0$ if and only if ν is an eigenvalue of the q -analogue of the Sturm–Liouville problem (1).

Denote by ν_n the eigenvalues and by α_n the normalized numbers of problem (1), (2):

$$\alpha_n = \int_0^\pi \eta^2(t, \nu_n) d_q t. \tag{13}$$

The numbers $\{\nu_n, \alpha_n\}$ are said to be the spectral date of the problem (1)–(3). λ_n^0 and α_n^0 are eigenvalues and normalized numbers, respectively, in the case of $u(t) \equiv 0$ in the equation (1), where $u(t)$ is a potential function. Then there exists a sequence β_n such that

- 1) $\xi(t, \nu_n) = \beta_n \eta(t, \nu_n)$, $\beta_n \neq 0$,
- 2) $\beta_n \alpha_n = -\dot{W}_q(\nu_n)$, where $\dot{W}_q(\nu) = D_q W_q(\nu)$ (respect to ν),

- 3) $\sqrt{\nu_n} = \sqrt{\nu_n^0} + \frac{\epsilon_n}{\sqrt{\nu_n^0}} + \frac{a_n}{\sqrt{\nu_n^0}}, \{\epsilon_n\} \in l_2, a_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi f(t)\xi(t, \lambda_n)d_q t, \text{ (see [20])},$
- 4) $\alpha_n = \alpha_n^0 + \frac{\delta_n}{\sqrt{\nu_n^0}}, \{\delta_n\} \in l_2.$

LEMMA 3. *The eigenvalues and eigenfunctions of the q-analogue of the Sturm–Liouville problem (1)–(3) have the following properties:*

- i) *the eigenvalues are real;*
- ii) *eigenfunctions that belong to different eigenvalues are orthogonal;*
- iii) *all eigenvalues are simple.*

Proof.

- i) Let ν_0 be an eigenvalue with an eigenfunction $\eta_0(\cdot)$. Then

$$\langle l(\eta_0), \eta_0 \rangle = \langle \eta_0, l(\eta_0) \rangle.$$

Since $l(\eta_0) = \nu_0 \eta_0$ then

$$(\nu_0 - \overline{\nu_0}) \int_0^\pi |\eta_0(x)|^2 d_q x.$$

Since $\eta_0(\cdot)$ is non-trivial then $\nu_0 = \overline{\nu_0}$, which proves i).

- ii) Let ν, μ be two distinct eigenvalues with the corresponding eigenfunctions $\eta(\cdot), \xi(\cdot)$, respectively. Then

$$(\nu - \mu) \int_0^\pi \eta(t)\overline{\xi(t)}d_q t = 0.$$

Since $\nu \equiv \mu$ then $\eta(\cdot)$ and $\xi(\cdot)$ are orthogonal.

- iii) Let ν_0 be an eigenvalue with two eigenfunctions $\eta_1(\cdot)$ and $\eta_2(\cdot)$. From [2, Corollary 2.15] we can prove that the functions $\{\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot)\}$ are linearly dependent by proving that their q-Wronskian vanishes at $t = 0$. Indeed,

$$\begin{aligned} W_q(\eta_1, \eta_2)(0) &= \eta_1(0)D_q \eta_2(0) - \eta_2(0)D_q \eta_1(0) = \\ &= \eta_1(0)D_{q^{-1}} \eta_2(0) - \eta_2(0)D_{q^{-1}} \eta_1(0) = 0, \end{aligned}$$

since both η_1 and η_2 satisfy (3). □

THEOREM 1. *The system of eigenfunctions $\{\eta(t, \nu_n)\}_{n \geq 0}$ of the problem (1)–(3) is complete in $L_q^2(0, \pi)$.*

Proof. Denote

$$G(t, \tau, \nu) = -\frac{1}{W_q(\nu)} \begin{cases} \eta(t, \nu)\xi(\tau, \nu), & t \leq \tau, \\ \eta(\tau, \nu)\xi(t, \nu), & t \geq \tau, \end{cases}$$

and consider the function

$$Y(t, \nu) = \int_0^\pi G(t, \tau, \nu)h(\tau)d_q \tau =$$

$$= -\frac{1}{W_q(\nu)} \left[\xi(t, \nu) \int_0^t \eta(\tau, \nu) h(\tau) d_q \tau + \eta(t, \nu) \int_t^\pi \xi(\tau, \nu) h(\tau) d_q \tau \right].$$

The function $G(t, \tau, \nu)$ is called the q -type Green function for the q -analogue of the Sturm–Liouville problem (1)–(3). $G(t, \tau, \nu)$ is the kernel of the inverse operator for the q -analogue of the Sturm–Liouville problem, i.e. $Y(t, \nu)$ is the solution of the problem

$$-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} D_q Y(t) + \{-\nu + u(t)\} Y(t) = h(t), \quad t \in [0, \pi], \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

satisfies the discontinuity condition (2) and the boundary condition (3). Furthermore, taking into account (13), we get the following:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\nu=\nu_n} Y(t, \nu) &= \\ &= -\frac{1}{\dot{W}_q(\nu_n)} \left[\xi(t, \nu_n) \int_0^t \eta(\tau, \nu_n) h(\tau) d_q \tau + \eta(t, \nu_n) \int_t^\pi \xi(\tau, \nu_n) h(\tau) d_q \tau \right] = \\ &= -\frac{\beta_n}{\dot{W}_q(\nu)} \eta(t, \nu_n) \int_0^\pi \eta(\tau, \nu_n) h(\tau) d_q \tau = \frac{1}{\alpha_n} \eta(t, \nu_n) \int_0^\pi \eta(\tau, \nu_n) h(\tau) d_q \tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Let the function $h(t) \in L_q^2(0, \pi)$ be such that

$$\int_0^\pi \eta(\tau, \nu_n) h(\tau) d_q \tau = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Then in view of (15), $\operatorname{Res}_{\nu=\nu_n} Y(t, \nu) = 0$ and consequently for each fixed $t \in [0, \pi]$, the function $Y(t, \nu)$ is entire in ν . Furthermore, for $\rho \in G_\delta = \{\rho : |\rho - \rho_{k,0}| \geq \delta, k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ and $|\rho| \geq \rho^*$ for sufficiently large $\rho^* = \rho^*(\delta)$, where $\nu = \rho^2, \rho_{k,0}$ are the zeros of the function

$$W_q^0(\rho) = \alpha^+ \frac{\sin \rho \pi}{\rho} + \alpha^- \frac{\sin \rho(2a - \pi)}{\rho},$$

δ is a fixed positive number, $\alpha^\pm = \frac{1}{2}(\alpha \pm \frac{1}{\alpha})$ (see [17]), ρ^* is rather large, the inequality

$$|W_q(\nu)| \geq \frac{C_\delta}{|\rho|} e^{|\operatorname{Im} \rho| \pi},$$

and consequently the inequality

$$|Y(t, \nu)| \leq \frac{C'_\delta}{|\rho|}, \quad \rho \in G_\delta, \quad |\rho| \geq \rho^*,$$

are fulfilled (see [17]). Using the maximum principle and Liouville’s theorem, we conclude that $Y(t, \nu) \equiv 0$. From this and (14) it follows that $h(t) = 0$ a.e. on $(0, \pi)$. Thus, the theorem is proved. \square

5. The q -sampling theory

THEOREM 2. Let $\eta(t, \nu)$ and $\xi(t, \nu)$ be the solutions of (1) selected as above. Then all functions h of the form

$$h(\nu) = \int_0^\pi u(t)\eta(t, \nu)d_q t, \quad u \in L_q^2(0, \pi), \tag{16}$$

can be written as the Lagrange-type sampling expansion:

$$h(\nu) = \sum_{n=0}^\infty h(\nu_n) \frac{W_q(\nu)}{\dot{W}_q(\nu_n)(\nu - \nu_n)},$$

where $W_q(\nu)$ is the q -Wronskian of the functions $\eta(t, \nu)$ and $\xi(t, \nu)$.

Proof. We multiply equation (1) with $\eta(t, \nu_n)$. Then we again consider equation (1), but replace ν by ν_n and multiply this last equation by $\eta(t, \nu)$. Subtracting the two results yields

$$(\nu - \nu_n)\eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n) = D_q^2\eta(q^{-1}t, \nu_n)\eta(t, \nu) - D_q^2\eta(q^{-1}t, \nu)\eta(t, \nu_n).$$

From the rule for the q -differentiation of a product (4), we can write

$$(\nu - \nu_n)\eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n) = D_q [D_q\eta(q^{-1}t, \nu_n)\eta(t, \nu) - D_q\eta(q^{-1}t, \nu)\eta(t, \nu_n)].$$

If we apply a q -integration by means of (5) we obtain

$$\begin{aligned} (\nu - \nu_n) \int_0^\pi \eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n)d_q t &= \\ &= \int_0^\pi D_q [D_q\eta(q^{-1}t, \nu_n)\eta(t, \nu) - D_q\eta(q^{-1}t, \nu)\eta(t, \nu_n)]d_q t = \\ &= D_q\eta(q^{-1}\pi, \nu_n)\eta(\pi, \nu) - D_q\eta(q^{-1}\pi, \nu)\eta(\pi, \nu_n) - \\ &\quad - (D_q\eta(q^{-1}0, \nu_n)\eta(0, \nu) - D_q\eta(q^{-1}0, \nu)\eta(0, \nu_n)). \end{aligned}$$

From conditions (3) and (11) we get the following:

$$\begin{aligned} (\nu - \nu_n) \int_0^\pi \eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n)d_q t &= \\ &= D_q\eta(q^{-1}\pi, \nu_n)\eta(\pi, \nu) - D_q\eta(q^{-1}\pi, \nu)\eta(\pi, \nu_n) = \\ &= \eta(\pi, \nu)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu_n) - \eta(\pi, \nu_n)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu). \end{aligned}$$

From (12), we have the following:

$$(\nu - \nu_n) \int_0^\pi \eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n)d_q x = W_q(\nu)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu_n) - W_q(\nu_n)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu).$$

From ν_n eigenvalues being zeros of the characteristic function $W_q(\nu)$ of the q -analogue of the Sturm–Liouville problem (1)–(3), we obtain $W_q(\nu_n) = 0$. Then, we have

$$(\nu - \nu_n) \int_0^\pi \eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n)d_q t = W_q(\nu)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu_n).$$

As a result,

$$\int_0^\pi \eta(t, \nu)\eta(t, \nu_n)d_qt = \frac{W_q(\nu)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu_n)}{(\nu - \nu_n)},$$

and taking the limit a $\nu \rightarrow \nu_n$ gives

$$\int_0^\pi |\eta(t, \nu_n)|^2d_qt = \dot{W}_q(\nu_n)D_{q^{-1}}\eta(\pi, \nu_n).$$

Therefore, we can apply Kramer’s lemma (see [19]) and write an integral transform of the form (16) as

$$h(\nu) = \sum_{n=0}^\infty h(\nu_n) \frac{W_q(\nu)}{\dot{W}_q(\nu_n)(\nu - \nu_n)}.$$

□

EXAMPLE. Consider the following q -Sturm–Liouville problem:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_qy(t) = \nu y(t), \quad 0 < t < \pi, \quad \nu \in \mathbb{C},$$

together with the discontinuity conditions at a point $a \in (0, \pi)$

$$y(a + 0) = \alpha y(a - 0), \quad D_{q^{-1}}y(a + 0) = \alpha^{-1}D_{q^{-1}}y(a - 0),$$

and boundary conditions

$$y(0) = y(\pi) = 0,$$

where $0 < q < 1$, α is real; $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$. The system of functions $\{\eta_0(t, \nu_n^0)\}_{n=1}^\infty$, where $\nu = \rho^2$

$$\eta_0(t, \nu) = \begin{cases} c \frac{\sin \rho t}{\rho}, & 0 < t \leq a, \\ \alpha^+ \frac{\sin \rho t}{\rho} + \alpha^- \frac{\sin \rho(2a - t)}{\rho}, & a < t \leq \pi, \end{cases}$$

where $\alpha^\pm = \frac{1}{2}(\alpha \pm \frac{1}{\alpha})$, is complete in the space $L_q^2(0, \pi)$.

6. Conclusion

In this paper, a q -analogue of the Sturm–Liouville problem with discontinuity condition on a finite interval is studied. It is shown that the eigenfunctions of this problem are in the form of a complete system. A sampling theorem is proved for integral transforms whose kernels are basic functions and the integral is of Jackson’s type. Finally, it is proved that the q -analogue of the Sturm–Liouville problem with discontinuity conditions is self-adjoint in $L_q^2(0, \pi)$.

In future studies, the main equation for the q -analogue of the Sturm–Liouville problem can be obtained. The Weyl solution and the Weyl function can be defined for the q -analogue of the Sturm–Liouville problem. Uniqueness theorems for the solution of the inverse problem according to the Weyl function and spectral date can be proved.

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Jackson F. H. q -Difference equations, *Am. J. Math.*, 1910, vol. 32, no. 4, pp. 305–314. DOI: <https://doi.org/10.2307/2370183>.
2. Annaby M. H., Mansour Z. S. Fractional q -difference equations, In: *q-Fractional Calculus and Equations*, Lecture Notes in Mathematics, 2056. Berlin, Heidelberg, Springer, 2012, pp. 223–270. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-30898-7_8.
3. Annaby M. H., Mansour Z. S. Basic Sturm–Liouville problems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2005, vol. 38, no. 17, pp. 3775–3797. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/17/005>.
4. Tuna H., Eryilmaz A. Completeness of the system of root functions of q -analogue of Sturm–Liouville operators, *Math. Commun.*, 2014, vol. 19, no. 1, pp. 65–73.
5. Bustoz J., Suslov S. Basic analogues of Fourier series on a q -quadratic grid, *Math. Appl. Anal.*, 1998, vol. 5, no. 1, pp. 1–38. DOI: <https://doi.org/10.4310/MAA.1998.v5.n1.a1>.
6. Annaby M. H. q -Type sampling theorems, *Result. Math.*, 2003, vol. 44, no. 3–4, pp. 214–225. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03322983>.
7. Abreu L. D. A q -sampling theorem related to the q -Hankel transform, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2005, vol. 133, no. 4, pp. 1197–1203. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07589-6>.
8. Ismail M. E., Zayed A. I. A q -analogue of the Whittaker–Shannon–Kotel'nikov sampling theorem, *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, no. 12, pp. 3711–3719. DOI: <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-03-07208-3>.
9. Abreu L. D. Sampling theory associated with q -difference equations of the Sturm–Liouville type, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2005, vol. 38, no. 48, pp. 10311–10319. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/48/005>.
10. Annaby M. H., Mansour Z. S. Asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of q -analogue of Sturm–Liouville problems, *Math. Nachr.*, 2011, vol. 284, no. 4, pp. 443–470. DOI: <https://doi.org/10.1002/mana.200810037>.
11. Allahverdiev B. P., Tuna H. Qualitative spectral analysis of singular q -analogue of Sturm–Liouville operators, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2020, vol. 43, no. 2, pp. 1391–1402. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40840-019-00747-3>.
12. Allahverdiev B. P., Tuna H. Eigenfunction expansion in the singular case for q -analogue of Sturm–Liouville operators, *Casp. J. Math. Sci.*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 91–102. DOI: <https://doi.org/10.22080/CJMS.2018.13943.1339>.
13. Allahverdiev B. P., Tuna H. Limit-point criteria for q -analogue of Sturm–Liouville equations, *Quest. Math.*, 2019, vol. 42, no. 10, pp. 1291–1299. DOI: <https://doi.org/10.2989/16073606.2018.1514541>.
14. Allahverdiev B. P., Tuna H. An expansion theorem for q -analogue of Sturm–Liouville operators on the whole line, *Turk. J. Math.*, 2018, vol. 42, no. 3, pp. 1060–1071. DOI: <https://doi.org/10.3906/mat-1705-22>.
15. Allahverdiev B. P., Tuna H. Properties of the resolvent of singular q -Dirac operators, *Elec. J. Diff. Eq.*, 2020, vol. 2020, no. 3, pp. 1–13.
16. Karahan D., Mamedov Kh. R. On a q -boundary value problem with discontinuity conditions, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 5–12. EDN: EVNNPJ. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmph210401>.
17. Huseynov H. M., Dostuyev F. Z. On determination of Sturm–Liouville operator with discontinuity conditions with respect to spectral data, *Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2016, vol. 42, no. 2, pp. 143–153.

18. Gasper G., Rahman M. *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 35. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1990, xx+287 pp.
19. Kramer H. P. A generalized sampling theory, *J. Math. Phys.*, 1959, vol. 38, pp. 68–72.
20. Yurko V. A. *Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems*. Moscow, Fizmatlit, 2007, 384 pp. (In Russian)
21. Chung K.-S., Chung W.-S., Nam S.-T., Kang H.-J. New q -derivative and q -logarithm, *Int. J. Theor. Phys.*, 1994, vol. 33, no. 10, pp. 2019–2029. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00675167>.
22. Floreanini R., Vinet L. A model for the continuous q -ultraspherical polynomials, *J. Math. Phys.*, 1995, vol. 36, no. 7, pp. 3800–3813. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.530998>.
23. Floreanini R., Vinet L. More on the q -oscillator algebra and q -orthogonal polynomials, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1995, vol. 28, no. 10, pp. L287–293. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/10/002>.
24. Al-Mdallal Q. M. On the numerical solution of fractional Sturm–Liouville problems, *Int. J. Comp. Math.*, 2010, vol. 87, no. 12, pp. 2837–2845. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207160802562549>.
25. Al-Mdallal Q. M. An efficient method for solving fractional Sturm–Liouville problems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, vol. 40, no. 1, pp. 183–189. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.07.041>.

УДК 517.927.21

Об q -аналоге оператора Штурма–Лиувилля с условиями разрыва

Д. Каракан

Университет Харран,
Шанлыурфа, Турция.

Аннотация

Исследуется q -аналог задачи Штурма–Лиувилля с условием разрыва на конечном интервале. Доказано, что q -задача Штурма–Лиувилля с условиями разрыва является самосопряженной в $L_q^2(0, \pi)$. Доказаны теорема о полноте и теорема о выборке. Приводится пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: q -оператор Штурма–Лиувилля, полнота собственных функций, самосопряженный оператор.

Получение: 3 июня 2021 г. / Исправление: 1 сентября 2021 г. /

Принятие: 13 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 27 сентября 2022 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Дифференциальные уравнения и математическая физика
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Karahan D. On a q -analogue of the Sturm–Liouville operator with discontinuity conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 407–418. EDN: ZNKLPD. DOI: 10.14498/vsgtu1934.

Сведения об авторе

Доне Каракан  <https://orcid.org/0000-0001-6644-5596>

кафедра математики, факультет естественных наук и письма;

e-mail: dkarahan@harran.edu.tr



УДК 519.853.53

Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами

Э. Я. Рапопорт

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Предлагается конструктивный метод решения широкого круга задач оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми линейными многомерными уравнениями в частных производных параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход сводится к упорядоченной совокупности специальных процедур последовательной параметризации управляющих воздействий на основе аналитических условий оптимальности; редукции к задаче полубесконечной оптимизации относительно искомого вектора параметров и ее решению разработанным ранее альтернативным методом построения параметризуемых алгоритмов программного управления, который распространяет на исследуемые задачи оптимизации результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использует фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что уравнения оптимальных регуляторов в типичных линейно-квадратичных задачах оптимизации описываются линейными с ограничениями алгоритмами обратной связи по измеряемому состоянию с нестационарными коэффициентами передачи и находятся по известным результатам расчета программных управлений при отсутствии классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества. Полученные результаты распространяются на задачи поиска неизменных во времени пространственных управлений, рассматриваемых в роли искомого оптимальных проектных решений объекта.

Ключевые слова: равномерная метрика, системы с распределенными параметрами, альтернативный метод.

Получение: 17 июля 2022 г. / Исправление: 12 августа 2022 г. /

Принятие: 18 августа 2022 г. / Публикация онлайн: 19 сентября 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Рапопорт Э. Я. Равномерная оптимизация управляемых систем с распределенными параметрами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 419–445. EDN: WJCOQD. DOI: 10.14498/vsgtu1943.

Сведения об авторе

Эдгар Яковлевич Рапопорт  <https://orcid.org/0000-0002-0604-8801>

доктор технических наук, профессор; профессор каф. автоматизации и управления в технических системах; e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

1. Введение

Одной из актуальных проблем в теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами (ОРП) является разработка конструктивных методов решения задач перевода ОРП из заданного начального в требуемое конечное состояние с экстремальным значением заданного функционала качества.

В классической схеме с закрепленными концами траектории движения в бесконечномерном фазовом пространстве ОРП типичные для приложений требования, предъявляемые к пространственным распределениям управляемой величины в конце оптимального процесса, как правило, либо невыполнимы вследствие неуправляемости объекта относительно этих распределений (в том числе по типичной причине их несогласованности с граничными условиями начально-краевой задачи, моделирующей поведение ОРП), либо формально обеспечиваются в классе технически нереализуемых управляющих воздействий [1, 2].

Эффективный способ преодоления отмеченных затруднений состоит в отказе от жесткой фиксации требуемого конечного состояния ОРП уже на стадии постановки задачи оптимального управления (ЗОУ) с последующим переходом к заведомо разрешимой задаче при заданном целевом множестве, которое отвечает достижимым значениям оцениваемых в соответствующей метрике допусков на отклонение от номинальной точки, фиксируемой положением правого конца фазовой траектории в исходной двухточечной схеме [1, 3]. Как правило, в качестве такой оценки чаще всего используется среднеквадратичное отклонение от номинального конечного состояния. Гладкая граница такого целевого множества позволяет получить сравнительно простые алгоритмически точные аналитические решения ЗОУ в рамках линейных моделей ОРП с использованием классических условий трансверсальности [4, 5].

Однако формальные оценки точности попадания в заданное конечное состояние ОРП по величине среднеквадратичной ошибки приближения приводят к недопустимым для целого ряда актуальных прикладных задач локальным отклонениям управляемой величины от заданных значений в пределах пространственной области ее определения и при этом слабо ассоциируются с типичными для приложений требованиями [1, 3, 4]. Эти требования чаще всего формулируются в равномерной метрике в виде заданной максимально допустимой величины ошибки равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины к номинальному состоянию на заданном множестве его пространственных аргументов [1, 3, 4]. Соответствующее целевое множество автоматически исключает локальные «выбросы» ошибок приближения за допустимые пределы. В то же время такое множество допустимых состояний имеет сложную форму в фазовом пространстве ОРП с негладкой границей в конечной точке оптимального процесса [4, 5]. В данном случае уже не удастся использовать условия трансверсальности в их классическом виде и решение ЗОУ ОРП принципиально усложняется как раз применительно к ситуациям, представляющим самостоятельный теоретический интерес и наиболее характерным для приложений.

В работах [1, 3–5] предложен метод решения ЗОУ ОРП в условиях равномерной оценки целевых множеств, базирующийся на предварительной параметризации управляющих воздействий с помощью аналитических условий

оптимальности и последующей редукции к специальной задаче математического программирования — задаче полубесконечной оптимизации, алгоритмически точные решения которой находятся предложенным ранее альтернативным методом, существенно использующим фундаментальные закономерности предметной области.

В настоящей работе полученные в [1, 3–5] результаты обобщаются применительно к более широкому классу задач оптимального программного и позиционного управления объектами с распределенными параметрами, описываемыми пространственно-многомерными уравнениями в частных производных параболического типа.

2. Математические модели управляемых процессов

Пусть управляемая функция состояния $Q(X, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от времени $t \geq 0$ и пространственных координат $X \in V$, $X = (x_i)$, $i = \overline{1, k}$; $1 \leq k \leq 3$, в пределах односвязной области $V \ni X$ с кусочно-гладкой границей S линейным многомерным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{i=1}^k a_i(X) \frac{\partial^2 Q}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^k b_i(X) \frac{\partial Q}{\partial x_i} + C(X)Q + u_V(X, t) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$Q(X, 0) = Q_0(x), \quad X \in \bar{V} = V \cup S; \quad (2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \Gamma} + \alpha Q = u_S(X, t), \quad X \in S, \quad (3)$$

внутренним $u_V(X, t)$ или(и) граничным $u_S(X, t)$ управляющими воздействиями, допустимыми в классе кусочно-непрерывных функций [5]. Здесь Γ — вектор внешней нормали к S ; $\alpha = \text{const} \geq 0$; заданная функция $Q_0(X)$ интегрируема с квадратом в области V и коэффициенты $a_i(X)$, $b_i(X)$, $C(X)$ являются достаточно гладкими функциями своих аргументов, причем не все $a_i(X)$ в (1) одновременно равны нулю.

Общее решение начально-краевой задачи (1)–(3), понимаемое в обобщенном смысле [6, 7], может быть получено в следующем виде [5, 8, 9]:

$$Q(X, t) = \int_0^t \int_V G(X, Y, t - \tau) u_V(X, \tau) dY d\tau + \int_V Q_0(Y) G(X, Y, t) dY + \\ + \int_0^t \int_S G(X, Y, t - \tau) u_S(Y, \tau) dS(Y) d\tau, \quad (4)$$

где функция Грина $G(X, Y, t - \tau)$ рассматриваемого ОРП определяется методом конечных интегральных преобразований [10] в форме ее разложения в сходящейся в среднем ряд по собственным функциям $\Phi_n(X)$, $\Phi_n(Y)$ задачи (1)–(3), вычисляемым с собственными числами M_n^2 известными способами [8, 10]:

$$G(X, Y, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\Phi}_n(X) \hat{\Phi}_n(Y) r(Y) e^{-M_n^2(t-\tau)}, \quad \hat{\Phi}_n(X) = \frac{\Phi_n(X)}{\|\Phi_n\|}. \quad (5)$$

Здесь $\|\Phi_n\|$ — норма Φ_n ; $r(Y)$ — весовая функция конечного интегрального преобразования.

Разложение $Q(X, t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортогональной с весом $r(X)$ системе функций $\Phi_n(X)$ [8–10]

$$Q(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t) \hat{\Phi}_n(X); \quad \bar{Q}_n(t) = \int_V Q(X, t) \hat{\Phi}_n(X) r(X) dX \quad (6)$$

приводит после подстановки (5), (6) в (4) к описанию модели объекта бесконечной системой соотношений для каждой из его модальных переменных (временных мод) $\bar{Q}_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$. Последующее дифференцирование этих соотношений по переменной t позволяет перейти к представлению ОРП (1)–(3) бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\bar{Q}_n(t)$ (модальное описание ОРП) [5, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -M_n^2 \bar{Q}_n + F_n(t); \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_{0n}; \\ F_n(t) &= \bar{u}_{Vn}(t) + F_n^{(1)}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{u}_{Vn}(t) &= \int_V u_V(X, t) \hat{\Phi}_n(X) r(X) dX, \\ F_n^{(1)}(t) &= \int_S u_S(Y, t) \hat{\Phi}_n(Y) r(Y) dS(Y), \end{aligned} \quad (8)$$

а внутреннее управление $u_V(X, t)$ и начальное состояние $Q_0(X)$ восстанавливаются по их модальным составляющим $\bar{u}_{Vn}(t)$, \bar{Q}_{0n} в форме разложения в ряд, подобно (6):

$$u_V(X, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Vn}(t) \hat{\Phi}_n(X), \quad Q_0(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{0n} \hat{\Phi}_n(X). \quad (9)$$

Далее всюду будем рассматривать область \bar{V} в форме параллелепипеда в декартовой системе координат $X = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq x_c; 0 \leq y \leq y_c; 0 \leq z \leq z_c\}$ с одним (для простоты) управлением $u_S(X, t) = u_c(x, y, t)$ на грани $z = z_c$. Случаи с $u(X, t)$ на других гранях или их совместное использование приводят к аналогичным результатам. Тогда поверхностный интеграл в (8) сводится к вычислению обыкновенного двойного интеграла по области $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq x_c; 0 \leq y \leq y_c\}$ и выражение для $F_n^{(1)}(t)$ в (8) принимает следующий вид [5, 9]:

$$F_n^{(1)}(t) = \bar{u}_{Sn}(t) = \int_D u_S(x, y, t) \hat{\Phi}_n^*(x, y) r_1(x, y) dx dy. \quad (10)$$

Здесь $\bar{u}_{Sn}(t)$ — моды граничного управления $u_S(x, y, t)$, определяемые подобно $\bar{u}_{Vn}(t)$ при известных собственных функциях $\hat{\Phi}_n^*(x, y)$ конечного интегрального преобразования $u_S(x, y, t)$, $x, y \in D$, а $u_S(x, y, t)$ определяется по

известным модальным составляющим в форме разложения в ряд вида (9):

$$u_S(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{S_n}(t) \hat{\Phi}_n^*(x, y). \quad (11)$$

В итоге равенство (10) приводит (вместо (7)) к модальному описанию ОРП системой уравнений

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -M_n^2 \bar{Q}_n + \bar{u}_{V_n}(t) + \bar{u}_{S_n}(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}_{0n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Можно показать [11, 12], что при выполнении усиленных условий Коши—Липшица система (12) имеет единственное решение при заданных воздействиях $\bar{u}_{V_n}(t)$, $\bar{u}_{S_n}(t)$, которое с любой требуемой точностью аппроксимируется решением укороченной системы, образуемой достаточно большим конечным числом N^* первых из уравнений (12) при $\bar{Q}_n(t) = 0 \forall n > N^*$. Далее всюду на этом основании учитываются N_1^* мод \bar{Q}_n , $n = \overline{1, N_1^*}$ в (6), (9), (12), где $N_1^* = \infty$ или $N_1^* = N^* < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа.

3. Постановка задачи оптимального управления

Пусть для рассматриваемого ОРП (1)–(3) применительно к его модальному описанию (12) требуется обеспечить за время t^* приближение конечного состояния объекта $Q(X, t^*)$ в форме его разложения в ряд (6) к заданному пространственному распределению управляемой величины $Q^*(X)$ с оцениваемой в равномерной метрике погрешностью $\varepsilon > 0$ согласно соотношению

$$\max_{X \in \bar{V}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t^*) \hat{\Phi}_n(X) - Q^*(X) \right| \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Пусть применительно к рассматриваемому всюду далее случаю канонической формы области V и ее границы S качество управления ОРП характеризуется интегральным функционалом достаточно общего вида [5]:

$$I(\bar{u}_V, \bar{u}_S) = \int_0^{t^*} f_0(\bar{Q}(t), \bar{u}_V(t), \bar{u}_S(t), t) dt \rightarrow \min_{\bar{u}_V, \bar{u}_S}. \quad (14)$$

Здесь f_0 — заданная достаточно гладкая подынтегральная функция своих аргументов; $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t))$, $\bar{u}_V(t) = (\bar{u}_{V_n}(t))$, $\bar{u}_S(t) = (\bar{u}_{S_n}(t))$ — векторы модальных составляющих соответственно управляемой величины, внутреннего и граничного управляющих воздействий, $n = 1, 2, \dots$. При этом $u_V(X, t)$, $u_S(X, t)$ должны быть стеснены ограничениями:

$$u_{\min} \leq u(X, t) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq t \leq t^* \quad (15)$$

с заданными границами диапазона их возможных изменений, где

$$u(X, t) = u_V(X, t), \quad X \in V \quad \text{или} \quad u(X, t) = u_S(X, t), \quad X \in S, \quad (16)$$

и всюду далее для простоты без потери общности основных результатов исключается вариант одновременного использования обоих управлений. В итоге задача сводится к отысканию оптимальных программных управляющих воздействий

$$\begin{aligned} \bar{u}^*(t) &= \bar{u}_V^*(t) \quad \text{или} \quad \bar{u}^*(t) = \bar{u}_S^*(t); \quad \bar{u}(t) = (\bar{u}_n(t)); \\ \bar{u}_n(t) &= \bar{u}_{Vn}(t) \quad \text{или} \quad \bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Sn}(t); \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

и соответствующей $\bar{u}^*(t)$ оптимальной траектории $\bar{Q}_{\text{opt}}(t)$, обеспечивающих выполнение требования (13) к конечному состоянию объекта при минимальном значении функционала качества (14) в условиях ограничений (15), стесняющих поведение $\bar{u}(t)$ при восстановлении $u(X, t)$ по значениям $\bar{u}(t)$ в форме рядов вида (9), (11).

4. Метод параметрической оптимизации управляющих воздействий

Краевая задача принципа максимума. На бесконечномерную задачу оптимального управления (12)–(15) распространяется принцип максимума Понтрягина [1, 13]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}_{\text{opt}}(t), \bar{u}^*(t), \psi_{\text{opt}}(t)) = \max_{\bar{u}} H(\bar{Q}_{\text{opt}}(t), \bar{u}(t), \psi_{\text{opt}}(t)), \quad t \in [0, t^*] \quad (18)$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}_{\text{opt}}(t)$, $\bar{u}^*(t)$, $\psi_{\text{opt}}(t)$ максимума функции Понтрягина

$$H(\bar{Q}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) = -f_0(\bar{Q}, \bar{u}, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) (-M_n^2 \bar{Q}_n + \bar{u}_n(t)) \quad (19)$$

по векторному аргументу $\bar{u}(t)$ совместно с уравнениями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

описывающими вектор $\psi(t) = (\psi_i(t))$ сопряженных переменных, уравнениями (12) модели объекта и ограничениями (15) составляют программно управляемую систему (П-систему) [5, 14], замыкаемую относительно всех неизвестных требованиями (13) к конечному состоянию $Q(X, t^*)$ управляемой величины.

Решение П-системы формально определяет искомые экстремали с точностью до вектора начальных значений сопряженных функций, выступающих, таким образом, в роли естественного параметрического представления искомого управления $\bar{u}^*(t)$ [14–16]. Однако для объектов с распределенными параметрами такой способ параметризации оказывается неконструктивным прежде всего в силу бесконечной размерности этого вектора и известных затруднений, возникающих при решении П-системы [14–16].

Параметризация управляющих воздействий. В работе [17] предложен реализуемый в процессе решения П-системы специальный способ последовательной конечномерной параметризации программных управляющих воздействий (« ψ -параметризация») на множестве N -мерных векторов $\psi^{(N)} = (\psi_i)$,

$i = \overline{1, N}$, $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t^*)$, $N < N_1^* \leq \infty$, конечных значений $\tilde{\psi}_i$ первых N сопряженных функций в (20) при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t^*)$:

$$\psi^{(N)} = (\psi_i(t^*)) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, N}; \quad \psi_i(t^*) = 0 \quad \forall i > N \geq 1. \quad (21)$$

Интегрирование уравнений П-системы в условиях ψ -параметризации (21) позволяет получить конечное состояние управляемой величины, управляющие воздействия и значения критерия оптимальности в форме явных функций $Q(X, \psi^{(N)})$, $\bar{u}(t, \psi^{(N)})$ и $I(\psi^{(N)})$ от своих аргументов, определяя тем самым искомое управление $\bar{u}^*(t, \psi^{(N)})$ с точностью до выбора оптимального вектора параметров $\psi^{(N)} = \psi_*^{(N)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, N}$, к нахождению которого и сводится дальнейшая задача.

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и альтернативный метод ее решения. Минимально достижимые в классе параметризуемых управлений $\bar{u}(t, \psi^{(N)})$ значения $\varepsilon_{\min}^{(N)}$ ошибки ε равномерного приближения $Q(X, t^*)$ к $Q^*(X)$ определяются, согласно (13), соотношением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}^{(N)} &= \min_{\psi^{(N)} \in E^N} \left\{ \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi^{(N)}) - Q^*(X)| \right\} = \\ &= \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi_0^{(N)}) - Q^*(X)|, \\ \psi_0^{(N)} &= \arg \left\{ \min_{\psi^{(N)} \in E^N} \left[\max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi^{(N)}) - Q^*(X)| \right] \right\}, \\ \psi_0^{(N)} &= (\tilde{\psi}_{0i}), \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вектор $\psi_0^{(N)}$ совпадает по определению (21) с вектором $\hat{\psi}^{(N+1)}$ с нулевой компонентой $\tilde{\psi}_{N+1}$:

$$\psi_0^{(N)} = \hat{\psi}^{(N+1)} = (\tilde{\psi}_{0i}, i = \overline{1, N}; \tilde{\psi}_{N+1} = 0).$$

В типичных условиях существования отрицательной производной $\partial L(\hat{\psi}^{(N+1)})/\partial \omega < 0$ функции максимума

$$L(\psi^{(N+1)}) = \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi^{(N+1)}) - Q^*(X)| \quad (23)$$

по некоторому направлению $\omega \in E^{N+1}$ при $\varepsilon_{\min}^{(N)} > \varepsilon_{\inf}$ [3], где ε_{\inf} — точная нижняя грань возможных значений ε в (13), оказывается достижимой точность равномерного приближения в классе управлений $\bar{u}(t, \psi^{(N+1)})$:

$$\varepsilon = \varepsilon' = \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi^{(N+1)}) - Q^*(X)| < \varepsilon_{\min}^{(N)}$$

при некотором векторе $\psi^{(N+1)}$, отличном от $\hat{\psi}^{(N+1)}$.

Последнее неравенство означает, что $\varepsilon_{\min}^{(N+1)} < \varepsilon_{\min}^{(N)}$, если $\varepsilon_{\min}^{(N)} > \varepsilon_{\inf}$.

Отсюда следует, что ошибки минимакса в (22) уменьшаются с возрастанием N , образуя строго убывающую цепочку неравенств

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(\rho)} = \varepsilon_{\inf}, \quad (24)$$

где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^*(X)$ моделей объекта [3, 17]. В случае, когда $\varepsilon < \varepsilon_{\inf}$ в (13), решения рассматриваемой задачи оптимального управления не существует.

Неравенства (24) характеризуют сужающиеся к $Q^*(X)$ с возрастанием j семейства целевых множеств для $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(j)}$ в (13), создавая возможности обеспечения достижимой точности равномерного приближения к $Q^*(X)$ при $\varepsilon > \varepsilon_{\inf}$ в (13) в процессе последовательной ψ -параметризации управляющих воздействий с конечномерным вектором параметров $\psi^{(N)}$, $N < N_1^*$, для ряда возрастающих значений N в (21).

В результате перехода к ψ -параметризованной форме $Q(X, \psi^{(M)})$ и $I(\psi^{(M)})$ представления $Q(X, t^*)$ в (6), (13) и $I(\bar{u})$ в (14) осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [1, 3–5]:

$$I(\psi^{(N)}) \rightarrow \min_{\psi^{(N)}}; \quad \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \psi^{(N)}) - Q^*(X)| \leq \varepsilon \quad (25)$$

на экстремум функции $I(\psi^{(N)})$ конечного числа N переменных $\tilde{\psi}_i$, $i = \overline{1, N}$, в (21) с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (13) для всех $X \in \bar{V}$ и заменяемых в (25) одним ограничением на функцию максимума $L(\psi^{(N)})$ в (23).

Принципиальным преимуществом метода ψ -параметризации по сравнению с выбором в качестве параметрического представления управляющих воздействий вектора начальных значений сопряженных переменных является установленное в [17] однозначное соответствие между размерностью N вектора $\psi^{(N)}$ и местом заданной величины ε в цепочке неравенств (24) для задачи (25) согласно соотношению

$$N = \vartheta \quad \forall \varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(\vartheta)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta-1)}, \quad \vartheta \leq \rho. \quad (26)$$

Поскольку в условиях $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta-1)}$ заведомо $N \geq \vartheta$ по определению величины $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$ в (22), то ψ -параметризуемое управление отличается минимально возможной размерностью вектора параметров $\psi^{(N)}$ для заданного значения ε , устанавливая тем самым структуру оптимальных программных управлений минимальной сложности в условиях (13).

Решение задачи полубесконечной оптимизации (25), (26) относительно вектора параметров $\psi^{(N)}$, а также заранее неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$ в (26) в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$, может быть получено в условиях малостеснительных ограничений альтернативным методом [1, 3, 5]. Метод базируется на специальных альтернативных свойствах искомого решения $\psi_*^{(N)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, N}$, задачи (25), являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и дополнительной информации о конфигурации пространственного распределения результирующего состояния $Q(X, \psi_*^{(N)})$ управляемой величины, диктуемой закономерностями предметной области.

Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величине ε значения функции максимума $L(\psi_*^{(N)})$ в (23) достигаются в некоторых точках $X_j^0 \in \bar{V}$, $j = \overline{1, R}$, общее число которых R (в выполняющихся, как правило, условиях $R \geq 2$) оказывается равным числу всех искомым параметров оптимального процесса, к которым относятся $\tilde{\psi}_i^*$, $i = \overline{1, N}$, а также величина $\varepsilon_{\min}^{(N)}$, если в (26) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N)}$ [2, 3]:

$$R = \begin{cases} N, & \text{если } \varepsilon_{\min}^{(N)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(N-1)}; \\ N + 1, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N)}, \\ R \geq 2. \end{cases} \quad (27)$$

Указанные альтернансные свойства порождают замкнутую относительно всех неизвестных систему соотношений

$$|Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_j^0)| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \quad (28)$$

При известной форме зависимостей $Q(X, \psi_*^{(N)})$ от $X \in \bar{V}$, которая определяется базовыми свойствами конкретных оптимизируемых процессов и позволяет идентифицировать точки X_j^0 , $j = \overline{1, R}$, и знаки предельно допустимых отклонений $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_j^0)$, равенства (28), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(X, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X)$ в точках $X_{jg}^0 \in \text{int } \bar{V}$, $g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leq R$ и $X_{jg}^0 \in \{X_j^0\}$, переводятся в систему уравнений

$$\begin{aligned} Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_j^0) &= \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial X} [Q(X_{jg}^0, \psi_*^{(N)}) - Q^*(X_{jg}^0)] &= 0, \quad g = \overline{1, R_1} \end{aligned} \quad (29)$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке X_j^0 .

Решением системы уравнений (29) стандартными численными методами относительно всех искомым неизвестных, включая значения X_{jg}^0 , $g = \overline{1, R_1}$, завершается процедура определения $\psi_*^{(N)}$ и оптимального программного управления $\bar{u}(t, \psi_*^{(N)})$ в виде явной функции временного аргумента, по которой искомые программные управляющие воздействия $u^*(X, t)$ находятся в форме разложения в ряд вида (9), (11).

Явное выражение для зависимости $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)})$ от всех аргументов в (29) представляется в форме ряда вида (6), где значения модальных переменных $\bar{Q}_n(t^*) = \bar{Q}_n(\psi^{(N)})$ в конце оптимального процесса вычисляются в результате решения П-системы (12), (15), (18)–(20) с параметризованным управлением $\bar{u}(t, \psi^{(N)})$. Если при этом по исходным требованиям $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(\vartheta)}$ в (25) при заданном ϑ , то решение задачи (25) непосредственно сводится к решению системы уравнений (29) при $N = \vartheta$, $R = \vartheta + 1$ согласно (26), (27).

Если в (29) ε задается конкретным числом ε_0 , то на первом этапе требуется решить систему уравнений (29) при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(k)}$ для возрастающего ряда значений $k = 1, 2, \dots, \vartheta_1$, где ϑ_1 находится из условия $\varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1-1)}$. В случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1)}$ исходная задача оказывается уже решенной. В случае

$\varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(\vartheta_1-1)}$ получаем, что $N = \vartheta_1$ согласно правилу (26), и на втором этапе остается решить систему уравнений (29) при известном ε_0 относительно вектора $\psi_*^{(N)}$ с найденной и априори нефиксируемой размерностью $N = \vartheta_1$ при $R = \vartheta_1$ в соответствии с правилом (27).

Описанная базовая технология альтернативного метода решения ЗОУ ОРП широко апробирована на целом ряде задач управления объектами технологической теплофизики [1, 3–5, 17–24].

5. Программное управление в линейно-квадратичных задачах оптимизации

Одной из центральных в теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами является задача оптимизации поведения линейных моделей ОРП по квадратичным критериям качества [1, 25–29]. В данном случае аппарат принципа максимума позволяет непосредственно получить искомые управляющие воздействия в ψ -параметризованном виде и предлагаемая методология решения задачи оптимального программного управления реализуется в аналитической форме алгоритмически точных вычислительных процедур. Пусть эффективность управления объектом (1)–(3) оценивается квадратичным интегральным функционалом, определяемым далее для простоты без потери общности основных результатов в следующем типичном виде:

$$I(u) = \int_0^{t^*} \left[\int_V r(X) (\rho_Q Q^2(X, t) + u_V^2(X, t)) dX + \int_D r_1(x, y) u_S^2(x, y, t) dx dy \right] dt \rightarrow \min_u \quad (30)$$

с постоянным весовым коэффициентом ρ_Q .

Переход к описанию ОРП в терминах модальных переменных в форме системы уравнений (12) приводит в силу разложения в ряды (6), (9), (11) по ортонормированному семейству собственных функций к представлению критерия (30) в следующем, подобном (14), виде в условиях (17):

$$I_1(\bar{u}) = \int_0^{t^*} f_0 dt = \int_0^{t^*} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^2(t) + \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{u}_n^2(t) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \quad \bar{u} = (\bar{u}_n). \quad (31)$$

В соответствии с рассматриваемой постановкой задачи оптимального управления требуется найти управляющее воздействие $\bar{u}^*(t)$ и оптимальную траекторию $\bar{Q}_{opt}(t)$, обеспечивающие перевод объекта (12) за заранее фиксированное время t^* в заданное целевое множество (13) с минимальным значением функционала (31) в условиях ограничений (15).

Условие максимума (18) в задаче оптимизации (12), (13), (15), (31) определяет каждое из искомым автономных управлений $\bar{u}_n^*(t)$ в форме явной функции от соответствующей сопряженной переменной $\psi_n(t)$ независимо от других составляющих $\bar{u}^*(t)$:

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_n \min, \quad \text{если } \frac{1}{2} \psi_n^*(t) < \bar{u}_n \min; \quad (32)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2}\psi_n(t), \quad \text{если } \bar{u}_{n \min} \leq \frac{1}{2}\psi_n^*(t) \leq \bar{u}_{n \max}, \quad n = \overline{1, N_1^*}, \quad (33)$$

$$\bar{u}_n^*(t) = \bar{u}_{n \max}, \quad \text{если } \frac{1}{2}\psi_n^*(t) > \bar{u}_{n \max}, \quad (34)$$

где $\bar{u}_{n \min}$, $\bar{u}_{n \max}$ — ограничения на $\bar{u}_n(t)$, связанные общим для всех $n = \overline{1, N_1^*}$ условием (15), стесняющим распределенное управление $u(X, t)$.

Если в (15), (16) на некотором временном промежутке $u(X, t) = u_V(X, t) \equiv u_{V \max}$ или $u(X, t) = u_S(X, t) \equiv u_{S \max}$, либо $u_V(X, t) \equiv u_{V \min}$, $u_S(X, t) \equiv u_{S \min}$, то отвечающие этим значениям $u(X, t)$ величины $\bar{u}_n(t)$ определяются согласно (8), (10):

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n \max} = \bar{u}_{Vn \max} = u_{V \max} I_{Vn} \quad \text{или} \quad \bar{u}_{n \max} = \bar{u}_{Sn \max} = u_{S \max} I_{Sn}; \\ \bar{u}_{n \min} = \bar{u}_{Vn \min} = u_{V \min} I_{Vn} \quad \text{либо} \quad \bar{u}_{n \min} = \bar{u}_{Sn \min} = u_{S \min} I_{Sn}. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$I_{Vn} = \int_V \widehat{\Phi}_n(X) r(X) dX; \quad I_{Sn} = \int_D \widehat{\Phi}_n^*(x, y) r_1(x, y) dx dy. \quad (36)$$

5.1. Управление в открытой области изменения управляющих воздействий

Ограничимся здесь типичным для линейно-квадратичных задач случаем линейной зависимости $\bar{u}_n^*(t)$ от сопряженной переменной, согласно (33), считая, что ограничения (15) не достигаются на всем протяжении оптимального процесса. Подобный подход позволяет, во-первых, определить минимально достижимое значение критерия оптимальности (31) и, во-вторых, установить по полученным результатам уровни u_{\max} и u_{\min} в (15), необходимые для реализации максимального эффекта по величине I в (31).

Каждое из уравнений (12) после подстановки модального управления $\bar{u}_n^*(t)$ в виде (33) образует совместно с соответствующим уравнением (20) для сопряженной переменной линейную программно-управляемую Π -систему второго порядка относительно двух переменных \bar{Q}_n и ψ_n для каждого $n = \overline{1, N_1^*}$:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = 2\rho_Q \bar{Q}_n + M_n^2 \psi_n, \quad \frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -M_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2}\psi_n, \quad (37)$$

замыкаемую требованиями к ее конечному состоянию, которые считаются заданными исходя из общего для всех $n = \overline{1, N_1^*}$ условия (13).

Решение этой системы представляется в известной векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_n t} \begin{bmatrix} \psi_n(0) \\ \bar{Q}_n(0) \end{bmatrix}, \quad e^{A_n t} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t) & A_{n12}(t) \\ A_{n21}(t) & A_{n22}(t) \end{bmatrix}, \quad (38)$$

где A_n — 2×2 -матрица коэффициентов системы (37); $e^{A_n t}$ — матричная экспонента и A_{nks} , $k, s = 1, 2$, — заданные в соответствии со структурой уравнений (37) элементы блочного представления $e^{A_n t}$.

Перенос (прогонка) начальных условий в (38) в заданный конечный момент времени t^* приводит по приведенной в [22] схеме к следующему выражению для каждой из сопряженных функций $\psi_{\text{нопт}}(t)$ в оптимальном процессе

в зависимости от их конечных значений $\psi_{\text{opt}}(t^*)$ и начального состояния объекта $\bar{Q}_n(0)$:

$$\begin{aligned}\psi_{\text{opt}}(t) &= K_n(t, t^*)\psi_{\text{opt}}(t^*) + K_{1n}(t, t^*)\bar{Q}_n(0), \quad n = \overline{1, N_1^*}; \\ K_n(t, t^*) &= \hat{A}_{n11}(t^* - t) + \hat{A}_{n12}(t^* - t)B_n(t^*); \\ K_{1n}(t, t^*) &= \hat{A}_{n12}(t^* - t)B_{1n}(t^*).\end{aligned}\quad (39)$$

Здесь \hat{A}_{nks} — подобные (38) элементы обратной матрицы $e^{-A_n(t^*-t)}$, и

$$\begin{aligned}B_n(t^*) &= A_{n21}(t^*)A_{n11}^{-1}(t^*); \\ B_{1n}(t^*) &= A_{n22}(t^*) - A_{n21}(t^*)A_{n11}^{-1}(t^*)A_{n12}(t^*).\end{aligned}\quad (40)$$

При определении $\psi_{\text{opt}}(t^*)$ в параметризованной форме (21) будем иметь, согласно (33), (39):

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2}\psi_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_n(t, t^*)\tilde{\psi}_n^* + \frac{1}{2}K_{1n}(t, t^*)\bar{Q}_n(0), & n \leq N; \\ \frac{1}{2}K_{1n}(t, t^*)\bar{Q}_n(0), & n > N, \end{cases}\quad (41)$$

где $\tilde{\psi}_n^*$ — значения $\tilde{\psi}$ в (21), соответствующие оптимальному процессу и $\psi_*^{(N)} = (\tilde{\psi}_n^*)$, $n = \overline{1, N}$.

В итоге получаем ψ -параметризованную форму оптимального пространственно-временного управления, восстанавливаемого по значениям $\bar{u}_n^*(t)$ в (41) в форме его разложения в ряды (9) или (11):

$$u^*(X, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N K_n(t, t^*)\tilde{\psi}_n^* \hat{\Phi}_{1n}(X) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1^*} K_{1n}(t, t^*)\bar{Q}_n(0) \hat{\Phi}_{1n}(X), \quad (42)$$

заданные с точностью до выбора оптимального вектора параметров $\psi_*^{(N)} = (\tilde{\psi}_n^*)$, $i = \overline{1, N}$, к определению которого и сводится последующая задача.

Здесь в (42) $\hat{\Phi}_{1n}(X) = \hat{\Phi}_n(X)$, если $u^*(X, t) = u_V^*(X, t)$ или $\hat{\Phi}_{1n}(X) = \hat{\Phi}_n^*(x, y)$, если $u^*(X, t) = u_s^*(X, t)$, согласно (9), (11), (16), (17).

Последующий переход к задаче полубесконечной оптимизации (25) приводит в силу альтернативных свойств (27) к замкнутой системе равенств (28) относительно оптимальной величины $\psi_*^{(N)}$ вектора $\psi^{(N)}$.

Здесь явное выражение для зависимости $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)})$ от своих аргументов представляется в форме ряда

$$Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n(\psi_*^{(N)}) \hat{\Phi}_{1n}(X_j^0), \quad j = \overline{1, R}, \quad (43)$$

где значения модальных переменных $\bar{Q}_{n\text{opt}}(t^*)$ в конце оптимального процесса находятся, согласно (37), (38), в подобном (39) виде [24]:

$$\bar{Q}_{n\text{opt}}(t^*) = \bar{Q}_n(\psi_*^{(N)}) = B_n(t^*)\psi_{\text{opt}}(t^*) + B_{1n}(t^*)\bar{Q}_n(0), \quad n = 1, N_1, \quad (44)$$

при определении $\psi_{\text{opt}}(t^*)$ в виде (21).

Базовые закономерности конкретной предметной области рассматриваемой ЗОУ ОРП позволяют перевести равенства (28) в систему уравнений вида (29), разрешаемую относительно всех неизвестных параметров оптимального процесса.

Программное управление с минимальным энергопотреблением. Критерий оптимальности (31) при $\rho_Q = 0$ оценивается интегральным функционалом

$$I_2(\bar{u}) = \int_0^{t^*} \left[\sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{u}_n^2(t) \right] dt \rightarrow \min_{\bar{u}}, \quad (45)$$

в типичных ситуациях характеризующим расход энергии на процесс управления [21, 23, 26].

Условие (18) максимума функции Понтрягина определяет в данном случае каждое из модальных управлений $\bar{u}_n^*(t)$ в открытой области его изменения в форме (33).

При этом уравнения для сопряженных переменных в (37) не зависят от временных мод \bar{Q}_n при $\rho_Q = 0$:

$$\frac{d\psi_n}{dt} = M_n^2 \psi_n, \quad n = \overline{1, N_1^*},$$

откуда следует, что $\psi_{\text{opt}}(t)$ и $\bar{u}_n^*(t)$ непосредственно определяется согласно (33), (45), в явной экспоненциальной форме с точностью до конечных значений $\psi(t^*)$:

$$\bar{u}_n^*(t) = \frac{1}{2} \psi_{n \text{ opt}}(t) = \psi_{n \text{ opt}}(t^*) e^{-M_n^2(t^*-t)}, \quad n = \overline{1, N_1^*},$$

в отличие от общего случая $\rho_Q > 0$, требующего решения П-системы (37) для вычисления $\bar{u}_n^*(t)$ в явном виде (41).

При определении $\psi_{n \text{ opt}}(t^*)$ в ψ -параметризованной форме (21) будем иметь вместо (41)

$$\bar{u}_n^*(t) = \tilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t^*-t)}, \quad n = \overline{1, N}; \quad \bar{u}_n^*(t) = 0, \quad n > N$$

с последующим восстановлением $u^*(X, t)$ в виде суммы N членов ряда (9) или (11) вместо (42):

$$u^*(X, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \tilde{\psi}_n^* e^{-M_n^2(t^*-t)} \hat{\Phi}_{1n}(X).$$

Дальнейшее решение задачи программного управления производится по схеме общего случая $\rho_Q > 0$.

5.2. Управление с ограничениями на характер пространственно-временного распределения управляющих воздействий

В прикладных задачах во многих случаях используются частные варианты представления искомым управляющих воздействий $u(X, t)$ в (4), (16), заведомо обеспечивающие их осуществимость стандартными техническими средствами [1, 2, 21, 24].

Редукция к задаче многоканального сосредоточенного управления. Во многих типичных ситуациях $u(X, t)$ в (4), (16) может быть представлена в форме взвешенной суммы заранее фиксируемых проектными решениями объекта и заведомо технически реализуемых (чаще всего кусочно-постоянных) зависимостей $g_m(X)$, $m = \overline{1, s}$; $s \geq 1$ от пространственного аргумента с весовыми коэффициентами, в роли которых выступают искомые сосредоточенные управляющие воздействия $w_m(t)$ [1, 2, 9, 21, 24]:

$$u(X, t) = \sum_{m=1}^s g_m(X)w_m(t), \quad s \geq 1. \quad (46)$$

В данном случае в (12), (17), (19)

$$\bar{u}_n(t) = \sum_{m=1}^s \bar{g}_{mn}w_m(t), \quad n = \overline{1, N_1^*}, \quad (47)$$

где моды \bar{g}_{mn} разложения $g_m(X)$ в ряды вида (9) или (11) находятся согласно (8), (10):

$$\bar{g}_{mn} = \int_V g_m(X)\widehat{\Phi}_n(X)r(X)dX \quad \text{или} \quad \bar{g}_{mn} = \int_D g_m(x, y)\widehat{\Phi}_n^*(x, y)r_1(x, y)dx dy, \quad (48)$$

если $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Vn}(t)$ или $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{sn}(t)$ соответственно.

При этом критерий оптимальности с учетом суммирования эффекта многоканального сосредоточенного управления принимает вместо (31) следующий вид:

$$I_3(w) = \int_0^{t^*} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^2(t) + \sum_{m=1}^s w_m^2(t) \right] dt \rightarrow \min_w; \quad w = (w_m). \quad (49)$$

Рассматриваемая линейно-квадратичная задача программного управления сводится к определению s сосредоточенных управлений $w_m^*(t)$, $m = \overline{1, s}$, в открытой области их определения, переводящих объект управления (12), (47) в требуемое конечное состояние (13) при минимально возможном значении критерия оптимальности (49).

Стандартная процедура принципа максимума определяет по прежней схеме при подстановке $\bar{u}_n(t)$ в уравнения объекта (12) в виде (47) оптимальные программные сосредоточенные управления:

$$w_m^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{g}_{mn}\psi_n(t) = \frac{1}{2} \bar{g}_m\psi(t), \quad \bar{g}_m = (g_{mn}), \quad m = \overline{1, s} \quad (50)$$

теперь уже в форме взвешенной суммы всех N_1^* сопряженных переменных, в отличие от (33). Здесь \bar{g}_m — матрица-строка, $\psi(t)$ — матрица-столбец.

Уравнения (12) с управляющими воздействиями (47), (50) образуют совместно с сопряженной системой (20) краевую задачу принципа максимума

относительно $2N_1^*$ переменных $\bar{Q}_n, \psi_n; n = \overline{1, N_1^*}$, в отличие от (37):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_n}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_n + M_n^2 \psi_n(t), & n = \overline{1, N_1^*}; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -M_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{g}_{mn} \sum_{p=1}^{N_1^*} \bar{g}_{mp} \psi_p(t), & n = \overline{1, N_1^*}, \end{aligned} \quad (51)$$

решение которой относительно $\psi_{\text{opt}}(t)$ определяется по аналогичной (37)–(39) схеме в подобном (39) векторно-матричном виде:

$$\psi_{\text{opt}}(t) = K(t, t^*) \psi_{\text{opt}}(t^*) + K_1(t, t^*) \bar{Q}(0); \quad \bar{Q}(0) = (\bar{Q}_n(0)), \quad n = \overline{1, N_1^*}. \quad (52)$$

Здесь матрицы K и K_1 вычисляются по формулам (39), (40) с заменой всех элементов A_{nks} и \hat{A}_{nks} , $k, s = 1, 2$, на известные, согласно структуре системы уравнений (51); $N_1^* \times N_1^*$ – матрицы A_{ij} и \hat{A}_{ij} , $i, j = 1, 2$, блочного представления матричной экспоненты e^{At} этой системы и обратной матрицы $e^{-A(t^*-t)}$ соответственно [24].

Искомое программное управление (50) находится в ψ -параметризованном виде (21) после подстановки в (50) выражения (52):

$$w_m^*(t) = \frac{1}{2} \bar{g}_m [K(t, t^*) \psi_{\text{opt}}(t^*) + K_1(t, t^*) \bar{Q}(0)], \quad m = \overline{1, s}.$$

Дальнейшее решение задачи производится по общей схеме, описанной в разделах 4, 5.1.

В отличие от случая автономного модального управления зависимость $Q(X, \psi_*^{(N)})$ в системах уравнений альтернативного метода определяется в форме (43) с заменой по координатного представления $\bar{Q}_n(t^*)$ в (44) векторным равенством [24]:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\psi_*^{(N)}) &= B(t^*) \psi_{\text{opt}}(t^*) + B_1(t^*) \bar{Q}(0); \\ B(t^*) &= A_{21}(t^*) A_{11}^{-1}(t^*); \\ B_1(t^*) &= A_{22}(t^*) - A_{21}(t^*) A_{11}^{-1}(t^*) A_{12}(t^*), \end{aligned} \quad (53)$$

где $\psi_{\text{opt}}(t^*)$ определяется в соответствии с (21) и, согласно (6),

$$Q(X, \psi_*^{(N)}) = \Lambda \bar{Q}(\psi_*^{(N)}), \quad \Lambda = [\hat{\Phi}_n(X)], \quad n = \overline{1, N_1^*}.$$

Если можно ограничиться учетом только $N^* = N \bmod \bar{Q}_n$ при $n = \overline{1, \bar{N}}$ и если возможен выбор $s = N$ в (46), то равенства (47) при $n = \overline{1, \bar{N}}$, $N = s$ образуют линейную систему уравнений относительно $w_m^*(t)$, $m = \overline{1, s}$, для заданных значений $\bar{u}_n^*(t)$ в (41), решение которой определяется формулами Крамера непосредственно по решению задачи с автономными модальными управлениями:

$$w_m^*(t) = \sum_{n=1}^s \frac{D_{mn}^*}{D^*} \bar{u}_n^*(t), \quad m = \overline{1, s},$$

где $D^* = \det[\bar{g}_{mn}]$, $m, n = \overline{1, s}$; D_{mn}^* – алгебраическое дополнение n -го элемента m -го столбца D^* , и $D^* \neq 0$ при линейно независимых функциях $g_m(X)$.

Оптимизация проектных решений. В частном варианте $s = 1$ в (46)

$$u(X, t) = g(t)w(X)$$

с заданной функцией $g(t)$ и неизменяемым во времени пространственным управляющим воздействием $w(X)$, в роли которого рассматриваются искомые проектные решения объекта, следует принять вместо (47)

$$\bar{u}_n(t) = g(t)\bar{w}_n. \quad (54)$$

Здесь \bar{w}_n — определяемые аналогично (48) постоянные во времени моды управления $w(X)$, восстанавливаемого по значениям \bar{w}_n , подобно (9), (11):

$$w(X) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{w}_n \hat{\Phi}_n(X) \quad \text{или} \quad w(X) = w(x, y) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{w}_n \hat{\Phi}_n^*(x, y); \quad (55)$$

$$\bar{w}_n = \int_V w(X) \hat{\Phi}_n(X) r(X) dX \quad \text{или} \quad \bar{w}_n = \int_D w(x, y) \hat{\Phi}_n^*(x, y) r_1(x, y) dx dy,$$

если $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Vn}(t)$ или $\bar{u}_n(t) = \bar{u}_{Sn}(t)$ соответственно. Величины \bar{w}_n в (55) следует рассматривать в качестве искомых автономных модальных управлений. Критерий оптимизации принимает в данном случае вместо (49) следующий вид:

$$I_4(\bar{w}) = \int_0^{t^*} \rho_Q \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^2(t) dt + \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{w}_n^2 \rightarrow \min_{\bar{w}}, \quad \bar{w} = (\bar{w}_n), \quad n = \overline{1, N_1^*}. \quad (56)$$

В итоге задача сводится к определению оптимального значения \bar{w} и соответствующего ему, согласно (55), оптимального проектного решения $w^*(X)$, обеспечивающих перевод объекта управления (12) в требуемое конечное состояние (13) при минимальной величине критерия оптимальности (56).

Здесь вектор \bar{w} уже представляет собой неизменное во времени параметрическое представление пространственного управления $w(X)$.

Действительно, для одинаковых конечных значений $\bar{u}_n(t^*)$ в (33) и (54) получаем равенство

$$\bar{w}_n = \frac{1}{2g(t^*)} \psi_n(t^*), \quad g(t^*) \neq 0, \quad n = \overline{1, N_1^*}. \quad (57)$$

Последующее представление \bar{w} по правилу (21) на основании (57) приводит к описанию $w(X)$ в форме укороченной суммы N первых слагаемых в (55):

$$w(X) = \sum_{n=1}^N \tilde{w}_n \hat{\Phi}_n(X) \quad \text{или} \quad w(X) = w(x, y) = \sum_{n=1}^N \tilde{w}_n \hat{\Phi}_n^*(x, y), \quad (58)$$

являющейся параметризуемым на конечномерном подмножестве векторов $\bar{w}^{(N)} = (\tilde{w}_n)$, $n = \overline{1, N}$, распределенным управлением, где, аналогично (21),

$$\bar{w}_n = \tilde{w}_n, \quad n = \overline{1, N}; \quad \bar{w}_n = 0, \quad n > N. \quad (59)$$

В таком случае рассматриваемая задача оптимального управления непосредственно редуцируется к задаче полубесконечной оптимизации вида (25):

$$I(\bar{w}^{(N)}) \rightarrow \min_{\bar{w}^{(N)}}, \quad \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \bar{w}^{(N)}) - Q^*(X)| \leq \varepsilon \quad (60)$$

относительно $\bar{w}^{(N)}$. Здесь размерность N вектора $\bar{w}^{(N)}$ определяется по правилу (26), где, подобно (22),

$$\varepsilon_{\min}^{(N)} = \min_{\bar{w}^{(N)}} \left\{ \max_{X \in \bar{V}} |Q(X, \bar{w}^{(N)}) - Q^*(X)| \right\}.$$

Явная форма зависимости $Q(X, \bar{w}^{(N)})$ от своих аргументов в (60) определяется в форме ряда (6) при значениях $\bar{Q}_n(t^*)$, которые находятся интегрированием уравнений объекта (12) в условиях (54), (59):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(t^*) &= \bar{Q}_{0n} e^{-M_n^2 t^*} + d_n(t^*) \bar{w}_n; & \bar{w}_n &= \bar{w}_n, \quad n = \overline{1, N}; \\ \bar{w}_n &= 0, \quad n = \overline{N+1, N_1^*}; & d_n(t^*) &= \int_0^{t^*} g(t) e^{-M_n^2(t^*-t)} dt. \end{aligned}$$

Решение ЗПО (60) по схеме альтернансного метода с последующей подстановкой результатов в (58) определяет искомую зависимость $w^*(X)$.

5.3. Управление в замкнутой области изменения управляющих воздействий

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу оптимизации (12), (13), (31) с модальными управляющими воздействиями $\bar{u}(t)$ при ограничениях (15) на управления (16), представляемые в форме (9), (11). Структуре алгоритма (32)–(34) в общем случае соответствуют многочисленные варианты чередования на протяжении процесса управления участков вида (33) и интервалов постоянства управляющих воздействий на предельно допустимых уровнях. Каждому из таких вариантов отвечает конкретный вид явной зависимости оптимальной программы $\bar{u}_{1n}^*(t)$ от временной переменной, для которого становится возможным дальнейший анализ. Ограничимся далее, подобно [21], наиболее характерной для приложений ситуацией с выходом на ограничения только на начальной и конечной стадиях оптимизируемого процесса, для которого алгоритм (32)–(34) принимает следующую конкретизированную форму:

$$\bar{u}_{1n}^*(t) = \begin{cases} \bar{u}_n^*(t), & t \in [0, t_1], \quad t_1 \geq 0; \\ \bar{u}_{n \max}, & t \in [t_1, t_2]; \\ \bar{u}_n^*(t), & t \in [t_2, t_3]; \\ \bar{u}_{n \min}, & t \in [t_3, t^*]. \end{cases} \quad (61)$$

Здесь $\bar{u}_n^*(t)$ представляется в ψ -параметризованном виде (41); $\bar{u}_{n \max}$, $\bar{u}_{n \min}$ находятся согласно соотношениям (35), (36) и моменты $t_1 < t_2 < t_3$ выхода и схода с ограничений в (61) фиксируются равенствами

$$\begin{aligned} u_{1n}^*(t_i) &= \bar{u}_n^*(t_i) = \bar{u}_{n \max}, \quad i = 1, 2; \\ u_{1n}^*(t_3) &= \bar{u}_n^*(t_3) = \bar{u}_{n \min}. \end{aligned} \quad (62)$$

Далее задача программного управления решается по предлагаемой схеме альтернансного метода с переходом к задаче полубесконечной оптимизации (25), решение которой в силу альтернансных свойств (27) приводит к замкнутой относительно $\psi_*^{(N)}$ системе уравнений (29), где зависимости $Q(X_j^0, \psi_*^{(N)})$ опять представляются разложением в ряд вида (43):

$$Q(X_j^0, \psi_*^{(N)}) = \sum_{n=1}^{N_1^*} \bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)}) \Phi_{1n}(X_j^0), \quad j = \overline{1, R}.$$

Здесь, в отличие от (44), $\bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)})$ не совпадают с $\bar{Q}_n(\psi_*^{(N)})$ и находятся путем интегрирования уравнений объекта (12) с ψ -параметризованным управлением (61):

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)}) &= \bar{Q}_{on} e^{-M_n^2 t^*} + \int_0^{t_1} e^{-M_n^2(t^*-\tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\bar{u}_n \max}{M_n^2} (e^{-M_n^2(t^*-t_2)} - e^{-M_n^2(t^*-t_1)}) + \int_{t_2}^{t_3} e^{-M_n^2(t^*-\tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\bar{u}_n \min}{M_n^2} (1 - e^{-M_n^2(t^*-t_3)}), \quad n = \overline{1, N_1^*}. \end{aligned} \quad (63)$$

Соотношения (63) совместно с равенствами (62) полностью определяют зависимости $\bar{Q}_n^{(1)}(\psi_*^{(N)})$ при подстановке в (63) $\bar{u}_n^*(t)$ в форме (41).

В соответствии с соотношениями (35), (36) искомое программное управление $u_1^*(X, t)$, представляемое его разложением в ряд вида (9) или (11), находится в форме, подобной (61), в условиях ограничений (15):

$$u_1^*(X, t) = \begin{cases} u^*(X, t), & t \in [0, t_1], \quad t_1 \geq 0; \\ u_{\max}, & t \in [t_1, t_2]; \\ u^*(X, t), & t \in [t_2, t_3]; \\ u_{\min}, & t \in [t_3, t^*], \end{cases} \quad (64)$$

где $u^*(X, t)$ описывается выражением (42).

6. Синтез оптимального управления в линейно-квадратичных задачах оптимизации

Начиная с основополагающих работ А. М. Летова [30, 31] классическая проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в линейно-квадратичных задачах оптимизации остается одной из центральных в теории и технике автоматического управления, отличаясь при этом принципиальной спецификой применительно к бесконечномерным объектам с распределенными параметрами [1, 27, 29, 31]. Основные результаты решения проблемы АКОР ОРП получены применительно к задачам со свободным или подвижным правым концом траектории движения объекта с использованием классических условий трансверсальности на гладкой границе области допустимых конечных состояний управляемой системы.

Однако эти условия неприменимы на негладкой границе целевого множества, оцениваемого в чебышевской метрике, согласно (13) [4, 5, 22]. В целях

опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы опирающиеся на ее альтернансные свойства (26)–(28) результаты расчета программных управлений альтернансным методом.

6.1. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в открытой области изменения управляющих воздействий

Синтез оптимального регулятора с модальными управлениями. Перенос граничных условий при $t = t^*$ в произвольный момент времени $t \in [0, t^*]$ определяет в краевой задаче (37) следующие зависимости конечных значений сопряженных переменных $\psi_{n \text{opt}}(t^*)$ и временных мод $\bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*)$ от их текущих значений в оптимальном процессе $(\bar{Q}_{n \text{opt}}(t), \psi_{n \text{opt}}(t))$ для всех $n = \overline{1, N_1^*}$ [24]:

$$\psi_{n \text{opt}}(t^*) = A_{n11}(t^* - t)\psi_{n \text{opt}}(t) + A_{n12}(t^* - t)\bar{Q}_{n \text{opt}}(t); \quad (65)$$

$$\bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*) = A_{n21}(t^* - t)\psi_{n \text{opt}}(t) + A_{n22}(t^* - t)\bar{Q}_{n \text{opt}}(t), \quad (66)$$

где A_{nks} , $k, s = 1, 2$, — элементы 2×2 -матрицы (38).

После умножения равенств (65), (66) соответственно на известные, согласно результатам расчета программного управления, значения $\bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*) = \bar{Q}_n(\psi_*^{(N)})$ и $\psi_{n \text{opt}}(t^*)$ в (21), (44) левые части соотношений (65), (66) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \psi_{n \text{opt}}(t, \psi_{n \text{opt}}(t^*), \bar{Q}_n(0), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t)) &= \\ &= T_{n1}(t, t^*, \psi_{n \text{opt}}(t^*), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*)) \times \\ &\quad \times T_{n2}(t, t^*, \psi_{n \text{opt}}(t^*), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*))\bar{Q}_{n \text{opt}}(t), \quad n = \overline{1, N_1^*}; \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} T_{n1} &= [\bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*)A_{n11}(t^* - t) - \psi_{n \text{opt}}(t^*)A_{n21}(t^* - t)]^{-1}; \\ T_{n2} &= \psi_{n \text{opt}}(t^*)A_{n22}(t^* - t) - \bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*)A_{n12}(t^* - t), \end{aligned} \quad (68)$$

однозначным образом определяющему зависимость $\psi_{n \text{opt}}(t, \psi_{n \text{opt}}(t^*), \bar{Q}_n(0), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t))$ от своих аргументов. Здесь зависимость $\psi_{n \text{opt}}(t)$ от $\bar{Q}_n(0)$ в (67) характеризуется представлением $\bar{Q}_{n \text{opt}}(t^*)$ в виде (44).

Подстановка (67) в выражение (33) для автономного модального управления в открытой области его определения приводит к линейному закону синтеза оптимального пространственно-временного управления в форме (9) или (11) с нестационарными коэффициентами обратных связей по измеряемому состоянию $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t))$, $n = \overline{1, N_1^*}$:

$$u^*(\bar{Q}(t), X, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1^*} T_{n1}T_{n2}\bar{Q}_n(t)\hat{\Phi}_{1n}(X). \quad (69)$$

Здесь $\hat{\Phi}_{1n}(X)$ определяется так же, как в (42).

Значения T_{n1} и T_{n2} представляются в (69), согласно (68), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления величинами $\bar{Q}_n(0)$ в (44), которые находятся по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в момент $t = 0$.

Переход в (69) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(X_u, t) = (Q(X_{uj}, t))$, $j = \overline{1, r}$, в r точках $X_{uj} \in S$ соответственно при $u(X, t) = u_V(X, t)$ или $u(X, t) = u_S(X, t)$ в (16) определяется, согласно (6), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q_u(X_u, t) = \Lambda_u \bar{Q}(t); \quad \Lambda_u = [\hat{\Phi}_n(X_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1^*}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (70)$$

В условиях $r < N_1^*$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q_u(X_u, t)$ требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [2].

Если в соответствии с требуемой точностью моделирования объекта можно ограничиться учетом только N первых составляющих $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(t))$, $n = \overline{1, N}$, с минимальным их числом $N < N_1^*$, необходимым для решения системы уравнений (29) относительно $\psi_*^{(N)}$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением уравнения (70) относительно $\bar{Q}(t)$ при $N_1^* = N^* = N = r$:

$$\bar{Q}(t) = \Lambda_u^{-1} Q_u(X_u, t). \quad (71)$$

Подстановка (71) в (69) приводит к линейному алгоритму синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$\begin{aligned} u^*(Q_u, X, t) &= \frac{1}{2} \Lambda_u^{-1} Q_u(X_u, t) \Phi(X, t); \\ \Phi(X, t) &= (T_{n1} T_{n2} \hat{\Phi}_{1n}(X)), \quad n = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (72)$$

где $\Lambda_u^{-1} Q_u(X_u, t)$ — матрица-строка; $\Phi(X, t)$ — матрица-столбец.

Синтез оптимального регулятора с многоканальным сосредоточенным управлением. В случае (46) возникает задача АКОР для сосредоточенных управлений $w_m(t)$, $m = \overline{1, s}$, $s \geq 1$.

Обобщение зависимостей (65)–(68) на этот случай приводит по схеме [24] к соответствующим векторно-матричным равенствам, базирующимся на описании оптимального процесса решениями краевой задачи (51):

$$\psi_{\text{opt}}(t^*) = A_{11}(t^* - t) \psi_{\text{opt}}(t) + A_{12}(t^* - t) \bar{Q}_{\text{opt}}(t); \quad (73)$$

$$\bar{Q}_{\text{opt}}(t^*) = A_{21}(t^* - t) \psi_{\text{opt}}(t) + A_{22}(t^* - t) \bar{Q}_{\text{opt}}(t), \quad (74)$$

где A_{ij} , $i, j = 1, 2$, — $N_1^* \times N_1^*$ -матрицы блочного представления матричной экспоненты системы уравнений (51) в форме, подобной (38).

Умножение слева равенств (73) и (74) соответственно на известные по решению задачи многоканального программного управления $N_1^* \times N_1^*$ -матрицы $\text{diag}[\bar{Q}_{j\text{opt}}(t^*)]$, $\bar{Q}_{\text{opt}}(t^*) = (Q_{j\text{opt}}(t^*))$, $j = \overline{1, N_1^*}$, и $\text{diag}[\psi_{j\text{opt}}(t^*)]$, $\psi_{\text{opt}}(t^*) = (\psi_{j\text{opt}}(t^*))$, $j = \overline{1, N_1^*}$, и последующее вычитание результатов приводит к векторному соотношению

$$\begin{aligned} \psi_{\text{opt}}(t, \psi_{\text{opt}}(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}_{\text{opt}}(t)) &= \\ &= T_1(t, t^*, \psi_{\text{opt}}(t^*), \bar{Q}_{\text{opt}}(t^*)) \cdot T_2(t, t^*, \psi_{\text{opt}}(t^*), \bar{Q}_{\text{opt}}(t^*)) \cdot \bar{Q}_{\text{opt}}(t), \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$T_1 = [W_1 A_{11}(t^* - t) - W_2 A_{21}(t^* - t)];$$

$$T_2 = W_2 A_{22}(t^* - t) - W_1 A_{12}(t^* - t);$$

$$W_1 = \text{diag}[\bar{Q}_{j \text{ opt}}(t^*)], \quad W_2 = \text{diag}[\psi_{j \text{ opt}}(t^*)], \quad j = \overline{1, N_1^*},$$

и, согласно (53),

$$\bar{Q}_{j \text{ opt}}(t^*) = (B(t^*)\psi_{\text{opt}}(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0))_j, \quad j = \overline{1, N_1^*}.$$

Подстановка (75) в (50) определяет линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм синтеза для сосредоточенных управлений с обратными связями по $\bar{Q}(t)$:

$$w_m^*(\bar{Q}(t), t) = \frac{1}{2}\bar{g}_m\psi_{\text{opt}}(t) = \frac{1}{2}\bar{g}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t), \quad m = \overline{1, s},$$

и уравнение оптимального регулятора для пространственно-временного управляющего воздействия в (46)

$$u^*(\bar{Q}, X, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{g}_m T_1 T_2 \bar{Q}(t) g_m(X). \quad (76)$$

В условиях $N_1^* = N^* = N = r$ в (70) вектор $\bar{Q}_{\text{opt}}(t)$ в (76) определяется непосредственно по измеряемому выходу объекта, согласно (71). После подстановки (71) в (76) получаем оптимальное управление с линейной обратной связью по наблюдаемым величинам:

$$u^*(Q_u, X, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \bar{g}_m T_1 T_2 \Lambda_u^{-1} \bar{Q}_u(X_u, t) g_m(X). \quad (77)$$

Здесь в (77), аналогично (69), матрицы T_1, T_2 вычисляются с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями $\bar{Q}(0)$, которые находятся по измерениям начального состояния объекта.

6.2. Синтез в замкнутой области изменения управляющих воздействий

Решение краевой задачи (37) на интервалах $[0, t_1] \ni t, [t_2, t_3] \ni t$ в (61), (64) с управлением $\bar{u}_n^*(t)$ в (41) находится в форме, подобной (38):

$$\begin{bmatrix} \psi_n(t) \\ \bar{Q}_n(t) \end{bmatrix} = e^{A_n(t-t_{j-1})} \begin{bmatrix} \psi_n(t_{j-1}) \\ \bar{Q}_n(t_{j-1}) \end{bmatrix};$$

$$e^{A_n(t-t_{j-1})} = \begin{bmatrix} A_{n11}(t-t_{j-1}) & A_{n12}(t-t_{j-1}) \\ A_{n21}(t-t_{j-1}) & A_{n22}(t-t_{j-1}) \end{bmatrix}, \quad (78)$$

$$t_{j-1} \leq t \leq t_j; \quad j = 1, 3; \quad t_0 = 0.$$

Путем переноса граничных условий при $t = t_j$ в произвольный момент времени $t \in [t_{j-1}, t_j]$ это решение может быть представлено в виде, аналогичном (65), (66) в условиях (78):

$$\psi_{n \text{ opt}}(t_j) = A_{n11}(t_j - t)\psi_{n \text{ opt}}(t) + A_{n12}(t_j - t)\bar{Q}_{n \text{ opt}}(t); \quad (79)$$

$$\bar{Q}_{n \text{ opt}}(t_j) = A_{n21}(t_j - t)\psi_{n \text{ opt}}(t) + A_{n22}(t_j - t)\bar{Q}_{n \text{ opt}}(t). \quad (80)$$

Здесь предварительный расчет программного управления определяет $\psi_{n \text{opt}}(t_j)$ и t_j по выражениям (39), (62), а $\bar{Q}_{n \text{opt}}(t_j)$ находятся по формулам вида (63):

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{n \text{opt}}(t_1) &= \bar{Q}_n(0)e^{-M_n^2 t_1} + \int_0^{t_1} e^{-M_n^2(t_1-\tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau; \\ \bar{Q}_{n \text{opt}}(t_3) &= \bar{Q}_n(0)e^{-M_n^2 t_3} + \int_0^{t_1} e^{-M_n^2(t_3-\tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\bar{u}_n \max}{M_n^2} (e^{-M_n^2(t_3-t_2)} - e^{-M_n^2(t_3-t_1)}) + \int_{t_2}^{t_3} e^{-M_n^2(t_3-\tau)} \bar{u}_n^*(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

По предполагаемому способу синтеза оптимальных регуляторов в задаче с неограничиваемыми модальными управлениями равенства (79), (80) приводят к аналогичным (67), (68) базовым соотношениям для зависимости сопряженных переменных $\psi_{n \text{opt}}(t)$ от модальных составляющих управляемой величины на рассматриваемых временных интервалах оптимального процесса:

$$\begin{aligned}\psi_{n \text{opt}}(t, \psi_{n \text{opt}}(t_j), \bar{Q}_n(0), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t)) &= \\ &= T_{n1j}(t, t_j, \psi_{n \text{opt}}(t_j), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t_j)) \times \\ &\times T_{n2j}(t, t_j, \psi_{n \text{opt}}(t_j), \bar{Q}_{n \text{opt}}(t_j)) \cdot \bar{Q}_{n \text{opt}}(t), \quad n = \overline{1, N_1^*}; \quad (81) \\ &t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, 3; \quad t_0 = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{n1j} &= [\bar{Q}_{n \text{opt}}(t_j) A_{n11}(t_j - t) - \psi_{n \text{opt}}(t_j) A_{n21}(t_j - t)]^{-1}; \\ T_{n2j} &= \psi_{n \text{opt}}(t_j) A_{n22}(t_j - t) - \bar{Q}_{n \text{opt}}(t_j) A_{n12}(t_j - t).\end{aligned}$$

Подстановка (81) в выражение (33) определяет, подобно (69), линейный закон синтеза оптимального регулятора на указанных стадиях процесса управления:

$$\begin{aligned}u_j^*(\bar{Q}(t), X, t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1^*} T_{n1j} T_{n2j} \bar{Q}_n(t) \hat{\Phi}_{1n}(X), \quad (82) \\ &t_{j-1} \leq t \leq t_j; \quad j = 1, 3; \quad t_0 = 0.\end{aligned}$$

Точное решение задачи синтеза для ограниченного программного управления (64) связано с серьезными затруднениями [31]. В то же время в большинстве случаев с приемлемой в приложениях точностью такой алгоритм $\tilde{u}^*(\bar{Q}, t)$ может быть построен дополнением уравнения регулятора (82) характеристикой усилительного звена с ограничениями [30, 31]:

$$\tilde{u}^*(\bar{Q}, X, t) = \begin{cases} u_{\max}, & u_j^*(\bar{Q}, X, t) > u_{\max}; \\ u_j^*(\bar{Q}, X, t), & u_{\min} \leq u_j^*(\bar{Q}, X, t) \leq u_{\max}; \\ u_{\min}, & u_j^*(\bar{Q}, X, t) < u_{\min}. \end{cases} \quad (83)$$

Аналогично (70)–(72) может быть осуществлен переход от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(X_u, t)$, который приводит при $N_1^* = N^* = N = r$ в (70) к уравнению регулятора вида (72) вместо (82):

$$\begin{aligned}u_j^*(Q_u, X, t) &= \frac{1}{2} \Lambda_u^{-1} Q_u(X_u, t) \Phi_j(X, t); \\ \Phi_j(X, t) &= (T_{n1j} T_{n2j} \hat{\Phi}_{1n}(X)), \quad n = \overline{1, N},\end{aligned}$$

с последующей заменой $u_j^*(\bar{Q}, X, t)$ на $u_j^*(Q_u, X, t)$ в алгоритме (83).

Ряд представляющих самостоятельный интерес решений задач синтеза оптимального управления предлагаемым методом в области технологической теплофизики приведен в [22–24].

7. Заключение

В статье разработан алгоритмически точный метод решения параметризуемых задач оптимального управления многомерными системами с распределенными параметрами параболического типа при оценках целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах конечной точки оптимального процесса, позволяющих идентифицировать ее координаты в процессе поиска программных управляющих воздействий.

Предлагаемый подход к решению задачи синтеза оптимальных регуляторов сводится к замене классических условий трансверсальности на негладкой границе целевого множества найденными при определении программных управлений оптимальными конечными значениями сопряженных переменных и модальных составляющих управляемой величины.

Вычислительные алгоритмы конкретизированы применительно к типовым линейно-квадратичным задачам оптимизации.

Разработанная технология может быть использована для решения широкого круга прикладных задач оптимального управления техническими системами с распределенными параметрами.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–29–00180, Самарский государственный технический университет.

Библиографический список

1. Рапопорт Э. Я. *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами*. М.: Высш. шк., 2009. 677 с. EDN: QMTFRZ.
2. Рапопорт Э. Я. *Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами*. М.: Высш. шк., 2005. 292 с. EDN: QMOYRB.
3. Рапопорт Э. Я. *Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации*. М.: Наука, 2000. 336 с. EDN: TTRVMB.
4. Рапопорт Э. Я. *Оптимизация процессов индукционного нагрева металла*. М.: Металлургия, 1993. 279 с.
5. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами*. М.: Наука, 2021. 286 с. EDN: QADDYA.
6. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1981. 512 с.
7. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973. 407 с.
8. Полянин А. Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики*. М.: Физматлит, 2001. 576 с. EDN: MVANPN.
9. Рапопорт Э. Я. Программная управляемость линейных многомерных систем с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2015. №2. С. 22–39. EDN: TLOQQN. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0002338815020110>.

10. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
11. Валеев Г. К., Жаутыков О. А. *Бесконечные системы дифференциальных уравнений*. Алма-Ата: Наука, 1974. 415 с.
12. Коваль В. А. *Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем*. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1997. 192 с.
13. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // *Матем. сб.*, 1964. Т. 64(106), № 1. С. 79–101.
14. Федоренко Р. П. *Приближенное решение задач оптимального управления*. М.: Наука, 1978. 488 с.
15. Моисеев Н. Н. *Элементы теории оптимальных систем*. М.: Наука, 1975. 526 с.
16. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации*. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
17. Плешивцева Ю. Э., Рапорт Э. Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2009. № 3. С. 22–33. EDN: [KFPCXJ](#).
18. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. Boca Raton: CRC Press, 2007. 349 pp. EDN: [UIEQHJ](#). DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420019490>.
19. Рапорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. *Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева*. М.: Наука, 2012. 309 с. EDN: [QNDGWJ](#).
20. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal control of induction heating of metals prior to warm and hot forming / *Induction Heating and Heat Treatment*. vol. 4C / AMS Handbook, 2014. pp. 366–401. DOI: <https://doi.org/10.31399/asm.hb.v04c.a0005893>.
21. Плешивцева Ю. Э., Рапорт Э. Я. Программное управление с минимальным энергопотреблением в системах с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2020. № 4. С. 42–57. EDN: [KSXGKJ](#). DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002338820030129>.
22. Рапорт Э. Я. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов в линейно-квадратичных задачах управления системами с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2021. № 3. С. 23–38. EDN: [NXVBOH](#). DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002338821030148>.
23. Рапорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределенными параметрами // *Автометрия*, 2021. Т. 57, № 4. С. 17–28. EDN: [IVNYND](#). DOI: <https://doi.org/10.15372/AUT20210403>.
24. Плешивцева Ю. Э., Рапорт Э. Я. Пространственно-временное управление системами с распределенными параметрами в линейно-квадратичных задачах оптимизации с равномерными оценками целевых множеств // *Изв. РАН. Теор. сист. управл.*, 2022. № 4. С. 49–65. EDN: [ENOBZI](#). DOI: <https://doi.org/10.31857/S0002338822030118>.
25. Бутковский А. Г. *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*. М.: Наука, 1965. 474 с.
26. Егоров А. И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. М.: Наука, 1978. 500 с.
27. Сиразетдинов Т. К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами*. М.: Наука, 1977. 480 с.
28. Ray W. H. *Advanced Process Control*. New York: McGraw-Hill, 1981. xiii+376 pp.
29. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. *Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами*. М.: Машиностроение, 1986. 214 с.
30. Летов А. М. *Математическая теория процессов управления*. М.: Наука, 1981. 255 с.
31. Летов А. М. *Динамика полета и управления*. М.: Наука, 1969. 360 с.

MSC: 90C47, 65K10

Uniform optimization of controlled systems with distributed parameters

E. Ya. Rapoport

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

A constructive method is proposed for solving a spatiotemporal control problem in systems with distributed parabolic parameters under the conditions of the given accuracy of uniform approximation of the final state of a plant to the required spatial distribution of the controlled variable. The developed approach is based on the previously designed alternance method for constructing the parameterizable programmed control algorithms, which extended the results of the theory of nonlinear Chebyshev approximations to a wide range of optimization problems and uses the fundamental laws of the subject area. It is shown that in linear quadratic problem optimization the equations of optimal controllers with autonomous modal controls in the open domain of their definition and taking into account restrictions on the nature of the spatial distribution of the control actions specified by the conditions of technical implementation are reduced to linear feedback algorithms for the measured state of the plant with nonstationary transmission coefficients and the given dependence on the spatial arguments of the controlled value. The results obtained are extended to the problem of searching for time-invariant spatially distributed controls, considered as the desired design solutions for a plant.

Keywords: uniform metric, systems with distributed parameters, alternance method.

Received: 17th July, 2022 / Revised: 12th August, 2022 /Accepted: 18th August, 2022 / First online: 19th September, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Rapoport E. Ya. Uniform optimization of controlled systems with distributed parameters, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 419–445. EDN: WJCOQD. DOI: [10.14498/vsgtu1943](https://doi.org/10.14498/vsgtu1943) (In Russian).

Author's Details:

Edgar Ya. Rapoport  <https://orcid.org/0000-0002-0604-8801>

Dr. Techn. Sci., Professor; Dept. of Automation and Control in Technical Systems;

e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (RSF 22-29-00180, Samara State Technical University).

References

1. Rapoport E. Ya. *Optimal'noe upravlenie sistemami s raspredeleennymi parametrami* [Optimal Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2009, 677 pp. (In Russian). EDN: QMTFRZ.
2. Rapoport E. Ya. *Analiz i sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya s raspredeleennymi parametrami* [Analysis and Synthesis of Automatic Control Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Vyssh. shk., 2005, 292 pp. (In Russian). EDN: QMOYRB.
3. Rapoport E. Ya. *Al'ternatsnyy metod v prikladnykh zadachakh optimizatsii* [Alternance Method in Applied Optimization Problems]. Moscow, Nauka, 2000, 336 pp. (In Russian). EDN: TTRVMB.
4. Rapoport E. Ya. *Optimizatsiia protsessov induktsionnogo nagreva metalla* [Optimization of the Induction Heating of Metal Process]. Moscow, Metallurgiiia, 1993, 279 pp. (In Russian)
5. Rapoport E. Ya., Pleshivceva Yu. E. *Metody polubeskonechnoi optimizatsii v prikladnykh zadachakh upravleniia sistemami s raspredeleennymi parametrami* Methods of Semi-Infinite Optimization in Applied Problems of Control of Systems with Distributed Parameters. Moscow, Nauka, 2021, 286 pp. (In Russian). EDN: QADDDYA.
6. Vladimirov V. S. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1981, 512 pp. (In Russian)
7. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 407 pp. (In Russian)
8. Polyanin A. D. *Spravochnik po lineinym uravneniim matematicheskoi fiziki* [Handbook on Linear Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 pp. (In Russian). EDN: MVANPN.
9. Rapoport E. Ya. Open-loop controllability of multidimensional linear systems with distributed parameters, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol.54, no.2, pp. 184–201. EDN: UFSRQX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230715020112>.
10. Koshlyakov N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1964, xvi+701 pp.
11. Valeev G. K., Zhautykov O. A. *Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravnenii* [Infinite Systems of Differential Equations]. Alma-Ata, Nauka, 1974, 415 pp. (In Russian)
12. Koval' V. A. *Spektral'nyi metod analiza i sinteza raspredeleennykh upravliaemykh sistem* Spectral Method of Analysis and Synthesis of Distributed Control Systems. Saratov, Saratov State Techn. Univ., 1997, 192 pp. (In Russian)
13. Egorov Yu. V. Necessary conditions for optimal control in Banach spaces, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1964, vol.64(106), no. 1, pp. 79–101 (In Russian).
14. Fedorenko R. P. *Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniia* [Approximate Solution of Optimal Control Problems]. Moscow, Nauka, 1978, 488 pp. (In Russian)
15. Moiseev N. N. *Elementy teorii optimal'nykh sistem* [Elements of the Theory of Optimal Systems]. Moscow, Nauka, 1975, 526 pp. (In Russian)
16. Vasil'ev F. P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002, 824 pp. (In Russian)
17. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Ya. The successive parameterization method of control actions in boundary value optimal control problems for distributed parameter systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol.48, no.3, pp. 351–362. EDN: LLQZJH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230709030034>.

18. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. Boca Raton, CRC Press, 2007, 349 pp. EDN: UIEQHJ. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420019490>.
19. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. *Optimal'noe upravlenie temperaturnymi rezhimami induktsionnogo nagreva* [Optimal Control of Induction Heating Temperature]. Moscow, Nauka, 2012, 309 pp. (In Russian). EDN: QNDGWJ.
20. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal control of induction heating of metals prior to warm and hot forming, In: *Induction Heating and Heat Treatment*, vol. 4C, AMS Handbook, 2014, pp. 366–401. DOI: <https://doi.org/10.31399/asm.hb.v04c.a0005893>.
21. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Yu. Optimal energy-efficient programmed control of distributed parameter systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2020, vol. 59, no. 4, pp. 518–532. EDN: ELZAQT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230720030120>.
22. Rapoport E. Ya. Analytical design of the optimal controllers in linear-quadratic problems of controlling systems with distributed parameters under uniform estimates of target sets, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2021, vol. 60, no. 3, pp. 364–378. EDN: BBXAQM. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230721030138>.
23. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal energy-efficient control in distributed parameter systems, *Optoelectron. Instrument. Proc.*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 345–355. EDN: ITJLZZ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S8756699021040105>.
24. Pleshivtseva Yu. E., Rapoport E. Yu. Spatiotemporal control of systems with distributed parameters in linear-quadratic optimization problems with uniform estimates of target sets, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2022, vol. 61, no. 4, pp. 523–538. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106423072203011X>.
25. Butkovskii A. G. *Teoriia optimal'nogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami* [Optimal Control Theory for Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1965, 474 pp. (In Russian)
26. Egorov A. I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal Control of Thermal and Diffusion Processes]. Moscow, Nauka, 1978, 500 pp. (In Russian)
27. Sirazetdinov T. K. *Optimizatsiia sistem s raspredelennymi parametrami* [Optimization Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka, 1977, 480 pp. (In Russian)
28. Ray W. H. *Advanced Process Control*. New York, McGraw-Hill, 1981, xiii+376 pp.
29. Degtiarev G. L., Sirazetdinov T. K. *Teoreticheskie osnovy optimal'nogo upravleniia uprugimi kosmicheskimi apparatami* [Theoretical Foundations of Optimal Control of Elastic Space Vehicles]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 214 pp. (In Russian)
30. Letov A. M. *Matematicheskaiia teoriia protsessov upravleniia* [Mathematical Theory of Control Processes]. Moscow, Nauka, 1981, 255 pp. (In Russian)
31. Letov A. M. *Dinamika poleta i upravleniia* [Flight and Control Dynamics]. Moscow, Nauka, 1969, 360 pp. (In Russian)



УДК 517.968.4

Вопросы существования и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой

Х. А. Хачатрян^{1,3}, А. С. Петросян^{2,3}

¹ Ереванский государственный университет, Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1.

² Национальный аграрный университет Армении, Армения, 0009, Ереван, ул. Маршала Теряна, 74.

³ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119992, Москва, Ленинские горы, 1.

Аннотация

Исследуется класс нелинейных интегральных уравнений со стохастическим и симметричным ядром на всей прямой. При определенных частных представлениях ядра и нелинейности уравнения вышеуказанного характера возникают во многих разделах математического естествознания. В частности, такие уравнения встречаются в теории p -адических струн, в кинетической теории газов, в математической биологии и в теории переноса излучения. Доказываются конструктивные теоремы существования неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений при различных ограничениях на функцию, описывающую нелинейность уравнений. При дополнительных ограничениях на ядро и на нелинейность доказывается также теорема единственности в определенном классе ограниченных и неотрицательных функций, имеющих конечный предел в $\pm\infty$. В конце приводятся конкретные прикладные примеры ядра и нелинейности, удовлетворяющие всем ограничениям доказанных утверждений.

Ключевые слова: монотонность, последовательные приближения, сходимость, ограниченное решение, предел решения, условие Каратеодори.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Вопросы существования и единственности решения одного класса нелинейных интегральных уравнений на всей прямой // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 446–479. EDN: NIORFC. DOI: 10.14498/vsgtu1932.

Сведения об авторах

Хачатур Агавардович Хачатрян  <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>

доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений¹; основной исполнитель гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223)³; e-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Айкануш Самвеловна Петросян  <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент каф. высшей математики и физики²; исполнитель гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223)³; e-mail: haykuhi25@mail.ru

Получение: 26 мая 2022 г. / Исправление: 8 августа 2022 г. /
 Принятие: 11 августа 2022 г. / Публикация онлайн: 5 сентября 2022 г.

1. Введение

1.1. Постановка задачи и основная цель работы

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений на всей прямой:

$$B(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)G(t, B(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

относительно искомой измеримой неотрицательной и ограниченной функции $B(x)$. В уравнении (1) ядро $K(x, t)$ удовлетворяет следующим ограничениям:

1) (условие симметрии и стохастичности)

$$K(x, t) = K(t, x) > 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)dt = 1, \quad x \in \mathbb{R};$$

2) (условие миноранты)

существуют измеримые на \mathbb{R}^2 функции $\{K_j(x, t)\}_{j=1,2}$ со свойствами

$$K_j(x, t) \geq 0, \quad K_j(x, t) \not\equiv 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^x K_1(x, t)dt \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_t^{\infty} K_1(x, t)dx \leq \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\int_x^{\infty} K_2(x, t)dt \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^t K_2(x, t)dx \leq \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (4)$$

существуют числа $r_j > 0$, $j = 1, 2$, при которых

$$\varepsilon_1 := \inf_{x \in \mathbb{R}^-} \int_{r_1}^{\infty} K_1(x + y, x)dy > 0, \quad (5)$$

$$\varepsilon_2 := \inf_{x \in \mathbb{R}^+} \int_{r_2}^{\infty} K_2(x - y, x)dy > 0, \quad \mathbb{R}^+ := [0, +\infty), \quad \mathbb{R}^- := \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+, \quad (6)$$

$$m^-(\gamma_1) := \int_{-\infty}^0 (-x)\gamma_1(x)dx < +\infty, \quad m^+(\gamma_2) := \int_0^{\infty} x\gamma_2(x)dx < +\infty, \quad (7)$$

где

$$\gamma_1(x) := \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x K_1(x, t)dt, \quad \gamma_2(x) := \frac{1}{2} - \int_x^{\infty} K_2(x, t)dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

такие, что ядро $K(x, t)$ удовлетворяет следующей оценке снизу:

$$K(x, t) \geq \begin{cases} K_1(x, t), & \text{если } x \geq t, \\ K_2(x, t), & \text{если } x < t, \end{cases} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (9)$$

Относительно функции $\lambda(x)$ предположим выполнение следующих условий:

- а) $\lambda \in C(\mathbb{R})$, $0 \leq \lambda(x) \leq 1$, $\lambda(x) \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$,
 б) $x(1 - \lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R})$.

Нелинейность $G(t, u)$ определена на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, принимает вещественные значения, удовлетворяет условию «критичности»

$$G(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

и некоторым другим условиям (см. ниже).

Основной целью настоящей работы является построение неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений при различных ограничениях на $G(t, u)$, а также изучение вопроса единственности построенного решения в том или ином классе ограниченных функций.

1.2. История вопроса

Отметим, что при определенных частных представлениях ядра K , функции λ и нелинейности G уравнение (1) имеет приложения во многих разделах математической физики и математической биологии. В частности, уравнения такого характера (когда ядро K зависит от разности своих аргументов либо мажорируется таким ядром) встречаются в динамической теории p -адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в кинетической теории газов (в исследованиях кинетического уравнения Больцмана в рамках модифицированной модели Бхатнагара—Гросса—Крука), в теории переноса излучения в неоднородных средах и в математической теории пространственно-временного распространения пандемии в рамках модели Дикмана—Капера (см. [1–12] и ссылки в них).

Следует отметить, что для ядерных функций K , зависящих от разности своих аргументов уравнение (1) исследовано в работах [2, 9–21] при различных ограничениях на $G(t, u)$. Например, в том частном случае, когда $\lambda(x) \equiv 1$, $K(x, t) = K(x - t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, а $G(t, u) = \sqrt[p]{u}$, $u \in \mathbb{R}$ ($p > 2$ — нечетное число), уравнение (1) достаточно подробно изучено в работах [2, 11–13].

Для общих четных и консервативных ядер вида $K(x, t) = K(x - t)$ при различных ограничениях на G и λ в работах [14–19] обсуждены вопросы существования и единственности нетривиальных неотрицательных (в некоторых случаях и знакопеременных) и ограниченных (или линейно растущих) решений уравнения (1). В несимметричном случае, когда $K(x, t) = K(x - t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx > 0$ и $K(x)$ экспоненциально возрастает на отрицательной части числовой оси, а $G(t, u) \equiv G_0(u)$, $G_0(u) \uparrow$ по u на \mathbb{R}^+ , $G'_0(0)u - cu^{1+\varepsilon} \leq G_0(u) \leq G'_0(0)u$, $u \in \mathbb{R}^+$, $c, \varepsilon > 0$, $1 < G'_0(0) < +\infty$, $G_0(\eta) = \eta$, $\eta > 0$, в работах [9, 10, 20] доказаны теоремы существования и единственности положительных монотонных и ограниченных решений. В несимметричном случае исследованы также соответствующие квазилинейные варианты уравнения (1) и построены однопараметрические семейства неотрицательных (в некоторых случаях монотонных) и ограниченных решений (см. [21]). В работе [21] проведены также исследования по асимптоти-

ческому поведению построенных решений на $\pm\infty$ и разработаны численные методы нахождения приближенных решений.

1.3. Сводка основных результатов

В настоящей работе при условиях 1), 2), а), б) и при различных ограничениях на функцию $G(t, u)$ будут доказаны конструктивные теоремы существования нетривиальных неотрицательных и ограниченных решений. Будут исследованы асимптотическое поведение построенных решений на $\pm\infty$ и вопрос единственности решения в определенном классе ограниченных и неотрицательных функций. Полученные результаты будут применены на конкретных задачах прикладного характера из теории p -адических открыто-замкнутых струн, а также на задачах из математической теории пространственно-временного распространения пандемии в рамках модифицированной модели Дикмана—Капера. Следует отметить, что доказанные результаты настоящей работы обобщают и дополняют соответствующие утверждения работ [14–16].

2. Обозначения и вспомогательные факты

2.1. О суммируемых и ограниченных решениях вспомогательных линейных неоднородных интегральных уравнений типа Вольтерра

Рассмотрим следующее вспомогательное линейное интегральное уравнение типа Вольтерра с переменным верхним пределом:

$$\varphi(x) = \tilde{\gamma}_1(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

относительно искомой измеримой функции $\varphi(x)$, где

$$\tilde{\gamma}_1(x) := 1 - \lambda(x) + 2\lambda(x)\gamma_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$\tilde{K}_1(x, t) := 2K_1(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (12)$$

Ниже убедимся в достоверности следующего утверждения.

ЛЕММА 1. *При условиях (2), (3), (5), а), б), если $m^-(\gamma_1) < +\infty$, то уравнение (10) имеет неотрицательное ограниченное решение $\varphi(x)$, причем $\varphi(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_1(-\infty, 0)$.*

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (10):

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) &= \tilde{\gamma}_1(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t)\varphi_n(t)dt, \\ \varphi_0(x) &= \tilde{\gamma}_1(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Исходя из условий (2), (3) и а) индукцией по n легко можно убедиться, что

$$\varphi_n(x) \uparrow \text{ по } n, \quad \varphi_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Учитывая (2), (3), (11) и (12), несложно также проверить, что

$$\varphi_n(x) \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Докажем, что

$$\varphi_n \in L_1(-\infty, 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Действительно, в случае $n = 0$ данное включение сразу следует из условий а), б) и $m^-(\gamma_1) < +\infty$, ибо

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\infty}^0 \tilde{\gamma}_1(x) dx &\leq 1 + \int_{-\infty}^{-1} (-x) \tilde{\gamma}_1(x) dx \leq \int_{-\infty}^{-1} (-x)(1 - \lambda(x)) dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{-1} (-x) \gamma_1(x) dx + 1 \leq m^-(1 - \lambda) + 2m^-(\gamma_1) + 1 < +\infty. \end{aligned}$$

Предположим, что $\varphi_n \in L_1(-\infty, 0)$ для некоторого натурального n . Докажем, что тогда

$$\int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t) \varphi_n(t) dt \in L_1(-\infty, 0). \quad (17)$$

Пусть $l < 0$ — произвольное число. Учитывая (2), (3) и индукционное предположение, в силу теоремы Фубини (см. [22]) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_l^0 \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t) \varphi_n(t) dt dx &= \int_l^0 \int_{-\infty}^l \tilde{K}_1(x, t) \varphi_n(t) dt dx + \\ &+ \int_l^0 \int_l^x \tilde{K}_1(x, t) \varphi_n(t) dt dx = \int_{-\infty}^l \varphi_n(t) \int_l^0 \tilde{K}_1(x, t) dx dt + \\ &+ \int_l^0 \varphi_n(t) \int_t^0 \tilde{K}_1(x, t) dx dt \leq \int_{-\infty}^l \varphi_n(t) \int_t^0 \tilde{K}_1(x, t) dx dt + \\ &+ \int_l^0 \varphi_n(t) \int_t^0 \tilde{K}_1(x, t) dx dt \leq \int_{-\infty}^0 \varphi_n(t) \int_t^0 \tilde{K}_1(x, t) dx dt \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^0 \varphi_n(t) dt < +\infty. \end{aligned}$$

Устремляя число $l \rightarrow -\infty$, приходим к включению (17). Из (11), б), неравенства $m^-(\gamma_1) < +\infty$, (13) и (17) следует, что $\varphi_{n+1} \in L_1(-\infty, 0)$.

Пусть теперь $a \leq 0$ — произвольное число. Тогда, интегрируя обе части (13) в пределах от $-\infty$ до a и при этом учитывая а), б), (2), (3), (11), (12), (14), согласно теореме Фубини получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a \varphi_{n+1}(x) dx &\leq \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t) \varphi_{n+1}(t) dt dx = \\ &= \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^0 \tilde{K}_1(x, x+y) \varphi_{n+1}(x+y) dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^a \tilde{K}_1(x, x+y) \varphi_{n+1}(x+y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{-r_1} \int_{-\infty}^a \tilde{K}_1(x, x+y) \varphi_{n+1}(x+y) dx dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-r_1}^0 \int_{-\infty}^a \tilde{K}_1(x, x+y) \varphi_{n+1}(x+y) dx dy = \\
 = & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{-r_1} \int_{-\infty}^{a+y} \tilde{K}_1(t-y, t) \varphi_{n+1}(t) dt dy + \\
 & + \int_{-r_1}^0 \int_{-\infty}^{a+y} \tilde{K}_1(t-y, t) \varphi_{n+1}(t) dt dy \leq \\
 \leq & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{-r_1} \int_{-\infty}^{a-r_1} \tilde{K}_1(t-y, t) \varphi_{n+1}(t) dt dy + \\
 & + \int_{-r_1}^0 \int_{-\infty}^a \tilde{K}_1(t-y, t) \varphi_{n+1}(t) dt dy = \\
 = & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{a-r_1} \int_{-\infty}^{a-r_1} \tilde{K}_1(t-y, t) \varphi_{n+1}(t) dt dy + \\
 & + \int_{a-r_1}^{-r_1} \int_{-\infty}^{a-r_1} \tilde{K}_1(t-y, t) \varphi_{n+1}(t) dt dy + \\
 & + \int_{-\infty}^a \varphi_{n+1}(t) \int_{-r_1}^0 \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt = \\
 = & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{a-r_1} \varphi_{n+1}(t) \int_{-\infty}^{a-r_1} \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt + \\
 & + \int_{-\infty}^{a-r_1} \varphi_{n+1}(t) \int_{a-r_1}^{-r_1} \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt + \\
 & + \int_{-\infty}^a \varphi_{n+1}(t) \int_{-r_1}^0 \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt = \\
 = & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{a-r_1} \varphi_{n+1}(t) \int_{-\infty}^{-r_1} \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt + \\
 & + \int_{-\infty}^a \varphi_{n+1}(t) \int_{-r_1}^0 \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt = \\
 = & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{a-r_1} \varphi_{n+1}(t) \int_{-\infty}^0 \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt + \\
 & + \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) \int_{-r_1}^0 \tilde{K}_1(t-y, t) dy dt = \\
 = & \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{-\infty}^{a-r_1} \varphi_{n+1}(t) \int_t^{\infty} \tilde{K}_1(\tau, t) d\tau dt + \\
 & + \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) \int_t^{t+r_1} \tilde{K}_1(\tau, t) d\tau dt,
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$0 \leq \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) dt \leq \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx + \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) \int_t^{t+r_1} \tilde{K}_1(\tau, t) d\tau dt. \quad (18)$$

Оценим теперь следующую разность, имея в виду (3) и (5):

$$\begin{aligned} 1 - \int_t^{t+r_1} \tilde{K}_1(\tau, t) d\tau &= 2 \left(\frac{1}{2} - \int_t^{t+r_1} K_1(\tau, t) d\tau \right) \geq \\ &\geq 2 \left(\int_t^\infty K_1(\tau, t) d\tau - \int_t^{t+r_1} K_1(\tau, t) d\tau \right) = \\ &= 2 \int_{t+r_1}^\infty K_1(\tau, t) d\tau = 2 \int_{r_1}^\infty K_1(t+y, t) dy \geq 2\varepsilon_1 > 0 \quad \text{для } t \in \mathbb{R}^-. \end{aligned}$$

Итак, в силу последнего неравенства из (18) получаем, что

$$0 \leq \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) dt \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx, \quad a \leq 0. \quad (19)$$

Интегрируем теперь обе части (19) по a в пределах от R до 0 (где $R < 0$ — произвольное число). Тогда, учитывая **b)**, $m^-(\gamma_1) < +\infty$ и (11), из (19) в силу теоремы Фубини будем иметь

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_R^0 \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) dt da \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_R^0 \int_{-\infty}^a \tilde{\gamma}_1(x) dx da = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_R^0 \int_{-\infty}^R \tilde{\gamma}_1(x) dx da + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_R^0 \int_R^a \tilde{\gamma}_1(x) dx da = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{-\infty}^R \tilde{\gamma}_1(x)(-R) dx + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_R^0 \tilde{\gamma}_1(x)(-x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\int_{-\infty}^R \tilde{\gamma}_1(x)(-x) dx + \int_R^0 \tilde{\gamma}_1(x)(-x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{-\infty}^0 \tilde{\gamma}_1(x)(-x) dx \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\int_{-\infty}^0 (1-\lambda(x))(-x) dx + 2m^-(\gamma_1) \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Устремляя число $R \rightarrow -\infty$, получаем, что функции

$$\int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) dt \in L_1(-\infty, 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$0 \leq \int_{-\infty}^0 \int_{a-r_1}^a \varphi_{n+1}(t) dt da \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} (m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

или

$$0 \leq \int_{-\infty}^0 \int_{-r_1}^0 \varphi_{n+1}(a+\tau) d\tau da \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} (m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что

$$0 \leq \int_{-r_1}^0 \int_{-\infty}^\tau \varphi_{n+1}(y) dy d\tau \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} (m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Из (20), в частности, следует, что

$$0 \leq \int_{-\infty}^{-r_1} \varphi_{n+1}(y) dy \leq \frac{1}{2\varepsilon_1 r_1} (m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

С другой стороны, в силу (15) имеем

$$0 \leq \int_{-r_1}^0 \varphi_{n+1}(y) dy \leq r_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Комбинируя (21) и (22), приходим к оценке

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^0 \varphi_{n+1}(y) dy \leq \\ &\leq r_1 + \frac{1}{2\varepsilon_1 r_1} (m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1)) < +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Итак, на основании (14)–(16) и (23) заключаем, что последовательность измеримых на \mathbb{R} функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

причем

$$\tilde{\gamma}_1(x) \leq \varphi(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Согласно теореме Б. Леви (см. [22]), предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (10), а также следующей оценке:

$$0 \leq \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx \leq r_1 + \frac{1}{2\varepsilon_1 r_1} (m^-(1-\lambda) + 2m^-(\gamma_1)) < +\infty.$$

Итак, $\varphi \in L_1(-\infty, 0)$. Таким образом, лемма полностью доказана. \square

Рассмотрим теперь второе вспомогательное линейное интегральное уравнение типа Вольтерра уже с переменным нижним пределом:

$$\psi(x) = \tilde{\gamma}_2(x) + \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x, t) \psi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (24)$$

относительно искомой измеримой функции $\psi(x)$, где

$$\tilde{\gamma}_2(x) := 1 - \lambda(x) + 2\lambda(x)\gamma_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{K}_2(x, t) := 2K_2(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 1, приходим к следующему утверждению относительно уравнения (24).

ЛЕММА 2. При условиях (2), (4), (6), а), b), если $m^+(\gamma_2) < +\infty$, то уравнение (24) имеет неотрицательное ограниченное решение $\psi(x)$, причем $\psi(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ и $\psi \in L_1(0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Небезынтересно отметить, что

А) если дополнительно $K_1 \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_1(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0,$$

В) если дополнительно $K_2 \in L_\infty(\mathbb{R}^2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma_2(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0.$$

Действительно, вышеприведенные предельные соотношения следуют из доказанных лемм 1 и 2 с учетом следующих простых неравенств:

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 - \lambda(x) + 2\gamma_1(x) + 2 \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^2} (K_1(x,t)) \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt,$$

$$0 \leq \psi(x) \leq 1 - \lambda(x) + 2\gamma_2(x) + 2 \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^2} (K_2(x,t)) \int_x^{\infty} \psi(t) dt.$$

2.2. Существование нетривиальных и ограниченных решений однородных линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Асимптотическое поведение построенных решений на $\pm\infty$

Сначала рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение Вольтерра с переменным верхним пределом:

$$\Phi(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x,t) \Phi(t) dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (25)$$

относительно искомой функции $\Phi(x)$.

Имеет место следующая

ЛЕММА 3. При условиях леммы 1 уравнение (25) обладает нетривиальным неотрицательным ограниченным решением $\Phi(x)$, причем $0 \leq 1 - \Phi \in L_1(-\infty, 0)$. Более того, при дополнительном ограничении А) данное решение удовлетворяет следующему предельному соотношению:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 1. \quad (26)$$

Доказательство. Наряду с уравнением (25) рассмотрим неоднородное интегральное уравнение (10). Прямой проверкой можно убедиться, что функция $\varphi_{\text{tr}}(x) \equiv 1$ является решением уравнения (10). С другой стороны, согласно лемме 1 уравнение (10) кроме такого тривиального решения обладает неотрицательным ограниченным решением $\varphi(x) : \varphi(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}, \varphi \in L_1(-\infty, 0)$. Очевидно, что функция $\Phi(x) := 1 - \varphi(x) \geq 0, \Phi(x) \not\equiv 0$ является ограниченным решением однородного уравнения (25), причем $1 - \Phi \in L_1(-\infty, 0)$. В силу замечания 1 при дополнительном условии А) будет выполняться предельное соотношение (26). Лемма доказана. \square

Аналогично доказывается

ЛЕММА 4. При условиях леммы 2 однородное уравнение

$$F(x) = \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x, t) F(t) dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (27)$$

обладает нетривиальным неотрицательным ограниченным решением $F(x)$, причем $0 \leq 1 - F \in L_1(0, +\infty)$. Более того, при дополнительном ограничении B) данное решение удовлетворяет следующему предельному соотношению:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

2.3. Единственность решений соответствующих линейных однородных уравнений на множествах \mathbb{R}^\pm

Рассмотрим теперь однородные интегральные уравнения (25) и (27) соответственно на множествах \mathbb{R}^- и \mathbb{R}^+ :

$$\tilde{\Phi}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t) \tilde{\Phi}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^-, \quad (28)$$

$$\tilde{F}(x) = \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x, t) \tilde{F}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (29)$$

Ниже при дополнительных ограничениях на $\lambda(x)$ докажем, что уравнения (28) и (29) соответственно в следующих классах ограниченных функций:

$$\mathfrak{M}_- := \{f_-(x) : 0 \leq f_-(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^-, \quad 1 - f_- \in L_1(-\infty, 0)\},$$

$$\mathfrak{M}_+ := \{f_+(x) : 0 \leq f_+(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad 1 - f_+ \in L_1(0, +\infty)\}$$

не могут иметь более одного решения.

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 5. Пусть выполняются все условия леммы 3. Тогда, если

$$\text{mes}((-\infty, 0] \setminus \text{supp}\{(1 - \lambda(x))\theta(-x)\}) = 0,$$

$$\lambda \downarrow \text{ на } (-\infty, 0],$$

($\theta(x)$ — известная функция Хевисайда), то уравнение (28) в классе \mathfrak{M}_- не может иметь более одного решения.

ЛЕММА 6. Пусть выполняются все условия леммы 4. Тогда, если

$$\text{mes}([0, +\infty) \setminus \text{supp}\{(1 - \lambda(x))\theta(x)\}) = 0, \quad (30)$$

$$\lambda \uparrow \text{ на } [0, +\infty), \quad (31)$$

то уравнение (29) в классе \mathfrak{M}_+ не может иметь более одного решения.

Докажем, например, лемму 6. Доказательство леммы 5 проводится аналогичными рассуждениями.

Доказательство леммы 6. Предположим, что уравнение (29) имеет два решения \tilde{F} и \tilde{F}^* из класса \mathfrak{M}_+ . Тогда очевидно, что $\tilde{F} - \tilde{F}^* \in L_1(0, +\infty)$, и из (29) в силу (2), (4), а), (31) и теоремы Фубини будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{F}(x) - \tilde{F}^*(x)| dx &\leq \int_0^\infty \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x, t) |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)| dt dx = \\ &= \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)| \int_0^t \lambda(x) \tilde{K}_2(x, t) dx dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)| \lambda(t) \int_0^t \tilde{K}_2(x, t) dx dt \leq \int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)| \lambda(t) dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^\infty |\tilde{F}(t) - \tilde{F}^*(t)| (1 - \lambda(t)) dt \leq 0. \quad (32)$$

Из (32) с учетом (30) следует, что $\tilde{F}(t) = \tilde{F}^*(t)$ почти всюду на \mathbb{R}^+ . Лемма доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 2. К сожалению, вопрос единственности решений однородных уравнений (25) и (27) в определенных классах ограниченных на \mathbb{R} функций пока остается открытой проблемой.

3. Разрешимость уравнения (1)

3.1. Существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения уравнения (1), когда нелинейность G не зависит от переменной t

Рассмотрим уравнение (1) в случае, когда $G(t, u) \equiv G_0(u)$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^+$:

$$\tilde{B}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^\infty K(x, t) G_0(\tilde{B}(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

где $G_0(u)$ — определенная и непрерывная на множестве \mathbb{R}^+ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- g₁**) существуют положительные числа η и ξ , $\xi < \eta$ такие, что $G_0(\xi) = 2\xi$, $G_0(\eta) = \eta$;
- g₂**) $G_0(0) = 0$, $y = G_0(u) \uparrow$ по u на \mathbb{R}^+ ;
- g₃**) $y = G_0(u)$ строго выпукла вверх на \mathbb{R}^+ (см. рис. 1).

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия 1), 2), а), b) и g₁)–g₃). Тогда уравнение (33) имеет неотрицательное нетривиальное и ограниченное решение $\tilde{B}(x)$, причем $\tilde{B}(x) \leq \eta$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n+1}(x) &= \lambda(x) \int_{-\infty}^\infty K(x, t) G_0(\tilde{B}_n(t)) dt, \\ \tilde{B}_0(x) &= \eta \lambda(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

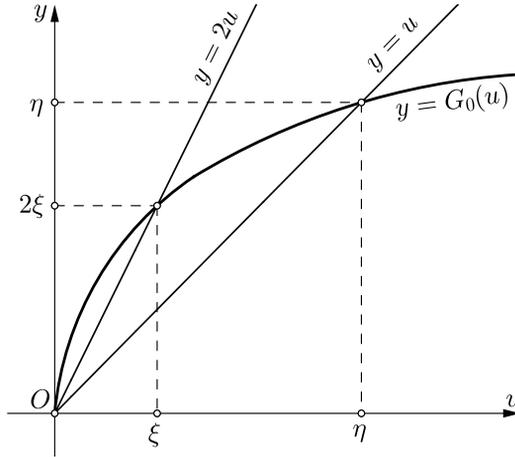


Рис. 1. [Figure 1]

Учитывая условия 1), а), g_1) и g_2), методом математической индукции несложно проверить, что

$$\tilde{B}_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (35)$$

$$\tilde{B}_n(x) \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (36)$$

$$\tilde{B}_n(x) \downarrow \text{ по } n, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (37)$$

Докажем следующую оценку снизу для последовательности измеримых функций $\{\tilde{B}_n(x)\}_{n=0}^\infty$:

$$\tilde{B}_n(x) \geq \max\{\xi\Phi(x), \xi F(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Действительно, во-первых, в силу доказанных лемм 3 и 4

$$0 \leq \Phi(x) \leq 1, \quad 0 \leq F(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Учитывая (2) и (39), из (25) и (27) будем иметь

$$\Phi(x) \leq \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t) dt \leq \lambda(x), \quad (40)$$

$$F(x) \leq \lambda(x) \int_x^\infty \tilde{K}_2(x, t) dt \leq \lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Так как $\eta > \xi$ (см. условие g_1)), с учетом (40), (41) получаем, что

$$\tilde{B}_0(x) \geq \xi\lambda(x) \geq \xi\Phi(x), \quad \tilde{B}_0(x) \geq \xi\lambda(x) \geq \xi F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\tilde{B}_0(x) \geq \max\{\xi\Phi(x), \xi F(x)\}, x \in \mathbb{R}$.

Предположим, что (38) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду неравенства (39), (9) и условия 1), 2), g_1)– g_3), из (34) получим

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n+1}(x) &\geq \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G_0(\xi \Phi(t)) dt \geq \lambda(x) \int_{-\infty}^x K(x, t) G_0(\xi \Phi(t)) dt \geq \\ &\geq 2\xi \lambda(x) \int_{-\infty}^x K(x, t) \Phi(t) dt \geq 2\xi \lambda(x) \int_{-\infty}^x K_1(x, t) \Phi(t) dt = \\ &= \xi \lambda(x) \int_{-\infty}^x \tilde{K}_1(x, t) \Phi(t) dt = \xi \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{n+1}(x) &\geq \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G_0(\xi F(t)) dt \geq \lambda(x) \int_x^{\infty} K(x, t) G_0(\xi F(t)) dt \geq \\ &\geq 2\xi \lambda(x) \int_x^{\infty} K(x, t) F(t) dt \geq 2\xi \lambda(x) \int_x^{\infty} K_2(x, t) F(t) dt = \\ &= \xi \lambda(x) \int_x^{\infty} \tilde{K}_2(x, t) F(t) dt = \xi F(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tilde{B}_{n+1}(x) \geq \max\{\xi \Phi(x), \xi F(x)\}$, $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, в силу (35)–(38) можем утверждать, что последовательность измеримых функций $\{\tilde{B}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{B}_n(x) = \tilde{B}(x),$$

причем $\tilde{B}(x)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\max\{\xi \Phi(x), \xi F(x)\} \leq \tilde{B}(x) \leq \eta \lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Так как $G_0 \in C(\mathbb{R}^+)$, $\lambda \in C(\mathbb{R})$ и K — измеримая функция, в силу теоремы Б. Леви $\tilde{B}(x)$ удовлетворяет уравнению (33). Теорема доказана. \square

3.2. Асимптотическое поведение решения (33) на $\pm\infty$

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. При условиях теоремы 1, если выполняются условия А) и В), то решение уравнения (33), построенное при помощи последовательных приближений (34), обладает следующей интегральной асимптотикой: $\eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Во-первых, используя (34), (37), (38) и условия 1), 91)–93), индукцией по n легко можно убедиться, что

$$0 \leq \eta - \tilde{B}_n \in L_1(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (43)$$

С другой стороны, заметим, что в силу лемм 3 и 4 существуют числа $\delta_1 < 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$\text{при } x \leq \delta_1 \quad \text{имеет место} \quad \Phi(x) \geq \frac{\xi}{2}, \quad (44)$$

$$\text{при } x \geq \delta_2 \quad \text{имеет место} \quad F(x) \geq \frac{\xi}{2}.$$

Следовательно, в силу (38) можем утверждать, что когда $x \in (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, +\infty)$, то

$$\tilde{B}_n(x) \geq \frac{\xi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В силу условия 1) с учетом (37) последовательные приближения (34) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta - \tilde{B}_{n+1}(x) &= \eta(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(\eta - G_0(\tilde{B}_n(t)))dt, \\ \tilde{B}_0(x) &= \eta\lambda(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (45)$$

Заметим, что когда $t \in (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, +\infty)$, существует число $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$0 \leq \eta - G_0(\tilde{B}_n(t)) \leq \alpha_0(\eta - \tilde{B}_n(t)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (46)$$

Действительно, из выпуклости вверх функции $y = G_0(u)$ следует, что

$$\frac{\eta - G_0(u_0)}{\eta - u_0} \leq \frac{\eta - G_0(\xi/2)}{\eta - \xi/2} := \alpha_0, \quad u_0 \in [\xi/2, \eta), \quad \alpha_0 \in (0, 1)$$

ибо $G_0(\xi/2) > \xi/2$, $0 < \xi < \eta$, $G_0(\eta) = \eta$ (см. рис. 2).

В тех точках t , в которых $\tilde{B}_n(t) = \eta$, неравенства (46) превращаются в равенства, поскольку $G_0(\eta) = \eta$. Учитывая условия 1), а), g_1), g_2) и неравенства (46), в силу (37) из (45) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta - \tilde{B}_{n+1}(x) &\leq \eta(1 - \lambda(x)) + \alpha_0\lambda(x) \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t)(\eta - \tilde{B}_n(t))dt + \\ &+ \alpha_0\lambda(x) \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t)(\eta - \tilde{B}_n(t))dt + \eta\lambda(x) \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x, t)dt \leq \eta(1 - \lambda(x)) + \\ &+ \alpha_0 \left(\int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t)(\eta - \tilde{B}_{n+1}(t))dt + \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t)(\eta - \tilde{B}_{n+1}(t))dt \right) + \end{aligned}$$

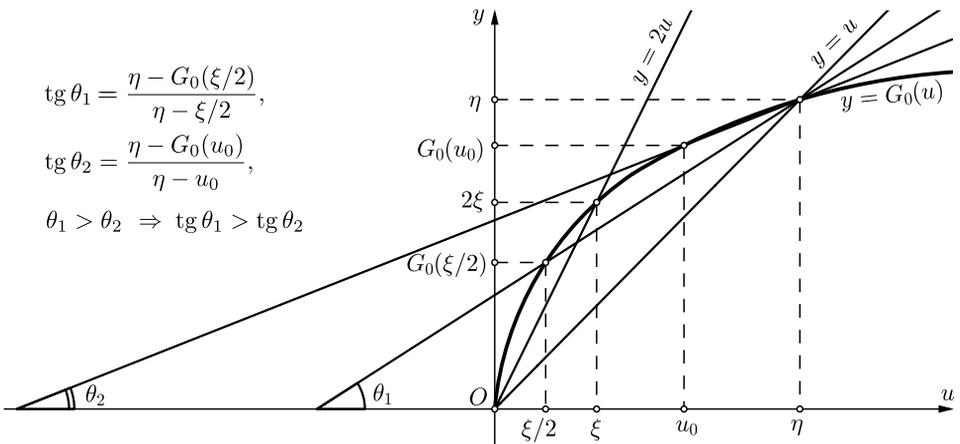


Рис. 2. [Figure 2]

$$+ \eta \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x, t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Имея в виду 1), а), б) и (43), после интегрирования последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \tilde{B}_{n+1}(x)) dx \leq \eta \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx + \eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x, t) dt dx + \\ &+ \alpha_0 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t) (\eta - \tilde{B}_{n+1}(t)) dt dx + \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t) (\eta - \tilde{B}_{n+1}(t)) dt dx \right) = \\ &= \eta \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx + \eta(\delta_2 - \delta_1) + \alpha_0 \int_{-\infty}^{\delta_1} (\eta - \tilde{B}_{n+1}(t)) dt + \\ &\qquad \qquad \qquad + \alpha_0 \int_{\delta_2}^{\infty} (\eta - \tilde{B}_{n+1}(t)) dt \leq \\ &\leq \eta \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx + \eta(\delta_2 - \delta_1) + \alpha_0 \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \tilde{B}_{n+1}(t)) dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \tilde{B}_{n+1}(t)) dt \leq \\ &\leq \frac{\eta(\delta_2 - \delta_1)}{1 - \alpha_0} + \frac{\eta}{1 - \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (47) \end{aligned}$$

Из (47) в силу теоремы Б. Леви заключаем, что $0 \leq \eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\eta - \tilde{B}(x)) dx \leq \frac{\eta(\delta_2 - \delta_1)}{1 - \alpha_0} + \frac{\eta}{1 - \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \lambda(x)) dx.$$

Таким образом, теорема доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следует отметить, что доказанные теоремы 1 и 2 обобщают и дополняют соответствующие результаты работы [15].

3.3. Существование решения уравнения (1) с общей нелинейностью

Рассмотрим теперь уравнение (1) с общей нелинейностью вида

$$G(t, u) = G_0(u) + \omega(t, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad (48)$$

где $G_0(u)$ удовлетворяет условиям $g_1)$ – $g_3)$, а $\omega(t, u)$ обладает следующими свойствами:

$$\omega_1) \quad \omega(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R} \text{ и существует } \sup_{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \omega(t, u) := \beta_0 < +\infty;$$

ω_2) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t, u) \uparrow$ по u на множестве \mathbb{R}^+ ;

ω_3) $\omega(t, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ по аргументу u , т.е. при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $\omega(t, u)$ измерима по t на \mathbb{R} и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ данная функция непрерывна по u на \mathbb{R}^+ .

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия 1), 2), а), b), g_1)– g_3) и ω_1)– ω_3). Тогда уравнение (1) с нелинейностью вида (48) имеет нетривиальное неотрицательное и ограниченное решение $B(x)$, причем $B(x) \geq \tilde{B}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение на всей прямой:

$$L(x) = g(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)G_0(L(t))dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (49)$$

относительно искомой неотрицательной функции $L(x)$, где

$$g(x) := \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)\beta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

а

$$\beta(t) := \sup_{u \in \mathbb{R}^+} \omega(t, u), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (50)$$

Рассмотрим следующие простые итерации для уравнения (49):

$$L_{n+1}(x) = g(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)G_0(L_n(t))dt,$$

$$L_0(x) = g(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Учитывая условия 1), а), ω_1), ω_2), g_2), индукцией легко можно доказать, что

$$L_n(x) \uparrow \text{ по } n.$$

Имея в виду условия 1), а), а также непрерывность функции G_0 , можно проверить, что

$$L_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим теперь следующее характеристическое уравнение:

$$G_0(u) + \beta_0 = u, \quad u \in \mathbb{R}^+. \quad (51)$$

Из g_1)– g_3) с учетом неотрицательности числа β_0 следует, что существует единственное положительное решение ξ^* уравнения (51), причем $\xi^* \geq \eta$ (равенство возможно только тогда, когда $\beta_0 = 0$) (см. рис. 3).

Докажем, что

$$L_n(x) \leq \xi^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

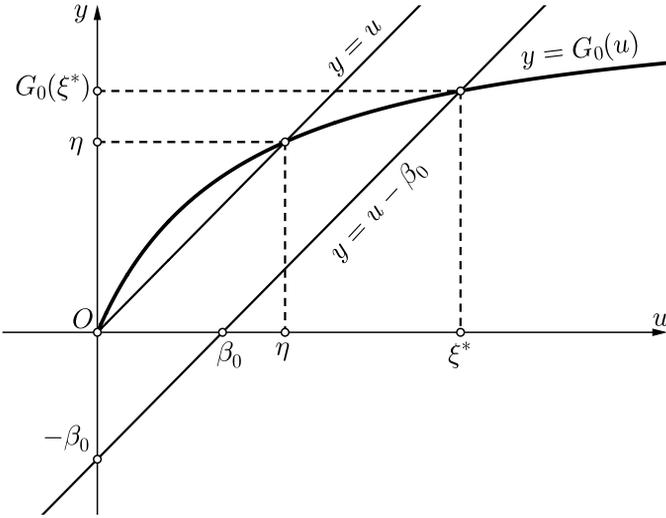


Рис. 3. [Figure 3]

Пусть $n = 0$, тогда в силу ω_1 , 1) и а) имеем

$$L_0(x) \leq \beta_0 = \xi^* - G_0(\xi^*) \leq \xi^*, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что $L_n(x) \leq \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$ для некоторого натурального n . Тогда, учитывая условия ω_1 , а), g_2 , 1), будем иметь

$$L_{n+1}(x) \leq \beta_0 + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) G_0(\xi^*) dt \leq \beta_0 + G(\xi^*) = \xi^*.$$

Следовательно, последовательность измеримых функций $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x) = L(x),$$

причем $g(x) \leq L(x) \leq \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$ и по теореме Б. Леви $L(x)$ удовлетворяет уравнению (49).

Вернемся теперь к исходному уравнению (1) и рассмотрим следующие последовательные приближения:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) (G_0(B_n(t)) + \omega(t, B_n(t))) dt, \\ B_0(x) &= \tilde{B}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{53}$$

где $\tilde{B}(x)$ — решение уравнения (33) (см. теоремы 1 и 2).

Индукцией несложно проверить, что

$$B_n(x) \uparrow \text{ по } n, \tag{54}$$

$$B_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{55}$$

Докажем, что

$$B_n(x) \leq \tilde{B}(x) + L(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{56}$$

С этой целью приведем следующее легко проверяемое неравенство для монотонно возрастающих и выпуклых вверх на \mathbb{R}^+ функций, обладающих свойством $G_0(0) = 0$ (см. [23]):

$$G_0(u + v) \leq G_0(u) + G_0(v), \quad u, v \in \mathbb{R}^+. \quad (57)$$

Для $n = 0$ неравенство (56) очевидно. Пусть (56) имеет место при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда, имея в виду (57), ω_1 , (49), (33), 1), (50), из (53) получим

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &\leq \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(\tilde{B}(t) + L(t)) + \omega(t, \tilde{B}(t) + L(t)))dt \leq \\ &\leq \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(\tilde{B}(t)) + G_0(L(t)) + \beta(t))dt = \tilde{B}(x) + L(x). \end{aligned}$$

Итак, ввиду (54)–(56) заключаем, что существует поточечный предел для последовательности измеримых функций $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = B(x),$$

причем $\tilde{B}(x) \leq B(x) \leq \tilde{B}(x) + L(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Учитывая условие Каратеодори для $\omega(t, u)$ и непрерывность функции G_0 , в силу теоремы Б. Леви можем утверждать, что $B(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Теорема доказана. \square

3.4. Асимптотическое поведение решения (1) в зависимости от свойств функции $\omega(t, u)$

Ниже мы будем исследовать интегральную асимптотику решения уравнения (1) (с нелинейностью вида (48)) в зависимости от свойств функции $\beta(t)$. Отдельно подробно изучим следующие возможные случаи:

$$\mathcal{J}) \quad \beta \in L_1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{L}) \quad \beta \notin L_1(\mathbb{R}).$$

Случай \mathcal{J} . В данном случае мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. При условиях теоремы 3, если $\beta \in L_1(\mathbb{R})$, то решение уравнения (1) (с нелинейностью вида (48)), построенное при помощи последовательных приближений (53), обладает следующей интегральной асимптотикой:

$$\eta - B \in L_1(\mathbb{R}).$$

Доказательство. Сначала, учитывая (53), (54), (33) и (50), оценим следующую разность:

$$\begin{aligned} 0 \leq B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x) &= \\ &= \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_n(t)) + \omega(t, B_n(t)))dt - \\ &\quad - \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(\tilde{B}(t)))dt \leq g(x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt \leq \\
 & \leq g(x) + \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + \\
 & + \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + G_0(\xi^*) \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x, t)dt, \quad x \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

откуда с учетом того, что $G_0(\xi^*) = \xi^* - \beta_0$, $\beta_0 \geq 0$, приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned}
 0 & \leq B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x) \leq \\
 & \leq g(x) + \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + \xi^* \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x, t)dt + \\
 & + \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (58)
 \end{aligned}$$

Индукцией по n сначала докажем, что

$$B_n - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (59)$$

Включение (59) для нулевого приближения (в итерациях (53)) выполняется очевидным образом. Предположим, что $B_n - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$ для некоторого натурального n .

Убедимся, что $G_0(B_n) - G_0(\tilde{B}) \in L_1(\mathbb{R})$. Действительно, учитывая тот факт, что $0 \leq \eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$ (см. теорему 2), а также условия g_1 – g_3) и индукционное предположение, будем иметь

$$\begin{aligned}
 |G_0(B_n(t)) - G_0(\tilde{B}(t))| & \leq |\eta - G_0(\tilde{B}(t))| + |\eta - G_0(B_n(t))| \leq \\
 & \leq \eta - G_0(\tilde{B}(t)) + |\eta - B_n(t)| \leq 2(\eta - \tilde{B}(t)) + B_n(t) - \tilde{B}(t) \in L_1(\mathbb{R}),
 \end{aligned}$$

ибо для всех $u \geq 0$ выполняется $|\eta - G_0(u)| \leq |\eta - u|$ (см. рис. 4). Следовательно,

$$G_0(B_n) - G_0(\tilde{B}) \in L_1(\mathbb{R}).$$

Тогда из оценки

$$0 \leq B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x) \leq g(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_n(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt$$

с учетом того, что $g \in L_1(\mathbb{R})$ (ибо $\beta \in L_1(\mathbb{R})$, ядро K удовлетворяет условию 1)), а λ и K обладают соответственно свойствами а) и 1), получаем, что

$$B_{n+1} - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Проинтегрируем теперь обе части неравенства (58) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Принимая во внимание (52), (56), (54), в силу условий 1), а), g_1 – g_3) и теоремы 1 будем иметь

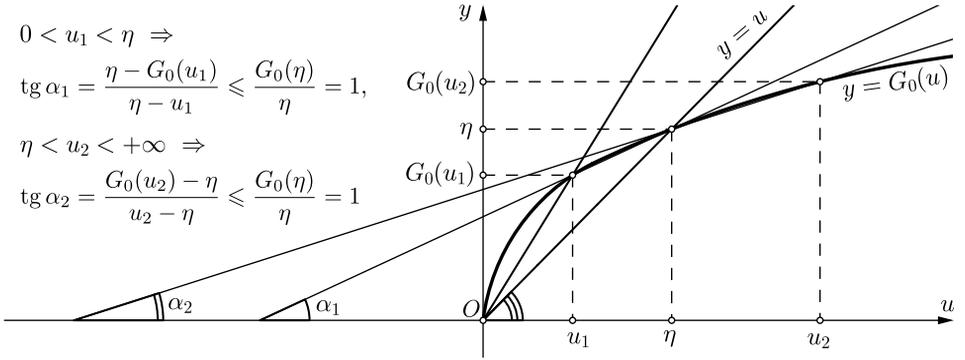


Рис. 4. [Figure 4]

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x))dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \xi^*(\delta_2 - \delta_1) + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt dx + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \xi^*(\delta_2 - \delta_1) + \int_{-\infty}^{\delta_1} (G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt + \\
 &\quad + \int_{\delta_2}^{\infty} (G_0(B_{n+1}(t)) - G_0(\tilde{B}(t)))dt \leq \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \xi^*(\delta_2 - \delta_1) + \delta^* \int_{-\infty}^{\delta_1} (B_{n+1}(t) - \tilde{B}(t))dt + \\
 &\quad + \delta^* \int_{\delta_2}^{\infty} (B_{n+1}(t) - \tilde{B}(t))dt,
 \end{aligned}$$

где

$$\delta^* := \frac{G_0(\xi^* + \eta) - G_0(\eta/2)}{\xi^* + \eta/2} < 1, \tag{60}$$

ибо $\xi^* + \eta \geq B_{n+1}(t) \geq \tilde{B}(t) \geq \eta/2$, когда $t \in (-\infty, \delta_1] \cup [\delta_2, +\infty)$; $G_0(\xi^* + \eta) < \xi^* + \eta$, а $G_0(\eta/2) > \eta/2$. Следовательно, учитывая (60), из полученного выше интегрального неравенства приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} (B_{n+1}(x) - \tilde{B}(x))dx &\leq \\
 &\leq \frac{\xi^*(\delta_2 - \delta_1)}{1 - \delta^*} + \frac{1}{1 - \delta^*} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{61}
 \end{aligned}$$

Из (54), (61) с учетом теоремы Б. Леви заключаем, что

$$0 \leq B - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$$

и

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} (B(x) - \tilde{B}(x))dx \leq \frac{\xi^*(\delta_2 - \delta_1)}{1 - \delta^*} + \frac{1}{1 - \delta^*} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$$

Таким образом, принимая во внимание включение $0 \leq \eta - \tilde{B} \in L_1(\mathbb{R})$, из оценки

$$|\eta - B(x)| \leq \eta - \tilde{B}(x) + B(x) - \tilde{B}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

получаем, что $\eta - B \in L_1(\mathbb{R})$. Теорема доказана. \square

Случай \mathcal{L} . Пусть теперь $\beta \notin L_1(\mathbb{R})$. При дополнительном ограничении на функцию ω мы докажем, что $\xi^* - B \in L_1(\mathbb{R})$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются все условия теоремы 3 и $\beta \notin L_1(\mathbb{R})$.

Тогда, если

$$\beta_0 - \omega(t, \rho(t)) \in L_1(\mathbb{R}), \quad (62)$$

где

$$\rho(t) := \max\{\xi\Phi(t), \xi F(t)\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (63)$$

то уравнение (1) имеет неотрицательное ограниченное решение $B(x)$, причём $B(x) \leq \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$ и $\xi^* - B \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$B_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(B_n(t)) + \omega(t, B_n(t)))dt, \\ B_0(x) = \xi^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Совершая такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 3, можно убедиться, что

$$B_n(x) \text{ измеримы на } \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (64)$$

$$B_n(x) \downarrow \text{ по } n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (65)$$

$$B_n(x) \geq \tilde{B}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (66)$$

Исходя из 1), (65), (66), (51), ω_1), а), б), (38) и (62) имеем

$$0 \leq \xi^* - B_{n+1}(x) \leq \xi^*(1 - \lambda(x)) + \\ + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(\xi^*) + \beta_0 - G_0(B_{n+1}(t)) - \omega(t, B_{n+1}(t)))dt \leq \\ \leq \xi^*(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(G_0(\xi^*) - G_0(B_{n+1}(t)))dt + \\ + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(\beta_0 - \omega(t, \rho(t)))dt \leq \\ \leq \tilde{g}(x) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t)(G_0(\xi^*) - G_0(B_{n+1}(t)))dt + \\ + \lambda(x) \int_{\delta_2}^{\infty} K(x, t)(G_0(\xi^*) - G_0(B_{n+1}(t)))dt,$$

где

$$\tilde{g}(x) := \xi^*(1 - \lambda(x)) + \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)(\beta_0 - \omega(t, \rho(t)))dt + G_0(\xi^*) \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x, t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из 1), а), б) и (62) немедленно следует, что

$$\tilde{g}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \tilde{g} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Далее, совершая рассуждения, как при доказательстве теоремы 2, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi^* - B_{n+1}(x))dx \leq \frac{1}{1 - R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (67)$$

где $R_0 := \frac{G_0(\xi^*) - G_0(\eta/2)}{\xi^* - \eta/2}$.

Из (64)–(66) и (67) следует сходимость последовательности измеримых функций $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = B(x),$$

причем $\tilde{B}(x) \leq B(x) \leq \xi^*$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi^* - B \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi^* - B(x))dx \leq \frac{1}{1 - R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)dx$$

и $B(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Теорема доказана. □

4. Единственность решения

Возникает естественный вопрос. Является ли единственным построенное решение уравнения (1) в следующем классе ограниченных функций:

$$\mathcal{P} := \{f(x) : f(x) \geq \tilde{B}(x), x \in \mathbb{R}, f \in L_{\infty}(\mathbb{R}), \exists c > 0 \text{ такое, что } c - f \in L_1(\mathbb{R})\} ? \quad (68)$$

В настоящем параграфе при некоторых дополнительных ограничениях на λ , ω и K мы докажем единственность решения уравнения (1) в классе функций \mathcal{P} .

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия 1), 2), а), б), g_1)– g_3) и ω_1), ω_2), причем K и ω непрерывны соответственно на множествах \mathbb{R}^2 и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Тогда, если $\inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda(x) > 0$, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$\left[\begin{array}{l} \beta \in L_1(\mathbb{R}), \\ \beta \notin L_1(\mathbb{R}), \quad \beta_0 - \omega(t, \rho(t)) \in L_1(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

и при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $\omega(t, u)$ выпукла вверх по u на множестве \mathbb{R}^+ , то уравнение (1) (с нелинейностью (48)) в классе \mathcal{P} не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет два решения B, B^* в классе \mathcal{P} . Из непрерывности функций λ, K и ω в силу того, что $B, B^* \in L_\infty(\mathbb{R})$, немедленно следует, что $B, B^* \in C(\mathbb{R})$. Пусть теперь в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ эти решения принимают различные значения. Тогда в силу непрерывности функций B и B^* существует число $\delta > 0$ такое, что $B(x) \neq B^*(x), x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Учитывая 1), (42), (44), ω_1, ω_2 и условие $\inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda(x) > 0$, из (1) будем иметь

$$B(x) \geq \frac{\xi}{2} \inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda(x) \int_{-\infty}^{\delta_1} K(x, t) dt > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (69)$$

Так как $B, B^* \in \mathcal{P}$, очевидно, что

$$B - B^* \in L_1(\mathbb{R}).$$

Убедимся, что

$$G_0(B(t)) - G_0(B^*(t)) \in L_1(\mathbb{R}), \quad (70)$$

$$\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t)) \in L_1(\mathbb{R}). \quad (71)$$

Учитывая (68), g_1 – g_3), будем иметь

$$\begin{aligned} 0 \leq |G_0(B(t)) - G_0(B^*(t))| &\leq |G_0(c) - G_0(B(t))| + |G_0(c) - G_0(B^*(t))| \leq \\ &\leq \frac{G_0(c)}{c} |c - B(t)| + \frac{G_0(c)}{c} |c - B^*(t)| \in L_1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Следовательно, (70) доказано.

В случае \mathcal{J} для разности $\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))$ получаем

$$0 \leq |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \leq 2\beta(t) \in L_1(\mathbb{R}),$$

а в случае \mathcal{L} с учетом (62), (68), (42) и (63) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| &\leq \\ &\leq |\beta_0 - \omega(t, B(t))| + |\beta_0 - \omega(t, B^*(t))| \leq 2(\beta_0 - \omega(t, \rho(t))) \in L_1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Таким образом, включение (71) также доказано.

Поскольку $G_0(B(t)) + \omega(t, B(t)), t \in \mathbb{R}$ представляет собой ограниченную функцию (ибо $0 \leq G_0(B(t)) + \omega(t, B(t)) \leq \beta_0 + G_0(\sup_{t \in \mathbb{R}} B(t)) < +\infty$), из (70),

(71), 1) и а) следует, что

$$\begin{aligned} \{G_0(B(x)) + \omega(x, B(x))\} \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \left(G_0(B(t)) - G_0(B^*(t)) + \right. \\ \left. + \omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t)) \right) dt \in L_1(\mathbb{R}). \quad (72) \end{aligned}$$

Оценим теперь следующую разность:

$$|B(x) - B^*(x)| \leq \lambda(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \left(|G_0(B(t)) - G_0(B^*(t))| + |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \right) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (73)$$

Умножим обе части неравенства (73) на функцию

$$\frac{G_0(B(x)) + \omega(x, B(x))}{\lambda(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

и в силу (72), 1), а также условия $\inf_{x \in \mathbb{R}} \lambda(x) > 0$ интегрируем полученное неравенство по x в пределах от $-\infty$ до ∞ . В результате, пользуясь симметричностью ядра K и теоремой Фубини, получим

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(G_0(B(x)) + \omega(x, B(x)))|B(x) - B^*(x)|}{\lambda(x)} dx \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} (G_0(B(x)) + \omega(x, B(x))) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) \left(|G_0(B(t)) - G_0(B^*(t))| + |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \right) dt dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \{ |G_0(B(t)) - G_0(B^*(t))| + |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \} \times \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x) (G_0(B(x)) + \omega(x, B(x))) dx dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \{ |G_0(B(t)) - G_0(B^*(t))| + |\omega(t, B(t)) - \omega(t, B^*(t))| \} \frac{B(t)}{\lambda(t)} dt \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x)} \left\{ (G_0(B(x)) + \omega(x, B(x)))|B(x) - B^*(x)| - \right. \\ & \quad \left. - |G_0(B(x)) - G_0(B^*(x))||B(x) - \omega(x, B(x)) - \omega(x, B^*(x))||B(x) \right\} dx \leq 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Обозначим через

$$E := \{x \in \mathbb{R} : B(x) \neq B^*(x)\}. \quad (75)$$

Очевидно, что $\text{mes } E > 0$, ибо $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset E$. Учитывая (69), (75) и условия $g_1) - g_3)$, $\omega_1) - \omega_3)$, неравенство (74) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_E \frac{B(x)|B(x) - B^*(x)|}{\lambda(x)} \left\{ \frac{G_0(B(x))}{B(x)} - \frac{|G_0(B(x)) - G_0(B^*(x))|}{|B(x) - B^*(x)|} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\omega(x, B(x))}{B(x)} - \frac{|\omega(x, B(x)) - \omega(x, B^*(x))|}{|B(x) - B^*(x)|} \right\} dx \leq 0. \end{aligned}$$

Из выпуклости вверх функций G_0 и ω по u с учетом g_2 , ω_1 и ω_2) следует, что во всех точках множества E справедливы оценки

$$\frac{G_0(B(x))}{B(x)} > \frac{|G_0(B(x)) - G_0(B^*(x))|}{|B(x) - B^*(x)|}, \quad x \in E; \quad (76)$$

$$\frac{\omega(x, B(x))}{B(x)} > \frac{|\omega(x, B(x)) - \omega(x, B^*(x))|}{|B(x) - B^*(x)|}, \quad x \in E. \quad (77)$$

Принимая во внимание (76) и (77), из (75) приходим к противоречию. Следовательно, $B(x) = B^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, теорема доказана. \square

Замечание 4. Отметим, что данный подход, используемый при доказательстве единственности решения, для более простых нелинейных интегральных уравнений впервые был применен в недавней работе одного из авторов настоящей работы (см. [15]).

5. Примеры

В последнем параграфе настоящей работы приведем примеры функций K , λ , G_0 и ω . Отметим, что часть этих примеров, кроме чисто теоретического интереса, имеет также прикладной интерес в p -адической математической физике, в математической биологии и в кинетической теории газов.

Сперва приведем примеры ядра K . Пусть $\mu_0(x)$ и $\overset{0}{K}(x)$ — определенные на множестве \mathbb{R} непрерывные и положительные функции, обладающие следующими свойствами:

i) $0 < c := \inf_{x \in \mathbb{R}} \mu_0(x) \leq \mu_0(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu_0(-\tau) = \mu_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$;

ж) $(1 - \mu_0(x))x \in L_1(\mathbb{R})$;

к) $\overset{0}{K} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, $\overset{0}{K}(-\tau) = \overset{0}{K}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^\infty K_0(y)dy = \frac{1}{2}$.

Тогда примерами ядра $K(x, t)$ могут служить следующие функции:

к₁) $K(x, t) = \overset{0}{K}(x - t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$;

к₂) $K(x, t) = \mu_0(x + t) \overset{0}{K}(x - t) + (1 - \mu_0(x - t)) \overset{0}{K}(x + t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$;

к₃) $K(x, t) = \overset{0}{K}(x - t) \left(\frac{1 + \mu_0(x + t)}{2} \right) + \overset{0}{K}(x + t) \left(\frac{1 - \mu_0(x - t)}{2} \right)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Подробно остановимся на примере **к₂**). Проверим, что выполняются условия 1) и 2). Действительно, сперва в качестве K_1 и K_2 выберем следующие функции:

$$K_1(x, t) = q_1(x) \mu_0(x + t) \overset{0}{K}(x - t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2; \quad (78)$$

$$K_2(x, t) = q_2(x) \mu_0(x + t) \overset{0}{K}(x - t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (79)$$

где $\{q_j(x)\}_{j=1,2}$ — непрерывные функции на \mathbb{R} , причем

$$0 < d_j := \inf_{x \in \mathbb{R}} q_j(x) \leq q_j(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2; \quad (80)$$

$$x(1 - q_j(x)) \in L_1(\mathbb{R}), \quad j = 1, 2. \quad (81)$$

Докажем выполнимость условий (2)–(9). Учитывая условия i), j), k), (80) и (81), будем иметь

$$\int_{-\infty}^x K_1(x, t) dt \leq \int_{-\infty}^x {}^0K(x-t) dt = \int_0^{\infty} {}^0K(y) dy = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int_t^{\infty} K_1(x, t) dx \leq \int_t^{\infty} {}^0K(x-t) dx = \int_0^{\infty} {}^0K(y) dy = \frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^x K_1(x, t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} {}^0K(y) dy - q_1(x) \int_0^{\infty} \mu_0(2x-y) {}^0K(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} {}^0K(y) (1 - q_1(x) \mu_0(2x-y)) dy \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} m^-(\gamma_1) &= \int_{-\infty}^0 (-x) \gamma_1(x) dx \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^0 (-x) \int_0^{\infty} {}^0K(y) (1 - q_1(x) \mu_0(2x-y)) dy dx = \\ &= \int_0^{\infty} {}^0K(y) \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - q_1(x) \mu_0(2x-y)) dx dy = \\ &= \int_0^{\infty} {}^0K(y) \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - q_1(x)) dx dy + \\ &\quad + \int_0^{\infty} {}^0K(y) \int_{-\infty}^0 (-x) q_1(x) (1 - \mu_0(2x-y)) dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - q_1(x)) dx + \int_0^{\infty} {}^0K(y) \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - \mu_0(2x-y)) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - q_1(x)) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} {}^0K(y) \int_{-\infty}^{-y} \left(\frac{-t-y}{2} \right) (1 - \mu_0(t)) dt dy \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - q_1(x)) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} {}^0K(y) \int_{-\infty}^0 (-t) (1 - \mu_0(t)) dt dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (-x) (1 - q_1(x)) dx + \frac{1}{8} \int_0^{\infty} t (1 - \mu_0(t)) dt < +\infty. \end{aligned}$$

Аналогично можно проверить условие (4) и $m^+(\gamma_2) < +\infty$. Теперь проверим выполнение условий (5) и (6). Учитывая i), (80) и k), имеем

$$\int_{r_1}^{\infty} K_1(x+y, x) dy \geq cd_1 \int_{r_1}^{\infty} {}^0K(y) dy > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int_{r_2}^{\infty} K_2(x-y, x)dy \geq cd_2 \int_{r_2}^{\infty} \overset{0}{K}(-y)dy = cd_2 \int_{r_2}^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2$. Из представления ядра K в примере k_2) с учетом (78) и (79) немедленно следует неравенство (9). Итак, для ядра k_2) условие 2) выполнено. Проверим теперь условие 1). В силу четности функций $\overset{0}{\mu}_0$ и $\overset{0}{K}$ имеем

$$K(x, t) = K(t, x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)dt &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(x+t) \overset{0}{K}(x-t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \mu_0(x-t)) \overset{0}{K}(x+t)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(2x-y) \overset{0}{K}(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \mu_0(2x-y)) \overset{0}{K}(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy = 2 \int_0^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy = 1, \quad \text{ибо} \quad \int_0^{\infty} \overset{0}{K}(y)dy = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для примеров k_1), k_3) проверка условий 1) и 2) осуществляется аналогичными рассуждениями.

Следует отметить, что если дополнительно $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q_j(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mu_0(x) = 1$, $j = 1, 2$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \lambda(x) = 1$, то условия А) и В) также будут выполнены.

Для полноты изложения приведем также конкретные примеры $\{q_j(x)\}_{j=1,2}$, $\overset{0}{K}$ и μ_0 :

$$\begin{aligned} q_j(x) &= 1 - (1 - d_j)e^{-|x|}, \quad j = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}; \\ q_j(x) &= 1 - \frac{1 - d_j}{1 + |x|^{2+\delta_0}}, \quad \delta_0 > 0, \quad j = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \overset{0}{K}(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{82}$$

где $\tau > 0$ — числовой параметр;

$$\overset{0}{K}(x) = \int_a^b e^{-|x|s} \mathcal{D}(s)ds, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{83}$$

где $\mathcal{D}(s) > 0$ — непрерывная функция на $[a, b]$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b \frac{\mathcal{D}(s)}{s} ds &= 1; \\ \mu_0(x) &= 1 - (1 - c)e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \\ \mu_0(x) &= 1 - \frac{1 - c}{1 + x^4}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{84}$$

Отметим, что ядра, допускающие представления k_1), и k_2) (где K задается либо согласно (82), либо посредством (83), а $\mu_0(x)$ имеет структуру (84)), имеют приложения в теории p -адических открыто-замкнутых струн, в математической теории распространения эпидемии и в кинетической теории газов (см. [1–5, 9, 10]).

Перейдем к примерам функции λ :

$$\lambda(x) = 1 - \varepsilon^* e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\lambda(x) = 1 - \left(\frac{e^{-|x|} + e^{-x^4}}{2} \right) \varepsilon^*, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\varepsilon^* \in (0, 1)$ — числовой параметр.

Теперь приведем примеры нелинейности G_0 :

$$G_0(u) = \sqrt[p]{u}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \tag{85}$$

где $p \geq 2$ — произвольное число;

$$G_0(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad u \in \mathbb{R}^+, \tag{86}$$

где $\gamma > 1$ — числовой параметр;

$$G_0(u) = \frac{1}{2}(\sqrt[p]{u} + \gamma(1 - e^{-u})), \quad u \in \mathbb{R}^+. \tag{87}$$

Выполнение условий $g_1)$ – $g_3)$ для нелинейности вида (85) очевидно. Ниже убедимся, что при подходящем выборе параметра $\gamma > 1$ нелинейность $G_0(u) = \gamma(1 - e^{-u})$ удовлетворяет условиям $g_1)$ – $g_3)$. Сначала заметим, что $G_0(u) \uparrow$ по u на \mathbb{R}^+ , ибо $G_0'(u) = \gamma e^{-u} > 0$. С другой стороны, так как $G_0''(u) = -\gamma e^{-u} < 0$, функция $y = G_0(u)$ выпукла вверх на \mathbb{R}^+ . Докажем теперь, что при $\gamma > 1$ уравнение $G_0(u) = u$ имеет положительное решение η . Рассмотрим функцию $\chi(u) := \gamma(1 - e^{-u}) - u$ на \mathbb{R}^+ . Имеем $\chi(0) = 0$, $\chi'(u) = \gamma e^{-u} - 1 \geq 0$ при $0 \leq u \leq \ln \gamma$ и $\chi'(u) < 0$ при $u > \ln \gamma$, $\chi(+\infty) = -\infty$. Следовательно, существует единственное положительное решение $\eta > \ln \gamma$ уравнения $G_0(u) = u$.

Проверим также, что уравнение $G_0(u) = 2u$ при $\gamma > 2$ имеет положительное решение ξ , причем $\xi < \eta$. С этой целью здесь рассмотрим функцию $\tilde{\chi}(u) := \gamma(1 - e^{-u}) - 2u$, $u \in \mathbb{R}^+$. Имеем $\tilde{\chi}(0) = 0$, $\tilde{\chi}'(u) = \gamma e^{-u} - 2 \geq 0$ при $0 \leq u \leq \ln(\gamma/2)$ и $\tilde{\chi}'(u) < 0$ при $u > \ln(\gamma/2)$, $\tilde{\chi}(+\infty) = -\infty$. Следовательно, уравнение $G_0(u) = 2u$ также имеет единственное положительное решение ξ . Из выпуклости вверх функции $G_0(u)$ следует, что $G_0(u)/u \downarrow$ по u на $(0, +\infty)$. Учитывая монотонность функции $\frac{G_0(u)}{u}$ и неравенство

$$\frac{G_0(\xi)}{\xi} = 2 > 1 = \frac{G_0(\eta)}{\eta},$$

закключаем, что $0 < \xi < \eta$.

С использованием двойного неравенства

$$\max\{a, b\} \geq \frac{a + b}{2} \geq \min\{a, b\}, \quad a, b > 0,$$

для примера (87) несложно проверить выполнение условий $g_1)$ – $g_3)$.

Наконец, приведем примеры нелинейности $\omega(t, u)$.
Сперва приведем примеры $\omega(t, u)$ для случая \mathcal{J} :

$$\omega(t, u) = (1 - e^{-u})\beta(t), \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad (88)$$

где $\beta(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и $\beta \in L_1(\mathbb{R})$;

$$\omega(t, u) = \frac{u\beta(t)}{u+1}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (89)$$

Приведем также примеры $\omega(t, u)$ для случая \mathcal{L} :

$$\omega(t, u) = \frac{\beta_0 u}{u + \Gamma(t)}, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (90)$$

где $\Gamma(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\Gamma \in L_1(\mathbb{R})$ — произвольная функция, а $\beta_0 > 0$ — число;

$$\omega(t, u) = \left(1 - \exp\left(\frac{u}{\rho(t)} \ln p(t)\right)\right)\beta_0, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (91)$$

где функция $\rho(t)$ задается посредством формулы (63), а $p(t)$ — произвольная функция на \mathbb{R} со свойствами

$$0 < p(t) < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad p \in L_1(\mathbb{R}).$$

Подробно обсудим пример (90). Во-первых, заметим, что

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \beta_0 \frac{\Gamma(t)}{(u + \Gamma(t))^2} > 0, \quad u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $\omega(t, u) \uparrow$ по u на \mathbb{R}^+ . Очевидно, что

$$\omega(t, 0) \equiv 0 \quad \text{и} \quad \sup_{(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \omega(t, u) = \beta_0,$$

причем

$$\beta_0 - \omega(t, \rho(t)) = \beta_0 - \frac{\beta_0 \rho(t)}{\rho(t) + \Gamma(t)} = \frac{\beta_0 \Gamma(t)}{\rho(t) + \Gamma(t)}.$$

Убедимся, что

$$0 < W(t) := \frac{\Gamma(t)}{\rho(t) + \Gamma(t)} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Действительно, когда $t \in [\delta_1, \delta_2]$, имеем

$$0 < W(t) \leq 1, \quad (92)$$

а когда $t \in (-\infty, \delta_1) \cup (\delta_2, +\infty)$, в силу (44) и (63) приходим к неравенству:

$$0 < W(t) \leq \frac{2}{\eta} \Gamma(t) \in L_1(\mathbb{R}). \quad (93)$$

Принимая во внимание (92) и (93), в силу измеримости W приходим к включению $W \in L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, для функции вида (90) условие (62) выполняется.

Теперь заметим, что $\omega(t, u)$ является выпуклой вверх функцией по u на множестве \mathbb{R}^+ . Действительно, данный факт сразу следует из отрицательности $\partial^2\omega/\partial u^2$ для всех $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} = -\frac{2\beta_0\Gamma(t)}{(u + \Gamma(t))^3} < 0.$$

Проверка соответствующих условий для примеров (88), (89) и (91) осуществляется по аналогии.

В конце работы отметим, что нелинейные интегральные уравнения с ядрами вида k_1) и с нелинейностью вида (85) + (89) встречаются в p -адической математической физике и в кинетической теории газов, а уравнения с ядрами вида k_1), k_2) и с нелинейностью вида (86) + (91) — в математической биологии (см. [1–5, 9, 10]).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00223).

Библиографический список

1. Арефьева И. Я. Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p -адических струнах / *Избранные вопросы p -адической математической физики и анализа*: Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова / Труды МИАН, Т. 245. М.: Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», 2004. С. 47–54.
2. Владимиров В. С., Волович Я. И. О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // *ТМФ*, 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf36>.
3. Коган М. Н. *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*. М.: Наука, 1967. 440 с.
4. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // *ТМФ*, 2016. Т. 189, № 2. С. 239–255. EDN: XDLVQP. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9108>.
5. Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х. О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в модели Бхатнагара–Гросса–Крука // *ТМФ*, 2000. Т. 125, № 2. С. 339–342. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf673>.
6. Енгибарян Н. Б. Об одной задаче нелинейного переноса излучения // *Астрофизика*, 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
7. Соболев В. В. Проблема Милна для неоднородной атмосферы // *Докл. АН СССР*, 1978. Т. 239, № 3. С. 558–561.
8. Арабаджян Л. Г. Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде // *Диффер. уравн.*, 1987. Т. 23, № 9. С. 1618–1622.

9. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // *J. Math. Biology*, 1978. vol. 6, no. 2. pp. 109–130. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02450783>.
10. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1978. vol. 2, no. 6. pp. 721–737. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(78\)90015-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9).
11. Жуковская Л. В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // *ТМФ*, 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409. EDN: [HTIPKF](https://doi.org/10.4213/tmf2043). DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2043>.
12. Владимиров В. С. О решениях p -адических струнных уравнений // *ТМФ*, 2011. Т. 167, № 2. С. 163–170. EDN: [RLRUSV](https://doi.org/10.4213/tmf6631). DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6631>.
13. Владимиров В. С. Об уравнении p -адической открытой струны для скалярного поля тахионов // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2005. Т. 69, № 3. С. 55–80. EDN: [HSUXVP](https://doi.org/10.4213/tmf6631).
14. Хачатрян Х. А. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p -адической струны // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2018. Т. 82, № 2. С. 172–193. EDN: [YSWJ00](https://doi.org/10.4213/im8580). DOI: <https://doi.org/10.4213/im8580>.
15. Хачатрян Х. А. О разрешимости некоторых нелинейных граничных задач для сингулярных интегральных уравнений типа свертки // *Тр. ММО*, 2020. Т. 81, № 1. С. 3–40.
16. Хачатрян Х. А. О разрешимости одной граничной задачи в p -адической теории струн // *Тр. ММО*, 2018. Т. 79, № 1. С. 117–132. EDN: [YZHZTV](https://doi.org/10.4213/im8580).
17. Арабаджян Л. Г. Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // *Изв. НАН Армении. Математика*, 1997. Т. 32, № 1. С. 21–28.
18. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one class of Hammerstein nonlinear integral equations // *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2010. no. 2. pp. 67–83.
19. Хачатрян Х. А. Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200. EDN: [RDNIDP](https://doi.org/10.4213/im5402). DOI: <https://doi.org/10.4213/im5402>.
20. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна–Стилтьеса на всей прямой / *Дифференциальные уравнения и динамические системы: Сборник статей / Труды МИАН*, Т. 308. М.: МИАН, 2020. С. 253–264. EDN: [WEJLIY](https://doi.org/10.4213/tm4051). DOI: <https://doi.org/10.4213/tm4051>.
21. Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Однопараметрические семейства положительных решений для некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки // *Сиб. журн. чист. и прикл. матем.*, 2017. Т. 17, № 1. С. 91–108. EDN: [YNEGZR](https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.108). DOI: <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.108>.
22. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1981. 542 с.
23. Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А., Петросян А. С. Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2021. Т. 27, № 1. С. 188–206. EDN: [GOJJTE](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-188-206). DOI: <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-1-188-206>.

MSC: 45G05

Problems of the existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear integral equations on the whole line

Kh. A. Khachatryan^{1,3}, *H. S. Petrosyan*^{2,3}¹ Yerevan State University,

1, A. Manukyan str., Yerevan, 0025, Armenia.

² Armenian National Agrarian University,

74, Marshal Teryan str., Yerevan, 0009, Armenia.

³ Lomonosov Moscow State University,

1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

We consider a class of nonlinear integral equations with a stochastic and symmetric kernel on the whole line. With certain particular representations of the kernel and nonlinearity, equations of the mentioned type arise in many branches of mathematical natural science. In particular, such equations occur in the theory p -adic strings, in the kinetic theory of gases, in mathematical biology and in the theory of radiative transfer. Constructive existence theorems are proved for non-negative non-trivial and bounded solutions under various restrictions on the function describing the nonlinearity in the equation. Under additional restrictions on the kernel and on the nonlinearity, a uniqueness theorem is also proved in a certain class of bounded and non-negative functions that have a finite limit in $\pm\infty$. At the end, specific applied examples of the kernel and non-linearity are given that satisfy to all restrictions of the proven statements.

Keywords: monotonicity, successive approximations, convergence, bounded solution, solution limit, Caratheodory condition.

Received: 26th May, 2022 / Revised: 8th August, 2022 /Accepted: 11th August, 2022 / First online: 5th September, 2022

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Problems of the existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear integral equations on the whole line, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 446–479. EDN: NIORFC. DOI: [10.14498/vsgtu1932](https://doi.org/10.14498/vsgtu1932) (In Russian).

Authors' Details:

Khachatryan A. Khachatryan  <https://orcid.org/0000-0002-4835-943X>

D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Professor; Head of the Dept.; Dept. of Theory of Functions and Differential Equations¹; Leading Member of the grant of the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00223)³; e-mail: khachatryan.khachatryan@ysu.am

Haykanush S. Petrosyan  <https://orcid.org/0000-0002-7172-4730>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Dept of Higher Mathematics and Physics²; Member of the grant of the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00223)³; e-mail: haykuhi25@mail.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' Responsibilities. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-11-00223).

References

1. Aref'eva I. Ya. Rolling tachyon on non-BPS branes and p -adic strings, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, vol. 245, pp. 40–47.
2. Vladimirov V. S., Volovich Ya. I. Nonlinear dynamics equation in p -adic string theory, *Theoret. and Math. Phys.*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29>.
3. Kogan M. N. *Rarefied Gas Dynamics*. New York, Springer Science, 1969, xi+515 pp.
4. Khachatryan A. K., Khachatryan K. A. Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave, *Theoret. and Math. Phys.*, 2016, vol. 189, no. 2, pp. 1609–1623. EDN: XMNGQJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040577916110064>.
5. Engibaryan N. B., Khachatryan A. Kh. Exact linearization of the sliding problem for a dilute gas in the Bhatnagar–Gross–Krook model, *Theoret. and Math. Phys.*, 2000, vol. 125, no. 2, pp. 1589–1592. EDN: XTKIJJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02551017>.
6. Engibaryan N. B. A nonlinear problem of radiative transfer, *Astrophysics*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 12–14. EDN: XMNFB. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01041941>.
7. Sobolev V. V. The Milne problem for an inhomogeneous atmosphere, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 3, pp. 558–561 (In Russian).
8. Arabadzhyan L. G. On an integral equation of transport theory in an inhomogeneous medium, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1618–1622 (In Russian).
9. Diekmann O. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection, *J. Math. Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02450783>.
10. Diekmann O., Kaper H. G. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. DOI: [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(78\)90015-9](https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90015-9).
11. Joukovskaya L. V. Iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory, *Theoret. and Math. Phys.*, 2006, vol. 146, no. 3, pp. 335–342. EDN: LKBTTT. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11232-006-0043-3>.
12. Vladimirov V. S. Solutions of p -adic string equations, *Theoret. and Math. Phys.*, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 539–546. EDN: OIBKZL. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11232-011-0040-z>.
13. Vladimirov V. S. The equation of the p -adic open string for the scalar tachyon field, *Izv. Math.*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. EDN: LIWGVV. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2005v069n03ABEH000536>.
14. Khachatryan Kh. A. On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p -adic string theory, *Izv. Math.*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. EDN: YCIQJV. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM8580>.
15. Khachatryan Kh. A. Solvability of some nonlinear boundary value problems for singular integral equations of convolution type, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2020, vol. 81, no. 1, pp. 1–31. EDN: TTYLNH. DOI: <https://doi.org/10.1090/mosc/306>.
16. Khachatryan Kh. A. On the solvability of a boundary value problem in p -adic string theory, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2018, pp. 101–115. EDN: DNYZMK. DOI: <https://doi.org/10.1090/mosc/281>.
17. Arabadzhyan L. G. Solutions of certain integral equations of the Hammerstein type, *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 17–24.

18. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On solvability of one class of Hammerstein nonlinear integral equations, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.*, 2010, no. 2, pp. 67–83.
19. Khachatryan Kh. A. On a class of integral equations of Urysohn type with strong nonlinearity, *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 163–189. EDN: PGUBLV. DOI: <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n01ABEH002579>.
20. Khachatryan K. A., Petrosyan H. S. On the solvability of a class of nonlinear Hammerstein—Stieltjes integral equations on the whole line, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, vol. 308, pp. 238–249. EDN: TXFHWH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543820010198>.
21. Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. One parameter families of positive solution of some classes of convolution type nonlinear integral equations, *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 231, no. 2, pp. 153–167. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3812-2>.
22. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1981, 542 pp. (In Russian)
23. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S. Asymptotic behavior of a solution for one class of nonlinear integro-differential equations in the income distribution problem, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 188–206 (In Russian).



УДК 539.374

Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв

А. А. Буренин, А. В. Ткачева, С. В. Фирсов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН
Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН,
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, Металлургов, 1.

Аннотация

Изучается прочность соединения в сборке с натягом двухслойного вала, произведенной с помощью операции горячей посадки. Материалы деталей сборки считаются идеальными упругопластическими с пределами пластичности, существенно зависимиыми от температуры. В расчетах принимаются условия плоского деформированного состояния. Испытания соединения на отрыв производятся при помощи вращения сборки вокруг ее оси, когда отрывные усилия создаются в форме центробежных сил инерции. Показано, что с ростом скорости вращения натяг в сборке падает. Рассчитывается предельная из возможных угловая скорость вращения, при которой натяг в сборке исчезает.

Ключевые слова: упругость, пластичность, сборка с натягом, горячая посадка, температурные напряжения, вращение упругопластического цилиндра.

Получение: 15 мая 2022 г. / Исправление: 2 сентября 2022 г. /

Принятие: 20 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 26 сентября 2022 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Буренин А. А., Ткачева А. В., Фирсов С. В. Задача Гадолина о сборке двухслойного вала горячей посадкой с испытанием соединения на отрыв // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 480–499. EDN: [MVCIJF](https://www.edn.ru/record/10.14498/vsgtu1928). DOI: [10.14498/vsgtu1928](https://doi.org/10.14498/vsgtu1928).

Сведения об авторах

Анатолий Александрович Буренин  <https://orcid.org/0000-0003-4502-9547>

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН; главный научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Анастасия Валерьевна Ткачева  <https://orcid.org/0000-0003-1795-0021>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: 4nansi4@mail.ru

Сергей Викторович Фирсов  <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>

младший научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий; e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

Введение. В машиностроении часто используются составные детали механизмов и машин, полученные сборкой посредством операции горячей посадки [1]. Такие детали кроме их функциональной предназначенности могут обладать иными преимуществами перед сплошными. Характерным примером тому являются двухслойные преднапряженные стволы артиллерийских орудий, конструкция которых была предложена академиком А. В. Гадолиным [2]. Стволы такой конструкции оказались способными выдерживать повышенные уровни давления пороховых газов, что способствовало повышению прицельной дальности стрельбы. Технология сборки способом горячей посадки проста и заключается в нагревании охватывающего элемента сборки до назначаемой температуры и помещения внутрь него холодного охватываемого элемента. При этом подбором размеров добиваются непосредственного контакта данных элементов сборки по их общей цилиндрической поверхности с момента времени, близкого к моменту посадки. После остывания сборки в комнатных условиях образуется достаточно прочное неразъемное соединение.

Оценки натяга в сборке первоначально брались из решения краевых задач теории температурных напряжений в упругих телах [3,4]. Учет влияния необратимых (пластических) деформаций на распределение итоговых остаточных напряжений и натяга в сборке стал возможным только в результате развития приближенных численных методов расчета и соответствующего вычислительного инструментария [5–10]. В связи с этим отметим, что деформированные состояния осесимметричных тел с учетом сформированных областей пластического течения рассматривались в работах [11–15]. Выяснилось, что для упрощения математического аппарата, представляющего возможность получить точное решение задачи, в качестве классических кусочно-линейных пластических потенциалов можно использовать условия пластического течения — условия пластического течения максимальных касательных напряжений (условия Треска—Сен-Венана) или максимальных приведенных напряжений (условия Ишлинского—Ивлева). Однако еще Д. Бленд заметил [11], что в таком случае пластическая область может разделиться на части, в которых напряжения подчинены различным граням и ребрам кусочно-линейных поверхностей нагружения (разным граням и ребрам наклонных призм Треска или Ивлева в пространстве главных напряжений). Данное обстоятельство существенно усложняет расчеты температурных напряжений в рассматриваемый момент времени. Более того, задача о сборке цилиндрических изделий способом горячей посадки не относится к задачам об упругопластическом состоянии, а является задачей о процессе (сопутствующей технологической операции) от момента посадки до полного остывания сборки. Поэтому области пластического течения могут зарождаться, делиться, исчезать, а каждый такой момент времени должен отслеживаться и учитываться в расчетах.

Возможность выписать точное решение одномерной задачи о распределении температурных напряжений по элементам сборки в каждый рассчитываемый момент времени в зависимости от текущего (известного, рассчитанного) распределения температуры является основным преимуществом использования кусочно-линейных пластических потенциалов (кусочно-линейных условий пластического течения) в расчетах. Задача о горячей посадке, называемая в отечественной литературе [14, 19] задачей Гадолина, не явля-

ется задачей об упругопластическом состоянии, так как она рассматривает развитие упругопластического процесса. В этом случае точное решение необходимо получать на каждом временном шаге расчетов [9, 10, 16–20], уточняя размеры пластической области с учетом ее деления, появления новых и/или исчезновения существующих областей течения.

Прочность соединений, созданных с помощью технологии горячей посадки, проверялась теоретически и экспериментально [21–25]. Так, в [21] соединение испытывалось на скручивание охватывающей детали сборки, в [22, 23] сборка в целом проверялась на кручение, в [24] — на осевое давление, а в [25] — на циклические нагрузки. Наиболее опасными для натяга в сборке являются внешние усилия, формирующие отрыв. В работе [26] отрывные усилия создавались силами инерции при осевом вращении диска. Понижение натяга в сборке за счет действия центробежных сил инерции рассчитывалось на основе решения одномерной краевой задачи теории плоского напряженного состояния в упругопластическом теле [27, 28]. В настоящей работе рассматривается эволюция натяга в сборке двухслойного вала [18] на основе способа расчета одномерных упругопластических процессов во вращающихся цилиндрах [29, 30].

1. Исходные соотношения математической модели. Расчеты будем проводить в рамках математической модели идеального упругопластического тела. Допускаемые телом деформации \mathbf{d} полагаем малыми и состоящими из упругой \mathbf{e} и пластической \mathbf{p} составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}),$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений. Пренебрегая силами инерции и массовыми силами, локальное следствие закона сохранения импульса запишем в форме уравнения равновесия

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (1)$$

Следствие закона сохранения энергии запишем в форме уравнения баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{d\xi}{dt} + \nabla \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (2)$$

где ρ — плотность деформируемого материала, \mathbf{q} — вектор теплового потока, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор скорости деформации Эйлера, t — текущее время. Термодинамический потенциал $\xi = \xi(\mathbf{d}, s)$ является функцией параметров состояния \mathbf{d} и s . Примем упрощающее предположение, что данный потенциал зависит только от упругих деформаций: $\xi = \xi(\mathbf{e}, s)$. Введем иной термодинамический потенциал $\psi = \psi(\mathbf{e}, T)$ такой, что $\psi(\mathbf{e}, T) = \xi(\mathbf{e}, s) - sT$, где $T = \partial \xi / \partial s$ — температура.

С учетом таких упрощающих гипотез из (2) следуют соотношения [31]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, T)}{\partial \mathbf{e}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{T^2} \mathbf{q} \cdot \nabla T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = -s, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \mathbf{J} = \rho s \mathbf{v} + T^{-1} \mathbf{q}.$$

Если в формуле Мурнагана (3) для свободной энергии $\psi(\mathbf{e}, T)$ принять простейшую квадратную зависимость, то получаем зависимости закона Дюамеля–Неймана:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (\lambda \operatorname{tr} \mathbf{e} - 3\alpha T_0 K \theta) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}, \\ \theta &= (T - T_0)/T_0, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь λ, μ — параметры Ламе, T_0 — температура свободного состояния тела (комнатная температура), α — коэффициент линейного расширения деформируемого материала.

Если такую же простейшую квадратную зависимость для $\psi(\mathbf{e}, \theta)$ принять в (4), считая материал изотропным, и ограничиться простейшей формой Фурье в законе теплопроводности $\mathbf{q} = -\zeta \nabla T$, $\zeta = \text{const}$, то из (4) следует уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \dot{\theta} = a \Delta \theta - \frac{1}{c T_0} (\delta \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^e - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^p) + w(\mathbf{x}, t).\tag{6}$$

Здесь a — коэффициент температуропроводности, c — удельная теплоемкость материала, δ — коэффициент связанности; через $w(\mathbf{x}, t)$ обозначены возможные источники тепла в деформируемом материале, где \mathbf{x} — радиус-вектор места рассматриваемой точки. Иногда теплом, производимым за счет деформирования, по сравнению с теплом, поступающим от внешних источников, можно пренебречь. Тогда уравнение теплопроводности (6) приобретает более простую форму:

$$\dot{\theta} = a \Delta \theta + w(\mathbf{x}, t).\tag{7}$$

В таком случае, следуя (7), распределение температуры по деформируемому телу можно рассчитать независимо от процесса его деформирования. Данная несвязанная теория, называемая теорией температурных напряжений в деформируемых материалах, будет использоваться в дальнейших расчетах.

Изначально деформации в материале растут в форме обратимых (упругих) деформаций согласно условиям (1) и (5). Но с ростом температуры повышается уровень температурных напряжений и наступает момент времени, когда выполняется условие пластического течения: $f(\boldsymbol{\sigma}, k) = 0$. Последнее в шестимерном пространстве напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ задает поверхность нагружения. Из-за зависимости предела текучести k от температуры $k = k(\theta)$ поверхность нагружения меняет свое положение в пространстве напряжений. Принимая условие, что в каждый рассматриваемый момент времени выполняются условия принципа максимума Мизесса, имеем ассоциированный с поверхностью нагружения закон пластического течения [32]:

$$d\mathbf{p} = d\zeta \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}, k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\zeta > 0.\tag{8}$$

В качестве поверхности нагружения в дальнейших расчетах принимается боковая поверхность наклонной призмы Ивлева [33] в трехмерном пространстве главных напряжений:

$$\max |\sigma_j - \sigma| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}.\tag{9}$$

Это классическое кусочно линейное-условие пластического течения называют условием максимальных приведенных напряжений [33], либо условием Ишлинского—Ивлева [15, 18–20]. Зависимость предела текучести k от температуры далее принимаем в линейной форме:

$$k = k_0(\theta_p - \theta)/\theta_p.$$

Здесь $k_0 = \text{const}$ — предел текучести в опытах на чистый сдвиг при комнатной температуре T_0 ; θ_p — безразмерная температура плавления, наименьшая из температур плавления деформируемых материалов сборки.

2. Постановка задачи Гадолина. Распределение температуры. Технологически операция горячей посадки заключается в том, что в разогретую до назначаемой температуры T_* охватывающую деталь сборки (муфту — $R_2 \leq r \leq R_3$) помещают охватываемую деталь (вал — $0 \leq r \leq R_1$) комнатной температуры T_0 . Размеры подбираются так, чтобы непосредственно после момента посадки ($t = 0+$) детали сборки имели общую контактную поверхность $r = R$ ($R_1 = R_2 = R$). Это достигается за счет теплового расширения охватываемой детали за незначительное время после момента посадки. Сборку полагаем достаточно длинной, чтобы за счет пренебрежения торцевыми эффектами задача свелась к одномерной задаче теории температурных напряжений. Распределение температуры по элементам сборки следует из решения краевой задачи для дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат (r, φ, z)

$$\theta_{,t} = a(\theta_{,rr} + \theta_{,r}/r), \quad (10)$$

с начальными

$$\theta(r, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R; \\ \theta_*, & R \leq r \leq R_3, \end{cases} \quad \theta_* = (T_* - T_0)/T_0 \quad (11)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta_{,r}(0, t) &= 0, & \theta_{,r}(R_3, t) &= -\chi\theta(R_3, t), \\ \theta^{(1)}(R, t) &= \theta^{(2)}(R, t), & \beta_1\theta_{,r}^{(1)}(R, t) &= \beta_2\theta_{,r}^{(2)}(R, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\chi = \text{const}$ — коэффициент теплоотдачи от боковой поверхности $r = R_3$ охватывающей детали в окружающую среду; β_1 и β_2 — коэффициенты теплопроводности охватываемой (1) и охватывающей (2) деталей сборки соответственно. Запятой здесь и далее обозначается частная производная по соответствующей независимой переменной.

Получение точного решения задачи (10)–(12) не представляет каких-либо проблем. Далее считаем, что распределение температуры θ известно (рассчитано).

3. Эволюция температурных напряжений. Непосредственно после момента посадки $t = 0+$ детали сборки деформируются обратимо (упруго):

$$d_r = e_r = u_{r,r}, \quad d_\varphi = e_\varphi = u_r/r, \quad d_z = e_z = 0.$$

Компоненты тензора напряжений согласно закону Дюамеля–Неймана (5) запишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda u_r/r - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu)u_r/r + \lambda u_{r,r} - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_z &= \lambda(u_{r,r} + u_r/r) - 3\alpha KT_0\theta.\end{aligned}\quad (13)$$

Уравнение равновесия (1), записанное в цилиндрической системе координат

$$\sigma_{r,r} + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = 0, \quad (14)$$

при подстановке в него (13) приводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{K}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (15)$$

После интегрирования (15) получим

$$u_r^{(m)}(r, t) = \frac{3K}{(\lambda + 2\mu)} \Phi(r, l, 1) + C_1^{(m)}(t) \frac{r}{2} + C_2^{(m)}(t) \frac{1}{r},$$

где

$$\Phi(r, l, h) = \frac{\alpha T_0}{r^h} \int_l^r \rho^h \theta(\rho) d\rho.$$

Здесь $m = 1$ и $l = 0$ используются для вала, $m = 2$ и $l = R$ — для муфты.

Постоянные в рассматриваемый момент времени $C_1^{(m)}(t)$ и $C_2^{(m)}(t)$ определяются из граничных условий

$$\sigma_r(R_3, t) = 0, \quad C_2^{(1)}(t) = 0, \quad [\sigma_r(R, t)] = 0, \quad [u_r(R, t)] = 0. \quad (16)$$

Здесь квадратными скобками обозначен разрыв зависимых переменных на поверхности контакта $r = R$. Проводя по такой схеме расчеты последовательными шагами по времени, обнаруживаем, что в некоторый момент времени t_1 ($t_1 > 0$) на поверхности материала муфты $r = R$ выполняется условие пластического течения в форме $\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz} - 2\sigma_{rr} = 4k$. Это условие означает соответствие напряженного состояния грани наклонной призмы Ивлева [32, 33]. На рис. 1 в пространстве главных напряжений показано сечение призмы Ивлева девiatorной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$. Здесь указан отрезок шестиугольника, соответствующий грани, достигаемой напряжениями первоначально. С момента времени $t = t_1$ от поверхности $r = R$ отделяется и продвигается упругопластическая граница $r = n_1(t)$.

Упругопластические состояния в сборке и их эволюция для различных временных промежутков между моментами, в которых появляется новая или исчезает имеющаяся область пластического течения, показаны на рис. 2.

В развивающейся области пластического течения $R \leq r < n_1(t)$ (см. рис. 2) из (5) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (\lambda + 2\mu)(u_{r,r} - p_r) + \lambda(u_r/r - p_\varphi - p_z) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu)(u_r/r - p_\varphi) + \lambda(u_{r,r} - p_r - p_z) - 3\alpha KT_0\theta, \\ \sigma_z &= -p_z(\lambda + 2\mu) + \lambda(u_{r,r} - p_r + u_r/r - p_\varphi) - 3\alpha KT_0\theta.\end{aligned}\quad (17)$$

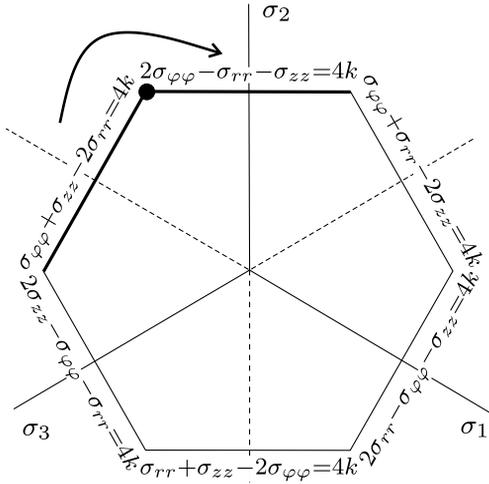


Рис. 1. Сечение призмы Ивлева девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

[Figure 1. Cross section of the Ivlev prism by the deviatoric plane $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$; Ishlinsky–Ivlev hexagon]

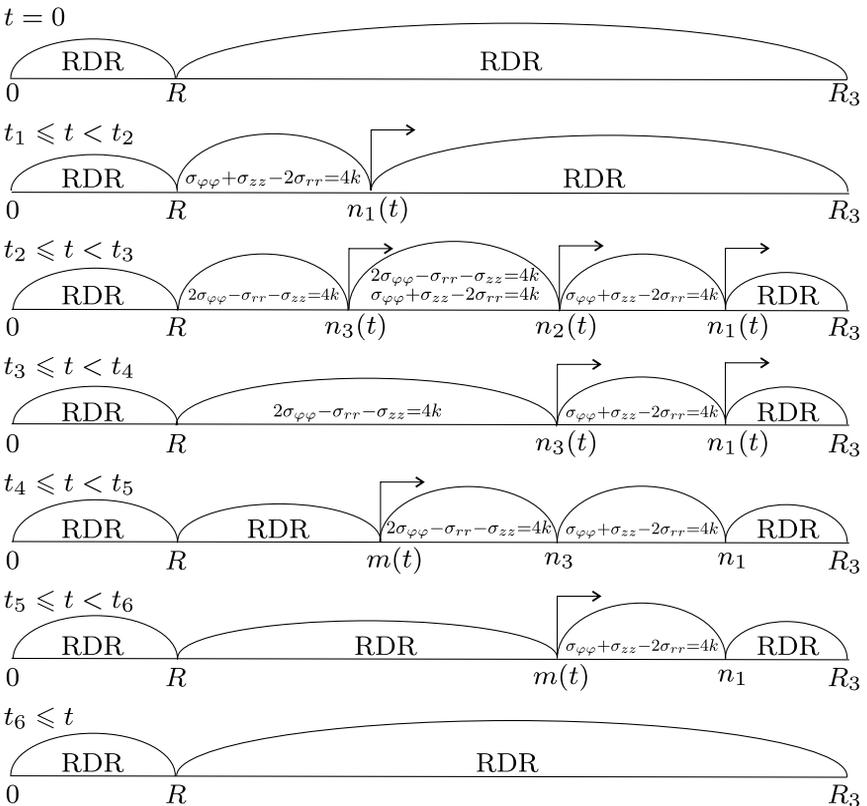


Рис. 2. Эволюция областей пластического течения; RDR — область обратимого деформирования

[Figure 2. The evolution of plastic flow regions; RDR — the reversible deformation region]

Необратимые деформации исключаются из (17) с помощью ассоциированного с гранью $\sigma_\varphi + \sigma_z - 2\sigma_r = 4k$ поверхности текучести (см. рис. 1) закона пластического течения (8):

$$dp_r = -2d\zeta, \quad dp_\varphi = d\zeta, \quad dp_z = d\zeta, \quad d\zeta = \frac{1}{6} \frac{u_r}{r} - \frac{2}{3}(k + u_{r,r}). \quad (18)$$

Зависимости (17) и (18) позволяют переписать уравнение равновесия (14) в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - h^2 \frac{u_r}{r^2} = \frac{2}{K} \left(\frac{2\partial k}{3\partial r} + \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad h^2 = \frac{3\lambda + 5\mu}{3\lambda + 2\mu}. \quad (19)$$

Полагая, что распределение температуры $\theta(r, t)$ в данный момент времени уже рассчитано и интегрируя (19), найдем

$$u_r = 1.5h^{-1}((h+1)\Phi(r, l, h) + (h-1)\Phi(r, l, -h)) - (2hr^h)^{-1}C_1^{(3)}(t) + (3Kh)^{-1}((2h-1)\Psi(r, l, h) - (2h+1)\Psi(r, l, -h)) + r^h C_2^{(3)}(t),$$

$$\sigma_r = 1.5K(hr)^{-1}(h^2 - 1)(\Phi(r, l, -h) - \Phi(r, l, h)) - (3hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Psi(r, l, h) + (h+1)(2h+1)\Psi(r, l, -h)) + (h-1)(2hr^{h+1})^{-1}KC_1^{(3)}(t) + (h+1)r^{h-1}KC_2^{(3)}(t),$$

$$\sigma_\varphi = -\Psi(r, l, -h)(3Krh)^{-1}(2h+1)(K(1+h) + \mu) - \Psi(r, l, h)(3Krh)^{-1}(2h-1)(K(1-h) + \mu) + 1.5\Phi(r, l, -h)(h-1)(rh)^{-1}(K(1+h) + \mu) + 1.5\Phi(r, l, h)(h+1)(rh)^{-1}(K(1-h) + \mu) - 2k - (K(1-h) + \mu)(2hr^{h+1})^{-1}C_1^{(3)}(t) + (K(1+h) + \mu)r^{h-1}C_2^{(3)}(t),$$

$$e_r^p = -2e_\varphi = 2\alpha T_0 \theta - 2(2\mu + \lambda)(3\mu K)^{-1}k + (4h^2 - 1)(9Khr)^{-1}(\Psi(r, l, h) - \Psi(r, l, -h)) + (2hr)^{-1}((h-1)(2h-1)\Phi(r, l, -h) - (h+1)(2h+1)\Phi(r, l, h)) + (2h+1)(6hr^{h+1})^{-1}C_1^{(3)}(t) + 3^{-1}(2h-1)r^{h-1}C_2^{(3)}(t),$$

где

$$\Psi(r, l, h) = \frac{1}{r^h} \int_l^r \rho^h k(\rho) d\rho, \quad l = R_1.$$

Теперь на каждом временном шаге расчетов следует определить значения шести функций $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_2^{(3)}$ и положение упругопластической границы $n_1(t)$ в этот момент времени. Для этой цели имеем условия (16),

а также условия непрерывности перемещения u_r и напряжения σ_r на продвигающейся поверхности $r = n_1(t)$ и выполнения на ней условия пластического течения. Такую систему алгебраических соотношений приходится разрешать на каждом шаге расчетов. С появлением новых областей течения порядок подобной системы уравнений будет расти. Далее на этом останавливаться не будем, но заметим, что подобные значения и рассчитываемые положения поверхностей, делящих область деформирования на части, всегда имеют для своего определения необходимое число граничных условий и условий на продвигающихся граничных поверхностях.

В области пластического течения $R \leq r \leq n_1(t)$ на внутренней поверхности муфты $r = R$ в момент времени $t = t_2 > t_1$ выполняется условие $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$. Здесь зарождается упругопластическая граница $r = n_2(t)$, которая разделяет область пластического течения на две части (см. рис. 2, $t_2 \leq t < t_3$). В новой области пластическое течение подчиняется ребру шестигранника Ишлинского—Ивлева (см. рис. 1).

Из-за выполнения сразу двух условий пластического течения $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$ и $\sigma_\varphi + \sigma_z - 2\sigma_r = 4k$ из ассоциированного закона пластического течения на ребре призмы Ивлева имеем

$$\begin{aligned} dp_r &= -2d\zeta_1 - d\zeta_2, & p_\varphi &= d\zeta_1 + 2d\zeta_2, & dp_z &= d\zeta_1 - d\zeta_2, \\ d\zeta_1 &= -\frac{2k + 3\mu u_{r,r}}{9\mu}, & d\zeta_2 &= -\frac{2k - 3\mu u_r/r}{9\mu}. \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (14) переписывается в форме

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \frac{4}{3K} \left(\frac{\partial k}{\partial r} + 2 \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (20)$$

Интегрируя (20), получаем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{r C_1^{(4)}}{2} + \frac{C_2^{(4)}}{2} + \frac{4}{3K} \Psi(r, l, -1) + 3\Phi(r, l, 1), \\ \sigma_r &= K C_1^{(4)} + \frac{8}{3r} \Psi(r, l, -1), \\ \sigma_\varphi &= K C_1^{(4)} + \frac{8}{3r} \Psi(r, l, -1) + \frac{8}{3} k(r), \\ \sigma_z &= K C_1^{(4)} + \frac{8}{3r} \Psi(r, l, -1) + \frac{4}{3} k(r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$p_r = \frac{C_1^{(4)}}{6} - \frac{C_2^{(4)}}{r^2} + 4 \frac{\Psi(r, l, -1)}{9K} + \left(\frac{4}{9K} + \frac{2}{3\mu} \right) k(r) - \frac{3}{r} \Phi(r, l, 1) + 2T_0 \alpha \theta,$$

$$p_\varphi = \frac{C_1^{(4)}}{6} + \frac{C_2^{(4)}}{r^2} + 4 \frac{\Psi(r, l, -1)}{9K} - \left(\frac{4}{9K} + \frac{2}{3\mu} \right) k(r) + \frac{3}{r} \Phi(r, l, 1) - T_0 \alpha \theta,$$

$$p_z = -\frac{1}{3} C_1^{(4)} - \frac{8}{9K} \Psi(r, l, -1) - \frac{4}{9K} k(r) - T_0 \alpha \theta.$$

Напряжения и перемещения в области пластического течения $R \leq r \leq n_2(t)$ вычисляются исходя из (21).

Из распределения температуры по материалу сборки за счет процесса теплопроводности получаем, что $d\zeta_1 = 0$ на внутренней поверхности муфты $r = R$. Это свидетельствует о выходе напряжений с ребра поверхности нагружения ($2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$, $\sigma_\varphi + \sigma_z - 2\sigma_r = 4k$) на грань $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$. Таким образом, образуется новая граница $r = n_3(t)$, которая через некоторое время достигнет границы $r = n_2(t)$, а область пластического течения $n_3 \leq r \leq n_2(t)$ перестает существовать (см. рис. 2). В области $R \leq r \leq n_3(t)$ уравнение равновесия примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - h^2 \frac{u_r}{r^2} = & \left(2 \left(\frac{1}{3} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) + 3\alpha T_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \frac{1}{K + \mu} + \\ & + \left(\tilde{p}_\varphi + 2\tilde{p}_r + \frac{\partial \tilde{p}_\varphi}{\partial r} + 2 \frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial r} \right) \frac{\mu}{K + \mu}, \quad h = \sqrt{\frac{K}{K + \mu}}, \quad (22) \end{aligned}$$

где \tilde{p}_r и \tilde{p}_φ — необратимые деформации, накопленные в результате предыдущего пластического течения. Интегрируя уравнение (22), получаем следующие зависимости:

$$\begin{aligned} u_r = & 1.5K((h-1)\Phi(r, l, -h) + (h+1)\Phi(r, l, h))h^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + ((h-2)\Psi(r, l, h) + (h+2)\Phi(r, l, -h))(3h)^{-1}(K + \mu)^{-1} + r^h C_2^{(6)}(t) - \\ & - \mu[(2h+1)\Omega_z(r, l, h) + (2h-1)\Omega_z(r, l, -h) - \\ & - \Omega_r(r, l, -h) + \Omega_r(r, l, h)](2h)^{-1}(K + \mu)^{-1} + (2hr^h)^{-1} C_1^{(5)}(t) - \\ & - \mu((h-1)\Omega_\varphi(r, l, -h) + (h+1)\Omega_z(r, l, h))(2h)^{-1}(K + \mu)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -3K(K - h(K + \mu))(h-1)\Phi(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - 3K(K + h(K + \mu))(h+1)\Phi(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - (h-2)(K + h(K + \mu))\Psi(r, l, h)(3hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - (h+2)(K - h(K + \mu))\Psi(r, l, -h)(3hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(K + h(K + \mu))\Omega_r(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\ & - \mu(K - h(K + \mu))\Omega_r(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(2h+1)(K + h(K + \mu))\Omega_z(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(2h-1)(K - h(K + \mu))\Omega_z(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(h+1)(K + h(K + \mu))\Omega_\varphi(r, l, h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + \mu(h-1)(K - h(K + \mu))\Omega_\varphi(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + (K - h(K + \mu))(2hr^{h+1})^{-1} C_1^{(5)}(t) + (K + h(K + \mu))r^{h-1} C_2^{(5)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & 3K^2(h^2 - 1)(\Phi(r, l, -h) - \Phi(r, l, h))(2hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\ & + (h+1)(h+2)(\Psi(r, l, -h))(3hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (h-1)(h-2)(\Psi(r, l, h))(3hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} + \\
 & + \mu K(h^2-1)(\Omega_\varphi(r, l, h) - \Omega_\varphi(r, l, -h))(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} + \\
 & + \mu K((h+1)\Omega_r(r, l, -h) + (h-1)\Omega_r(r, l, h))(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} - \\
 & - \mu K(2h+1)(h-1)\Psi_z(r, l, h)(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} - \\
 & - \mu K(2h-1)(h+1)\Psi_z(r, l, -h)(2hr)^{-1}(K+\mu)^{-1} - \\
 & - 3\mu K\alpha T_0\theta(r)(K+\mu)^{-1} + K(h-1)(2hr^{h+1})^{-1}C_1^{(5)}(t) + \\
 & + K(h+1)r^{h-1}C_2^{(5)}(t), \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_r = & (\lambda + 2\mu)(3\mu)^{-1}(K + \mu)^{-1}k(r) + 0.5K\alpha T_0\theta(r)(K + \mu)^{-1} + \\
 & + (h^2 - 4)(18hr)^{-1}(K + \mu)^{-1}(\Psi(r, l, -h) - \Psi(r, l, h)) - \\
 & - K(h + 1)(h + 2)(4hr)^{-1}(K + \mu)^{-1}\Phi(r, l, h) + \\
 & + K(h - 1)(h - 2)(4hr)^{-1}(K + \mu)^{-1}\Phi(r, l, -h) + \\
 & + \mu((h - 2)\Omega_r(r, l, -h) + (h + 2)\Omega_r(r, l, h))(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\
 & + \mu(h + 1)(h + 2)\Omega_\varphi(r, l, h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\
 & - \mu(h - 1)(h - 2)\Omega_\varphi(r, l, -h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\
 & + \mu(2h + 1)(h + 2)\Omega_z(r, l, h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} - \\
 & - \mu(2h - 1)(h - 2)\Omega_z(r, l, h)(12hr)^{-1}(K + \mu)^{-1} + \\
 & + (\lambda + 7/6\mu)3^{-1}(K + \mu)^{-1}\tilde{p}_\varphi(r) - (K + 3\mu)6^{-1}(K + \mu)^{-1}\tilde{p}_z(r) + \\
 & + 6^{-1}\tilde{p}_r(r) - (h + 2)(12hr^{h+1})^{-1}C_1^{(5)}(t) + (h - 2)r^{h-1}C_2^{(5)}(t), \\
 p_\varphi = & p_z(r, t) = -0.5p_r(r, t),
 \end{aligned}$$

где

$$h = \sqrt{\frac{K}{K + \mu}}, \quad l = R_1, \quad \Omega_i(r, l, h) = \frac{1}{r} \int_l^r \rho^h \tilde{p}_i(\rho) d\rho, \quad i = r, z, \varphi.$$

В области пластического течения $R \leq r \leq n_3(t)$, где выполняется условие $2\sigma_\varphi - \sigma_z - \sigma_r = 4k$, напряжения, перемещения, пластическая деформация определяются из соотношений (23).

4. Разгрузка. Остаточные напряжения. По мере остывания сборки в момент времени $t = t_4$ (см. рис. 2) на поверхности сопряжения $r = R$ рост необратимых деформаций останавливается, что свидетельствует о зарождении разгружающей упругопластической границы $r = m(t)$, которая сначала догоняет границу n_3 , а после — и границу n_1 (см. рис. 2), в итоге пластическое течение перестает существовать. Уравнение равновесия в области разгрузки $R \leq r \leq m(t)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) = \frac{K\alpha T_0}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2\mu}{r(\lambda + 2\mu)} (p_r - p_\varphi) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial p_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial p_r}{\partial r}. \quad (24)$$

Разрешая обыкновенное дифференциальное уравнение (24), найдем

$$\begin{aligned}
 u_r^{(m)} &= \frac{3K}{\lambda + 2\mu} \Phi(r, l, 1) + C_1^{(m)}(t) \frac{r}{2} + C_2^{(m)}(t) \frac{1}{r} + \\
 &\quad + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_r(r, l, -1) + \Omega_\varphi(r, l, 1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \\
 \sigma_r &= (\lambda + \mu) C_1^{(m)}(t) + 2\mu r^{-2} C_2^{(m)}(t) - \frac{6\mu}{r(\lambda + 2\mu)} \Phi(r, l, 1) - \\
 &\quad - \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) + \\
 &\quad + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi &= \frac{6\mu}{r(\lambda + 2\mu)} (\Phi(r, l, 1) - rK\alpha T_0 \theta(r, t)) + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} p_r(r) - 2\mu p_\varphi(r) + \\
 &\quad + \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) + C_1^{(m)}(t)(\lambda + \mu) + \\
 &\quad + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)) + \frac{2\mu}{r^2} C_2^{(m)}(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \lambda C_1^{(m)}(t) - \frac{6\mu}{\lambda + 2\mu} K\alpha T_0 \theta(r, t) + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_r(r) + \\
 &\quad + \frac{2\mu\lambda}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)) + 2\mu p_\varphi(r).
 \end{aligned}$$

Напряжения и перемещения рассчитываются по (25) до полного остывания сборки до комнатной температуры. Как только температура в сборке выровняется и станет начальной, уравнение равновесия примет вид, отличный от (24):

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = -\frac{2\mu}{r(\lambda + 2\mu)} (\tilde{p}_r - \tilde{p}_\varphi) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \tilde{p}_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial r}. \quad (26)$$

Интегрируя (26), получаем соотношения для нахождения остаточных перемещений и напряжений в материале сборки:

$$\begin{aligned}
 u_r &= C_1^{(m)}(t) \frac{r}{2} + C_2^{(m)}(t) \frac{1}{r} + \\
 &\quad + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_r(r, l, -1) + \Omega_\varphi(r, l, 1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \\
 \sigma_r &= (\lambda + \mu) C_1^{(m)}(t) + \frac{2\mu}{r^2} C_2^{(m)}(t) - \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) - \\
 &\quad - 3K\alpha T_0 \theta(r) + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)), \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & -3K\alpha T_0\theta(r, t) - 2\mu p_\varphi(r) + \frac{2\mu^2}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, 1) + \Omega_\varphi(r, l, 1)) + \\ & + \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} p_r(r) + \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)) + \\ & + C_1^{(m)}(t)(\lambda + \mu) + \frac{2\mu}{r^2} C_2^{(m)}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \lambda C_1^{(m)}(t) - 3K\alpha T_0\theta(r, t) + 2\mu p_\varphi(r) + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} p_r(r) + \\ & + \frac{2\mu\lambda}{r(\lambda + 2\mu)} (\Omega_r(r, l, -1) - \Omega_\varphi(r, l, -1)). \end{aligned}$$

На рис. 1 выделены две грани и ребро кусочно-линейной поверхности нагружения (боковой поверхности наклонной призмы Ивлева (9)) при условиях, в которых реализуется пластическое течение (см. рис. 2). Следует отметить, что для условий плоских напряженных состояний [20] пластическое течение на ребре призмы Ивлева не реализуется. Новая область пластического течения зарождается в зависимости от напряжений соседней грани поверхности нагружения, минуя их общее ребро. В нашем случае плоских деформируемых состояний пластическое течение на ребре призмы Ивлева происходит и, таким образом, является необходимым условием построения решения.

5. Падение напряжений при вращении. Пусть рассчитанная сборка теперь ускоренно вращается вокруг своей оси. Считаем изменение угловой скорости медленным, пренебрегаем угловым ускорением. Уравнение движения сводится к одному уравнению

$$\sigma_{r,r} + (\sigma_r - \sigma_\varphi)/r = -\rho r \omega^2.$$

Учитывая условия изотермичности процесса деформирования, задаваемого воздействием центробежных сил инерции, найдем

$$\begin{aligned} u_r(r, t) = u_r(r) - \frac{\omega^2 \rho r^3}{24(\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma_r(r, t) = \sigma_r(r) - \frac{3K r^2 \rho \omega^2}{12(\lambda + 2\mu)}, \\ \sigma_\varphi(r, t) = \sigma_\varphi(r) - \frac{(2\lambda + \mu) r^2 \rho \omega^2}{12(\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma_z(r, t) = \sigma_z(r) - \frac{\lambda r^2 \rho \omega^2}{6(\lambda + 2\mu)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $u_r(r)$, $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$, $\sigma_z(r)$ — начальные распределения зависимых (искомых) переменных задачи, эволюция которых происходит в соответствии с (28). Эти начальные значения являются остаточными напряжениями и перемещениями в задаче посадки с натягом. Они вычисляются в соответствии с зависимостями (27), полученными ранее.

При росте скорости вращения $\omega = \omega(t)$ значение натяга уменьшается, пока не станет равным нулю, тогда происходит отрыв муфты от вала. Угловая скорость отрыва $\omega = \omega_*$ индивидуальна для каждой сборки. Рассмотрим подробнее различные случаи. Термомеханические свойства материалов сборки приведены в таблице.

Термомеханические характеристики материалов сборки
 [Thermomechanical properties of the assembly materials]

	k_0 , МПа	λ , GPa	μ , GPa	α , 10^{-6}	$a \cdot 10^{-6}$, m^2/s	ψ , W/ μ	T_p , °C
Steel	360	97.06	82.68	11.1	17.35	67.78	1400
Brass	290	58.26	38.84	19.1	35.68	113	937
Bronze	350	66.9	44.6	16.2	18.2	58	1040
Duralumin	255	41.53	27.7	22.9	50	130	660
Aluminum	210	41.53	27.6	23.4	77.1	188	660

Рассмотрим сборку стального вала и дюралевой муфты, полученную в результате горячей посадки, при которой муфту разогревали до температуры $T_* = 300^\circ\text{C}$ ($R_1/R_3 = 0.8$). Остаточные напряжения, образованные в результате посадки, приведены на рис. 3, а. Процесс термоупругопластического деформирования полностью соответствовал вышеописанному. Распределение напряжений в момент отрыва приведено на рис. 3, б. Скорость отрыва составила $\omega_* = 8562.7$ 1/с, или $n_* = 81802.5$ об/мин. Если увеличить температуру разогрева муфты до 350°C , то натяг увеличится на 18%, а скорость отрыва возрастет лишь на 8%.

В сборке стального вала и алюминиевой муфты, полученной в результате горячей посадки разогретой муфты до температуры 300°C ($R_1/R_3 = 0.2$) на вал, скорость отрыва составляет $\omega_* = 9170$ 1/с, или $n_* = 87611.4$ об/мин. На рис. 4 приведены распределения остаточных напряжений и напряжений в момент отрыва муфты от вала.

На рис. 5 приведены распределения напряжений для сборки, полученной в результате горячей посадки бронзовой муфты, разогретой до 600°C ($R_1/R_3 = 0.4$), на латунный вал, для которой скорость отрыва составляет $\omega_* = 8460$ 1/с, или $n_* = 80828$ об/мин.

Отметим, что в расчетах в качестве условия пластического течения было выбрано условие максимальных приведенных напряжений из-за того, что остаточные напряжения после операции горячей посадки оказываются максимальными в сравнении со случаем условий пластичности максимальных касательных и октаэдрических напряжений [15].

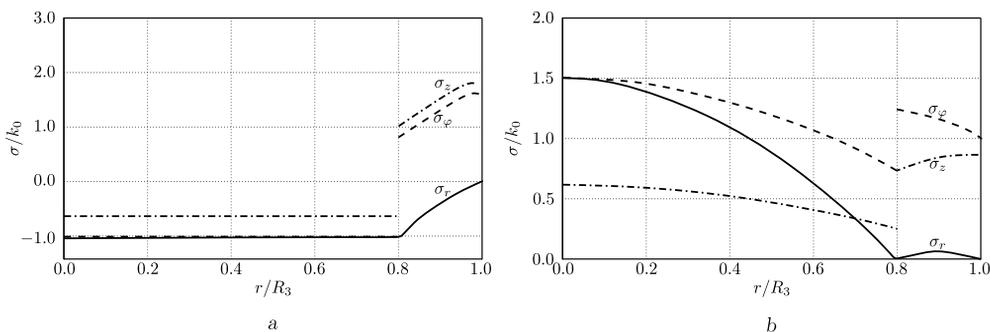


Рис. 3. Распределение остаточных напряжения (а) и напряжений в момент отрыва муфты (из стали) от вала (из дюралю) (б); $k_0 = 360$ МПа

[Figure 3. Distribution of residual stresses (a) and stresses at the moment of separation of the coupling (made of steel) from the shaft (made of duralumin) (b); $k_0 = 360$ MPa]

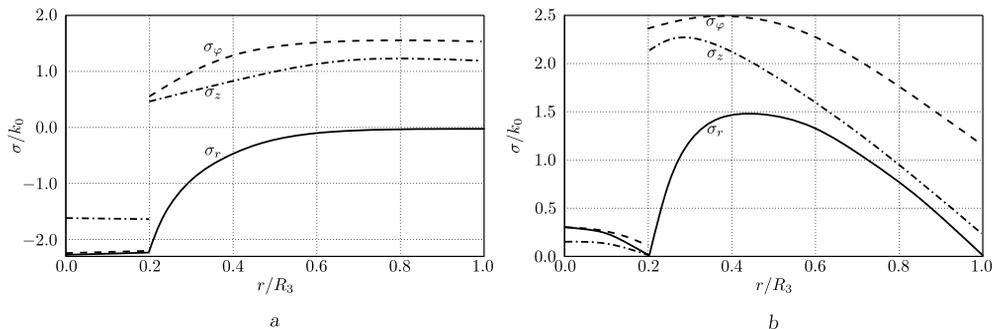


Рис. 4. Распределение остаточных напряжения (а) и напряжений в момент отрыва муфты (из стали) от вала (из алюминия) (b); $k_0 = 360$ МПа

[Figure 4. Distribution of residual stresses (a) and stresses at the moment of separation of the coupling (made of steel) from the shaft (made of aluminum) (b); $k_0 = 360$ МПа]

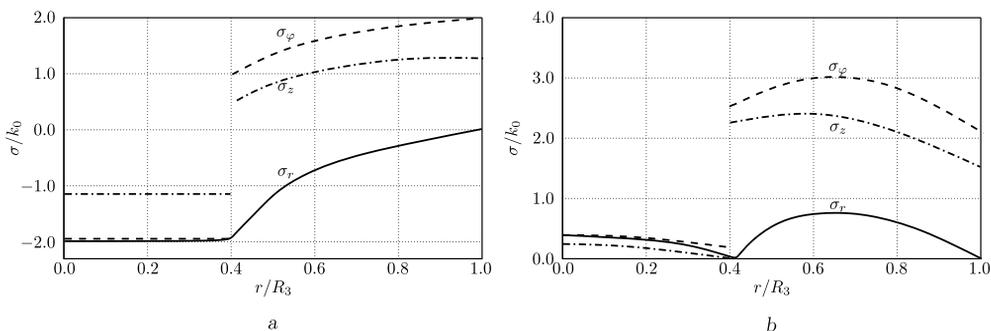


Рис. 5. Распределение остаточных напряжения (а) и напряжений в момент отрыва муфты (из бронзы) от вала (из латуни) (b); $k_0 = 350$ МПа

[Figure 5. Distribution of residual stresses (a) and stresses at the moment of separation of the coupling (made of bronze) from the shaft (made of brass) (b); $k_0 = 350$ МПа]

Заключение. Составные валы, материал которых находится в преднапряженном состоянии, в некоторых случаях обладают функциональным предпочтением перед сплошными и используются в различных конструкциях машин и механизмов в случае, когда они изготавливаются с использованием композитных или интерметаллидных слоев. Для изготовления таких изделий в числе прочих может использоваться операция горячей посадки или иная посадка с натягом.

Решение задачи Гадолина о сборке двухслойного вала является необходимым для его дальнейшего испытания на отрыв в качестве начального условия для упругопластического процесса деформирования, так как предложенный метод, являющийся, по существу, аналитическим, может учитывать наличие пластического течения (с учетом зависимости предела текучести от температуры) как на стадии сборки вала, так и на стадии его испытания вращением.

Результаты расчетов показывают, что угловые скорости вращения, «разрывающие» рассмотренные в статье сборки, мало зависят от термомеханических свойств материалов сопрягаемых деталей и от их геометрии. Если вращение является основным (функциональным) предназначением сборки (составного вала), то предназначение будет выполняться, если только вращение не будет сверхбыстрым (более 80 000 об/мин).

Предполагаемый подход представляется возможным и для расчетов более сложных многослойных валов, когда часть слоев изготавливается из материалов, проявляющих выраженные упругопластические свойства.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20–01–00147).

Библиографический список

1. Берникер Е. И. *Посадка с натягом в машиностроении*. М., Л.: Машиностроение, 1966. 168 с.
2. Гадолин А. В. Теория орудий, скрепленных обручами // *Артилл. журн.*, 1861. № 12. С. 1033–1071.
3. Boley B. A., Weiner J. H. *Theory of Thermal Stresses* / Dover Civil and Mechanical Engineering. New York: John Wiley & Sons, 1960. xv+586 pp.
4. Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Wien: Springer, 1959. v+166 pp. (In German)
5. Mack W. Thermal assembly of on elastic-plastic hub a solid shaft // *Arch. Appl. Mech.*, 1993. vol. 63. pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00787908>.
6. Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mech.*, 1994. vol. 103. pp. 243–257. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01180229>.
7. Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits // *Period. Polytech., Mech. Eng.*, 1996. vol. 40, no. 2. pp. 103–112.
8. Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборки горячей посадкой // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост.*, 2015. № 4(26). С. 163–179. EDN: VNXOWL.
9. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Выч. мех. спл. сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259. EDN: ZHZVHJ. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20>.
10. Буренин А. А., Каиг М., Ткачева А. В. К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Дальневост. матем. журн.*, 2018. Т. 18, № 2. С. 131–146. EDN: YUNRFR.
11. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // *J. Mech. Phys. Solids*, 1956. vol. 4, no. 4. pp. 209–229. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8).
12. Александров С. Е., Лямина Е. А., Новожилова О. В. Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полумесяце // *Пробл. машиностр. и надежн. машин*, 2013. Т. 3. С. 43–48. EDN: RBJJRR.
13. Александров С. Е., Ломакин Е. В., Дзенг Й.–Р. Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению // *ДАН*, 2012. Т. 443, № 3. С. 310–312. EDN: OWXKQJ.
14. Попов А. Л., Челюбеев Д. А., Бухалов В. И. Задача Гадолина в упругопластической постановке // *ПММ*, 2018. Т. 82, № 6. С. 804–812. EDN: YPXQWL. DOI: <https://doi.org/10.31857/S003282350002744-8>.
15. Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // *Изв. РАН. МТТ*, 2018. № 1. С. 32–43. EDN: YOFWCD.

16. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 3. С. 86–99. EDN: YPOULA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>.
17. Дац Е. П., Ткачева А. В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ*, 2016. Т. 57, № 3(337). С. 208–216. EDN: WAIBFX. DOI: <https://doi.org/10.15372/PMTF20160321>.
18. Буренин А. А., Матвеевко В. П., Ткачева А. В. Температурные напряжения в процессе сборки двухслойного вала способом горячей посадки // *Уч. зап. КнАГТУ*, 2018. Т. 1, № 3(35). С. 31–41. EDN: YLXXCH.
19. Буренин А. А., Ткачева А. В. Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // *Вестн. ПНИПУ. Сер. Механика*, 2020. № 3. С. 20–31. EDN: HМУНТТ. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>.
20. Буренин А. А., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // *Изв. РАН. МТТ*, 2020. Т. 6. С. 40–49. EDN: MFTXER. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329920060057>.
21. Sackfield A., Barber J. R., Hills D. A., Truman C. E. A shrink-fit shaft subject to torsion // *Eur. J. Mech. A Solids*, 2002. vol. 21, no. 1. pp. 73–84. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01197-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01197-4).
22. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly // *Appl. Math. Modelling*, 2013. vol. 37, no. 4. pp. 2352–2363. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.018>.
23. Arslan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub // *Compos. Struct.*, 2015. vol. 121. pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2014.10.034>.
24. Lopes J. P., Hills D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force // *Eur. J. Mech. A Solids*, 2018. vol. 70. pp. 172–180. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.EUROMECHSOL.2018.02.007>.
25. Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on motor damping assembled disk shrink fits // *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019. vol. 127. pp. 412–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2018.11.021>.
26. Буренин А. А., Ткачева А. В. Осевое вращение в качестве причины падения натяга в сборке составного диска, полученной способом горячей посадки // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост.*, 2021. № 3(49). С. 19–32. EDN: NUYZPS. DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.49.3.003>.
27. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // *Acta Mech.*, 2021. vol. 232, no. 5. pp. 1917–1931. EDN: UPPSFS. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-021-02942-5>.
28. Eraslan A. N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems // *Acta Mech.*, 2006. vol. 181, no. 1–2. pp. 43–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-005-0276-5>.
29. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM*, 2020. vol. 100, no. 3, e201900213. EDN: SYSSIM. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
30. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 2. С. 172–192. EDN: EDKAMB. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>.
31. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. *Большие необратимые деформации и упругое последствие*. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
32. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. *Теория пластичности*. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
33. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с. EDN: TQYAQT.

MSC: 74C05, 74F05

Gadolin's problem on the assembly of a two-layer shaft by a shrink fit with a test of the connection for separation

A. A. Burenin, A. V. Tkacheva, S. V. Firsov

Institute of Metallurgy and Mechanical Engineering Far-Eastern Branch of RAS,
Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of RAS,
1, Metallurgov str., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract

The connection strength in the interference fit assembly of a two-layer shaft produced by the shrink fit operation is studied. The materials of the assembly parts are considered to be ideal elastoplastic, with yield strength that are significantly depended on temperature. In the calculations, the conditions of plane deformed states are taken into account. Pull tests are performed by rotating the assembly around its axis, when pulling forces are generated in the form of centrifugal forces of inertia. It is shown that with an increase of the rotation speed, the tightness in the assemblies is decreased. Limitations of the possible angular speed are calculated under the assembly tightness disappearing.

Keywords: elasticity, plasticity, interference assembly, shrink fit, temperature stresses, rotation of an elastoplastic cylinder.

Received: 15th May, 2022 / Revised: 2nd September, 2022 /

Accepted: 20th September, 2022 / First online: 26th September, 2022

Competing interests. We have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Burenin A. A., Tkacheva A. V., Firsov S. V. Gadolin's problem on the assembly of a two-layer shaft by a shrink fit with a test of the connection for separation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 480–499. EDN: [MVCIJF](https://doi.org/10.14498/vsgtu1928). DOI: [10.14498/vsgtu1928](https://doi.org/10.14498/vsgtu1928) (In Russian).

Authors' Details:

Anatoly A. Burenin  <https://orcid.org/0000-0003-4502-9547>

Dr. Phys. & Math. Sci., Corresponding member of RAS; Chief Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Anastasia V. Tkacheva  <https://orcid.org/0000-0003-1795-0021>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: 4nansi4@mail.ru

Sergey V. Firsov  <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>

Junior Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products; e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00147).

References

- Berniker E. I. *Posadka s natiagom v mashinostroenii* [Interference Fit in Mechanical Engineering]. Moscow, Leningrad, Mashinostoenie, 1966, 168 pp. (In Russian)
- Gadolin A. B. The theory of gun barrels fastened with hoops, *Artill. Zhurn.*, 1861, no. 12, pp. 1033–1071 (In Russian).
- Boley B. A., Weiner J. H. *Theory of Thermal Stresses*, Dover Civil and Mechanical Engineering. New York, John Wiley & Sons, 1960, xv+586 pp.
- Parkus H. *Instationäre Wärmespannungen*. Wien, Springer, 1959, v+166 pp. (In German)
- Mack W. Thermal assembly of on elastic-plastic hub a solid shaft, *Arch. Appl. Mech.*, 1993, vol. 63, pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00787908>.
- Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit, *Acta Mech.*, 1994, vol. 103, pp. 243–257. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01180229>.
- Kovács Á. Residual stresses in thermally loaded shrink fits, *Period. Polytech., Mech. Eng.*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 103–112.
- Dats E. P., Petrov M. R., Tkacheva A. V. Piecewise linear plastic potentials within the framework of the theory of the thermal stresses concerning to shrink fit, *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2015, vol. 4(26), pp. 163–179 (In Russian). EDN: [VNXOWL](https://doi.org/10.1007/BF01180229).
- Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Calculation of the unsteady thermal stresses in elastoplastic solids, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 7, pp. 1197–1210. EDN: [LAVRJL](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894418070040>.
- Burenin A. A., Kaig M., Tkacheva A. V. To the calculation of plane stressed states of the theory of unsteady temperature stresses in elastoplastic bodies, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 131–146 (In Russian). EDN: [YUNRFR](https://doi.org/10.1007/BF01180229).
- Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients, *J. Mech. Phys. Solids*, 1956, vol. 4, no. 4, pp. 209–229. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8).
- Aleksandrov S. E., Lyamina E. A., Novozhilova O. V. The influence of the relationship between yield strength and temperature on the stress state in a thin hollow disk, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, no. 3, pp. 214–218. EDN: [RNUNVP](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618813020027>.
- Aleksandrov S. E., Lomakin E. V., Dzenig I. R. Solution of the thermoelastoplastic problem for a thin disk of plastically compressible material subjected to thermal loading, *Dokl. Phys.*, 2012, vol. 57, no. 3, pp. 136–139. EDN: [PDRTVT](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335812030081>.
- Bukhalov V. I., Popov A. L., Chelyubeev D. A. Gadolin's theory in elastoplastic formulation, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 356–363. EDN: [NGYUUL](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419030051>.
- Dats E. P., Murashkin E. V., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of Yield conditions, *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 1, pp. 23–32. EDN: [YB0IYP](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441801003X>.
- Burenin A. A., Tkacheva A. V. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 559–569. EDN: [BSSTLA](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419040095>.
- Dats E. P., Tkacheva A. V. Technological thermal stresses in the shrink fitting of cylindrical bodies with consideration of plastic flows, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 569–576. EDN: [WVUNSF](https://doi.org/10.1007/BF01180229). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416030214>.

18. Burenin A. A., Matveenko V. P., Tkacheva A. V. Temperature stresses in the process of assembling a two-layer shaft by shrink fitting, *Uch. Zap. KnAGTU*, 2018, vol. 1, no. 3(35), pp. 31–41 (In Russian). EDN: [YLXXCH](#).
19. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Evolution of temperature stresses in the Gadolin problem of assembling a two-layer elastoplastic pipe, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 3, pp. 20–31 (In Russian). EDN: [HMHUHT](#). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>.
20. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Piecewise linear plastic potentials as a tool for calculating plane transient temperature stresses, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 791–799. EDN: [EMMOEA](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420060059>.
21. Sackfield A., Barber J. R., Hills D. A., Truman C. E. A shrink-fit shaft subject to torsion, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, pp. 73–84. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01197-4](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01197-4).
22. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly, *Appl. Math. Modelling*, 2013, vol. 37, no. 4, pp. 2352–2363. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.018>.
23. Arslan E., Mack W. Shrink fit with solid inclusion and functionally graded hub, *Compos. Struct.*, 2015, vol. 121, pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2014.10.034>.
24. Lopes J. P., Hills D. A., Paynter R. J. H. The axisymmetric shrink fit problem subjected to axial force, *Eur. J. Mech. A Solids*, 2018, vol. 70, pp. 172–180. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.EUROMECHSOL.2018.02.007>.
25. Gaul L., Schmidt A. Finite element simulation and experiments on motor damping assembled disk shrink fits, *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019, vol. 127, pp. 412–422. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.YMSSP.2018.11.021>.
26. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Axial rotation as a cause of loss of interference in a shrink fitted split disc assembly, *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2021, no. 3(49), pp. 19–32 (In Russian). EDN: [NUYZPS](#). DOI: <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.49.3.003>.
27. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration, *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, no. 5, pp. 1917–1931. EDN: [UPPSFS](#). DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-021-02942-5>.
28. Eraslan A. N., Akis T. On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *Acta Mech.*, 2006, vol. 181, no. 1–2, pp. 43–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-005-0276-5>.
29. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading, *ZAMM*, 2020, vol. 100, no. 3, e201900213. EDN: [SYSSIM](#). DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
30. Prokudin A. N., Burenin A. A. Elastoplastic analysis of a rotating solid shaft made of linear hardening material, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1243–1258. EDN: [UDGKGQ](#). DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070207>.
31. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. *Bol'shie neobratimye deformatsii i uprugoe posledeistvie* [Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect]. Vladivostok, Dal'nauka, 2013, 312 pp. (In Russian)
32. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Teoriia plastichnosti* [Theory of Plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka, 1998, 528 pp. (In Russian)
33. Ishlinsky A. Yu., Ivlev D. D. *Matematicheskaya teoriia plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 704 pp. (In Russian). EDN: [TQYAQT](#).



УДК 519.248:531

Прогнозирование индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций по изделию-лидеру

В. П. Радченко, Е. А. Афанасьева

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Предложен и реализован численный метод прогнозирования индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций по образцу-лидеру на основе использования обобщенных однопараметрических моделей, связывающих интегральные характеристики напряженного состояния с интегральными характеристиками деформационного состояния в координатах «обобщенная нагрузка – обобщенное перемещение». Область применения метода – однотипные конструктивные элементы, которые находятся в идентичных условиях внешнего нагружения и характеризуются большим разбросом деформационных характеристик (обобщенного перемещения). Предполагается, что эксплуатация одного конструктивного элемента (образца-лидера) начинается на некоторое время раньше, чем других. Вводится гипотеза о подобии всех реализаций в координатах «обобщенное перемещение – время», приведенных к единому началу координат сдвигом по времени. Путем использования статистической информации на начальных участках «отстающих» элементов конструкций и образца-лидера определяются статистические характеристики параметра подобия эксплуатируемого образца по отношению к образцу-лидеру и далее осуществляется прогнозирование его деформационных характеристик.

Исследованы узлы трения и конструктивные элементы (стержни, резьбовые соединения) в условиях ползучести. На основе корреляционного статистического анализа экспериментальной информации выполнено обоснование использования гипотезы подобия для всех реализаций исследованных элементов конструкций. Метод проиллюстрирован

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Радченко В. П., Афанасьева Е. А. Прогнозирование индивидуальных деформационных характеристик элементов конструкций по изделию-лидеру // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 500–519. EDN: MIVLAC. DOI: [10.14498/vsgtu1919](https://doi.org/10.14498/vsgtu1919).

Сведения об авторах

Владимир Павлович Радченко  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>

доктор физико-математических наук, профессор; заведующий кафедрой; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru

Елена Андреевна Афанасьева  <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>

аспирант; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

на примере прогнозирования износа узлов трения передней стойки шасси самолета в зависимости от числа взлетов-посадок, а также на примере расчета удлинения стержней из поливинилхлоридного пластика при одноосном нагружении и осевого смещения области свинчивания резьбового соединения в условиях ползучести.

Показано, что экспериментальные данные для обобщенного перемещения конкретных реализаций не выходят за расчетные пределы доверительного интервала для математического ожидания для всех рассмотренных элементов конструкций на временных интервалах прогнозирования от одного до четырех «базовых» интервалов, в рамках которых определялись оценки случайных параметров для конкретных изделий.

Ключевые слова: прогнозирование, обобщенное перемещение, индивидуальные деформационные характеристик, узел трения, ползучесть, стержень, резьбовое соединение.

Получение: 19 апреля 2022 г. / Исправление: 8 августа 2022 г. /

Принятие: 13 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2022 г.

1. Введение

Методы расчета и оценка остаточного ресурса эксплуатирующихся элементов конструкций являются центральной научной проблемой для общего, энергетического и авиационного машиностроения, строительной области и других отраслей промышленности [1–7]. В настоящее время используются различные подходы для решения этой задачи. Так, для промышленных зданий и их технического перевооружения, узлов различных технических систем, когда несущие элементы конструкций недоступны для ремонтного обслуживания в силу специфики их эксплуатации, используют усиление отдельных узлов, находящихся в наиболее нагруженном состоянии, за счет изменения конструктивной схемы, увеличения размеров геометрических сечений и других мероприятий. Такой подход наиболее распространен в строительной отрасли, при эксплуатации гидротехнических сооружений, в водном транспорте и других отраслях [4–7]. Однако для ответственных элементов конструкций авиационного и энергетического оборудования, а также атомной промышленности такой подход не реализуем. Здесь используют более наукоемкие подходы для оценки напряженно-деформируемого состояния на основе расчетных методик, базирующихся на решении краевых задач, основным элементом для реализации которых являются экспериментальные данные упругопластического и реологического деформирования для используемых материалов с последующей оценкой ресурса по параметрическим критериям отказа на основе стохастических уравнений состояния и методов теории случайных процессов с дополнительным назначением коэффициента запаса [1–3]. Но ряд процессов (высокотемпературная ползучесть, износ сопрягаемых деталей и др.) характеризуются большим разбросом деформационных характеристик. Так, для наблюдаемой экспериментальной деформации ползучести металлических материалов величина разброса составляет 20–50 %, для длительной прочности величина разброса — 30–100 % [8–10], а для геометрических характеристик, описывающих, например, величину зазора между сопрягаемыми цилиндрическими деталями в условиях трения, величина разброса может составлять до 100 % [11]. В связи с этим классические статистические

теории [1, 2, 12–14, 28] и современные подходы линеаризации нелинейных регрессионных уравнений для идентификации параметров моделей [29, 30], основанные на моделировании деградации материала элементов конструкций и необратимом накоплении поврежденности, ориентированы на генеральную совокупность однотипных изделий с использованием стандартных (и модифицированных) методов обработки статистической информации [15, 16] и дают широкую полосу разброса для математических ожиданий соответствующих выходных деформационных характеристик и времени безопасной эксплуатации по параметрическим критериям отказа.

Отметим, что индивидуализация тех или иных процессов может рассматриваться не только для технических объектов. Так, в биомеханике и медицине все математические модели и средства компьютерной диагностики основаны на пациентно-ориентированном биомеханическом моделировании функционирования органов. Например, для численного исследования напряженно-деформированного состояния костных тканей [34–36] используют модули Юнга, значения которых определяются индивидуально по компьютерным томограммам. На основе этого анализа, который проводится, как правило, конечно-элементным моделированием, специалисты делают выбор для лечения заболеваний у конкретного индивида.

Схема решения задачи прогнозирования остаточного ресурса с классических позиций возникновения параметрических отказов проиллюстрирована на рис. 1. Пусть некоторая величина $y(t)$, характеризующая работоспособность элемента конструкции, изменяется от нуля до заданного критического значения y^* , по достижении которого в момент времени τ происходит отказ. Поскольку τ является случайной величиной, задается степень возникновения риска α , с помощью плотности распределения $f(t)$ которой определяется время эксплуатации t^* :

$$\int_0^{t^*} f(t) dt = \alpha.$$

Величина t^* — назначенный ресурс, и его, как правило, рассчитывают на стадии проектирования. Но при малых значениях α среднее время безотказной

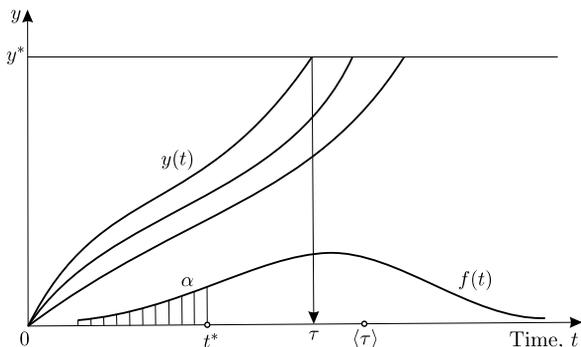


Рис. 1. Схема оценки ресурса по параметрическому критерию отказа

[Figure 1. Resource estimation scheme according to the parametric failure criterion: $y(t)$ is the operability of a structural element, which changes from zero to a given critical value y^* , when it reaches which, at time τ , a failure occurs; α is a random degree of risk occurrence with distribution density $f(t)$; t^* is the resource (maximum operating time) assigned to a structural element, which is set at its production; $\langle \tau \rangle$ is mean time between failures]

работы (τ) может оказаться значительно больше t^* , а это означает, что часть конструкций снимется с эксплуатации, не исчерпав свой ресурс. Очевидно, что такой подход мало что дает для прогнозирования индивидуального ресурса конкретной конструкции.

Проблема оценки индивидуального ресурса элементов конструкций сформулирована и частично решена в публикациях восьмидесятых–девяностых годов прошлого века [17–24] для условий ползучести и мало- или многоциклового нагружения. В частности, один из подходов базируется на использовании обобщенных однопараметрических моделей в координатах «обобщенная нагрузка – обобщенное перемещение» [25, 26]. Эти соотношения связывают интегральные характеристики напряженного состояния с интегральными характеристиками деформационного состояния и формируют такие связи, как например, «нагрузка – перемещение в опасном или характерном сечениях», «изгибающий момент – кривизна балки», «крутящий момент – угол закручивания вала», «растягивающая нагрузка – осевое смещение участка свинчивания резьбового соединения» и т.д. При этом уравнения состояния в координатах «обобщенная нагрузка – обобщенное перемещение» аналогичны по структуре уравнениям, описывающим одноосное деформирование стержней (по крайней мере, в условиях ползучести) [25, 26]. Суть подхода, разработанного в [17–24], заключается в следующем. Некоторые параметры в уравнениях состояния для обобщенной модели элемента конструкций являются случайными и на начальном участке эксплуатации конструкции проводится их идентификация. Далее прогноз деформационных характеристик элемента конструкции делается в соответствии с определяющими уравнениями и законами теории вероятности. Очевидно, что такой подход к индивидуальному прогнозированию требует большого объема статистической информации, получить которую в ряде случаев проблематично и затратно, особенно для уникальных изделий. Поэтому возникает задача разработки подходов, требующих минимального объема экспериментальной информации. В данной работе в этом направлении развивается метод прогнозирования по образцу-лидеру (прототипу).

2. Постановка задачи

Пусть имеются два однотипных конструктивных элемента, которые находятся в идентичных условиях внешнего нагружения. Эксплуатация одного из элементов (далее называется образцом-лидером, или прототипом) начинается на время τ раньше другого (далее называется эксплуатируемым образцом, или исследуемым образцом) (см. схему на рис. 2). Данное обстоятельство позволяет выполнять прогноз поведения эксплуатируемого образца исходя из поведения образца-лидера.

Отметим, что первая попытка разработки метода прогнозирования по образцу-лидеру в вероятностной постановке осуществлена в работе [21] для резьбового соединения в условиях изотермической ползучести. В настоящей работе этот подход модифицируется и распространяется на случай растягиваемых стержней и резьбового соединения, эксплуатирующихся в условиях неизотермической ползучести, а также на случай узла трения передней стойки шасси самолета.

Известно, что для цилиндрических образцов из металлических материалов значения нормированной корреляционной матрицы по временным се-

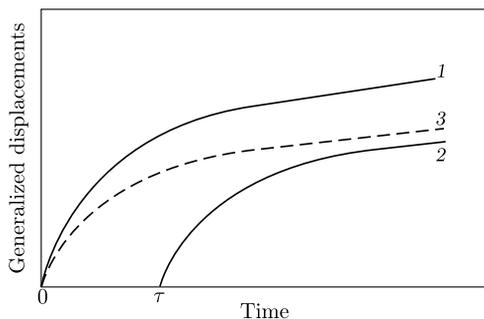


Рис. 2. Схема к индивидуальному прогнозированию по образцу-лидеру: 1 — обобщенные перемещения образца-лидера; 2 — обобщенные перемещения эксплуатируемого образца 3 — обобщенные перемещения эксплуатируемого изделия, смещенного на величину τ влево

[Figure 2. The individual forecast scheme according to the “leader” model: 1 — generalized displacements of a prototype element; 2 — generalized displacements of a structural element; 3 — generalized displacements of a structural element shifted by τ to the left]

чениям по всему объему кривых обобщенного перемещения имеют порядок 0.7–0.9 [27], а для полимерных стержневых конструкций — 0.995–0.999 (см. п. 3.3 настоящей статьи). В связи с этим вводится предположение, что при одинаковых входных воздействиях кривые обобщенного перемещения для образца-лидера (маркер 1 на рис. 2) и эксплуатируемого образца (маркер 2), но смещенного влево на величину τ по оси времени (маркер 3), подобны. Поэтому в дальнейшем все зависимости для перемещений образца-лидера и исследуемого эксплуатируемого образца (или изделия) будут относиться к графикам с маркерами 1 и 3.

3. Прогнозирование деформационных характеристик по образцу-лидеру («классический» метод)

3.1. Рассмотрим сначала схему решения задачи на основе методики, изложенной в [21] для резьбового соединения в условиях ползучести, применительно к узлам трения передней стойки шасси самолета и стержневым элементам в условиях неизотермической ползучести. Отметим, что в дальнейшем все реализации обобщенных перемещений приведены к единому началу координат $t = 0$.

Вследствие принятия гипотезы о подобии связь между обобщенными перемещениями образца-лидера и исследуемого элемента конструкции может быть представлена в виде матричной модели одномерной линейной регрессии:

$$\bar{p} = k\bar{p}^0 + \bar{\varepsilon}, \quad (1)$$

где $\bar{p} = \{p(t_1), p(t_2), \dots, p(t_n)\}^T$ — вектор значений обобщенного перемещения исследуемого элемента на начальном этапе эксплуатации; $\bar{p}^0 = \{p^0(t_1), p^0(t_2), \dots, p^0(t_n)\}^T$ — вектор значений обобщенного перемещения образца-лидера; $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}^T$ — вектор несмещенных, некоррелированных, нормально распределенных и имеющих одинаковую дисперсию ошибок; t_i — значения времени, $i = \overline{1, n}$, в которых фиксировались значения обобщенных перемещений для образца-лидера и исследуемого элемента конструкции; k — случайный параметр.

Используя соотношения линейного регрессионного анализа, можно получить МНК-оценки математического ожидания неизвестного параметра k :

$$\hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i^0 p_i}{\sum_{i=1}^n (p_i^0)^2} \quad (2)$$

и дисперсии ошибок

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n p_i^2 - \hat{k}^2 \sum_{i=1}^n (p_i^0)^2 \right), \quad (3)$$

где $p_i = p(t_i)$, $p_i^0 = p^0(t_i)$.

Прогноз обобщенного перемещения исследуемого элемента конструкции может быть осуществлен с помощью соотношения

$$\hat{p}(t) = \hat{k} \cdot p^0(t), \quad (4)$$

где $t > t_n$, t_n — крайняя правая точка базы наблюдения на начальном участке обобщенного перемещения исследуемого образца.

Для решения задачи о надежности необходимо указать доверительную полосу, которая с определенной вероятностью «покрывает» истинные значения обобщенного перемещения исследуемого образца. Построение $100(1 - \alpha)\%$ -ных доверительных интервалов можно осуществить по формулам [31]

$$\hat{p}_j \pm U_{N,n-1}^\alpha \cdot s_0 (1 + v_*^j)^{1/2}, \quad (5)$$

$$v_*^j = \frac{1}{n} + (p_j^0)^2 / \sum_{i=1}^n (p_i^0)^2, \quad j = \overline{1, N}, \quad (6)$$

где N — число точек прогноза исследуемого элемента при $t > t_n$, значения $U_{N,n-1}^\alpha$ берутся из специальных таблиц [31], α — степень риска.

3.2. Применим изложенный «классический» метод индивидуального прогнозирования по лидеру [21] к узлам трения (буксам) передней стойки шасси самолета [11]. Здесь в качестве обобщенного перемещения используется величина зазора в трущихся сопряжениях Δ (мкм) в зависимости от числа взлетов-посадок (обобщенного времени t). Информацию о характере зависимости $\Delta = \Delta(t)$ и величине ее разброса дают экспериментальные данные износа узла трения передней стойки шасси самолета для десяти различных изделий [11], которые представлены на рис. 3. Маркеры — номера изделий; на рис. 3 также представлена схема определения величины Δ (F — приложенная нагрузка до достижения контакта внутреннего и внешнего цилиндров) в соответствии с хорошо зарекомендовавшим себя методом жесткости [11, 32].

Отметим, что основным источником отказов при эксплуатации узлов трения является изнашивание трущихся сопряжений, увеличивающее зазор между ними, что вызывает вибрацию, разгерметизацию и другие недопустимые отклонения в узлах трения. В частности, в работе [11] отмечается, что при ремонте уже давно выведенных из эксплуатации самолетов Ту-134 дефекты по износу составляли 65.8%.

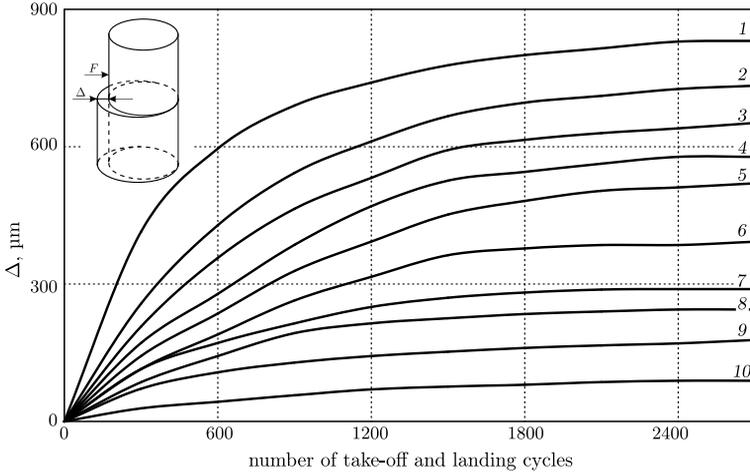


Рис. 3. Кривые износа узла трения передней стойки шасси самолета в зависимости от числа взлетов-посадок [11]

[Figure 3. Wear curves of the nose landing gear friction unit of an aircraft depending on the number of take-off and landing cycles [11]. Markers are the numbers of parts. Wear curves of the nose landing gear friction unit of an aircraft depending on the number of take-off and landing cycles. Markers are the numbers of parts. Δ is the size of the gap between the rubbing elements. F is the applied load until the inner and outer cylinder contact is reached]

На первом этапе кривые износа, представленные на рис. 3, средствами математической статистики проверялись на подобие (формула (4)). Для этой цели строилась нормированная корреляционная функция $r(t_i, t_j)$, вычисление которой производилось для различных пар (t_i, t_j) , образованных в «моменты времени» $t = \{300; 600; 900; 1200; 1500; 1800; 2100; 2400; 2700\}$ (t — номера циклов взлетов-посадок), по следующим формулам:

$$m(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N p_l(t_i), \quad (7)$$

$$k(t_i, t_j) = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^N [p_l(t_i) - m(t_i)] \cdot [p_l(t_j) - m(t_j)],$$

$$s(t_j) = \sqrt{k(t_i, t_j)}, \quad r(t_i, t_j) = \frac{k(t_i, t_j)}{s(t_i)s(t_j)}, \quad i, j = \overline{1, 9},$$

где $p_l(t_i)$ — значение обобщенного перемещения (величины зазора Δ) изделия с номером l в момент $t = t_i$.

В результате получена следующая нормированная корреляционная матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.95 & 0.97 & 0.95 & 0.95 & 0.97 & 0.95 & 0.95 & 0.97 \\ & 1 & 0.96 & 0.97 & 0.95 & 0.96 & 0.96 & 0.97 & 0.97 \\ & & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.96 & 0.96 & 0.96 & 0.97 \\ & & & 1 & 0.95 & 0.95 & 0.96 & 0.96 & 0.96 \\ & & & & 1 & 0.96 & 0.97 & 0.97 & 0.97 \\ & & & & & 1 & 0.96 & 0.96 & 0.96 \\ & & & & & & 1 & 0.95 & 0.97 \\ & & & & & & & 1 & 0.97 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку дискретные величины корреляционной функции принимают значения 0.95–0.97, можно утверждать о высокой степени достоверности гипотезы подобия кривых износа узла трения передней стойки шасси самолета (кривых обобщенного перемещения), представленных на рис. 3.

Для прогнозирования обобщенного перемещения (зазора Δ) по модели (1)–(6) в качестве образца-лидера в результате случайного выбора использовалось изделие с номером 2. В качестве базы наблюдений на начальном этапе эксплуатации использовался интервал $t \in [0; 1200]$ взлетов-посадок. Согласно изложенной выше методике были определены все параметры модели (1)–(6) для остальных изделий. На рис. 4 сплошными линиями приведены экспериментальные данные, штрих-пунктирными линиями — результаты прогноза для математического ожидания на основании (4) для $t \in [1200; 2700]$, а штриховыми линиями — 95 %-ный доверительный интервал величины \hat{p} для изделий с номерами 3, 6 и 9.

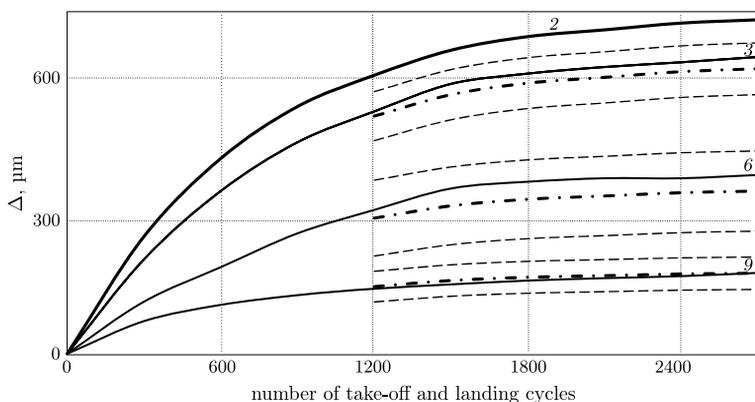


Рис. 4. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (изделие 2) износа узла трения передней стойки шасси самолета для изделий 3, 6 и 9

[Figure 4. Individual forecast by the “leader” model (part 2) for the wear of the nose landing gear friction unit of an aircraft for parts 3, 6, and 9: solid lines — experimental data; dashed-dotted lines — the prediction results for mathematical expectation, dashed lines — the 95% confidence interval]

3.3. Аналогично предыдущему пункту применим модель (1)–(6) для индивидуального прогнозирования вязкоупругого деформирования стержней из поливинилхлоридного пластика при различных температурах и напряжениях. В работе [33] приведены экспериментальные данные для полых трубчатых образцов длиной 1000 мм и площадью поперечного сечения 1.2 мм² для двух температур (20 и 24 °С) и пяти уровней растягивающего напряжения σ (4.65, 6.29, 8.34, 10.37, 12.01 МПа). На рис. 5 приведены экспериментальные зависимости для вязкоупругой деформации (обобщенного перемещения) $p = p(t)$ при различных сочетаниях температуры T и напряжений σ (соответственно 10 реализаций) на интервале времени $t \in [0; 8]$ час.

Выполнена проверка на соответствие кривых, представленных на рис. 5, гипотезе подобия. Значения нормированной корреляционной функции $r(t_i, t_j)$, вычисленные по (7) для различных пар $\{t_i, t_j\}$, образованных в моменты вре-

мени $t = \{0.25; 0.5; 1.0; 2.0; 3.0; 4.0; 5.0; 6.0; 7.0; 8.0\}$ час, представлены матрицей

1	0.997	0.998	0.998	0.999	0.998	0.999	0.999	0.998	0.996
	1	0.998	0.999	0.999	0.996	0.996	0.997	0.998	0.998
		1	0.999	0.999	0.996	0.997	0.997	0.997	0.997
			1	0.999	0.997	0.997	0.998	0.999	0.996
				1	0.996	0.998	0.998	0.999	0.998
					1	0.998	0.999	0.999	0.998
						1	0.999	0.997	0.995
							1	0.999	0.998
								1	0.999
									1

Значения коэффициентов корреляционной матрицы имеют порядок 0.995–0.999, что свидетельствует о хорошей обоснованности использования гипотезы подобия (4) и, соответственно, применимости метода прогнозирования по образцу-лидеру.

Для прогнозирования вязкоупругого деформирования по модели (1)–(6) в качестве образца-лидера в результате случайного выбора использовался образец с номером 2. В качестве базы наблюдений на начальном этапе эксплуатации использовался интервал $t \in [0; 2]$ часов. Согласно изложенной выше методике были определены все параметры модели (1)–(6). На рис. 6 в качестве примера сплошными линиями приведены экспериментальные данные, штрих-пунктирными линиями — результаты прогноза математического ожидания на основании (4) для $t \in [2; 8]$, а штриховыми линиями — 95 %-ный

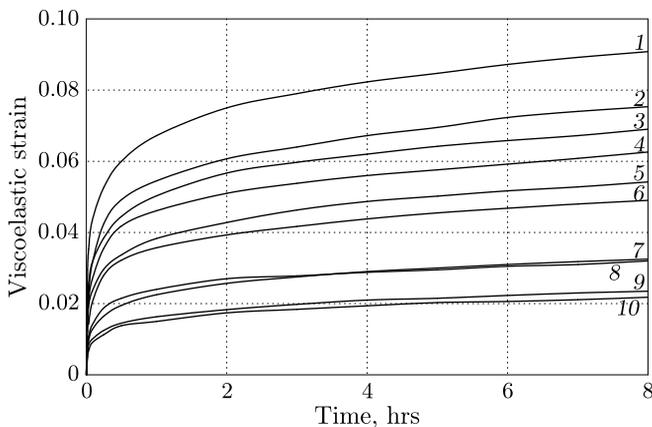


Рис. 5. Кривые вязкоупругого деформирования поливинилхлоридного пластиката: 1 – $\sigma = 12.01$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 2 – $\sigma = 12.01$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 3 – $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 4 – $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 5 – $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 6 – $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 7 – $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 8 – $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 9 – $\sigma = 4.66$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 10 – $\sigma = 4.66$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$

[Figure 5. Viscoelastic strain of polyvinylchloride compound: 1 – $\sigma = 12.01$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 2 – $\sigma = 12.01$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 3 – $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 4 – $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 5 – $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 6 – $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 7 – $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 8 – $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 9 – $\sigma = 4.66$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 10 – $\sigma = 4.66$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$]

доверительный интервал для вязкоупругой деформации трех образцов с номерами 3, 6 и 8. Отметим, что в данном случае конструктивные элементы (стержни) находятся в разных режимах температурно-силового нагружения, но тем не менее получены достоверные результаты прогноза.

На рис. 7 приведены аналогичные результаты для осевого смещения торцевых сечений $\Delta l_p = \Delta l_p(t)$ области свинчивания резьбового соединения из стали 45 при температуре 450°C в условиях ползучести при сложных про-

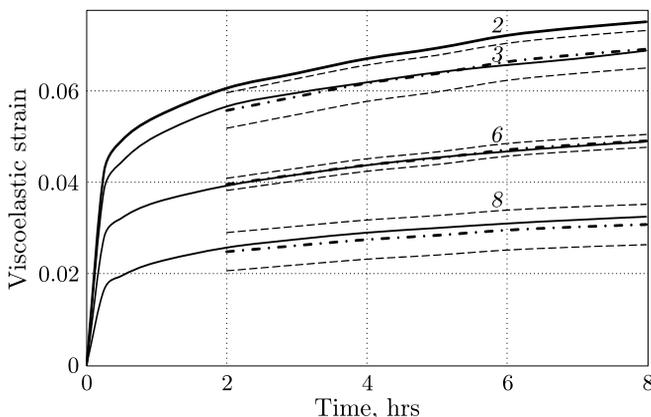


Рис. 6. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика для образцов 3, 6 и 8: 3 – $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 6 – $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 8 – $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$

[Figure 6. Individual forecast by the “leader” model (sample 2) for viscoelastic deformation for samples 3, 6, and 8 from polyvinylchloride compound: 3 – $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 6 – $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 8 – $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$; solid lines – experimental data; dashed-dotted lines – the prediction results for mathematical expectation, dashed lines – the 95% confidence interval]

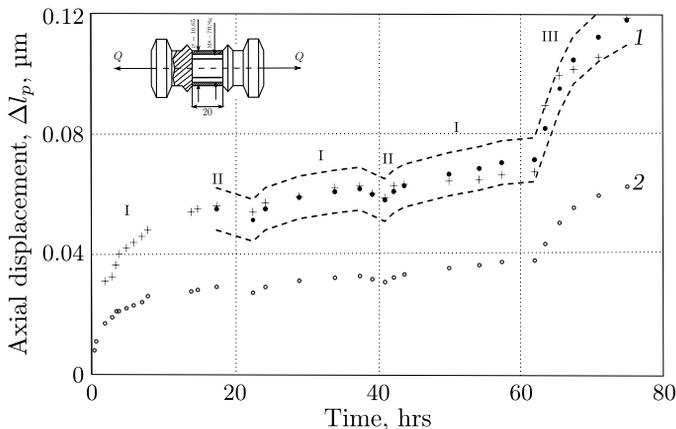


Рис. 7. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) осевого смещения Δl_p резьбового соединения для образца 1 в условиях ползучести: o – экспериментальные значения Δl_p образца 2; + – экспериментальные значения Δl_p образца 1; • – расчетные осредненные значения Δl_p образца 1; штриховые линии – 95 %-ный доверительный интервал; I – $Q = 6.86$ кН; II – $Q = 0.98$ кН; III – $Q = 9.86$ кН

[Figure 7. Individual forecast by the “leader” model (sample 2) for the axial displacement Δl_p for the threaded connection for the sample 1 under creep conditions: o – experimental values Δl_p for the sample 2; + – experimental values Δl_p for the sample 1; • – calculated average values Δl_p for the sample 1; dashed lines – the 95% confidence interval; I – $Q = 6.86$ кН; II – $Q = 0.98$ кН; III – $Q = 9.86$ кН]

граммах изменения осевой растягивающей нагрузки Q по результатам экспериментальных данных для двух образцов, приведенных в работе [21]. Здесь дискретные экспериментальные значения зависимости $\Delta l_p = \Delta l_p(t)$ участка свинчивания для образцов с номерами 1 и 2 представлены крестиками (+) и кружочками (o) соответственно.

Для прогнозирования осевого смещения торцевых сечений в качестве образца-лидера использовался образец 2. В качестве базы наблюдения на начальном этапе эксплуатации использовался интервал $t \in [0; 17.4]$ часов. Согласно изложенной выше методике были определены все параметры модели (1)–(6). На рис. 7 закрашенные кружочки (•) — расчетные значения математического ожидания, штриховые линии — 95 %-ный доверительный интервал для математического ожидания образца 1 для $t \in [17.4; 75]$ час.

Как следует из приведенных примеров, результаты индивидуального прогнозирования обобщенного перемещения по известной модели (1)–(6), предложенной в [21], но примененной для неисследованных элементов конструкций с различными механическими свойствами материалов и необратимыми процессами накопления повреждений (деформаций) при различных температурно-силовых условиях нагружения, дают приемлемые результаты на длительность прогноза от одной временной базы (узлы трения), необходимой для определения всех параметров модели (1)–(6), до длительности в три (вязкоупругие стержни) и более чем в четыре базовых интервала (резьбовое соединение в условиях ползучести).

4. Прогнозирование деформационных характеристик по образцу-лидеру («модифицированный» метод)

Рассмотренный в предыдущем пункте «классический» метод индивидуального прогнозирования обобщенного перемещения на основании (1)–(6) обладает одним недостатком: прогноз не привязан к финальному экспериментальному значению перемещения в конце базового интервала времени $t = t_n$ и, соответственно, первой точке интервала прогнозирования ($t > t_n$). И если не учитывать погрешность эксперимента и другие случайные факторы, т.е. считать измеренное экспериментальное значение обобщенного перемещения в точке $t = t_n^*$ точным, то доверительный интервал в этой точке должен быть нулевым. Поэтому модифицируем методику (1)–(6) следующим образом: поскольку известно значение обобщенное перемещение в точке $t = t_n$, то необходимо оценку среднеквадратичного отклонения выполнить с учетом условной вероятности. Тогда вместо величины среднеквадратичного отклонения s_0 в (5) нужно использовать величину

$$s_* = s_1 \cdot \sqrt{1 - (r_*)^2}, \quad r_* = \frac{\sum_{i=1}^n (p_i - \hat{p})(p_i^0 - \hat{p}^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - \hat{p})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^0 - \hat{p}^0)^2}}, \quad (8)$$

где p_i и p_i^0 — значения обобщенного перемещения образца лидера и прогнозируемого образца в точках $t = t_i$ соответственно; \hat{p} , \hat{p}^0 — осредненные значения величин p_i и p_i^0 ; s_1 — среднеквадратичное отклонение прогнозируемого образца, вычисляемое по формуле $s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (p_i^0 - \hat{p}^0)^2}$.

Результаты расчетов по модифицированной методике для узлов трения, вязкоупругих стержней и резьбовых соединений для изделий с теми же номерами, что и на рис. 5–7, приведены на рис. 8–10, а значения параметров модели (1)–(6), (8) представлены в таблице.

Как следует из данных на рис. 8–10, имеем более узкие доверительные интервалы для математического ожидания для всех конструктивных элементов по модифицированной методике по сравнению с данными на рис. 5–7, полученными по известной методике [21], а следовательно, и более точный индивидуальный прогноз обобщенного перемещения.

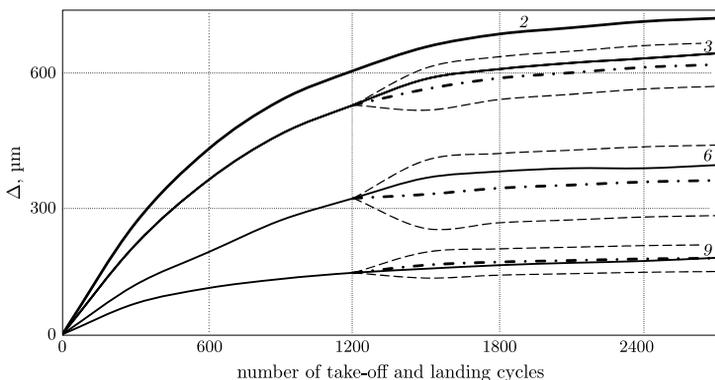


Рис. 8. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (изделие 2) износа узла трения передней стойки шасси самолета для изделий 3, 6 и 9 по модифицированной модели

[Figure 8 Individual forecast by the modified “leader” model (part 2) for the wear of the nose landing gear friction unit of an aircraft for parts 3, 6, and 9: solid lines — experimental data; dashed-dotted lines — the prediction results for mathematical expectation, dashed lines — the 95% confidence interval]

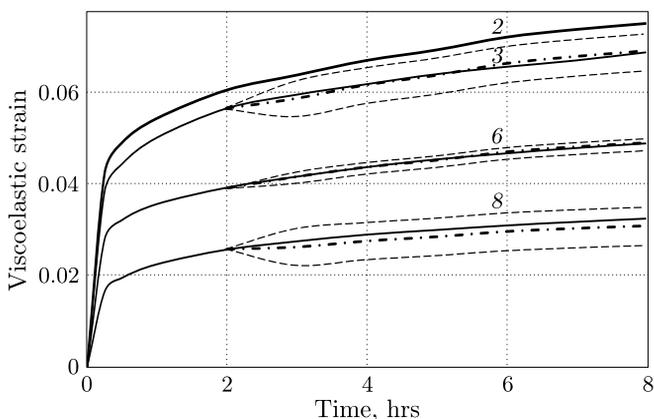


Рис. 9. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) вязкоупругой деформации поливинилхлоридного пластика для образцов 3, 6 и 8 по модифицированной модели: 3 — $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 6 — $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 8 — $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$

[Figure 9. Individual forecast by the modified “leader” model (sample 2) for viscoelastic deformation for samples 3, 6, and 8 from polyvinylchloride compound: 3 — $\sigma = 10.37$ МПа, $T = 24^\circ\text{C}$, 6 — $\sigma = 8.74$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$, 8 — $\sigma = 6.29$ МПа, $T = 20^\circ\text{C}$; solid lines — experimental data; dashed-dotted lines — the prediction results for mathematical expectation, dashed lines — the 95% confidence interval]

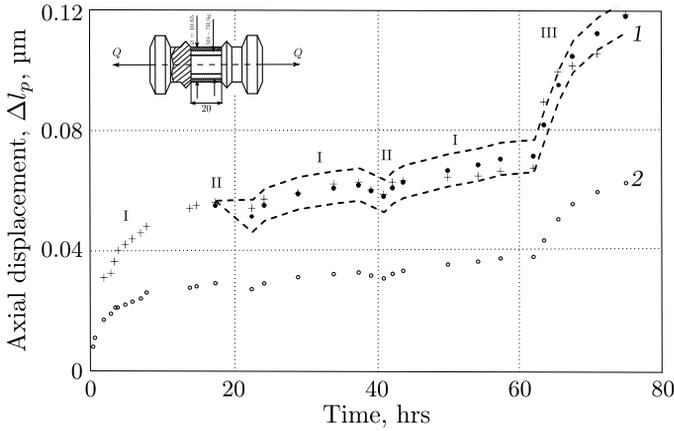


Рис. 10. Индивидуальное прогнозирование по образцу-лидеру (образец 2) осевого смещения Δl_p резьбового соединения для образца 1 в условиях ползучести по модифицированной модели: \circ — экспериментальные значения Δl_p образца 2; $+$ — экспериментальные значения Δl_p образца 1; \bullet — расчетные средние значения Δl_p образца 1; штриховые линии — 95%-ный доверительный интервал; I — $Q = 6.86$ кН; II — $Q = 0.98$ кН; III — $Q = 9.86$ кН

[Figure 10. Individual forecast by the modified “leader” model (sample 2) for the axial displacement Δl_p for the threaded connection for the sample 1 under creep conditions: \circ — experimental values Δl_p for the sample 2; $+$ — experimental values Δl_p for the sample 1; \bullet — calculated average values Δl_p for the sample 1; dashed lines — the 95% confidence interval; I — $Q = 6.86$ kN; II — $Q = 0.98$ kN; III — $Q = 9.86$ kN]

Значения параметров модели (1)–(6), (8)
 [The values of the model (1)–(6), (8) parameters]

Sample numbers	\hat{k}	s_0	s_*
Friction unit			
3	0.85	9.09	8.08
6	0.49	14.07	13.06
9	0.24	5.69	4.98
Viscoelastic rod			
3	0.92	$6.5 \cdot 10^{-4}$	$6.35 \cdot 10^{-4}$
6	0.65	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$2.14 \cdot 10^{-4}$
8	0.30	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-4}$
Threaded connection			
1	1.89	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$

5. Заключение

В настоящей работе предложен и реализован метод индивидуального прогнозирования обобщенного перемещения эксплуатируемых элементов конструкций по образцу-лидеру, который не требует аналитических соотношений, связывающих обобщенные нагрузки с обобщенными силами, точного знания характера и величины нагрузок для совокупности однотипных изделий.

Полученные результаты для рассмотренных в работе элементов конструкций следующие.

1. Прогноз износа узла трения передней стойки шасси самолета по образцу-лидеру на интервал 1200–2700 взлетов-посадок, превышающий базовый интервал (1200 взлетов-посадок), в рамках которого определялись оценки случайных параметров процесса, дает хорошие результаты.
2. Прогноз деформирования стержней из поливинилхлоридного пластика в условиях ползучести на интервал времени 2–8 часов, который в три раза больше базового интервала (2 часа), также дает хорошие результаты. При этом результаты прогнозирования «работают» для различных температур (20 и 24 °С) и различных уровней приложенных напряжений.
3. Прогноз ползучести резьбового соединения из стали 45 на временной интервал 17.4–75 часов, который в четыре раза больше базового интервала (17.4 часов), при нестационарных (ступенчатых) режимах нагрузки также дает хорошие результаты.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Болотин В. В. *Прогнозирование ресурса машин и конструкций*. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
2. Фролов К. В. *Методы совершенствования машин и современные проблемы машиностроения*. М.: Машиностроение, 1984. 223 с.
3. Фролов К. В., Зубов И. В., Израилев Ю. Л. и др. О возможности увеличения продолжительности периода безопасной эксплуатации энергоблоков между капитальными ремонтами // *Пробл. прочн.*, 1986. № 5. С. 3–11.
4. Ребров И. С. *Усиление стержневых металлических конструкций. Проектирование и расчет*. Л.: Стройиздат, 1988. 288 с.
5. Бондаренко В. М., Меркулов С. И. К вопросу развития теории реконструированного железобетона // *Бетон и железобетон*, 2004. № 6. С. 3–11.
6. Будин А. Я., Чекренева М. В. *Усиление портовых сооружений*. М.: Транспорт, 1983. 180 с.
7. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н., Абрагим Х. А. Повышение несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2011. № 3. С. 23–30. EDN: ODEGUH.
8. Серазутдинов М. Н., Убайдуллоев М. Н. Усиление нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил // *Инженерно-строительный журнал*, 2012. № 1(27). С. 98–100. EDN: ORDEER.
9. Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А. Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001. № 12. С. 73–84. EDN: EBNDRJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>.
10. Радченко В. П., Саушкин М. Н., Голудин Е. П. Стохастическая модель неизотермической ползучести и длительной прочности материалов // *ПМТФ*, 2012. Т. 53, № 2. С. 167–174. EDN: NJQRJC.

11. Громаковский Д. Г., Радченко В. П., Аверкиева В. И. Разработка системы диагностирования узлов трения на основе метода жесткости // *Вестник машиностроения*, 1988. №8. С. 10–14.
12. Радченко В. П., Шершнева М. В., Кубышкина С. Н. Оценка надежности элементов конструкций в условиях ползучести на основании стохастических обобщенных моделей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №3(28). С. 53–71. EDN: QBUTSF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1094>.
13. Радченко В. П., Попов Н. Н. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // *ПММ*, 2012. Т. 76, №6. С. 1023–1031. EDN: PJCSUP.
14. Радченко В. П., Шершнева М. В., Цветков В. В. Обобщенная стохастическая модель ползучести и длительной прочности балки в условиях чистого изгиба и ее применение к оценке показателей надежности // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. №4(29). С. 72–86. EDN: PUQBMF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1113>.
15. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. *Теория вероятностей*. М.: Наука, 1969. 368 с. EDN: NRYKLC.
16. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 288 с.
17. Чижик А. А. Индивидуальные методы прогнозирования ресурса основных элементов энергетического оборудования // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1990. №5. С. 3–11.
18. Самарин Ю. П. Стохастические механические характеристики и надежность конструкций с реологическими свойствами / *Ползучесть и длительная прочность конструкций*. Куйбышев: КуАИ, 1986. С. 8–17.
19. Радченко В. П., Павлова Г. А. Методы оценки индивидуальной надежности элементов конструкций с учетом информации о деформациях и перемещениях на начальном этапе эксплуатации / *Надежность и прочность машиностроительных конструкций*. Куйбышев: КуАИ, 1988. С. 124–138.
20. Радченко В. П., Хренов С. М. Метод расчета третьей стадии ползучести при растяжении с учетом индивидуальных деформационных свойств / *Ползучесть и длительная прочность конструкций*. Куйбышев: КуАИ, 1986. С. 56–65.
21. Радченко В. П., Павлова Г. А. Прогнозирование индивидуальной надежности элементов конструкций при ползучести на стадии эксплуатации по лидеру // *Изв. вузов. Машиностроение*, 1989. №11. С. 23–27.
22. Самарин Ю. П., Маклаков В. Н. Индивидуальное прогнозирование поведения материала при многократной усталости с использованием закономерностей неупругого деформирования // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1991. №6. С. 107–112.
23. Еремин Ю. А., Радченко В. П., Самарин Ю. П. Расчет индивидуальных деформационных свойств элементов конструкций в условиях ползучести // *Машиноведение*, 1984. №1. С. 67–72.
24. Еремин Ю. А., Кайдалова Л. В., Консон Е. Д. Индивидуальное прогнозирование остаточных прогибов сварных диафрагм в условиях эксплуатации // *Изв. вузов. Машиноведение*, 1988. №1. С. 12–16.
25. Еремин Ю. А., Кайдалова Л. В., Радченко В. П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнения состояния материала и элементов конструкций // *Машиноведение*, 1983. №2. С. 64–67.
26. Самарин Ю. П., Еремин Ю. А. Метод исследования ползучести конструкций // *Пробл. прочн.*, 1985. №4. С. 40–45.
27. Радченко В. П., Дудкин С. А., Тимофеев М. И. Экспериментальное исследование и анализ полей неупругих микро- и макродеформаций сплава АД-1 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002. №16. С. 111–117. EDN: EBNEIR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu107>.

28. Катанаха Н. А., Семенов А. С., Гецов Л.Б. Единая модель долгосрочной и краткосрочной ползучести и идентификация ее параметров // *Пробл. прочн.*, 2013. № 4. С. 143–157. EDN: **SBCYVN**.
29. Зотеев В. Е. Математическое моделирование и численный метод оценки характеристик неизотермической ползучести по результатам эксперимента // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 531–555. EDN: **DTVIXO**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1871>.
30. Зотеев В. Е. Численный метод нелинейного оценивания на основе разностных уравнений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 4. С. 669–701. EDN: **YSDYZN**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
31. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis* / Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: Wiley, 2003. 565 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780471722199>
32. Проников А. С. *Надежность машин*. М.: Машиностроение, 1978. 592 с. EDN: **TDUDZJ**.
33. Унгарова Л. Г. *Методы математического моделирования наследственно-упругих сред на основе дробного исчисления*: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Самара: СамГТУ, 2020. 199 с. EDN: **TVYVLN**.
34. Иванов Д. В., Доль А. В. *Биомеханическое моделирование*. Саратов: Амирит, 2021. 250 с. EDN: **TQRJJQ**.
35. Бескровный А. С., Бессонов Л. В., Голядкина А. А. и др. Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии. Биомеханика как инструмент предоперационного планирования // *Российский журнал биомеханики*, 2021. Т. 25, № 2. С. 118–133. EDN: **IEGONC**.
36. Иванов Д. В. Биомеханическая поддержка решения врача при выборе варианта лечения на основе количественных критериев оценки успешности // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, 2022. Т. 22, № 1. С. 62–89. EDN: **ZYXHTD**. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>.

MSC: 74S60

Prediction of individual deformation characteristics of structural elements by a “leader” product

V. P. Radchenko, E. A. Afanaseva

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

We propose a numerical method for predicting the individual deformation characteristics of structural elements by a “leader” product. The basis of this method is generalized one-parameter models. These models relate the integral characteristics of the stress state to the integral characteristics of the deformation state in the “generalized load – generalized displacement” coordinates. The scope of the method is structural elements of the same type, which are under identical conditions of external loading and are characterized by a large spread of deformation characteristics (generalized displacement). It is assumed that the operation of one structural element (prototype) begins some time earlier than the others. A hypothesis on the similarity of all realizations reduced to a single origin by a time shift in the “generalized displacement – time” coordinates is introduced. Using statistical information on the initial sections of “lagging” structural elements and the sample prototype, the statistical characteristics of the similarity parameter of the operated structural element are determined in relation to the “leader” product, and then its deformation characteristics are predicted.

In the paper, we investigate friction units and structural elements (rods, threaded connections) under creep conditions. Based on statistical correlation analysis of the experimental information, a verification of the similarity hypothesis usability for all implementations of the structural elements studied is carried out. The method was illustrated by an example of predicting the wear of the friction units of the front landing gear of the aircraft depending on the number of take-off and landing cycles. The method was also illustrated with an example of how to calculate the elongation of rods made of a

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

  The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Radchenko V. P., Afanaseva E. A. Prediction of individual deformation characteristics of structural elements by a “leader” product, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 500–519. EDN: MIVLAC. DOI: [10.14498/vsgtu1919](https://doi.org/10.14498/vsgtu1919) (In Russian).

Authors’ Details:

Vladimir P. Radchenko  <https://orcid.org/0000-0003-4168-9660>Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Dept; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: radchenko.vp@samgtu.ru*Elena A. Afanaseva*  <https://orcid.org/0000-0001-7815-2723>Postgraduate Student; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: afanasieva.ea@samgtu.ru

polyvinylchloride compound under uniaxial loading and axial displacement of the screwing area of a threaded joint under creep conditions.

The experimental data for the generalized displacement of specific implementations are shown to not exceed the calculated limits of the confidence interval for mathematical expectation for all structural elements considered in prediction time intervals of one to four “basic” intervals, within which estimates of random parameters for specific structural elements were determined.

Keywords: prediction, generalized displacement, individual deformation characteristics, friction unit, creep, rod, threaded connection.

Received: 19th April, 2022 / Revised: 8th August, 2022 /

Accepted: 13th September, 2022 / First online: 28th September, 2022

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author’s Responsibilities. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. Not applicable.

References

1. Bolotin V. V. *Prognozirovanie resursa mashin i konstruksii* [Forecasting Resource Machines and Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 312 pp. (In Russian)
2. Frolov K. V. *Metody sovershenstvovaniia mashin i sovremennye problemy mashinostroeniia* [Methods for Improving Machines and Modern Problems of Mechanical Engineering]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 223 pp. (In Russian)
3. Frolov K. V., Zubov I. V., Izrailev Yu. L., et al. Extending the period of safe operation of power-generating equipment between major overhauls, *Strength Mater.*, 1986, vol. 18, no. 5, pp. 553–563. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01522765>.
4. Rebrov I. S. *Usilenie sterzhnevyykh metallicheskikh konstruksii. Proektirovanie i raschet* [Strengthening of Bar-Metal Structures. Design and Calculation]. Leningrad, Stroiizdat, 1988, 288 pp. (In Russian)
5. Bondarenko V. M., Merkulov S. I. To the question of the development of the theory of reconstructed reinforced concrete, *Beton Zhelezobeton* [Concrete and Reinforced Concrete], 2004, no. 6, pp. 3–11 (In Russian).
6. Budin A Ya., Chekreneva M. V. *Usilenie portovykh sooruzhenii* [Strengthening Port Facilities]. Moscow, Transport, 1983, 180 pp. (In Russian)
7. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N., Abragim Kh. A. Increasing the bearing capacity of reinforced loaded structures, *Stroit. Mekh. Inzhen. Konstr. Sooruzh.*, 2011, no. 3, pp. 23–30 (In Russian). EDN: [ODEGUH](https://edn.org/ODEGUH).
8. Serazutdinov M. N., Ubaidulloev M. N. Amplification of loaded bar structures taking into account the influence of repair and assembly forces, *Inzhenerno-Stroit. Zhurnal*, 2012, no. 1(27), pp. 98–100 (In Russian). EDN: [ORDEER](https://edn.org/ORDEER).
9. Radchenko V. P., Simonov A. V., Dudkin S. A. Stochastic version of the one-dimensional theory of creep and long-term strength, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2001, no. 12, pp. 73–84 (In Russian). EDN: [EBNDRJ](https://edn.org/EBNDRJ). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>.
10. Radchenko V. P., Saushkin M. N., Goludin E. P. Stochastic model of nonisothermal creep and long-term strength of materials, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 292–298. EDN: [PDNKAX](https://edn.org/PDNKAX). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894412020186>.
11. Gromakovskii D. G., Radchenko V. P., Averkieva V. I. Development of a system for diagnosing friction units based on the stiffness method, *Vestn. Mashinost.*, 1988, no. 8, pp. 10–14 (In Russian).

12. Radchenko V. P., Shershneva M. V., Kubyskhina S. N. Evaluation of the reliability of structures under creep for stochastic generalized models, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 3(28), pp. 53–71 (In Russian). EDN: QBUTSF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1094>.
13. Radchenko V. P., Popov N. N. Analytical solution of the stochastic steady-state creep boundary value problem for a thick-walled tube, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 738–744. EDN: WQYAXJ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.02.011>.
14. Radchenko V. P., Shershneva M. V., Tsvetkov V. V. Generalized stochastic model of creep and creep rupture beams in pure bending and its application to the estimation of reliability, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2012, no. 4(29), pp. 72–86 (In Russian). EDN: PUQBMF. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1113>.
15. Venttsel' E. S., Ovcharov L. A. *Teoriia veroiatnosti* [Theory of Probability]. Moscow, Nauka, 1969, 368 pp. (In Russian). EDN: NRYKLC.
16. Granovskii V. A., Siraia T. N. *Metody obrabotki eksperimental'nykh dannykh pri izmereniiakh* [Methods for Processing Experimental Data During Measurements]. Leningrad, Energoatomizdat, 1990, 288 pp. (In Russian)
17. Chizhik A. A. Individual methods for predicting the resource of the main elements of power equipment, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 1990, no. 5, pp. 3–11 (In Russian).
18. Samarin Yu. P. Stochastic mechanical characteristics and reliability of structures with rheological properties, In: *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' konstruktssii* [Creep and Long-Term Strength of Structures]. Kuybyshev, Kuybyshev Aviation Inst., 1986, pp. 8–17 (In Russian).
19. Radchenko V. P., Pavlova G. A. Methods for evaluating the individual reliability of structural elements, taking into account information on deformations and displacements at the initial stage of operation, In: *Nadezhnost' i prochnost' mashinostroitel'nykh konstruktssii* [Reliability and Strength of Engineering Structures]. Kuybyshev, Kuybyshev Aviation Inst., 1988, pp. 124–138 (In Russian).
20. Radchenko V. P., Khrenov S. M. Method to calculate the third stage of tensile creep taking into account the individual deformation properties, In: *Polzuchest' i dlitel'naiia prochnost' konstruktssii* [Creep and Long-Term Strength of Structures]. Kuybyshev, Kuybyshev Aviation Inst., 1986, pp. 56–65 (In Russian).
21. Radchenko V. P., Pavlova G. A. Prediction of individual reliability of structural elements during creep at the operating stage according to the leader, *Izv. Vuzov. Mashinostroenie*, 1989, no. 11, pp. 23–27 (In Russian).
22. Samarin Yu. P., Maklakov V. N. Individual prediction of material behavior under high-cycle fatigue using inelastic deformation problems, *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 1991, no. 6, pp. 107–112 (In Russian).
23. Eremin Yu. A., Radchenko V. P., Samarin Yu. P. Calculation of individual deformation properties of structural elements under creep conditions, *Mashinovedenie*, 1984, no. 1, pp. 67–72 (In Russian).
24. Eremin Yu. A., Kaidalova L. V., Konson E. D. Individual prediction of residual deflections of the welded diaphragms under operating conditions, *Izv. Vuzov. Mashinovedenie*, 1988, no. 1, pp. 12–16 (In Russian).
25. Eremin Yu. A., Kaidalova L. V., Radchenko V. P. Investigation of beam creep based on the analogy of the structure of the equation of state of the material and structural elements, *Mashinovedenie*, 1983, no. 2, pp. 64–67 (In Russian).
26. Samarin Yu. P., Eremin Yu. A. Method of investigating component creep, *Strength Mater.*, 1985, vol. 17, no. 4, pp. 487–493. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01533947>.
27. Radchenko V. P., Dudkin S. A., Timofeev M. I. Experimental study and analysis of the inelastic micro- and macro-inhomogeneity fields of AD-1 alloy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2002, no. 16, pp. 111–117 (In Russian). EDN: EBNEIR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu107>.

28. Katanaha N. A., Semenov A. S., Getsov L. B. Unified model of steady-state and transient creep and identification of its parameters, *Strength Mater.*, 2013, vol. 45, no. 4, pp. 145-156. EDN: **SBCVWP**. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11223-013-9485-7>.
29. Zoteev V. E. Mathematical modeling and numerical method for estimating the characteristics of non-isothermal creep based on the experimental data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 531-555 (In Russian). EDN: **DTVIXO**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1871>.
30. Zoteev V. E. A numerical method of nonlinear estimation based on difference equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 4, pp. 669-701 (In Russian). EDN: **YSDYZN**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1643>.
31. Seber G. A. F., Lee A. J. *Linear Regression Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ, Wiley, 2003, 565 pp. DOI: <https://doi.org/10.1002/9780471722199>
32. Pronikov A. S. *Nadezhnost' mashin* [Reliability of Machines]. Moscow, Mashinostroenie, 1978, 592 pp. (In Russian). EDN: **TDUDZJ**.
33. Ungarova L. G. *Methods of mathematical modeling of hereditarily elastic media based on fractional calculus*, Cand. Diss. (Phys. & Math. Sci.). Samara State Techn. Univ., 2020, 199 pp. (In Russian). EDN: **TVYVLN**.
34. Ivanov D. V., Dol' A. V. *Biomekhanicheskoe modelirovanie* [Biomechanical Modeling]. Saratov, Amirit, 2021, 250 pp. (In Russian). EDN: **TQRJJO**.
35. Beskrovny A. S., Bessonov L. V., Golyadkina A. A., et all. Development of a decision support system in traumatology and orthopedics. Biomechanics as a tool for preoperative planning, *Rus. J. Biomech.*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 99-112. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2021.2.01>.
36. Ivanov D. V. Biomechanical support for the physician's decision when choosing a treatment option based on quantitative success criteria, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 62-89 (In Russian). EDN: **ZYXHTD**. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-1-62-89>.



УДК 517.958:544.018

Математическое моделирование влияния спейсеров на массоперенос в электромембранных системах

А. В. Коваленко¹, А. М. Узденова²,
А. В. Овсянникова³, М. Х. Уртенев¹, Р. А. Бостанов²

¹ Кубанский государственный университет,

Россия, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

² Карачаево-Черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева,
Россия, 369202, Карачаевск, ул. Ленина, 29.

³ Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
Россия, 125468, Москва, Ленинградский пр-т, 29.

Аннотация

В электромембранных системах перенос ионов вблизи ионообменных мембран вызывает концентрационную поляризацию, что существенно затрудняет массоперенос. Чтобы нивелировать эффект концентрационной поляризации и увеличить массоперенос, используют спейсеры. С гидродинамической точки зрения спейсеры уменьшают толщину пограничного слоя за счет увеличения перемешивания в глубине раствора и создания нормальной составляющей конвективного переноса, ионы могут достигать мембран быстрее и ток увеличивается. Однако спейсеры значительно увеличивают гидродинамическое сопротивление, и, соответственно, расходы на прокачку раствора.

Впервые определены основные закономерности переноса ионов соли в канале обессоливания электродиализного аппарата со спейсерами разных форм и расположений с учетом электроконвекции в сверхпределных токовых режимах. А именно, показано с использованием вольт-амперной характеристики, что на различных стадиях процесса обессоливания оптимальными являются спейсеры разной формы и местоположения.

Представлены результаты математического и имитационного моделирования процесса переноса ионов соли в электромембранных системах

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Коваленко А. В., Узденова А. М., Овсянникова А. В., Уртенев М. Х., Бостанов Р. А. Математическое моделирование влияния спейсеров на массоперенос в электромембранных системах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 520–543. EDN: JWREJU. DOI: 10.14498/vsgtu1944.

Сведения об авторах

Анна Владимировна Коваленко  <https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>

доктор технических наук, доцент; зав. кафедрой; каф. анализа данных и искусственного интеллекта; e-mail: savanna-05@mail.ru

Аминат Магометовна Узденова  <https://orcid.org/0000-0001-5951-9876>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. информатики и вычислительной математики; e-mail: uzd_am@mail.ru

со спейсерами в сверхпределных токовых режимах. Прямое численное 2D-моделирование проводилось для связанной системы уравнений Нернста–Планка–Пуассона и Навье–Стокса без подгоночных параметров. Использовался метод конечных элементов в сочетании с методом последовательных приближений и сегрегации при решении краевых задач систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Новизна метода заключается в том, что после дискретизации по времени задача на каждом временном слое расщепляется на гидродинамическую и электрохимическую, каждая из которых решается методом последовательных приближений до полного взаимосогласования.

Ключевые слова: электромембранная система, спейсеры, массоперенос, перенос ионов, математическая модель.

Получение: 25 июля 2022 г. / Исправление: 7 сентября 2022 г. /

Принятие: 13 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 26 сентября 2022 г.

1. Введение. Вода — самый ценный ресурс для человечества и жизни в целом. Однако сегодня половина речных бассейнов мира находится под нагрузкой, выходящей за рамки устойчивого потребления. В будущем ситуация ухудшится не только из-за изменения климата, но и из-за увеличения численности населения планеты до ожидаемых 10 миллиардов к 2050 г., а также повышения уровня жизни с изменением модели потребления. Главным решением проблемы нехватки воды является доступ к альтернативным водным ресурсам путем опреснения. Это, в частности, электромембранные процессы, которые имеют потенциал для повышения общей эффективности гибридных мембранных технологий обессоливания. Эффективность электрохимических систем, таких как электродиализ (ЭД), сильно зависит от гидродинамики процесса, поскольку появление на мировом рынке новых высокоэффективных мембран снимает кинетические ограничения, связанные с мембранами, и смещает стадию, определяющую экономическую эффективность обессоливания, в сторону жидкой фазы. Исследования последних лет показывают, что существует два подхода, которые позволяют снизить ограничения массопереноса со стороны раствора электролита. Во-первых, это использование спейсеров, с помощью которых можно управлять течением раствора, т.е. гидродинамикой. Во-вторых, это структурирование поверхности мембран, которое позволяет управлять электроконвекцией (ЭК), вызывающей перемешивание диффузионных слоев раствора у мембран. В данном исследовании изучен первый подход, в котором показано, что использование спейсеров позволяет

Анна Вячеславовна Овсянникова  <https://orcid.org/0000-0002-1716-3100>

кандидат педагогических наук; доцент; деп. математики; e-mail: anna_ovsyannikov@bk.ru

Махамет Али Хусеевич Уртенев  <https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>

доктор физико-математических наук, профессор; зав. кафедрой; каф. прикладной математики; e-mail: urtenovmax@mail.ru

Рамазан Алиевич Бостанов  <https://orcid.org/0000-0002-8502-7653>

кандидат физико-математических наук; декан физико-математического факультета; e-mail: bost-rasul@yandex.ru

эффективно управлять гидродинамикой и электроконвекцией в глубине раствора, причем «правильное» расположение спейсеров и их формы позволяет усилить электроконвекцию вблизи поверхности мембраны.

Кроме того, поскольку хорошо известно, что в электромембранных системах перенос ионов вблизи ионообменных мембран вызывает концентрационную поляризацию, которая существенно затрудняет массоперенос, то для нивелирования эффекта концентрационной поляризации и увеличения массопереноса используют спейсеры. В электромембранных системах (ЭМС) перенос ионов вблизи ионообменных мембран вызывает концентрационную поляризацию, т.е. образование диффузионных слоев, что затрудняет массоперенос. Чтобы смягчить эффект концентрационной поляризации и увеличить массоперенос, используют спейсеры [1–7]. В работе [8] найдено точное решение, описывающее установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом перекрестного влияния конвективного и диффузионного эффектов, в ней показано существование застойных точек, при которых возможны противотечения. С гидродинамической точки зрения спейсеры уменьшают толщину пограничного слоя за счет увеличения перемешивания в глубине раствора и создания нормальной составляющей конвективного переноса, благодаря чему ионы могут достигать мембран быстрее и ток увеличивается [7]. Однако спейсеры значительно увеличивают гидродинамическое сопротивление, и, соответственно, расходы на прокачку раствора. Математическому моделированию влияния спейсеров на массоперенос посвящены работы [9–17]. В недавнем исследовании [18] показано, что смещенное от центра размещение спейсеров увеличивает предельную плотность тока из-за асимметрии коэффициентов диффузии их электролита. Однако в этих работах не учитывается электроконвекция, которая считается основной причиной сверхпредельного переноса [19–24]. Таким образом, изучение совместного влияния спейсеров и электроконвекции на перенос ионов соли является актуальной задачей. В работе приводится математическая модель описания массопереноса в электродиализной камере обессоливания с учетом размещения в нем спейсеров. Далее проводится исследование влияния позиции спейсеров относительно мембран, их количества и формы.

2. Математическая модель.

Геометрия канала. Схема канала обессоливания с цилиндрическими спейсерами в реальных электродиализных аппаратах и электродами приведена на рис. 1 слева. При 2D-моделировании рассматривается сечение, перпендикулярное поверхности ионообменных мембран (рис. 1 справа). На рис. 2 приведены различные типы спейсеров, исследуемых в работе.

Система уравнений:

$$\vec{j}_i = -\frac{F}{RT} z_i D_i C_i \vec{E} - D_i \nabla C_i + C_i \vec{V}, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}_i, \quad i = 1, 2; \quad (2)$$

$$\varepsilon_r \Delta \varphi = -F(z_1 C_1 + z_2 C_2); \quad (3)$$

$$\vec{I} = F(z_1 \vec{j}_1 + z_2 \vec{j}_2); \quad (4)$$

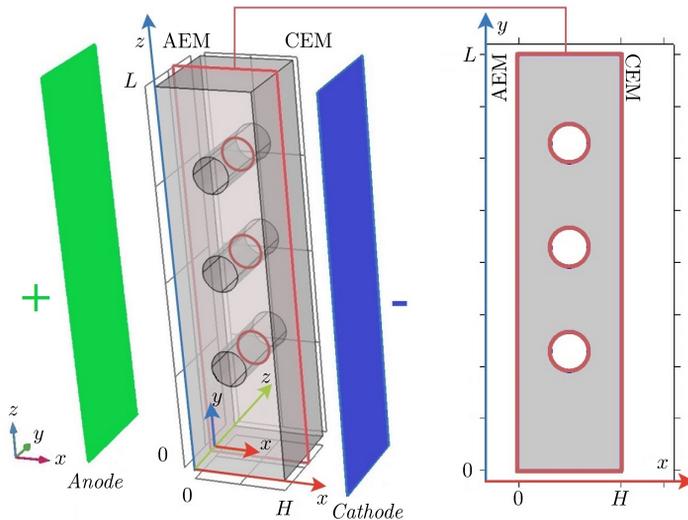


Рис. 1. Геометрия канала. Зеленым и синим выделены электроды; H — ширина сечения канала

[Figure 1. Channel geometry. The electrodes are highlighted in green and blue; H — channel section width]

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho_0} \vec{f}; \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0; \quad (6)$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E}. \quad (7)$$

Уравнения Нернста—Планка (1) описывают поток растворенных компонентов (ионов натрия $i = 1 \leftrightarrow \text{Na}^+$ и хлора $i = 2 \leftrightarrow \text{Cl}^-$), обусловленный миграцией в электрическом поле, диффузией и конвекцией, зарядовые числа катионов $z_1 = 1$ и анионов $z_2 = -1$ [19–24]; (2) — уравнения материального баланса; (3) — уравнение Пуассона для потенциала электрического поля; (4) — уравнение протекания тока, которое означает, что ток, протекающий через диффузионный слой, определяется потоком ионов; ε_r — диэлектрическая проницаемость раствора; F — число Фарадея; R — универсальная газовая постоянная; φ — потенциал; C_i , \vec{j}_i , D_i , \vec{I} — концентрация, поток, коэффициент диффузии i -го иона, плотность тока, определяемая потоком ионов; \vec{V} — скорость течения раствора; уравнения Навье—Стокса (5), подробно описанные в работах Е. Ю. Просвирыкова с соавторами [8, 25, 26], и уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости (6) описывают поле скоростей, формируемое, в том числе, под действием вынужденного течения и пространственной электрической силы; (7) — электрическая сила, где $\rho = F(z_1 C_1 + z_2 C_2)$ — плотность пространственного заряда, а $\vec{E} = -\nabla \varphi$ — напряженность электрического поля; ρ_0 — плотность раствора; ν — кинематическая вязкость.

Крайевые условия. Поверхности ионообменных мембран считаются идеально селективными, т.е. непроницаемыми для коионов, граничная концентрация противоионов определяется обменной емкостью мембраны. Для скорости на поверхности мембраны задается условие прилипания. Рассматривается по-

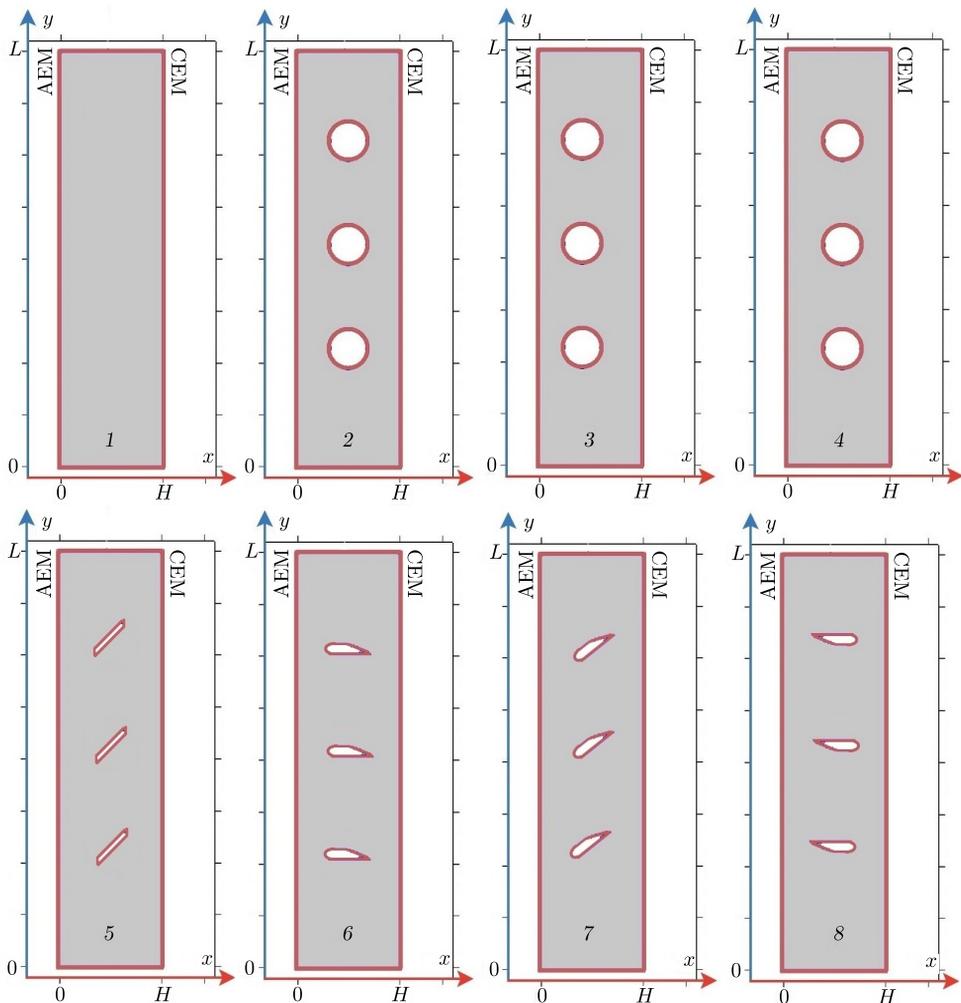


Рис. 2. Различные типы спейсеров, исследуемых в работе
 [Figure 2. Various types of spacers studied in the work]

тенциодинамический режим задания электрического поля, когда скачок потенциала возрастает со временем с постоянной скоростью d .

Граничные условия у анионообменной мембраны (AEM) при $x = 0$:

$$-\vec{n} \cdot \left[\frac{F}{RT} D_1 C_1 \nabla \varphi - D_1 \nabla C_1 \right]_{x=0} = 0,$$

$$C_2(t, 0, y) = C_{2a}, \quad -\vec{n} \cdot \vec{v}(t, 0, y) = 0, \quad \varphi(t, 0, y) = dt,$$

где \vec{n} — это нормаль к поверхности мембраны.

Граничные условия у катионообменной мембраны (CEM) при $x = H$:

$$-\vec{n} \cdot \left[\frac{F}{RT} D_2 C_2 \nabla \varphi - D_2 \nabla C_2 \right]_{x=H} = 0,$$

$$C_1(t, H, y) = C_{1k}, \quad -\vec{n} \cdot \vec{v}(t, H, y) = 0, \quad \varphi(t, H, y) = 0.$$

Граничные условия на входе в канал при $y = 0$. Концентрация ионов и распределение потенциала [27] предполагаются заданными так, чтобы на входе выполнялось условие электронейтральности:

$$C_i(t, x, 0) = C_{i0}, \quad i = 1, 2; \quad C_1(t, x, 0) - C_2(t, x, 0) = 0.$$

Распределение потенциала на входе задавалось линейной функцией

$$\varphi(t, x, 0) = \frac{dt}{H}(H - x).$$

В зависимости от задач исследования \vec{V} поток раствора на входе будем считать распределенным по параболе Пуазейля:

$$V_x = 0, \quad V_y = 6V_0 \frac{x}{H} \left(1 - \frac{x}{H}\right), \quad (8)$$

где V_0 — средняя скорость течения раствора.

Граничные условия на выходе из канала при $y = L$. Для концентрации использовалось условие для потока ионов, предполагающее, что ионы соли выносятся из канала обессоливания только за счет течения раствора [19–28]:

$$\begin{aligned} -\vec{n} \cdot \vec{j}_i(t, x, L) &= C_i(t, x, L) \cdot \vec{V}(t, x, L), \\ -\vec{n} \cdot \nabla \varphi(t, x, L) &= 0, \quad -\vec{n} \cdot \vec{V}(t, x, L) = 0. \end{aligned}$$

Формула для расчета вольт-амперной характеристики. Основным показателем качества работы ЭМС в настоящее время считается вольт-амперная характеристика системы (ВАХ) — общая, интегральная и наиболее важная характеристика всех процессов массопереноса в ЭМС, связывающая два основных показателя: напряжение, приложенное к системе, и выход по току по ионам соли. Она используется для оценки и выбора оптимальной конструкции и эффективных режимов работы. Задача оптимизации заключается в том, чтобы добиться максимально возможного обессоливания раствора, т.е. при заданном скачке потенциала добиться максимально возможного значения по току, обусловленному движением ионов соли [29–33]. Как показано в [29–31], для вычисления ВАХ канала обессоливания можно использовать формулу

$$i_{av}(t) = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L I_x(t, s, y) dy ds - \frac{1}{2HL} \int_0^H \int_0^L (H - 2x) \operatorname{div} \vec{I} dx dy. \quad (9)$$

Введем следующие обозначения:

$$i_{d0}(t) = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L I_x(t, s, y) dy ds, \quad (10)$$

$$i_{d1}(t) = \frac{1}{2HL} \int_0^H \int_0^L (H - 2x) \operatorname{div} \vec{I} dx dy. \quad (11)$$

Тогда (9) запишется в виде

$$i_{av}(t) = i_{d0}(t) - i_{d1}(t).$$

Заметим, что если ток \vec{I} является соленоидальным, то $\operatorname{div} \vec{I} = 0$ и

$$i_{av}(t) = \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L I_x(t, s, y) dy ds.$$

Таким образом, (10) — соленоидальная, а (11) — несолоноидальная части ВАХ. По физическому смыслу (10) — усредненный ток проводимости по ионной соли, а (11) — усредненный ток, связанный с током смещения, а именно с током, вызванным изменением плотности заряда во времени. В [29–31] показано, что при небольших скоростях развертки потенциала, используемого на практике для снятия ВАХ, аппроксимируются с хорошей точностью формулой

$$i_{av}(t) \approx \frac{1}{HL} \int_0^H \int_0^L I_x(t, s, y) dy ds. \quad (12)$$

Для обезразмеривания ВАХ используется предельный диффузионный ток по Левеку

$$i_{lim}(t) = \frac{FDC_0}{H(T_1 - t_1)} \left[1.47 \left(\frac{H^2 V_0}{LD} \right)^{1/3} - 0.2 \right],$$

где D — коэффициент диффузии электролита, C_0 — начальная концентрация раствора, а T_1 и t_1 — числа переноса ионов соли в мембране и растворе. Формула (12) позволяет находить ВАХ численно с устойчивостью относительно ошибок округления.

Численное моделирование. Математическое моделирование проводилось для двумерной связанной системы уравнений Нернста—Планка—Пуассона и Навье—Стокса без подгоночных параметров. В работе использовался предложенный авторами новый численный метод решения краевых задач для системы нелинейных уравнений с частными производными, описывающих перенос ионов бинарной соли в ЭМС, суть которого заключается в том, что метод конечных элементов используется в сочетании с методом последовательных приближений и сегрегации при решении краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Новизна метода состоит в том, что после дискретизации по времени задача на каждом временном слое расщепляется на гидродинамическую и электрохимическую, которые последовательно решаются вплоть до полного взаимосогласования на каждом временном шаге. Все численные исследования ниже проводились в среде *Comsol Multiphysics* с использованием созданного авторами комплекса программ, который объединяет численный метод и математические модели процесса переноса ионов соли в ЭМС в условиях наличия спейсеров в канале обессоливания электродиализного аппарата. Было проведено большое количество расчетов с разными значениями входных параметров:

- ширина канала обессоливания H , которая обычно меняется в зависимости от 0.5 мм до 10 мм;
- длина канала L , изменяющаяся от 1 мм до десятков сантиметров;
- средняя скорость вынужденного течения раствора V_0 — от 0 до 10 см/с;
- начальная концентрация раствора C_0 — формально от 0 до 1 моль (т.е. до 10^3 моль/м³).

Рассматривается потенциодинамический режим и предполагается, что скачок потенциала d_φ меняется от 0 до 3 В.

3. Влияние спейсеров круглой формы и их местоположения. Большое значение имеет правильный выбор темпа прироста скачка потенциала, для того чтобы ВАХ имела квазистационарный вид. В [29–31] показано, что средний ток смещения, идущий на формирование области пространственного заряда вблизи ионообменных мембран, а не на перенос ионов соли через ионообменные мембраны, пропорционален темпу прироста скачка потенциала. Вследствие этого темп прироста скачка потенциала необходимо взять максимально малым для уменьшения этого паразитного процесса. С другой стороны, при уменьшении темпа прироста скачка потенциала пропорционально увеличивается количество шагов по времени до достижения необходимых скачков потенциала.

Число Рейнольдса Re (отношение силы инерции к силе вязкого трения), характеризующее течение раствора: $Re = V_0 H / \nu$, где ν — кинематическая вязкость раствора, принятая равной кинематической вязкости воды при комнатной температуре.

Число Пекле Pe (отношение конвективного переноса к молекулярному переносу), характеризующее массоперенос: $Pe = V_0 H / D_0$, где D_0 — характерный коэффициент диффузии (например, 10^{-9} м²/с).

Общее критериальное число электроконвекции K_{ek} , ответственное за электроконвекцию, имеет вид $K_{ek} = \varepsilon K_{el}$, где K_{el} — критериальное число электрической силы, являющееся отношением электрической силы к силе инерции [34–36]; $\varepsilon = \frac{RT\varepsilon_0}{H^2 C_0 F^2} = 2(\lambda_D / H)^2$ — малый параметр, где $\lambda_D = \sqrt{\frac{RT\varepsilon_0}{2C_0 F^2}}$ — дебаевская длина.

Малый параметр является удвоенным квадратом отношения дебаевской длины к ширине канала. Этот параметр впервые введен в работах [35, 36] и характеризует вычислительную сложность математической модели.

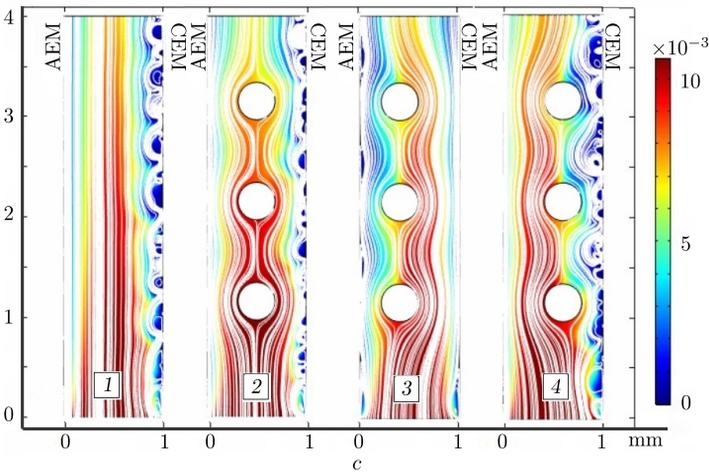
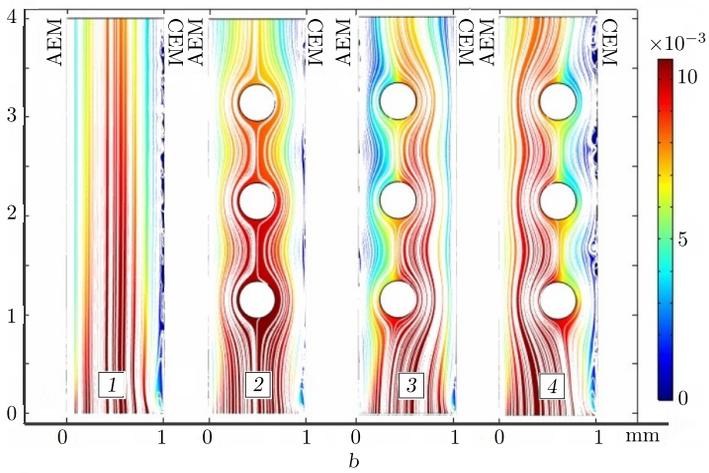
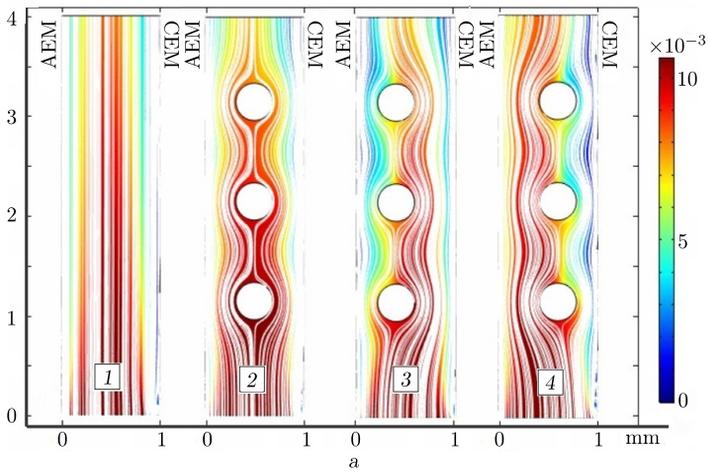
Ниже, если не оговорено противное, приведены результаты расчетов при $H = 1$ мм, $L = 4$ мм, $C_{10} = C_{20} = 0.01$ моль/м³, $C_{1a} = C_{2k} = 0.01$ моль/м³, $d = 0.002$ В/с, диаметр (хорда, длина) спейсеров равен 0.375 Н, $V_0 = 0.1$ мм/с.

При этих данных $Re \approx 0.1$, следовательно, течение ламинарное (см. формулу Пуазейля (8)), градиенты скорости (и силы вязкости) распределены по всем сечениям канала обессоливания, сила трения (лобового сопротивления) подчиняется закону Стокса, т.е. линейно зависит от скорости.

Число Пекле $Pe \approx 100$, поэтому в ядре потока в канале обессоливания конвективный перенос значительно превосходит диффузионный. Так как $\varepsilon = 2.32 \cdot 10^{-10}$, ее можно рассматривать как малый параметр и краевая задача относится к сингулярно возмущенным задачам [34–36], ее решение представляет значительную сложность.

Проведем сопоставительный анализ влияния трех спейсеров круглой формы при их расположении в центре, а также при смещении вправо и влево от центра (рис. 3).

На рис. 3 показано распределение концентраций цветом в соответствии со шкалой, приведенной рядом с каждым рисунком. На рис. 3, а (1) показан канал без спейсеров при времени $t = 200$ с или скачке потенциала 0.4 В. Видно, что в средней части канала концентрация практически постоянна (особенно



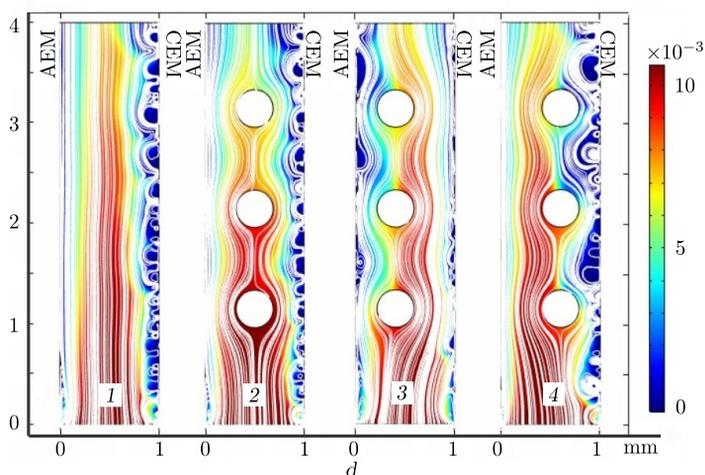


Рис. 3. (онлайн в цвете) Концентрации ионов (выделены цветом) и линии тока жидкости (белый цвет), соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl с включением трех спейсеров при разных временах (скачках потенциала): 1 — канал без спейсеров; 2 — спейсеры круглой формы в центре канала; 3 — спейсеры круглой формы сдвинутые к АЕМ; 4 — спейсеры круглой формы сдвинутые к СЕМ при скачке потенциала равном 0.4 В (а), 0.6 В (b), 0.8 В (c), 1.2 В (d)

[Figure 3. (color online) Ion concentrations (highlighted in color) and liquid streamlines (white) corresponding to the desalination channels of the electrodiализ apparatus with NaCl solution with the inclusion of three spacers at different times (potential jumps): 1 — channel without spacers; 2 — round spacers in the center of the channel; 3 — round spacers shifted to the AEM; 4 — round-shaped spacers shifted to the CEM at a potential jump equal to 0.4 V (a), 0.6 V (b), 0.8 V (c), 1.2 V (d)]

в начале канала), а вблизи мембран падает (голубой и синий цвет), причем практически симметрично. Линии тока раствора параллельны поверхности мембран (течение, близкое к течению Пуазейля).

На рис. 3, а (2) спейсеры расположены симметрично в центре канала, раствор также обтекает их симметрично, распределение концентраций практически симметрично, диффузионные слои у обеих мембран визуальнo практически одинаковы.

На рис. 3, а (3) спейсеры смещены влево от центра, ближе к анионообменной мембране. Вследствие этого поле скоростей и распределение концентраций уже несимметричны. Более концентрированный раствор наблюдается в пространстве между спейсерами и катионообменной мембраной, а менее концентрированный — между анионообменной мембраной и спейсерами. Вследствие этого диффузионный слой у катионообменной мембраны значительно меньше, чем у анионообменной мембраны, а поскольку коэффициент диффузии у Na^+ меньше почти в два раза, чем коэффициент диффузии у Cl^- , то, как и показано в работе [18], массоперенос в этом случае больше, чем когда спейсеры расположены по центру канала, а тем более — чем в случае, когда спейсеры смещены ближе к катионообменной мембране, см. рис. 3, а (4).

Для оценки изменения массопереноса рассмотрим ВАХ в области плато (рис. 4) (от 0.2 В до 0.6 В), на котором четко видно влияние спейсеров и их местоположения в канале. В этой области выше всех расположена ВАХ, соот-

ветствующая каналу номер 3, в котором находятся спейсеры круглой формы, сдвинутые влево к АЕМ. Это соответствует, как было сказано выше, выводам работы [18], в которой показано, что массоперенос максимизируется на области плато при расположении системы спейсеров немного левее центра.

Действительно, изучив поверхности концентраций и линии тока жидкости (рис. 3, а и 3, b) при скачке потенциала, равном 0.4 В и 0.6 В, можно видеть, что на выходе из каналов 2 и 3 со спейсерами расположенными в центре канала и сдвинутыми влево к АЕМ, существенно более обессоленный раствор, чем в первом и последнем случаях.

Однако ВАХ с номерами 1 и 4 имеют самые короткие плато, а это означает, что именно в каналах 1 и 4 быстрее всего развивается электроконвекция. Напомним, что 1 — канал без спейсеров, а 4 — канал со спейсерами круглой формы, сдвинутыми вправо к катионообменной мембране (СЕМ). Необходимо отметить, что в работе [18] ошибочно указано, что ВАХ для системы круглых спейсеров, немного сдвинутых влево к АЕМ, всегда выше остальных, в том числе в области сверхпредельных токовых режимов. В данном исследовании показано, что это не так для сверхпредельной области, так как ВАХ с номером 3 в этой области располагается ниже остальных, что говорит о существенном уменьшении массопереноса. Расчеты показывают, что в сверхпредельной области ситуация меняется кардинально. Так, на рис. 4 видно, что кривая ВАХ номер 3 имеет самое длинное плато и при далеких запредельных токовых режимах становится ниже всех остальных, т.е. канал с круглыми спейсерами, немного сдвинутыми влево к АЕМ (рис. 3) является самым неэффективным с точки зрения удаления соли из канала обессо-

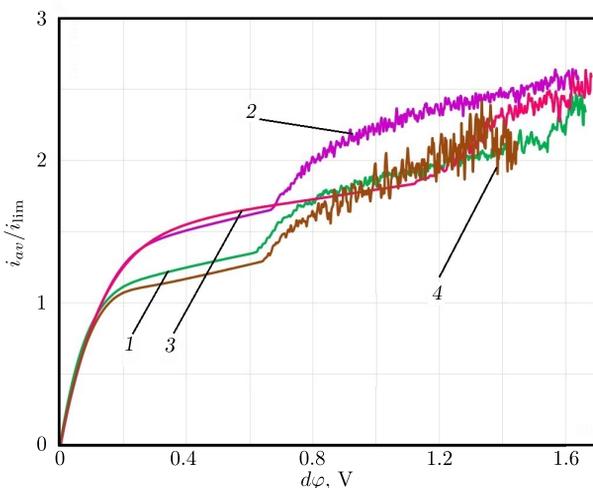


Рис. 4. (онлайн в цвете) ВАХ, соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl без спейсеров (1) и с включением только спейсеров круглой формы в центре канала (2) и при их смещении влево (3) и вправо (4) от центра, представленных на рис. 3

[Figure 4. (color online) CVC corresponding to the desalination channels of the electrodiolysis apparatus with NaCl solution without spacers (1) and with the inclusion of only round spacers in the center of the channel (2) and their displacement to the left (3) and right (4) from the center shown in Fig. 3]

ливания. Кроме того, кривая ВАХ с номером 4 (рис. 4), соответствующая каналу с круглыми спейсерами, немного сдвинутыми вправо к СЕМ, показывает самый быстрый рост. При этом необходимо отметить, что в области сверхпредельных токовых режимов наилучшие результаты остаются у ВАХ с номером 2 со спейсерами круглой формы в центре канала.

4. Влияние количества спейсеров. Рассмотрим влияние количества используемых спейсеров на ВАХ. На рис. 5 в первом канале нет спейсеров, а далее в каналах 2, 3 и 4 количество спейсеров увеличивается, показаны распределения концентраций и линий тока раствора в момент времени $t = 600$ с, что соответствует скачку потенциала в 1.2 В. Видно, что в пустом канале у катионообменной мембраны имеются развитые электроконвективные вихри, а у анионообменной мембраны электроконвективные вихри только начинаются. В канале 2 наличие одного спейсера уже приводит к изменению течения раствора и распределения концентраций. Этот эффект усиливается с увеличением числа спейсеров.

ВАХ, соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl с включением разного количества круглых спейсеров и без них, представлены на рис. 6 (на котором 1 — ВАХ для канала без спейсеров; 2 — ВАХ для канала с одним спейсером круглой формы; 3 — ВАХ для канала с двумя спейсерами круглой формы в центре; 4 — ВАХ для канала с тремя спейсерами круглой формы в центре). ВАХ показывают, что добав-

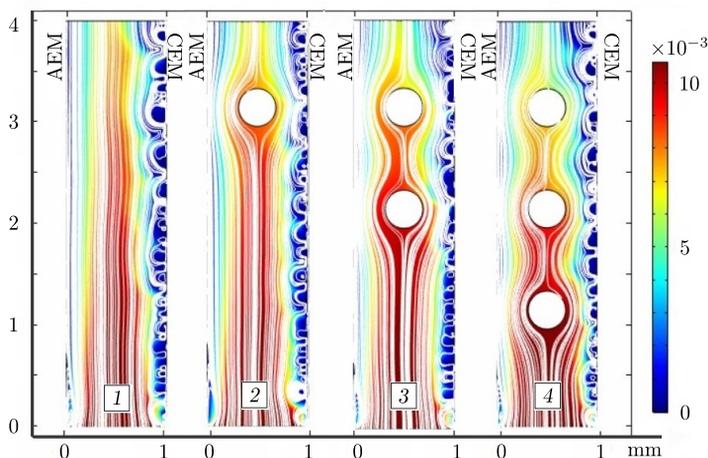


Рис. 5. (онлайн в цвете) Поверхности концентраций (показано цветом) и линии тока жидкости (белый цвет), соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl с включением разных форм спейсеров: 1 — канал без спейсеров; 2 — канал с одним спейсером круглой формы; 3 — канал с двумя спейсерами круглой формы в центре; 4 — канал с тремя спейсерами круглой формы в центре, при скачке потенциала равном 1.2 В

[Figure 5. (color online) Concentration surfaces (shown in color) and liquid streamlines (white) corresponding to the desalination channels of the electrodiysis apparatus with NaCl solution with the inclusion of different forms of spacers: 1 — channel without spacers; 2 — channel with one round spacer; 3 — channel with two round spacers in the center; 4 — channel with three round spacers in the center, with a potential jump of 1.2 V]

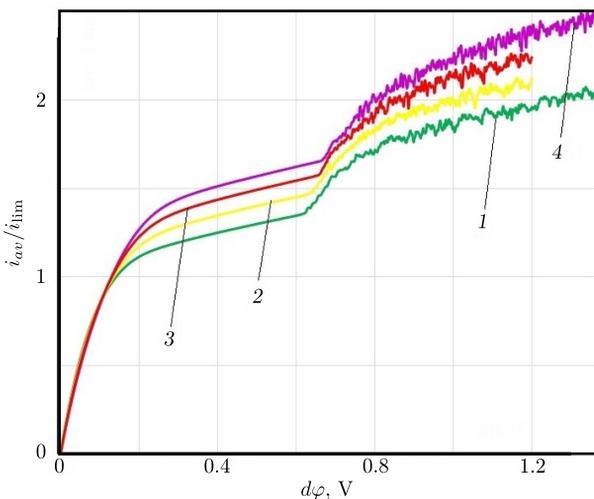


Рис. 6. ВАХ, соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl с включением разного количества круглых спейсеров, представленных на рис. 5

[Figure 6. CVC corresponding to the desalination channels of the electro dialysis apparatus with NaCl solution with the inclusion of a different number of round spacers shown in Fig. 5: 1 — CVC for the channel without spacers; 2 — CVC for a channel with one round spacer; 3 — CVC for a channel with two round spacers in the center; 4 — CVC for a channel with three round spacers in the center]

ление спейсеров в канал увеличивает массоперенос.

Обнаружена прямая зависимость выхода по току системы от количества спейсеров, т.е. чем больше спейсеров, тем выше ВАХ. Однако при добавлении спейсеров увеличивается гидродинамическое сопротивление канала обессоливания.

5. Влияние формы спейсеров. Как известно, гидродинамическое сопротивление тел различной формы может различаться во много раз (табл. 1) и зависит от скорости прокачки раствора (числа Рейнольдса).

Наименьшим коэффициентом лобового сопротивления обладает осесимметричное каплеобразное тело, у которого тупой нос и заостренная задняя часть. Различие коэффициентов сопротивления составляет десятки раз, поэтому возникает необходимость использования профилированных спейсеров, имеющих значительно меньшее гидродинамическое сопротивление. Особенно актуальным это становится при применении большого количества спейсеров. На рис. 7 показаны распределения концентрации катионов и линий течения раствора электролита, рассчитанные для приведенных форм спейсеров при скачке потенциалов 1.2 В.

На рис. 8 представлены ВАХ, соответствующие каналам обессоливания с включением разных форм спейсеров, представленных на рис. 7, при изменении скачка потенциала от 0 до 1.8 В. Из рис. 8 видно, что на омическом (линейном) участке (от 0 до 0.15 В) все ВАХ ведут себя одинаково и расположены под одним углом наклона к оси абсцисс вблизи нуля.

Область плато имеет разную протяженность (табл. 2). В области плато начинает сказываться различие во влиянии спейсеров, планок и профилей и видна существенная дифференциация в поведении ВАХ. В пределах от 0.2

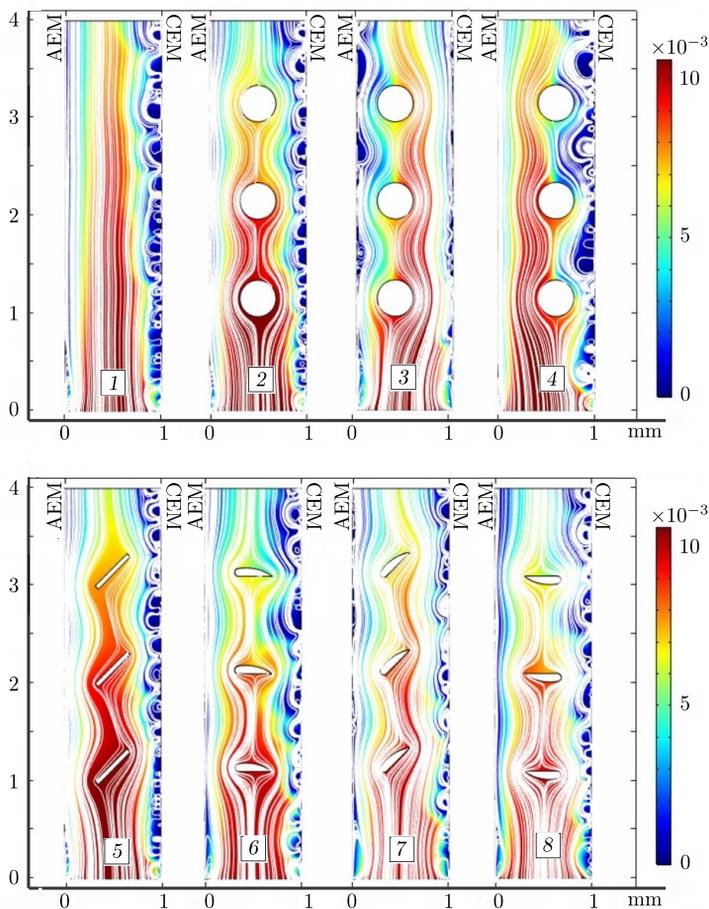


Рис. 7. (онлайн в центре) Поверхности концентраций и линии тока жидкости (белый цвет), соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl с включением разных форм спейсеров: 1 – канал без спейсеров; 2 – спейсеры круглой формы в центре канала; 3 – спейсеры круглой формы, сдвинутые к АЕМ; 4 – спейсеры круглой формы, сдвинутые к СЕМ; 5 – планки; 6 – профилированные спейсеры хордой вниз; 7 – профилированные спейсеры под наклоном 45° ; 8 – профилированные спейсеры хордой вверх, при скачке потенциала, равном 1.2 В

[Figure 7. (color online) Concentration surfaces and liquid streamlines (white color) corresponding to the desalting channels of the electrodesalting apparatus with NaCl solution with the inclusion of different forms of spacers: 1 – channel without spacers; 2 – round spacers in the center of the channel; 3 – round spacers shifted to the AEM; 4 – round-shaped spacers shifted to the CEM; 5 – slats; 6 – profiled spacers with a downward chord; 7 – profiled spacers at an inclination of 45° ; 8 – profiled spacers with a chord upwards, with a potential jump of 1.2 В]

Коэффициенты лобового сопротивления тел различной формы [37]
[Drag coefficients of bodies of various shapes [37]]

Body image	Body naming	C_x
	plank	1.11
	left hemisphere	[1.35, 1.4]
	right hemisphere	[0.3, 0.4]
	ball	0.4
	left teardrop	0.045
	right teardrop	0.1

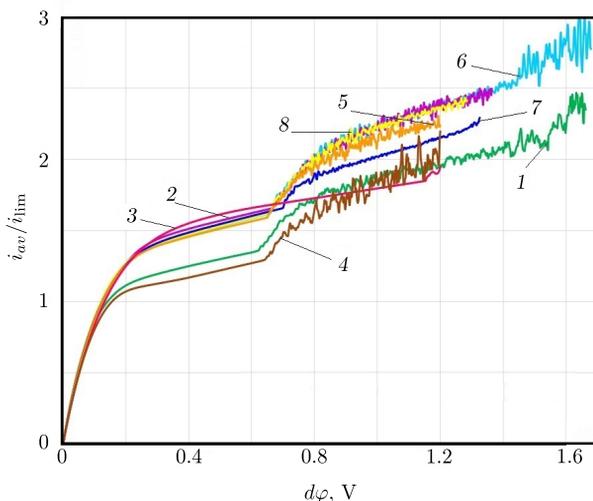


Рис. 8. ВАХ, соответствующие каналам обессоливания электродиализного аппарата с раствором NaCl с включением разных форм спейсеров, представленных на рис. 7

[Figure 8. CVC corresponding to the desalination channels of the electro-dialysis apparatus with NaCl solution with the inclusion of different forms of spacers shown in Fig. 7]

до 0.65 В ВАХ, соответствующие спейсерам с номерами 2, 3, 5–8, примерно одинаковы с небольшим превышением ВАХ для канала со спейсерами круглой формы, сдвинутыми от центра ближе к анионообменной мембране, что соответствует результатам, описанным в работе [18]. В области плато наименьший массоперенос наблюдается в случае пустого канала без спейсеров (кривая ВАХ номер 1) и канала со спейсерами круглой формы, сдвинутыми вправо к катионообменной мембране (кривая ВАХ номер 4), которые к тому же имеют самые короткие плато. Это означает, что именно в каналах с номерами 1 и 4 раньше всех развивается электроконвекция.

В области электроконвекции ситуация меняется кардинально. Так, на рис. 7 и 8 видно, что кривая ВАХ с номером 3 имеет самое длинное плато и при далеких запредельных токовых режимах становится ниже всех остальных, т.е. канал с круглыми спейсерами, немного сдвинутыми влево к АЕМ, является самым неэффективным с точки зрения удаления соли из канала обессоливания. Кроме того, кривая ВАХ с номером 4, соответствующая ка-

Таблица 2

Области ВАХ, соответствующие каналам обессоливания электродиализных аппаратов с раствором NaCl с включением разных форм спейсеров, представленных на рис. 7 [CVC areas corresponding to the desalination channels of electrodiagnosis apparatuses with NaCl solution with the inclusion of different forms of spacers shown in Fig. 7]

CVC areas	ED desalination channels shown in Fig. 7					
	1	2	3	4	5	6
Omic	[0, 0.15)	[0, 0.2)	[0, 0.31)	[0, 0.19)	[0, 0.2)	[0, 0.25)
Plateau	[0.15, 0.61)	[0.2, 0.64)	[0.31, 1.15)	[0.19, 0.65)	[0.2, 0.63)	[0.14, 0.62)
Start EC	[0.61, 1.42)	[0.64, 1.3)	[1.15, ...)	[0.65, 1.1)	[0.72, ...)	[0.61, 1.42)

налу с круглыми спейсерами, немного сдвинутыми вправо к СЕМ, показывает самый быстрый рост. При этом необходимо отметить, что в области сверхпредельных токовых режимов наилучшие результаты остаются у ВАХ с номерами 2, 6 и 8 у каналов с профилированными спейсерами, т.е. спейсерами в форме крыла, со спейсерами круглой формы в центре канала и с профилированными спейсерами хордой вверх.

Также из рис. 8 видно, что использование планок и профилей, расположенных под наклоном, существенно повышает массоперенос по сравнению с пустым каналом, однако не настолько эффективно, как использование профилированных спейсеров и спейсеров круглой формы, расположенных в центре канала.

6. Заключение. Определены основные закономерности переноса ионов соли в канале обессоливания со спейсерами с учетом электроконвекции, а именно показано с использованием ВАХ, что на различных стадиях процесса обессоливания оптимальными являются спейсеры разной формы и местоположения. Профилированные спейсеры, расположенные в центре канала с хордой вниз по потоку, можно считать наиболее эффективными одновременно на всех стадиях процесса обессоливания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. А.В. Коваленко — идея исследования, разработка программы экспериментальных исследований, интерпретация полученных результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи, компьютерное и математическое моделирование. М.Х. Уртенов — математическое моделирование, интерпретация полученных результатов, подготовка первичного варианта рукописи, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.В. Овсянникова — обработка и анализ экспериментальных данных, интерпретация полученных результатов, работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.М. Узденова — компьютерное моделирование, подготовка первичного варианта рукописи, обработка и анализ экспериментальных данных. Р.А. Бостанов — разработка программы экспериментальных исследований, подготовка и изготовление образцов, проведение испытаний, обработка и анализ экспериментальных данных. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20–58–12018 (Исследование влияния электроконвекции, диссоциации воды и геометрии спейсеров на электродиализное обессоливание в интенсивных токовых режимах).

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Długołęcki P., Gambier A., Nijmeijer K., Wessling M. Practical potential of reverse electro-dialysis as process for sustainable energy generation // *Environ. Sci. Technol.*, 2009. vol. 43, no. 17. pp. 6888–6894. DOI: <https://doi.org/10.1021/es9009635>.
2. Strathmann H. Electrodialysis, a mature technology with a multitude of new applications // *Desalination*, 2010. vol. 264, no. 3. pp. 268–288. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2010.04.069>.
3. Sonin A. A., Isaacson M. S. Optimization of flow design in forced flow electrochemical systems, with special application to electrodialysis // *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1974. vol. 13, no. 3. pp. 241–248. DOI: <https://doi.org/10.1021/i260051a009>.
4. Balster J., Pünt I., Stamatialis D., Wessling M. Multi-layer spacer geometries with improved mass transport // *J. Membr. Sci.*, 2006. vol. 282, no. 1–2. pp. 351–361. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2006.05.039>.
5. Winograd Y., Solan A., Toren M. Mass transfer in narrow channels in the presence of turbulence promoters // *Desalination*, 1973. vol. 13, no. 2. pp. 171–186. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0011-9164\(00\)82043-3](https://doi.org/10.1016/S0011-9164(00)82043-3).
6. Kim Y., Walker W. S., Lawler D. F. Electrodialysis with spacers: Effects of variation and correlation of boundary layer thickness // *Desalination*, 2011. vol. 274, no. 1–3. pp. 54–63. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2011.01.076>.
7. La Cerva M. L., Liberto M. D., Gurreri L., Tamburini A., Cipollina A., Micale G., Ciofalo M. Coupling CFD with a one-dimensional model to predict the performance of reverse electrodialysis stacks // *J. Membr. Sci.*, 2017. vol. 541. pp. 595–610. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2017.07.030>.
8. Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017. vol. 25, no. 4. pp. 763–775. EDN: AXZUX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1878>.
9. Gurreri L., Battaglia G., Tamburini A., Micale G., Ciofalo M. Multi-physical modelling of reverse electrodialysis thickness // *Desalination*, 2017. vol. 423. pp. 52–64. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2017.09.006>.
10. Zhou C., Zhang H., Li Z., Wang W. Chemistry pumps: A review of chemically powered micropumps // *Lab Chip*, 2016. vol. 16, no. 10. pp. 1797–1811. DOI: <https://doi.org/10.1039/C6LC00032K>.
11. Tadimeti J. G. D., Kurian V., Chandra A., Chattopadhyay S. Corrugated membrane surfaces for effective ion transport in electrodialysis // *J. Membr. Sci.*, 2016. vol. 499. pp. 418–428. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2015.11.001>.
12. Kovalenko A. V., Evdochenko E., Stockmeier F., Köller N., Urtenov M. A. Kh. Influence of spacers on mass transport in electromembrane desalination systems // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 2131, no. 2, 022011. EDN: PKHLOY. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022011>.
13. Васильева В. И., Шапошник В. А., Григорчук О. В. Локальный массоперенос при электродиализе с ионообменными мембранами и спейсерами // *Электрохимия*, 2001. Т. 37, № 11. С. 1339–1347. EDN: VSMBFQ.
14. Kim I. H., Chang H. N. Experimental study of mass transport around a turbulence promoter by the limiting current method // *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1983. vol. 26, no. 7. pp. 1007–1016. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(83\)80125-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(83)80125-2).

15. Fischl D. S., Hanson K. J., Muller R. H., Tobias C. W. Mass transfer enhancement by small flow obstacles in electrochemical cells // *Chem. Eng. Commun.*, 1985. vol. 38, no. 3-6. pp. 191–207. DOI: <https://doi.org/10.1080/00986448508911306>.
16. Długolecki P., Dąbrowska J., Nijmeijer K., Wessling M. Ion conductive spacers for increased power generation in reverse electrodialysis // *J. Membr. Sci.*, 2010. vol. 347, no. 1–2. pp. 101–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2009.10.011>.
17. Balster J., Stamatiadis D., Wessling M. Membrane with integrated spacer // *J. Membr. Sci.*, 2010. vol. 360, no. 1-2. pp. 185–189. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2010.05.011>.
18. Kim B., Choi S., Pham V. S., Kwak Rh., Han J. Energy efficiency enhancement of electromembrane desalination systems by local flow redistribution optimized for the asymmetry of cation/anion diffusivity // *J. Membr. Sci.*, 2017. vol. 524. pp. 280–287. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2016.11.046>.
19. Urtenov M. K., Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Pismenskaya N. D., Vasil'eva V. I., Sistas P., Pourcelly G. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electrodialysis membrane cells // *J. Membr. Sci.*, 2013. vol. 447. pp. 190–202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.033>.
20. Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенов М. Х. *Математические модели электроконвекции в электромембранных системах*. Караचाевск: КЧГУ, 2011. 154 с. EDN: QKCYTN.
21. Kwak R., Pham V. S., Lim K. M., Han J. Shear ow of an electrically charged uid by ion concentration polarization: scaling laws for electroconvective vortices // *Phys. Rev. Lett.*, 2013. vol. 110, no. 11, 114501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.114501>.
22. Никоненко В. В., Мареев С. А., Письменская Н. Д., Узденова А. М., Коваленко А. В., Уртенов М. Х., Пурсели Ж. Эффект электроконвекции и его использование для интенсификации массопереноса в электродиализе (обзор) // *Электрохимия*, 2017. Т. 53, № 10. С. 1266–1289. EDN: ZNAASD. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0424857017100061>.
23. Чубырь Н. О., Коваленко А. В., Уртенов М. Х. *Двумерные математические модели переноса бинарного электролита в мембранных системах (численный и асимптотический анализ)*. Краснодар: Куб. гос. технол. ун-т, 2012. 132 с. EDN: QKDALT.
24. Nikonenko V. V., Kovalenko A. V., Urtenov M. K., Pismenskaya N. D., Han J., Sistas P., Pourcelly G. Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives // *Desalination*, 2014. vol. 342. pp. 85–106. EDN: SKQBQD. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2014.01.008>.
25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021. vol. 25, no. 3. pp. 491–507. EDN: JKXFDQ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1860>.
26. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations // *Fluid Dyn. Res.*, 2021. vol. 53, no. 4, 044501. EDN: ICXFMV. DOI: <https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0>.
27. Уртенов К. М., Коваленко А. В., Чубырь Н. О., Хромых А. А. Краевая задача для плотности тока в области пространственного заряда // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*, 2010. Т. 7, № 1. С. 70–73. EDN: MDXAPV.
28. Kovalenko A. V., Wessling M., Nikonenko V. V., Mareev S. A., Moroz I. A., Evdochenko E., Urtenov M. Kh. Space-charge breakdown phenomenon and spatio-temporal ion concentration and fluid flow patterns in overlimiting current electrodialysis // *J. Membr. Sci.*, 2021. vol. 636. pp. 119583. EDN: QDFZKX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2021.119583>.
29. Urtenov M. K., Kovalenko A. V., Sukhinov A. I., Chubyr N. O., Gudza V. A. Model and numerical experiment for calculating the theoretical current-voltage characteristic in electro-membrane systems // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019. vol. 680, 012030. EDN: AUNMRR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/680/1/012030>.

30. Kovalenko A. V., Urtenov M. K. Analysis of the theoretical CVC of electromembrane systems // *E3S Web Conf.*, 2020. vol. 224, 02010. EDN: KOPZMH. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022402010>.
31. Коваленко А. В., Гудза И. В., Письменский А. В., Чубырь Н. О., Уртенов М. Х. Теоретический анализ вольт-амперной характеристики нестационарного переноса 1:1 электролита в мембранных системах с учетом электроконвекции и реакции диссоциации/рекомбинации воды // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*, 2021. Т. 9, № 3, 27. EDN: BZTNUI. DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.34.3.011>.
32. Коваленко А. В., Гудза И. В., Чубырь Н. О., Уртенов М. Х., Хромых А. А. Формула для расчета теоретической вольт-амперной характеристики 3D канала обессоливания ЭДА // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*, 2021. Т. 9, № 4, 35. EDN: TNWJSZ. DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.35.4.026>.
33. Gudza I. V., Urtenov M.A.Kh., Kovalenko A. V., Chubyr N. O. Analysis of the theoretical current-voltage characteristic in electromembrane systems / *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes – 2021: Conf. Proceed. Sochi*, 2021. pp. 113–114. EDN: EXHHPЕ.
34. Коваленко А. В. *Математическое моделирование процессов переноса в электромембранных системах*: Дис. ... докт. техн. наук. 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Ставрополь: Северо-Кавказск. федер. ун-т, 2019. 507 с. EDN: ATBQJG.
35. Коваленко А. В., Васильева В. И., Никоненко В. В., Узденова А. М., Уртенов М. Х., Sistat P., Белашова Е. Д. Развитие теории подобия процессов переноса в канале обессоливания электродиализного аппарата // *Конденсированные среды и межфазные границы*, 2014. Т. 16, № 4. С. 439–448. EDN: TDOZTT.
36. Коваленко А. В., Узденова А. М., Никоненко В. В., Уртенов М. Х. Критериальные числа образования нестабильных электроконвективных вихрей в канале обессоливания электродиализного аппарата // *Сорбционные и хроматографические процессы*, 2014. Т. 14, № 2. С. 260–269. EDN: SCCBRT.
37. Идельчик И. Е. *Справочник по гидродинамическим сопротивлениям* / ред. М.О. Штейнберг. М.: Машиностроение, 1992. 672 с.

MSC: 80A30, 35Q60, 78A57

Mathematical modeling of the effect of spacers on mass transfer in electromembrane systems

A. V. Kovalenko¹, A. M. Uzdenova²,
A. V. Ovsyannikova³, M. Kh. Urtenov¹, R. A. Bostanov²,

¹ Kuban State University,

149, Stavropolskaya st., Krasnodar, 350040, Russian Federation.

² Umar Aliev Karachay–Cherkess State University,

29, Lenina st., Karachayevsk, 369202, Russian Federation.

³ Financial University under the Government of the Russian Federation,

29, Leningradskii pr., Moscow, 125167, Russian Federation.

Abstract

The transfer of ions near ion-exchange membranes causes concentration polarization, which significantly complicates mass transfer in electromembrane systems. Spacers are used to neutralize the effect of concentration polarization and increase mass transfer. Spacers reduce the thickness of the boundary layer by increasing the mixing depth of the solution and creating a normal component of convective transport; ions can reach membranes faster, and the current increases, from a hydrodynamic point of view. However, spacers significantly increase the hydrodynamic resistance and consequently the cost of pumping the solution.

For the first time, the main regularities of the transfer of salt ions in the desalination channel of an electrodialysis apparatus with spacers of various shapes and arrangements are determined, taking into account electroconvection, in overlimiting current modes. Namely, it is shown, using the current-voltage characteristic, that spacers of different shapes and locations are optimal at different stages of the desalination process.

The paper presents the results of mathematical and simulation modeling of the salt ion transport process in electromembrane systems with spacers

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

   The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kovalenko A. V., Uzdenova A. M., Ovsyannikova A. V., Urtenov M. Kh., Bostanov R. A. Mathematical modeling of the effect of spacers on mass transfer in electromembrane systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 520–543. EDN: JWREJU. DOI: [10.14498/vsgtu1944](https://doi.org/10.14498/vsgtu1944) (In Russian).

Authors' Details:

Anna V. Kovalenko  <https://orcid.org/0000-0002-3991-3953>

Dr. Tech. Sci., Associate Professor; Head of Department; Dept. of Data Analysis and Artificial Intelligence; e-mail: savanna-05@mail.ru

Aminat M. Uzdenova  <https://orcid.org/0000-0001-5951-9876>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Informatics and Computational Mathematics; e-mail: uzd_am@mail.ru

in overlimiting current modes. 2D direct numerical simulation was carried out for the coupled system of the Nernst–Planck–Poisson and Navier–Stokes equations without fitting parameters. The finite element method was used in combination with the method of successive approximations and segregation to solve boundary value problems for systems of nonlinear differential equations with partial derivatives. The novelty of the method lies in the fact that after discretization in time, the problem on each time layer is split into hydrodynamic and electrochemical problems, each of which is solved by the method of successive approximations until a complete mutual agreement.

Keywords: electromembrane system, spacers, mass transfer, ion transfer, mathematical model.

Received: 25th July, 2022 / Revised: 7th September, 2022 /

Accepted: 13th September, 2022 / First online: 26th September, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. A.V. Kovalenko: Idea of study; Development of an experimental research program; Interpretation of the results; Computer and mathematical modeling; Writing — original draft and review & editing. M.Kh. Urtenov: Mathematical modeling; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. A.V. Ovsyannikova: Processing and analysis of experimental data; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. A.M. Uzdenova: Computer modeling; Processing and analysis of experimental data; Writing — original draft and review & editing. R.A. Bostanov: Development of an experimental research program; Sample preparation and fabrication; Carrying out tests; Processing and analysis of experimental data. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. The reported study was funded by RFBR according to the research project no. 20–58–12018 (Study of influence of electroconvection, water dissociation and spacer geometry on electrodialysis desalination in intensive current regimes).

Acknowledgments. The authors are grateful to the reviewers for a thorough reading of the paper manuscript, valuable suggestions and comments.

Anna V. Ovsyannikova  <https://orcid.org/0000-0002-1716-3100>

Cand. Pedagogic. Sci.; Associate Professor; Dept. of Mathematics;
e-mail: anna_ovsyannikov@bk.ru

Makhamet Kh. Urtenov  <https://orcid.org/0000-0002-0252-6247>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Head of Department; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: urtenovmax@mail.ru

Ramazan A. Bostanov  <https://orcid.org/0000-0002-8502-7653>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Dean of Faculty of Physics and Mathematics;
e-mail: bost-rasul@yandex.ru

References

1. Długolecki P., Gambier A., Nijmeijer K., Wessling M. Practical potential of reverse electro-dialysis as process for sustainable energy generation, *Environ. Sci. Technol.*, 2009, vol. 43, no. 17, pp. 6888–6894. DOI: <https://doi.org/10.1021/es9009635>.
2. Strathmann H. Electrodialysis, a mature technology with a multitude of new applications, *Desalination*, 2010, vol. 264, no. 3, pp. 268–288. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2010.04.069>.
3. Sonin A. A., Isaacson M. S. Optimization of flow design in forced flow electrochemical systems, with special application to electrodialysis, *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 1974, vol. 13, no. 3, pp. 241–248. DOI: <https://doi.org/10.1021/i260051a009>.
4. Balster J., Pünt I., Stamatialis D., Wessling M. Multi-layer spacer geometries with improved mass transport, *J. Membr. Sci.*, 2006, vol. 282, no. 1–2, pp. 351–361. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2006.05.039>.
5. Winograd Y., Solan A., Toren M. Mass transfer in narrow channels in the presence of turbulence promoters, *Desalination*, 1973, vol. 13, no. 2, pp. 171–186. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0011-9164\(00\)82043-3](https://doi.org/10.1016/S0011-9164(00)82043-3).
6. Kim Y., Walker W. S., Lawler D. F. Electrodialysis with spacers: Effects of variation and correlation of boundary layer thickness, *Desalination*, 2011, vol. 274, no. 1–3, pp. 54–63. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2011.01.076>.
7. La Cerva M. L., Liberto M. D., Gurreri L., Tamburini A., Cipollina A., Micale G., Ciofalo M. Coupling CFD with a one-dimensional model to predict the performance of reverse electrodialysis stacks, *J. Membr. Sci.*, 2017, vol. 541, pp. 595–610. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2017.07.030>.
8. Bashurov V. V., Prosviryakov E. Yu. Steady thermo-diffusive shear Couette flow of incompressible fluid. Velocity field analysis, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 25, no. 4, pp. 763–775. EDN: [AXCZUX](https://doi.org/10.14498/vsgtu1878). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1878>.
9. Gurreri L., Battaglia G., Tamburini A., Micale G., Ciofalo M. Multi-physical modelling of reverse electrodialysis thickness, *Desalination*, 2017, vol. 423, pp. 52–64. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2017.09.006>.
10. Zhou C., Zhang H., Li Z., Wang W. Chemistry pumps: A review of chemically powered micropumps, *Lab Chip*, 2016, vol. 16, no. 10, pp. 1797–1811. DOI: <https://doi.org/10.1039/C6LC00032K>.
11. Tadimeti J. G. D., Kurian V., Chandra A., Chattopadhyay S. Corrugated membrane surfaces for effective ion transport in electrodialysis, *J. Membr. Sci.*, 2016, vol. 499, pp. 418–428. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2015.11.001>.
12. Kovalenko A. V., Evdochenko E., Stockmeier F., Köller N., Urtenov M. A. Kh. Influence of spacers on mass transport in electromembrane desalination systems, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2131, no. 2, 022011. EDN: [PKHLOY](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022011). DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022011>.
13. Vasil'eva V., Shaposhnik V., Grigorchuk O. Local mass transport during electrodialysis with ion-exchange membranes and spacers, *Russ. J. Electrochem.*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1164–1171. EDN: [LGSACR](https://doi.org/10.1023/A:1012763531803) DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012763531803>.
14. Kim I. H., Chang H. N. Experimental study of mass transport around a turbulence promoter by the limiting current method, *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1983, vol. 26, no. 7, pp. 1007–1016. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(83\)80125-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(83)80125-2).
15. Fischl D. S., Hanson K. J., Muller R. H., Tobias C. W. Mass transfer enhancement by small flow obstacles in electrochemical cells, *Chem. Eng. Commun.*, 1985, vol. 38, no. 3-6, pp. 191–207. DOI: <https://doi.org/10.1080/00986448508911306>.
16. Długolecki P., Dąbrowska J., Nijmeijer K., Wessling M. Ion conductive spacers for increased power generation in reverse electrodialysis, *J. Membr. Sci.*, 2010, vol. 347, no. 1–2, pp. 101–107. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2009.10.011>.

17. Balster J., Stamatialis D., Wessling M. Membrane with integrated spacer, *J. Membr. Sci.*, 2010, vol. 360, no. 1-2, pp. 185–189. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2010.05.011>.
18. Kim B., Choi S., Pham V. S., Kwak Rh., Han J. Energy efficiency enhancement of electromembrane desalination systems by local flow redistribution optimized for the asymmetry of cation/anion diffusivity, *J. Membr. Sci.*, 2017, vol. 524, pp. 280–287. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2016.11.046>.
19. Urtenov M. K., Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Nikonenko V. V., Pismenskaya N. D., Vasil'eva V. I., Sistas P., Pourcelly G. Basic mathematical model of overlimiting transfer enhanced by electroconvection in flow-through electro dialysis membrane cells, *J. Membr. Sci.*, 2013, vol. 447, pp. 190–202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2013.07.033>.
20. Uzdenova A. M., Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh. *Matematicheskie modeli elektrokonektsii v elektromembrannykh sistemakh* [Mathematical Models of Electroconvection in Electromembrane Systems]. Karachaevsk, Karachay-Cherkess State Univ., 2011, 154 pp. (In Russian). EDN: QKCYTN.
21. Kwak R., Pham V. S., Lim K. M., Han J. Shear ow of an electrically charged uid by ion concentration polarization: scaling laws for electroconvective vortices, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 110, no. 11, 114501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.114501>.
22. Nikonenko V. V., Mareev S. A., Pis'menskaya N. D., Kovalenko A. V., Urtenov M. K., Uzdenova A. M., Pourcelly G. Effect of electroconvection and its use in intensifying the mass transfer in electro dialysis (review), *Russ. J. Electrochem.*, 2017, vol. 53, no. 10, pp. 1122–1144. EDN: XNXZMK. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1023193517090099>.
23. Chubyr' N. O., Kovalenko A. V., Urtenov M. Kh. *Dvumernye matematicheskie modeli perenosa binarnogo elektrolita v membrannykh sistemakh (chislennyy i asimptoticheskiy analiz)* Two-Dimensional Mathematical Models of Binary Electrolyte Transfer in Membrane Systems (Numerical and Asymptotic Analysis). Krasnodar, Kuban State Technol. Univ., 2012, 132 pp. (In Russian). EDN: QKDALT.
24. Nikonenko V. V., Kovalenko A. V., Urtenov M. K., Pismenskaya N. D., Han J., Sistas P., Pourcelly G. Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives, *Desalination*, 2014, vol. 342, pp. 85–106. EDN: SKQBQD. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.desal.2014.01.008>.
25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 491–507. EDN: JKXFDQ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1860>.
26. Ershkov S. V., Prosviryakov E. Yu., Burmasheva N. V., Christianto V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations, *Fluid Dyn. Res.*, 2021, vol. 53, no. 4, 044501. EDN: ICXFMY. DOI: <https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0>.
27. Urtenov K. M., Kovalenko A. V., Chubyr N. O., Khromykh A. A. Boundary value problem for current density in the area of space charge, *Ekol. Vestn. Nauchn. Tsent. Chernomorsk. Ekonomich. Sotrudn.*, 2010, vol. 7, no. 1, pp. 70–73 (In Russian). EDN: MDXAPV.
28. Kovalenko A. V., Wessling M., Nikonenko V. V., Mareev S. A., Moroz I. A., Evdochenko E., Urtenov M. Kh. Space-charge breakdown phenomenon and spatio-temporal ion concentration and fluid flow patterns in overlimiting current electro dialysis, *J. Membr. Sci.*, 2021, vol. 636, pp. 119583. EDN: QDFZKX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2021.119583>.
29. Urtenov M. K., Kovalenko A. V., Sukhinov A. I., Chubyr N. O., Gudza V. A. Model and numerical experiment for calculating the theoretical current-voltage characteristic in electromembrane systems, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 680, 012030. EDN: AUNMRR. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/680/1/012030>.
30. Kovalenko A. V., Urtenov M. K. Analysis of the theoretical CVC of electromembrane systems, *E3S Web Conf.*, 2020, vol. 224, 02010. EDN: KOPZMH. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202022402010>.
31. Kovalenko A. V., Gudza I. V., Pismensky A. V., Chubyr N. O., Urtenov M. Kh. Theoretical analysis of the current-voltage characteristic of the unsteady 1:1 electrolyte transfer in mem-

- brane systems in terms of electroconvection and the dissociation/recombination reaction of water, *Model. Optimiz. Inform. Technol.*, 2021, vol. 9, no. 3, 27 (In Russian). EDN: **BZTNUI**. DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.34.3.011>.
32. Kovalenko A. V., Gudza I. V., Chubyr N. O., Urtenov M. Kh., Khromykh A. A. Formula for calculating the theoretical current-voltage characteristic of the 3D desalination channel EDA, *Model. Optimiz. Inform. Technol.*, 2021, vol. 9, no. 4, 35 (In Russian). EDN: **TNWJSZ**. DOI: <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.35.4.026>.
33. Gudza I. V., Urtenov M.A.Kh., Kovalenko A. V., Chubyr N. O. Analysis of the theoretical current-voltage characteristic in electromembrane systems, In: *Ion Transport in Organic and Inorganic Membranes – 2021*, Conf. Proceed. Sochi, 2021, pp. 113–114. EDN: **EXHHPE**.
34. Kovalenko A. V. *Mathematical modeling of transfer processes in electromembrane systems*, Doct. Diss. (Techn. Sci.). Stavropol, North Caucasian Federal Univ., 2019, 507 pp. (In Russian). EDN: **ATBQJG**.
35. Kovalenko A. V., Vasil'eva V. I., Nikonenko V. V., Uzdenova A. M., Urtenov M. Kh., Sistat P., Belashova E. D. Similarity theory of transport processes in electro dialysis desalination channel, *Kondens. Sredy Mezhf. Gran.*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 439–448 (In Russian). EDN: **TDOZTT**.
36. Kovalenko A. V., Uzdenova A. M., Nikonenko V. V., Urtenov M. Kh. Critical numbers describing formation of unstable electroconvective vortices in an electro dialysis desalination channel, *Sorb. Khromatogr. Prots.*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 260–269 (In Russian). EDN: **SCCBRT**.
37. Idelchik I. E. *Spravochnik po gidrodinamicheskim soprotivleniiam* [Handbook of Hydrodynamic Resistance], ed. . M. O. Steinberg. Moscow, Mashinostroenie, 1992, 672 pp.



УДК 517.958:531.32

Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

В рамках уравнений Эйлера рассматривается возможность достижения экстремальных значений давления во внутренней точке стационарного течения невязкого газа. Течение может быть небаротропным. Известный (Г.Б. Сизых, 2018) дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД) нельзя применять в трансзвуковых и в сверхзвуковых областях течений. В условиях классического принципа максимума давления К. Труделла (1953) отсутствует ограничение на значения местных чисел Маха, однако он обладает рядом особенностей, не позволяющих применять его для верификации численных расчетов так же, как это можно делать при использовании ДПМД в дозвуковых областях. Обнаруживается неизвестный ранее принцип максимума давления: найдена функция производных параметров течения, которая должна иметь определенный знак (различный для минимума и для максимума давления) в точке, в которой давление достигает строгого или нестрогого локального экстремума. Этот принцип максимума давления назван «общим» (ОПМД), поскольку в его условия не входят баротропность, ограничение на значения местных чисел Маха и предположение о том, что газ подчиняется уравнению Менделеева–Клапейрона. Одним из следствий ОПМД является вывод о том, что из условий принципа максимума давления К. Труделла можно исключить требование баротропности. ОПМД предлагается использовать для верификации численных расчетов течения идеального газа за отошедшим скачком уплотнения, формирующимся при сверхзвуковом обтекании тел, а также для проверки численных расчетов обтекания тел вязким газом в областях, удаленных от источников завихренности, где влиянием вязкости можно пренебречь.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, принцип максимума давления, невязкий газ, совершенный газ, точные решения, Q-параметр.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Общий принцип максимума давления в стационарных течениях невязкого газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 544–555. EDN: EBBGFK. DOI: [10.14498/vsgtu1946](https://doi.org/10.14498/vsgtu1946).

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Получение: 11 августа 2022 г. / Исправление: 16 сентября 2022 г. /
 Принятие: 20 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 28 сентября 2022 г.

Введение. В настоящей статье рассматриваются стационарные течения как идеального (невязкого) совершенного (выполняется уравнение состояния Менделеева–Клапейрона) с постоянными теплоемкостями c_p и c_v газа, так и идеального газа с произвольным уравнением состояния. Полная система уравнений движения газа первого типа (включающая уравнение Эйлера в форме Громеки–Ламба) для стационарных течений имеет следующий вид [1–3]:

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(V^2/2), \quad V = |\mathbf{V}|, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla(p\rho^{-k}) = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{V} — вектор скорости, $\rho > 0$ — плотность, $p > 0$ — давление, $k = c_p/c_v > 1$ — показатель адиабаты Пуассона. Рассматриваются области, в которых параметры течения (давление, плотность и компоненты скорости) дважды непрерывно дифференцируемы по координатам.

В случае газа с другим уравнением состояния первые два уравнения остаются без изменений, а третье уравнение становится другим. Уравнение (3) следует из закона сохранения энергии, выполнение которого для идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v означает адиабатичность течения [1–3], что равносильно сохранению энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-k}$ вдоль линий тока. При этом на различных линиях тока энтропийная функция может принимать различные значения. Если энтропийная функция $\sigma = p\rho^{-k}$ постоянна во всем течении (одинакова на всех линиях тока), то плотность можно представить функцией одного только давления, и течение будет баротропным. Но в общем случае энтропийная функция принимает различные значения на различных линиях тока, и течение может быть небаротропным. Такие течения возникают, например, за отошедшим головным скачком, возникающим при обтекании равномерным сверхзвуковым потоком тела с затупленной носовой частью. Кроме того, некоторые свойства таких течений связаны со свойствами течений вязкого газа. Речь идет о дозвуковом принципе максимума давления (ДПМД) [4]. Этот недавно обнаруженный принцип верен для дозвуковых областей течений, параметры которых подчиняются системе (1)–(3). В условия ДПМД входит знак Q -параметра (второго скалярного инварианта тензора скоростей деформаций). Если u , v и w — компоненты скорости \mathbf{V} в прямоугольной декартовой системе координат, то Q -параметр может быть представлен в виде

$$Q = \frac{1}{2} \{ \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 \}, \quad (4)$$

где $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$. Из ДПМД следует (далее — следствие ДПМД), что если давление достигает строгого или нестрогого минимума во внутренней точке течения, то Q -параметр в этой точке должен быть неотрицательным, а во

внутренней точке максимума давления Q -параметр должен быть неположительным.

Для проверки расчетов течений за отошедшим головным скачком, насколько известно автору настоящей работы, ДПМД еще не использовался. При этом в [4] было предложено использовать проверку выполнения нового принципа для дополнительной верификации численных расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности, где в достаточно малых окрестностях точки экстремума применима модель небаротропного идеального газа, и должно выполняться сформулированное выше следствие ДПМД. Разумеется, что выполнение следствия ДПМД еще не означает правильности решения, но его нарушение означает ошибочность решения.

Этот подход показал свою эффективность в серии работ В. В. Вышинского с соавторами [5–12]. В работе [5] проведен расчет обтекания фюзеляжа вертолета с оперением и шасси. В [6] на примере расчета обтекания параллелепипеда решалась задача о моделировании обтекания фрагментов ландшафта (плохообтекаемых тел) атмосферным ветром. В работе [7] проведены расчеты ветровой нагрузки на колесо обозрения. Содержание расчетов работ [8–12] видно из их названий. Все расчеты [5–12] подвергались дополнительной верификации путем проверки выполнения следствия ДПМД. В некоторых из этих работ, например [8, 11], результаты расчета демонстрируют выполнение этого следствия, что авторами рассматривается как подтверждение высокого качества полученных решений. В других работах, например [5–7, 9], в первоначальных расчетах наблюдалось нарушение следствия ДПМД, приходилось увеличивать число итераций, размеры расчетной области, модифицировать и сгущать расчетную сетку в некоторых областях течения. В итоге удавалось получать решения, в которых следствие ДПМД оказывалось выполненным.

В работе [12] на примерах численных расчетов дозвукового обтекания компоновок летательных аппаратов и их элементов продемонстрирована эффективность применения проверки выполнения следствия ДПМД в качестве независимой верификации решений для выявления «слабых» мест в расчетах, которые приводят к снижению точности, а в ряде случаев — к получению недостоверных результатов.

Таким образом, полученный в [4] ДПМД оказался востребованным. Поэтому представляется актуальным получить принцип максимума давления (ПМД) без ограничений на величину местного числа Маха в точках рассматриваемой области. Этому и посвящена настоящая статья.

1. Принцип максимума давления Трусделла. В статье [13] К. Трусделл привел ряд примеров, показывающих, что величина

$$W_K = (1 - 4Q/\Omega^2)^{-1/2}$$

лучше, чем $|\Omega|$, отражает интуитивное представление физиков о том, насколько сложнее завихренное течение по сравнению с движением жидкости как твердого тела или по сравнению со сдвиговым течением. В результате Трусделл предложил считать W_K «второй мерой завихренности». В теоретической аэрогидродинамике это предложение до сих пор не принято, но приведенные им примеры представляют самостоятельный интерес. Один из таких примеров — принцип максимума давления в баротропных течениях идеального газа. Этот ПМД справедлив для течений с любыми значениями местных

чисел Маха. В условия ПМД Трусделла входят неравенства $W_K \leq 1$, $W_K \geq 1$ и равенство $W_K = 1$, равносильные неравенствам $Q \leq 0$, $Q \geq 0$ и равенству $Q = 0$ соответственно. Учитывая это, сформулируем стационарный вариант ПМД Трусделла с использованием Q -параметра вместо W_K .

БАРОТРОПНЫЙ ПМД ТРУСДЕЛЛА. *Во внутренней точке области G стационарного баротропного течения идеального газа, где давление непостоянно, оно не может принимать минимального значения, если во всей области $Q \leq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \leq 0$; максимального и минимального значений, если во всей области $Q = 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) = 0$; максимального значения, если во всей области $Q \geq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \geq 0$.*

Достоинством этого ПМД является отсутствие ограничений на значение местного числа Маха. Его главный недостаток — отсутствие утверждений для случаев $Q \leq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \geq 0$ и $Q \geq 0$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \leq 0$, в которых верификация расчетов с помощью ПМД Трусделла становится невозможной. Другой недостаток — невозможность при верификации ограничиться вычислением производных параметров течения в точке экстремума давления, как это можно делать при использовании следствия ДПМД (см. выделенное курсивом во введении). Поясним это на примере верификации расчета течения идеального совершенного газа с постоянными теплоемкостями (выполняется уравнение (3)), в котором давление достигает минимума в некоторой внутренней точке A .

Из ПМД Трусделла следует, что в любой окрестности точки A должна быть точка, в которой нарушено условие, состоящее из одновременного выполнения условий $Q \leq 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \leq 0$. Рассмотрим последовательность таких точек, стремящуюся к A . В точках последовательности или $Q > 0$, или $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) > 0$, или верны оба эти строгие неравенства. Поэтому хотя бы одно из строгих неравенств $Q > 0$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \times (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) > 0$ выполняется на бесконечном числе точек последовательности (на некоторой подпоследовательности). Отсюда в силу непрерывности получаем, что в точке A должна быть неотрицательной хотя бы одна из величин Q и $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$. Это следствие не позволяет «отфильтровывать» неверные решения, поскольку неравенство $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \geq 0$ всегда окажется выполненным. Действительно, из (3) следует, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) = \frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p)$. Используя известную формулу векторного анализа для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) &= \frac{1}{k} \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln p) = -\frac{1}{kp^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla p)^2 + \\ &+ \frac{1}{kp} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p) + \frac{1}{kp} \mathbf{V} \cdot ((\nabla p \cdot \nabla) \mathbf{V}) + \frac{1}{kp} \mathbf{V} \cdot (\nabla p \times \Omega). \end{aligned}$$

В точке A градиент давления равен нулю. Поэтому

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)(A) = \frac{1}{kp} \mathbf{V} \cdot ((\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla p)(A).$$

Правая часть есть произведение $V^2/(kp)$ на вторую производную давления по направлению скорости в точке A (в этом можно убедиться, записав пра-

вую часть в прямоугольной системе координат, у которой одна из осей сонаправлена со скоростью \mathbf{V} в точке A). Одно из необходимых условий минимума состоит в том, что такая вторая производная неотрицательна. Поэтому $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)(A) \geq 0$, что показывает невозможность ограничиться вычислением производных параметров течения в точке минимума при использовании ПМД Трусделла.

Как будет показано в следующем разделе, ПМД Трусделла справедлив и для небаротропных течений. Однако даже с учетом применимости к небаротропным течениям ПМД Трусделла сохраняет описанные выше недостатки, затрудняющие, а в некоторых случаях — делающие невозможной верификацию расчетов.

2. Общий принцип максимума давления. Рассмотрим стационарное течение невязкого газа (с произвольным уравнением состояния) в пространственной области G . Параметры течения подчиняются, в частности, уравнениям (1) и (2). (Уравнение (3) может иметь другой вид, но оно в настоящем разделе использоваться не будет.) Применяя оператор дивергенции к уравнению (1), получим

$$\rho^{-1} \Delta p - \rho^{-2} \nabla p \cdot \nabla \rho = \Omega^2 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{rot} \Omega - \Delta V^2 / 2, \quad (5)$$

где Δ — оператор Лапласа. Используя координатную запись операторов, можно убедиться в верности следующего тождества:

$$\Delta V^2 / 2 \equiv \mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{V} + (\nabla u)^2 + (\nabla v)^2 + (\nabla w)^2.$$

Вместе с другим известным векторным тождеством $\mathbf{V} \cdot \mathbf{rot} \Omega \equiv \mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \nabla \nabla \mathbf{V}$ это позволяет записать (5) в виде

$$\rho^{-1} \Delta p - \rho^{-2} \nabla p \cdot \nabla \rho + \mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} = \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2. \quad (6)$$

Из уравнения неразрывности (2) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{V} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho$, и поэтому $\mathbf{V} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{V} = -\mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$. Подставляя последнее равенство в (6), получаем

$$\rho^{-1} \Delta p - \rho^{-2} \nabla p \cdot \nabla \rho = \Omega^2 - (\nabla u)^2 - (\nabla v)^2 - (\nabla w)^2 + \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho),$$

или

$$\rho^{-1} \Delta p - \rho^{-2} \nabla p \cdot \nabla \rho = 2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho). \quad (7)$$

Зафиксируем произвольно выбранную прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ и запишем левую часть (7) в координатной форме:

$$a_{11} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} + 2a_{23} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} + a_{33} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + b_1 \frac{\partial p}{\partial x} + b_2 \frac{\partial p}{\partial y} + b_3 \frac{\partial p}{\partial z} = f, \quad (8)$$

где $f = 2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \rho^{-1}$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $b_1 = -\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial x}$, $b_2 = -\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial y}$, $b_3 = -\rho^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial z}$.

Для выяснения экстремальных свойств решения этого уравнения используем следствие теоремы Хопфа [14, 15], приведенное в [16].

СЛЕДСТВИЕ ТЕОРЕМЫ ХОПФА. Пусть во всех точках ограниченной области G коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ уравнения (8) являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы A . Пусть, далее, для любой точки $M(x, y, z) \in G$ существуют числа $\omega = \omega(x, y, z) > 0$ и $\Delta = \Delta(x, y, z) > 0$ такие, что замкнутый шар $\bar{U}(M; \omega)$ целиком лежит в области G и в нем все коэффициенты уравнения (8) ограничены и выполняется неравенство $\det A > \Delta$.

И пусть во всех точках области G выполняется неравенство $f \leq 0$. Тогда если решение $p \in C^2(G)$ уравнения (8) непрерывно в замкнутой области \bar{G} , то $p \geq \min_{\partial G} p$ во всей области G . При этом, если $p \neq \text{const}$ в G , равенство $p = \min_{\partial G} p$ возможно только на границе ∂G . (Аналогично для максимума при $f \geq 0$.)

Левая часть (8) удовлетворяет всем условиям этого следствия теоремы Хопфа, и его выводы зависят от знака правой части. В итоге приходим к основному результату.

ОБЩИЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДАВЛЕНИЯ (ОПМД). Пусть все газодинамические параметры (\mathbf{V}, ρ, p) стационарного течения идеального (невязкого) газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой ограниченной области G , а давление p непрерывно на замыкании \bar{G} . И пусть в G выполняются уравнения (1), (2), а величина Q определяется формулой (4). Тогда если давление непостоянно в G , то справедливы следующие утверждения:

- 1) если во всех точках G выполняется условие $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \leq 0$, то давление p достигает минимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;
- 2) если во всех точках G выполняется условие $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) \geq 0$, то давление p достигает максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G ;
- 3) если во всех точках G выполняется условие $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho) = 0$, то давление p достигает минимума и максимума на \bar{G} на границе и только на границе области G .

Этот ПМД здесь предложено назвать «общим» по трем причинам:

- 1) он верен как для баротропных, так и для небаротропных течений (поскольку в доказательстве баротропность не используется);
- 2) в нем отсутствуют ограничения на значения местных чисел Маха;
- 3) он верен для течений невязкого газа с произвольным уравнением состояния (а не только для совершенного газа), поскольку в доказательстве не используется уравнение (3).

Следствием ОПМД является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ ОПМД. Пусть все газодинамические параметры (\mathbf{V}, ρ, p) стационарного течения идеального (невязкого) газа являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой окрестности точки экстремума давления A (которая есть внутренняя точка течения), и пусть в этой окрестности выполняются уравнения (1), (2), а величина Q

определяется формулой (4). Тогда если давление достигает в точке A строгого или нестрогого минимума, то величина $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$ в этой точке должна быть неотрицательной, а если давление достигает в точке A строгого или нестрогого максимума, то величина $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$ должна быть неположительной.

Это следствие позволяет при верификации ограничиться вычислением производных параметров течения в точке экстремума давления так же, как это можно делать при использовании следствия ДПМД. Заметим, что в дозвуковых областях течения удобнее применять ДПМД, содержащий более простые условия и не требующий вычисления вторых производных.

Сравнивая приведенные выше формулировки (баротропного) ПМД Трусделла и ОПМД, можно убедиться в том, что первый ПМД есть следствие второго (но не наоборот). Область применения ОПМД шире и включает в себя область применения ПМД Трусделла (см. описание в первом разделе «главного недостатка» ПМД Трусделла). Поэтому ОПМД представляет собой обобщение ПМД Трусделла. Из сравнения формулировок также видно, что ПМД Трусделла оказывается верен и для небаротропных течений.

Как и в случае с ДПМД, можно использовать проверку выполнения ОПМД для дополнительной верификации численных расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности, где в достаточно малых окрестностях точки экстремума применима модель небаротропного идеального газа и должно выполняться сформулированное выше следствие ОПМД. Заметим, что многие другие закономерности течений невязкого газа, например, интегральные инварианты [17–19], справедливы для вязкого газа, только если вязкостью можно пренебречь во всем поле течения, что, как правило, невозможно.

3. Применение ОПМД для верификации расчетов течений совершенного газа. При проверке расчетов течений в рамках модели идеального совершенного газа можно пользоваться уравнением (3). Наличие этого уравнения в полной системе уравнений движения помогает в некоторых случаях упростить проверку следствия ОПМД и не вычислять вторые производные (не вычислять $\mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$). Речь идет о следующем.

Как было показано в первом разделе на примере минимума, в точке экстремума A , являющейся внутренней точкой течения, знак $\mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)(A)$ совпадает со знаком второй производной по направлению скорости (точки торможения не рассматриваются, так как для дозвуковых областей проще применять ДПМД). В точке минимума такая вторая производная неотрицательна, а в точке максимума — неположительна. Поэтому если в точке минимума давления (в численном расчете) окажется, что $Q \geq 0$, то, поскольку величина $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$, входящая в условие следствия ОПМД, «автоматически» оказывается неотрицательной, величину $\mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$ можно не вычислять — в численном расчете следствие ОПМД будет выполнено. Аналогично, если в точке максимума давления (в численном расчете) окажется, что $Q \leq 0$, то величину $\mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$ можно не вычислять — в численном расчете следствие ОПМД будет выполнено.

В других случаях для применения следствия ОПМД необходимо вычислять $2Q + \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)$ в точке A . При этом представляется полезным использовать тот факт, что (см. первый раздел) величина $\mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho)(A)$

равна произведению $V^2/(kp)$ на вторую производную давления по направлению скорости \mathbf{V} в точке A .

Заключение. Получен принцип максимума давления для стационарных небаротропных течений газа. В условиях этого принципа нет требований к значениям местного числа Маха, и он верен для течений невязкого газа с произвольным уравнением состояния. Поэтому было предложено назвать его «общим» (ОПМД). Для дозвуковых областей проще и удобнее применять ДПМД, но для трансзвуковых и сверхзвуковых областей в настоящее время ОПМД — это единственный известный принцип максимума. Предлагается использовать *следствие* ОПМД для верификации расчетов стационарных течений идеального газа (например, за отошедшим головным скачком) и расчетов течений вязкого газа в областях, удаленных от источников завихренности, где в достаточно малых окрестностях внутренней точки экстремума применима модель небаротропного течения идеального газа. При этом в случае модели идеального совершенного газа предлагается использовать результат третьего раздела.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
2. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1967. xviii+615 pp.
3. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
4. Вышинский В. В., Сизых Г. Б. О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // *Матем. моделирование*, 2018. Т. 30, № 6. С. 21–38. EDN: XQMWMX.
5. Anikin V. A., Vyshinsky V. V., Pashkov O. A., Streltsov E. V. Using the maximum pressure principle for verification of calculation of stationary subsonic flow // *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Mechanical Engineering*, 2019. no. 6. pp. 4–16. EDN: XORYQW. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2019-6-4-16>.
6. Вышинский В. В., Зоан К. Т. Численное моделирование обтекания фрагментов ландшафта и вопросы верификации решений // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2020. Т. 51, № 6. С. 60–68. EDN: GGGJCS.
7. Айрапетов А. Б., Вышинский В. В., Катунин А. В. К вопросу о верификации расчетов стационарных дозвуковых течений около плохообтекаемых тел // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2021. Т. 52, № 1. С. 34–40. EDN: YWTAMA.
8. Вышинский В. В., Зоан К. Т. Аэродинамика самолета в возмущенной атмосфере // *Труды МФТИ*, 2021. Т. 13, № 2. С. 40–48. EDN: NJOMFE. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_2_40.
9. Вышинский В. В., Зоан К. Т. Обтекание горного ландшафта в окрестности аэропорта Дананг атмосферным ветром и вопросы безопасности полета // *Научн. вестн. МГТУ ГА*, 2021. Т. 24, № 6. С. 27–41. EDN: ZNMMDG. DOI: <https://doi.org/10.26467/2079-0619-2021-24-6-27-41>.

10. Айрапетов А. Б., Вышинский В. В., Катунин А. В. Обтекание пролетных конструкций объездной дороги аэропорта Адлер и вопросы безопасности посадки // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2021. Т. 52, №6. С. 41–49. EDN: **XFZYOF**.
11. Vyshinsky V. V., Chinh D. C. Study of aerodynamic characteristics of an aircraft during approach to landing in a disturbed atmosphere // *Vietnam J. Mech.*, 2022. vol. 44, no. 2. pp. 133–152. DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/16760>.
12. Брутян М. А., Вышинский В. В., Раздобарин А. М. Применение критериев независимой верификации решений для повышения качества численных расчетов // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2022. Т. 53, №4. С. 26–32. EDN: **PPTOCU**.
13. Truesdell C. Two measures of vorticity // *J. Rational Mech. Anal.*, 1953. vol. 2, no. 2. pp. 173–217. DOI: <https://doi.org/10.1512/iumj.1953.2.52009>.
14. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus // *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1927. vol. 19. pp. 147–152 (In German).
15. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1970. xii+370 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5>.
16. Беспорточный А. И., Бурмистров А. Н., Сизых Г. Б. Вариант теоремы Хопфа // *Труды МФТИ*, 2016. Т. 8, №1. С. 115–122. EDN: **VSMAAX**.
17. Сизых Г. Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2020. Т. 84, №3. С. 304–310. EDN: **JLOYTW**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823520020071>.
18. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D-течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, №3. С. 588–595. EDN: **LRHSER**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
19. Сизых Г. Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2021. Т. 85, №6. С. 742–747. EDN: **SRMQIO**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521060102>.

MSC: 76N15, 76J20

General principle of maximum pressure in stationary flows of inviscid gas

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141700, Russian Federation.

Abstract

Within the framework of the Euler equations, the possibility of achieving extreme pressure values at the inner point of a stationary flow of a nonviscous gas is considered. The flow can be non-barotropic. The well-known (G.B. Sizykh, 2018) subsonic principle of maximum pressure (SPMP) cannot be applied in transonic and supersonic flow regions. Under the conditions of the classical principle of maximum pressure by C. Truesdell (1953), there is no restriction on the values of local Mach numbers, but it has a number of features that do not allow it to be used to verify numerical calculations in the same way as it can be done when using SPMP in subsonic regions. A previously unknown principle of maximum pressure is discovered: a function of derivative flow parameters is found, which must have a certain sign (different for minimum and for maximum pressure) at the point where the pressure reaches a strict or nonstrict local extremum. This principle of maximum pressure is called “general” (GPMP) because its conditions do not include barotropy, restrictions on the values of local Mach numbers, and the assumption that the gas obeys the Mendeleev–Clapeyron equation. One of the consequences of GPMP is the conclusion that the requirement of barotropy can be excluded from the conditions of Truesdell’s principle of maximum pressure. It is proposed to use GPMP to verify numerical calculations of the ideal gas flow behind a detached shock wave formed in a supersonic flow around bodies and to verify numerical calculations of a viscous gas flow around bodies in regions remote from sources of vorticity, where the effect of viscosity can be neglected.

Keywords: Euler equations, principle of maximum pressure, inviscid gas, perfect gas, exact solutions, Q -parameter.

Received: 11th August, 2022 / Revised: 16th September, 2022 /Accepted: 20th September, 2022 / First online: 28th September, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sizykh G. B. General principle of maximum pressure in stationary flows of inviscid gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 544–555. EDN: [EBBGFK](https://doi.org/10.14498/vsgtu1946). DOI: [10.14498/vsgtu1946](https://doi.org/10.14498/vsgtu1946) (In Russian).

Author’s Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author thanks the referee for careful reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Sedov L. I. *A Course in Continuum Mechanics*, vol. 2, Physical Foundations and Formulations of Problems. Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, xxi+309 pp.
2. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1967, xviii+615 pp.
3. Loitsyansky L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1966, xii+804 pp.
4. Vyshinsky V. V., Sizykh G. B. The verification of the calculation of stationary subsonic flows and the presentation of the results, *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 97–106. EDN: **XVQXUH**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048219010162>.
5. Anikin V. A., Vyshinsky V. V., Pashkov O. A., Streltsov E. V. Using the maximum pressure principle for verification of calculation of stationary subsonic flow, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Ser. Mechanical Engineering*, 2019, no. 6, pp. 4–16. EDN: **XORYQW**. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2019-6-4-16>.
6. Vyshinsky V. V., Zoan K. T. Numerical simulation of the flow around landscape fragments and solution verification, *TsAGI Science Journal*, 2020, vol. 51, no. 6, pp. 641–650. DOI: <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2021037822>.
7. Airapetov A. B., Vyshinsky V. V., Katunin A. V. On the verification of calculations of stationary subsonic flows around bluff bodies, *Uch. Zap. TsAGI*, 2021, vol. 52, no. 1, pp. 34–40 (In Russian). EDN: **YWTAMA**.
8. Vyshinsky V. V., Zoan K. T. Aircraft aerodynamics in a disturbed atmosphere, *Proc. of MIPT*, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 40–48 (In Russian). EDN: **NJOMFE**. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2021_13_2_40.
9. Vyshinsky V. V., Zoan K. T. Atmospheric wind flow of mountain landscape in the surroundings of Danang airport and flight safety problems, *Civil Aviation High Technologies*, 2021, vol. 24, no. 6, pp. 27–41 (In Russian). EDN: **ZNMDG**. DOI: <https://doi.org/10.26467/2079-0619-2021-24-6-27-41>.
10. Airapetov A. B., Vyshinsky V. V., Katunin A. V. Flow around the span structures of the Adler airport bypass road and landing safety issues, *Uch. Zap. TsAGI*, 2021, vol. 52, no. 6, pp. 41–49 (In Russian). EDN: **XFZYOF**.
11. Vyshinsky V. V., Chinh D. C. Study of aerodynamic characteristics of an aircraft during approach to landing in a disturbed atmosphere, *Vietnam J. Mech.*, 2022, vol. 44, no. 2, pp. 133–152. DOI: <https://doi.org/10.15625/0866-7136/16760>.
12. Brutyan M. A., Vyshinsky V. V., Razdobarin A. M. Application of criteria for independent verification of solutions to improve the numerical calculations quality, *Uch. Zap. TsAGI*, 2022, vol. 53, no. 4, pp. 26–32 (In Russian). EDN: **PPTOCU**.
13. Truesdell C. Two measures of vorticity, *J. Rational Mech. Anal.*, 1953, vol. 2, no. 2, pp. 173–217. DOI: <https://doi.org/10.1512/iumj.1953.2.52009>.
14. Hopf E. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1927, vol. 19, pp. 147–152 (In German).
15. Miranda C. *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1970, xii+370 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-87773-5>.

16. Besportochny A. I., Burmistrov A. N., Sizykh G. B. Version of the Hopf theorem, *Proc. of MIPT*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 115–122 (In Russian). EDN: **VSMAX**.
17. Sizykh G. B. System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave, *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903. EDN: **EZXXWK**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462820070095>.
18. Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595 (In Russian). EDN: **LRHSER**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
19. Sizykh G. B. Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1027–1030. EDN: **FWLWLT**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821080097>.



УДК 519.635.1

hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения

В. П. Шапеев^{1,2}, Л. С. Брындин^{1,2}, В. А. Беляев¹

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

² Новосибирский государственный университет, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1.

Аннотация

Разработан новый алгоритм численного решения бигармонического уравнения. Он основан на впервые реализованном hp-варианте метода коллокации и наименьших квадратов (hp-МКНК) с интегральными коллокациями для эллиптического уравнения четвертого порядка в комбинации с современными способами ускорения итерационных процессов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В hp-МКНК использовались его возможности измельчать шаги расчетной сетки (h-подход) и увеличивать степень базисных аппроксимирующих полиномов до произвольного порядка (p-подход). На примере численного моделирования изгиба шарнирно закрепленной изотропной пластины проведен анализ сходимости приближенных решений, полученных реализованным вариантом метода. Показано достижение высокой точности и повышенного порядка сходимости решений при применении полиномов высоких вплоть до десятой степеней в hp-МКНК.

Исследована эффективность комбинированного применения сочетающихся с МКНК алгоритмов ускорения итерационных процессов решения СЛАУ. Применены предобуславливание матриц СЛАУ; алгоритм

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Шапеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. EDN: **ETBROJ**. DOI: [10.14498/vsgtu1936](https://doi.org/10.14498/vsgtu1936).

Сведения об авторах

Василий Павлович Шапеев  <https://orcid.org/0000-0001-6761-7273>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; лаб. термомеханики и прочности новых материалов¹; профессор; каф. математического моделирования²; e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Лука Сергеевич Брындин  <https://orcid.org/0000-0002-0211-5800>

младший научный сотрудник; лаб. термомеханики и прочности новых материалов¹; аспирант; каф. математического моделирования²; e-mail: l.bryndin@g.nsu.ru

Василий Алексеевич Беляев  <https://orcid.org/0000-0001-5901-2880>

младший научный сотрудник; лаб. термомеханики и прочности новых материалов¹; e-mail: belyaevasily@mail.ru

ускорения итераций, основанный на подпространствах Крылова; операция продолжения на многосеточном комплексе; распараллеливание вычислительной программы с помощью OpenMP; модифицированный алгоритм решения локальных СЛАУ, определяющих решение задачи в каждой ячейке сетки. Последний, применимый в случае решения линейного дифференциального уравнения, позволяет более эффективно решать переопределенные СЛАУ в МКНК, реализуемом итерациями по подобластям, в которых вид матриц локальных СЛАУ не изменяется на каждой итерации. Комбинированное применение всех перечисленных способов ускорения уменьшило время расчетов на персональном компьютере более чем в 350 раз по сравнению со случаем, когда использовалось только предобуславливание.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, интегральные уравнения коллокации, бигармоническое уравнение, изгиб пластины, ускорение итерационных процессов, предобуславливание, подпространства Крылова, многосеточный алгоритм, распараллеливание.

Получение: 21 июня 2022 г. / Исправление: 9 сентября 2022 г. /

Принятие: 13 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 29 сентября 2022 г.

Введение. Известно, что численное решение краевых задач для уравнений бигармонического типа, встречающихся в различных разделах механики сплошных сред, например, в теории тонких пластин [1, 2], в гидродинамике при малых числах Рейнольдса [3] и др., вызывает ряд трудностей. Это связано с наличием в эллиптическом уравнении производных четвертого порядка, существенно сказывающихся на обусловленности исходной дифференциальной задачи. При этом цель многих исследователей заключается в разработке новых вариантов высокоточных численных методов, по развитию которых в настоящее время ведется активная работа [3–11]. Одним из таких перспективных методов является проекционно-сеточный метод коллокации и наименьших квадратов (МКНК) [9–11]. В [11] при решении бигармонического уравнения в нерегулярных областях применен вариант МКНК с «дифференциальными» коллокациями, аппроксимирующими уравнение в точках внутри ячеек. Там же продемонстрированы преимущества и достоинства предложенных подходов при сравнении полученных МКНК результатов с результатами других авторов, использовавших метод конечных разностей (МКР) [3], метод конечных элементов (МКЭ) [8] и спектральные методы [5–7].

Под hp-вариантом МКНК (hp-МКНК) подразумевается такой вариант метода, который позволяет как измельчать шаги расчетной сетки (h-подход), так и увеличивать степени аппроксимирующих полиномов (p-подход). Понятие введено по аналогии с hp-МКЭ [12].

Данная работа посвящена реализации и верификации hp-МКНК с «интегральными коллокациями», аппроксимирующими закон сохранения, записанный в интегральном виде, впервые примененного к решению бигармонического уравнения. Область влияния уравнения интегральной коллокации вся ячейка, по площади которой проводится интегрирование при его записи. Область влияния дифференциальной коллокации — малая окрестность точки, в которой она аппроксимирует дифференциальное уравнение задачи. В [10] бигармоническое уравнение было решено МКНК с применением интеграль-

ных уравнений коллокации, взвешенных наименьших квадратов и полиномов только четвертой степени. Отмечалось, что в этом случае наблюдается сходимость МКНК в более широком диапазоне значений весовых множителей по сравнению с дифференциальным вариантом МКНК, в котором их приходится подбирать более тщательно [9]. В МКНК на весовые множители домножаются уравнения коллокации, условия согласования и краевые условия, а их объединение составляет переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в каждой ячейке расчетной области. Глобальная СЛАУ, являющаяся совокупностью локальных СЛАУ, в МКНК чаще всего решается с помощью метода итераций по подобластям в комбинации с современными способами ускорения итерационных процессов.

Сочетание МКНК с предобуславливанием (диагональным [13] и многопараметрическим, связанным с выбором значений весовых множителей), ускорением, основанным на методе подпространств Крылова [14], и операцией продолжения, используемой для задания начального приближения на многосеточном комплексе [15] при переходе с грубой сетки на более подробную, показало уменьшение времени расчетов до 362 раз по сравнению со случаем, когда ни один из алгоритмов не использовался на примере решения уравнений Навье—Стокса [16]. При решении краевой задачи Дирихле для уравнения Пуассона в [17] продемонстрировано сокращение времени расчетов практически в 2000 раз и количества итераций более чем в 250 раз, где помимо вышеуказанных методов также применялось распараллеливание вычислительной программы с помощью OpenMP в сочетании с обходом области, основанным на красно-черном упорядочивании [18], а также свойство локальной системы координат в МКНК, которое имеет место в случае решения линейного дифференциального уравнения.

Однако комплексное исследование влияния алгоритмов ускорения для решения уравнений с частными производными (УЧП) четвертого порядка с использованием полиномов различных степеней в МКНК пока не проводилось, чему отчасти и посвящена настоящая работа. При этом стоит отметить, что ускорение по Крылову в некоторых ситуациях способно сделать расходящийся итерационный процесс сходящимся [19], что является особо важным при решении плохо обусловленных задач.

Подчеркнем, что тематика ускорения итерационных процессов сама по себе является весьма актуальной и активно развивается. В качестве примера здесь упомянем работу [20], где экспериментально изучается влияние размеров пересечений (перехлеста) подобластей на скорость сходимости методов декомпозиции. Также в [21] можно познакомиться с одним из примеров двухуровневых предобуславливателей для методов Крылова — методом дефляции. В этой же работе [21] проводится достаточно подробное сравнение между методами дефляции, декомпозиции областей и многосеточных.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу статического изгиба изотропной прямоугольной пластины $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\delta\Omega$ в рамках теории Кирхгофа—Лява. В этом случае прогиб пластины $w(x_1, x_2)$ определяется из решения бигармонического уравнения (уравнения Софи Жермен—Лагранжа) [1]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $q(x_1, x_2)$ — поперечная нагрузка, $D = Et^3/[12(1 - \nu^2)]$ — жесткость пластины при изгибе, t — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Пусть пластина шарнирно закреплена, тогда краевые условия имеют следующий вид [1]:

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad (2)$$

где M_n — изгибающий момент, который определяется по формуле

$$M_n = M_{x_1} \cos^2 \alpha + M_{x_2} \sin^2 \alpha - 2M_{x_1 x_2} \sin \alpha \cos \alpha,$$

где

$$M_{x_1} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{x_2} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \quad M_{x_1 x_2} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$(\cos \alpha, \sin \alpha)$ — компоненты внешней единичной нормали к $\delta\Omega$.

Краевая задача (1), (2) плохо обусловлена, так как малые изменения во входных данных задачи приводят к значительным изменениям ее решения. Необходимо получить эффективное численное решение данной плохо обусловленной краевой задачи. Для достижения этой цели авторами были поставлены и решены следующие задачи:

- 1) для получения надежных результатов и более устойчивого счета были использованы интегральные уравнения коллокации;
- 2) для эффективного решения соответствующей краевой задачи для бигармонического уравнения впервые был реализован и верифицирован hp-МКНК с интегральными уравнениями коллокации в комбинации с современными алгоритмами ускорения итерационных процессов;
- 3) было проведено комплексное исследование влияния алгоритмов ускорения итерационных процессов в МКНК при решении дифференциального уравнения четвертого порядка.

2. Интегральный закон сохранения. Домножим (1) на D , проинтегрируем левую и правую часть дважды с использованием формулы Грина и получим интегральный закон сохранения для бигармонического уравнения

$$\oint_{\Sigma} F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \iint_V q(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (3)$$

где

$$\vec{F} = (F_1, F_2) = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = (-Q_{x_1}, -Q_{x_2}),$$

$V \subseteq \Omega$, Σ — граница подобласти $V \subseteq \Omega$, Q_{x_1} и Q_{x_2} — перерезывающие силы. Уравнение (3) имеет определенный физический смысл: действие внешней поперечной нагрузки q на элемент пластины V уравновешивается перерезывающими силами, действующими на боковых площадках этого элемента. Таким образом, отыскание обобщенных решений задачи (1), (2) свелось к решению краевой задачи (3), (2).

Отметим, что подобный подход решения дифференциального уравнения, исходно заданного в дивергентном виде, эффективно применялся при решении задач с разрывными параметрами при построении различных консервативных численных методов с целью нахождения обобщенных решений [22].

Замечание. Непосредственно можно аппроксимировать как исходное бигармоническое уравнение (1) [5–7, 9, 11], так и систему УЧП, к которой оно может сводиться. В некоторых случаях это сделать достаточно просто, например, когда рассматривается изгиб шарнирно закрепленной пластины полигональной формы [1]. В случае сложных краевых условий и нерегулярной области это может вызывать существенные трудности. Но зачастую решать задачу для системы УЧП более низкого порядка проще из-за ее лучшей обусловленности по сравнению с задачей для уравнения высокого порядка. Например, в [3, 4] вводится дополнительная неизвестная переменная и решение исходной задачи Дирихле (на границе заданы значения w и производной по нормали $\partial w/\partial n$) для бигармонического уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений Пуассона.

3. Описание hp-МКНК. Покроем Ω регулярной сеткой, состоящей из $N_1 \times N_2$ прямоугольных ячеек. Обозначим через $N_{\text{cells}} = N_1 N_2$ общее количество ячеек в расчетной области. Введем локальную систему координат в каждой s -й ячейке, $s = 1, 2, \dots, N_{\text{cells}}$, с линейной зависимостью от глобальной:

$$y_1 = (x_1 - x_{1s})/h_1, \quad y_2 = (x_2 - x_{2s})/h_2,$$

где (x_{1s}, x_{2s}) — координаты центра ячейки в глобальной системе, $2h_1 \times 2h_2$ — размер ячейки в направлении x_1 и x_2 соответственно.

Приближенное решение задачи в каждой ячейке ищем в виде

$$v_{hs}(y_1, y_2) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^{K-i_1} c_{i_1 i_2, s} y_1^{i_1} y_2^{i_2}. \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты $c_{i_1 i_2, s}$ определим из решения переопределенной СЛАУ, полученной аппроксимацией задачи (3), (2) полиномами (4) и состоящей из уравнений коллокации, условий согласования и краевых условий, если ячейка является граничной. Обозначим $v_h(y_1(x_1), y_2(x_2)) = w(x_1, x_2)$.

Определим потоки вектора \vec{F} через стороны прямоугольных ячеек сетки (i, j) , $i = 1, 2, \dots, N_1$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, вычисленные на приближенном решении v_h :

$$W_{i+1/2, j}^{\pm} = \lim_{\delta \rightarrow +0} D \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \left(\frac{\partial^3 v_h}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 v_h}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \Big|_{x_1=x_{1,i} \pm \delta} dx_1, \quad (5)$$

$$W_{i, j+1/2}^{\pm} = \lim_{\delta \rightarrow +0} D \int_{x_{2,j}}^{x_{2,j+1}} \left(\frac{\partial^3 v_h}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_h}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) \Big|_{x_2=x_{2,j} \pm \delta} dx_2. \quad (6)$$

Здесь значения с полуцелыми индексами обозначают потоки сохраняемых величин через границы расчетной ячейки.

С учетом (5), (6) закон сохранения (3), записанный для ячейки с номером (i, j) , имеет вид

$$W_{i+1,j+1/2}^- - W_{i,j+1/2}^+ + W_{i+1/2,j+1}^- - W_{i+1/2,j}^+ = \int_{x_{1,i}}^{x_{1,i+1}} \int_{x_{2,j}}^{x_{2,j+1}} q(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (7)$$

Предлагается каждую прямоугольную ячейку сетки разделить на K^2 одинаковых прямоугольных ячеек и записать в них *уравнения коллокации* (7) в локальных координатах (y_1, y_2) . При этом уравнения (7) домножим на весовой множитель p_c .

На каждой стороне s -й прямоугольной ячейки равномерно расставим K точек согласования, в которых по аналогии с [9–11] запишем *условия согласования*:

$$p_{m_0} v_{hs} + p_{m_1} \frac{\partial v_{hs}}{\partial n_s} = p_{m_0} \hat{v}_h + p_{m_1} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial n_s}, \quad (8)$$

$$p_{m_2} \frac{\partial^2 v_{hs}}{\partial n_s^2} + p_{m_3} \frac{\partial^3 v_{hs}}{\partial n_s^3} = p_{m_2} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial n_s^2} + p_{m_3} \frac{\partial^3 \hat{v}_h}{\partial n_s^3}, \quad (9)$$

где n_s — внешняя единичная нормаль к соответствующей границе s -й ячейки; v_{hs} и \hat{v}_h — пределы приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе s -й ячейки; $p_{m_0}, p_{m_1}, p_{m_2}, p_{m_3}$ — положительные весовые множители.

Краевые условия для шарнирно закрепленного края (2) записываются на прямолинейной стороне ячейки, являющейся частью $\delta\Omega$, в K равномерно распределенных на ней точках:

$$p_{b_0} v_{hs} = 0, \quad p_{b_2} M_n = 0, \quad (10)$$

где p_{b_0}, p_{b_2} — положительные весовые множители.

Объединяя уравнения (7)–(10) в каждой ячейке относительно неизвестных $c_{i_1 i_2, s}$ получим локальную переопределенную СЛАУ

$$Ax = b, \quad (11)$$

где A — прямоугольная вещественная матрица размера $m \times l$, x — вектор неизвестных, b — вектор правой части. При описанном выше способе записи уравнений имеем относительно $l = (K + 1)(K + 2)/2$ неизвестных в каждой ячейке $m = K^2 + 4K$ линейных алгебраических уравнений.

Глобальная СЛАУ, являющаяся объединением локальных СЛАУ, здесь решается с помощью метода итераций по подобластям. Одна глобальная итерация заключается в последовательном решении локальных СЛАУ (11) в каждой ячейке области. Для решения линейной задачи наименьших квадратов использовалась QR -декомпозиция матрицы A , найденная методом отражений Хаусхолдера [23]. Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока не было выполнено следующее условие его остановки:

$$\max_{i_1 i_2 s} |c_{i_1 i_2, s}^{r+1} - c_{i_1 i_2, s}^r| < \varepsilon,$$

где r — номер итерации, ε — наперед заданная малая константа, называемая псевдопогрешностью решения. Значение ε зависит от решаемой задачи, размера ячейки сетки $2h_1 \times 2h_2$, старшей степени полиномов K в (4). В МКНК она выбирается экспериментально так, чтобы погрешность решения глобальной СЛАУ была по возможности существенно меньше ожидаемой погрешности решения, исходя из значений погрешностей на более грубых сетках. В приведенной ниже таблице значения ε варьировались от 10^{-13} до 10^{-14} .

Следует отметить, что от выбора значений весовых множителей могут сильно зависеть скорость сходимости итерационного процесса, обусловленность СЛАУ и точность приближенного решения [9, 20, 24].

4. Эффективное использование свойства матрицы локальной СЛАУ. В МКНК при решении линейной задачи вид матрицы локальной СЛАУ в каждой ячейке одинаковый и не зависит от номера итерации. Также для каждой ячейки в итерационном процессе компоненты вектора правой части b , соответствующие уравнениям коллокации и краевым условиям (если ячейка граничная), не изменяются.

Пусть \tilde{b} — вектор размера m , первые компоненты которого в количестве взятых условий согласования совпадают с компонентами вектора b , являющимися правыми частями уравнений согласования. Остальные компоненты вектора \tilde{b} являются нулями. Обозначим $\tilde{\tilde{b}} = b - \tilde{b}$, Q^T — транспонированная матрица размера $l \times m$ для матрицы Q , R^{-1} — обратная для верхнетреугольной матрицы R размера $l \times l$ для каждой локальной матрицы A . В связи с этим достаточно только один раз вычислить и запомнить $R^{-1}Q^T$ и $R^{-1}Q^T\tilde{\tilde{b}}$ и на каждой итерации для каждой ячейки положить $x = R^{-1}Q^T\tilde{b} + R^{-1}Q^T\tilde{\tilde{b}}$, т.к. в итерационном процессе изменяется только правая часть условий согласования. Отметим также, что при решении линейной задачи с постоянными коэффициентами для внутренних прямоугольных ячеек вид матриц R^{-1} и Q^T одинаковый, поэтому их можно вычислить один раз и записать в памяти компьютера по одному экземпляру для всех таких ячеек, чтобы сэкономить память.

Ранее, например, при решении уравнения Пуассона МКНК [17] предлагалось на каждой итерации умножать b на записанную в памяти компьютера матрицу Q^T , а затем делать обратный ход, как и в методе Гаусса. Очевидно, что реализованная здесь модификация алгоритма решения СЛАУ еще сильнее уменьшает время расчетов по сравнению с методикой, описанной в [17].

5. Результаты расчетов и их обсуждение. Рассмотрим изгиб шарнирно закрепленной (2) пластины размера $d_1 \times d_2$ м, на которую действует синусоидальная нагрузка $q = 10^5 \sin(\pi x_1/d_1) \sin(\pi x_2/d_2)$ Па. В этом случае известно точное решение задачи (1), (2), см., например, [1]:

$$w(x_1, x_2) = \frac{qd_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2}.$$

В численных расчетах полагалось $d_1 = d_2 = 10$ м, $t = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$ и $N_1 \times N_2 = N \times N$, $h_1 = h_2 = h$.

В таблице приведены результаты численных экспериментов, где относительная погрешность приближенного решения определялась по формуле

$$\|E_r\|_\infty = \frac{\max_{s=1,\dots,N_{\text{cells}}} \left(\max_{m=1,\dots,Q_s} |w(x_{1m}, x_{2m}) - v_{hs}(x_{1m}, x_{2m})| \right)}{\max_{s=1,\dots,N_{\text{cells}}} \left(\max_{m=1,\dots,Q_s} |w(x_{1m}, x_{2m})| \right)},$$

где $Q_s = 100$ — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_{1m}, x_{2m}) для подсчета в них погрешности. Порядок сходимости погрешности приближенного решения определялся величиной

$$\log_2(E_{N/2}/E_N),$$

где $E_{N/2}$ — погрешность $\|E_r\|_\infty$ на сетке, состоящей из $N/2 \times N/2$ ячеек, E_N — погрешность $\|E_r\|_\infty$ на сетке, состоящей из $N \times N$ ячеек.

В таблице приведено количество итераций N_{iter} , время выполнения итерационного процесса в секундах t_{sol} и их отношения AF_i и AF_t соответственно для случая «с ускорением» для итерационного процесса, в котором комбинированно использовались:

- диагональный предобуславливатель,
- $p_c = h^2$, $p_{m0} = p_{m1} = p_{b0} = 1$, $p_{m2} = p_{m3} = p_{b2} = h^2$,
- ускорение по Крылову,
- операция продолжения,
- распараллеливание с помощью OpenMP с обходом области, основанным на красно-черном упорядочивании,
- модифицированный алгоритм решения локальных СЛАУ

по отношению к случаю «без ускорения», когда применялся только диагональный предобуславливатель, фиксировались аналогичные значения весовых множителей и был реализован последовательный обход области.

Вычисления проводились на компьютере Intel Core i5-8265U CPU 1.6 GHz, 4 Cores, DIMM DDR4-2400 1200 MHz 8 Gb. Для распараллеливания с помощью OpenMP использовалось 4 потока.

В расчетах в итерационном процессе на самой грубой сетке (и во всех случаях без использования операции продолжения) в начальном приближении решения взяты $c_{i_1 i_2, j} = 0.4$. Для демонстрации представления чисел здесь используется экспоненциальный формат их записи.

Проведенное исследование показало следующее.

1. Порядок сходимости в среднем не хуже $O(h^{K-p+2-K \bmod 2})$, что хорошо согласуется со многими результатами решения различных задач МКНК [10, 17, 25], где p — порядок уравнения (в данном случае 4).
2. Наличие сходимости МКНК для достаточно высоких степеней полиномов K , что позволяет в случае достаточно гладких решений получать высокоточное решение с малым количеством степеней свободы (DOF, от англ. degrees of freedom), например, чтобы достичь точность порядка 10^{-10} , необходимо $\text{DOF} = 57600$ при $K = 7$, $\text{DOF} = 18000$ при $K = 8$, $\text{DOF} = 14080$ при $K = 9$, наконец, $\text{DOF} = 4224$ при $K = 10$. В МКНК DOF — общее количество неизвестных коэффициентов в представлении приближенного решения (4).

Результаты численных экспериментов [Results of numerical experiments]

$N \times N$	$\ E_r\ _\infty$	$\log_2(E_{N/2}/E_N)$	"without acceleration"		"with acceleration"		AF _i	AF _t
			N_{iter}	t_{sol}, S	N_{iter}	t_{sol}, S		
$K = 6, \varepsilon = 10^{-13}$								
5×5	1.65E-4	—	95	1.828	41	0.062	2.31	29.48
10×10	1.47E-6	6.81	189	9.453	41	0.219	4.60	43.16
20×20	7.88E-8	4.22	383	78.937	41	0.532	9.34	148.37
40×40	8.77E-9	3.16	788	645.313	115	6.297	6.85	102.47
$K = 7, \varepsilon = 10^{-13}$								
5×5	3.25E-5	—	97	2.516	41	0.078	2.36	32.25
10×10	2.94E-7	6.78	192	19.453	41	0.266	4.68	73.13
20×20	9.09E-9	5.01	388	158.625	41	0.657	9.46	241.43
40×40	4.34E-10	4.38	801	1324.11	81	7.093	9.88	186.67
$K = 8, \varepsilon = 10^{-13}$ *								
5×5	3.17E-6	—	98	4.094	41	0.125	2.39	32.75
10×10	5.37E-8	5.88	194	38.922	41	0.328	4.73	118.66
20×20	7.10E-10	6.24	393	276.454	41	1.453	9.58	190.26
40×40	7.29E-12	6.60	832	2001.52	41	5.469	20.29	365.97
$K = 9, \varepsilon = 10^{-14}$								
2×2	2.96E-3	—	49	0.781	41	0.031	1.19	25.19
4×4	3.57E-6	9.69	86	4.297	41	0.094	2.09	45.71
8×8	3.25E-8	6.77	166	29.5	41	0.25	5.62	118
16×16	4.49E-10	6.17	336	252.859	41	1.218	8.92	207.60
$K = 10, \varepsilon = 10^{-14}$								
2×2	1.05E-3	—	49	1.047	41	0.063	1.19	16.61
4×4	6.26E-7	10.71	87	8.406	40	0.172	2.17	48.87
8×8	2.97E-10	11.04	167	48.61	41	0.5	4.07	97.22
16×16	7.58E-13	8.61	346	405.14	41	1.782	8.43	227.35

*on a grid of 40×40, the pseudo-error value was taken $\varepsilon = 0.6 \cdot 10^{-13}$

3. Сходимость численного решения без применения алгоритмов ускорения итерационного процесса решения СЛАУ, что говорит о хороших свойствах аппроксимации в МКНК при решении УЧП высокого порядка с применением полиномов высоких степеней и использованием интегральных уравнений коллокации.
4. Заметное сокращение времени решения задачи (более 350 раз) и количества итераций (более 20 раз) в случае комбинирования МКНК с другими вычислительными алгоритмами. Коэффициенты ускорения AF_t и AF_i увеличиваются по мере роста K и уменьшения шагов сетки при решении УЧП четвертого порядка.
5. Применение впервые реализованного в данной работе модифицированного алгоритма решения локальных СЛАУ в МКНК позволило сократить время расчетов в 7.42 раза при $K = 6$, в 7.93 раза при $K = 7$, в 9.77 раз при $K = 8$, в 11.73 раза при $K = 9$ и в 12.41 раз при $K = 10$ относительно времен, указанных в пятой колонке таблицы. Данные величины были рассчитаны как среднее арифметическое от AF_t , вычисленного на четырех указанных сетках в таблице. Как и следовало ожидать, этот эффект возрастает при увеличении степени полиномов K .

Исходя из своего прежнего опыта решения бигармонического уравнения для эффективного построения поправок приближенных решений по Крылову авторы использовали количество невязок $N_r = 40$. Это оказалось достаточным для достижения заданной точности, поэтому практически всегда $N_{iter} = 41$ в таблице. Однако для каждого случая оптимальное значение величины N_r может быть другим. Например, если использовать $N_r = 50$ на сетке 40×40 при $K = 7$, то $N_{iter} = 51$, а $t_{sol} = 4.921$ с, т.е. в этом случае коэффициенты ускорения станут равными $AF_i = 15.70$ и $AF_t = 269.07$. Максимальные числа обусловленности матриц локальных СЛАУ увеличивались от $C_1 \cdot 10^2$ до $C_2 \cdot 10^5$ при увеличении K и уменьшении шагов сетки в приведенных в таблице случаях, где C_1 и C_2 — константы.

Сравнение с опубликованным ранее дифференциальным hp-МКНК для этой задачи [11], когда уравнения коллокации записывались в равномерно распределенных точках коллокации и имели вид

$$p_c \left(\frac{1}{h^4} \frac{\partial^4 v_{hs}}{\partial y_1^4} + \frac{2}{h^4} \frac{\partial^4 v_{hs}}{\partial y_1^2 \partial y_2^2} + \frac{1}{h^4} \frac{\partial^4 v_{hs}}{\partial y_2^4} \right) = p_c \frac{q}{D},$$

с применением базиса (4) и $p_c = h^4$ (остальные весовые множители аналогичны тем, которые использовались в интегральном варианте, если не оговорено иное) показало следующее.

1. Итерационный процесс для дифференциального МКНК разошелся при $K = 4$ по сравнению с интегральным МКНК без использования ускорения по Крылову на сетках 40×40 , 80×80 при указанных выше весовых множителях и на сетке 80×80 , когда $p_{m_1} = 0.12$, $p_{m_3} = 0.125h^2$.
2. Точность при применении дифференциального МКНК упала по сравнению с интегральным, результаты которого приведены в таблице. Дифференциальный вариант МКНК позволил достичь точности $\|E_r\|_\infty = 1.07 \text{E} - 9$ при $K = 7$ на сетке 40×40 , а интегральный — $\|E_r\|_\infty = 4.34 \text{E} - 10$. При использовании полиномов более высоких степеней наблюдалась аналогичная картина. Например, с помощью дифферен-

циального МКНК при $K = 8$ на сетке 40×40 получено значение погрешности $\|E_r\|_\infty = 3.82 \text{ E} - 11$, а при $K = 10$ на сетке 16×16 — $\|E_r\|_\infty = 1.36 \text{ E} - 12$. Применение интегрального МКНК позволяет достичь $\|E_r\|_\infty = 7.29 \text{ E} - 12$ и $\|E_r\|_\infty = 7.58 \text{ E} - 13$ соответственно при $K = 8$ и $K = 10$.

Стоит отметить, что многие результаты у двух сравниваемых здесь вариантов МКНК оказались близкими, что говорит об их хороших аппроксимационных свойствах. Однако, как это показано выше, применение интегрального варианта позволяет улучшить свойства метода, что является особо принципиальным при решении плохо обусловленных задач.

Заключение. В данной работе на примере решения бигармонического уравнения в приложении к моделированию изгиба тонкой пластины показана возможность достижения высокой точности hp-МКНК с интегральными коллокациями и проведена его верификация с использованием полиномов вплоть до десятой степени. Продемонстрировано существенное сокращение количества итераций и времени расчетов при использовании различных способов ускорения итерационных процессов в МКНК.

Как видно из описанного алгоритма, hp-МКНК с представлением решения в виде (4) привлекателен прежде всего своей возможностью автоматической реализации на компьютере с точки зрения применения произвольных степеней полиномов для достижения повышенной точности. Для других численных методов это может вызывать более существенные трудности. Например, в МКР в [26] для этой цели авторы дополнительно используют систему компьютерной алгебры.

Таким образом, показанная здесь возможность сокращения времени расчетов в несколько сотен раз и высокоточного решения плохо обусловленной задачи открывает все более широкие перспективы эффективного численного моделирования напряженно-деформированного состояния тонких пластин с помощью МКНК, в том числе нерегулярных форм и с особенностями [11]. Разрабатываемый комплекс программ со временем может быть успешно применен для моделирования и оптимизации композитных пластин достаточно произвольных форм в рамках различных теорий пластин [27, 28].

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ государственной регистрации 121030500137–5).

Библиографический список

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, St. Louis: McGraw-Hill Book Comp., 1959. xiv+580 pp.
2. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2011. xxiv+832 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.

3. Chen G., Li Z., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // *Adv. Comput. Math.*, 2008. vol. 29, no. 2. pp. 113–133. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10444-007-9043-6>.
4. McLaurin G. W. A general coupled equation approach for solving the biharmonic boundary value problem // *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974. vol. 11, no. 1. pp. 14–33. DOI: <https://doi.org/10.1137/0711003>.
5. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains // *Appl. Math. Model.*, 2009. vol. 33, no. 1. pp. 284–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.11.002>.
6. Shao W., Wu X., Chen S. Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for Biharmonic-type equations on irregular domain // *Engin. Anal. Bound. Elem.*, 2012. vol. 36, no. 12. pp. 1787–1798. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.06.005>.
7. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // *Appl. Math. Model.*, 2015. vol. 39, no. 9. pp. 2554–2569. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.048>.
8. Guo H., Zhang Z., Zou Q. A C^0 linear finite element method for biharmonic problems // *J. Sci. Comput.*, 2018. vol. 74, no. 3. pp. 1397–1422. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-017-0501-0>.
9. Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложениях к задачам механики изотропных пластин // *Вычисл. технол.*, 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43. EDN: RUDTZF.
10. Belyaev V. A., Bryndin L. S., Shapeev V. P., Golushko S. K. The least squares collocation method with the integral form of collocation equations for bending analysis of isotropic and orthotropic thin plates // *AIP Conf. Proc.*, 2020. vol. 2288, 030084. EDN: FWKXNV. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0028298>.
11. Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П. h-, p- и hp-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. EDN: MSMVOK. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0044466922040020>.
12. Babuška I., Guo B. Q. The h, p and h-p version of the finite element method; basis theory and applications // *Adv. Eng. Softw.*, 1992. vol. 15, no. 3–4. pp. 159–174. DOI: [https://doi.org/10.1016/0965-9978\(92\)90097-Y](https://doi.org/10.1016/0965-9978(92)90097-Y).
13. Ramšak M., Škerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2004. vol. 46, no. 8. pp. 815–847. DOI: <https://doi.org/10.1002/flid.776>.
14. Saad Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Philadelphia: SIAM, 2011. xvi+276 pp. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611970739>.
15. Федоренко Р. П. *Введение в вычислительную физику*. М.: МФТИ, 1994. 528 с. EDN: QJUAEP.
16. Ворожцов Е. В., Шапеев В. П. Бездивергентный метод коллокаций и наименьших квадратов для расчета течений несжимаемой жидкости и его эффективная реализация // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3. С. 542–573. EDN: OSPEBL. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1758>.
17. Беляев В. А. Об эффективной реализации и возможностях метода коллокации и наименьших квадратов решения эллиптических уравнений второго порядка // *Выч. мет. программирование*, 2021. Т. 22, № 3. С. 211–229. EDN: VBQEPE. DOI: <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r313>.
18. Ortega J. M. *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*. New York: Springer, 1988. xi+305 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2112-3>.
19. Karamyshev V. B., Kovenya V. M., Sleptsov A. G., Cherny S. G. Variational method of accelerating linear iterations and its applications // *Comput. Fluids.*, 1996. vol. 25, no. 5. pp. 467–484. EDN: LDTBIH. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(96\)00011-4](https://doi.org/10.1016/0045-7930(96)00011-4).

20. Ильин В. П., Кныш Д. В. Параллельные методы декомпозиции в пространствах следов // *Выч. мет. программирование*, 2011. Т. 12, № 1. С. 110–119. EDN: **OJAYQV**.
21. Tang J. M., Nabben R., Vuik C., Erlangga Y. A. Comparison of two-level preconditioners derived from deflation, domain decomposition and multigrid methods // *J. Sci. Comput.*, 2009. vol. 39, no. 3. pp. 340–370. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-009-9272-6>.
22. Годунов С. К., Рябенский В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию*. М.: Наука, 1977. 440 с.
23. Demmel J. W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM, 1997. xi+416 pp. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611971446>.
24. Sleptsov A. G. Grid-projection solution of an elliptic problem for an irregular grid // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 1993. vol. 8, no. 6. pp. 519–543. DOI: <https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.6.519>.
25. Исаев В. И., Шапеев В. П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2010. Т. 50, № 10. С. 1758–1770. EDN: **MVSONV**.
26. Drozdov G. M., Shapeev V. P. CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation / *Computer Algebra in Scientific Computing / Lecture Notes in Computer Science*, 8660; eds. V. P. Gerdt, W. Koepf, W. M. Seiler, E. V. Vorozhtsov. Cham: Springer, 2014. pp. 99–110. EDN: **UEYEZH**. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-10515-4_8.
27. Голушко С. К., Немировский Ю. В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. М.: Физматлит, 2008. 432 с. EDN: **MUWRZD**.
28. Идимешев С. В. *Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок и его приложение в механике многослойных композитных балок и пластин*: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Новосибирск, 2016. 179 с. EDN: **VPHODY**.

MSC: 65N35

The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation

V. P. Shapeev^{1,2}, L. S. Bryndin^{1,2}, V. A. Belyaev¹

¹ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

² Novosibirsk State University, 1, Pirogova st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

A new algorithm for the numerical solution of the biharmonic equation is developed. It is based on the first implemented hp-version of the least-squares collocation method (hp-LSCM) with integral collocations for a fourth-order elliptic equation in combination with modern methods of accelerating iterative processes for solving systems of linear algebraic equations (SLAE). The hp-LSCM provides the possibilities to refine the grid (h-version) and increase the degree of polynomials to the arbitrary order (p-approach). The convergence of approximate solutions obtained by the implemented version of the method is analyzed using an example of a numerical simulation of the bending of a hinged isotropic plate. The high accuracy and the increased order of convergence using polynomials up to the tenth order in the hp-LSCM are shown.

The effectiveness of the combined application of algorithms for accelerating iterative processes to solve SLAE that are combined with LSCM is investigated. In this paper, we consider the application of the following algorithms: preconditioning of SLAE matrices; the iteration acceleration algorithm based on Krylov subspaces; the prolongation operation on a multigrid complex; parallelization using OpenMP; a modified algorithm for solving local

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Shapeev V. P., Bryndin L. S., Belyaev V. A. The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 556–572. EDN: [ETBROJ](https://doi.org/10.14498/vsgtu1936). DOI: [10.14498/vsgtu1936](https://doi.org/10.14498/vsgtu1936) (In Russian).

Authors' Details:

Vasily P. Shapeev  <https://orcid.org/0000-0001-6761-7273>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Chief Researcher; Lab. of Thermomechanics and Strength of New Materials¹; Professor; Dept. of Mathematical Modeling²; e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Luka S. Bryndin  <https://orcid.org/0000-0002-0211-5800>

Junior Research Scientist; Lab. of Thermomechanics and Strength of New Materials¹; Postgraduate Student; Dept. of Mathematical Modeling²; e-mail: l.bryndin@ng.nsu.ru

Vasily A. Belyaev  <https://orcid.org/0000-0001-5901-2880>

Junior Research Scientist; Lab. of Thermomechanics and Strength of New Materials¹; e-mail: belyaevasily@mail.ru

SLAEs. The latter is implemented with iterations over subdomains (which are cells) and makes it possible to more effectively solve overdetermined SLAEs in the LSCM in the case of solving a linear differential equation. The form of the matrices does not change at each iteration. Only the elements of the vectors of their right parts corresponding to the matching conditions are modified. The calculation time on a personal computer is reduced by more than 350 times with the combined use of all acceleration techniques compared to the case when only preconditioning was used.

Keywords: least-squares collocation method, integral collocation equation, biharmonic equation, plate bending, acceleration of iterative processes, preconditioning, Krylov subspaces, multigrid algorithms, parallelization.

Received: 21st June, 2022 / Revised: 9th September, 2022 /

Accepted: 13th September, 2022 / First online: 29th September, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 121030500137-5).

References

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, St. Louis, McGraw-Hill Book Comp., 1959, xiv+580 pp.
2. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2011, xxiv+832 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
3. Chen G., Li Z., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow, *Adv. Comput. Math.*, 2008, vol. 29, no. 2, pp. 113–133. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10444-007-9043-6>.
4. McLaurin G. W. A general coupled equation approach for solving the biharmonic boundary value problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1974, vol. 11, no. 1, pp. 14–33. DOI: <https://doi.org/10.1137/0711003>.
5. Mai-Duy N., See H., Tran-Cong T. A spectral collocation technique based on integrated Chebyshev polynomials for biharmonic problems in irregular domains, *Appl. Math. Model.*, 2009, vol. 33, no. 1, pp. 284–299. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.11.002>.
6. Shao W., Wu X., Chen S. Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for Biharmonic-type equations on irregular domain, *Engin. Anal. Bound. Elem.*, 2012, vol. 36, no. 12, pp. 1787–1798. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.06.005>.
7. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations, *Appl. Math. Model.*, 2015, vol. 39, no. 9, pp. 2554–2569. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.048>.
8. Guo H., Zhang Z., Zou Q. A C^0 linear finite element method for biharmonic problems, *J. Sci. Comput.*, 2018, vol. 74, no. 3, pp. 1397–1422. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-017-0501-0>.

9. Golushko S. K., Idimeshev S. V., Shapeev V. P. Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory, *Vychisl. Tekhnol.*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 31–43 (In Russian). EDN: **RUDTZF**.
10. Belyaev V. A., Bryndin L. S., Shapeev V. P., Golushko S. K. The least squares collocation method with the integral form of collocation equations for bending analysis of isotropic and orthotropic thin plates, *AIP Conf. Proc.*, 2020, vol. 2288, 030084. EDN: **FWKXNV**. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0028298>.
11. Belyaev V. A., Bryndin L. S., Golushko S. K., Semisalov B. V., Shapeev V. P. h-, p-, and hp-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, vol. 62, no. 4, pp. 517–537. EDN: **VXTBZN**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542522040029>.
12. Babuška I., Guo B. Q. The h, p and h-p version of the finite element method; basis theory and applications, *Adv. Eng. Softw.*, 1992, vol. 15, no. 3–4, pp. 159–174. DOI: [https://doi.org/10.1016/0965-9978\(92\)90097-Y](https://doi.org/10.1016/0965-9978(92)90097-Y).
13. Ramšak M., Škerget L. A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2004, vol. 46, no. 8, pp. 815–847. DOI: <https://doi.org/10.1002/flid.776>.
14. Saad Y. *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*. Philadelphia, SIAM, 2011, xvi+276 pp. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611970739>.
15. Fedorenko R. P. *Vvedenie v vychislitel'nuu fiziku* [Introduction to Computational Physics]. Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology, 1994, 528 pp. (In Russian). EDN: **QJUAEP**.
16. Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. A divergence-free method of collocations and least squares for the computation of incompressible fluid flows and its efficient implementation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 542–573 (In Russian). EDN: **OSPEBL**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1758>.
17. Belyaev V. A. On the effective implementation and capabilities of the least-squares collocation method for solving second-order elliptic equations, *Vychisl. Meth. Prog.* [Num. Meth. Prog.], 2021, vol. 22, no. 3, pp. 211–229 (In Russian). EDN: **VBQEPE**. DOI: <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r313>.
18. Ortega J. M. *Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems*. New York, Springer, 1988, xi+305 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2112-3>.
19. Karamyshev V. B., Kovenya V. M., Sleptsov A. G., Cherny S. G. Variational method of accelerating linear iterations and its applications, *Comput. Fluids.*, 1996, vol. 25, no. 5, pp. 467–484. EDN: **LDTBIH**. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(96\)00011-4](https://doi.org/10.1016/0045-7930(96)00011-4).
20. Il'in V. P., Knysch D. V. Parallel decomposition methods in the trace spaces, *Vychisl. Meth. Prog.* [Num. Meth. Prog.], 2011, vol. 12, no. 1, pp. 110–119 (In Russian). EDN: **OJAYQV**.
21. Tang J. M., Nabben R., Vuik C., Erlangga Y. A. Comparison of two-level preconditioners derived from deflation, domain decomposition and multigrid methods, *J. Sci. Comput.*, 2009, vol. 39, no. 3, pp. 340–370. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10915-009-9272-6>.
22. Godunov S. K., Ryabenkii V. S. *Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 19. Amsterdam, North-Holland, 1987, xvii+489 pp.
23. Demmel J. W. *Applied Numerical Linear Algebra*. Philadelphia, SIAM, 1997, xi+416 pp. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611971446>.
24. Sleptsov A. G. Grid-projection solution of an elliptic problem for an irregular grid, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 1993, vol. 8, no. 6, pp. 519–543. DOI: <https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.6.519>.
25. Isaev V. I., Shapeev V. P. High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 10, pp. 1670–1681. EDN: **OHNDJS**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510100040>.

26. Drozdov G. M., Shapeev V. P. CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation, In: *Computer Algebra in Scientific Computing*, Lecture Notes in Computer Science, 8660; eds. V. P. Gerdt, W. Koepf, W. M. Seiler, E. V. Vorozhtsov. Cham, Springer, 2014, pp. 99–110. EDN: UYEYZH. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-10515-4_8.
27. Golushko S. K., Nemirovskii Yu. V. *Priamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniia* [Direct and Inverse Problems in the Mechanics of Composite Plates and Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2008, 432 pp. (In Russian). EDN: MUWRZD
28. Idimeshev S. V. *Modified method of collocations and least residuals and its application in the mechanics of multilayer composite beams and plates*, Thesis of Dissertation (Cand. Phys. & Math. Sci.). Novosibirsk, 2016, 179 pp. (In Russian). EDN: VPHODY.



УДК 519.115

Вероятностные модели для анализа обратных экстремальных задач комбинаторики

Н. Ю. Энатская

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова,
Россия, 123458, Москва, ул. Таллинская, 34.

Аннотация

В обратной экстремальной задаче для комбинаторной схемы при заданном значении целевой функции вида определенного экстремального значения ее характеристики строится вероятностная модель, обеспечивающая получения этого значения в ее исходах. Рассматривается два типа таких характеристик, относящихся к каждому или совокупности исходов схемы.

Доасимптотический анализ такой модели проводится авторским перечислительным методом. Его основу составляет построение итерационного случайного процесса с итерациями последовательных этапов нумерованного неповторного перечисления и формирования исходов схемы. Итерационное развитие процесса представляется вероятностным графом.

Исследование исходов схемы по модели в перечислительном методе проводится по следующим направлениям: визуального нумерованного представления исходов схемы, нахождения их числа, установления взаимно-однозначного соответствия между видами и номерами исходов схемы, получения их (управляемого случайным процессом перечисления исходов схемы) вероятностного распределения и их моделирования с этим распределением.

Наряду с непосредственным исследованием схем по указанным направлениям предлагаются алгоритмы получения результатов для них путем их частичного пересчета из результатов аналогичного анализа более общих, ранее изученных схем с меньшими ограничениями на значения рассматриваемых характеристик.

Ключевые слова: обратная экстремальная задача, экстремальное значение характеристики, доасимптотический анализ схемы.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Энатская Н. Ю. Вероятностные модели для анализа обратных экстремальных задач комбинаторики // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 573–591. EDN: AWBYGO. DOI: 10.14498/vsgtu1947.

Сведения об авторе

Наталья Юрьевна Энатская  <https://orcid.org/0000-0003-1241-7543>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; деп. прикладной математики;
e-mail: nat1943@mail.ru

Получение: 12 августа 2022 г. / Исправление: 25 августа 2022 г. /
 Принятие: 31 августа 2022 г. / Публикация онлайн: 20 сентября 2022 г.

1. Введение. В литературе известны экстремальные задачи комбинаторики, состоящие в отыскании среди конечного множества альтернатив одной, отвечающей заданному значению целевой функции¹ (см., например, [1, 2]). В работах [3–5] проводился асимптотический анализ вероятностного поведения максимальных уровней заполнения ячеек в схемах равновероятного размещения различных частиц по различным ячейкам с разными условиями.

Здесь (при конечных значениях параметров) изучается процедура построения модели случайного процесса перечисления исходов комбинаторных схем, приводящих к заранее заданным экстремальным (минимальным или максимальным) значениям их определенных характеристик. Такие задачи можно рассматривать как обратные экстремальные задачи комбинаторики с заданными значениями этих характеристик, являющихся целевыми функциями.

2. Постановка задачи. В доасимптотических условиях значений параметров комбинаторной схемы при заданном экстремальном значении его определенной характеристики нужно построить вероятностную модель бесповторного нумерованного перечисления ее исходов и провести их анализ по всем направлениям ПМ.

Основные определения, обозначения и понятия:

E — изучаемая схема с заданным экстремальным значением ее характеристики;

S — начальная схема для схемы E , соответствующая более общей схеме (схеме S при пересчете из нее результатов для схемы E считаем изученной);
итерация — шаг перехода в графе перечисления исходов схемы к следующему этапу (шагу) их перечисления;

ПП — процедура прямого перечисления всех исходов схемы с учетом ее специфики;

ПМ — перечислительный метод исследования моделей по приведенным в аннотации направлениям; он состоит в построении вероятностных моделей на формирующих исходы итерационных случайных процессах единичного добавления этапов перечисления исходов ранее изученных схем с управляемыми (через вероятности итерационных переходов) вероятностными распределениями их исходов;

ЗН — задача нумерации по установлению взаимно-однозначного соответствия между всеми номерами и видами исходов схемы;

ПЗН — прямая задача нумерации, состоящая в нахождении вида исхода схемы по его номеру;

ОЗН — обратная задача нумерации, состоящая в нахождении номера исхода схемы по его виду;

траектория исхода τ — последовательность исходов итераций, ведущая к нему в графе от начала их перечисления;

¹Классический пример — известная задача коммивояжера: нахождения кратчайшего кольцевого маршрута возвращения в начальный город с посещением заданных городов по разу.

пучок в графе процесса — совокупность переходов из каждого исхода каждой итерации;

размер пучка на каждой итерации — число переходов из каждого исхода итерации;

пучковая структура графа — перечисление размеров пучков всех итераций;
УМ — универсальный (единый) метод моделирования исходов схемы, состоящий в разыгрывании одним случайным числом его номера с сформированным вероятностным распределением исходов схемы и получении его смоделированного вида по результату решения ПЗН.

3. Вспомогательные результаты. Приведем краткие достаточные для дальнейшего чтения сведения основных используемых далее опубликованных результатов.

3.1. Перечислительный метод (ПМ). ПМ разработан для проведения доасимптотического анализа комбинаторных схем, т.е. при конечных значениях их параметров [6]. Его суть состоит в организации получения качественной информации об исходах схемы и переводе ее в количественную — результатов ее анализа. Эта качественная информация представляет собой исходы итерационного случайного процесса реализации комбинаторной схемы в результате последовательного поединичного (итерационного) добавления элементов схемы до заданного параметром значения или этапов перечисления составляющих схему более простых ранее изученных схем. Инструментами такого перевода качественной информации о видах всех исходов схемы являются метод графов (МГ), задача нумерации (ЗН), задание итерационных переходных вероятностей (управляющих распределением итоговых исходов схемы) и универсальное моделирование (УМ) исходов с этим их вероятностным распределением. Одним из важных приемов ПМ для получения новых результатов доасимптотического анализа комбинаторных схем является операция по перечислению (ОПП). Ее введение дает возможность вычисления характеристик схем, зависящих от видов предсостояний исходов при их формировании итерационным случайным процессом как функций от них. Целью применения ПМ является изучение схем E по указанным направлениям.

3.2. Обобщенная схема последовательных действий (ОПД) Под действиями схемы понимаются реализации исходов итераций при последовательном добавлении этапов перечисления всех промежуточных и итоговых исходов схемы.

Схема ОПД с приводимыми здесь результатами анализа из [7] возникает, когда каждому следующему действию (итерации) подвергаются исходы предыдущего действия и числа исходов каждого следующем действии могут быть неодинаковыми, т.е. зависят не только от характера действия, но и от вида предыдущего исхода. Результатом этого являются возможно разные размеры пучков внутри итераций в графе перечисления исходов схемы при переходе от исходов предыдущего действия к последующему.

При анализе схемы ОПД считаем известными результаты всех направлений исследования ПМ составляющих ее комбинаторных схем действий.

В схеме проводится k последовательных действий, i -тое из которых совершается $N^{(i)}$ способами, $i = \overline{1, k}$. Число пучков каждой итерации равно числу исходов предыдущей итерации. Тогда число исходов этих k действий складывается из $N^{(k-1)}$ пучков размерами $\vec{d}^{(i)} = (d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \dots, d_{N^{(k-1)}}^{(i)})$, т.е. общее

число $N = N^{(k)}$ исходов схемы получается из рекуррентного соотношения при $i = k$ и $N = N^{(0)} = 1$

$$N^{(i)} = \sum_{l=1}^{N^{(i-1)}} d_l^{(i)}.$$

Вид исхода после совершения i действий будет формироваться из принятых видов исходов последовательных действий с обозначениями: i — номер действия, а j_i — номер исхода в результате его совершения.

Задача нумерации решается для нашей схемы при решенной ЗН для каждого из k действий при известной пучковой структуре графа перечисления исходов нашей схемы.

Прямая и обратная задачи нумерации решены следующими теоремами

ТЕОРЕМА 1. *Совершается k действий и задан номер исхода $N_*^{(k)}$. Тогда его вид, определяемый номерами исходов траектории τ в содержащих их пучках $\{j_i\}$ от первой до k -той итераций, вычисляется по рекуррентной формуле для j_i :*

$$j_i = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)} - 1} d_l^{(i)}, \quad i = \overline{1, k},$$

где все пучковые структуры действий $\bar{d}^{(i)}$ заданы и

$$N_*^{(k-1)} = \delta + \max t : \left(\sum_{l=1}^t d_l^{(k)} = A_k \leq N_*^{(k)} \right),$$

где $\delta = 0$ при $A_k = N_*^{(k)}$ и $\delta = 1$ при $A_k < N_*^{(k)}$.

По решенной ЗН для всех действий находим по $\{j_i\}$ виды их исходов, из которых получаем искомый вид исхода $R_*^{(k)}$.

ТЕОРЕМА 2. *Совершается k действий и задан вид исхода $R_*^{(k)} = \{j_1, \dots, j_k\}$. Тогда его номер $N_*^{(k)}$ определяется по рекуррентной формуле при $i = k$, $i = \overline{1, k}$,*

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)} - 1} d_l^{(i)} + j_i,$$

начиная с $i = 1$ при $N_*^{(1)} = j_1$.

4. Два типа характеристик в схемах E . Будем различать два типа характеристик T — типа A и типа B :

- 1) характеристика типа A для исхода схемы — определяемая и сравниваемая внутри исхода схемы и принимающая в нем ≥ 1 значений;
- 2) характеристика типа B для совокупности исходов схемы — однозначно определяемая каждым исходом схемы и используемая для ее сравнения в совокупности исходов.

Процедура прямого перечисления всех исходов схемы в этих случаях проводится по-разному.

В первом случае перечисляются все исходы, каждый из которых включает в себя часть, фиксирующую заданное экстремальное значение характеристики с добавлением всех вариантов остальной его части. Тогда все перечисляемые таким образом исходы схемы будут иметь заданное экстремальное значение характеристики.

Во втором случае перечисляются все исходы схемы со значениями характеристики T до ее заданного экстремального значения t включительно, т.е. при задании ее максимального значения t — все исходы со значениями $T \leq t$, а при задании ее минимального значения t — все исходы со значениями $T \geq t$. Тогда данная характеристика совокупности всех перечисленных исходов схемы будет иметь заданное экстремальное значение.

5. Примеры процедур перечисления исходов схем и определения их численностей в схемах E . Приведем примеры описания конкретных схем E с разными указанными типами экстремальных характеристик их исходов.

Схемы типа A с фиксацией экстремального значения характеристики исходов первого типа — типа A :

- A.1. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) длиной серии поединично растущих (убывающих) элементов.
- A.2. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) длиной серии растущих (убывающих) элементов.
- A.3. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) разностью между ее соседними элементами.
- A.4. Схема подстановок с фиксированным максимальным (минимальным) размером цикла.²
- A.5. Схемы размещения частиц по ячейкам с фиксированным значением максимального (минимального) уровня заполнения ячеек.

Схемы типа B с фиксацией экстремального значения характеристики исходов второго типа — типа B :

- B.1. Схема перестановок с фиксированным максимальным (минимальным) числом инверсий.³
- B.2. Схема подстановок с фиксированным максимальным (минимальным) числом циклов.
- B.3. Схема перестановок с фиксированным максимальным (минимальным) элементом на фиксированном месте.
- B.4. Схема перестановок с фиксированной максимальной (минимальной) длиной серии поединично растущих (убывающих) элементов начиная с данного.
- B.5. Схема перестановок с фиксированной максимальной длиной серии без инверсий начиная с данного элемента.
- B.6. Схема сочетаний с фиксированным максимальным (минимальным) размахом.⁴

²Цикл подстановки — перестановка подмножества элементов подстановки в порядке их последовательных отображений с замыканием, т.е. последний элемент перестановки отображается в первый. Размер цикла — число входящих в него элементов.

³Число инверсий элемента перестановки равно числу больших ее элементов, стоящих правее, а число инверсий перестановки есть сумма инверсий всех ее элементов.

B.7. Схема сочетаний с фиксированным максимальным (минимальным) элементом.

B.8. Схема сочетаний с фиксированным максимальным (минимальным) числом элементов из данного диапазона значений элементов исхода схемы.

Подобных примеров схем E можно привести много, а анализ каждого требует отдельного рассмотрения, начальным этапом которого является построение процедуры прямого перебора исходов с учетом природы каждой схемы. Здесь для примера приведем идеи прямого перечисления исходов комбинаторных схем E в некоторых наиболее простых случаях (в основном в схемах типа B). Все другие схемы E , требующие более сложных ПП исходов схем с более глубоким погружением в их специфику, оставим для отдельных исследований.

Примеры получения формул для чисел N исходов схем из их ПП (с указанием типа схемы в скобках). Для получения аналитических результатов исследования схемы E требуется построение процедуры бесповторного ПП ее исходов методом графов. Она отражает закономерности связей между номерами и видами исходов, выявление которых составляет результаты решения ЗН, необходимые для дальнейшего исследования схемы E по определенным здесь направлениям. Поэтому бесповторное ПП исходов схемы дает основу для проведения аналитического изучения схемы и является первой целью рассмотрения схем E . Однако это потребует отдельного анализа каждой конкретной схемы E с учетом ее специфики.

Все N исходов схем типа A представляют совокупность исходов с достижением характеристикой заданного экстремального значения t в каждом исходе.

Все N исходов схем типа B состоят из двух совокупностей — первая из исходов с достижением характеристикой заданного экстремального значения t и вторая — на не противоречащих этому экстремальному значению t без его достижения.

Введем обозначения для параметров схем в следующих ниже примерах, называя нумерованные элементы их номерами:

- в схеме сочетаний производится выбор из n различных элементов по r без возвращения и без учета их порядка, тогда число исходов схемы равно C_n^r ;
- в схеме перестановок производится выбор из n различных элементов по n без возвращения и с учетом их порядка, тогда число исходов схемы равно $n!$.⁵

ПРИМЕР 1 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n , r и с фиксированным минимальным элементом $T = t \leq (n - r + 1)$.

ПП: Для перечисления первой совокупности исходов включаем в выборку элемент t с добавлением выборок по схеме сочетаний остальных $(r - 1)$ элементов из $(n - t)$ элементов от $(t + 1)$ до n числом способов C_{n-t}^{r-1} , а для второй совокупности исходов набираем всю выборку из элементов $> t$ числом способов C_{n-t}^r , откуда $N = C_{n-t}^{r-1} + C_{n-t}^r$.

⁴Размах в исходе схемы сочетаний — разность между его максимальным и минимальным элементами.

⁵Перечисления исходов схем сочетаний, перестановок и ОПД см. в [7].

ПРИМЕР 2 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n , r и с фиксированным максимальным элементом $T = t \geq r$.

ПП: Для перечисления первой совокупности включаем в выборку элемент t с добавлением выборок по схеме сочетаний остальных $(r - 1)$ элементов из $(t - 1)$ элемента от 1 до $(t - 1)$ числом способов C_{t-1}^{r-1} , а для второй совокупности исходов набираем всю выборку из элементов $< t$ числом способов C_{t-1}^r , откуда $N = C_{t-1}^{r-1} + C_{t-1}^r$.

ПРИМЕР 3 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n , r и с фиксированным минимальным числом $T = t$ элементов от 1 до s , где $\max(0, s - n + r) \leq t \leq \min(s, r) = k$.

ПП: Включаем в совокупность исходов схемы все выборки по схеме сочетаний из элементов от 1 до s по t , а остальные $(r - t)$ элементов — по схеме сочетаний из элементов от $(s + 1)$ до n числом способов $C_s^t C_{n-s}^{r-t}$. Далее, варьируя значение i (число вошедших в выборку элементов от 1 до s) от t до k , получаем перечисление всей искомой совокупности с общим числом исходов $N = \sum_{i=t}^k C_s^i C_{n-s}^{r-i}$.

ПРИМЕР 4 (Тип B). Схема сочетаний с параметрами n , r и с фиксированным максимальным числом $T = t$ элементов от 1 до s , где $k = \max(0, s - n + r) \leq t \leq \min(s, r)$.

ПП: Включаем в совокупность исходов схемы все выборки по схеме сочетаний из элементов от 1 до s по t , а остальные $(r - t)$ элементов — по схеме сочетаний из элементов от $(s + 1)$ до n числом способов $N_t = C_s^t C_{n-s}^{r-t}$. Далее, варьируя значение i (число вошедших в выборку элементов от 1 до s) от k до t , получаем перечисление всей искомой совокупности с общим числом исходов $N = \sum_{i=k}^t C_s^i C_{n-s}^{r-i}$.

ПРИМЕР 5 (Тип A). Размещение r неразличимых частиц по n различным ячейкам с фиксированным минимальным уровнем $T = t$, $r \geq tn$ заполнения ячеек.

ПП: По схеме сочетаний C_n^i способами выбираем i ячеек из n . По этим i ячейкам размещаем $(r - nt)$ частиц без пустых ячеек по схеме сочетаний с повторением числом способов C_{r-nt-1}^{i-1} с последующим добавлением остальных nt частиц по t частиц в каждую из n ячеек при возможных значениях i в диапазоне $k = \max(0, n - r + nt) \leq i \leq \min(n - 1, r - nt) = K$. Варьируя все эти значения i из $[k, K]$ и суммируя соответствующие им числа исходов, получаем число исходов схемы $N = \sum_{i=k}^K C_n^i C_{r-nt-1}^{i-1}$ с достижением значения $T = t$ в каждом исходе.

ПРИМЕР 6 (Тип B). Схема перестановок элементов с номерами от 1 до n с фиксированной минимальной длиной $T = t$ серии, начиная с 1, подряд идущих элементов.

ПП: Переставляем данную серию длиной t элементов как один номер с остальными $(n - t)$ элементами по схеме перестановок числом способов $N = (n - t + 1)!$ и перечисляем их по схеме перестановок [4]. Тогда все перечисленные исходы схемы будут содержать серию заданного вида или длины $> t$, если сразу после нее стоит элемент $(t + 1)$, или содержать серию длины, равной t , в противном случае, т.е. минимальная длина серии в перечисленных исходах схемы будет равна t .

ПРИМЕР 7 (Тип B). Схема перестановок элементов с номерами от 1 до n с фиксированной максимальной длиной $T = t$ серии, начиная с 1, подряд идущих номеров.

ПП: В совокупности исходов нашей схемы длины i серий данного вида $\leq t$. Переставляем данную серию из i элементов как один элемент с остальными $(n-i-1)$ элементами без элемента $(i+1)$ по схеме перестановок числом способов $(n-i)!$ и перечисляем их по схеме перестановок. Далее вставляем элемент $(i+1)$ в перестановке до, между и после всех элементов полученных перестановок, кроме места сразу после последнего элемента серии. Число таких мест для него есть $(n-i)$, откуда получаем число исходов $(n-i)!(n-i)$. Теперь, варьируя длину i серии от 1 до заданного t и объединяя все такие исходы, получаем все исходы нашей схемы численностью $N = \sum_{i=1}^t (n-i)!(n-i)$. Тогда максимальная длина серии полученной совокупности исходов окажется равной t .

6. Решение ЗН в схемах E . Решение ЗН в схемах E проводится как непосредственным выявлением закономерностей связи при неповторном ПП между видами и номерами ее исходов для каждой конкретной схемы отдельно с учетом ее специфики, так и пересчетом ранее полученных для нее результатов решения ЗН для начальной схемы S . Представим эти два подхода к решению ЗН на конкретных примерах.

6.1. Первый подход к решению ЗН. Рассмотрим по одному примеру решения ЗН для схем E с заданными экстремальными значениями характеристик двух введенных типов через результаты решения ЗН составляющих их схем.

ПРИМЕР 8 (Тип A). Дана схема подстановок размера $n = 5$, максимальный размер цикла $T = 2$. Провести прямое перечисление исходов схемы и решить ЗН.

Построим процедуру перечисления исходов схемы типа A . Это значит, что исходы схемы будут включать в себя все подстановки с размерами циклов ≤ 2 с достижением размера 2 в каждом исходе.

Исходы схемы различаются наборами допустимых размеров циклов, их составами и порядками отображений в них.

Процедура прямого перечисления всех исходов схемы проводится тремя итерациями (этапами):

- 1) набором составов допустимых размеров циклов;
- 2) перечислением составов элементов в этих циклах;
- 3) перебором порядков отображений в циклах.

Очевидно, что здесь возможны два варианта наборов первой итерации размеров циклов $(2, 2, 1)$ и $(2, 1, 1, 1)$, в каждом из которых порядок перечисления составов циклов совпадающих размеров циклов несущественен, а при $T = 2$ порядок отображений на 3-й итерации у них единственный.⁶ Поэтому процедура неповторного ПП исходов схемы при каждом наборе их размеров сводится к делению всеми способами всех 5-ти элементов между циклами по этим наборам в заранее определенном порядке. Будем их перечислять, например, в порядке убывания их размеров, а среди циклов совпадающих размеров

⁶Число перестановок в порядке отображений из m элементов есть $(m-1)!$ с фиксированным начальным элементом, при $m = 2$ имеем $(m-1)! = 1! = 1$.

(для бесповторности перечисления составов циклов) — в порядке роста минимальных элементов в них начиная с минимального в каждом составе цикла. Поэтому состав каждого цикла должен начинаться с минимального элемента подстановки из не вошедших в предыдущие циклы. Представим графом на рис. 1 процесс формирования и перечисления исходов схемы начиная с первой итерации при начальных исходах схемы совокупностей составов исходов циклов (по схемам сочетаний) с их размерами $(2, 2, 1)$ и $(2, 1, 1, 1)$ с подряд идущей общей нумерацией. Численности исходов схемы с каждым составом размеров циклов вычисляются по схеме перестановки с повторением (представляемой через схемы сочетаний [7]) без учета порядка совпадающих по размеру циклов. Они вычисляются делением числа исходов каждой схемы перестановок с повторением [7] на произведение факториалов чисел повторений размеров циклов. Это и будет учитывать неразличимость их порядков. Тогда получаем соответственно числа исходов из данных начальных составов размеров циклов $N_1 = 5!/(2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2!) = 15$, $N_2 = 5!/(2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!) = 10$ с общим числом исходов $N = N_1 + N_2 = 25$. Здесь $N_1 = 15$ и $N_2 = 10$ — размеры пучков предытоговой итерации, объединяющих наборы всех циклов в один этап перечисления исходов по каждому набору их размеров.

Считая решенной ЗН для этапов, составляющих нашу схему, и имея полный перечень всех исходов схемы и их пучковую структуру, будем решать ЗН, сверяя результаты с рис. 1.

Прямая ЗН. Номер исхода схемы $N_E^* = 18$. Требуется найти его вид R_E^* . По рис. 1 $R_E^* = (1, 4)(2)(3)(5)$. Найдем его из условий схемы ОПД по теореме 1:

- 1) на первой итерации найдем номер k_1 пучка, содержащего искомым исход схемы $k_1 = 2$, т.к. $15 < 18$;
- 2) найдем номер k_2 искомого исхода во втором пучке $k_2 = 18 - 15 = 3$;
- 3) из результата решения прямой ЗН для второго этапа перечисления исходов схемы с составом размеров циклов $(2, 1, 1, 1)$ по номеру исхода $k_2 = 3$ находим $R^{(2)} = R_E^* = (1, 4)(2)(3)(5)$ (в соответствии с принятым порядком нумерации исходов при их перечислении), что совпадает с результатом по рис. 1.

Обратная ЗН. Вид исхода схемы $R_E^* = (1, 4)(2)(3)(5)$. Требуется найти его номер N_E^* . По рис. 1 $N_E^* = 18$. Найдем его из условий схемы ОПД по теореме 2:

- 1) на первой итерации по составу размеров циклов найдем номер k_1 пучка, содержащего искомым исход схемы, по размерам его пучков — у нас $k_1 = 2$;
- 2) по обратной ЗН во втором пучке для второй составляющей схемы с составом размеров циклов $(2, 1, 1, 1)$ находим k_2 его номер в пучке $k_2 = 3$;
- 3) искомым номер N_E^* по теореме 2 находим как сумму размеров предшествующего пучка и k_2 , т.е. $N_E^* = 15 + 3 = 18$, что совпадает с результатом по рис. 1.

ПРИМЕР 9 (Тип В). Дана схема сочетаний из $n = 9$ по $r = 3$ с максимальным размахом $V = 4$. Исходы схемы сочетаний перечисляются в возрастаю-

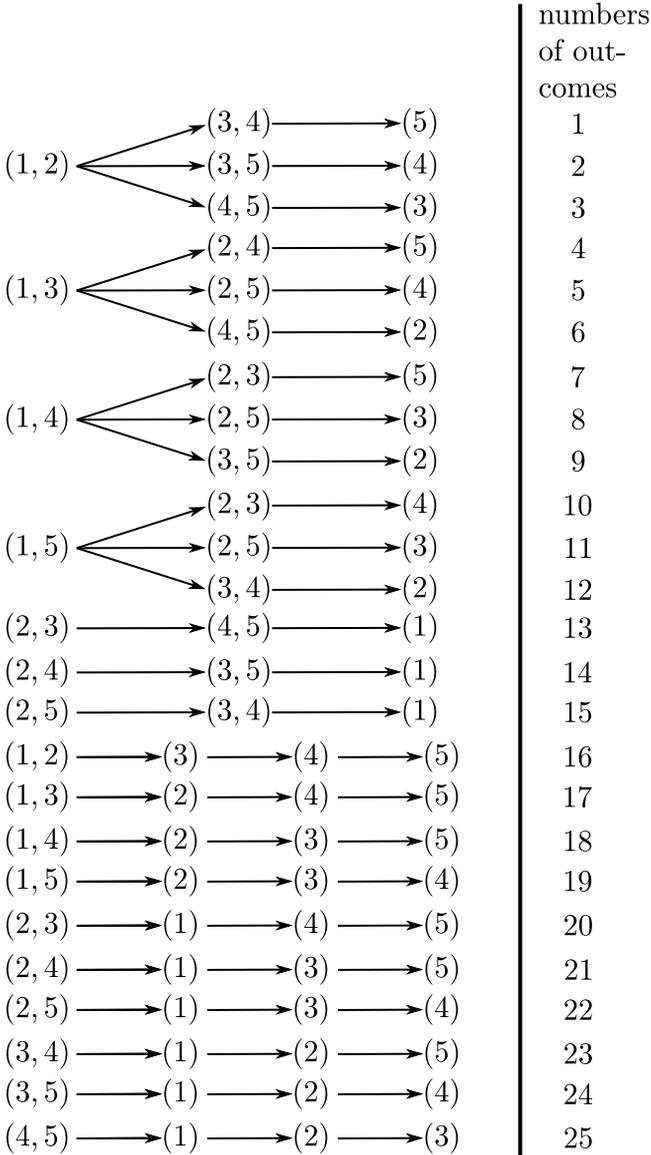


Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы примера 8
 [Figure 1. Outcomes enumeration graph for the scheme in Example 8]

щем порядке номеров ее элементов.⁷ Провести прямое перечисление исходов схемы и решить ЗН.

Построим процедуру перечисления исходов схемы типа *B*. Это значит, что исходы схемы будут включать все исходы схемы сочетаний с размахами выборок ≤ 4 .⁸

ПП исходов схемы проводится 2-мя итерациями:

⁷Размах исхода схемы сочетаний равен разности номеров последнего и первого элементов.

⁸Номера элементов называем их значениями.

- первая перечисляет допустимые поединично растущие значения первых элементов и для каждого из них — поединично растущие допустимые значения третьих элементов;
- вторая производит варьирование возможных значений вторых элементов в диапазоне: больше первого и меньше третьего их значений.

Получаем следующие размеры пучков первой итерации: $N_1 = 6$, $N_2 = 6$, $N_3 = 6$, $N_4 = 6$, $N_5 = 6$, $N_6 = 3$, $N_7 = 1$, составляющих исходы итоговой итерации — всего 34 исхода.

Представим это графом на рис. 2 в качестве исходов схемы 7-ми пучков начальной итерации в указанном выше порядке подряд с общей нумерацией.

Теперь по результатам ЗН для ОПД (п. 3.2) и имея полный перечень всех исходов схемы и их пучковую структуру, будем решать ЗН, сверяя результаты с рис. 2.

ПЗН. Номер исхода схемы $N_E^* = 14$. Требуется найти его вид R_E^* . По рис. 2 $R_E^* = (3, 4, 6)$. Определим его из условий схемы ОПД по теореме 1:

- 1) найдем номер k_1 пучка искомого исхода схемы $k_1 = 3$, т.к. $6 + 6 = 12 < 14 < 6 + 6 + 6 = 18$;
- 2) его номер k_2 в пучке найдем из $k_2 = 14 - (6 + 6) = 2$, вычитая из $N_E^* = 14$ суммарный размер двух предшествующих пучков итерации;
- 3) по результату решения ПЗН в схеме третьего пучка находим его вид второго исхода, являющийся итоговым для изучаемой схемы $R_E^* = (3, 4, 6)$, что совпадает с результатом по рис. 2.

ОЗН. Вид исхода схемы $R_E^* = (3, 4, 6)$. Требуется найти его номер N_E^* . По рис. 2 $N_E^* = 14$. Найдем его из условий схемы по теореме 2:

- 1) по первому элементу вида $R_E^* = (3, 4, 6)$ находим номер $k_1 = 3$ пучка искомого исхода схемы;
- 2) его номер $k_2 = 2$ в пучке находим из результата обратной ЗН в схеме третьего пучка;
- 3) вычисляем искомый номер $N_E^* = (6+6)+2 = 14$, суммируя номер $k_2 = 2$ исхода в пучке с суммарным размером предшествующих пучков этой итерации, что совпадает с результатом по рис. 2.

6.2. Второй подход к решению ЗН. Исходы схемы E могут стоять на любых местах в перечислении исходов схемы S .

Прямая ЗН. Дан N_E^* , требуется найти R_E^* .

АЛГОРИТМ 1.

1. Проверяем исходы схемы S на выполнение в них условия схемы E и считаем число A таких проверок, просматривая их с начала подряд до N_E^* -го выполнения включительно.
2. По результату ПЗН в схеме S находим в ней вид исхода R_S^* с номером $N_S^* = A$, совпадающий с искомым видом R_E^* в схеме S после его записи в форме исходов в схеме E .

ОБРАТНАЯ ЗН. Дан R_E^* , требуется найти N_E^* .

АЛГОРИТМ 2.

1. Записываем все исходы схемы S в форме исходов схемы E .
2. При просмотре исходов схемы S подряд с начала их перечисления сравниваем их с данным видом исхода R_E^* , считая число A таких сравнений до совпадения $R_S^* = R_E^*$ (включительно).

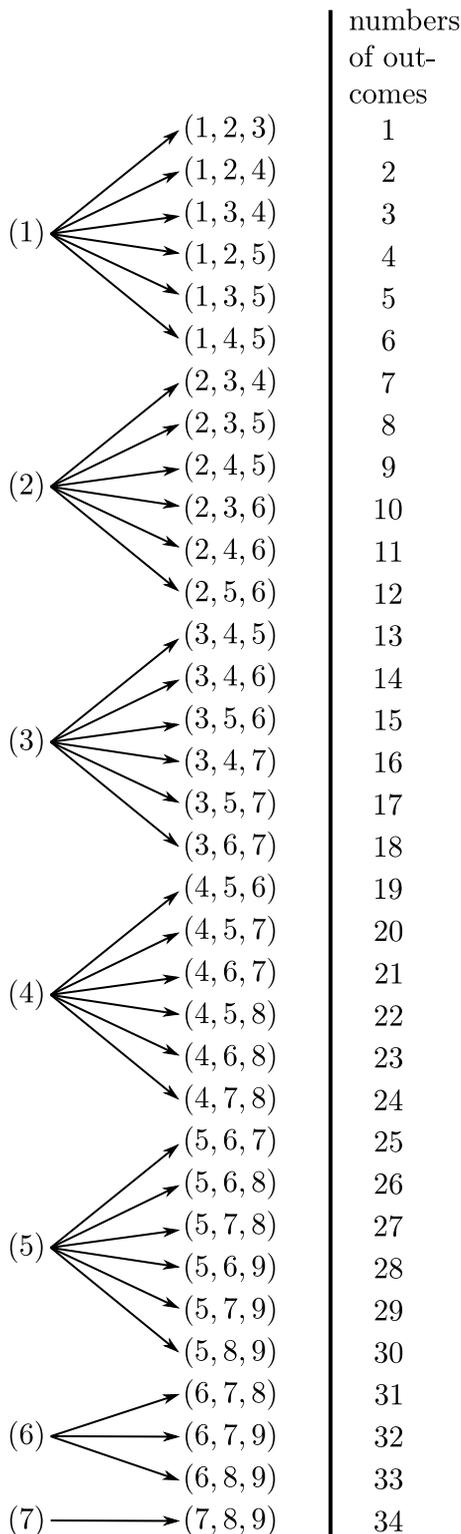


Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы примера 9

[Figure 2. Outcomes enumeration graph for the scheme in Example 9]

3. Первые A исходов схемы S проверяем на выполнение в них условия схемы E и считаем число таких выполнений совпадающим с искомым номером N_E^* .

7. Вероятностное распределение исходов схем E . Вероятностное распределение исходов схемы E пересчитывается из вероятностного распределением схемы S по вероятностям траекторий графа перечисления исходов схемы S , ведущих к исходам схемы E после удаления из начального графа лишних для E траекторий и пропорционального пересчета по пучкам каждой итерации вероятностей итерационных переходов. Эта процедура описана в перечислительном методе в [6, 7].

8. Моделирование исходов схем E . При решенной ЗН для схем E с учетом специфики каждой при определенном распределении вероятностей всех исходов схемы, по которому и результатам ПЗН может быть проведено универсальное моделирование (УМ) исходов схемы. Оно состоит в том, что для моделирования каждого исхода его номер (в перечислении) разыгрывается случайным числом с заданным вероятностным распределением, а по нему из результата решения ПЗН определяется его смоделированный вид. Эта процедура описана в перечислительном методе в [6, 7].

9. Примеры областей применения схем E с примером анализа по ПМ. Примеры областей применения схем E :

- 1) в математических исследованиях, например, а) деления целого числа на определенное количество целых слагаемых с их заданным минимальным значением; б) деления целого числа на целые слагаемые в заданном минимальном количестве;
- 2) при составлении расписаний разного рода мероприятий с заданными экстремальными значениями их характеристик, например, недельного расписания определенного числа аудиторных часов занятий преподавателя с заданной максимальной нормой присутственных часов на работе в течение рабочего дня института;
- 3) в криминалистике при проведении следственных действий по свидетельским показаниям, связанным с экстремальными значениями характеристик числовых последовательностей, например, для построения полного перечисления номеров автомобилей с заданной минимальной цифрой.

ПРИМЕР АНАЛИЗА СХЕМЫ 1 (ТИП А) ПО ПМ. Рассматривается схема деления целого числа r на n слагаемых с каждым слагаемым $\geq k$ при $r \geq rn$. В наглядных терминах размещения частиц по ячейкам она соответствует схеме размещения r неразличимых частиц по n неразличимым ячейкам с минимальным уровнем заполнения ячеек k при $r \geq rn$. Вид исхода схемы представляет собой перечисление уровней заполнения ячеек $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_i, \dots, \eta_n)$ (это учитывает неразличимость частиц) в заранее заданном порядке, например, в порядке неубывания этих уровней (это учитывает неразличимость ячеек).

АЛГОРИТМ 3 ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ИСХОДОВ СХЕМЫ.

1. Во все ячейки кладем по k неразличимых частиц, а остальные $r - nk$ неразличимые частицы размещаем всеми $N^* = C_{r-nk+n-2}^{n-2}$ способами по схеме сочетаний с повторением по различным ячейкам со второй ячейки до n -й (этим на первом месте оставляем минимальный уро-

вень заполнения ячеек, равный k). В результате получаем места $\bar{v} = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_{n-2})$ расстановки $(n - 2)$ внутренних границ ячеек между лежащими в ряд $r^* = r - nk$ частицами, т.е. среди $r - nk + n - 2$ общего числа мест границ и частиц.

2. Переводим результат п. 1 в термины $\bar{\eta}$ по формулам

$$\eta_1 = k, \quad \eta_i = k + v_{i+1} - v_i - 1, \quad i = \overline{2, n}.$$

3. Упорядочиваем результаты п. 2 по неубыванию уровней заполнения ячеек с отбраковкой повторов — получаем неповторное перечисление исходов нашей схемы.

ТЕОРЕМА 3. Число N исходов схемы определяется по формуле

$$N = \sum_{\{\bar{\mu}\}} I(\mu_i),$$

где суммирование (ОПП) производится по перечислению маркировок составов уровней заполнения ячеек в исходах схемы по их совпадениям:

$$\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_s), \quad s \leq n,$$

а $I(Z) = 1$ при $Z > 0$ и $I(Z) = 0$ при $Z = 0$.

Доказательство. Искомое N есть число разных вышеописанных составов уровней заполнения ячеек — результатов п. 3 алгоритма 3 упорядоченных наборов уровней заполнения ячеек в исходах схемы сочетаний с повторением с минимальным уровнем заполнения ячеек, равным k . Оно совпадает с числом ненулевых частот при их маркировке. Тогда число N исходов схемы записывается доказываемой формулой. \square

Остальные направления исследования схемы проводятся по общим вышеприведенным методикам.

Разберем численный пример расчета данной схемы по всем направлениям ПМ.

ПРИМЕР 10. Пусть в нашей схеме $n = 3$, $r = 10$, $k = 2$.

Проведем ПП исходов схемы по шагам алгоритма 3:

- 1) $r - nk = 4$, $N^* = C_{4+2-1}^1 = C_5^1 = 5$ — это исходы мест 1, 2, 3, 4, 5 одной внутренней границы двух ячеек;
- 2) приводящие соответственно к исходам схемы в форме наборов уровней заполнения ячеек:

$$(2, 2, 2) + (0, 0, 4) = (2, 2, 6); \quad (2, 2, 2) + (0, 1, 3) = (2, 3, 5);$$

$$(2, 2, 2) + (0, 2, 2) = (2, 4, 4); \quad (2, 2, 2) + (0, 3, 1) = (2, 5, 3);$$

$$(2, 2, 2) + (0, 4, 0) = (2, 6, 2);$$

- 3) после требуемого упорядочивания с отбраковкой повторов получаем $N = 3$ исхода схемы: $(2, 2, 6)$, $(2, 3, 5)$, $(2, 4, 4)$.

Вычислим значение N по теореме 3. Для этого промаркируем упорядоченные исходы схемы по их совпадениям — получим частоты $(2, 2, 1)$ соответствующих повторяющихся исходов схемы $(2, 2, 6)$, $(2, 3, 5)$ и $(2, 4, 4)$, откуда по теореме 3 получаем $N = I(2) + I(2) + I(1) = 3$, что совпало с полученным выше результатом.

Решение ЗН. Применим прием решения ЗН для данной схемы E из результатов ее решения в более общей схеме S с тем же минимальным уровнем заполнения ячеек без обязательного его достижения в каждом исходе и с учетом взаимных порядков ячеек. Перечисление ее исходов определяется в дополнительной схеме D уровнями заполнения трех различных ячеек при размещении по ним четырех неразличимых частиц по схеме сочетаний с повторением с числом исходов $C_6^2 = 15$. Перечисление этих исходов в порядке перечисления исходов схемы сочетаний (см. [7]) означает расстановку всеми способами двух внутренних границ ячеек между лежащими в ряд четырьмя неразличимыми частицами, т.е. выбор двух мест среди шести мест для четырех частиц и двух границ. В терминах этих мест записываем исходы:

$$\begin{aligned} &(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ &(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), \\ &(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6). \end{aligned}$$

Переводим их в термины уровней заполнения ячеек по формулам п. 2 алгоритма 3 — получаем в порядке перечисления исходов схемы сочетаний видов

$$\begin{aligned} &(0, 0, 4), (0, 1, 3), (0, 2, 2), (0, 3, 1), (0, 4, 0), (1, 0, 3), (1, 1, 2), (1, 2, 1), \\ &(1, 3, 0), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 1), (3, 1, 0), (4, 0, 0) \end{aligned}$$

в этой дополнительной схеме D . Итоговые исходы схемы S в виде уровней заполнения трех ячеек в порядке ячеек находим сложением по трем ячейкам уровней в исходах схемы D с предварительными уровнями по две частицы в каждой из трех ячеек. Приходим к перечислению исходов в схеме S :

$$\begin{aligned} &(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 5, 3), (2, 6, 2), (3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), \\ &(3, 5, 2), (4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (6, 2, 2). \end{aligned}$$

Прямая ЗН. Дан $N_E^* = 3$, требуется найти R_E^* .

По алгоритму 1:

- 1) $A = N_S^* = N_E^* = 3$;
- 2) отсюда по ПЗН для исходов схемы S получаем вид третьего исхода схемы S : $R_S^* = R_E^* = (2, 4, 4)$, что совпадает с полученным выше по ПП результатом.

Обратная ЗН. Дан $R_E^* = (2, 4, 4)$, требуется найти N_E^* .

По алгоритму 2:

- 1) получаем исходы схемы S в порядке неубывания уровней заполнения ячеек:

$$\begin{aligned} &(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 3, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (3, 3, 4), (3, 3, 4), \\ &(2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (2, 4, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 5), (2, 2, 6); \end{aligned}$$

- 2) $A = 3$;

3) в первых трех исходах выполняется условие схемы E , откуда получаем $N_E^* = 3$, что совпадает с полученным выше по ПП результатом.

Вероятностное распределение исходов схемы. Определим вероятности исходов нашей схемы E при равновероятных исходах схемы S . Исходы схемы E отличаются от исходов схемы S обязательным достижением в каждом исходе минимального значения 2 уровня заполнения ячеек и несущественностью порядка перечисления уровней их заполнения. Поэтому из перечисления исходов схемы S с вероятностями исходов по $1/C_6^2 = 1/15$, однозначно соответствующих исходам схемы D , удаляем исходы, полученные из них без пустых ячеек. Это исходы

$$(3, 3, 4), (3, 4, 3), (4, 3, 3)$$

без достижения заданного минимального уровня заполнения ячеек, равного двум. В результате пропорционального пересчета по [6] получаем вероятности оставшихся исходов схемы S по $1/12$. Для учета несущественности порядка перечисления вероятностей составов уровней заполнения ячеек в исходах схемы E для их вычисления кратно (числу разных порядков каждого состава этих уровней в схеме S) увеличиваем их вероятности:

$$P(2, 2, 6) = 3 \cdot (1/12) = 0.25; \quad P(2, 3, 5) = 3! \cdot (1/12) = 0.5;$$

$$P(2, 4, 4) = 3 \cdot (1/12) = 0.25.$$

Проверка на распределение: $P(2, 2, 6) + P(2, 3, 5) + P(2, 4, 4) = 1$.

Моделирование исхода схемы. Разыгрываем номер X исхода нашей схемы E в порядке их перечисления с полученным вероятностным распределением по ряду распределения:

$$P(X = 1) = 0.25; \quad P(X = 2) = 0.5; \quad P(X = 3) = 0.25.$$

Для этого датчиком случайных чисел генерируем значение случайной величины с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Пусть это число $0.78 \in (0.75, 1]$. По результату решения ПЗН это значит, что смоделирован третий исход нашей схемы $R = (2, 4, 4)$.

10. Заключение. Введен новый класс обратных экстремальных задач комбинаторики на комбинаторных схемах E с фиксированными экстремальными значениями характеристик двух типов, относящихся к исходам и сравниваемых внутри каждого исхода, или — к совокупности исходов и сравниваемых между исходами.

Анализ схем E проведен новым перечислительным методом (ПМ) (см. [6]), состоящим в организации получения качественной информации об их исходах и ее переводе в количественные результаты по направлениям: явного прямого неповторного нумерованного перечисления исходов схем, вычисления их числа, решения для них ЗН в прямой и обратной постановках, установления их вероятностного распределения и построения процедуры их моделирования.

В схемах E предложено два подхода к решению ЗН: прямым перечислением их исходов по схеме ОПД (см. [6]) и пересчетом результатов решения ЗН для исходов соответствующих начальных схем S .

Моделирование исходов схемы из E предложено проводить в ПМ универсальным моделированием (УМ) с вероятностным распределением ее исходов, найденным из установленного случайным процессом соответствующего вероятностного распределения исходов в ее начальной схеме S в ПМ, по результату решения прямой ЗН для исходов изучаемой схемы E .

Обсуждены примеры областей использования схем E . По всем направлениям ПМ проведен анализ конкретного примера решения математической задачи.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П. *Исследование операций в экономике. Модели, задачи, решения*. М.: ИНФРА-М, 2003. 202 с.
2. Баранов В. И., Стечкин Б. С. *Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения*. М.: Физматлит, 2004. 240 с.. EDN: [RXGTQD](#).
3. Колчин В. Ф. О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме // *Теория вероятн. и ее примен.*, 1969. Т. 14, №3. С. 476–487.
4. Хакимуллин Е. Р. О предельном поведении максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц комплектами // *Матем. заметки*, 1981. Т. 30, №2. С. 277–289.
5. Викторова И. И. Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме // *Матем. заметки*, 1969. Т. 5, №3. С. 305–316.
6. Энатская Н. Ю. Вероятностные модели комбинаторных схем // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2020. Т. 13, №3. С. 103–111. EDN: [DKMIUC](#). DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp200312>.
7. Энатская Н. Ю. Анализ комбинаторных схем в доасимптотической области изменения параметров // *Труды Карельского научного центра РАН*, 2018. №7. С. 117–133. EDN: [XRQZZR](#). DOI: <https://doi.org/10.17076/mat750>.

MSC: 60F15

Probabilistic models for the analysis of inverse extremal problems in combinatorics

N. Yu. Enatskaya

National Research University “Higher School of Economics”,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics,
34, Tallinskay st, Moscow, 123458, Russian Federation.

Abstract

In an inverse extremal problem for a combinatorial scheme with a given value of the objective function of the form of a certain extreme value of its characteristic, a probabilistic model is developed that ensures that this value is obtained in its outcomes. Two types of such characteristics are considered, relating to each of the schemes or to a set of outcomes.

The pre-asymptotic analysis of such a model is carried out by the author’s enumerative method. It is based on the construction of an iterative random process with iterations of successive stages of a numbered non-repetitive enumeration and the formation of outcomes of the scheme. The iterative development of the process is represented by a probabilistic graph.

The study of the outcomes of the scheme according to the model in the enumerative method is carried out in the following areas: visual numbering of the outcomes of the scheme, finding their number, establishing a one-to-one correspondence between the types and numbers of outcomes of the scheme, obtaining their probabilistic distribution (controlled by a random process of listing the outcomes of the scheme), and modeling them with this distribution.

Along with the direct study of circuits in these areas, algorithms are proposed to obtain results for them by partially recalculating them from the results of a similar analysis of more general, previously studied circuits without restrictions or with less restrictions on the values of the characteristics under consideration.

Keywords: inverse extremal problem, extremal value of a characteristic, pre-asymptotic analysis of a circuit.

Received: 12th August, 2022 / Revised: 25th August, 2022 /

Accepted: 31st August, 2022 / First online: 20th September, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

  The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Enatskaya N. Yu. Probabilistic models for the analysis of inverse extremal problems in combinatorics, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 573–591. EDN: [AWBYGO](https://doi.org/10.14498/vsgtu1947). DOI: [10.14498/vsgtu1947](https://doi.org/10.14498/vsgtu1947) (In Russian).

Authors’ Details:

Nataliya Yu. Enatskaya  <https://orcid.org/0000-0003-1241-7543>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics;
e-mail: nat1943@mail.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submit the final manuscript to print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. This research received no external funding.

References

1. Afanas'ev M. Yu., Suvorov B. P. *Issledovanie operatsii v ekonomike. Modeli, zadachi, resheniia* [Operations Research in Economics. Models, Tasks, Solutions]. Moscow, INFRA-M, 2003, 202 pp. (In Russian)
2. Baranov V. I., Stechkin B. S. *Ekstremal'nye kombinatornye zadachi i ikh prilozheniia* [Extremal Combinatorial Problems and Their Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2004, 240 pp. (In Russian). EDN: RXGTQD.
3. Kolchin V. F. On the limiting behavior of extreme order statistics in a polynomial scheme, *Theory Probab. Appl.*, 1969, vol.14, no.3, pp. 458–469. DOI: <https://doi.org/10.1137/1114058>.
4. Khakimullin E.R. Asymptotic behavior of the maximum occupancy in an equiprobable scheme of allocation of particles by complexes, *Math. Notes*, 1981, vol.30, no.2, pp. 626–633. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01708846>.
5. Viktorova I. I. Asymptotic behavior of maximum of an equiprobable polynomial scheme, *Math. Notes*, 1969, vol.5, no.3, pp. 184–191. EDN: ZZYIEX. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01388624>.
6. Enatskaya N. Yu. Probabilistic models of combinatorial schemes, *Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2020, vol.13, no.3, pp. 103–111 (In Russian). EDN: DKMIUC. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp200312>.
7. Enatskaya N. Yu. Analysis of combinatorial schemes in the pre-asymptotic region of parameter change, *Proceedings of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences*, 2018, no.7, pp. 117–133 (In Russian). EDN: XRQZZR. DOI: <https://doi.org/10.17076/mat750>.



УДК 539.3

К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Рассматриваются представляющие интерес с точки зрения механики микрополярных континуумов тензоры с постоянными компонентами, полуизотропные тензоры и псевдотензоры. Обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. На основе неконвенционального определения полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров. Выясняются условия приведения произвольного (arbitrary) полуизотропного тензора четвертого ранга к тензору с постоянными компонентами. Координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, использующихся при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов, даны в терминах метрического тензора. Устанавливаются условия ковариантного постоянства псевдотензоров с постоянными компонентами и полуизотропных тензоров.

Ключевые слова: тензор, псевдотензор, тензор четвертого ранга, определяющий псевдотензор, гемитропность, микрополярность, упругость, тензор с постоянными компонентами, полуизотропный тензор.

Получение: 14 июля 2022 г. / Исправление: 5 сентября 2022 г. /

Принятие: 13 сентября 2022 г. / Публикация онлайн: 26 сентября 2022 г.

Механика деформируемого твердого тела

Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. К теории гемитропных тензоров четвертого ранга в трехмерных пространствах Евклида // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 3. С. 592–602. EDN: AFCREX. DOI: [10.14498/vsgtu1941](https://doi.org/10.14498/vsgtu1941).

Сведения об авторах

Евгений Валерьевич Мурашкин   <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>

кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: evmurashkin@gmail.com

Юрий Николаевич Радаев  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>

доктор физико-математических наук, профессор; ведущий научный сотрудник; лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

1. Введение. В математических моделях современной механики континуума [1–7] особое значение имеют определяющие тензоры и псевдотензоры четвертого ранга, участвующие в записи определяющих уравнений линейных анизотропных микрополярных упругих сред. Поэтому привлечение формализма псевдотензорного анализа [8–12] необходимо для геометрически корректного построения определяющих уравнений микрополярных континуумов. При этом особую роль играет ротационная инвариантность (полуизотропность, демитропность, гемитропность) компонент тензоров и псевдотензоров [6, 13–16] и ковариантное постоянство¹ псевдотензорного поля [8, 11, 12]. Достаточно подробное и полное описание псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [8–12]. Использование псевдотензорного формализма имеет исключительное значение при разработке математических моделей изотропных и гемитропных микрополярных упругих сред (см. [17–21]).

Основной целью работы является исследование свойств тензоров четвертого ранга и их координатных представлений, представляющих интерес с точки зрения механики микрополярных континуумов [17–24]. Во втором разделе статьи обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами. Рассмотрен алгоритм получения ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров, предложенный в монографии [8]. Устанавливаются условия ковариантного постоянства псевдотензоров с постоянными компонентами. В третьем разделе обсуждается оптимальная неконвенциональная терминология, связанная с понятиями полностью изотропных, конвенционально изотропных, неконвенционально изотропных, полуизотропных (демитропных, гемитропных) тензоров и псевдотензоров четвертого ранга. На основе неконвенционального определения для полуизотропного тензора четвертого ранга приводится координатное представление в терминах дельт Кронекера и метрических тензоров. Выясняются условия приведения произвольного полуизотропного тензора четвертого ранга к тензору с постоянными компонентами. В четвертом разделе приводятся координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров, используемых при математическом моделировании линейных гемитропных микрополярных континуумов.

В работе будет использована неконвенциональная терминология, существо которой будет разъяснено позже.

2. Тензоры и псевдотензоры с постоянными компонентами. Тензором (псевдотензором) с постоянными компонентами [8, стр. 164] называется тензор (псевдотензор), сохраняющий (retain) неизменными все свои компоненты при любых линейных преобразованиях координатного репера: самые важные из них — повороты, преобразования масштабирования (scaling), центральная инверсия, зеркальные отражения.

Абсолютный тензор второго ранга, с точностью до постоянного множителя a (абсолютного инварианта) совпадающий с единичным аффинором, будет

¹Например, вслед за И. С. Сокольниковым [12], ковариантные постоянные (параллельные) векторные поля Эйлера могут быть использованы для формулировки принципа виртуальных перемещений. Уравнения ковариантного постоянства учитываются, следуя правилу множителей Лагранжа [17]. Ковариантное постоянство псевдотензорных полей позволяет легко оперировать с ними при ковариантном дифференцировании [23].

тензором с постоянными компонентами:

$$C_k^h = a\delta_k^h.$$

Псевдотензор третьего ранга с постоянными компонентами пропорционален символам перестановок. Дельты Кронекера и символы перестановок — простейшие и самые важные примеры тензоров с постоянными компонентами.

Несложно показать, что наиболее общий абсолютный тензор четвертого ранга C_{sm}^{il} с постоянными компонентами можно представить в виде

$$C_{sm}^{il} = a\delta_s^i\delta_m^l + c\delta_s^l\delta_m^i, \quad (1)$$

где a и c — абсолютные инварианты (абсолютные скаляры).²

В монографии [8, стр. 164–176] предлагается общий алгоритм построения тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами для целых положительных (отрицательных) весов. Например, общий вид псевдотензора $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}$ с постоянными компонентами целого отрицательного веса представляется формулой

$$C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = \sum_{P=1}^{r!} \lambda_P \delta_{\{k_1}^{h_1} \delta_{k_2}^{h_2} \dots \delta_{k_s}^{h_s} \underbrace{\epsilon_{k_{s+1} \dots k_{s+N}}^{[-1]} \dots \epsilon_{k_{r-N+1} \dots k_r}^{[-1]}}_{|w|} \}, \quad (2)$$

где r — число ковариантных индексов, s — число контравариантных индексов, N — размерность пространства, w — вес, целое отрицательное число, λ_P ($P = 1, 2, \dots, r!$) — произвольные постоянные (абсолютные инварианты), P — перестановка ряда натуральных чисел

$$k_1, \dots, k_s, \dots, k_{s+N}, \dots, k_{r-N+1}, \dots, k_r.$$

В формуле (2) по ковариантным индексам, заключенным в фигурные скобки, производятся всевозможные перестановки. Число ковариантных, контравариантных индексов и вес псевдотензора должны удовлетворять ограничению

$$r = s + N|w|, \quad (3)$$

откуда

$$r \geq s.$$

Если условие (3) не выполняется, то псевдотензор $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}$ с постоянными компонентами будет равен нулю.

Отметим, что псевдотензорное поле $C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s}$ с постоянными компонентами является ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_s C_{k_1 k_2 \dots k_r}^{[w] h_1 h_2 \dots h_s} = 0,$$

²Ясно, что C_{12}^{12} и C_{21}^{12} также являются абсолютными инвариантами.

при условии

$$\nabla_s \lambda_P = 0.$$

Обратим внимание, что псевдотензоры вида (2) не составляют полного набора ковариантно постоянных абсолютных тензоров. Наглядный пример — параллельное векторное поле, которое является ковариантно постоянным вектором, но не может быть представлено в виде вектора с постоянными компонентами. Примеры ковариантно постоянных тензоров и псевдотензоров подробно обсуждались в работах (см. [8, 11, 12, 22, 23]). Среди них — фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e^3 и его алгебраические степени, δ -символы, ϵ -символы, e -символы, метрические тензоры g^{kh} , g_{hk} которые часто используются в микрополярных теориях механики сплошных сред [18–21].

3. Абсолютные полуизотропные тензоры четвертого ранга. В дальнейшем будем придерживаться неконвенциональной терминологии. Неконвенционально изотропным (полностью изотропным) будем называть тензор (псевдотензор), не меняющий свои компоненты при любых поворотах координатного репера, зеркальных отражениях и центральных инверсиях трехмерного пространства [6, 13, 14, 16].

Конвенционально изотропным тензором (псевдотензором) называется тензор (псевдотензор), сохраняющий неизменными все свои компоненты при поворотах координатного репера. Конвенционально изотропные тензоры (псевдотензоры) терминологически лучше неконвенционально называть полуизотропными, демитропными или гемитропными.

Для абсолютного полуизотропного тензора четвертого ранга в декартовой системе координат будет справедливо представление [13, p. 77]:

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + \frac{b-c}{2}(\delta_{il}\delta_{sm} - \delta_{im}\delta_{sl}) + \frac{b-c}{2}(\delta_{il}\delta_{sm} + \delta_{im}\delta_{sl}),$$

т.е.

$$H_{islm} = a\delta_{is}\delta_{lm} + b\delta_{il}\delta_{sm} + c\delta_{im}\delta_{sl}. \quad (4)$$

Здесь a, b, c — ротационные инварианты, сохраняющие свои значения при поворотах декартова репера. В отличие от представления (1) для тензора с постоянными компонентами, в представлении (4) для полуизотропных тензоров четвертого ранга участвует слагаемое $\delta_{il}\delta_{sm}$ с множителем b .

Представление (4) легко записывается в произвольной системе координат после замены δ -символов на метрические тензоры:

$$H^{islm} = ag^{is}g^{lm} + bg^{il}g^{sm} + cg^{im}g^{sl}. \quad (5)$$

Так как компоненты метрического тензора g^{is} не меняются при поворотах координатного репера, то правая часть в (5), очевидно, также остается неизменной. Если считать a, b, c абсолютными инвариантами, то правая часть в (5) не будет также меняться при зеркальных отражениях и центральных инверсиях.

³В трехмерных пространствах Евклида $e = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$, где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ковариантные базисные векторы; $e^2 = \det(g_{ij})$. В многомерных пространствах Евклида фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр определяется с помощью косога произведения базисных векторов.

Полуизотропное тензорное поле H^{islm} оказывается ковариантно постоянным и удовлетворяет псевдотензорному уравнению

$$\nabla_k H^{islm} = 0$$

при условии ковариантного постоянства инвариантов a , b , c , т.е.

$$\nabla_k a = 0, \quad \nabla_k b = 0, \quad \nabla_k c = 0,$$

или

$$\partial_k a = 0, \quad \partial_k b = 0, \quad \partial_k c = 0.$$

Очевидно, что полностью изотропный тензор четвертого ранга не отличается от полуизотропного тензора.

4. Применение в линейных микрополярных теориях. Тензоры и псевдотензоры четвертого ранга играют исключительно важную роль в математических моделях линейных анизотропных микрополярных упругих континуумов [17, 21, 25].

Введем в рассмотрение микрополярный упругий потенциал \mathcal{U} , рассчитанный на единицу инвариантного элемента объема, с естественными псевдотензорными аргументами

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon_{ij}, \kappa_{i \cdot s}^{[+1]}),$$

где ϵ_{ij} — асимметричный тензор деформации; $\kappa_{i \cdot s}^{[+1]}$ — псевдотензор деформации изгиба–кручения. Упругий потенциал полагается абсолютным инвариантом (скаляром), не зависящим в том числе от зеркальных отражений и центральной инверсии трехмерного пространства.

В случае линейного анизотропного микрополярного упругого тела упругий потенциал в произвольной системе координат получается в форме

$$\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{[-2] islm} \kappa_{is}^{[+1]} \kappa_{lm}^{[+1]} + H_3^{[-1] islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}^{[+1]}. \quad (6)$$

Отметим, что единственным определяющим тензором четвертого ранга чувствительным к преобразованиям зеркального отражения и центральной инверсии трехмерного пространства, оказывается определяющий псевдотензор $H_3^{[-1] islm}$. Микрополярное тело называется гемитропным, если компоненты его определяющих тензоров не изменяются при поворотах координатного репера, т.е. полуизотропны.

Чтобы воспользоваться результатами предыдущего раздела, преобразуем энергетическую форму (6) с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра e , элиминируя веса псевдотензоров:

$$\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + e^2 \frac{H_2^{[-2] islm}}{2} \frac{\kappa_{is}^{[+1]}}{e} \frac{\kappa_{lm}^{[+1]}}{e} + e \frac{H_3^{[-1] islm}}{3} \epsilon_{is} \frac{\kappa_{lm}^{[+1]}}{e},$$

в итоге получим

$$\mathcal{U} = H_1^{islm} \epsilon_{is} \epsilon_{lm} + H_2^{islm} \kappa_{is} \kappa_{lm} + H_3^{islm} \epsilon_{is} \kappa_{lm}. \quad (7)$$

Полученная энергетическая форма (7), как правило, используется при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. С помощью координатного представления (5) для определяющих линейный гемитропный микрополярный упругий континуум псевдотензоров можно получить следующие формы:

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{islm} &= a_2 g^{is} g^{lm} + b_2 g^{il} g^{sm} + c_2 g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{islm} &= a_3 g^{is} g^{lm} + b_3 g^{il} g^{sm} + c_3 g^{im} g^{sl}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ — девять определяющих постоянных гемитропного микрополярного упругого тела. С точки зрения тензорной алгебры $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ как минимум являются полуизотропными инвариантами.

С тем чтобы вернуться к энергетической форме (6), необходимо преобразовать представления для определяющих тензоров (8). Для этого выполним следующие замены:

$$\begin{aligned} H_2^{[-2] islm} &= e^{-2} H_2^{islm}, & H_3^{[-1] islm} &= e^{-1} H_3^{islm}, \\ \frac{a}{2}^{[-2]} &= e^{-2} a_2, & \frac{b}{2}^{[-2]} &= e^{-2} b_2, & \frac{c}{2}^{[-2]} &= e^{-2} c_2, \\ \frac{a}{3}^{[-1]} &= e^{-1} a_3, & \frac{b}{3}^{[-1]} &= e^{-1} b_3, & \frac{c}{3}^{[-1]} &= e^{-1} c_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставив выражения (9) в координатные представления (8), получим

$$\begin{aligned} H_1^{islm} &= a_1 g^{is} g^{lm} + b_1 g^{il} g^{sm} + c_1 g^{im} g^{sl}, \\ H_2^{[-2] islm} &= \frac{a}{2}^{[-2]} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{2}^{[-2]} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{2}^{[-2]} g^{im} g^{sl}, \\ H_3^{[-1] islm} &= \frac{a}{3}^{[-1]} g^{is} g^{lm} + \frac{b}{3}^{[-1]} g^{il} g^{sm} + \frac{c}{3}^{[-1]} g^{im} g^{sl}. \end{aligned}$$

Если вместо определяющих постоянных $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha}, \frac{c}{\alpha}$ перейти к конвенциональным механическим постоянным, таким как G, ν, L, \dots , то характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса -1 .

5. Выводы. В статье выясняется круг вопросов, связанных с координатными представлениями тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами, абсолютных полуизотропных тензоров и их применением к механике гемитропных микрополярных тел.

- 1) Обсуждаются свойства и способы координатного представления тензоров и псевдотензоров с постоянными компонентами.
- 2) Предложена оптимальная неконвенциональная терминология, связанная с понятиями полностью изотропных (неконвенционально изотропных), конвенционально изотропных (полуизотропных), полуизотропных (демитропных, гемитропных) абсолютных тензоров.
- 3) Дается неконвенциональное определение полуизотропного тензора. Для полуизотропного тензора четвертого ранга приводится представление в терминах метрического тензора.
- 4) Сравниваются формы представления полуизотропных абсолютных тензоров четвертого ранга и абсолютных тензоров четвертого ранга с постоянными компонентами.
- 5) Полностью изотропный тензор четвертого ранга не отличается от полуизотропного тензора.
- 6) Обсуждается общая форма упругого потенциала линейного гемитропного микрополярного упругого континуума.
- 7) Приводятся координатные представления для определяющих тензоров и псевдотензоров четвертого ранга, использующихся при моделировании линейных гемитропных микрополярных упругих континуумов.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ государственной регистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00666).

Библиографический список

1. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories / *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*: Encyclopedia of Physics, III/1; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. pp. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
2. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. xxix+602 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
3. Maugin G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
4. Mase G. T., Smelser R. E., Mase G. E. *Continuum Mechanics for Engineers*. Boca Raton: CRC Press, 2009. 398 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420085396>.
5. Haupt P. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. xxviii+643 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
6. Spencer A. J. M. *Continuum Mechanics*. Mineola: Dover Publ., 2004. viii+183 pp.
7. Irgens F. *Continuum Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. xviii+661 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74298-2>.
8. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen: P. Noordhoff, 1964. viii+429 pp.
9. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus* / Dover Books on Advanced Mathematics. New York: Dover Publ., 1978. xi+324 pp.
10. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1954. xii+277 pp.

11. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publ., 1957. xii+318 pp.
12. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis. Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua* / Applied Mathematics Series. New York: John Wiley & Sons, 1964. xii+361 pp.
13. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931. vii+93 pp.
14. Jeffreys H., Swirles B. *Methods of Mathematical Physics* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1950. viii+679 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139168489>.
15. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors // *Quart. Appl. Math.*, 1957. vol. 15, no. 3. pp. 308–314. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/101883>.
16. Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
17. Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3. С. 504–517. EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Пробл. прочн. пластичн.*, 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 3. pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 4. pp. 752–761. EDN: IVEASC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.
21. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 457–474. EDN: XYERLC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>.
22. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem // *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2022. vol. 22, no. 2. pp. 205–215. EDN: VURXND. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>.
23. Radayev Yu. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022. vol. 26, no. 1. pp. 36–47. EDN: EWDQGG. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>.
24. Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786. EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
25. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. viii+383 pp.

MSC: 15A72, 53A45, 74D05

On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, 101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The paper is devoted to problems concerning the tensors with constant components, hemitropic tensors and pseudotensors that are of interest from the point of view of micropolar continuum mechanics. The properties and coordinate representations of tensors and pseudotensors with constant components are discussed. Based on an unconventional definition of a hemitropic fourth-rank tensor, a coordinate representations in terms of Kronecker deltas and metric tensors are given. A comparison of an arbitrary hemitropic fourth-rank tensor and a tensor with constant components are discussed. The coordinate representations for constitutive tensors and pseudotensors used in mathematical modeling of linear hemitropic micropolar continua are given in terms of the metric tensor. The covariant constancy of fourth-rank pseudotensors with constant components and hemitropic tensors is considered and discussed.

Keywords: tensor, pseudotensor, fourth-rank tensor, constitutive pseudotensor, hemitropic, micropolar, elasticity, tensor with constant components, halfisotropic tensor.

Received: 14th July, 2022 / Revised: 5th September, 2022 /Accepted: 13th September, 2022 / First online: 26th September, 2022

Mechanics of Solids Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the theory of fourth-rank hemitropic tensors in three-dimensional Euclidean spaces, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 3, pp. 592–602. EDN: [AFCREX](https://doi.org/10.14498/vsgtu1941). DOI: [10.14498/vsgtu1941](https://doi.org/10.14498/vsgtu1941) (In Russian).

Authors' Details:

Evgenii V. Murashkin  <https://orcid.org/0000-0002-3267-4742>Cand. Phys. & Math. Sci., PhD, MD; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: evmurashkin@gmail.com*Yuri N. Radayev*  <https://orcid.org/0000-0002-0866-2151>D.Sc. (Phys. & Math. Sci.), Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; e-mail: radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author's Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment (state registration no. AAAA–A20–120011690132–4) and with the support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–01–00666).

References

1. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories, In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*, Encyclopedia of Physics, III/1; eds. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–858. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
2. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004, xxix+602 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
3. Maugin G. A. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. New York, CRC Press, 1993, 292 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003059882>.
4. Mase G. T., Smelser R. E., Mase G. E. *Continuum Mechanics for Engineers*. Boca Raton, CRC Press, 2009, 398 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781420085396>.
5. Haupt P. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2002, xxviii+643 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
6. Spencer A. J. M. *Continuum Mechanics*. Mineola, Dover Publ., 2004, viii+183 pp.
7. Irgens F. *Continuum Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, xviii+661 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-74298-2>.
8. Gurevich G. B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen, P. Noordhoff, 1964, viii+429 pp.
9. Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, Dover Books on Advanced Mathematics. New York, Dover Publ., 1978, xi+324 pp.
10. Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1954, xii+277 pp.
11. McConnell A. J. *Application of Tensor Analysis*. New York, Dover Publ., 1957, xii+318 pp.
12. Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis. Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*, Applied Mathematics Series. New York, John Wiley & Sons, 1964, xii+361 pp.
13. Jeffreys H. *Cartesian Tensors*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931, vii+93 pp.
14. Jeffreys H., Swirles B. *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1950, viii+679 pp. DOI: <https://doi.org/10.1017/cbo9781139168489>.
15. Smith G. F., Rivlin R. S. The anisotropic tensors, *Quart. Appl. Math.*, 1957, vol. 15, no. 3, pp. 308–314. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/101883>.
16. Lurie A. I. *Nelineinaia teoriia uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1980, 512 pp. (In Russian)
17. Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 3, pp. 504–517 (In Russian). EDN: YOYJQD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1635>.
18. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media, *Problems of Strength and Plasticity*, 2020, vol. 82, no. 4, pp. 399–412 (In Russian). EDN: TODIFV. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
19. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. EDN: TYGBER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.

20. Kovalev V. A., Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761. EDN: IVEASC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1799>.
21. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On the constitutive pseudoscalars of hemitropic micropolar media in inverse coordinate frames, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 457–474 (In Russian). EDN: XYERLC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1870>.
22. Radayev Yu. N., Murashkin E. V. Generalized pseudotensor formulations of the Stokes' integral theorem, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 205–215. EDN: VURXND. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-2-205-215>.
23. Radayev Yu. N., Murashkin E. V., Nesterov T. K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 1, pp. 36–47. EDN: EWDQGG. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1891>.
24. Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786 (In Russian). EDN: ZKIAAJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
25. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.

ПОДПИСКА – 2023

на январь–декабрь
в «каталоге «Газеты и журналы – 2023.
I полугодие» и на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
(<http://www.ural-press.ru/>)

Уважаемые читатели!

**Обратите внимание, что с 1 сентября 2022 г.
проводится подписная кампания на журналы
Самарского государственного технического
университета на 2023 год.**

18106 Вестник Самарского государственного технического
университета. Серия «Технические науки» (стр. 61)

18108 Вестник Самарского государственного технического
университета. Серия «Физико-математические нау-
ки» (стр. 82)

70570 Градостроительство и архитектура (стр. 61)

*Условия оформления подписки Вы найдете
на сайте <http://www.ural-press.ru/>*