

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 26, № 4 – 2022

**Вестник
Самарского
государственного
технического
университета**

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Декабрь — 2022

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 26, № 4 – 2022)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвираков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 26, № 4 – 2022)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 30 декабря 2022 г.

Дата выхода в свет 29 января 2023 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.

Тираж 500 экз. Рег. № 184/22.

Заказ № 3-1512-1v.

Отпечатано в

ООО «Типография Фурсова»

196084, г. Санкт-Петербург,
ул. Заставская, д. 14А, литер М

Тел.: +7 (812) 646 33 77

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, [Zentralblatt MATH](#), [DOAJ](#) и входит в ядро [Российского индекса научного цитирования](#).

Журнал включен в [Перечень рецензируемых научных изданий](#), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

© Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](#) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
December — 2022

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2022, vol. 26, no. 4

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
14A-M, Zastavskay st., Saint Petersburg, 196084, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Zentralblatt MATH](#), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, and [DOAJ](#).

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Бештоков М. Х.* “Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти” 607
- Расулов Х. Р.* “Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения” 630
- Сабитов К. Б.* “Колебания пластины с граничными условиями «шарнир-заделка»” 650
- Уринов А. К., Усмонов Д. А.* “Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения” 672

Механика деформируемого твёрдого тела

- Круссер А. И., Шитикова М. В.* “Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными” 694
- Локощенко А. М., Фомин Л. В., Ахметгалеев А. Ф., Махов Д. Д.* “Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени” 715

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Заусаев А. Ф., Романюк М. А.* “Сравнение элементов орбит больших планет, Луны и Солнца с использованием различных математических моделей на интервале времени с 1600 по 2200 гг.” 738
- Сизых Г. Б.* “Решение задачи Дородницына–Ладыженского” 764

Краткие сообщения

- Кичаев Е. К., Кичаев П. Е.* “Неодносная ползучесть при сложном нагружении” 777
- Ганигин С. Ю., Гречухина М. С., Нечаев А. С., Мурзин А. Ю., Воронцова В. А.* “Математическое прогнозирование вероятности столкновения частиц в процессе детонационного напыления” 789

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

<i>Beshtokov M. Kh.</i> “Boundary value problems for Sobolev type equations of fractional order with memory effect”	607
<i>Rasulov X. R.</i> “An analogue of the Tricomi problem for a mixed type of quasi-linear equation with two lines of degeneracy”	630
<i>Sabitov K. B.</i> “Vibrations of plate with boundary “hinged attachment” conditions”	650
<i>Urinov A. K., Usmonov D. A.</i> “An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind”	672

Mechanics of Solids

<i>Krusser A. I., Shitikova M. V.</i> “Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load based on models with fractional derivatives”	694
<i>Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Akhmetgaleev A. F., Makhov D. D.</i> “Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a rigid low matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time”	715

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

<i>Zausaev A. F., Romanyuk M. A.</i> “Comparison of the orbital elements of major planets, the Moon and the Sun using various mathematical models on the time interval with 1600 to 2200”	738
<i>Sizykh G. B.</i> “Solution of the Dorodnitsin–Ladyzhensky problem”	764

Short Communications

<i>Kichaev E. K., Kichaev P. E.</i> “The non-uniaxial creep under complex loading”	777
<i>Ganigin S. Yu., Grechukhina M. S., Nechaev A. S., Murzin A. Yu., Vorontsova V. A.</i> “Mathematical prediction of the probability of particle collisions during detonation spraying”	789



УДК 519.642.2

Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти

М. Х. Бештоков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а.

Аннотация

Изучены краевые задачи для одномерного интегро-дифференциального уравнения соболевского типа с граничными условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования α и β разных порядков. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют существование, единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Проведены численные эксперименты, иллюстрирующие полученные в работе результаты.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, дробная производная, эффект памяти, разностные схемы, априорная оценка, устойчивость и сходимость.

Получение: 15 июля 2022 г. / Исправление: 19 ноября 2022 г. /

Принятие: 16 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Бештоков М. Х. Краевые задачи для уравнения соболевского типа дробного порядка с эффектом памяти // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 607–629. EDN: AUKCBX. DOI: [10.14498/vsgtu1942](https://doi.org/10.14498/vsgtu1942).

Сведения об авторе

Мурат Хамидбиевич Бештоков   <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник; отд. вычислительных методов; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Введение. Среди неклассических уравнений математической физики [1] обширную область составляют псевдопараболические уравнения [2]

$$Lu_t = Mu.$$

Уравнения такого вида известны еще как вырожденные уравнения [3], уравнения соболевского типа [4], уравнения, не разрешенные относительно старшей производной [5] и даже уравнения не типа Коши—Ковалевской [6, 7]. Систематическое исследование уравнений такого рода началось с середины прошлого века в работах С. Л. Соболева. Термин «уравнения соболевского типа» ввел в обиход Р. Е. Шоултер (R. E. Showalter) [8, 9]. В работе [10] рассматривается линейное уравнение более общего вида

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u,$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде, которое является моделью процесса влагопереноса в почве [11–13] и процесса теплопроводности в среде с двумя температурами [14].

При решении многих задач физики, механики, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами последних могут служить сильно пористые среды, к каковым, например, можно отнести почвогрунт. Решение различных задач для таких сред приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с дробной производной. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес. Так, в работе [15] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат уравнения соболевского типа с дробной по времени производной.

В настоящей работе изучены краевые задачи для одномерного интегродифференциального уравнения соболевского типа с двумя операторами дробного дифференцирования α и β разных порядков и краевыми условиями первого и третьего родов. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Численным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [16–21]. В работах [16–18] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках. В работах [19, 20] изучаются краевые задачи для различных нагруженных дифференциальных уравнений целочисленного и дробного порядков.

Настоящая работа является продолжением серии работ автора в этом направлении [18–22].

1. Постановка задачи. В замкнутом прямоугольнике

$$\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

рассмотрим следующую задачу для уравнения соболевского типа с эффектом памяти

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha u = & \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \partial_{0t}^\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \\ & - q(x, t)u(x, t) + \int_0^t \rho(x, t, \tau)u(x, \tau)d\tau + f(x, t), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} 0 < c_0 \leq k(x, t), \quad \eta(x) \leq c_1; \\ |q(x, t)|, |r(x, t)|, |r_x(x, t)|, |k_x(x, t)|, |\rho(x, t, \tau)| \leq c_2, \quad 0 \leq \tau \leq t, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\partial_{0t}^\gamma u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau$$

— дробная производная в смысле Герасимова—Капуто [23, 24] порядка γ , $0 < \gamma < 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1)–(3) имеет единственное решение, обладающее нужными производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

Обозначим через M_1, M_2, \dots положительные константы, зависящие только от входных данных исходной задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме.

ТЕОРЕМА 1. *Если*

$$k(x, t) \in C^{1,0}(Q_T), \quad \eta(x) \in C^1[0, l], \quad r(x, t), \quad q(x, t), \quad \rho(x, t), \quad f(x, t) \in C(Q_T),$$

$$u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T), \quad \partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(Q_T), \quad \partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$$

и выполнены условия (4), то для решения задачи (1)–(3) справедливы следующие априорные оценки:

1) *в случае, когда $\alpha > \beta$:*

$$\|u\|_1^2 \leq M_1(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2),$$

$$\text{где } \|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \|u_x\|_0^2;$$

2) *в случае, когда $\alpha = \beta$:*

$$\|u\|_2^2 \leq M_2(D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2),$$

$$\text{где } \|u\|_2^2 = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2;$$

3) в случае, когда $\alpha < \beta$:

$$\|u\|_3^2 \leq M_3(D_{0t}^{-\beta}\|f\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2),$$

$$\text{где } \|u\|_3^2 = \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2.$$

При доказательстве теоремы 1 будут использованы следующие леммы.

ЛЕММА 1 [16]. Для любой абсолютно непрерывной на $[0, T]$ функции $v(t)$ справедливо неравенство

$$v(t)\partial_{0t}^\alpha v(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha v^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

ЛЕММА 2 [16]. Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0, T]$ неравенству

$$\partial_{0t}^\alpha y(t) \leq c_1 y(t) + c_2(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

где $c_1 > 0$, $c_2(t)$ — суммируемая на $[0, T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \leq y(0)E_\alpha(c_1 t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu)}$ — функции Миттаг–Леффлера.

Доказательство теоремы 1. Для получения априорных оценок решения задачи (1)–(3) в дифференциальной форме воспользуемся методом энергетических неравенств. Введем для этого скалярное произведение и норму в виде

$$(u, v) = \int_0^l u v dx, \quad (u, u) = \|u\|_0^2,$$

где u, v — заданные на $[0, l]$ функции.

Умножим теперь уравнение (1) скалярно на u :

$$\begin{aligned} (\partial_{0t}^\alpha u, u) &= ((ku_x)_x, u) + (\partial_{0t}^\beta(\eta(x)u_x)_x, u) + (ru_x(x, t), u) - \\ &- (q(x, t)u, u) + \left(\int_0^t \rho(x, t, \tau)u(x, \tau)d\tau, u\right) + (f(x, t), u). \end{aligned} \quad (5)$$

Входящие в тождество (5) интегралы преобразуем и оценим, пользуясь неравенством Коши с ε [16], [26, с. 100] и леммой 1:

$$(\partial_{0t}^\alpha u, u) \geq \frac{1}{2}(1, \partial_{0t}^\alpha u^2) = \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2; \quad (6)$$

$$((ku_x)_x, u) = \int_0^l u(ku_x)_x dx = uk u_x \Big|_0^l - \int_0^l k u_x^2 dx; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{0t}^\beta(\eta u_x)_x, u) &= \int_0^l u \partial_{0t}^\beta(\eta u_x)_x dx = u \partial_{0t}^\beta(\eta u_x) \Big|_0^l - \int_0^l \eta(x) u_x \partial_{0t}^\beta u_x dx \leq \\ &\leq u \partial_{0t}^\beta(\eta u_x) \Big|_0^l - \frac{1}{2} \int_0^l \eta \partial_{0t}^\beta (u_x)^2 dx; \end{aligned} \quad (8)$$

$$(r u_x, u) = \int_0^l r u u_x dx \leq \frac{c_2^2}{4\varepsilon} \int_0^l u^2 dx + \varepsilon \int_0^l u_x^2 dx \leq M_4(\varepsilon) \|u\|_0^2 + \varepsilon \|u_x\|_0^2; \quad (9)$$

$$-(q(x, t)u, u) \leq c_2 \|u\|_0^2; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \rho(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau, u \right) &= \int_0^l u \int_0^t \rho(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \left(\int_0^t \rho(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau \right)^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \int_0^t \rho^2(x, t, \tau) d\tau \int_0^t u^2(x, \tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_0^2 + M_5 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau; \end{aligned} \quad (11)$$

$$(f, u) = \int_0^l f u dx \leq \frac{1}{2} \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \|f\|_0^2. \quad (12)$$

Учитывая преобразования и неравенства (6)–(12), из (5) с учетом (2) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2} \partial_{0t}^\beta \int_0^l \eta (u_x)^2 dx + c_0 \|u_x\|_0^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon \|u_x\|_0^2 + M_6(\varepsilon) \|u\|_0^2 + M_7 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Выбирая $\varepsilon = c_0/2$, из (13) получаем

$$\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\beta \int_0^l \eta (u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leq M_8 \|u\|_0^2 + M_9 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{10} \|f\|_0^2. \quad (14)$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \|u_x\|_0^2 &\leq M_{11} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + M_{12} D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \\ &+ M_{13} (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (15) следующим образом:

$$D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_0^\tau \|u\|_0^2 ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|u\|_0^2 ds \int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|u\|_0^2 \left(-\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha} \Big|_s^t \right) ds = \\
 &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha \|u\|_0^2 ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^t (t-\tau)^\alpha \|u\|_0^2 d\tau \leq \\
 &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-\tau) \|u\|_0^2 d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \leq \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2.
 \end{aligned}$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau \leq \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2. \quad (16)$$

Учитывая преобразование (16), из (15) получаем

$$\|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \|u_x\|_0^2 \leq M_{14} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + M_{13} (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \quad (17)$$

На основании леммы 2 из (17) находим априорную оценку

$$\|u\|_1^2 \leq M_{15} (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2). \quad (18)$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned}
 \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 &\leq M_{16} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + M_{17} D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \\
 &+ M_{18} (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (19)
 \end{aligned}$$

На основании леммы 2 из (19) с учетом (16) находим априорную оценку

$$\|u\|_2^2 \leq M_{19} (D_{0t}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|u_0(x)\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (20)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (14) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\begin{aligned}
 \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)} \|u\|_0^2 &\leq M_{20} D_{0t}^{-\beta} \|u\|_0^2 + \\
 &+ M_{21} D_{0t}^{-\beta} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{22} (D_{0t}^{-\beta} \|f\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (21)
 \end{aligned}$$

В силу условия (2) справедливо неравенство [25]

$$\|u\|_0^2 \leq l^2 \|u_x\|_0^2.$$

Тогда из (21) с учетом (16) получаем

$$\|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)} \|u\|_0^2 \leq M_{23} D_{0t}^{-\beta} \|u_x\|_0^2 + M_{22} (D_{0t}^{-\beta} \|f\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (22)$$

На основании леммы 2 из (22) находим априорную оценку

$$\|u\|_3^2 \leq M_{24} (D_{0t}^{-\beta} \|f\|_0^2 + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (23)$$

Из полученных априорных оценок (18), (20), (23) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. \square

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Для решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. В замкнутом прямоугольнике \bar{Q}_T введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau,$$

где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = l/N\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, \tau = T/j_0\}.$$

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = & \chi_i^j (a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - \\ & - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$y_0^{(\sigma)} = y_N^{(\sigma)} = 0, \quad (25)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad (26)$$

где

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\gamma y = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\gamma,\sigma)} y_t^s$$

— дискретный аналог дробной производной Герасимова–Капуто порядка γ , $0 < \gamma < 1$, обеспечивающий порядок точности [17] $O(\tau^{3-\gamma})$ при $\sigma = 1 - \gamma/2$, и $O(\tau^{2-\gamma})$ при $\sigma = 1/2$;

$$a_0^{(\gamma,\sigma)} = \sigma^{1-\gamma}, \quad a_l^{(\gamma,\sigma)} = (l + \sigma)^{1-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{1-\gamma}, \quad l \geq 1;$$

$$b_l^{(\gamma,\sigma)} = \frac{1}{2-\gamma} [(l + \sigma)^{2-\gamma} - (l - 1 + \sigma)^{2-\gamma}] - \frac{1}{2} [(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\gamma}], \quad l \geq 1;$$

$$c_0^{(\gamma,\sigma)} = a_0^{(\gamma,\sigma)} \quad \text{при } j = 0;$$

$$c_s^{(\gamma,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\gamma,\sigma)} + b_1^{(\gamma,\sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\gamma,\sigma)} + b_{s+1}^{(\gamma,\sigma)} - b_s^{(\gamma,\sigma)}, & 1 \leq s \leq j - 1, \\ a_j^{(\gamma,\sigma)} - b_j^{(\gamma,\sigma)}, & s = j, \quad \text{при } j > 0; \end{cases}$$

$\sigma = 1 - \gamma/2$ при $\alpha = \beta$ и $\sigma = 1/2$ при $\alpha \neq \beta$;

$$c_s^{(\gamma,\sigma)} > \frac{1-\gamma}{2} (s + \sigma)^{-\gamma} > 0;$$

$$a_i^j = k(x_{i-1/2}, t_{j+\sigma}), \quad \gamma_i = \eta(x_{i-1/2}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{r^{\pm j}(x, t_{j+\sigma})}{k(x_i, t_{j+\sigma})}, \quad \varphi_i^j = f(x_i, t_{j+\sigma});$$

$$r(x, t_{j+\sigma}) = r^+(x, t_{j+\sigma}) + r^-(x, t_{j+\sigma}), \quad |r(x, t_{j+\sigma})| = r^+(x, t_{j+\sigma}) - r^-(x, t_{j+\sigma});$$

$$r^+(x, t_{j+\sigma}) = \frac{1}{2}(r(x, t_{j+\sigma}) + |r(x, t_{j+\sigma})|) \geq 0,$$

$$r^-(x, t_{j+\sigma}) = \frac{1}{2}(r(x, t_{j+\sigma}) - |r(x, t_{j+\sigma})|) \leq 0;$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j, \quad d_i^j = q(x_i, t_{j+\sigma}), \quad a^{(+1)} = a_{i+1};$$

$$\sum_{s=0}^{j+1/2} v^s \bar{\tau} = \sum_{s=1}^{j-1} v^s \tau + \frac{1}{2} \tau (v^0 + v^j + v^{j+1/2}), \quad \bar{\tau} = \begin{cases} \tau/2, & s = 0, j, j + 1/2, \\ \tau, & s \neq 0, j, j + 1/2; \end{cases}$$

$$\rho_{i,s}^j = p(x_i, t_{j+\sigma}, \tau_{s+\sigma}), \quad \chi(x_i, t_{j+\sigma}) = \frac{1}{1 + R(x_i, t_{j+\sigma})};$$

$$R(x_i, t_{j+\sigma}) = \frac{1}{2} \frac{|r(x_i, t_{j+\sigma})|}{k(x_i, t_{j+\sigma})}$$

— разностное число Рейнольдса.

Введем следующие скалярные произведения и нормы:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, u) = (1, u^2) = \|u\|_0^2;$$

$$(u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i \tilde{h}, \quad \tilde{h} = \begin{cases} h/2, & i = N, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases} \quad (u, u] = (1, u^2] = \|u\|_0^2.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (4), тогда существует такое малое $\tau_0 = \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$, что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (24)–(26) справедливы следующие априорные оценки:

1) в случае, когда $\alpha > \beta$:

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_1 (\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2);$$

2) в случае, когда $\alpha = \beta$:

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leq M_2 (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2),$$

где $\|y\|_1^2 = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$;

3) в случае, когда $\alpha < \beta$:

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_3 (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2).$$

При доказательстве теоремы 2 будут использованы следующие леммы.

ЛЕММА 3 [17]. Для любой функции $y(t)$, заданной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2).$$

ЛЕММА 4 [18]. Предположим, что неотрицательные последовательности y^j , φ^j , $j = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют неравенству

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y^j \leq \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \geq 1,$$

где λ_1, λ_2 — неотрицательные константы. Тогда существует такое τ_0 , что если $\tau \leq \tau_0$, то

$$y^{j+1} \leq 2 \left(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \leq j' \leq j} \varphi^{j'} \right) E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \leq j \leq j_0,$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 / (2 + 2^{1-\alpha})$.

Доказательство теоремы 2. Априорные оценки решения задачи (24)–(26) найдем методом энергетических неравенств. Умножим (24) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) &= (\chi(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) + (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) + (b^- ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &+ (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} p_s y^{s\bar{\tau}}, y^{(\sigma)} \right) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (27)$$

Входящие в тождество (27) суммы преобразуем и оценим, пользуясь леммой 3:

$$(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (\chi(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)}) &= \chi ay_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \Big|_0^N - (ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\chi y^{(\sigma)})_{\bar{x}}) = \\ &= -(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - (a\chi^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2) \leq \\ &\leq -(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) - \frac{1}{(1+hM_4)} (a\chi, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma y_{\bar{x}})_x, y^{(\sigma)}) &= y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma y_{\bar{x}}) \Big|_0^N - (\gamma, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (y_{\bar{x}})) \leq \\ &\leq -\left(\frac{\gamma}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (y_{\bar{x}})^2\right) \leq -\frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2; \end{aligned} \quad (30)$$

$$-(dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) \leq c_2 \|y^{(\sigma)}\|_0^2; \quad (31)$$

$$\left(\sum_{s=0}^{j+1/2} p_s y^{s\bar{\tau}}, y^{(\sigma)} \right) \leq \frac{1}{2} \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} p_s y^{s\bar{\tau}} \right)^2 \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, \sum_{s=0}^{j+1/2} p_s^2 \tau \sum_{s=0}^{j+1/2} y^2 \bar{\tau} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2 \bar{\tau}; \quad (32) \end{aligned}$$

$$(\varphi, y^{(\sigma)}) \leq \frac{1}{2} \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (33)$$

Учитывая преобразования и неравенства (28)–(33), из (27) получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + M_6 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \\ &\leq -(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \\ &\quad + M_5 \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2 \bar{\tau} + M_7 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\varphi\|_0^2. \quad (34) \end{aligned}$$

Оценим первое, второе и третье слагаемые в правой части (34) с помощью неравенства Коши с ε :

$$\begin{aligned} &-(a\chi_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}) + (b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) \leq \\ &\leq \varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_8(\varepsilon) \|y^{(\sigma)}\|_0^2. \quad (35) \end{aligned}$$

Из (34) с учетом (35) при $\varepsilon = M_6/2$ находим

$$\begin{aligned} &\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \\ &\leq M_9 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{10} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2 \bar{\tau} + M_{11} \|\varphi\|_0^2. \quad (36) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2 \bar{\tau} = \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{1}{2} \tau \|y^j\|_0^2,$$

перепишем (36) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{12}^\sigma \|y^{j+1}\|_0^2 + M_{13}^\sigma \|y^j\|_0^2 + M_{11} F, \quad (37)$$

$$\text{где } F = \sum_{s=0}^j \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \|\varphi\|_0^2.$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. На основании леммы 4 из (37) получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_{14} \left(\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \|\varphi^{j'}\|_0^2 \right) \right). \quad (38)$$

Учитывая, что

$$\max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{s=0}^{j'} \|y^s\|_0^2 \tau \leq \sum_{j'=0}^j \max_{0 \leq s \leq j'} \|y^s\|_0^2 \tau \leq \sum_{j'=0}^j \max_{0 \leq s \leq j'} \|y^s\|_0^2 \tau$$

и вводя обозначение $g^j = \max_{0 \leq j' \leq j} \|y^{j'}\|_0^2$, из (37) получим

$$g^{j+1} \leq M_{15} \sum_{s=0}^j g^s \tau + M_{16} F_1^j, \quad (39)$$

где $F_1^j = \|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2$.

На основании Леммы Гронуолла [27, стр. 171] из (38), (39) получаем априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_{17} (\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2). \quad (40)$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. В силу леммы 4 из (37) с учетом (40) получаем

$$\|y^{j+1}\|_1^2 \leq M_{18} (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2). \quad (41)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha \leq \beta$. В силу (25), неравенства $\|y\|_0^2 \leq 2l^2 \|y_{\bar{x}}\|_0^2$ и леммы 4 из (37) получаем

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_{19} (\|y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \|\varphi^{j'}\|_0^2). \quad (42)$$

Из полученных априорных оценок (40)–(42) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (24)–(26) по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи (24)–(26) к решению дифференциальной задачи (1)–(3) так, что существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедливы следующие оценки:

- 1) $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0^2 \leq M_{17}(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$, когда $\alpha > \beta$;
- 2) $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 \leq M_{18}(h^2 + \tau^2)$, когда $\alpha = \beta$;
- 3) $\|y_{\bar{x}}^{j+1} - u_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_{19}(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$, когда $\alpha < \beta$,

где M_{17}, M_{18}, M_{19} — не зависящие от h и τ положительные константы.

4. Постановка краевой задачи с граничным условием третьего рода и априорная оценка в дифференциальной форме. Второе краевое условие в (2) заменим условием третьего рода. Тогда вместо (2) имеем

$$u(0, t) = 0, \quad -\Pi(l, t) = \beta(t)u(l, t) - \mu(t), \quad (43)$$

где

$$|\beta(t)| \leq c_2, \quad \Pi(x, t) = k(x, t)u_x + \eta \partial_{0t}^\alpha u_x. \quad (44)$$

ТЕОРЕМА 3. Если

$$k(x, t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T), \quad \eta(x) \in C^1[0, l], \quad q_s(x, t), f(x, t) \in C(\overline{Q}_T),$$

$u(x, t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u_{xx}(x, t) \in C(\overline{Q}_T)$
 и выполнены условия (4), (44), то для решения задачи (1), (43), (3) справедливы следующие априорные оценки:

1) в случае, когда $\alpha > \beta$:

$$\|u\|_1^2 \leq M_1(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2);$$

2) в случае, когда $\alpha = \beta$:

$$\|u\|_2^2 \leq M_2(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0 + \|u'_0(x)\|_0^2);$$

3) в случае, когда $\alpha < \beta$:

$$\|u\|_3^2 \leq M_3(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u'_0(x)\|_0^2).$$

Доказательство. Повторим преобразования (6)–(12). После некоторых несложных преобразований из (5) получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\partial_{0t}^\beta \int_0^l \eta(u_x)^2 dx + c_0 \|u_x\|_0^2 \leq \\ & \leq u\Pi(x, t) \Big|_0^l + \varepsilon \|u_x\|_0^2 + M_4(\varepsilon) \|u\|_0^2 + M_5 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \|f\|_0^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (45) с учетом (43):

$$\begin{aligned} u\Pi(x, t) \Big|_0^l &= \Pi(l, t)u(l, t) = u(l, t)(\mu(t) - \beta(t)u(l, t)) = \\ &= -\beta(t)u^2(l, t) + \mu(t)u(l, t) \leq M_6 u^2(l, t) + \frac{1}{2}\mu^2(t) \leq \\ &\leq M_7(\varepsilon) \|u\|_0^2 + \varepsilon \|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\mu^2(t). \end{aligned} \quad (46)$$

Из (45) с учетом (46) при $\varepsilon = c_0/2$ находим

$$\begin{aligned} & \partial_{0t}^\alpha \|u\|_0^2 + \partial_{0t}^\beta \int_0^l \eta(u_x)^2 dx + \|u_x\|_0^2 \leq \\ & \leq M_8 \|u\|_0^2 + M_9 \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_{10}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)). \end{aligned} \quad (47)$$

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} & \|u\|_0^2 + D_{0t}^{-(\alpha-\beta)} \|u_x\|_0^2 \leq \\ & \leq M_{11} D_{0t}^{-\alpha} \|u\|_0^2 + M_{12} D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \end{aligned}$$

$$+ M_{13}(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2). \quad (48)$$

На основании леммы 2 из (48) с учетом (16) получаем априорную оценку

$$\|u\|_1^2 \leq M_{14}(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0^2). \quad (49)$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 &\leq M_{15}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2 + M_{16}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau + \\ &+ M_{17}(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0 + \|u'_0(x)\|_0^2). \end{aligned} \quad (50)$$

На основании леммы 2 из (50) с учетом (16) получаем априорную оценку

$$\|u\|_2^2 \leq M_{18}(D_{0t}^{-\alpha}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u_0(x)\|_0 + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (51)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$. Применяя к обеим частям неравенства (47) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\beta}$, получаем

$$\begin{aligned} \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_{19}D_{0t}^{-\beta}\|u\|_0^2 + M_{20}D_{0t}^{-\beta}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau + \\ &+ M_{21}(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u'_0(x)\|_0^2). \end{aligned} \quad (52)$$

В силу условия $u(0, t) = 0$ справедливо тождество

$$u(x, t) = \int_0^x u_x(x, t)dx.$$

Тогда

$$u^2(x, t) \leq \left(\int_0^x u_x(x, t)dx\right)^2 \leq x \int_0^x u_x^2(x, t)dx \leq l \int_0^l u_x^2(x, t)dx. \quad (53)$$

Интегрируя обе части (53) по x от 0 до l , получаем неравенство $\|u\|_0^2 \leq l^2\|u_x\|_0^2$. Тогда из (52) с учетом (16) получаем

$$\begin{aligned} \|u_x\|_0^2 + D_{0t}^{-(\beta-\alpha)}\|u\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_{22}D_{0t}^{-\beta}\|u_x\|_0^2 + M_{23}(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u'_0(x)\|_0^2). \end{aligned} \quad (54)$$

На основании леммы 2 из (54) находим априорную оценку

$$\|u\|_3^2 \leq M_{24}(D_{0t}^{-\beta}(\|f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|u'_0(x)\|_0^2). \quad (55)$$

Из полученных априорных оценок (49), (51), (55) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным. \square

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы. На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (43), (3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и порядка $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \chi_i^j (a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_{x,i} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})_{x,i} + b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (56)$$

$$y(0, t) = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (57)$$

$$-(\chi_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (\gamma_N y_{\bar{x},N})) = \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} + \frac{1}{2} h \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right) - \tilde{\mu}, \quad x = l, \quad (58)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (59)$$

где $\tilde{\beta}^j = \beta^j + \frac{1}{2} h d_N^j$, $\tilde{\mu}^j = \mu^j + 0.5 h \varphi_N^j$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия (4), (43). Тогда существует такое малое $\tau_0 = \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$, что если $\tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (56)–(59) справедливы следующие априорные оценки:

1) в случае, когда $\alpha > \beta$:

$$\|y\|_0^2 \leq M_1 (\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2));$$

2) в случае, когда $\alpha = \beta$:

$$\|y^{j+1}\|_2^2 \leq M_2 (\|y^0\|_2^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2)),$$

где $\|y\|_2^2 = \|y\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}\|_0^2$;

3) в случае, когда $\alpha < \beta$:

$$\|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_3 (\|y^0\|_2^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2)).$$

Доказательство. Найдем априорную оценку методом энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (56) скалярно на y . Тогда, принимая во внимание преобразования (28)–(33), получаем

$$\begin{aligned} & (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) + M_4 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq \\ & \leq (\chi_i^j a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})) y^{(\sigma)}|_0^N + M_5 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + (b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \end{aligned}$$

$$+ (b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - (dy^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} p_s y^s \bar{\tau}, y^{(\sigma)} \right) + (\varphi, y^{(\sigma)}). \quad (60)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (60) с учетом (57), (58):

$$\begin{aligned} (\chi_i^j a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x}})) y^{(\sigma)} \Big|_0^N &= (\chi_N^j a y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta (\gamma_i y_{\bar{x},N})) y_N^{(\sigma)} = \\ &= \left[\mu + \frac{1}{2} h \varphi_N^j - \beta y_N^{(\sigma)} - \frac{1}{2} h d y_N^{(\sigma)} - \frac{1}{2} h \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right) \right] y_N^{(\sigma)} \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} h y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + M_6(\varepsilon) \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + \varepsilon \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_7(\varepsilon) \mu^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} h y_N^{(\sigma)} \varphi_N^j - \frac{1}{2} h d (y_N^{(\sigma)})^2 + \frac{1}{2} h y_N^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau}. \quad (61) \end{aligned}$$

Из (60) с учетом (61) при $\varepsilon = M_4/2$ находим

$$\begin{aligned} (\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, y^{(\sigma)}) + \frac{M_4}{2} \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{c_0}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_8 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + (b_i^{-j} a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + (b_i^{+j} a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) - \\ &\quad - (d_i^j y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}) + \left(\sum_{s=0}^{j+1/2} p_s y^s \bar{\tau}, y^{(\sigma)} \right) + \frac{1}{2} \mu^2 + (\varphi, y^{(\sigma)}]. \quad (62) \end{aligned}$$

Из (62) после несложных преобразований с учетом неравенства Коши с ε получим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_9 \|y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{10} \sum_{s=0}^{j+1/2} \|y\|_0^2 \bar{\tau} + M_{11} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2). \quad (63) \end{aligned}$$

Перепишем (63) в другой форме:

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{12}^\sigma \|y^{j+1}\|_0^2 + M_{13}^\sigma \|y^j\|_0^2 + M_{14} F, \quad (64)$$

где $F = \sum_{s=0}^j \|y\|_0^2 \bar{\tau} + \|\varphi\|_0^2 + \mu^2$.

1. Рассмотрим случай, когда $\alpha > \beta$. На основании леммы 4 из (64) с учетом (16) получаем

$$\|y^{j+1}\|_0^2 \leq M_{15} \left(\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\sum_{s=0}^{j'} \|y\|_0^2 \bar{\tau} + \|\varphi\|_0^2 + \mu^2 \right) \right). \quad (65)$$

Тогда, повторяя рассуждения (39), (40), из (65) находим оценку

$$\|y\|_0^2 \leq M_{16}(\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2)). \quad (66)$$

2. Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta$. В силу леммы 4 из (64) с учетом (40) получаем

$$\|y^{j+1}\|_2^2 \leq M_{17}(\|y^0\|_2^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi\|_0^2 + \mu^2)). \quad (67)$$

3. Рассмотрим случай, когда $\alpha < \beta$. Из (64) с учетом (39), (40) и неравенства $\|y^{(\sigma)}\|_0^2 \leq 2l^2 \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2$ получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|y\|_0^2 + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\beta \|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{18}^\sigma \|y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + M_{19}^\sigma \|y_{\bar{x}}^j\|_0^2 + M_{14}F. \quad (68)$$

На основании леммы 4 из (68) находим

$$\|y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq M_{20}(\|y^0\|_2^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} (\|\varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2)). \quad (69)$$

Из полученных априорных оценок (66), (67), (69) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (56)–(59) по начальным данным и правой части, а также сходимости решения разностной задачи (56)–(59) к решению дифференциальной задачи (1), (43), (3) так, что существует такое τ_0 , что при $\tau \leq \tau_0$ справедливы следующие оценки:

- 1) $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_0^2 \leq M_{16}(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$, когда $\alpha > \beta$;
- 2) $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 \leq M_{17}(h^2 + \tau^2)$, когда $\alpha = \beta$;
- 3) $\|y_{\bar{x}}^{j+1} - u_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_{20}(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$, когда $\alpha < \beta$,

где M_{16}, M_{17}, M_{20} — не зависящие от h и τ положительные константы. □

6. Алгоритм численного решения краевой задачи (1), (43), (3).

Для численного решения задачи (1), (43), (3) приведем разностную схему (56)–(59) к расчетному виду. Тогда уравнение (56) приводится к следующему виду:

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \tau \sigma \chi_i^j a_i^j + \gamma_i \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta, \sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h \sigma b_i^{-j} a_i, \\ B_i &= \tau \sigma \chi_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta, \sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h \sigma b_i^{+j} a_{i+1}, \\ C_i &= A_i + B_i + h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau \sigma h^2 d_i^j, \end{aligned}$$

$$F_i^j = \tilde{A}_i y_{i-1}^j - \tilde{C}_i y_i^j + \tilde{B}_i y_{i+1}^j + h^2 \tau \varphi_i^j - h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} (y_i^{s+1} - y_i^s) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} ((\gamma_{i+1}y_{i+1})^{s+1} - (\gamma_{i+1}y_{i+1})^s) - \\
 & - \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} (((\gamma_i + \gamma_{i+1})y_i)^{s+1} - ((\gamma_i + \gamma_{i+1})y_i)^s) + \\
 & + \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} ((\gamma_i y_{i-1})^{s+1} - (\gamma_i y_{i-1})^s) + \tau h^2 \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, \\
 \tilde{A}_i & = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \gamma_i \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} - \tau h(1-\sigma) b_i^{-j} a_i, \\
 \tilde{B}_i & = \tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j - \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \tau h(1-\sigma) b_i^{+j} a_{i+1}, \\
 \tilde{C}_i & = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i - h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau(1-\sigma) h^2 d_i^j.
 \end{aligned}$$

Краевые условия (57), (58) принимают вид

$$y_0 = 0, \quad (71)$$

$$y_N = \varkappa y_{N-1} + \mu, \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned}
 \varkappa & = \left(\tau \sigma \varkappa_N a_N + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} \right) \times \\
 & \times \left(\tau \sigma \varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h \tau \tilde{\beta}^j + \frac{1}{2} h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu & = \left(\tilde{\mu} h \tau - (1-\sigma) h \tau \tilde{\beta} y_N^j - \right. \\
 & - \tau(1-\sigma) \varkappa_N a_N (y_N^j - y_{N-1}^j) + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta,\sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} (y_N^j - y_{N-1}^j) + \\
 & + \frac{1}{2} h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N - \frac{1}{2} h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_N^{s+1} - y_N^s) - \\
 & - \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} ((\gamma_N y_N)^{s+1} - (\gamma_N y_N)^s) + \frac{1}{2} \tau h^2 \sum_{s=0}^{j+1/2} p_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} + \\
 & \left. + \frac{\tau^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\beta,\sigma)} ((\gamma_N y_{N-1})^{s+1} - (\gamma_N y_{N-1})^s) \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left(\tau \sigma \varkappa_N a_N^j + \gamma_N \frac{\tau^{1-\beta} c_0^{(\beta, \sigma)}}{\Gamma(2-\beta)} + \sigma h \tau \tilde{\beta}^j + \frac{h^2}{2} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)^{-1}.$$

Таким образом, с учетом (70)–(72) разностная схема (56)–(59) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой легко находится известным методом прогонки.

7. Численный эксперимент. Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1), (43), (3) подберем таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x, t) = xt^3 e^x$.

Ниже в таблице приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (Order of convergence) в норме $\|[\cdot]\|_0$ при различных значениях параметров $\alpha = 0.01, 0.5, 0.99$, $\beta = 0.01, 0.5; 0.99$ и уменьшении размера сетки, когда $h = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации. Порядок сходимости будем определять по формуле $OC = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$, где z_1 и z_2 — погрешности, соответствующие шагам $0.5h, h$.

Результаты численного эксперимента [The numerical experiment results]

α	β	h	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _0$	Order of convergence, $\ [\cdot]\ _0$
0.01	0.01	1/20	0.004995188	2.0055 2.0029 2.0015
		1/40	0.001244028	
		1/80	0.000310374	
		1/160	0.000077512	
0.5		1/20	0.007588088	1.9748 1.9630 1.9481
		1/40	0.001930506	
		1/80	0.000495150	
		1/160	0.000128319	
0.99		1/20	0.007131222	1.9905 1.9784 1.9564
		1/40	0.001794538	
		1/80	0.000455417	
		1/160	0.000117345	
0.01	0.5	1/20	0.010134180	1.8478 1.8047 1.7585
		1/40	0.002815421	
		1/80	0.000805897	
		1/160	0.000238188	
0.5		1/20	0.006797725	2.0048 2.0036 2.0026
		1/40	0.001693782	
		1/80	0.000422395	
		1/160	0.000105412	
0.99		1/20	0.009807660	1.8362 1.7888 1.7371
		1/40	0.002746763	
		1/80	0.000794954	
		1/160	0.000238462	

α	β	h	$\max_{0 < j < m} [z^j] _0$	Order of convergence, $ [\cdot] _0$
0.01	0.99	1/20	0.008818458	
		1/40	0.002305232	1.9356
		1/80	0.000627402	1.8774
		1/160	0.000182676	1.7801
0.5		1/20	0.008932556	
		1/40	0.002366377	1.9164
		1/80	0.000653947	1.8554
		1/160	0.000193130	1.7596
0.99		1/20	0.008009633	
		1/40	0.002000081	2.0017
		1/80	0.000499586	2.0013
		1/160	0.000124819	2.0009

Заключение (Выводы). В настоящей работе рассмотрены краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения соболевского типа с краевыми условиями первого и третьего родов с двумя операторами дробного дифференцирования α и β разных порядков. Построены разностные схемы порядка аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при $\alpha = \beta$ и $O(h^2 + \tau^{2 - \max\{\alpha, \beta\}})$ при $\alpha \neq \beta$. С помощью метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках при различных соотношениях α и β , откуда следуют единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*. Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.
2. Ting T. W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations // *J. Math. Soc. Japan*, 1969. vol. 21, no. 3. pp. 440–453. DOI: <https://doi.org/10.2969/jmsj/02130440>.
3. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*. New York: Marcel Dekker, 1999. 336 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482276022>.
4. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*. М.: Физматлит, 2007. 736 с.
5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. Boca Raton: CRC Press, 2003. 632 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203911433>.
6. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems] / *Etudes mathématiques*. Paris: Gauthier-Villars, 1969. xx+554 pp. (In French)
7. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Москов. унив., 1984. 296 с. EDN: QJLPYJ.
8. Showalter R. E. The Sobolev equations I // *Appl. Anal.*, 1975. vol. 5, no. 1. pp. 15–22. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036817508839103>.
9. Showalter R. E. The Sobolev equations II // *Appl. Anal.*, 1975. vol. 5, no. 2. pp. 81–99. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036817508839111>.

10. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // *ПММ*, 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864. EDN: OXMSGT.
11. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement // *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1962. vol. 254. pp. 2047–2049.
12. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // *Inst. Rech. Agronom.*, 1964. vol. 3. pp. 60–72.
13. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв*. М.: Наука, 1976. 353 с. EDN: RHL SCT.
14. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1968. vol. 19, no. 4. pp. 614–627. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01594969>.
15. Беданоква С. Ю. Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // *Вестн. Адыгейск. гос. ун-та. Сер. 4. Естеств.-математ. техн. науки*, 2007. Т. 4. С. 68–71. EDN: KBXDEN.
16. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // *Диффер. уравн.*, 2010. Т. 46, № 5. С. 658–664. EDN: MSQVJX.
17. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // *J. Comp. Phys.*, 2015. vol. 280. pp. 424–438. EDN: UEGJJB. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031>.
18. Бештоков М. Х. Устойчивость и сходимость разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений соболевского типа дробного порядка // *Диффер. уравн.*, 2021. Т. 57, № 12. С. 1665–1681. EDN: RNNAJ S. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0374064121120098>.
19. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016. vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>.
20. Бештоков М. Х. Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся уравнений соболевского типа с нелокальным источником в дифференциальной и разностной трактовках // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 2. С. 249–266. EDN: YQYGV T. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118020115>.
21. Бештоков М. Х., Водахова В. А. Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, 2019. Т. 29, № 4. С. 459–482. EDN: DKSEVD. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190401>.
22. Бештоков М. Х. Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 4(33). С. 15–24. EDN: RVARQN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1238>.
23. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II // *Geophys. J. Intern.*, 1967. vol. 13, no. 5. pp. 529–539. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>.
24. Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // *ПММ*, 1948. Т. 12. С. 251–260.
25. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики*. М.: Наука, 1973. 407 с.
26. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1983. 616 с.
27. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973. 416 с.

MSC: 65L05, 65N12, 65R20

Boundary value problems for Sobolev type equations of fractional order with memory effect

M. Kh. Beshtokov

Institute of Applied Mathematics and Automation
of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS,
89 a, Shortanova st., Nal'chik, 360000, Russian Federation.

Abstract

Boundary value problems are studied for a one-dimensional Sobolev type integro-differential equation with boundary conditions of the first and third kind with two fractional differentiation operators α and β of different orders. Difference schemes of the order of approximation $O(h^2 + \tau^2)$ for $\alpha = \beta$ and $O(h^2 + \tau^{2-\max\{\alpha, \beta\}})$ are constructed for $\alpha \neq \beta$. Using the method of energy inequalities, a priori estimates are obtained in the differential and difference interpretations, from which the existence, uniqueness, stability, and convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem at a rate equal to the order of approximation of the difference scheme follow. Numerical experiments were carried out to illustrate the results obtained in the paper.

Keywords: Sobolev type equation, fractional derivative, memory effect, difference schemes, a priori estimate, stability and convergence.

Received: 15th July, 2022 / Revised: 19th November, 2022 /

Accepted: 16th December, 2022 / First online: 29th December, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for Sobolev type equations of fractional order with memory effect, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 607–629. EDN: [AUKCBX](#). DOI: [10.14498/vsgtu1942](https://doi.org/10.14498/vsgtu1942) (In Russian).

Author's Details:

Murat Kh. Beshtokov  <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher; Dept. of Computational Methods; e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

References

1. Vragov V. N. *Kraevye zadachi dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems for Nonclassical Equations in Mathematical Physics]. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1983, 84 pp. (In Russian)
2. Ting T. W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations, *J. Math. Soc. Japan*, 1969, vol. 21, no. 3, pp. 440–453. DOI: <https://doi.org/10.2969/jmsj/02130440>.
3. Favini A., Yagi A. *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*. New York, Marcel Dekker, 1999, 336 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482276022>.
4. Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. *Lineinye i nelineinye uravneniia sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Equations of the Sobolev Type]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 736 pp. (In Russian)
5. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative*. Boca Raton, CRC Press, 2003, 632 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780203911433>.
6. Lions J. L. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems], Etudes mathématiques. Paris, Gauthier-Villars, 1969, xx+554 pp. (In French)
7. Petrovsky I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1984, 296 pp. (In Russian). EDN: QJLPYJ.
8. Showalter R. E. The Sobolev equations I, *Appl. Anal.*, 1975, vol. 5, no. 1, pp. 15–22. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036817508839103>.
9. Showalter R. E. The Sobolev equations II, *Appl. Anal.*, 1975, vol. 5, no. 2, pp. 81–99. DOI: <https://doi.org/10.1080/00036817508839111>.
10. Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata], *J. Appl. Math. Mech.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303. EDN: VSOXSF. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6).
11. Hallaire M. Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1962, vol. 254, pp. 2047–2049.
12. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer, *Inst. Rech. Agronom.*, 1964, vol. 3, pp. 60–72.
13. Chudnovsky A. F. *Teplofizika pochv* [Soil Thermal Physics]. Moscow, Nauka, 1976, 353 pp. EDN: RHL SCT.
14. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1968, vol. 19, no. 4, pp. 614–627. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01594969>.
15. Bedanokova S. Yu. The equation of soil moisture movement and mathematical model of moisture content of the soil layer based on the Hallaire's equation, *Vestn. Adygeisk. Gos. Univ. Ser. 4. Estestv.-Matemat. Tekhn. Nauki*, 2007, vol. 4, pp. 68–71 (In Russian). EDN: KBXDEN.
16. Alikhanov A. A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations, *Diff. Equat.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 660–666. EDN: MXDCPJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266110050058>.
17. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, *J. Comp. Phys.*, 2015, vol. 280, pp. 424–438. EDN: UEGJJB. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031>.
18. Beshtokov M. Kh. Stability and convergence of difference schemes approximating boundary value problems for loaded Sobolev-type fractional differential equations, *Diff. Equat.*, 2021, vol. 57, no. 12, pp. 1685–1701. EDN: NMCDYV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266121120132>.
19. Beshtokov M. Kh. The third boundary value problem for loaded differential Sobolev type equation and grid methods of their numerical implementation, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, 012019. EDN: YVCYFN. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012019>.

20. Beshtokov M. Kh. Boundary value problems for degenerating and nondegenerating Sobolev-type equations with a nonlocal source in differential and difference forms, *Diff. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 250–267. EDN: **UXTRVT**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118020118>.
21. Beshtokov M. Kh., Vogahova V. A. Nonlocal boundary value problems for a fractional-order convection-diffusion equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 459–482 (In Russian). EDN: **DKSEVD**. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190401>.
22. Beshtokov M. Kh. Riemann method for solving non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 4(33), pp. 15–24 (In Russian). EDN: **RVARQN**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1238>.
23. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II, *Geophys. J. Intern.*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>.
24. Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to problems of internal friction, *Appl. Math. Mech.*, 1948, vol. 12, pp. 529–539.
25. Ladyzhenskaya O. A. *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, vol. 49. New York, Springer-Verlag, 1985, xxx+322 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4317-3>.
26. Samarskii A. A. *Teoriia raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1983, 616 pp. (In Russian)
27. Samarskii A. A., Gulin A. B. *Ustoichivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)



УДК 517.956.6

Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения

Х. Р. Расулов^{1,2}

¹ Бухарское отделение Института математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

² Бухарский государственный университет, Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

Аннотация

Доказана однозначная разрешимость аналога задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Введен класс R_1 обобщенных решений в гиперболической части области. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Доказательство существования решения проводится методом интегральных уравнений. Краевая задача сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений, разрешимость которой доказана с помощью принципа Шаудера. В результате применения принципа Шаудера получена глобальная разрешимость исследуемой задачи без каких-либо ограничений на размер площади рассматриваемой области и на значение заданных функций.

Ключевые слова: обобщенное решение, нормальная кривая, метод интегралов энергии, интегральное уравнение нормального типа, индекс интегрального уравнения, регуляризация, равностепенная непрерывность, принцип Шаудера.

Получение: 7 марта 2022 г. / Исправление: 6 октября 2022 г. /

Принятие: 28 октября 2022 г. / Публикация онлайн: 9 декабря 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Расулов Х. Р. Аналог задачи Трикоми для квазилинейного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 607–629. EDN: BSPTXJ. DOI: 10.14498/vsgtu1914.

Сведения об авторе

Хайдар Рауфович Расулов  <https://orcid.org/0000-0001-8525-4701>

кандидат физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник;

e-mail: xrasulov71@mail.ru

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\text{sign } y|y|^m U_{xx} + \text{sign } x|x|^m U_{yy} = f(x, y, U), \quad (1)$$

где $m = \text{const}$, причем $2/3 \leq m < 2$.

Пусть Ω — конечная односвязная область на плоскости переменных (x, y) , ограниченная при $x > 0, y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0: x^{2p} + y^{2p} = 1$, а при $x < 0, y > 0$ и $x > 0, y < 0$ — характеристиками $BC: (-x)^p + y^p = 1, CD: x + y = 0, DA: x^p + (-y)^p = 1$ уравнения (1), соответственно, $2p = m + 2$.

Введем обозначения:

$$\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, \quad \Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : x > 0, y < 0\},$$

$$\Omega_2 = \Omega \cap \{(x, y) : x < 0, y > 0\}, \quad I_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\},$$

$$I_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}, \quad P = \{(x, y, U) : (x, y) \in \bar{\Omega}, -\infty < U < +\infty\}.$$

ЗАДАЧА Т. Найти функцию $U(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $U(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2)$;
- 2) $U(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области Ω_0 ;
- 3) $U(x, y)$ — обобщенное решение класса \mathbf{R}_1 уравнения (1) в области $\Omega_i, i = 1, 2$;
- 4) $U(x, y)$ — удовлетворяет краевым условиям:

$$U(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \sigma_0,$$

$$U|_{DA} = 0, \quad 2^{-1/p} \leq x \leq 1,$$

$$U|_{BC} = 0, \quad 2^{-1/p} \leq y \leq 1;$$

- 5) на линиях параболического вырождения уравнения (1) выполняются условия склеивания:

$$U_y(x, +0) = U_y(x, -0), \quad (x, 0) \in I_1; \quad U_x(+0, y) = U_x(-0, y), \quad (0, y) \in I_2,$$

причем $U_y(x, 0)$ ($U_x(0, y)$) непрерывна в I_1 (I_2), а при $x \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$) может иметь особенность порядка меньше единицы, а при $x \rightarrow 1$ ($y \rightarrow 1$) ограничена.

В настоящей работе исследуется однозначная разрешимость задачи Т для уравнения (1).

Краевые задачи для линейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения изучены достаточно глубоко. Так, в работе [1] доказан критерий единственности решения первой краевой задачи методом спектрального разложения для уравнения эллиптико-гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями степенного вырождения. В [2] получены условия на комплексный параметр, при которых решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя линиями изменения типа единственно.

В работах [3, 4] исследованы внешние задачи Трикоми и Франкля, а также Бицадзе—Лаврентьева для уравнений смешанного типа Бицадзе—Лаврентьева с восемью параболическими вырождающимися прямыми и предложены некоторые открытые задачи, имеющие жизненно важные значения в механике жидкости.

В [5] получены условия на комплексный параметр, при которых единственно решение задачи Трикоми для уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа. В [6, 7] для уравнения с двумя перпендикулярными внутренними линиями изменения типа изучены задачи с граничными условиями первого и второго рода на границе прямоугольной области и спектральным методом доказаны теоремы единственности и существования решения.

В работе [8] исследована нелокальная задача для уравнения смешанного типа с перпендикулярными линиями вырождения, когда на эллиптической части границы области задано условие Дирихле, а в гиперболических частях обобщенные производные от значений решения на характеристиках поточечно связаны со значениями решения и нормальных производных от нее на линиях параболического вырождения.

В работе [9] исследована граничная задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе в классе регулярных и ограниченных в бесконечности решений.

Однако разрешимость краевых задач для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения изучена сравнительно мало, поскольку нет общей теории, которая может быть применена для исследования таких уравнений. Среди последних работ можно отметить [10, 11].

2. Класс R_1 . Рассмотрим линейное уравнение

$$LU \equiv \text{sign } y|y|^m U_{xx} + \text{sign } x|x|^m U_{yy} + c(x, y)U = f(x, y) \quad (2)$$

в области Ω_i , $i = 1, 2$, где $c(x, y)$ и $f(x, y)$ — заданные непрерывные функции.

Решение задачи Коши в области Ω_1 (Ω_2) с начальными данными

$$\begin{aligned} U(x, 0) = \tau_1(x), \quad (x, 0) \in \bar{I}_1, \quad \lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y) = \nu_1(x), \quad (x, 0) \in I_1 \\ (U(0, y) = \tau_2(y), \quad (0, y) \in \bar{I}_2, \quad \lim_{x \rightarrow -0} U_x(x, y) = \nu_2(y), \quad (0, y) \in I_2) \end{aligned}$$

для уравнения (2) с помощью метода Римана [12, стр. 32] представим в виде

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) = U_0(\xi, \eta) + \int_{\xi}^{\eta} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} H_i(\xi', \eta') c_i(\xi', \eta') U_0(\xi', \eta') V_i(\xi', \eta'; \xi, \eta) d\eta' + \\ + \int_{\xi}^{\eta} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} H_i(\xi', \eta') f_i(\xi', \eta') V_i(\xi', \eta'; \xi, \eta) d\eta' \equiv U_0(\xi, \eta) + \bar{U}(\xi, \eta), \quad (3) \end{aligned}$$

где $\sqrt{\xi} = \text{sign } x|x|^p + \text{sign } y|y|^p$, $\sqrt{\eta} = |x|^p + |y|^p$,

$$\begin{aligned} U_0(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_{\xi}^{\eta} \frac{(\eta - \xi)^{1-2\beta} \tau_i(t^{1/(2p)})}{(\eta - t)^{1-\beta} (t - \xi)^{1-\beta}} dt - \\ - \frac{2^{4\beta-2} \Gamma(1-2\beta)}{p \Gamma^2(1-\beta)} \int_{\xi}^{\eta} \frac{t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)})}{(\eta - t)^{\beta} (t - \xi)^{\beta}} dt; \end{aligned}$$

$U_0(\xi, \eta)$ — решение задачи Коши для уравнения (2) при $c(x, y) \equiv f(x, y) \equiv 0$ в области Ω_i , $i = 1, 2$; $c_i(\xi, \eta) = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, $f_i(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$,

$H_i(\xi, \eta) = 2^{8\beta-4}/(\sqrt{\xi\eta}(\eta - \xi)^{4\beta}p^2)$, $V_i(\xi', \eta'; \xi, \eta)$ — функция Римана для уравнения $LU = 0$ в области Δ ; Δ — образ области Ω_i , $i = 1, 2$, на плоскости (ξ, η) , $2\beta = m/(m + 2)$, причем $1/8 \leq \beta < 1/4$. Здесь и далее при $i = 1$ $x > 0$, $y < 0$, при $i = 2$ $x < 0$, $y > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением класса \mathbf{R}_1 [12, стр. 38] уравнения (2) в области Ω_i , $i = 1, 2$, назовем функцию $U(\xi, \eta)$, определяемую формулой (3), где $\tau_i(t^{1/(2p)})$ и $t^{-1/(2p)}\nu_i(t^{1/(2p)})$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера с показателями $\alpha_1 > 1 - \beta$ и $\alpha_2 > \beta$ при $0 < t < 1$ соответственно.

Для дальнейших исследований класса \mathbf{R}_1 будем предполагать, что коэффициент $c(x, y)$ и свободный член $f(x, y)$ уравнения (2) удовлетворяют условиям

$$||x|^{2p} - |y|^{2p}|^{-1}|xy|^{-\gamma}c(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_i), \quad (4)$$

$$||x|^{2p} - |y|^{2p}|^{-1}|xy|^{-\gamma}f(x, y) \in C^1(\bar{\Omega}_i), \quad i = 1, 2, \quad \gamma > 2\beta. \quad (5)$$

Имеют место следующие леммы.

ЛЕММА 1. Если $U(x, y)$ — обобщенное решение класса \mathbf{R}_1 уравнения (2) в области Ω_1 (Ω_2), то U_x и U_y непрерывны в области Ω_1 (Ω_2), а U_y (U_x) непрерывна вплоть до линии вырождения OA (OB) и

$$\lim_{y \rightarrow -0} \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_1(x), \quad 0 < x < 1 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial U}{\partial x} = \nu_2(y), \quad 0 < y < 1 \right).$$

ЛЕММА 2. Для любого обобщенного решения $U(\xi, \eta) \in \mathbf{R}_1$ можно найти такую последовательность $\{U_n(\xi, \eta)\}_{n \in \mathbb{N}}$ дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (2) таких, что в любом $\bar{\Delta}_1 \in \Delta$ будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\xi, \eta) = U(\xi, \eta)$$

и для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$:

$$\left| \frac{\partial U_n}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \xi} \right| < \varepsilon(\eta - \xi)^{-2\beta}, \quad \left| \frac{\partial U_n}{\partial \eta} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right| < \varepsilon(\eta - \xi)^{-2\beta}.$$

Доказательства лемм 1 и 2 проводятся аналогично доказательству леммы [12, стр. 38] с учетом условий (4) и (5).

3. Единственность решения задачи Т.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Регулярным решением уравнения (1) в области Ω_0 будем называть функцию $U(x, y) \in C(\bar{\Omega}_0) \cap C^2(\Omega_0)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω_0 .

ТЕОРЕМА 1. Если функция $f(x, y, U)$ непрерывно дифференцируема по всем аргументам в P и удовлетворяет условиям

$$0 \leq f_U(x, y, U) < \frac{1}{4}m(m + 2)|xy|^{-2}||x|^{-2p} - |y|^{-2p}|, \quad (x, y) \in \Omega_1 \text{ } (\Omega_2), \quad (6)$$

$$0 \leq f_U(x, y, U), \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (7)$$

то задача Т не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть существуют два решения $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$, тогда их разность $W(x, y) = U_1(x, y) - U_2(x, y)$ будет удовлетворять уравнению

$$\text{sign } y|y|^m W_{xx} + \text{sign } x|x|^m W_{yy} = f(x, y, U_1) - f(x, y, U_2) \quad (8)$$

с граничными условиями

$$W(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \sigma_0,$$

$$W|_{DA} = 0, \quad 2^{-1/p} \leq x \leq 1; \quad W|_{BC} = 0, \quad 2^{-1/p} \leq y \leq 1.$$

Так как функция $f(x, y, U)$ имеет непрерывное производное по U , правую часть уравнения (8) запишем в виде [13, стр. 321]:

$$f(x, y, U_1) - f(x, y, U_2) = \bar{f}_U W, \quad (9)$$

где

$$\bar{f}_U = \int_0^1 f_U(x, y, tU_1 + (1-t)U_2) dt.$$

Тогда в силу (9) уравнение (8) принимает вид

$$\bar{L}W \equiv \text{sign } y|y|^m W_{xx} + \text{sign } x|x|^m W_{yy} - \bar{f}_U W = 0. \quad (10)$$

Для дальнейшего доказательства теоремы 1 приведем две леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $W(x, y)$ — регулярное решение уравнения (10) в области Ω_0 , обладающее следующими свойствами:

- 1) функции $x^{m/2}W_y(x, y)$ и $y^{m/2}W_x(x, y)$ ограничены в $\bar{\Omega}_0$;
- 2) функция

$$\bar{v}_1(x) = \lim_{y \rightarrow +0} W_y(x, y) \quad \left(\bar{v}_2(y) = \lim_{x \rightarrow +0} W_x(x, y) \right)$$

непрерывна в I_1 (I_2), а при $x \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$) может обращаться в бесконечность порядка не выше $2\beta/(1-2\beta)$, а при $x \rightarrow 1$ ($y \rightarrow 1$) ограничена;

- 3) $W(x, y)$ обращается в нуль на кривой σ_0 .

Тогда имеет место формула

$$\iint_{\Omega_0} (y^m W_x^2 + x^m W_y^2 + \bar{f}_U W^2) dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_0^1 t^m \bar{\tau}_i(t) \bar{v}_i(t) dt = 0,$$

где $W(x, 0) = \bar{\tau}_1(x)$, $(x, 0) \in \bar{I}_1$; $W(0, y) = \bar{\tau}_2(y)$, $(0, y) \in \bar{I}_2$.

Доказательство. Интегрируя тождество $W\bar{L}W \equiv 0$ по области $\Omega_{0\varepsilon}$, получаемой исключением из Ω_0 ε -окрестностей точек O , A и B с помощью нормальных кривых, имеющих параметр $\varepsilon > 0$ и центры соответственно в точках O , A и B , и применяя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_{0\varepsilon}} (y^m W_x^2 + x^m W_y^2 + \bar{f}_U W^2) dx dy + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\varepsilon^{1/(2p)}}^{1-\varepsilon^{1/(2p)}} t^m \bar{\tau}_i(t) \bar{v}_i(t) dt + \sum_{j=1}^3 \int_{c_{j\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

где $c_{j\varepsilon}$ — части упомянутых нормальных кривых, лежащих в области Ω_0 ;

$$A_s[W] = y^m \frac{dy}{ds} \frac{\partial W}{\partial x} - x^m \frac{dx}{ds} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \frac{dy}{ds} = -\cos(n, x), \quad \frac{dx}{ds} = \cos(n, y),$$

n — внутренняя нормаль к $c_{j\varepsilon}$, $j = 1, 2, 3$.

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^3 \int_{c_{j\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0.$$

Пусть $j = 1$ и кривая $c_{1\varepsilon}$ представлена параметрическими уравнениями

$$p^{-1}x^p = \varepsilon \cos \theta, \quad p^{-1}y^p = \varepsilon \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2,$$

тогда из (11) имеем

$$\begin{aligned} \int_{c_{1\varepsilon}} W A_s[W] ds &= \\ &= \varepsilon \int_0^{\pi/2} W W_x [p\varepsilon \sin \theta]^{2\beta} \cos \theta d\theta + \varepsilon \int_0^{\pi/2} W W_y [p\varepsilon \cos \theta]^{2\beta} \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условий 1), 2) леммы 3 и с учетом $1/8 \leq \beta < 1/4$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_{1\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_{j\varepsilon}} W A_s[W] ds = 0, \quad j = 2, 3.$$

Отсюда и из (11), переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\iint_{\Omega_0} (y^m W_x^2 + x^m W_y^2 + \bar{f}_U W^2) dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_0^1 t^m \bar{\tau}_i(t) \bar{\nu}_i(t) dt = 0. \quad (12)$$

Заметим, что выполнение условий 1), 2) леммы 3 доказывается ниже. Лемма 3 доказана. \square

С другой стороны, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 4. Если $W(x, y)$ — обобщенное решение класса \mathbf{R}_1 уравнения (1) в области Ω_1 (Ω_2), обращающееся в нуль на DA (BC), а функция $f_U(x, y, U)$ удовлетворяет условию (6), то имеет место неравенство

$$\int_0^1 t^m \bar{\tau}_1(t) \bar{\nu}_1(t) dt \geq 0 \quad \left(\int_0^1 t^m \bar{\tau}_2(t) \bar{\nu}_2(t) dt \geq 0 \right). \quad (13)$$

Лемма 4 доказывается так же, как в работе [14], при этом дополнительно учитывается условие (6).

Отсюда в силу (7) и (13) из (12) получим, что $W(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_0$, откуда и следует единственность решения задачи Т. Теорема 1 доказана. \square

4. Существование решения задачи Т.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f(x, y, U)$ удовлетворяет условию

$$f(x, y, U) = (xy)^{2p+1} f_1(x, y, U), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_0, \quad (14)$$

$$f(x, y, U) = (|x|^{2p} - |y|^{2p})|xy|^{\gamma p} f_1(x, y, U), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \gamma > 2\beta, \quad (15)$$

где функция $f_1(x, y, U)$ имеет непрерывные производные первого порядка в P по всем аргументам и $\max(|f_1|, |f_{1u}|) \leq \text{const}$, то существует по крайней мере одно решение задачи Т.

Доказательство. Сначала рассмотрим линейное уравнение

$$\text{sign } y|y|^m U_{xx} + \text{sign } x|x|^m U_{yy} = f(x, y). \quad (16)$$

Решение задачи Коши—Гурса с граничными условиями

$$\lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y) = \nu_1(x), \quad (x, 0) \in I_1, \quad U|_{DA} = 0, \quad 2^{-1/p} \leq x \leq 1$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -0} U_x(x, y) = \nu_2(y), \quad (0, y) \in I_2, \quad U|_{BC} = 0, \quad 2^{-1/p} \leq y \leq 1 \right)$$

для уравнения (16) в области Δ методом, аналогичным методу из [12, стр. 87], представим в виде

$$U_i(\xi, \eta) = \gamma_3 \int_{\eta}^1 \frac{\rho_i(t) dt}{(t - \eta)^\beta (t - \xi)^\beta} - \int_{\eta}^1 d\eta' \int_{\xi}^{\eta'} H_i(\xi', \eta') f_i(\xi', \eta') V(1 - \eta', 1 - \xi'; 1 - \eta, 1 - \xi) d\xi', \quad (17)$$

где

$$\gamma_3 = 2^{-2/p} \Gamma(\beta) / (p \Gamma(1 - \beta) \Gamma(2\beta)), \quad \rho_i(t) = t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)}), \quad i = 1, 2,$$

$V(\xi', \eta'; \xi, \eta)$ — функция Римана—Адамара для уравнения (16) при $f(x, y) \equiv 0$ в области Δ и имеет вид [12, стр. 89]:

$$V(\xi', \eta'; \xi, \eta) = \begin{cases} (\eta' - \xi')^\beta (\eta - \xi)^{-\beta} F(\beta, 1 - \beta; 1; s), & \eta' \geq \xi, \\ k((\eta' - \xi')^{2\beta} (\xi - \xi')^{-\beta} (\eta - \eta')^{-\beta} F(\beta, \beta; 2\beta; 1/s)), & \eta' \leq \xi, \end{cases}$$

$$k = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(1 - \beta)}, \quad s = \frac{(\xi - \xi')(\eta - \eta')}{(\eta' - \xi')(\eta - \xi)},$$

$F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [12, стр. 39].

Положив в (17) $\eta = \xi = x$, имеем

$$\tau_i(x^{1/(2p)}) = \gamma_3 \int_x^1 \frac{\rho_i(t) dt}{(t - x)^{2\beta}} + \bar{L}_i(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

где

$$U(x, 0) = \tau_1(x), \quad (x, 0) \in \bar{I}_1; \quad U(0, y) = \tau_2(y), \quad (0, y) \in \bar{I}_2;$$

$$\bar{L}_i(x) = -k \int_x^1 d\eta \int_x^\eta H_i(\xi, \eta) f_i(\xi, \eta) (\eta - x)^{-\beta} (\xi - x)^{-\beta} (\eta - \xi)^{2\beta} d\xi, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи Неймана с граничными условиями $U(x, y) = 0, (x, y) \in \sigma_0$,

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial U}{\partial y} = \nu_1(x), \quad (x, 0) \in I_1; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial U}{\partial x} = \nu_2(y), \quad (0, y) \in I_2$$

для уравнения (16) в области Ω_0 аналогично [15, стр. 64] представим в виде

$$U(x, y) = - \int_0^1 t^m \nu_1(t) G_2(t, 0; x, y) dt - \int_0^1 t^m \nu_2(t) G_2(0, t; x, y) dt - \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta) G_2(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta, \quad (19)$$

где $G_2(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина задачи Неймана для уравнения (16) при $f(x, y) \equiv 0$ в области Ω_0 и имеет вид [16]:

$$G_2(\xi, \eta; x, y) = q_2(\xi, \eta; x, y) - (r_0^2)^{-2\beta} q_2(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$\begin{aligned} q_2(\xi, \eta; x, y) &= \gamma_{02} (r_1^2 r_2^2)^{-\beta} F(\beta, \beta; 2\beta; 1 - s), \\ \gamma_{02} &= 4^{2\beta-1} \Gamma^2(\beta) / (\pi \Gamma(2\beta)), \quad 1 - s = 1 - (r_3^2 r_4^2) / (r_1^2 r_2^2), \\ r_{1,2}^2 &= (\xi^p \mp x^p)^2 + (\eta^p \pm y^p)^2, \quad r_{3,4}^2 = (\xi^p \pm x^p)^2 + (\eta^p \pm y^p)^2, \\ r_0^2 &= x^{2p} + y^{2p}, \quad \bar{x}^p = x^p / r_0^2, \quad \bar{y}^p = y^p / r_0^2. \end{aligned}$$

Полагая в формуле (19) сначала $y = 0$, а затем $x = 0$ и заменяя x на $x^{1/(2p)}$, y на $y^{1/(2p)}$, t на $t^{1/(2p)}$ (потом y на x), находим соотношения между $\tau_i(x^{1/(2p)})$ и $\rho_i(x)$, $i = 1, 2$, принесенные из эллиптической части Ω_0 области Ω :

$$\begin{aligned} \tau_i(x^{1/(2p)}) + \frac{\gamma_{02}}{2p} \int_0^1 [|t - x|^{-2\beta} - (1 - xt)^{-2\beta}] \rho_i(t) dt + \\ + \frac{\gamma_{02}}{2p} \int_0^1 [(t + x)^{-2\beta} - (1 + xt)^{-2\beta}] \rho_j(t) dt = \\ = \bar{M}_i(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(x) &= - \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta) G_2(\xi, \eta; x^{1/(2p)}, 0) d\xi d\eta, \\ \bar{M}_2(x) &= - \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta) G_2(\xi, \eta; 0, x^{1/(2p)}) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Исключая функции $\tau_i(x^{1/(2p)})$ из этого соотношения и равенств (18) и применяя оператор $D_{x_1}^{1-2\beta}[\cdot]$ [17, стр. 43] к обеим частям полученного равенства, находим

$$A_i(\rho_i(x)) = \gamma_4 D_{x_1}^{1-2\beta} \bar{L}_i(x) + \gamma_4 D_{x_1}^{1-2\beta} \bar{M}_i(x) \equiv L_i(x) + M_i(x), \quad 0 < x < 1, \quad (20)$$

где

$$A_i(\rho_i(x)) = \rho_i(x) - \lambda \int_0^1 \left[\frac{1-t}{1-x} \right]^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{1-tx} \right) \rho_i(t) dt + \\ + \lambda \int_0^1 \left[\frac{1-t}{1-x} \right]^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{1+tx} \right) \rho_j(t) dt, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \\ \lambda = \frac{\cos \beta\pi}{\pi(1 + \sin \beta\pi)}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{\gamma_3 \Gamma(1 - 2\beta)(1 + \sin \beta\pi)}.$$

Меняя порядок интегрирования в $L_i(x)$, получим

$$L_i(x) = -\frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)} \int_x^1 (\eta - x)^{\beta-1} d\eta \int_x^\eta H_i(\xi, \eta) f_i(\xi, \eta) (\eta - \xi) (\xi - x)^{\beta-1} d\xi = \\ = -\frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)} (1-x)^{1+2\beta} \int_0^1 t^{2\beta} dt \int_0^1 (1-z) z^{\beta-1} H_i(x + (1-x)tz, x + (1-x)t) \times \\ \times f_i(x + (1-x)tz, x + (1-x)t) dz, \quad i = 1, 2.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое правой части интегрального уравнения (20) и учитывая, что $G_2(\xi, \eta; 1, 0) = G_2(\xi, \eta; 0, 1) = 0$, будем иметь

$$M_i(x) = \frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)} \int_x^1 (t-x)^{2\beta-1} \overline{M}'_i(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

Проводя вычисления аналогично [10], нетрудно убедиться, что функция Грина $G_2(\xi, \eta; x, y)$ и ее производные по x и y допускают следующие оценки:

$$|G_2(\xi, \eta; x, y)| \leq C / (r_1^{2\beta} r_2^{2\beta} r_4^{2\varepsilon}), \quad |G_{2x}(\xi, \eta; x, y)| \leq C / (r_1^{2\beta} r_4), \\ |G_{2y}(\xi, \eta; x, y)| \leq C / (r_2^{2\beta} r_4),$$

где C — известная константа, зависящая от заданных функций; ε — достаточно малое положительное число.

Учитывая оценки функции Грина и принимая во внимание условие (14), заключаем, что функции

$$\iint_{\Omega_0} G_{2x}(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{и} \quad \iint_{\Omega_0} G_{2y}(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

ограничены в $\overline{\Omega}_0$. Из теоремы 3.6 [17, стр. 65] следует, что $M_i(x) \in H^{0,2\beta}(0, 1)$, $i = 1, 2$, а функции $L_i(x)$ в силу условий (15) принадлежат классу $C^1(0, 1)$ и, кроме того, $M_i(x) + L_i(x)$, $i = 1, 2$, имеют нули порядка 2β при $x = 1$.

Введя обозначения

$$\mu_i(x) = \rho_1(x) \pm \rho_2(x), \quad Q_i(x) = L_1(x) + M_1(x) \pm (L_2(x) + M_2(x))$$

и произведя замену переменных $\tau = 2t^2/(1+t^4)$, $\zeta = 2x^2/(1+x^4)$, перепишем систему (20) в виде

$$m_i(\zeta) \mu_i(\zeta) - \lambda \int_0^1 \frac{m_i(\tau) \mu_i(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau = P_i(\zeta) + R_i(\zeta), \quad (21)$$

где

$$P_i(\zeta) = \mp \lambda m_i(x) \int_0^1 \left[\frac{1-x}{1-t} \right]^{2\beta} \frac{1-t^2}{(x+t)(1+xt)} \left(1 - \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{2\beta} \right) \mu_i(t) dt \equiv \\ \equiv m_i(x) \int_0^1 K_i(x, t) \mu_i(t) dt, \quad R_i(\zeta) = m_i(x) Q_i(x), \quad i = 1, 2; \quad (22)$$

$$m_1(x) = \frac{1+x^4}{x(1-x)^{2\beta}}, \quad m_2(x) = \frac{1+x^4}{(1+x^2)(1-x)^{2\beta}}.$$

С учетом свойства $M_i(x) + L_i(x)$ из (22) имеем, что $R_i(\zeta) \in H^{0,2\beta}(0, 1)$, $i = 1, 2$, $R_1(\zeta)$ имеет особенность порядка $1/2$ при $\zeta \rightarrow 0$, а при $\zeta \rightarrow 1$ функции $R_i(\zeta)$ ограничены.

Таким образом, задача Т для уравнения (16) эквивалентна в смысле разрешимости системе сингулярных интегральных уравнений (21). Так как $1 + \pi^2 \lambda^2 \neq 0$, уравнение (21) является интегральным уравнением нормально-го типа. Кроме того, индекс интегрального уравнения (21) равен нулю в классе $h(1)$, т.е. в классе функций, ограниченных при $\zeta \rightarrow 1$ и неограниченных при $\zeta \rightarrow 0$.

Регуляризируя уравнение (21) методом Карлемана–Векуа [18, стр. 194], получим

$$\mu_i(x) + \int_0^1 \bar{K}_i(x, t) \mu_i(t) dt = \bar{Q}_i(x), \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

где $\bar{K}_i(x, t)$ и $\bar{Q}_i(x)$ выражаются через известные функции и допускают оценки

$$|\bar{K}_i(x, t)| \leq C_1 x^{\beta-1/2} (1-x)^{2\beta} ((t+x)^{2\beta-1} + t^{\beta-1/2-\delta_1}), \quad (24)$$

$$|\bar{Q}_i(x)| \leq C_2 x^{\beta-1/2} (1-x)^{2\beta}, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

где C_1 и C_2 — известные константы, $0 < \delta_1 < \beta/2$.

Заметим, что уравнение (23) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи Т для уравнения (16). Решение уравнения (23) (возвращаясь к старым обозначениям) представим в виде

$$\rho_1(x) = \frac{1}{2} (\bar{R}_1(\bar{Q}_1(x)) + \bar{R}_2(\bar{Q}_2(x))), \quad \rho_2(x) = \frac{1}{2} (\bar{R}_1(\bar{Q}_1(x)) - \bar{R}_2(\bar{Q}_2(x))),$$

где

$$\bar{R}_i(\bar{Q}_i(x)) = \bar{Q}_i(x) + \int_0^1 \bar{Q}_i(t) \Gamma_i(x, t) dt,$$

$\Gamma_i(x, t)$ — резольвента ядра $\bar{K}_i(x, t)$, $i = 1, 2$. На основании (24) и (25) находим, что

$$|\rho_i(x)| \leq C_3 x^{-\beta_1} (1-x)^{2\beta}, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

где C_3 — известная константа, $\beta_1 = \max(1 - 4\beta, 1/2 - \beta)$.

Решение задачи Неймана в области Ω_0 обозначим через $U^+(x, y)$, а решение задачи Коши–Гурса в области Ω_i через $U_i^-(x, y)$, $i = 1, 2$. Тогда функция

$$U(x, y) = \begin{cases} U^+(x, y), & \text{при } (x, y) \in \bar{\Omega}_0, \\ U_i^-(x, y), & \text{при } (x, y) \in \bar{\Omega}_i, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

является решением задачи Т для уравнения (16).

Если считать нелинейную часть уравнения (1) известной, то задача Т для этого уравнения вышеизложенным методом сводится к следующей системе:

$$U^+(x, y) \equiv - \int_0^1 t^m \nu_1(t) G_2(t, 0; x, y) dt - \int_0^1 t^m \nu_2(t) G_2(0, t; x, y) dt - \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta, U) G_2(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta, \quad (27)$$

$$U^-(x, y) \equiv U_i(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \gamma_3 \int_{\eta}^1 \frac{t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)})}{(t - \eta)^\beta (t - \xi)^\beta} dt - \int_{\eta}^1 d\eta' \int_{\xi}^{\eta'} H_i(\xi', \eta') f_i(\xi', \eta', U_i) \times \\ \times V(1 - \eta', 1 - \xi'; 1 - \eta, 1 - \xi) d\xi', \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

Обозначим через $F_0(U)$ и $F_i(U)$, $i = 1, 2$, интегральные операторы, равные правым частям уравнений (27) и (28) соответственно. Докажем, что $F(U)$ отображает множество $S = \{U(x, y) \in C(\bar{\Omega}), |U| \leq C^*\}$ в себя, где

$$F(U) = \begin{cases} F_0(U), & \text{при } (x, y) \in \bar{\Omega}_0, \\ F_i(U), & \text{при } (x, y) \in \bar{\Omega}_i, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

$$U(x, y) = \begin{cases} U^+(x, y), & \text{при } (x, y) \in \bar{\Omega}_0, \\ U_i^-(x, y), & \text{при } (x, y) \in \bar{\Omega}_i, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

C^* — известная константа, зависящая от $\max(|f(x, y, U)|, m, \gamma_{02})$.

Действительно, принимая во внимание $|f_1(x, y, U)| \leq M$, находим, что для любых $U(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ интегральный оператор $|F(U)| \leq C^*$.

Это верно и для $U(x, y) \in S$. Отсюда вытекает, что множество всех функций $U = F(U)$, $U(x, y) \in S$ равномерно ограничено.

Докажем, что множество функций $F_i(U)$ $i = 0, 1, 2$, равностепенно непрерывно. Из (27) находим

$$|F_0(U(x_1, y_1)) - F_0(U(x_2, y_2))| \leq J_1 + J_2 + J_3,$$

$$J_1 = \left| \int_0^1 t^m \nu_1(t) (G_2(t, 0; x_1, y_1) - G_2(t, 0; x_2, y_2)) dt \right|, \quad (29)$$

$$J_2 = \left| \int_0^1 t^m \nu_2(t) (G_2(0, t; x_1, y_1) - G_2(0, t; x_2, y_2)) dt \right|, \quad (30)$$

$$J_3 = \left| \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta, U) (G_2(\xi, \eta; x_1, y_1) - G_2(\xi, \eta; x_2, y_2)) d\xi d\eta \right|. \quad (31)$$

Из (29) имеем

$$J_1 \leq \left| \int_0^1 t^m \nu_1(t) (q_2(t, 0; x_1, y_1) - q_2(t, 0; x_2, y_2)) dt \right| + \left| \int_0^1 t^m \nu_1(t) ((r_{01}^2)^{-2\beta} q_2(t, 0; \bar{x}_1, \bar{y}_1) - (r_{02}^2)^{-2\beta} q_2(t, 0; \bar{x}_2, \bar{y}_2)) dt \right| \equiv J_{11} + J_{12},$$

где $r_{0i}^2 = x_i^{2p} + y_i^{2p}$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим первое слагаемое J_1 . Пусть

$$r_{1i}^2 = (t^p \mp x_1^p)^2 + y_1^{2p}, \quad r_{2i}^2 = (t^2 \mp x_2^p)^2 + y_2^{2p},$$

где при $i = 1$ берется верхний знак, а при $i = 2$ — нижний. Тогда, учитывая (26), имеем

$$J_{11} = \left| \int_0^1 \left(\frac{t^m \nu_1(t)}{(r_{11}^2 r_{12}^2)^\beta} - \frac{t^m \nu_1(t)}{(r_{21}^2 r_{22}^2)^\beta} \right) dt \right| \leq \left| \int_0^1 \frac{t^m \nu_1(t)}{r_{12}^{2\beta}} \left(\frac{1}{r_{11}^{2\beta}} - \frac{1}{r_{21}^{2\beta}} \right) dt \right| + \left| \int_0^1 \frac{t^m \nu_1(t)}{r_{21}^{2\beta}} \left(\frac{1}{r_{12}^{2\beta}} - \frac{1}{r_{22}^{2\beta}} \right) dt \right| \leq C_4 \rho^\beta \int_0^1 \frac{t^{p-1} (t^{p\beta} + x_1^{p\beta} + x_2^{p\beta} + y_1^{p\beta} + y_2^{p\beta})}{(r_{11}^2 r_{12}^2 r_{21}^2)^\beta} dt + C_5 \rho^\beta \int_0^1 \frac{t^{p-1} (t^{p\beta} + x_1^{p\beta} + x_2^{p\beta} + y_1^{p\beta} + y_2^{p\beta})}{(r_{12}^2 r_{21}^2 r_{22}^2)^\beta} dt \leq C_6 \rho^\beta, \quad (32)$$

где $\rho^2 = (x_1^p - x_2^p)^2 + (y_1^p - y_2^p)^2$, C_6 — известная константа.

Аналогичным образом с учетом (26) находим

$$|J_{12}| < C_7 \rho^\beta, \quad (33)$$

где C_7 — известная константа. В силу (32) и (33) имеем

$$J_1 < (C_6 + C_7) \rho^\beta. \quad (34)$$

Точно так же из (30) получим

$$J_2 < C_8 \rho^\beta, \quad (35)$$

где C_8 — известная константа. Принимая во внимание (34) и (35), имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) = [\varepsilon / (2(C_6 + C_7 + C_8))]^{1/\beta}$ такое, что при $\rho < \delta(\varepsilon)$ имеет место

$$J_1 + J_2 < \varepsilon/2. \quad (36)$$

Учитывая оценки функции Грина $G_2(\xi, \eta; x, y)$ и ее производных по x и y , заключаем, что функция

$$\iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta, U)G_2(\xi, \eta; x, y)d\xi d\eta$$

имеет ограниченные производные по x и y . Отсюда следует, что она удовлетворяет условию Липшица, т.е. из (31) находим

$$\left| \iint_{\Omega_0} f(\xi, \eta, U)(G_2(\xi, \eta; x_1, y_1) - G_2(\xi, \eta; x_2, y_2))d\xi d\eta \right| \leq \\ \leq C_9(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) = C_9\rho_1,$$

где C_9 — известная константа.

В этом случае, если $\rho_1 < \delta_1(\varepsilon) = \varepsilon/(2C_9)$, то

$$J_3 < \varepsilon/2. \tag{37}$$

Таким образом, в силу (36) и (37) находим, что

$$|F_0(U(x_1, y_1)) - F_0(U(x_2, y_2))| < \varepsilon$$

при $\rho^* < \delta^*(\varepsilon)$, где $\rho^* = \max(\rho, \rho_1)$, $\delta^*(\varepsilon) = \min(\delta(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon))$. Используя рассуждения, как и выше, получим

$$|F_i(U(x_1, y_1)) - F_i(U(x_2, y_2))| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда и вытекает равностепенная непрерывность рассматриваемого множества $F(U)$, $U(x, y) \in S$. Согласно теореме Арцела [19, стр. 198], операторы $F_i(U)$, $i = 0, 1, 2$, отображают S в себя. Следовательно, согласно принципу Шаудера [19, стр. 401], система интегральных уравнений (27), (28) имеет на S по крайней мере одно решение. Тем самым доказано существование решения задачи T.

Далее изучим поведение функций $x^{m/2}U_y(x, y)$ и $y^{m/2}U_x(x, y)$ в $\bar{\Omega}_0$. Дифференцируя (19) по y , имеем

$$x^{m/2}U_y^+(x, y) = A_1 + A_2 + A_3, \tag{38}$$

где

$$A_1 = -x^{m/2} \int_0^1 G_{2y}(t, 0; x, y)t^m \nu_1(t)dt,$$

$$A_2 = -x^{m/2} \int_0^1 G_{2y}(0, t; x, y)t^m \nu_2(t)dt,$$

$$A_3 = -x^{m/2} \iint_{\Omega_0} G_{2y}(\xi, \eta; x, y)f(\xi, \eta, U)d\xi d\eta.$$

Рассмотрим выражение A_1 :

$$A_1 = U_1(x, y) + U_2(x, y) + U_3(x, y) + U_4(x, y),$$

где

$$U_1(x, y) = a(x) \int_0^1 \frac{t^m \nu_1(t) dt}{r_1^{2\beta+2} r_2^{2\beta}}, \quad U_2(x, y) = -a(x) \int_0^1 \frac{t^m \nu_1(t) dt}{r_1^{2\beta} r_2^{2\beta+2}},$$

$$U_3(x, y) = -a(x) \int_0^1 \frac{t^{m+2p} \nu_1(t) dt}{r_{33}^{2\beta+2} r_{44}^{2\beta}}, \quad U_4(x, y) = a(x) \int_0^1 \frac{t^{m+2p} \nu_1(t) dt}{r_{33}^{2\beta} r_{44}^{2\beta+2}},$$

$$a(x) = 2\beta\gamma_0 p y^{2p-1} x^{m/2}, \quad r_{1,2}^2 = (t^p \mp x^p) + y^{2p}, \quad r_{33,44}^2 = (1 \pm t^p x^p)^p + t^{2p} y^{2p}.$$

Справедливы следующие очевидные неравенства:

$$r_0^2 \leq r_2^2, \quad x^p \leq r_0, \quad t^p y^p \leq r_{33}, \quad t^p y^p \leq r_{44}. \quad (39)$$

Учитывая (26), находим

$$\begin{aligned} |U_1(x, y)| &\leq \text{const} \cdot y^{2p-1} x^{m/2} \int_0^1 \frac{t^{p-1} dt}{r_1^{2\beta+2} r_2^{2\beta}} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot y^{2p-1} x^{m/2} \int_0^1 \frac{dt^p}{((t^p - x^p)^2 + y^{2p})^{\beta+1}}. \end{aligned}$$

Отсюда, заменяя $t^p = x^p + y^p z$, с учетом (39) находим

$$\begin{aligned} |U_1(x, y)| &\leq \text{const} \cdot \frac{x^{m/2} y^{3p-1}}{r_0^{2\beta} (y^{2p})^{\beta+1}} \int_{-x^p/y^p}^{(1-x^p)/y^p} \frac{dz}{(1+z^2)^{\beta+1}} \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\beta+1}} \leq \text{const}. \quad (40) \end{aligned}$$

Аналогично, используя (39), для $U_j(x, y)$ получим

$$|U_j(x, y)| \leq \text{const}, \quad j = 2, 3, 4. \quad (41)$$

Точно так же непосредственными вычислениями для A_j получаем следующую оценку:

$$|A_j| \leq \text{const}, \quad j = 2, 3. \quad (42)$$

Таким образом, принимая во внимание оценки функции Грина и ее производных, (40), (41), (42), из (38) находим, что

$$|x^{m/2} U_y(x, y)| \leq \text{const}.$$

Дифференцируя (27) по x , аналогично, как и выше, имеем

$$|x^{m/2} U_x(x, y)| \leq \text{const}.$$

Отсюда следует выполнение условия 1) леммы 3.

Теперь изучим поведение функции $U_{i\xi}(\xi, \eta)$ на $\bar{\Delta}$, $i = 1, 2$. Пусть

$$U_{i\xi}(\xi, \eta) = A_4 + A_5,$$

где

$$A_4 = \gamma_3 \left(\int_{\eta}^1 \frac{t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta (t-\xi)^\beta} dt \right)_{\xi},$$

$$A_5 = 4^{-2/p} p^{-2} \int_{\eta}^1 \frac{(\eta' - \xi)^{\gamma-3\beta}}{(\eta - \xi)^\beta} f_{1i}(\xi, \eta', U_i) d\eta' - \\ - 4^{-2/p} p^{-2} \int_{\eta}^1 d\eta' \int_{\xi}^{\eta'} (\eta' - \xi')^{\gamma-4\beta} f_{1i}(\xi', \eta', U_i) V_{\xi}(1 - \eta', 1 - \xi'; 1 - \eta, 1 - \xi) d\xi'.$$

Так как $t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)}) \in H^{0,2\beta}(0, 1]$, $i = 1, 2$, используя формулы [15, стр. 33], имеем

$$\int_{\eta}^1 \frac{t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta (t-\xi)^\beta} dt = \nu_i(1) \int_{\eta}^1 \frac{dt}{(t-\eta)^\beta (t-\xi)^\beta} + \\ + \int_{\eta}^1 (t-\eta)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} \left[\int_t^1 (s-t)^{\beta-1+\varepsilon} \psi(s) ds \right] dt.$$

Меняя порядок интегрирования и используя интегральное представление гипергеометрической функции, с учетом $\nu_i(1) = 0$, $i = 1, 2$, получаем

$$\int_{\eta}^1 \frac{t^{-1/(2p)} \nu_i(t^{1/(2p)})}{(t-\eta)^\beta (t-\xi)^\beta} dt = \frac{\Gamma(\beta + \varepsilon) \Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \times \\ \times \int_{\eta}^1 (s-\eta)^\varepsilon (s-\xi)^{-\beta} F\left(\beta, \beta + \varepsilon; 1 + \varepsilon; \frac{s-\eta}{s-\xi}\right) \psi(s) ds.$$

Отсюда следует, что A_4 существует и допускает оценку

$$|A_4| \leq \text{const} \cdot (\eta - \xi)^{-2\beta}. \quad (43)$$

В силу оценки производной функции Римана—Адамара по ξ [12, стр. 121]:

$$|V_{\xi}(1 - \eta', 1 - \xi'; 1 - \eta, 1 - \xi)| \leq \\ \leq |(\eta' - \xi') / ((\eta - \xi)^{2\beta} (\eta - \xi')^{1-\beta} |\eta' - \xi|^{1-\beta})|$$

и с учетом условия (15) непосредственными вычислениями получим

$$|A_5| \leq \text{const} \cdot (\eta - \xi)^{-\beta}. \quad (44)$$

В силу (43) и (44) получим

$$|U_{i\xi}(\xi, \eta)| \leq \text{const} \cdot (\eta - \xi)^{-2\beta}, \quad i = 1, 2.$$

Дифференцируя (28) по η , аналогично, как и выше, находим

$$|U_{i\eta}(\xi, \eta)| \leq \text{const} \cdot (\eta - \xi)^{-2\beta}, \quad i = 1, 2.$$

Что и требовалось доказать. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Метод, используемый при решении данной краевой задачи Т, без принципиальных затруднений применяется для неоднородных граничных условий и когда эллиптическая область Ω_0 ограничена достаточно гладкой кривой σ .

5. Заключение. Заметим, что при исследовании классической разрешимости краевых задач для квазилинейных уравнений смешанного типа с одной линией вырождения многими авторами применяется в основном метод последовательных приближений. В результате налагается сильное ограничение на размер площади рассматриваемой области или на значение заданных функций. Применение в данной работе принципа Шаудера ослабляет эти ограничения, что позволяет установить глобальную разрешимость краевой задачи Т.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Сабитов К. Б., Вагапова Э. В. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области // *Диффер. уравн.*, 2013. Т. 49, № 1. С. 68–78. EDN: PUAVHB.
2. Сабитов К. Б., Гималтдинова А. А. О единственности решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром с двумя линиями изменения типа // *Диффер. уравн.*, 2014. Т. 50, № 12. С. 1607–1622. EDN: TAJWWH DOI: <https://doi.org/10.1134/S037406411412005X>.
3. Rassias J. M. The exterior Tricomi and Frankl problems for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations with eight parabolic lines // *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2011. vol. 4, no. 2. pp. 186–208. <https://www.ejpm.com/index.php/ejpm/article/view/1175>.
4. Rassias J. M. The exterior Bitsadze–Lavrentjev problem for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations in a doubly connected domain // *Tbilisi Math. J.*, 2014. vol. 7, no. 2. pp. 111–136. DOI: <https://doi.org/10.2478/tmj-2014-0022>.
5. Гималтдинова А. А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа в специальной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 46–52. EDN: QCJAFH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1173>.
6. Гималтдинова А. А. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями перехода в прямоугольной области // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 634–649. EDN: VQDCMP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1384>.
7. Гималтдинова А. А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // *Докл. РАН*, 2016. Т. 466, № 1. С. 7–11. EDN: VCPQPZ. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565216010059>.
8. Репин О. А., Кумыкова С. К. О задаче с обобщёнными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 1(30). С. 150–158. EDN: QCJAIJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1141>.
9. Вагапов В. З. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в полуполосе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 7–19. EDN: ZCCHIT. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1647>.
10. Rasulov X. R. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration // *Uzbek Math. J.*, 2020. no. 3. pp. 117–125.

11. Rasulov X. R. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines // *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021. vol. 2070, 012002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2070/1/012002>.
12. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Выш. шк., 1977. 159 с.
13. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. Салахитдинов М. С., Менгзияев Б. О задачах типа задач Геллерстедта для одного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения / *Крайевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения*. Ташкент: Фан, 1976. С. 3–16.
15. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1970. 296 с.
16. Менгзияев Б. *Некоторые крайевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения*: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1978.
17. Самко С. Г. Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
18. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. М.: Наука, 1968. 512 с.
19. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Физматлит, 2002. 488 с. EDN: [SUQZOL](https://www.edn.ru/SUQZOL).

MSC: 35M12

An analogue of the Tricomi problem for a mixed type of quasilinear equation with two lines of degeneracy

X. R. Rasulov^{1,2}

¹ Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

² Bukhara State University, 11, Muhammad Igbol st., Bukhara, 705018, Uzbekistan.

Abstract

The paper proves the unique solvability of an analog of the Tricomi problem for a quasilinear equation of mixed type with two lines of degeneracy. The class \mathbf{R}_1 of generalized solutions in the hyperbolic part of the domain is introduced. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals. The existence of a solution is proved by the method of integral equations. The boundary value problem is reduced to an equivalent system of integral equations, the solvability of which is proved using the Schauder principle. As a result, the application of the Schauder principle resulted in the global solvability of the problem under study without any restrictions on the size of the area of the region under consideration and on the value of the given functions.

Keywords: generalized solution, normal curve, method of integrals energy, integral equation of normal type, index of integral equation, regularization, equicontinuity, Schauder's principle.

Received: 7th March, 2022 / Revised: 6th October, 2022 /

Accepted: 28th October, 2022 / First online: 9th December, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Differential Equations and Mathematical Physics Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Rasulov X. R. An analogue of the Tricomi problem for a mixed type of quasilinear equation with two lines of degeneracy, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 607–629. EDN: BSPXJ. DOI: [10.14498/vsgtu1914](https://doi.org/10.14498/vsgtu1914) (In Russian).

Author's Details:

Xaydar R. Rasulov  <https://orcid.org/0000-0001-8525-4701>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Leading Researcher;

e-mail: xrasulov71@mail.ru

References

1. Sabitov K. B., Vagapova E. V. Dirichlet Problem for an equation of mixed type with two degeneration lines in a rectangular domain, *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 68–78. EDN: RFIKQD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266113010072>.
2. Sabitov K. B., Gimaltdinova A. A. On the uniqueness of the solution of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with complex parameter and with two lines of type change, *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1609–1624. EDN: UFWDQD. DOI: <https://doi.org/DOI:10.1134/S0012266114120052>.
3. Rassias J. M. The exterior Tricomi and Frankl problems for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations with eight parabolic lines, *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 186–208. <https://www.ejppam.com/index.php/ejppam/article/view/1175>.
4. Rassias J. M. The exterior Bitsadze–Lavrentjev problem for quaterelliptic-quaterhyperbolic equations in a doubly connected domain, *Tbilisi Math. J.*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 111–136. DOI: <https://doi.org/10.2478/tmj-2014-0022>.
5. Gimaltdinova A. A. Tricomi problem for a mixed type equation with two lines of type changing in a special area, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 46–52 (In Russian). EDN: QCJAFH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1173>.
6. Gimaltdinova A. A. The Dirichlet problem for mixed type equation with two lines of degeneracy in a rectangular area, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 634–649 (In Russian). EDN: VQDCMP. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1384>.
7. Gimaltdinova A. A. Neumann problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with two type-change lines in a rectangular domain, *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 1–5. EDN: WWATAL. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064562416010038>.
8. Repin O. A., Kumykova S. K. On the problem with generalized operators of fractional differentiation for mixed type equation with two degeneracy lines, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 1(30), pp. 150–158 (In Russian). EDN: QCJAIJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1141>.
9. Vagapov V. Z. Dirichlet problem for the mixed type equation with two degeneration lines in a half-strip, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 7–19 (In Russian). EDN: ZCCHIT. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1647>.
10. Rasulov X. R. Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration, *Uzbek Math. J.*, 2020, no. 3, pp. 117–125.
11. Rasulov X. R. On the solvability of a boundary value problem for a quasilinear equation of mixed type with two degeneration lines, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2070, 012002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2070/1/012002>.
12. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Hyperbolic Equations]. Minsk, Vysh. Shk., 1977, 159 pp. (In Russian)
13. Courant R. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1964, 830 pp. (In Russian)
14. Salakhitdinov M. S., Mengziiaev B. On problems of the Gellerstedt type for one mixed-type equation with two lines of degeneracy, In: *Kraevye zadachi dlia differentsial'nykh uravnenii i ikh prilozheniia* [Boundary Value problems for Differential Equations and Their Applications]. Tashkent, Fan, 1976, pp. 3–16 (In Russian).
15. Smirnov M. M. *Uravneniia smeshannogo tipa* [Mixed Type Equations]. Moscow, Nauka, 1970, 296 pp. (In Russian)
16. Mengziyaev B. *Some boundary value problems for equations of mixed type with two lines of degeneracy*, Cand. Diss. (Phys. & Math. Sci.). Tashkent, 1978 (In Russian).
17. Samko S. G. Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)

18. Muskhelishvili N. I. *Singulyarnie integral'nie uravneniya* [Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1968, 512 pp. (In Russian)
19. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Fizmatlit, 1968, 488 pp. (In Russian). EDN: [SUQZOL](#)



УДК 517.95

Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка»

К. Б. Сабитов^{1,2}¹ Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии, Россия, 453103, Стерлитамак, пр. Ленина, 49.² Самарский государственный технический университет, Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Изучена начальная задача для уравнения колебаний прямоугольной пластины с граничными условиями типа «шарнир–заделка». Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Доказаны соответствующие теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщенных решений. Существование решения поставленной задачи проводится методом спектрального анализа и оно построено в виде суммы ортогонального ряда по системе собственных функций соответствующей двумерной спектральной задачи, которая строится методом разделения переменных. Дано полное обоснование сходимости построенного трехмерного ряда в классе регулярных решений рассматриваемого уравнения. Обобщенное решение определяется как равномерный предел последовательности регулярных решений начально-граничной задачи.

Ключевые слова: уравнение колебаний прямоугольной пластины, начально-граничная задача, энергетическое неравенство, единственность, ряд, существование, устойчивость.

Получение: 25 августа 2022 г. / Исправление: 7 ноября 2022 г. /

Принятие: 11 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2022 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Сабитов К. Б. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка» // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 4. С. 650–671. EDN: CXQCQU. DOI: 10.14498/vsgtu1950.

Сведения об авторе

Камиль Басирович Сабитов  <https://orcid.org/0000-0001-9516-2704>доктор физико-математических наук; главный научный сотрудник¹; профессор; каф. высшей математики²; e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка [1, с. 394]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 \Delta^2 u = F(x, y, t), \quad (1)$$

которое моделирует поперечные колебания тонкой однородной прямоугольной пластины толщины h (при этом ее толщина полагается малой по сравнению с другими размерами) со сторонами p и q , где $\alpha^2 = EJ/(\rho h)$; EJ — жесткость пластинки; ρ — масса на единицу площади пластинки; E — модуль упругости материала; J — момент инерции; $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$; $F(x, y, t)$ — непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу площади пластинки; $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) пластинки в момент времени.

Отметим, что многие задачи о колебаниях мембран, пластинок имеют важное прикладное значение в строительной механике, авиастроении, машиностроении, судостроении и т.д., которые изучены в известных работах ([2, с. 444–449], [3, с. 211–219], [4, с. 132–133], [5, с. 248–258], [6, с. 35–69] и др.).

Для определения колебания (смещения) $u(x, y, t)$ точек (x, y) пластинки нужно задать граничные условия на краях $x = 0$, $x = p$, $y = 0$ и $y = q$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующих краев. В этой работе изучим случай, когда стороны $x = 0$ и $x = p$ шарнирно закреплены, а стороны $y = 0$ и $y = q$ наглухо заделаны:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u_{xx}(0, y, t) = u(p, y, t) = u_{xx}(p, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq q, 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0, t) = u_y(x, 0, t) = u(x, q, t) = u_y(x, q, t) = 0, & 0 \leq x \leq p, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2)$$

Начальные условия такие же, как и в случае колебаний мембраны:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, t)|_{t=0} = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq q. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, 0 < t < T\}, \quad D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

где p, q и T — заданные положительные числа, и поставим следующую начальную-граничную задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y, t)$ со свойствами

$$u(x, y, t) \in C_{xy,t}^{4,2}(\overline{Q}), \quad (4)$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (5)$$

которая удовлетворяет начальным условиям (3) и граничным условиям (2), где $F(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции, символ $C_{xy,t}^{n,m}(D)$ означает множество функций, имеющих непрерывные частные производные по переменным x, y и t соответственно до n -го и m -го порядка включительно на множестве D , $n, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Отметим, что в работе [2, с. 444–449] путем представления решения в виде двойного ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}$$

и использования интегралов энергий найдены собственные частоты и форма собственных колебаний прямоугольной пластины в случае шарнирного закрепления на краях. В монографии [3, с. 211–219] исследуются колебания с условиями (2). Здесь сначала изучается задача, в постановке которой все края свободно оперты, затем на ее основе достаточно сложным путем исследуется поставленная задача. Полученные результаты являются приближенными.

В работе [4, с. 132–133] предлагается вариационный метод нахождения собственных частот колебаний.

В монографии [5, с. 250–251] отмечается аналог задачи с условиями (2) в идейном уровне без подробных исследований.

В книге [6, с. 35–69] используется метод асимптотических разложений по малому параметру для нахождения приближенных значений собственных частот и формы собственных колебаний пластины с различными режимами на краях. Но вопросы по построению решений в явной форме и обоснованию корректности поставленной нами задачи не изучены. В работах [7–11] изучены начально-граничные и обратные задачи для одномерного уравнения балки. В работе [12] в случае шарнирного закрепления пластины на краях доказаны теоремы существования и устойчивости решения начально-граничной задачи в классах регулярных и обобщенных решений.

В настоящей работе исследуется задача (2)–(5) (задача 1) для уравнения колебаний прямоугольной пластины с граничными условиями «шарнир–заделка», т.е. с условиями (2). Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленной начально-граничной задачи. Для этой задачи доказаны теоремы существования и устойчивости решения в классах регулярных и обобщенных решений. При этом решение построено в явном виде.

2. Энергетическое неравенство. Единственность решения.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует решение начально-граничной задачи (2)–(5), то при любом $t \in [0, T]$ для решения $u(x, y, t)$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy &\leq \\ &\leq e^T \left[\iint_D [\psi^2 + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)] dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \iiint_Q F^2(x, y, t) dx dy dt \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что интеграл

$$\begin{aligned} E_0(t) &= \frac{1}{2} \iint_D [\rho h u_t^2 + EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = \\ &= \rho h \frac{1}{2} \iint_D [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = \rho h E(t) \end{aligned}$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной пластинки при нулевых граничных условиях (2).

Действительно, кинетическая энергия движущейся пластинки состоит из поступательного движения элемента $dxdy$ параллельно смещению $u(x, y, t)$ и определяется интегралом

$$K(t) = \frac{1}{2} \iint_D \rho h u_t^2 dx dy,$$

где ρh — масса на единицу поверхности пластинки.

Потенциальная энергия колебаний пластинки зависит от жесткости EJ при изгибе и находится интегралом [2, с. 446]:

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \iint_D EJ(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2) dx dy.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t) = K(t) + \Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний пластинки.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} u_t Lu = & \frac{1}{2} [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)]_t' + \\ & + \alpha^2(u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy})_x' + \\ & + \alpha^2(u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy})_y' \end{aligned}$$

и, интегрируя его по области $Q_\tau = Q \cap \{t < \tau\}$, $0 < \tau \leq T$, будем иметь

$$E(\tau) - E(0) + J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \iiint_{Q_\tau} F u_t dx dy dt, \quad (7)$$

где

$$J_1 = \alpha^2 \iint_{S_1} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy})|_{x=p} dy dt,$$

$$J_2 = \alpha^2 \iint_{S_2} (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy})|_{y=q} dx dt,$$

$$J_3 = \alpha^2 \iint_{S_3} (u_t u_{xxx} - u_{tx} u_{xx} + u_t u_{xyy} - u_{ty} u_{xy})|_{x=0} dy dt,$$

$$J_4 = \alpha^2 \iint_{S_4} (u_t u_{yyy} - u_{ty} u_{yy} + u_t u_{xxy} - u_{tx} u_{xy})|_{y=0} dx dt,$$

S_i — грани параллелепипеда Q_τ , лежащие соответственно на плоскостях $x = p$, $y = q$, $x = 0$ и $y = 0$.

Пусть выполнены граничные условия (2): $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$. Тогда $u_t = u_{ty} = 0$ при $x = 0$ и $x = p$, поэтому интегралы $J_1 = J_3 = 0$. Аналогично $u_t = u_{tx} = u_{yx} = 0$ при $y = 0$ и $y = q$. В силу этого $J_2 = J_4$.

Тогда из равенства (7) следует, что

$$\begin{aligned} E(\tau) \leq E(0) + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} F^2(x, y, t) dx dy dt + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} u_t^2 dx dy dt = \\ = A + \frac{1}{2} \int_0^\tau dt \iint_{D_1 \cup D_2} u_t^2 dx dy \leq A + \int_0^\tau E(t) dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$A = E(0) + \frac{1}{2} \iiint_{Q_\tau} F^2(x, y, t) dx dy dt.$$

Отсюда, следуя [13, с. 77], получим

$$A + \int_0^T E(t) dt \leq A e^T. \quad (9)$$

Тогда из неравенств (8), (9) следует оценка (6). \square

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1 правая часть $F(x, y, t)$ уравнения (1) равна нулю, то при любом $t \in [0, T]$ справедливо равенство*

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \iint_D [\psi^2(x, y) + \alpha^2(\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2)] dx dy. \quad (10)$$

Равенство (10) означает, что полная энергия собственных колебаний однородной пластины остается в течение всего процесса колебаний постоянной и равной ее начальной энергии.

Справедливость равенства (10) следует из соотношения (7).

Следствие 2 (ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ). *Если существует функция $u(x, y, t)$, удовлетворяющая условиям (2)–(5), то она определяется единственным образом.*

Доказательство. Пусть существуют функции $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$, которые удовлетворяют условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x, y, t) - u_2(x, y, t) = u(x, y, t)$ принадлежит классу (4), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в Q , нулевым начальным условиям $u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) \equiv 0$ и граничным условиям (2). Для такого решения из равенства (10) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2} \iint_Q [u_t^2 + \alpha^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)] dx dy = 0$$

при любом $t \in [0, T]$. Данное равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_{xy} \equiv 0$ и $u_{yy} \equiv 0$ в области Q . Из этих условий следует, что $u(x, y, t) = ax + by + c$, где a , b и c – произвольные постоянные. По условию эта функция должна удовлетворять граничным условиям (2) и нулевым начальным условиям. Из этих условий следует, что $a = b = c = 0$. Следовательно, $u(x, y, t) \equiv 0$ в \bar{Q} . \square

3. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка». В уравнении (1) разделим переменные $u(x, y, t) = v(x, y)f(t)$. Тогда относительно $v(x, y)$ получим спектральную задачу

$$\Delta^2 v - \lambda^2 v = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (11)$$

$$v(0, y) = v_{xx}(0, y) = v(p, y) = v_{xx}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad (12)$$

$$v(x, 0) = v_y(x, 0) = v(x, q) = v_y(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p. \quad (13)$$

Решение спектральной задачи (11)–(13) будем искать в виде $v(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда из уравнения (11) будем иметь

$$\frac{X^{IV}}{X} = -\frac{Y^{IV}}{Y} - 2\frac{Y''}{Y}\frac{X''}{X} + \lambda^2 = -\mu^2.$$

Допустим, что $X'' = -C_0X$, где $C_0 = \text{const} > 0$. Тогда получим

$$X^{IV}(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad (14)$$

$$Y^{IV}(y) - 2C_0Y''(y) - (\mu^2 + \lambda^2)Y(y) = 0, \quad 0 < y < q. \quad (15)$$

Из условия $X'' = -C_0X$ вытекает, что $X^{IV} = -C_0X'' = C_0^2X$. Следовательно, из уравнения (14) получим, что $\mu^2 = -C_0^2$, и относительно $X(x)$ имеем спектральную задачу

$$X^{IV}(x) - C_0^2X(x) = 0, \quad 0 < x < p, \quad (16)$$

$$X(0) = X''(0) = X(p) = X''(p) = 0. \quad (17)$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением X^{IV} на множестве функций $C^4(0, p) \cap C^3[0, p]$, удовлетворяющих граничным условиям (17). Этот оператор является самосопряженным, так как задача, сопряженная задаче (16) и (17), совпадает с исходной. Отсюда следует, что все собственные значения оператора L являются действительными числами, и собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на $[0, p]$. Система собственных функций полна в пространстве $L_2[0, p]$. При этом оператор L является положительным, поэтому каждое собственное значение является неотрицательным и простым. Собственные функции задачи (16), (17) и соответствующие им собственные значения имеют следующий вид [10]:

$$X_m(x) = \sqrt{2/p} \sin d_m x, \quad (18)$$

$$C_0^2 = d_m^4 = (\pi m/p)^4, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Для функций $Y(y)$ на основании (15) и (13) имеем следующую задачу:

$$Y''(y) - 2C_0Y''(y) - (\lambda^2 - C_0^2)Y(y) = 0, \quad 0 < y < q. \quad (20)$$

$$Y(0) = Y'(0) = Y(q) = Y'(q) = 0. \quad (21)$$

Для дифференциального уравнения (20) составим характеристическое уравнение

$$k^4 - 2C_0k^2 + C_0^2 - \lambda^2 = 0,$$

имеющее корни

$$k_1 = \sqrt{C_0 + \lambda} = \alpha, \quad k_2 = -\alpha, \quad k_3 = \sqrt{C_0 - \lambda} = i\sqrt{\lambda - C_0} = i\beta, \quad k_4 = -i\beta.$$

Здесь считаем, что $C_0 + \lambda > 0$, $C_0 - \lambda < 0$. Тогда дифференциальное уравнение (20) имеет общее решение

$$Y(y) = a_1 \text{ch } \alpha y + a_2 \text{sh } \alpha y + a_3 \cos \beta y + a_4 \sin \beta y, \quad (22)$$

где a_i — произвольные постоянные.

Удовлетворив функции (22) первым двум условиям из (21), найдем

$$a_3 = -a_1, \quad a_4 = -\frac{\alpha}{\beta}a_2.$$

Тогда функция (22) примет вид

$$Y(y) = a_1(\operatorname{ch} \alpha y - \cos \beta y) + a_2\left(\operatorname{sh} \alpha y - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta y\right). \quad (23)$$

Теперь удовлетворим функцию (23) двум последним условиям из (21):

$$\begin{cases} a_1(\operatorname{ch} \alpha q - \cos \beta q) + a_2\left(\operatorname{sh} \alpha q - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta q\right) = 0, \\ a_1(\alpha \operatorname{sh} \alpha q + \beta \sin \beta q) + a_2\alpha(\operatorname{ch} \alpha q - \cos \beta q) = 0. \end{cases}$$

Для определения β приравняем к нулю определитель этой системы:

$$2\alpha\beta - 2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha q \cos \beta q - (\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha q \sin \beta q = 0. \quad (24)$$

Уравнение (24) перепишем в виде

$$\sin(\beta q + \gamma) = \frac{2\alpha\beta}{A}, \quad (25)$$

где $\gamma = \arcsin \frac{2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha q}{A}$,

$$A = \sqrt{(2\alpha\beta \operatorname{ch} \alpha q)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha q} = \sqrt{4\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh}^2 \alpha q}.$$

Из уравнения (25) найдем

$$\beta = \frac{1}{q} \left[\pi n + (-1)^n \arcsin \frac{2\alpha\beta}{A} - \gamma \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (26)$$

так как правая часть уравнения (25) больше нуля и меньше единицы.

Полученное равенство (26) относительно β является нелинейным уравнением. Для обоснования существования его решения рассмотрим функциональное уравнение

$$\beta = f(\beta) = \frac{1}{q} \left[\pi n + (-1)^n \arcsin \frac{2\alpha\beta}{A} - \gamma \right]$$

при фиксированном n .

Как известно, для разрешимости такого уравнения достаточно того, чтобы $|f'(\beta)| < 1$. Найдем производную:

$$f'(\beta) = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 3\beta^2) \operatorname{sh} \alpha q}{A^2} \left[(-1)^n + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \operatorname{ch} \alpha q \right].$$

Отсюда получим оценку

$$\begin{aligned}
 |f'(\beta)| &\leq \frac{2\alpha(\alpha^2 + 3\beta^2)[\alpha^2 - \beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch} \alpha q]}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh} \alpha q} = \\
 &= \frac{4\alpha(\alpha^2 + 3\beta^2)(\alpha^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha q}{2} + \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha q)}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh} \alpha q} = \\
 &= \frac{2\alpha(\alpha^2 + 3\beta^2)(\alpha^2 + (\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha q}{2})}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 \operatorname{sh} \alpha q},
 \end{aligned}$$

которая меньше 1 при больших β , следовательно, и при больших α (так как $\alpha > \beta$).

Тогда уравнение (26) имеет по крайней мере одно решение. Придавая n различные значения, получим счетное множество значений β_n , которые находятся из уравнения (25). При больших n справедлива асимптотическая формула

$$\beta_n \approx \pi n / q.$$

Соответствующая система собственных функций имеет вид

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}_{nm}(y) &= \\
 &= \frac{\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm} \sin \beta_n q}{\operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \cos \beta_n q} (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y) + \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y = \\
 &= A_{nm} (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y) + \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y = \\
 &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \cos \beta_n q} [\beta_n (\operatorname{sh} \alpha_{nm} q \cos \beta_n y - \operatorname{sh} \alpha_{nm} y \cos \beta_n q) - \\
 &\quad - \beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} (q - y) - \alpha_{nm} \sin \beta_n (q - y) + \\
 &\quad + \alpha_{nm} (\operatorname{ch} \alpha_{nm} y \sin \beta_n q - \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \sin \beta_n y)], \quad (27)
 \end{aligned}$$

которая, вообще говоря, зависит от номера m , так как $\alpha^2 = C_0 + \lambda = 2C_0 + \beta_n^2 = 2d_m^2 + \beta_n^2$ зависит от n и m .

Ортогональность системы собственных функций (27) задачи (20), (21) следует из того, что дифференциальный оператор, определенный дифференциальным выражением $Y^{IV} - 2C_0 Y''$ на множестве функций $C^4(0, q) \cap C^3[0, q]$, удовлетворяющих граничным условиям (21), является самосопряженным.

Найдем норму элементов системы собственных функций (27):

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{Y}_{nm}\|^2 &= \int_0^q \tilde{Y}_{nm}^2(y) dy = \\
 &= \int_0^q [A_{nm}^2 (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y)^2 + 2A_{nm} (\cos \beta_n y - \operatorname{ch} \alpha_{nm} y) \times \\
 &\quad \times (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y) + (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \sin \beta_n y)^2] dy = \\
 &= J_1 + J_2 + J_3.
 \end{aligned}$$

Вычислим интегралы J_i :

$$J_1 = A_{nm}^2 \int_0^q (\cos^2 \beta_n y - 2 \cos \beta_n y \operatorname{ch} \alpha_{nm} y + \operatorname{ch}^2 \alpha_{nm} y) dy =$$

$$= \frac{A_{nm}^2}{2} \left(q + \frac{\sin 2\beta_n q}{2\beta_n} \right) - \frac{2A_{nm}^2}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} \left[\alpha_{nm} \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q + \beta_n \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \right] + \\ + \frac{A_{nm}^2}{2} \left(q + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{2\alpha_{nm}} \right),$$

$$J_2 = 2A_{nm} \int_0^q \left(\beta_n \cos \beta_n y \operatorname{sh} \alpha_{nm} y - \alpha_{nm} \cos \beta_n y \sin \beta_n y - \right. \\ \left. - \beta_n \operatorname{ch} \alpha_{nm} y \operatorname{sh} \alpha_{nm} y + \alpha_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} y \sin \beta_n y \right) dy = \\ = \frac{2A_{nm}\beta_n}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} \left[\alpha_{nm} \cos \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q + \beta_n \sin \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm} \right] - \\ - 2A_{nm}\alpha_{nm} \frac{\sin^2 \beta_n q}{2\beta_n} - 2A_{nm}\beta_n \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} q}{2\alpha} + \\ + \frac{2A_{nm}\alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} \left[\alpha_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \beta_n \cos \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q + \beta_n \right] = \\ = - \frac{A_{nm}}{\alpha_{nm}\beta_n} (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm} \sin \beta_n q)^2,$$

$$J_3 = \int_0^q \left(\beta_n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} y - 2\beta_n \alpha_{nm} \operatorname{sh} \alpha_{nm} y \sin \beta_n y + \alpha_{nm}^2 \sin^2 \beta_n y \right) dy = \\ = \frac{\beta_n^2}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{2\alpha_{nm}} - q \right) - \frac{2\beta_n \alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} (\alpha_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \beta_n \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q) + \\ + \frac{\alpha_{nm}^2}{2} \left(q - \frac{\sin 2\beta_n q}{2\beta_n} \right).$$

Предварительно с учетом равенства (24) вычислим

$$\frac{2A_{nm}^2}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} \left[\alpha_{nm} \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q + \beta_n \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \right] + \\ + \frac{2\beta_n \alpha_{nm}}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} (\alpha_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \beta_n \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q) = \\ = \frac{2}{\alpha_{nm}^2 + \beta_n^2} \left[(A_{nm}^2 - \beta_n^2) \alpha_{nm} \cos \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q + \right. \\ \left. + (A_{nm}^2 + \alpha_{nm}^2) \beta_n \sin \beta_n q \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \right] = 2A_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q.$$

Тогда будем иметь

$$\|\tilde{Y}_{nm}\|^2 = \left(A_{nm}^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2} \right) q + \frac{A_{nm}^2}{4} \left(\frac{\sin 2\beta_n q}{\beta_n} + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{\alpha_{nm}} \right) + \\ + \frac{\beta_n^2 \operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{4\alpha_{nm}} - \frac{\alpha_{nm}^2}{4\beta_n} \sin 2\beta_n q - 2A_{nm} \sin \beta_n q \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \\ - \frac{A_{nm}}{\alpha_{nm}\beta_n} (\beta_n \operatorname{sh} \alpha_{nm} q - \alpha_{nm} \sin \beta_n q)^2 =$$

$$\begin{aligned}
 = & \left(A_{nm}^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2} \right) q + \frac{A_{nm}^2}{4} \left(\frac{\sin 2\beta_n q}{\beta_n} + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q}{\alpha_{nm}} \right) + \frac{\beta_n^2}{4\alpha_{nm}} \operatorname{sh} 2\alpha_{nm} q - \\
 & - \frac{\alpha_{nm}^2}{4\beta_n} \sin 2\beta_n q - \frac{A_{nm}\beta_n}{\alpha_{nm}} \operatorname{sh}^2 \alpha_{nm} q - \frac{A_{nm}\alpha_{nm}}{\beta_n} \sin^2 \beta_n q. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Ортонормированная система собственных функций задачи (20), (21) определяется по формуле

$$Y_{nm}(y) = \frac{1}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \tilde{Y}_{nm}(y), \quad (29)$$

где $\tilde{Y}_{nm}(y)$ находятся по формуле (27), норма $\|\tilde{Y}_{nm}\|$ — из формулы (28), а собственные значения β_n — из равенства (26).

На основании найденных собственных функций (18) и (29) одномерных спектральных задач (16), (17) и (20), (21) построим собственные функции

$$v_{mn}(x, y) = X_{mn}(x)Y_{nm}(y), \quad (30)$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{mn} = d_m^2 + \beta_n^2, \quad (31)$$

где d_m и β_n находятся из формул (19) и (26) соответственно.

Следуя работам [10, 14], введем функции

$$u_{mn}(t) = \iint_D u(x, y, t)v_{mn}(x, y) dx dy, \quad (32)$$

где $u(x, y, t)$ — решение начально-граничной задачи (2)–(5).

Дифференцируя равенство (32) по $t \in (0, T)$ дважды и учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{aligned}
 u''_{mn}(t) = & \iint_D F(x, y, t)v_{mn}(x, y) dx dy - \\
 & - \alpha^2 \iint_D (u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy})v_{mn}(x, y) dx dy. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2) и (12), (13), имеем

$$\iint_D u_{xxxx}v_{mn}(x, y) dx dy = d_m^4 \iint_D uv_{mn}(x, y) dx dy,$$

$$\begin{aligned}
 & \iint_D u_{yyyy}v_{mn}(x, y) dx dy = \\
 & = \int_0^p X_{mn}(x) dx \int_0^q u_{yyyy}Y_{nm}(y) dy = \iint_D u(x, y)X_{mn}(x)Y_{nm}^{IV}(y) dx dy = \\
 & = \iint_D u(x, y)X_{mn}(x)[2C_0Y_{nm}'' + (\lambda_{mn}^2 - C_0^2)Y_{nm}(y)] dx dy =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2d_m^2 \iint_D u X_{mn}(x) Y_{nm}''(y) dx dy + (\lambda_{mn}^2 - d_m^4) \iint_D uv_{mn}(x, y) dx dy, \\
 &\iint_D u_{xyxy} v_{mn}(x, y) dx dy = \int_0^q Y_{nm}(y) dy \int_0^p u_{yyxx} X_{mn}(x) dx = \\
 &= -d_m^2 \iint_D u_{yy} X_{mn}(x) Y_{nm}(y) dx dy = -d_m^2 \int_0^p X_{mn}(x) dx \int_0^q u_{yy} Y_{nm}(y) dy = \\
 &= -d_m^2 \iint_D u(x, y) X_{mn}(x) Y_{nm}''(y) dx dy.
 \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения этих интегралов в равенство (33), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $u_{mn}(t)$:

$$u_{mn}''(t) + \alpha^2 \lambda_{mn}^2 u_{mn}(t) = F_{mn}(t), \quad (34)$$

где

$$F_{mn}(t) = \iint_D F(x, y, t) v_{mn}(x, y) dx dy.$$

Общее решение дифференциального уравнения (34) находится по формуле

$$u_{mn} = a_{mn} \cos \alpha \lambda_{mn} t + b_{mn} \sin \alpha \lambda_{mn} t + \tilde{F}_{mn}(t), \quad (35)$$

где

$$\tilde{F}_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t F_{mn}(s) \sin[\omega_{mn}(t-s)] ds, \quad \omega_{mn} = \alpha \lambda_{mn}, \quad (36)$$

a_{mn} и b_{mn} — произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_{mn} и b_{mn} воспользуемся начальными условиями (3) и формулой (32):

$$\begin{aligned}
 u_{mn}(0) &= \iint_D u(x, y, 0) v_{mn}(x, y) dx dy = \\
 &= \iint_D \varphi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy = \varphi_{mn}, \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u'_{mn}(0) &= \iint_D u_t(x, y, 0) v_{mn}(x, y) dx dy = \\
 &= \iint_D \psi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy = \psi_{mn}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Удовлетворив функции (35) начальным условиям (37) и (38), найдем

$$a_{mn} = \varphi_{mn}, \quad b_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\alpha \lambda_{mn}}.$$

Подставляя найденные значения a_{mn} и b_{mn} в формулу (35), получим явный вид функций

$$u_{mn}(t) = \varphi_{mn} \cos \omega_{mn} t + \frac{\psi_{mn}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \tilde{F}_{mn}(t). \quad (39)$$

На основании частных решений (39) и (30) решение задачи (2)–(5) можно определить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)v_{mn}(x, y). \quad (40)$$

ЛЕММА 1. При $y \in [0, q]$ и больших n и t справедливы оценки

$$|Y_{nm}^i(y)| \leq M_i \alpha_{nm}^i, \quad i = \overline{0, 4},$$

где здесь и далее M_i – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от α , p , q и T .

Доказательство. Из формулы (27) следует, что при больших n и t

$$|\widetilde{Y}_{nm}^i(y)| \leq \widetilde{M}_{i+1} \alpha_{nm}^i, \quad i = \overline{0, 4}. \quad (41)$$

Здесь \widetilde{M}_i – также положительные постоянные.

Оценим норму $\|\widetilde{Y}_{nm}\|$. Для этого равенству (28) придадим несколько иной вид:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{Y}_{nm}\|^2 &= \left(A_n^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2}\right)q + \frac{\text{sh } \alpha_{nm}q}{2\alpha} [(A_n^2 + \beta_n^2) \text{ch } \alpha_{nm}q - 2A_n\beta_n \text{sh } \alpha_{nm}q] + \\ &\quad + \frac{\sin \beta_n q}{2\beta_n} [(A_n^2 - \alpha_{nm}^2) \cos \beta_n q - 2A_n\alpha_{nm} \sin \beta_n q] = \\ &= \left(A_n^2 + \frac{\alpha_{nm}^2 - \beta_n^2}{2}\right)q + \frac{\text{sh } \alpha_{nm}q}{2\alpha_{nm}} [(A_n - \beta_n)^2 e^{\alpha_{nm}q} + (A_n + \beta_n)^2 e^{-\alpha_{nm}q}] + \\ &\quad + \frac{A_n^2 + \alpha_{nm}^2}{2\beta_n} \sin \beta_n q \cos(\beta_n q + \gamma_{nm}), \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_{nm} = \arccos \frac{A_n^2 - \alpha_{nm}^2}{A_n^2 + \alpha_{nm}^2}.$$

Поскольку $A_n \sim \beta_n$ при больших n и t , отсюда следует, что $\|\widetilde{Y}_{nm}\| \sim \alpha_{nm}$. Тогда в силу неравенств (41) следует справедливость оценок, указанных в лемме 1. \square

ЛЕММА 2. При любом $t \in [0, t]$ справедливы оценки

$$|u_k(t)| \leq M_5 \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} \|F_{mn}\| \right), \quad (42)$$

$$|u_k''(t)| \leq M_6 (\lambda_{mn}^2 |\varphi_{mn}| + \lambda_{mn} |\psi_{mn}| + \lambda_{mn} \|F_{mn}\|), \quad (43)$$

$$\text{где } \|F_{mn}\| = \max_{0 \leq t \leq T} |F_{mn}(t)|.$$

Справедливость оценок (42) и (43) следует из формул (39), (36) и леммы 1.

Формально из ряда (40) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}''(t)v_{mn}(x, y), \quad (44)$$

$$u_{xxxx} = \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^4 u_{mn}(t) v_{mn}(x, y), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_{yyyy} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) X_m(x) Y_{nm}^{IV}(y) = \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t) X_m(t) [2d_m^2 Y_{nm}''(y) + (\lambda_{nm}^2 - d_m^4) Y_{nm}(y)] = \\ &= 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^2 u_{mn}(t) X_m(t) Y_{nm}''(y) + \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_n^2 \alpha_{nm}^2 u_{mn}(t) v_{nm}(x, y), \quad (46) \end{aligned}$$

$$u_{xxyy} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} d_m^2 u_{mn}(t) X_m(x) Y_{mn}''(y). \quad (47)$$

Ряд (40) при $(x, y, t) \in \bar{Q}$ на основании лемм 1 и 2 мажорируется рядом

$$M_7 \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1} |\psi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1} \|F_{mn}\|). \quad (48)$$

А ряды (44)–(47) аналогично при $(x, y, t) \in \bar{Q}$ на основании лемм 1 и 2 мажорируются рядом

$$M_8 \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}^4 (|\varphi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1} |\psi_{mn}| + \lambda_{mn}^{-1} \|F_{mn}\|). \quad (49)$$

Прежде обоснуем сходимость числового ряда (48).

ЛЕММА 3. Пусть

$$\varphi(x, y) \in C_{x,y}^{2,2}(\bar{D}), \quad \varphi(0, y) = \varphi(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q;$$

$$\varphi^{(2,0)}(x, 0) = \varphi^{(2,0)}(x, q) = \varphi^{(2,1)}(x, 0) = \varphi^{(2,1)}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p;$$

$$\psi(x, y) \in C_{x,y}^{1,1}(\bar{D}), \quad \psi(0, y) = \psi(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q;$$

$$\psi^{(1,0)}(x, 0) = \psi^{(1,0)}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p;$$

$$F(x, y, t) \in C(\bar{Q}) \cap C_{x,y}^{1,1}(\bar{D}), \quad F(0, y, t) = F(p, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$F_x(x, 0, t) = F_x(x, q, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда имеют место оценки

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{M_9}{d_m^2 \beta_n^2}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{M_{10}}{d_m \beta_n}, \quad \|F_{mn}\| \leq \frac{M_{11}}{d_m \beta_n}. \quad (50)$$

Доказательство. Проинтегрируем интеграл в (37) по частям два раза по переменной x . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} &= -\frac{1}{d_m^2} \iint_D \varphi_{(x,y)}^{(2,0)} v_{mn}(x,y) dx dy = \\ &= -\frac{1}{d_m^2} \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q \varphi^{(2,0)} Y_{nm}(y) dy. \end{aligned} \quad (51)$$

Внутренний интеграл снова два раза проинтегрируем по частям:

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)} Y_{nm}(y) dy = \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}^{(1)}(y) \Big|_0^q - \int_0^q \varphi^{(2,1)}(x,y) Y_{nm}^{(1)}(y) dy, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} Y_{nm}^{(1)}(y) &= \frac{1}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \int \tilde{Y}_{nm}(y) dy = \\ &= \frac{1}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \cos \beta_n q} \left[\operatorname{sh} \alpha_{nm} q \sin \beta_n y - \frac{\beta_n}{\alpha_{nm}} \operatorname{ch} \alpha_{nm} y \cos \beta_n q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_n}{\alpha_{nm}} \operatorname{ch} \alpha_{nm} (q-y) - \frac{\alpha_{nm}}{\beta_n} \cos \beta_n (q-y) + \operatorname{sh} \alpha_{nm} y \sin \beta_n q - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_{nm}}{\beta_n} \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \sin \beta_n y \right] = \frac{1}{\beta_n} \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y); \end{aligned}$$

функция $\bar{Y}_{nm}^{(1)}(y)$ ограничена при больших n и m .

Тогда равенство (52) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy &= -\frac{1}{\beta_n} \int_0^q \varphi^{(2,1)}(x,y) \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y) dy = \\ &= -\frac{1}{\beta_n} \int_0^q \varphi^{(2,2)}(x,y) Y_{nm}^{(2)}(y) dy. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Y_{nm}^{(2)}(y) &= \int \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y) dy = \\ &= \frac{1}{\beta_n} \frac{\alpha_{nm}}{\|\tilde{Y}_{nm}\|} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_{nm} q - \cos \beta_n q} \left[-\frac{\beta_n}{\alpha_{nm}} \operatorname{sh} \alpha_{nm} q \cos \beta_n y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_n^3}{\alpha_{nm}^3} \operatorname{sh} \alpha_{nm} y \cos \beta_n q - \frac{\beta_n^3}{\alpha_{nm}^3} \operatorname{sh} \alpha_{nm} (q-y) + \sin \beta_n (q-y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_n^2}{\alpha_{nm}^2} \operatorname{ch} \alpha_{nm} y \sin \beta_n q - \operatorname{ch} \alpha_{nm} q \sin \beta_n q \right] = \frac{1}{\beta_n} \bar{Y}_{nm}^{(2)}(y); \end{aligned} \quad (54)$$

функция $\bar{Y}_{nm}^{(2)}(y)$ также ограничена при больших n и m . С учетом представления (54) равенство (53) примет вид

$$\int_0^q \varphi^{(2,0)}(x,y) Y_{nm}(y) dy = \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^q \varphi^{(2,2)}(x,y) \bar{Y}_{nm}^{(2)}(y) dy. \quad (55)$$

Тогда из равенств (51) и (55) вытекает справедливость первой оценки из (50). Аналогично получим представления

$$\begin{aligned}\psi_{mn} &= \frac{1}{d_m} \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^p \cos d_m x dx \int_0^q \psi^{(1,0)}(x, y) Y_{nm}(y) dy = \\ &= \frac{1}{d_m \beta_n} \sqrt{\frac{2}{p}} \iint_D \psi^{(1,1)}(x, y) \cos d_m(x) \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y) dx dy, \\ F_{mn}(t) &= \frac{1}{d_m \beta_n} \sqrt{\frac{2}{p}} \iint_D F^{(1,1)}(x, y, t) \cos d_m(x) \bar{Y}_{nm}^{(1)}(y) dx dy,\end{aligned}$$

на основании которых убеждаемся в справедливости остальных оценок из (50). \square

В силу оценок (50) ряд (48) при $m, n \geq N_0$, N_0 — достаточно большое натуральное число, мажорируется сходящимся рядом

$$M_{12} \sum_{m, n > N_0}^{\infty} \frac{1}{d_m^2 \beta_n^2} + \frac{1}{(d_m^2 + \beta_n^2) d_m \beta_n} \leq M_{13} \sum_{m, n > N_0}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2}. \quad (56)$$

Для обоснования сходимости ряда (49) нужны дополнительные условия для заданных функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $F(x, y, t)$.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &\in C^{10}(\bar{D}), \quad \varphi(0, y) = \varphi(p, y) = \varphi^{(2,2)}(0, y) = \varphi^{(2,2)}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q; \\ \varphi^{(2,0)}(x, q) &= \varphi^{(2,0)}(x, 0) = \varphi^{(2,1)}(x, q) = \varphi^{(2,1)}(x, 0) = 0, \\ \varphi^{(2,4)}(x, 0) &= \varphi^{(2,4)}(x, q) = \varphi^{(2,5)}(x, 0) = \varphi^{(2,5)}(x, q) = 0, \\ \varphi^{(4,2)}(x, 0) &= \varphi^{(4,2)}(x, q) = \varphi^{(4,3)}(x, 0) = \varphi^{(4,3)}(x, q) = 0, \quad 0 \leq x \leq p; \\ \psi(x, y) &\in C^6(\bar{D}), \quad \psi(0, y) = \psi(p, y) = \psi^{(2,2)}(0, y) = \psi^{(2,2)}(p, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq q; \\ \psi^{(2,0)}(x, q) &= \psi^{(2,0)}(x, 0) = \psi^{(2,1)}(x, q) = \psi^{(2,1)}(x, 0) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x, y, t) &\in C(\bar{Q}) \cap C_{x,y}^6(\bar{D}), \quad F(0, y, t) = F(p, y, t) = F_{x,y}^{(2,2)}(0, y, t) = \\ &= F_{x,y}^{(2,2)}(p, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq q, \quad 0 \leq t \leq T;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{x,y}^{(2,0)}(x, 0, t) &= F_{x,y}^{(2,0)}(x, q, t) = F_{x,y}^{(2,1)}(x, 0, t) = \\ &= F_{x,y}^{(2,1)}(x, q, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq t \leq T.\end{aligned}$$

Тогда имеют место оценки

$$|\varphi_{mn}| \leq \frac{M_{14}}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{mn}^4}, \quad |\psi_{mn}| \leq \frac{M_{15}}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{nm}^2}, \quad \|F_{mn}\| \leq \frac{M_{16}}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{nm}^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (37). Интегрируя в нем по частям два раза по переменной x , получим

$$\varphi_{mn} = \iint_D \varphi(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy = -\frac{1}{d_m^2} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy. \quad (57)$$

Затем интеграл в правой части равенства (57) представим в виде

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy &= \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q \varphi^{(2,0)}(x, y) Y_{nm}(y) dy = \\ &= \frac{1}{\lambda_{nm}^2 - d_m^4} \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q \varphi^{(2,0)} [Y_{nm}^{IV}(y) - 2d_m^2 Y_{nm}''(y)] dy. \end{aligned}$$

Снова интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_D \varphi^{(2,0)}(x, y) v_{mn}(x, y) dx dy &= \\ &= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \iint_D [\varphi^{(2,4)}(x, y) + 2\varphi^{(4,2)}(x, y)] v_{nm}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (58)$$

Рассмотрим интеграл в правой части равенства (58) и представим его в виде

$$\begin{aligned} \iint_D [\varphi^{(2,4)}(x, y) + 2\varphi^{(4,2)}(x, y)] v_{nm}(x, y) dx dy &= \\ &= \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q [\varphi^{(2,4)}(x, y) + 2\varphi^{(4,2)}(x, y)] Y_{nm}(y) dy = \\ &= \int_0^p X_m(x) dx \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \int_0^q [\varphi^{(2,4)}(x, y) + 2\varphi^{(4,2)}(x, y)] [Y_{nm}^{IV}(y) - 2d_m^2 Y_{nm}''(y)] dy = \\ &= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \int_0^p X_m(x) dx \int_0^q [\varphi^{(2,8)}(x, y) - 2d_m^2 \varphi^{(2,6)}(x, y) + \\ &\quad + 2\varphi^{(4,6)}(x, y) - 4d_m^2 \varphi^{(4,4)}(x, y)] Y_n(y) dy = \\ &= \frac{1}{\beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \iint_D [\varphi^{(2,8)}(x, y) + 4\varphi^{(4,6)}(x, y) + 4\varphi^{(6,4)}(x, y)] v_{nm}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (59)$$

Тогда равенство (57) с учетом (58) и (59) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{mn}^4} \iint_D [\varphi^{(2,8)}(x, y) + 4\varphi^{(4,6)}(x, y) + \\ + 4\varphi^{(6,4)}(x, y)] v_{nm}(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (60)$$

Аналогично (57) и (58) имеем

$$\psi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4 \alpha_{mn}^4} \iint_D [\psi^{(2,4)}(x, y) + 2\psi^{(4,2)}(x, y)] v_{nm}(x, y) dx dy. \quad (61)$$

$$F_{mn}(t) = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^2 \alpha_{mn}^2} \iint_D [F^{(2,4)}(x, y, t) + 2F^{(4,2)}(x, y, t)] v_{nm}(x, y) dx dy. \quad (62)$$

Из представлений (60)–(62) следует справедливость оценок (56). \square

В силу леммы 4, т.е. на основании оценок (56), ряд (49) при $m, n > N_0$ оценивается сходящимся рядом

$$M_{17} \sum_{m,n > N_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{d_m^2 \beta_n^4} + \frac{\alpha_{mn}^2}{d_m^2 \beta_n^2 \lambda_{mn}} \right) \leq M_{18} \sum_{m,n > N_0}^{+\infty} \frac{1}{(mn)^2}.$$

Следовательно, доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $F(x, y, t)$ удовлетворяют условиям лемм 3 и 4, то существует единственное решение задачи (2)–(5) в классе $C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q})$, которое определяется суммой ряда (40).*

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи от начальных функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и правой части $F(x, y, t)$.

ТЕОРЕМА 3. *Для решения (40) задачи (2)–(5) имеют место следующие оценки:*

$$\|u(x, y, t)\|_{L_2(D)} \leq M_{19} (\|\varphi(x, y)\|_{L_2(D)} + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)} + \max_t \|F(x, y, t)\|_{L_2(D)}), \quad (63)$$

$$\|u(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})} \leq M_{20} (\|\varphi(x, y)\|_{C^4(\bar{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{D})}). \quad (64)$$

Доказательство. Поскольку система (30) ортонормирована в $L_2(D)$, из формулы (40) на основании оценки (42) получим

$$\begin{aligned} \|u(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}^2(t) \leq 3M_5^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} (|\varphi_{mn}|^2 + |\psi_{mn}|^2 + \|F_{mn}\|^2) = \\ &= 3M_5^2 (\|\varphi(x, y)\|_{L_2(D)}^2 + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)}^2 + \max_{0 \leq t \leq T} \|F(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2), \end{aligned}$$

так как в силу неравенства Бесселя

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} F_{mn}^2(t) \leq \|F(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|F(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2$$

следует справедливость оценки

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} \|F_{mn}\|^2 &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\max_{0 \leq t \leq T} |F_{mn}(t)| \right)^2 = \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} F_{mn}^2(t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|F(x, y, t)\|_{L_2(D)}^2 \leq pq \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})}^2. \end{aligned}$$

Отсюда и получим оценку (63).

Пусть (x, y, t) — произвольная точка из \bar{Q} . Тогда из (40) с учетом оценки (42) имеем

$$|u(x, y, t)| \leq \frac{2M_0}{\sqrt{pq}} \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(|\varphi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} |\psi_{mn}| + \frac{1}{\lambda_{mn}} \|F_{mn}\| \right). \quad (65)$$

По условиям леммы 3 коэффициент φ_{mn} можно представить в виде

$$\varphi_{mn} = -\frac{1}{d_m^2 \beta_n^2} \iint_D \varphi^{(2,2)}(x, y) X_m(x) \bar{Y}_{nm}^{(2)}(y) dx dy. \quad (66)$$

Из равенства (31) при больших m, n следует, что

$$\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 (m^2 + n^2) \leq \lambda_{mn} \leq \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (m^2 + n^2), \quad d = \max\{p, q\}, \quad l = \min\{p, q\}. \quad (67)$$

Тогда из неравенства (65) с учетом (66) и (67), используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x, y, t)| &\leq \\ &\leq \widetilde{M}_5 \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{d_m^2 \beta_n^2} \max_D |\varphi^{(2,2)}(x, y)| + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} (|\psi_{mn}| + \|F_{mn}\|) \right] \leq \\ &\leq \widetilde{M}_6 \left[\max_D |\varphi^{(2,2)}(x, y)| + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} |\psi_{mn}|^2 \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} \|F_{mn}\|^2 \right)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq \widetilde{M}_7 \left(\max_D |\varphi^{(2,2)}(x, y)| + \|\psi(x, y)\|_{L_2(D)} + \max_{0 \leq t \leq T} \|F(x, y, t)\|_{L_2(D)} \right) \leq \\ &\leq M_{20} (\|\varphi(x, y)\|_{C^4(\bar{D})} + \|\psi(x, y)\|_{C(\bar{D})} + \|F(x, y, t)\|_{C(\bar{Q})}), \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость оценки (64). \square

Таким образом, нами полностью доказана корректность постановки задачи (2)–(5) (задачи 1). При этом отметим, что при доказательстве теоремы 2 существования решения задачи на начальные условия (3) наложены достаточно сильные условия гладкости. Если ввести понятие обобщенного решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение задачи (2)–(5) (задачи 1) из класса $C_{xy,t}^{4,2}(\bar{Q})$ назовем классическим или регулярным решением этой задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $u(x, y, t)$ будем называть обобщенным решением задачи (2)–(5) (задачи 1), если существует последовательность $u_n(x, y, t)$ регулярных решений задачи (2)–(5) с начальными данными

$$u_n(x, y, t) = \varphi_n(x, y), \quad u_{nt}(x, y, 0) = \psi_n(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D},$$

и правыми частями $F_n(x, y, t)$, $(x, y, t) \in \overline{Q}$, равномерно сходящаяся к функции $u(x, y, t)$ на \overline{Q} ; при этом функции $\varphi_n(x, y)$, $\psi_n(x, y)$ и $F_n(x, y, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, они и производные $\frac{\partial^4 \varphi_n(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$, $0 \leq i, j \leq 4$, сходятся равномерно на \overline{D} и \overline{Q} соответственно к функциям $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$ и $F(x, y, t)$.

ТЕОРЕМА 4. *Если функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $F(x, y, t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное и устойчивое обобщенное решение задачи (2)–(5), которое определяется суммой ряда (40) и является непрерывной на \overline{Q} функцией.*

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ и $F(x, y, t)$ удовлетворяют условиям леммы 3. Тогда существуют последовательности функций $\varphi_n(x, y)$, $\psi_n(x, y)$ и $F_n(x, y, t)$, удовлетворяющие условиям определения 2. По функциям $\varphi_n(x, y)$, $\psi_n(x, y)$ и $F_n(x, y, t)$ на основании теоремы 2 построим последовательность $u_n(x, y, t)$ регулярных решений задачи (2)–(5). В силу линейности изучаемой задачи разность $u_n(x, y, t) - u_m(x, y, t)$ является решением задачи (2)–(5) с начальными функциями $\varphi_n(x, y) - \varphi_m(x, y)$, $\psi_n(x, y) - \psi_m(x, y)$ и правой частью $F_n(x, y, t) - F_m(x, y, t)$. Тогда в силу оценки (64) при любых $n, m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{C(\overline{D})} &\leq M_{20} (\|\varphi_n - \varphi_m\|_{C^4(\overline{D})} + \\ &+ \|\psi_n - \psi_m\|_{C(\overline{D})} + \|F_n(x, y, t) - F_m(x, y, t)\|_{C(\overline{D})}). \end{aligned} \quad (68)$$

По условию последовательности $\frac{\partial^4 \varphi_n(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$, $0 \leq i, j \leq 4$, $\psi_n(x, y)$ и $F_n(x, y, t)$ сходятся равномерно на \overline{D} и \overline{Q} соответственно к функциям $\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}$, $\psi(x, y)$ и $F(x, y, t)$. Следовательно, для них справедлив критерий Коши о равномерной сходимости. Поэтому из оценки (68) следует справедливость критерия Коши и для последовательности $u_n(x, y, t)$. Тогда она сходится равномерно на \overline{Q} к единственной непрерывной функции $u(x, y, t)$, определенной рядом (40). Из доказательства теоремы 3 следует, что для обобщенного решения задачи (2)–(5) справедлива оценка (64), что и означает устойчивость такого решения. \square

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле*. М.: Физматлит, 1967. 444 с.

3. Тимошенко С. П., Войновский–Кригер С. *Пластинки и оболочки*. М.: Наука, 1966. 636 с.
4. Гулд С. *Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна*. М.: Мир, 1970. 328 с.
5. Филиппов А. П. *Колебания деформируемых систем*. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
6. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. *Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин*. Днепропетровск: Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры, 2010. 217 с.
7. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 2. С. 311–324. EDN: UGXNZR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>.
8. Сабитов К. Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 1. С. 89–100. EDN: XRBXOV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117010083>.
9. Сабитов К. Б. Начальная задача для уравнения колебаний балок // *Диффер. уравн.*, 2017. Т. 53, № 5. С. 665–671. EDN: YSXNEH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117050090>.
10. Сабитов К. Б., Акимов А. А. Начально-граничная задача для нелинейного уравнения колебаний балки // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 5. С. 632–645. EDN: FUQB LD. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120050076>.
11. Сабитов К. Б. Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // *Диффер. уравн.*, 2020. Т. 56, № 6. С. 773–785. EDN: ZUQBSX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064120060096>.
12. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. № 10. С. 60–70. EDN: RZSSHV. DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-10-60-70>.
13. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики*. М.: Физматлит, 2013. 352 с. EDN: UIDCGZ.
14. Young D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method // *J. Appl. Mech.*, 1950. vol. 17, no. 4. pp. 448–453. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4010175>.

MSC: 35M12

Vibrations of plate with boundary “hinged attachment” conditions

K. B. Sabitov^{1,2}

¹ Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak Branch,
49, pr. Lenina, Sterlitamak, 453103, Russian Federation.

² Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

In the paper, the initial problem for the equation of vibrations of a rectangular plate with boundary conditions of the “hinged attachment” type is studied. An energy inequality is established, from which the uniqueness of the solution of the stated initial-boundary problem follows. The corresponding existence and stability theorems for the solution of the problem in the classes of regular and generalized solutions are proved. The existence of a solution to the problem posed is carried out by the method of spectral analysis and it is constructed as the sum of an orthogonal series over a system of eigenfunctions corresponding to a two-dimensional spectral problem, which is constructed by the method of separation of variables. A complete substantiation of the convergence of the constructed three-dimensional series in the class of regular solutions of the considered equation is given. The generalized solution is defined as the uniform limit of the sequence of regular solutions of the initial boundary value problem.

Keywords: equation of vibrations of a rectangular plate, initial boundary value problem, energy inequality, uniqueness, series, existence, stability.

Received: 25th August, 2022 / Revised: 7th November, 2022 /

Accepted: 11th December, 2022 / First online: 28th December, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors’ contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sabitov K. B. Vibrations of plate with boundary “hinged attachment” conditions, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 650–671. EDN: CXCQCU. DOI: [10.14498/vsgtu1950](https://doi.org/10.14498/vsgtu1950) (In Russian).

Author’s Details:

Kamil B. Sabitov  <https://orcid.org/0000-0001-9516-2704>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Chief Researcher¹; Professor; Dept. of Higher Mathematics²;

e-mail: sabitov_fmfm@mail.ru

References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1966, 724 pp. (In Russian)
2. Timoshenko S. P. *Kolebaniia v inzhenernom dele* [Fluctuations in Engineering]. Moscow, Fizmatlit, 1967, 444 pp. (In Russian)
3. Timoshenko S. P., Woinowsky–Krieger S. *Plastinki i obolochki* [Theory of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1966, 636 pp.
4. Gould S. *Variatsionnye metody v zadachakh o sobstvennykh znacheniiakh: Vvedenie v metod promezhutochnykh zadach Vainshteina* [Variational Methods for Eigenvalue Problems: An Introduction to the Weinstein Method of Intermediate Problem]. Moscow, Mir, 1970, 328 pp. (In Russian)
5. Filippov A. P. *Kolebaniia deformiruemykh sistem* [Oscillations of Deformable Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970, 734 pp. (In Russian)
6. Andrianov I. V., Danishevskii V. V., Ivankov A. O. *Asimptoticheskie metody v teorii kolebaniï balok i plastin* [Asymptotic Methods in the Theory of Vibrations of Beams and Plates]. Dnepropetrovsk, Prydniprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture, 2010, 217 pp.
7. Sabitov K. B. Fluctuations of a beam with clamped ends, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 2, pp. 311–324 (In Russian). EDN: UGXNZR. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1406>.
8. Sabitov K. B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 86–98. EDN: YVJCOJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117010086>.
9. Sabitov K. B. Cauchy problem for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 658–664. EDN: XNIRNN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266117050093>.
10. Sabitov K. B., Akimov A. A. Initial-boundary value problem for a nonlinear beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 5, pp. 621–634. EDN: VFFDXC. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120050079>.
11. Sabitov K. B. Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the beam vibration equation, *Differ. Equat.*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 761–774. EDN: ULGVTX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266120060099>.
12. Sabitov K. B. Initial-boundary value problems for equation of oscillations of a rectangular plate, *Russian Math.*, 2021, vol. 65, no. 10, pp. 52–62. EDN: FCMYHQ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X21100054>.
13. Sabitov K. B. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2013, 352 pp. (In Russian). EDN: UIDCGZ.
14. Young D. Vibration of rectangular plates by the Ritz method, *J. Appl. Mech.*, 1950, vol. 17, no. 4, pp. 448–453. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4010175>.



УДК 517.956

Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения

А. К. Уринов^{1,2}, Д. А. Усмонов¹¹ Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19.² Институт математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

В прямоугольной области рассмотрено дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа второго рода, вырождающееся на боковых сторонах и на основании прямоугольника. Для рассматриваемого уравнения сформулирована начально-граничная задача с нелокальными граничными условиями. Исследованы единственность, существование и устойчивость решения поставленной задачи. Единственность решения задачи доказана методом интегралов энергии. Существование решения задачи исследовано с применением метода Фурье, основанного на разделении переменных. При этом сначала исследована спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения, возникающая из поставленной задачи при разделении переменных. Доказано, что спектральная задача может иметь только положительное собственное значение. Далее построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Отсюда на основании теории интегральных уравнений заключено, что существует счетное число собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Найдены условия, при которых заданная функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям спектральной задачи. С использованием свойств функции Грина спектральной задачи доказана лемма о равномерной сходимости некоторых билинейных рядов, которые используются при

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Уринов А. К., Усмонов Д. А. Начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 672–693. EDN: DIOYZF. DOI: [10.14498/vsgtu1962](https://doi.org/10.14498/vsgtu1962).

Сведения об авторах

Ахмаджон Кушакович Уринов  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>

доктор физико-математических наук, профессор; профессор каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; ведущий научный сотрудник²; e-mail: urinovak@mail.ru

Дониёр Абдумтолиб угли Усмонов  <https://orcid.org/0000-0002-3574-075X>

исследователь; каф. математического анализа и дифференциальных уравнений¹; e-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

доказательстве существования решения поставленной задачи. Доказаны также леммы о порядке коэффициентов Фурье заданной функции. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Равномерная сходимость этого ряда и рядов, полученных из него почленным дифференцированием, доказана с помощью лемм, перечисленных выше. В конце статьи получены две оценки для решения поставленной задачи, одна из которых — в пространстве квадратично суммируемых функций с весом, а другая — в пространстве непрерывных функций. Из этих неравенств следует устойчивость решения в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, вырождающееся уравнение второго рода, начально-граничная задача, спектральная задача, функция Грина, интегральное уравнение, ряд Фурье, метод разделения переменных, метод интегралов энергии, единственность, существование и устойчивость решения.

Получение: 12 октября 2022 г. / Исправление: 8 ноября 2022 г. /

Принятие: 29 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 15 декабря 2022 г.

1. Постановка задачи. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся гиперболическое уравнение второго рода:

$$t^{m-a}(t^a u_t)_t + bu = x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x]_x \quad (1)$$

с тремя линиями вырождения, где $a, b, m, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные действительные числа, причем $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1, 0 < a < 1$.

Уравнение (1) с $\alpha = 1, m = a = b = \beta = \gamma = \delta = 0$ возникает, например, при изучении свободных колебаний под действием силы тяжести однородной подвешенной тяжелой нити, а также при изучении радиальных колебаний газа в неподвижной неограниченной цилиндрической трубке с $\alpha = 2, m = a = b = \beta = \gamma = \delta = 0$ — при исследовании малых колебаний газа около его положения равновесия внутри непроницаемой оболочки сферической формы, а с $m = a = b = 0, \alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ — при изучении свободных колебаний вращающейся струны [1].

Известно, что начальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго рода, в том числе для уравнения (1) при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, изучены в работах [2–12]. Изучению начально-граничных задач для уравнений второго порядка, вырождающихся на одной боковой стороне прямоугольника, посвящены, например, работы [13–16], а для уравнений, вырождающихся на обеих боковых сторонах прямоугольника — работы [17, 18]. В этих работах в зависимости от порядка вырождения уравнения на боковых сторонах прямоугольника заданы различные локальные краевые условия относительно искомой функции. Начально-граничные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка второго рода в многомерных цилиндрических областях рассмотрены в работах [19–25]. В задачах, изученных в этих работах, на боковой поверхности цилиндра заданы обычные локальные условия, т.е. значения искомой функции. В настоящей работе исследуем следующую начально-граничную задачу для уравнения (1) в области Ω с нелокальными граничными условиями.

ЗАДАЧА A_{pq} . Найдти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, t), x^\alpha(1-x)^\beta u_x, t^a u_t \in C(\bar{\Omega}); x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x]_x, t^{m-a}(t^a u_t)_t \in C(\Omega);$
- 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);
- 3) на границе области Ω выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), x \in [0, 1]; \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^a u_t(x, t) = \varphi_2(x), x \in (0, 1), \quad (2)$$

$$pu(0, t) = qu(1, t), q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha u_x(x, t) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta u_x(x, t), t \in [0, T], \quad (3)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывные функции, а p и q — заданные действительные числа, причем $p \neq q$.

Отметим, что из задачи A_{pq} в частном случае при $p = 0$ и $q = 0$ следуют локальные задачи, которые представляют самостоятельный интерес.

Исследуем единственность, существование и устойчивость решения задачи A_{pq} . При этом воспользуемся методом интегралов энергии и методом Фурье, основанным на разделении переменных. Отметим, что в работах [26–30] метод Фурье успешно применен к исследованию краевых задач для вырождающихся уравнений второго порядка смешанного типа второго рода в прямоугольной области.

2. Единственность решения задачи A_{pq} .

ТЕОРЕМА 1. Если $a > m/2, b \geq 0, \gamma < \alpha + 1, \delta < \beta + 1$, то задача A_{pq} не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи A_{pq} . Введем обозначение $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Тогда функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющего однородным условиям (3) и $u(x, 0) = 0, \lim_{t \rightarrow +0} t^a u_t(x, t) = 0$. Возьмем произвольное число η из $(0, T]$ и введем функцию

$$V(x, t) = \begin{cases} 0, & \eta \leq t \leq T, \\ \int_\eta^t \xi^{-a} u(x, \xi) d\xi, & 0 \leq t \leq \eta. \end{cases} \quad (4)$$

В силу $a \in (0, 1)$ и свойств функции $u(x, t)$ функция $V(x, t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $V(x, t), x^\alpha(1-x)^\beta V_x(x, t)$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и $pV(0, t) = qV(1, t), q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha V_x(x, t) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta V_x(x, t);$
- 2) $t^\alpha V_t, t^\alpha (t^\alpha V_t)_t$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и $V(x, t) = 0$ при $t \in [\eta, T]$.

Умножим уравнение (1) на функцию $t^{a-m} x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} V(x, t)$ и проинтегрируем по области Ω :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T t^{a-m} x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} [t^m u_{tt} + at^{m-1} u_t + bu] V dt dx = \\ = \int_0^1 \int_0^T t^{a-m} x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} [x^\gamma (1-x)^\delta u_{xx} + \end{aligned}$$

$$+ \alpha x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta}u_x - \beta x^{\gamma}(1-x)^{\delta-1}u_x]V dt dx.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} dx \int_0^{\eta} [(t^{\alpha}u_t)_t + bt^{\alpha-m}u]V dt &= \\ &= \int_0^{\eta} t^{\alpha-m} dt \int_0^1 [x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x]_x V dx. \end{aligned}$$

Применяя правило интегрирования по частям к внутренним интегралам и учитывая равенства $V(x, \eta) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\alpha}u_t = 0$, $pV(0, t) = qV(1, t)$,

$q \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha}u_x(x, t) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\beta}u_x(x, t)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} dx \int_0^{\eta} [t^{\alpha}u_t V_t - bt^{\alpha-m}uV] dt &= \\ &= \int_0^{\eta} t^{\alpha-m} dt \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x V_x dx. \quad (5) \end{aligned}$$

Из (4) следует, что $V_t = t^{-a}u$, $u_x = t^a V_{xt}$, $0 < t < \eta$. Учитывая это, из (5) получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} dx \int_0^{\eta} [uu_t - bt^{2a-m}V V_t] dt &= \\ &= \int_0^{\eta} t^{2a-m} dt \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}V_{xt}V_x dx, \end{aligned}$$

которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} dx \int_0^{\eta} \left[\frac{\partial}{\partial t} u^2 - bt^{2a-m} \frac{\partial}{\partial t} V^2 \right] dt &= \\ &= \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} dx \int_0^{\eta} t^{2a-m} \frac{\partial}{\partial t} V_x^2 dt. \end{aligned}$$

Применяя правило интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} \left\{ [u^2 - bt^{2a-m}V^2] \Big|_{t=0}^{t=\eta} + b(2a-m) \int_0^{\eta} t^{2a-m-1}V^2 dt \right\} dx &= \\ &= \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta} \left[t^{2a-m}V_x^2 \Big|_{t=0}^{t=\eta} - (2a-m) \int_0^{\eta} t^{2a-m-1}V_x^2 dt \right] dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая $u(x, 0) = 0$, $V(x, \eta) = 0$, $V_x(x, \eta) = 0$ и $2a - m > 0$, имеем

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} u^2(x, \eta) dx =$$

$$= -b(2a - m) \int_0^\eta t^{2a-m-1} dt \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} V^2 dx - \\ - (2a - m) \int_0^\eta t^{2a-m-1} dt \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta V_x^2 dx,$$

откуда в силу $2a - m > 0$, $b \geq 0$ и $\alpha - \gamma > -1$, $\beta - \delta > -1$ следует равенство

$$\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} u^2(x, \eta) dx = 0.$$

Следовательно, $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}u(x, \eta) \equiv 0$ при $0 < x < 1$, т.е. $u(x, \eta) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq 1$ для каждого η . Так как $\eta \in (0, T]$ — произвольное число, $u(x, t) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$. Тогда $u_1(x, t) = u_2(x, t)$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана. \square

3. Исследование спектральной задачи. Формальное применение метода Фурье к поставленной задаче A_{pq} приводит к следующей спектральной задаче: *найти значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения*

$$Mv \equiv -[x^\alpha(1-x)^\beta v'(x)]' = \lambda x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} v(x), x^\alpha(1-x)^\beta v'(x) \in C[0, 1]; \quad [x^\alpha(1-x)^\beta v'(x)]' \in L_2(0, 1); \\ pv(0) = qv(1), \quad q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha v'(x) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta v'(x). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Определим знак параметра λ , при котором существуют нетривиальные решения задачи (6), (7). Умножим обе части уравнения (6) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0, 1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (7), получим

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta [v'(x)]^2 dx = \lambda \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v^2(x) dx.$$

Отсюда при $v(x) \not\equiv 0$ следует $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует $v'(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда $v(x) = \text{const}$, $x \in (0, 1)$, откуда в силу условия $pv(0) = qv(1)$ при $p \neq q$ получим $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, если $p \neq q$, то задача (6), (7) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Предполагая $p \neq q$, спектральную задачу (6), (7) исследуем методом функций Грина. Функция Грина $G(x, s)$ задачи должна обладать следующими свойствами:

- 1°) функция $G(x, s)$ непрерывна для всех $x, s \in [0, 1]$;
- 2°) в каждом из интервалов $(0, s)$ и $(s, 1)$ существует непрерывная производная $(\partial/\partial x)G(x, s)$, а при $x = s$ имеет скачок $[-s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}]$, т.е.

$$\frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=s+0} - \frac{\partial G(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=s-0} = -s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}; \quad (8)$$

- 3°) в интервалах $(0, s)$ и $(s, 1)$ функция $G(x, s)$, рассматриваемая как функция от x , удовлетворяет однородному уравнению $MG(x, s) = 0$;
 4°) при $\forall s \in (0, 1)$ выполняются граничные условия

$$pG(0, s) = qG(1, s), \quad q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha G_x(x, s) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta G_x(x, s). \quad (9)$$

Функция $G(x, s)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{p}{p-q} \int_0^x \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2}, & x < s; \\ \frac{p}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q}{p-q} \int_0^x \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2}, & s < x, \end{cases} \quad (10)$$

где $\sigma = \Gamma(2 - \alpha - \beta) / [\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)]$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [31].

Докажем, что функция (10) действительно удовлетворяет условиям 1°–4°.

В силу условия $\alpha, \beta \in [0, 1)$ каждый из интегралов в (10) является непрерывной функцией своего верхнего предела. Поэтому функция $G(x, s)$ непрерывна в $\Omega_1 = \{(x, s) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$ при $x \neq s$. Кроме этого, для каждого фиксированного $s \in (0, 1)$ $\lim_{x \rightarrow s+0} G(x, s) = \lim_{x \rightarrow s-0} G(x, s) = G(s, s)$,

а функция

$$G(s, s) = \frac{p+q}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2}$$

непрерывна при $s \in [0, 1]$. Следовательно, $G(x, s) \in C(\bar{\Omega}_1)$.

Далее из (10) непосредственным дифференцированием находим

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, s) = \begin{cases} p(p-q)^{-1}x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}, & x < s; \\ q(p-q)^{-1}x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}, & s < x. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда легко следует справедливость равенства (8).

В силу равенства (11)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha(1-x)^\beta \frac{\partial}{\partial x} G(x, s) \right] = 0$$

при $x \in (0, s) \cup (s, 1)$, т.е. функция $G(x, s)$ по x удовлетворяет однородному уравнению $MG \equiv 0$.

Из формул (10) и (11) с учетом

$$\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta} dz = \sigma$$

находим

$$G(0, s) = \frac{q}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2},$$

$$G(1, s) = \frac{p}{p-q} \int_0^s \frac{dz}{z^\alpha(1-z)^\beta} + \frac{q\sigma}{p-q} + \frac{q^2\sigma}{(p-q)^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha G_x(x, s) = \frac{p}{p - q}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^\beta G_x(x, s) = \frac{q}{p - q}.$$

Из этих равенств легко следует справедливость условий (9).

Теперь, пользуясь свойствами функции $G(x, s)$ и методом, примененным в [32], легко убедиться, что задача (6), (7) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s) s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} v(s) ds. \quad (12)$$

Умножая уравнение (12) на функцию $x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2}$ и вводя обозначение $w(x) = x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} v(x)$, получим интегральное уравнение с симметричным ядром $K(x, s) = (xs)^{(\alpha-\gamma)/2} [(1-x)(1-s)]^{(\beta-\delta)/2} G(x, s)$:

$$w(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) w(s) ds. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что при $\gamma < 1 + \alpha$, $\delta < \beta + 1$, справедливо неравенство

$$\int_0^1 K^2(x, s) ds = A(x) \leq C_0 = \text{const} < +\infty. \quad (14)$$

Тогда согласно теории интегральных уравнений уравнение (13) имеет счетное число собственных значений:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_k, \dots, \quad (15)$$

$\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции

$$w_1(x), w_2(x), w_3(x), \dots, w_k(x), \dots,$$

то есть функции

$$x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_1(x), \dots, x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} v_k(x), \dots \quad (16)$$

образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, 1)$ и любая функция $g(x)$, представимая через ядро $K(x, s)$, т.е. функция вида

$$g(x) = \int_0^1 K(x, \xi) h(\xi) d\xi,$$

где $h(x) \in L_2(0, 1)$, разлагается в ряд Фурье

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w_k(x),$$

где

$$c_k = \int_0^1 x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x) v_k(x) dx,$$

который на интервале $[0, 1]$ сходится в среднем [33].

В силу эквивалентности задачи (6), (7) и интегрального уравнения (12) из доказанного выше следует, что числа (15) являются собственными значениями, а функции

$$v_1(x), v_2(x), \dots, v_k(x), \dots$$

— собственными функциями задачи (6), (7).

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha \leq \gamma < 1 + \alpha$, $\beta \leq \delta < 1 + \beta$ и функция $g(x)$ удовлетворяет условиям

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x), \quad x^\alpha(1-x)^\beta g'(x) \in C[0, 1],$$

$$x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}Mg(x) \in L_2(0, 1);$$

$$pg(0) = qg(1), \quad q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha g'(x) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta g'(x).$$

Тогда ее можно разложить на отрезке $[0, 1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу условий $\gamma < 1 + \alpha$, $\delta < 1 + \beta$ справедливо неравенство (14). Далее, учитывая вид функций $K(x, s)$, $Mg(x)$ и свойства функций $G(x, s)$ и $g(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(x, s) s^{(\gamma-\alpha)/2} (1-s)^{(\delta-\beta)/2} Mg(s) ds &= \\ &= \int_0^1 (xs)^{(\alpha-\gamma)/2} [(1-x)(1-s)]^{(\beta-\delta)/2} G(x, s) \times \\ &\quad \times \{s^{(\gamma-\alpha)/2} (1-s)^{(\delta-\beta)/2} [-s^\alpha (1-s)^\beta g'(s)]'\} ds = \\ &= x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} \int_0^1 G(x, s) [-s^\alpha (1-s)^\beta g'(s)]' ds = \\ &= x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} \left[-s^\alpha (1-s)^\beta g'(s) G(x, s) \Big|_{s=0}^{s=1} + \right. \\ &\quad \left. + s^\alpha (1-s)^\beta g(s) G_s(x, s) \Big|_{s=0}^{s=x-0} + s^\alpha (1-s)^\beta g(s) G_s(x, s) \Big|_{s=x+0}^{s=1} \right] - \\ &\quad - \left(\int_0^x + \int_x^1 \right) g(s) [s^\alpha (1-s)^\beta G_s(x, s)]_s ds = \\ &= x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x). \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x) = \int_0^1 K(x, s) s^{(\gamma-\alpha)/2} (1-s)^{(\delta-\beta)/2} Mg(s) ds. \quad (17)$$

Так как $x^{(\gamma-\alpha)/2} (1-x)^{(\delta-\beta)/2} Mg(x) \in L_2(0, 1)$, из (17) следует, что

$$x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x)$$

— функция, представимая через ядро $K(x, s)$. Тогда в силу неравенства (14) и теоремы Гильберта—Шмидта [33] эта функция на отрезке $[0, 1]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k w_k(x),$$

т.е

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g_k v_k(x).$$

Учитывая $\alpha - \gamma < 0$ и $\beta - \delta < 0$ и разделяя это равенство при $x(1-x) > 0$ на $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}$, имеем нужное разложение. Лемма 1 доказана. \square

4. Вспомогательные леммы. В этом пункте предположим, что $\alpha < \gamma < 1 + \alpha$, $\beta < \delta < 1 + \beta$, $p \neq q$, сформулируем и докажем некоторые леммы, которые используются при доказательстве существования решения задачи A_{pq} . Здесь под λ_k и $v_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, понимаются собственные значения и собственные функции задачи (6), (7), а под g_k — коэффициенты Фурье заданной функции $g(x)$ по системе (16):

$$g_k = \int_0^1 x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)v_k(x)dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ЛЕММА 2. Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0, 1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[x^\alpha(1-x)^\beta v_k'(x)]^2}{\lambda_k^2}. \quad (18)$$

Доказательство. В силу (6) и (12) справедливы равенства

$$\begin{aligned} v_k(x) &= \lambda_k \int_0^1 G(x, s) s^{\alpha-\gamma} (1-s)^{\beta-\delta} v_k(s) ds = \\ &= - \int_0^1 G(x, s) [s^\alpha (1-s)^\beta v_k'(s)]' ds. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям, а затем принимая во внимание условия $q \lim_{s \rightarrow 0} s^\alpha v_k'(s) = p \lim_{s \rightarrow 1} (1-s)^\beta v_k'(s)$, $pG(x, 0) = qG(x, 1)$ и (7), получим

$$v_k(x) = \int_0^1 s^\alpha (1-s)^\beta G_s(x, s) v_k'(s) ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 \left\{ s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} G_s(x, s) \right\} \left\{ \frac{s^{\alpha/2} (1-s)^{\beta/2} v_k'(s)}{\sqrt{\lambda_k}} \right\} ds. \quad (19)$$

Далее с помощью правила интегрирования по частям и равенств (6), (7) найдем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{s^\alpha(1-s)^\beta v'_k(s)v'_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}} ds &= s^\alpha(1-s)^\beta v'_k(s)v_l(s) \Big|_{s=0}^{s=1} - \\ &- \int_0^1 \frac{[s^\alpha(1-s)^\beta v'_k(s)]' v_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}} ds = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \int_0^1 s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta} v_k(s)v_l(s) ds = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}} \int_0^1 w_k(s)w_l(s) ds = \begin{cases} 1, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно, $\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v'_k(s)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система.

Из (19) и (20) следует, что $v_k(x)/\sqrt{\lambda_k}$ — коэффициенты Фурье функции $s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}G_s(x,s)$ по системе $\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}v'_k(s)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [33], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \leq \int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta [G_s(x,s)]^2 ds. \quad (21)$$

Принимая во внимание равенство (8), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta [G_s(x,s)]^2 ds &= \frac{p^2}{(p-q)^2} \int_0^x s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta} ds + \\ &+ \frac{q^2}{(p-q)^2} \int_x^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta} ds \leq \frac{C_1}{(p-q)^2} \int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta} ds = \\ &= \frac{C_1\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{(p-q)^2\Gamma(2-\alpha-\beta)}, \quad C_1 = \max\{p^2, q^2\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда и из (21) следует, что первый ряд в (18) сходится равномерно.

Теперь, согласно уравнению (12), имеет место равенство

$$\frac{x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)}{\lambda_k} = \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta G_x(x,s) s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta} v_k(s) ds.$$

Так как $\{s^{(\alpha-\gamma)/2}(1-s)^{(\beta-\delta)/2}v_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система, функции $x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)/\lambda_k$ можно считать коэффициентами Фурье по аргументу s для функции $x^\alpha(1-x)^\beta s^{(\alpha-\gamma)/2}(1-s)^{(\beta-\delta)/2}G_x(x,s)$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)]^2}{\lambda_k^2} \leq \int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^{2\beta} s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta} [G_x(x,s)]^2 ds. \quad (23)$$

На основании формулы (8), имеем

$$\int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^{2\beta} s^{\alpha-\delta}(1-s)^{\beta-\gamma} [G'_x(x, s)]^2 ds \leq \frac{C_1 \Gamma(\alpha - \delta + 1) \Gamma(\beta - \gamma + 1)}{(p - q)^2 \Gamma(\alpha + \beta - \delta - \gamma + 2)}. \quad (24)$$

Если учесть (24), то из (23) следует, что второй ряд в (18) сходится равномерно. Лемма 2 доказана. \square

ЛЕММА 3. Если выполнены условия

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x) \in C[0, 1],$$

$$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x) \in L_2(0, 1); \quad pg(0) = qg(1),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta [g'(x)]^2 dx, \quad (25)$$

в частности, ряд в левой части сходится.

Доказательство. В силу уравнения (6) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lambda_k^{1/2} g_k &= \lambda_k^{1/2} \int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} g(x) v_k(x) dx = \\ &= -\lambda_k^{-1/2} \int_0^1 g(x) [x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)]' dx. \end{aligned}$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям и учитывая свойства функций $g(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} g_k = \int_0^1 \{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x)\} \{ \lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v'_k(x) \} dx.$$

Отсюда следует, что числа $\lambda_k^{1/2} g_k$ — коэффициенты Фурье функции

$$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}g'(x)$$

по ортонормированной системе функций $\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v'(x)/\sqrt{\lambda_k}\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (25). Лемма 3 доказана. \square

Аналогично лемме 3 доказываются следующие леммы.

ЛЕММА 4. Если выполнены условия

$$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x), \quad x^\alpha(1-x)^\beta g'(x) \in C[0, 1],$$

$$x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}Mg(x) \in L_2(0, 1);$$

$$pg(0) = qg(1), \quad q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha g'(x) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta g'(x),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 g_k^2 \leq \int_0^1 x^{\gamma-\alpha} (1-x)^{\delta-\beta} [Mg(x)]^2 dx,$$

в частности, ряд в левой части сходится.

ЛЕММА 5. Если выполнены условия

$$x^{(\alpha-\gamma)/2} (1-x)^{(\beta-\delta)/2} g(x), \quad x^\alpha (1-x)^\beta g'(x) \in C[0, 1],$$

$$x^{\gamma-\alpha} (1-x)^{\delta-\beta} Mg(x) \in C[0, 1],$$

$$x^{\alpha/2} (1-x)^{\beta/2} \{x^{\gamma-\alpha} (1-x)^{\delta-\beta} Mg(x)\}' \in L_2(0, 1);$$

$$pg(0) = qg(1), \quad q \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha g'(x) = p \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^\beta g'(x),$$

$$p \lim_{x \rightarrow 0} x^{\gamma-\alpha} Mg(x) = q \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\delta-\beta} Mg(x),$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 g_k^2 \leq \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \{[x^{\gamma-\alpha} (1-x)^{\delta-\beta} Mg(x)]'\}^2 dx,$$

в частности, ряд в левой части сходится.

5. Существование и устойчивость решения A_{pq} . Введем следующие обозначения:

$$\bar{J}_\omega(x) = \Gamma(\omega + 1)(x/2)^{-\omega} J_\omega(x), \quad p = \frac{1-a}{2-m},$$

$$r_k(t) = \frac{2}{2-m} \sqrt{b + \lambda_k t^{(2-m)/2}},$$

$$\varphi_{jk} = \int_0^1 x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} \varphi_j(x) v_k(x) dx, \quad j = 1, 2,$$

где $J_\omega(x)$ — функция Бесселя первого рода [34], а $v_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ — собственные функции задачи (6), (7).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < m < 2$, $m/2 < a < 1$, $\alpha \leq \gamma < 1 + \alpha$, $\beta \leq \delta < 1 + \beta$, $p \neq q$ а функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3. Тогда сумма ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \{ \varphi_{1k} \bar{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k} (1-a)^{-1} t^{1-a} \bar{J}_p[r_k(t)] \} v_k(x) \quad (26)$$

определяет решение задачи A_{pq} .

Доказательство. Решение задачи A_{pq} формально ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)v_k(x), \quad (27)$$

где $u_k(t)$ — неизвестные функции, $k \in \mathbb{N}$.

Подставив (27) в уравнение (1) и условие (2), после некоторых преобразований относительно неизвестных функций $u_k(t)$ получим следующую задачу:

$$t^m u_k''(t) + at^{m-1} u_k'(t) + (b + \lambda_k)u_k(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (28)$$

$$u_k(0) = \varphi_{1k}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^a u_k'(t) = \varphi_{2k}. \quad (29)$$

В силу $0 < m < 2$, $m/2 < a < 1$ решение задачи (28), (29) существует, единственно и имеет вид

$$u_k(t) = \varphi_{1k} \bar{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k} (1-a)^{-1} t^{1-a} \bar{J}_p[r_k(t)], \quad (30)$$

причем здесь $0 < p < 1/2$. Подставляя (30) в (27), получим формальное решение задачи A_{pq} в виде (26).

Теперь для доказательства теоремы достаточно доказать, что ряд (26) и ряды, соответствующие функциям $x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x, t)$, $t^a u_t(x, t)$, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$, а ряды, соответствующие функциям $t^{m-a}[t^a u_t(x, t)]_t$, $x^{\alpha-\delta}(1-x)^{\beta-\gamma}[x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x, t)]_x$, сходятся равномерно на любом компакте $D \subset \Omega$.

Сначала рассмотрим ряд (26). Так как $|\bar{J}_\nu(x)| \leq 1$ при любых $\nu > -1/2$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \{ \varphi_{1k} \bar{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k} (1-a)^{-1} t^{1-a} \bar{J}_p[r_k(t)] \} v_k(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \varphi_{1k} \bar{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k} (1-a)^{-1} t^{1-a} \bar{J}_p[r_k(t)] \right| |v_k(x)| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_{1k}| + C_2 |\varphi_{2k}|) |v_k(x)|, \quad C_2 = \frac{t^{1-a}}{1-a}. \quad (31) \end{aligned}$$

Отсюда на основании неравенства Коши—Буняковского имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{jk}| |v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\sqrt{\lambda_k} \varphi_{jk}| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{jk}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 3 сходятся равномерно по x на $[0, 1]$. Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0, 1]$. Тогда из (31) следует, что ряд (26) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Далее,

$$\begin{aligned}
 & |x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)| \leq \\
 & \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{1k} \bar{J}_{-p}[r_k(t)] + \varphi_{2k}(1-a)^{-1} t^{1-a} \bar{J}_p[r_k(t)]| |x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)| \leq \\
 & \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_{1k}| + C_2 |\varphi_{2k}|) |x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)|. \quad (32)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_{jk} x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)| &= \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k \varphi_{jk}| \left| \frac{x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \\
 & \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 \varphi_{jk}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)]^2}{\lambda_k^2} \right]^{1/2}, \quad j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 4 сходятся равномерно по x на $[0, 1]$. Тогда и ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0, 1]$. Следовательно, ряд (32) сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Теперь рассмотрим ряд

$$\begin{aligned}
 & |x^{\delta-\alpha}(1-x)^{\gamma-\beta} [x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)]_x| \leq \\
 & \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_{1k}| + C_2 |\varphi_{2k}|) |x^{\delta-\alpha}(1-x)^{\gamma-\beta} [x^\alpha(1-x)^\beta v'_k(x)]'|.
 \end{aligned}$$

В силу уравнения (6) при $0 < x < 1$ справедливо неравенство

$$|x^{\delta-\alpha}(1-x)^{\gamma-\beta} [x^\alpha(1-x)^\beta u_x(x,t)]_x| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_{1k}| + C_1 |\varphi_{2k}|) |\lambda_k v_k(x)|. \quad (33)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k \varphi_{jk} v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k^{3/2} \varphi_{jk}| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 \varphi_{jk}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 5 сходятся равномерно по x на $[0, 1]$. Тогда равномерно по x на $[0, 1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (33) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $D \subset \Omega$.

Аналогично доказывается сходимость рядов $t^a u_t(x,t)$, $t^{m-a} [t^a u_t(x,t)]_t$. Теорема 2 доказана. \square

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи A_{pq} справедливы следующие оценки:

$$\|u(x,t)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} \leq C_3 [\|\varphi_1(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}], \quad (34)$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_4 [\|\varphi'_1(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + \|\varphi'_2(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}], \quad (35)$$

где

$$\|f(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)} = \left[\int_0^1 \rho(x) f^2(x) dx \right]^{1/2}, \quad \rho(x) = x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta},$$

$$\|f'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 r(x) [f'(x)]^2 dx \right]^{1/2}, \quad r(x) = x^\alpha (1-x)^\beta,$$

$\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{\bar{\Omega}} |u(x, t)|$; C_3, C_4 — некоторые положительные числа.

Доказательство. Так как $\{x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система, из (26), учитывая $|\bar{J}_\nu(x)| \leq 1$ при любом $\nu > -1/2$, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|u(x, t)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}^2 &= \int_0^1 x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} u^2(x, t) dx = \\ &= \int_0^1 x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x) \sum_{l=1}^{+\infty} u_l(t) v_l(x) dx = \\ &= \sum_{k,l=1}^{+\infty} u_k(t) u_l(t) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} v_k(x) v_l(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \int_0^1 x^{\alpha-\gamma} (1-x)^{\beta-\delta} v_k^2(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leq \\ &\leq C_3 \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_{1k}|^2 + |\varphi_{2k}|^2) \leq C_3 (\|\varphi_1(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}^2), \end{aligned}$$

где $C_3 = \sup\{1, t^{1-a}/(1-a)\}$. Отсюда, используя неравенство $\sqrt{d^2 + l^2} \leq d + l$, которое верно при $d > 0, l > 0$, получим неравенство (34).

В силу неравенств (32), (22) и (25) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq C_3 \sum_{k=1}^{+\infty} (|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|) |v_k(x)| = \\ &= C_3 \sum_{k=1}^{+\infty} |\sqrt{\lambda_k} \varphi_{1k}| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| + C_3 \sum_{k=1}^{+\infty} |\sqrt{\lambda_k} \varphi_{2k}| \left| \frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \\ &\leq C_3 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{1k}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2} + C_3 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_{2k}^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k} \right]^{1/2} \leq \\ &\leq C_3 \left[\frac{C_1 \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1-\beta)}{(p-q)^2 \Gamma(2-\alpha-\beta)} \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [\varphi_1'(x)]^2 dx \right]^{1/2} + \\ &+ C_3 \left[\frac{C_1 \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1-\beta)}{(p-q)^2 \Gamma(2-\alpha-\beta)} \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta [\varphi_2'(x)]^2 dx \right]^{1/2} = \\ &= C_4 \|\varphi_1'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_4 \|\varphi_2'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство (35). Теорема 3 доказана. \square

ЗАМЕЧАНИЕ. Задача A_{pq} корректно поставлена и в том случае, когда $\alpha = \beta = a = t = 0$, но при $\alpha, \beta \geq 1$ она некорректна. В последнем случае для уравнения (1) области Ω можно сформулировать и исследовать задачи с другими краевыми условиями.

6. Заключение. В прямоугольной области рассмотрена начально-граничная задача для гиперболического уравнения второго рода с тремя линиями вырождения. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. М.: Высш. шк., 1970. 712 с.
2. Кароль И. Л. К теории уравнений смешанного типа // *Докл. АН СССР*, 1953. Т. 88, № 3. С. 397–400.
3. Терсенов С. А. О задаче Коши с данными на линии вырождения типа для гиперболического уравнения // *Диффер. уравн.*, 1966. Т. 2, № 1. С. 125–130.
4. Терсенов С. А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения типа // *Сиб. матем. журн.*, 1961. Т. 2, № 6. С. 913–935.
5. Терсенов С. А. *Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе*. Новосибирск: НГУ, 1973. 144 с.
6. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Высш. шк., 1977. 157 с.
7. Хайруллин Р. С. *Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением*. Казань: Казанск. унив., 2015. 336 с. EDN: UWLDMB.
8. Мамадалиев Н. К. О представлении решения видоизмененной задачи Коши // *Сиб. матем. журн.*, 2000. Т. 41, № 5. С. 1087–1097.
9. Уринов А. К., Окбоев А. Б. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Укр. матем. журн.*, 2020. Т. 72, № 1. С. 100–118.
10. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation // *Lobachevskii J. Math.*, 2022. vol. 43, no. 3. pp. 793–803. EDN: QPEVQB. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222060324>.
11. Уринов А. К., Усмонов Д. А. О видоизменной задаче Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // *Бюл. Инст. мат.*, 2021. Т. 4, № 1. С. 46–63.
12. Эргашев Т. Г. Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2017. № 46. С. 41–49. EDN: YPDTPD. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/46/6>.
13. Байкузиев К. Б. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на контуре // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1962. Т. 6, № 2. С. 83–85.

14. Каримов Д. Х. Байкузиев К. Б. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на границе области // *Научн. тр. Ташкент. гос. унив.*, 1962. Т. 208. С. 90–97.
15. Каримов Д. Х., Байкузиев К. Б. Вторая смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на границе области // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1964. Т. 8, № 6. С. 27–30.
16. Байкузиев К. Б. О разрешимости смешанных задач для одного классе нелинейных уравнений гиперболического типа, вырождающихся на границе области // *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук*, 1967. Т. 11, № 2. С. 3–6.
17. Байкузиев К. Б., Каримов Д. Х. О разрешимости смешанной задачи для гиперболических уравнений, вырождающегося на всей границе области // *Тр. Ташкент. гос. унив.*, 1969. Т. 2, № 350. С. 8–20.
18. Даткабаев Д. Смешанная задача для системы уравнений второго порядка, вырождающихся на всей границе области // *Пробл. физ.-мат. наук. Ташкент*, 1976. Т. 164. С. 32–38.
19. Краснов М. Л. Смешанные краевые задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // *Матем. сб.*, 1959. Т. 49(91), № 1. С. 29–84.
20. Олейник О. А. Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе // *Докл. АН СССР*, 1966. Т. 169, № 3. С. 525–528.
21. Брюханов В. А. О смешанной задаче для одного уравнения гиперболического типа вырождающегося на части границы области // *Диффер. уравн.*, 1972. Т. 8, № 1. С. 3–6.
22. Врагов В. Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 1. С. 24–31.
23. Бубнов Б. А. Смешанная задача для некоторых парабола-гиперболических уравнений // *Диффер. уравн.*, 1976. Т. 12, № 3. С. 494–501.
24. Барановский Ф. Т. Смешанная задача для сильно вырождающегося на начальной плоскости гиперболического уравнения второго порядка // *Сиб. матем. журн.*, 1979. Т. 20, № 3. С. 479–492.
25. Барановский Ф. Т. Смешанная краевая задача для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью // *Матем. сб.*, 1981. Т. 115(157), № 4(8). С. 560–576.
26. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2007. № 4. С. 45–53. EDN: JJSQRP.
27. Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2009. № 11. С. 43–52. EDN: KVQCZZ.
28. Сабитов К. Б., Егорова И. П. О корректности краевых задач с условиями периодичности для уравнения смешанного типа второго рода // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 3. С. 430–451. EDN: KBIAPC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1718>.
29. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в исключительных случаях // *Диффер. уравн.*, 2018. Т. 54, № 4. С. 565–568. EDN: YUTSLG. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064118040131>.
30. Хайруллин Р. С. Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с сильным вырождением // *Диффер. уравн.*, 2019. Т. 55, № 8. С. 1139–1151. EDN: JMRWTP. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064119080119>.
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*. vol. II / Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London: McGraw-Hill Book Co., 1953. xvii+396 pp.
32. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. М.: Физматлит, 2010. 528 с. EDN: RYRSSP.

33. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям*. М.: Физматлит, 1959. 232 с.
34. Watson G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* / Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge Univ., 1995. vi+804 pp.

MSC: 35G15

An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind

A. K. Urinov^{1,2}, D. A. Usmonov¹¹ Fergana State University,
19, Murabbiylar st., Fergana, 150100, Uzbekistan.² Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, Universitetskaya st., Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

In present paper, a hyperbolic partial differential equation of the second kind degenerates on the sides and on the base of the rectangle has been considered. For the considered equation, an initial-boundary problem with non-local boundary conditions has been formulated. The uniqueness, existence, and stability of the solution to the stated problem were investigated. The uniqueness of the solution to the problem was proved by the method of energy integrals. The existence of obtained solution was investigated by the Fourier method based on the separation of variables. To do this first, a spectral problem for an ordinary differential equation was investigated, which arises from the formulated problem in virtue of the separation of variables. It was proved that this spectral problem can have only positive eigenvalues. Then, Green's function of the spectral problem has been constructed, and equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel. Hence, on the basis of the theory of integral equations, it has been concluded that there is a countable number of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem. Using the properties of constructed Green's function of the spectral problem, some lemmas, using to prove the existence of a solution to the problem on the uniform convergence of some bilinear series, were proved. Lemmas on the order of the Fourier coefficients of a given function have also been proved. The solution of the considered problem is derived as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Urinov A. K., Usmonov D. A. An initial-boundary problem for a hyperbolic equation with three lines of degenerating of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 672–693. EDN: [D10YZF](https://doi.org/10.14498/vsgtu1962). DOI: [10.14498/vsgtu1962](https://doi.org/10.14498/vsgtu1962) (In Russian).

Authors' Details:

Akhmadjon K. Urinov  <https://orcid.org/0000-0002-9586-1799>Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹; Leading Researcher²; e-mail: urinovak@mail.ru**Doniyor A. Usmonov**  <https://orcid.org/0000-0002-3574-075X>
Researcher; Dept. of Mathematical Analysis and Differential Equations¹;
e-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation is proved using the lemmas mentioned above. At the end of the paper, two estimates are obtained for the solution to the problem, one of which is in the space of square summable functions with weight, and the other is in the space of continuous functions. These inequalities imply the stability of the solution in the corresponding spaces.

Keywords: equation of hyperbolic type, degenerate equation of the second kind, initial-boundary value problem, spectral problem, Green's function, integral equation, Fourier series, method of separation of variables, method of energy integrals, uniqueness, existence and stability of the solution.

Received: 12th October, 2022 / Revised: 8th November, 2022 /

Accepted: 29th November, 2022 / First online: 15th December, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

References

1. Koshlyakov N. S., Smirnov M. M., Gliner E. B. *Differential equations of mathematical physics*. Amsterdam, North-Holland Publ., 1964, xvi+701 pp.
2. Karol' I. L. On the theory of equations of mixed type, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 3, pp. 397–400 (In Russian).
3. Tersenov S. A. On the Cauchy problem, with data given on a curve of degenerate type, for a hyperbolic equation, *Differ. Uravn.*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 125–130 (In Russian).
4. Tersenov S. A. On the theory of hyperbolic equations with data on a line of degeneration of type, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 1961, vol. 2, no. 6, pp. 913–935 (In Russian).
5. Tersenov S. A. *Vvedenie v teoriyu uravnenii, vyrozhdaiushchikhsia na granitse* [Introduction to the Theory of Equations Degenerating at the Boundary]. Novosibirsk, Novosib. Gos. Univ., 1973, 144 pp. (In Russian)
6. Smirnov M. M. *Vyrozhdaiushchiesia giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Hyperbolic Equations]. Minsk, Vyssh. shk., 1977, 157 pp. (In Russian)
7. Khairullin R. S. *Zadacha Trikomii dlia uravneniia vtorogo roda s sil'nyim vyrozhdeniem* [Tricome's Problem for a Equation of the Second Kind with Strong Degeneration]. Kazan, Kazan Univ., 2015, 336 pp. (In Russian). EDN: [UWLDMB](#).
8. Mamadaliyev N. K. On representation of a solution to a modified Cauchy problem, *Sib. Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 889–899. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02674745>.
9. Urinov A. K., Okboev A. B. Modified Cauchy problem for one degenerate hyperbolic equation of the second kind, *Ukr. Math. J.*, 2020, vol. 72, no. 1, pp. 114–135. EDN: [XDIQGV](#). DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01766-1>.
10. Urinov A. K., Okboev A. B. On a Cauchy type problem for a second kind degenerating hyperbolic equation, *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 793–803. EDN: [QPEVQB](#). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222060324>.
11. Urinov A. K., Usmonov D. A. About modified Cauchy problem for a second kind degenerated hyperbolic equation, *Bull. Inst. Math.*, 2021, vol. 4, no. 1, pp. 46–63 (In Russian).
12. Ehrgashev T. G. Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2017, no. 46, pp. 41–49 (In Russian). EDN: [YPDTPD](#). DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/46/6>.

13. Baikuziev K. B. Mixed problem for one hyperbolic equation degenerating on a contour, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1962, vol. 6, no. 2, pp. 83–85 (In Russian).
14. Karimov D. H., Baikuziev K. B. A mixed problem for a hyperbolic equation degenerating on the boundary of the domain, *Nauchn. Tr. Tashkent. Gos. Univ.*, 1962, vol. 208, pp. 90–97 (In Russian).
15. Karimov D. H., Baikuziev K. B. The second mixed problem for one hyperbolic equation degenerating on the boundary of the domain, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1964, vol. 8, no. 6, pp. 27–30 (In Russian).
16. Baikuziev K. B. On the solvability of mixed problems for a class of non-linear equations of hyperbolic type that degenerate on the boundary of a domain, *Izv. Akad. Nauk UzSSR, Ser. Fiz.-Mat. Nauk*, 1967, vol. 11, no. 2, pp. 3–6 (In Russian).
17. Baikuziev K. B., Karimov D. H. On the solvability of a mixed problem for hyperbolic equations that degenerates on the entire boundary of the domain, *Tr. Tashkent. Gos. Univ.*, 1969, vol. 2, no. 350, pp. 8–20 (In Russian).
18. Datkabayev D. A mixed problem for a system of second-order equations that degenerate on the entire boundary of the domain, *Probl. Fiz.-Mat. Nauk. Tashkent*, 1976, vol. 164, pp. 32–38 (In Russian).
19. Krasnov M. L. Mixed boundary problems for degenerate linear hyperbolic differential equations second order, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1959, vol. 49(91), no. 1, pp. 29–84 (In Russian).
20. Oleinik O. A. The Cauchy problem and the boundary value problem for second-order hyperbolic equations degenerating in a domain and on its boundary, *Sov. Math., Dokl.*, 1966, vol. 7, pp. 969–973.
21. Bryukhanov V. A. A mixed problem for a hyperbolic equation degenerate on a part of the boundary of a region, *Differ. Uravn.*, 1972, vol. 8, no. 1, pp. 3–6 (In Russian).
22. Vragov V. N. A mixed problem for a certain class of second order hyperbolic-parabolic equations, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 1, pp. 24–31 (In Russian).
23. Bubnov B. A. A mixed problem for certain parabolic-hyperbolic equations, *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 494–501 (In Russian).
24. Baranovskii F. T. Mixed problem for a second-order hyperbolic equation which is strongly degenerate on the initial plane, *Sib. Math. J.*, 1979, vol. 20, no. 3, pp. 338–346. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00969936>.
25. Baranovskii F. T. A mixed boundary value problem for a hyperbolic equation with degenerate principal part, *Sb. Math.*, 1982, vol. 43, no. 4, pp. 499–513. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1982v043n04ABEH002577>.
26. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation of the second kind in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 42–50. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X07040068>.
27. Sabitov K. B., Suleimanova A. Kh. The Dirichlet problem for a mixed-type equation with characteristic degeneration in a rectangular domain, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2009, vol. 53, no. 11, pp. 37–45. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X0911005X>.
28. Sabitov K. B., Egorova I. P. On the correctness of boundary value problems for the mixed type equation of the second kind, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 430–451 (In Russian). EDN: KBIAPC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1718>.
29. Khairullin R. S. Dirichlet problem for a mixed type equation of the second kind in exceptional cases, *Differ. Equat.*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 562–562. EDN: UXXARG. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266118040134>.
30. Khairullin R. S. Problem with a periodicity condition for an equation of the mixed type with strong degeneration, *Differ. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 8, pp. 1105–1117. EDN: CYEAGU. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266119080111>.
31. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. II, Bateman Manuscript Project. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., 1953, xvii+396 pp.

32. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Fizmatlit, 2010, 528 pp. (In Russian). EDN: [RYRSSP](#).
33. Mikhlin S. G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniiam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatlit, 1959, 232 pp. (In Russian)
34. Watson G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge, Cambridge Univ., 1995, vi+804 pp.



УДК 539.3

Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными

А. И. Круссер¹, М. В. Шитикова^{1,2}

¹ Воронежский государственный технический университет, Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84.

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, Москва, Ярославское ш., 26.

Аннотация

Цель. Исследуются нелинейные колебания упругой шарнирно опертой пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки в случае внутреннего резонанса 1:1, сопровождаемого внешним резонансом. Свойства вязкоупругого основания задаются с помощью обобщенной модели Фусса–Винклера, в которой сила демпфирования описывается моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана–Лиувилля. Внешняя нагрузка задается при помощи линейного вязкоупругого осциллятора на основе модели Кельвина–Фойгта с дробной производной в случае, когда вязкость осциллятора считается малой величиной. Динамическое поведение пластины описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени относительно обобщенных перемещений. **Методы.** Для решения полученной системы уравнений используется метод многих временных масштабов в сочетании с методом разложения дробной производной в ряд Тейлора.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Круссер А. И., Шитикова М. В. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 694–714. EDN: DOBLOB. DOI: 10.14498/vsgtu1957.

Сведения об авторах

Анастасия Игоревна Круссер  <https://orcid.org/0000-0001-6203-2495>

аспирант; младший научный сотрудник; Международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Россихина Ю.А.; e-mail: an.krusser@yandex.ru

Марина Вячеславовна Шитикова  <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>

доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник; Международный научный центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Россихина Ю.А.¹; профессор, кафед. строительной и теоретической механики²; e-mail: mvs@vgasu.vrn.ru

Результаты. Получены разрешающие уравнения для определения нелинейных амплитуд и фаз вынужденных колебаний, решение которых получено численно. Данная система уравнений позволяет управлять не только демпфирующими свойствами окружающей среды и основания за счет изменения параметров дробности, но также регулировать параметры демпфирования внешней нагрузки. **Выводы.** Численный анализ показал, что в рассматриваемой системе «пластина на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» происходит перекачка энергии между взаимодействующими модами колебаний. Представлено сравнение результатов численных исследований для различных значений внешней нагрузки, а также показана зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений параметров дробности окружающей среды и основания.

Ключевые слова: пластинка на вязкоупругом основании, подвижная осциллирующая нагрузка, дробная производная, метод многих временных масштабов, внутренний и внешний резонанс.

Получение: 21 сентября 2022 г. / Исправление: 18 октября 2022 г. /
Принятие: 21 октября 2022 г. / Публикация онлайн: 7 декабря 2022 г.

1. Введение. В настоящее время возрос интерес к анализу пластинок и балок, опирающихся на вязкоупругое основание, при воздействии различных видов динамических нагрузок. Подвижные нагрузки оказывают большое влияние на напряженно-деформированное состояние различных твердых тел и конструкций, вызывая их интенсивные колебания даже при небольших скоростях. Особый практический интерес представляют задачи взаимодействия автомобиля с дорожным полотном или самолета с покрытием взлетно-посадочной полосы. Для моделирования такой системы необходимо учитывать инерционные свойства и жесткостные характеристики движущегося объекта, т.е. представить транспортное средство в виде движущегося осциллятора.

Обширные исследования в области колебаний балок и пластин при воздействии подвижных нагрузок обобщены в обзорных работах [1–3]. Динамическое поведение балок на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки исследовано в [4–9], где подвижная нагрузка представлялась в виде подрессоренной массы на пружинке [4, 5] или в виде вязкоупругого осциллятора по модели Кельвина–Фойгта [6–9].

Начиная с 1971 года, когда вышла в свет теперь уже классическая работа [10], в которой впервые демпфирующие свойства одномассовой механической системы было предложено представить в виде модели линейного стандартного тела с дробными производными, для описания свойств вязкоупругих осцилляторов широко используются различные модели с дробными производными и другими операторами дробного порядка [11–16].

Исследование влияния реакции основания на динамическое поведение конструкций давно привлекает внимание исследователей. Как известно, первой попыткой описать реакцию основания была модель, согласно которой основание считается упругим [3, 17]. В литературе встречается несколько названий данной модели, согласно которой возникающие деформации в грунтовом основании пропорциональны приложенному напряжению. В работах западных авторов модель упругого основания называют моделью Винклера, пер-

вое упоминание о которой относится к 1867 г. [18] и которая впоследствии была развита Н. Zimmermann'ом [19]. Однако ретроспективный анализ показал, что модель Винклера впервые была предложена русским академиком Н. И. Фуссом в 1801 г. в работе о движении повозок по дороге [20], в которой было выдвинуто положение о прямой пропорциональности давления местной осадке грунта [21, 22]. Таким образом, в русскоязычной литературе упругую модель основания принято называть моделью Фусса—Винклера.

Для описания вязкоупругого поведения материалов оснований к упругой модели Фусса—Винклера был добавлен вязкий элемент (или элементы), в результате чего было предложено несколько вязкоупругих моделей основания, обзор которых представлен в [3]. В настоящее время все большее распространение получают модели вязкоупругих оснований с использованием дробных производных, которые показали преимущества при описании наследственно-го поведения материалов с длительной памятью [23].

Задачи, посвященные анализу колебаний пластин на вязкоупругом основании, подверженных воздействию подвижной подрессоренной нагрузки, рассмотрены в работах [24–27]. Так, М. Taheri и Е. Ting [24] использовали функцию Грина для анализа поведения упругих пластин на линейном вязкоупругом основании по модели Кельвина—Фойгта целого порядка с произвольными граничными условиями под действием подвижных масс, опирающихся на пластину через систему пружины и амортизатора, соединенных параллельно. М. Zaman и др. [25] моделировали бетонные покрытия, которые подвержены воздействию движущихся авиационных нагрузок, с помощью ряда толстых пластинчатых элементов, поддерживаемых дискретными пружинами и амортизаторами в узловых точках, представляющих вязкоупругое основание по модели Кельвина—Фойгта. Динамическое взаимодействие между самолетом и покрытием учитывалось путем идеализации нагрузки от самолета массами, поддерживаемыми системой линейной рессорно-поршневой подвески и имеющими заданную начальную горизонтальную скорость и ускорение. W. Yang и др. [26] изучали влияние действия сцепления на взаимодействие автомобиля с дорогой. Автомобиль моделировался как масса, опирающаяся на систему подвески из четырех осцилляторов, соединенных с колесами, а дорожное покрытие моделировалось как двухслойная прямоугольная тонкая пластина на линейном вязкоупругом основании, описываемом моделью Кельвина—Фойгта. Этот подход был расширен в [27] для случая нелинейной жесткости подвески, нелинейного демпфирования подвески и жесткости шин, а также нелинейной модели основания.

Задача о колебаниях пластин также была обобщена для случая вязкоупругого материала пластинки. Для описания вязкоупругих свойств материала пластин часто используют модель Кельвина—Фойгта [28] или модель стандартного линейного тела [29].

Согласно проведенному обзору литературы, в большинстве работ анализ колебаний пластин на вязкоупругих основаниях проводился в линейной постановке задачи. Тем не менее имеются работы, в которых рассматриваются нелинейные колебания пластин на основании. Так, динамическое поведение прямоугольной нелинейной пластины, опирающейся на вязкоупругое основание, особенности демпфирования которого описываются моделью Кельвина—Фойгта с дробной производной, впервые исследовалось в работе [30]. Модель

стандартного линейного твердого тела с дробной производной применялась для определения вязкоупругих свойств основания для случаев свободных колебаний пластины [31] и вынужденных колебаний при воздействии подвижной гармонической нагрузки [32].

В настоящей работе исследуются нелинейные колебания шарнирно опертой по контуру пластины под действием подвижной осциллирующей нагрузки, опирающейся на вязкоупругое основание на основе обобщенной модели Фусса—Винклера для случая внутреннего резонанса 1:1, сопровождаемого внешним резонансом. При этом вязкоупругие свойства основания, подвижной нагрузки и демпфирующие свойства окружающей среды, в которой происходят колебания, описываются моделями с дробными производными.

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейные колебания шарнирно опертой по контуру упругой пластины в вязкоупругой среде на вязкоупругом основании под действием подвижной подрессоренной нагрузки, которая моделируется вязкоупругим осциллятором Кельвина—Фойгта с дробной производной (рис. 1). Уравнения движения системы «пластина + вязкоупругое основание» можно получить путем обобщения уравнений фон Кармана [33] за счет включения слагаемых, описывающих реакцию основания и силу сопротивления окружающей среды, а также воздействие внешней осциллирующей нагрузки:

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \delta(x - f(t)) \delta(y - 0.5b) - F_1 - F_2, \quad (1)$$

$$\nabla^4 \varphi = Eh \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (2)$$

где $w = w(x, y, t)$ — поперечный прогиб пластины; φ — функция напряжений Эйри; $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость; E, ν, ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала пластинки соответственно; h — толщина; t — время; δ — дельта-функция Дирака; m — масса осциллятора; $q = q(t)$ — перемещение осциллятора; g — ускорение свободного падения; $f(t)$ — функция, определяющая положение подрессоренной нагрузки. Значения функции $f(t)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(t) \leq a$, и в случае движения с постоянной скоростью $f(t) = Vt$; a и b — линейные размеры пластинки (см. рис. 1).

Уравнение движения осциллятора получено на основе выражения, представленного в [24], при помощи замены производной целого порядка на производную дробного порядка:

$$m \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta q + kq = c \left(\frac{d}{dt} \right)^\beta w(Vt, t) + kw(Vt, t) - mg, \quad (3)$$

где k — жесткость пружины, $c = k\tau_\sigma^\beta$ — коэффициент демпфирования амортизатора, τ_σ — время ретардации, $0 \leq \beta \leq 1$ — порядок дробной производной осциллятора, $w(Vt, t)$ — прогиб пластины в точке приложения осциллирующей нагрузки.

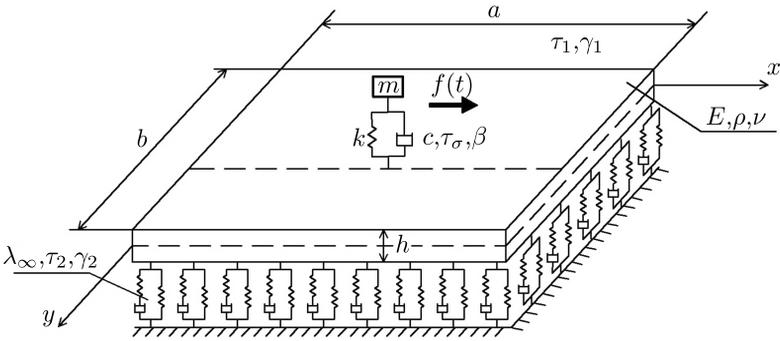


Рис. 1. Пластика на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе модели с дробной производной
 [Figure 1. A plate on a viscoelastic foundation under the action of moving oscillator based on models with fractional derivatives]

В уравнении движения (1) $F_2 = \tilde{\lambda}w$ — реакция вязкоупругого основания; $F_1 = E_0\tau_1^{\gamma_1}D_{0+}^{\gamma_1}w$ — сила сопротивления окружающей среды, которая зависит от времени ретардации τ_1 и релаксированного модуля упругости E_0 и описывается вязкоупругой моделью Кельвина—Фойгта с дробной производной Римана—Лиувилля $D_{0+}^{\gamma_1}$ порядка γ_1 ($0 < \gamma_1 \leq 1$) [14, 34]

$$D_{0+}^{\gamma}x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-t')dt'}{\Gamma(1-\gamma)t'^{\gamma}}, \quad 0 < \gamma = \gamma_1 \leq 1, \quad (4)$$

где $\Gamma(1-\gamma)$ — гамма-функция.

Предположим, следуя [35], что оператор податливости вязкоупругого основания описывается моделью стандартного линейного твердого тела с дробной производной Римана—Лиувилля D_{0+}^{γ} (4) для случая, когда $\gamma = \gamma_2$:

$$\tilde{\lambda} = \lambda_{\infty} \left[1 - \nu_{\varepsilon} \frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma} D_{0+}^{\gamma_2}} \right],$$

где λ_{∞} — коэффициент мгновенной податливости основания; $\nu_{\varepsilon} = \Delta\lambda\lambda_{\infty}^{-1}$; $\Delta\lambda = \lambda_{\infty} - \lambda_0$ — величина, характеризующая уменьшение коэффициента податливости от его нерелаксированного значения до релаксированного; τ_2 — время релаксации вязкоупругого основания.

К системе уравнений (1)–(3) необходимо добавить граничные условия для шарнирно опертой пластинки:

$$\begin{aligned} w|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=a} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=a} = 0; \\ w|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=b} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и начальные условия для осциллятора

$$q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = 0.$$

С целью выявления возможности наступления внутреннего резонанса при нелинейных колебаниях пластинки, лежащей на вязкоупругом основании, и его последующего анализа будем полагать, что в процессе колебаний доминируют две собственные моды колебаний с номерами m_1n_1 и m_2n_2 . Тогда прогиб пластинки можно представить в следующем виде [30, 31]:

$$w(x, y, t) = x_1(t) \sin \frac{\pi m_1 x}{a} \sin \frac{\pi n_1 y}{b} + x_2(t) \sin \frac{\pi m_2 x}{a} \sin \frac{\pi n_2 y}{b} = \\ = x_1(t) W_{m_1 n_1}(x, y) + x_2(t) W_{m_2 n_2}(x, y), \quad (6)$$

где $x_i(t)$ и $W_{m_i n_i}(x, y)$ — обобщенные перемещения и собственные функции, $i = 1, 2$.

Подставляя решение (6) в уравнение (2) с учетом граничных условий (5) и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$, с учетом свойства ортогональности собственных функций получим функцию напряжений, которая представлена для шарнирно опертой по контуру пластины в работе [32].

При выводе дифференциальных уравнений следует учитывать фильтрующее свойство дельта-функции

$$\iint \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0),$$

в результате чего слагаемое, описывающее воздействие внешней нагрузки, примет вид

$$m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \iint \delta(x - Vt) \delta(y - b/2) \sin \left(\frac{\pi m_i x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi n_i y}{b} \right) dx dy = \\ = m \left(g + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \sin \left(\frac{\pi m_i Vt}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi n_i}{2} \right). \quad (7)$$

Подставляя предполагаемую функцию прогиба пластинки (6) и функцию напряжений в уравнение движения пластинки на вязкоупругом основании (1) и интегрируя на отрезках $0 \leq x \leq a$ и $0 \leq y \leq b$, с учетом (7) приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений пластины:

$$\ddot{x}_1 + \left(\Omega_1^2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \right) x_1 + \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_1 x_2^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D_{0+}^{\gamma_1} x_1 - \frac{\lambda_\infty \nu_\varepsilon}{\rho h} \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 + \\ + \frac{4m(g + \ddot{q})}{ab\rho h} \sin \left(\frac{\pi n_1}{2} \right) \sin \omega_{f_1} t = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{x}_2 + \left(\Omega_2^2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} \right) x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_4 x_2 x_1^2 + \frac{E_0 \tau_1^{\gamma_1}}{\rho h} D_{0+}^{\gamma_1} x_2 - \frac{\lambda_\infty \nu_\varepsilon}{\rho h} \varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 + \\ + \frac{4m(g + \ddot{q})}{ab\rho h} \sin \left(\frac{\pi n_2}{2} \right) \sin \omega_{f_2} t = 0, \quad (9)$$

где α_i — коэффициенты, зависящие от номеров мод колебаний и геометрии пластинки [32], $\omega_{f_i} = \pi m_i V/a$ — круговые частоты, Ω_i^2 — квадраты собственных частот линейных колебаний пластины:

$$\Omega_i^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)} \nabla^4 W_{m_i n_i}(x, y) = \frac{E\pi^4 h^2}{12\rho(1-\nu^2)b^4} (\xi^2 m_i^2 + n_i^2)^2,$$

$\xi = b/a$ и $\varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma 2})$ — безразмерный дробный оператор Ю. Н. Работнова [36]:

$$\varepsilon_\gamma^* (\tau_2^{\gamma 2}) = \frac{1}{1 + \tau_2^{\gamma 2} D_{0+}^{\gamma 2}}. \quad (10)$$

Заметим, что уравнения для свободных колебаний могут быть получены из уравнений (8), (9) при $m = 0$.

Уравнения (8), (9) можно решать различными численными методами, однако ни один из них не позволяет качественно исследовать такие нелинейные явления, как сильная взаимосвязь мод колебаний с близкими значениями собственных частот, приводящая к различным типам внутреннего резонанса и перекачке энергии.

3. Метод решения. Разрешающие уравнения (8), (9) с операторами дробного порядка можно решить с помощью метода разложения дробного оператора [37], который является обобщением метода многих временных масштабов [38], т.е. одним из методов теории возмущений, впервые предложенным для разложения дробной производной в [39].

Предыдущий анализ затухающих свободных колебаний упругой пластины на вязкоупругом основании [30, 31] показал, что такая механическая система может испытывать нелинейные колебания под действием слабого вязкого демпфирования, которые могут сопровождаться внутренним резонансом 1:1, когда собственные частоты двух связанных мод близки друг к другу.

Профессор А. Nayfeh в своих знаменитых монографиях «Методы возмущений» [38] и «Нелинейные колебания» [40] подчеркивал, что при изучении внешних резонансов, «чтобы получить равномерно пригодное приближенное решение такой задачи, необходимо задать порядок малости возбуждения так, чтобы оно появлялось при появлении демпфирования и нелинейности». Для этого коэффициенты при силах демпфирования среды и основания представим в виде

$$\varepsilon\mu_1 = \frac{E_0\tau_1^{\gamma 1}}{\rho h}, \quad \varepsilon\mu_2 = \frac{\lambda_\infty\nu_\varepsilon}{\rho h}, \quad (11)$$

где ε — безразмерный малый параметр, μ_i — конечные величины, $i = 1, 2$.

Рассмотрим решение задачи для случая, когда нелинейность пластинки и вязкость амортизатора осциллирующей нагрузки задаются величинами порядка ε . Также будем считать, что ускорение $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ является малой величиной в сравнении с ускорением свободного падения g .

Тогда с учетом выражений (11) разрешающие уравнения для механической системы «пластина на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» могут быть записаны в виде

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \varepsilon \alpha_1 x_1^3 + \varepsilon \alpha_2 x_1 x_2^2 + \varepsilon \mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_1 - \varepsilon \mu_2 \mathfrak{z}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_1 + 4f_1 g \sin \omega_{f_1} t + 4\varepsilon f_1 \ddot{q} \sin \omega_{f_1} t = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \varepsilon \alpha_3 x_2^3 + \varepsilon \alpha_4 x_2 x_1^2 + \varepsilon \mu_1 D_{0+}^{\gamma_1} x_2 - \varepsilon \mu_2 \mathfrak{z}_\gamma^* (\tau_2^{\gamma_2}) x_2 + 4f_2 g \sin \omega_{f_2} t + 4\varepsilon f_2 \ddot{q} \sin \omega_{f_2} t = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 (1 + \varepsilon \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) q = \varepsilon \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) x_1 \sin \omega_{f_1} t + \varepsilon \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_{0+}^\beta) x_2 \sin \omega_{f_2} t - g, \quad (14)$$

где

$$f_i = \frac{m}{ab\rho h} \eta_i, \quad \eta_i = \sin\left(\frac{\pi n_i}{2}\right), \quad i = 1, 2,$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота упругого осциллятора; ω_1 и ω_2 — частоты колебаний механической системы «пластина + вязкоупругое основание»:

$$\omega_i^2 = \Omega_i^2 + \frac{\lambda_\infty}{\rho h}.$$

Для решения системы нелинейных уравнений (12), (13) и (14) будем использовать метод многих временных масштабов [38], согласно которому обобщенные перемещения $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) и $q(t)$ можно представить в виде разложения по двум временным масштабам T_0 и T_1 :

$$x_i(t) = X_{i0}(T_0, T_1) + \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1) + \dots, \quad (15)$$

$$q(t) = Q_0(T_0, T_1) + \varepsilon Q_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (16)$$

где $T_n = \varepsilon^n t$ — новые независимые переменные: $T_0 = t$ — быстрое время, характеризующее движение с собственными частотами линейных колебаний, и $T_1 = \varepsilon t$ — медленное время, характеризующее модуляцию амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

При решении уравнений движения следует учесть, что производные по времени первого и второго порядков раскладываются в ряд по малому параметру [37, 38] в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 D_1^2 + \dots, \quad (18)$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$, $n = 0, 1, \dots$

Для того чтобы решать нелинейные дифференциальные уравнения с дробными производными при помощи метода многих временных масштабов, Ю. А. Россихин и М. В. Шитикова в 1998 г. [39] ввели разложение дробной производной в следующем виде:

$$D_+^\gamma = \left(\frac{d}{dt}\right)^\gamma = (D_0 + \varepsilon D_1 + \dots)^\gamma = D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \dots \quad (19)$$

Разложение безразмерного дробного оператора Ю. Н. Работнова (10) в ряд Тейлора по малому параметру имеет вид [41]:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\gamma^* (\tau^\gamma) &= \frac{1}{1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma} = (1 + \tau^\gamma D_{0+}^\gamma)^{-1} = [1 + \tau^\gamma (D_0^\gamma + \varepsilon \gamma D_0^{\gamma-1} D_1)]^{-1} = \\ &= (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-1} - \varepsilon (1 + \tau^\gamma D_0^\gamma)^{-2} \tau^\gamma \gamma D_0^{\gamma-1} D_1 + \dots \quad (20) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (15) и (16) с учетом соотношений (17), (18), (19) и (20) в уравнения (12)–(14) после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε к нулю, приходим к системе рекуррентных уравнений различного порядка:

– порядка ε^0 :

$$D_0^2 X_{10} + \omega_1^2 X_{10} = -4f_1 g \sin(\omega_{f_1} T_0), \quad (21)$$

$$D_0^2 X_{20} + \omega_2^2 X_{20} = -4f_2 g \sin(\omega_{f_2} T_0), \quad (22)$$

$$D_0^2 Q_0 + \omega_0^2 Q_0 = -g, \quad (23)$$

– порядка ε :

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} &= -2D_0 D_1 X_{10} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{10} - \\ &- \alpha_1 X_{10}^3 - \alpha_2 X_{10} X_{20}^2 + 4D_0^2 Q_0 f_1 \sin(\omega_{f_1} T_0), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} &= -2D_0 D_1 X_{20} - (\mu_1 D_0^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} D_0^{\gamma_2})^{-1}) X_{20} - \\ &- \alpha_3 X_{20}^3 - \alpha_4 X_{20} X_{10}^2 + 4D_0^2 Q_0 f_2 \sin(\omega_{f_2} T_0), \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_1 &= -2D_0 D_1 Q_0 - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta D_0^\beta Q_0 + \\ &+ \eta_1 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{10} \sin \omega_{f_1} t + \eta_2 \omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta D_0^\beta) X_{20} \sin \omega_{f_2} t. \quad (26) \end{aligned}$$

Решение линейных уравнений (21)–(23) имеет вид

$$\begin{aligned} X_{j0} &= A_j(T_1) \exp(i\omega_j T_0) + \Lambda_j \exp(i\omega_{f_j} T_0) + \\ &+ \bar{A}_j(T_1) \exp(-i\omega_j T_0) + \bar{\Lambda}_j \exp(-i\omega_{f_j} T_0), \quad (27) \end{aligned}$$

$$Q_0 = A_3(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_3(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) + C, \quad (28)$$

где $A_i(T_1)$ – пока неизвестные функции, $\bar{A}_i(T_1)$ – комплексно-сопряженные функции с $A_i(T_1)$, $i = 1, 2, 3$; $\Lambda_j = \frac{4f_j g}{2i(\omega_{f_j}^2 - \omega_j^2)}$, $\bar{\Lambda}_j$ – константа, сопряженная с Λ_j , $j = 1, 2$; $C = -g/\omega_0^2$.

Подставляя выражения (27) и (28) в уравнения (24)–(26), получим:

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} &= -2i\omega_1 D_1 A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \\ &- [\mu_1 (i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2 (1 + \tau_2^{\gamma_2} (i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1}] A_1 \exp(i\omega_1 T_0) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - [\mu_1(i\omega_{f_1})^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_{f_1})^{\gamma_2})^{-1}] \Lambda_1 \exp(i\omega_{f_1}T_0) - \\
 & \quad - \alpha_1 [\Lambda_1 \exp(3i\omega_{f_1}T_0) + 3\bar{\Lambda}_1 \exp(i\omega_{f_1}T_0)] \Lambda_1^2 - \\
 & \quad - 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 \exp(i\omega_1 T_0) - 6\alpha_1 A_1 \bar{A}_1 \Lambda_1 \exp(i\omega_{f_1}T_0) - \\
 & - \alpha_1 \{ 3A_1^2 \Lambda_1 \exp[(2\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] + 3\bar{A}_1^2 \Lambda_1 \exp[(\omega_{f_1} - 2\omega_1)T_0] + \\
 & + 3A_1 \Lambda_1^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_{f_1})T_0] + 3A_1 \bar{\Lambda}_1^2 \exp[(\omega_1 - 2\omega_{f_1})T_0] \} - \\
 & \quad - \alpha_1 [A_1 \exp(3i\omega_1 T_0) + 3\bar{A}_1 \exp(i\omega_1 T_0)] A_1^2 - \\
 & \quad - \alpha_2 \{ A_2^2 \exp[(\omega_1 + 2\omega_2)T_0] + 2A_2 \bar{A}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \\
 & + \bar{A}_2^2 \exp[i(\omega_1 - 2\omega_2)T_0] + 2\Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 \exp(i\omega_1 T_0) + \text{NCT} \} A_1 + \\
 & \quad + 2f_1 i\omega_0^2 \exp[i(\omega_{f_1} + \omega_0)T_0] A_3 + \text{CC}, \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} & = -2i\omega_2 D_1 A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
 & - [\mu_1(i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1}] A_2 \exp(i\omega_2 T_0) - \\
 & - [\mu_1(i\omega_{f_2})^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_{f_2})^{\gamma_2})^{-1}] \Lambda_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
 & \quad - \alpha_3 [\Lambda_2 \exp(3i\omega_{f_2} T_0) + 3\bar{\Lambda}_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0)] \Lambda_2^2 - \\
 & \quad - 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 \exp(i\omega_2 T_0) - 6\alpha_3 A_2 \bar{A}_2 \Lambda_2 \exp(i\omega_{f_2} T_0) - \\
 & - \alpha_3 \{ 3A_2^2 \Lambda_2 \exp[(2\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] + 3\bar{A}_2^2 \Lambda_2 \exp[(\omega_{f_2} - 2\omega_2)T_0] + \\
 & + 3A_2 \Lambda_2^2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_{f_2})T_0] + 3A_2 \bar{\Lambda}_2^2 \exp[(\omega_2 - 2\omega_{f_2})T_0] \} - \\
 & \quad - \alpha_3 [A_2 \exp(3i\omega_2 T_0) + 3\bar{A}_2 \exp(i\omega_2 T_0)] A_2^2 - \\
 & \quad - \alpha_4 \{ A_1^2 \exp[(\omega_2 + 2\omega_1)T_0] + 2A_1 \bar{A}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \\
 & + \bar{A}_1^2 \exp[i(\omega_2 - 2\omega_1)T_0] + 2\Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 \exp(i\omega_2 T_0) + \text{NCT} \} A_2 + \\
 & \quad + 2f_2 i\omega_0^2 \exp[i(\omega_{f_2} + \omega_0)T_0] A_3 + \text{CC}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 Q_1 + \omega_0^2 Q_1 & = -2i\omega_0 D_1 A_3 \exp(i\omega_0 T_0) - \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 \exp(i\omega_0 T_0) - \\
 & - \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) A_1 \exp[i(\omega_1 + \omega_{f_1})T_0] - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \Lambda_1 \exp(2i\omega_{f_1} T_0) + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) A_1 \exp[i(\omega_1 - \omega_{f_1})T_0] + \\
 & + \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_1})^\beta) \Lambda_1 - \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) A_2 \exp[i(\omega_2 + \omega_{f_2})T_0] - \\
 & \quad - \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \Lambda_2 \exp(2i\omega_{f_2} T_0) + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) A_2 \exp[i(\omega_2 - \omega_{f_2})T_0] + \\
 & \quad + \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_{f_2})^\beta) \Lambda_2 + \text{CC}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

где CC означает комплексно-сопряженную часть к предыдущим членам в уравнении, NCT — невековые члены уравнения.

Анализ выражений (29)–(31) показывает, что возможен случай возникновения внутреннего резонанса один к одному, когда какие-либо две частоты колебаний механической системы «пластина + вязкоупругое основание» близки друг к другу:

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \text{и отсюда} \quad \Omega_1 = \Omega_2. \quad (32)$$

Из уравнений (29)–(31) следует, что внутренний резонанс может сопровождаться внешним резонансом при выполнении одного из следующих условий:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \omega_i = \omega_0 + \omega_{fi}, \\ (2) \quad & \omega_i = \omega_0 - \omega_{fi}. \end{aligned} \quad (33)$$

Условие устранения появления вековых членов в уравнениях (29)–(31) с учетом соотношений (32) и (33) приводит к системе трех определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_1 + [\mu_1(i\omega_1)^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_1)^{\gamma_2})^{-1}] A_1 + 3\alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + \\ + 6\alpha_1 A_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \bar{A}_1 A_2^2 + 2\alpha_2 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 2\alpha_2 \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2 A_1 + 2f_1 i\omega_0^2 A_3 = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_1 D_1 A_2 + [\mu_1(i\omega_2)^{\gamma_1} - \mu_2(1 + \tau_2^{\gamma_2}(i\omega_2)^{\gamma_2})^{-1}] A_2 + 3\alpha_3 A_2^2 \bar{A}_2 + \\ + 6\alpha_3 A_2 \Lambda_2^2 + \alpha_4 \bar{A}_2 A_1^2 + 2\alpha_4 A_2 A_1 \bar{A}_1 + 2\alpha_4 \Lambda_1 \bar{\Lambda}_1 A_2 + 2f_2 i\omega_0^2 A_3 = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 2i\omega_0 D_1 A_3 + \omega_0^2 \tau_\sigma^\beta (i\omega_0)^\beta A_3 - \frac{1}{2} \eta_1 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_1)^\beta) A_1 - \\ - \frac{1}{2} \eta_2 i\omega_0^2 (1 + \tau_\sigma^\beta (i\omega_2)^\beta) A_2 = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Умножая (34) на \bar{A}_1 , (35) на \bar{A}_2 и (36) на \bar{A}_3 соответственно, складывая и вычитая сопряженные к ним уравнения, а также представляя функции в полярном виде

$$A_i = a_i e^{i\phi_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где $a_i = a_i(T_1)$ и $\phi_i = \phi_i(T_1)$ — функции амплитуд и фаз колебаний, приходим к следующей системе уравнений:

$$(a_1^2) \cdot + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \alpha_2 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2f_1 \omega_0^2 \omega_1^{-1} a_1 a_3 \cos \beta_1 = 0, \quad (37)$$

$$(a_2^2) \cdot + s_2 a_2^2 - \omega_2^{-1} \alpha_4 a_1^2 a_2^2 \sin \delta + 2f_2 \omega_0^2 \omega_2^{-1} a_2 a_3 \cos \beta_2 = 0, \quad (38)$$

$$(a_3^2) \cdot + s_3 a_3^2 - \frac{1}{2} \eta_1 \omega_0 a_1 a_3 (l_1 + \cos \beta_1) - \frac{1}{2} \eta_2 \omega_0 a_2 a_3 (l_2 + \cos \beta_2) = 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 - \frac{1}{2} \lambda_1 - \frac{3}{2} \alpha_1 \omega_1^{-1} (a_1^2 + 2\Lambda_1^2) - \alpha_2 \omega_1^{-1} (a_2^2 + \Lambda_2 \bar{\Lambda}_2) - \\ - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_1^{-1} a_2^2 \cos \delta - f_1 \omega_0^2 (\omega_1 a_1)^{-1} a_3 \sin \beta_1 = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{3}{2}\alpha_3\omega_2^{-1}(a_2^2 + 2\Lambda_2^2) - \alpha_4\omega_2^{-1}(a_1^2 + \Lambda_1\bar{\Lambda}_1) - \\ - \frac{1}{2}\alpha_4\omega_2^{-1}a_1^2 \cos \delta - f_2\omega_0^2(\omega_2 a_2)^{-1}a_3 \sin \beta_2 = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\dot{\phi}_3 - \frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{1}{4}\eta_1\omega_0 a_1 a_3^{-1}(p_1 + \sin \beta_1) - \frac{1}{4}\eta_2\omega_0 a_2 a_3^{-1}(p_2 + \sin \beta_2) = 0, \quad (42)$$

где $\delta = 2(\phi_2 - \phi_1)$; $\beta_1 = \phi_1 - \phi_3$, $\beta_2 = \phi_2 - \phi_3$ — сдвиги фаз колебаний;

$$\begin{aligned} s_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \sin \psi_1 + \mu_2\omega_i^{-1} R_i \sin \Phi_i, \\ \lambda_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \cos \psi_1 - \mu_2\omega_i^{-1} R_i \cos \Phi_i, \\ l_i &= \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \cos(\theta + \beta_i), \quad p_i = \omega_i^\beta \tau_\sigma^\beta \sin(\theta + \beta_i), \\ R_i &= \sqrt{1 + 2(\tau_2\omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2 + (\tau_2\omega_i)^{2\gamma_2}}, \\ \operatorname{tg} \Phi_i &= \frac{(\tau_2\omega_i)^{\gamma_2} \sin \psi_2}{1 + (\tau_2\omega_i)^{\gamma_2} \cos \psi_2}, \quad \psi_i = \frac{1}{2}\pi\gamma_i, \quad i = 1, 2; \\ s_3 &= \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \sin \theta, \quad \lambda_3 = \omega_0^{\beta+1} \tau_\sigma^\beta \cos \theta, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi\beta. \end{aligned} \quad (43)$$

Система уравнений (37)–(42) является определяющей для амплитуд и фаз нелинейных вынужденных колебаний шарнирно опертой по контуру упругой пластинки на вязкоупругом основании, свойства которого описываются моделью стандартного линейного твердого тела с дробными производными, под действием подвижной подрессоренной нагрузки в виде вязкоупругого осциллятора, демпфирующие свойства которого описываются дробной производной.

Согласно определяющим уравнениям (37)–(42) нелинейные совместные колебания механической системы «упругая пластинка на вязкоупругом основании + подвижная подрессоренная нагрузка» в вязкоупругой окружающей среде определяются коэффициентами s_i и λ_i , $i = 1, 2, 3$, см. (43). Данные коэффициенты при $0 < \gamma_i \leq 1$ и $0 < \beta \leq 1$ зависят от собственных частот двух мод колебаний ω_i , связанных условием внутреннего резонанса (32), и реологических параметров основания и окружающей среды, включая два параметра дробности γ_1 и γ_2 .

Заметим, что в уравнениях (37)–(39) вторые слагаемые отвечают за процесс диссипации энергии, при этом при $0 < \gamma_i \leq 1$ и $0 < \beta \leq 1$ коэффициенты демпфирования s_i зависят от частот колебаний ω_i и ω_0 , что согласуется с гипотезой модального демпфирования. При $\gamma_i = 0$ и $\beta = 0$ коэффициенты демпфирования обращаются в ноль $s_i = 0$.

В частном случае, когда время релаксации τ_2 материала основания достаточно велико, соотношения (43) принимают вид

$$\begin{aligned} R_i &= (\tau_2\omega_i)^{\gamma_2}, \quad \Phi_i = \Phi = \psi_2, \quad i = 1, 2; \\ \psi_j &= \pi\gamma_j/2, \quad j = 1, 2; \\ s_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \sin \psi_1 + \mu_2\omega_i^{\gamma_2-1} \sin \psi_2, \\ \lambda_i &= \mu_1\omega_i^{\gamma_1-1} \cos \psi_1 - \mu_2\omega_i^{\gamma_2-1} \cos \psi_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Заметим, что в этом случае соотношения (44) стремятся к соответствующим соотношениям, полученным в [30] при моделировании свойств грунтового основания с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной.

4. Численные исследования. Полученная система уравнений (37)–(42) была решена численно при помощи метода Рунге–Кутты четвертого порядка. В качестве примера рассматривалась пластинка со следующими геометрическими параметрами: $a = b = 10$ м, $h = 0.3$ м, $m_1 = n_2 = 1$, $m_2 = n_1 = 3$. Плотность и упругие постоянные материала пластинки принимались следующими: $\rho = 2400$ кг/м³, $E = 3.25 \cdot 10^{10}$ Па и $\nu = 0.3$.

Подрессоренная нагрузка в виде вязкоупругого осциллятора, свойства которого описываются моделью с дробной производной, движется с постоянной скоростью $V = 16.66$ м/с вдоль оси x . Параметры осциллятора приняты следующими: $q_0 = 0.5$, $\beta = 0.5$. Вынужденные колебания пластинки изучались для трех случаев величины массы осциллятора: $m = 1800$ кг (рис. 2, b), $m = 3600$ кг (рис. 2, c), $m = 5400$ кг (рис. 2, d).

Пластинка находится в условиях внутреннего резонанса 1:1 при $\omega_1 = \omega_2 = 105.48$ с⁻¹ в сочетании с внешним резонансом:

$$\omega_2 = \omega_{f_2} + \omega_0 = \frac{3.14 \cdot 3 \cdot 16.66}{10} + 89.79 = 105.48 \text{ с}^{-1}.$$

На рис. 2 наглядно показан обмен энергией между взаимодействующими модами нелинейных свободных ($m = 0$) и вынужденных ($m \neq 0$) ко-

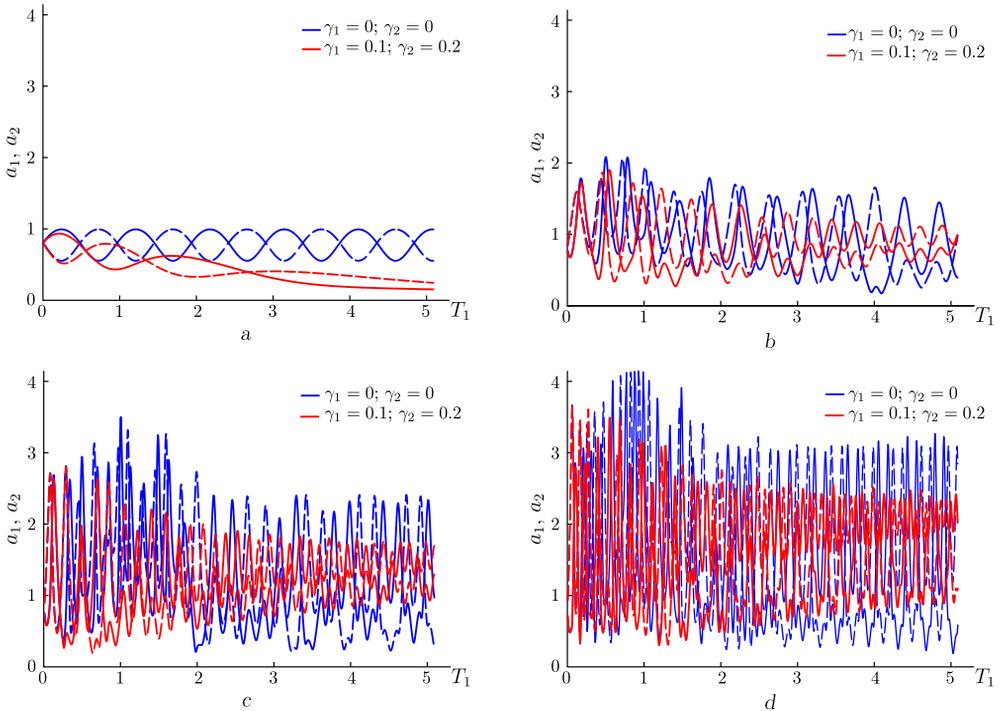


Рис. 2. (online в цвете) Зависимость амплитуд нелинейных свободных $m = 0$ (a) и вынужденных колебаний от времени T_1 для шарнирно опертой пластинки при воздействии подвижной осциллирующей нагрузки: $m = 1800$ кг (b), $m = 3600$ кг (c) и $m = 5400$ кг (d); сплошная линия — a_2 , пунктирная линия — a_1

[Figure 2. (color online) The T_1 -dependence of the amplitudes of nonlinear free $m = 0$ (a) and force driven vibrations for simply supported plate under action of moving oscillator: $m = 1800$ kg (b), $m = 3600$ kg (c), and $m = 5400$ kg (d); solid line — a_2 , dashed line — a_1]

лебаний шарнирно опертой пластины на упругом ($\gamma_2 = 0$) и вязкоупругом ($\gamma_2 \neq 0$) основании по модели стандартного линейного твердого тела для различных значений подрессоренной массы. На рис. 2 синим цветом показаны амплитуды колебаний при отсутствии сил сопротивления среды и основания ($\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$), красным цветом изображены амплитуды колебаний, огибающие которых затухают по экспоненциальному закону при $\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 0.2$. Увеличение величины нагрузки приводит к увеличению амплитуд колебаний пластины и значительному уменьшению периода колебаний.

Зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений дробных параметров окружающей среды γ_1 и вязкоупругого основания γ_2 представлена на рис. 3. С увеличением параметров дробности вязкоупругого основания и окружающей среды затухание колебаний усиливается.

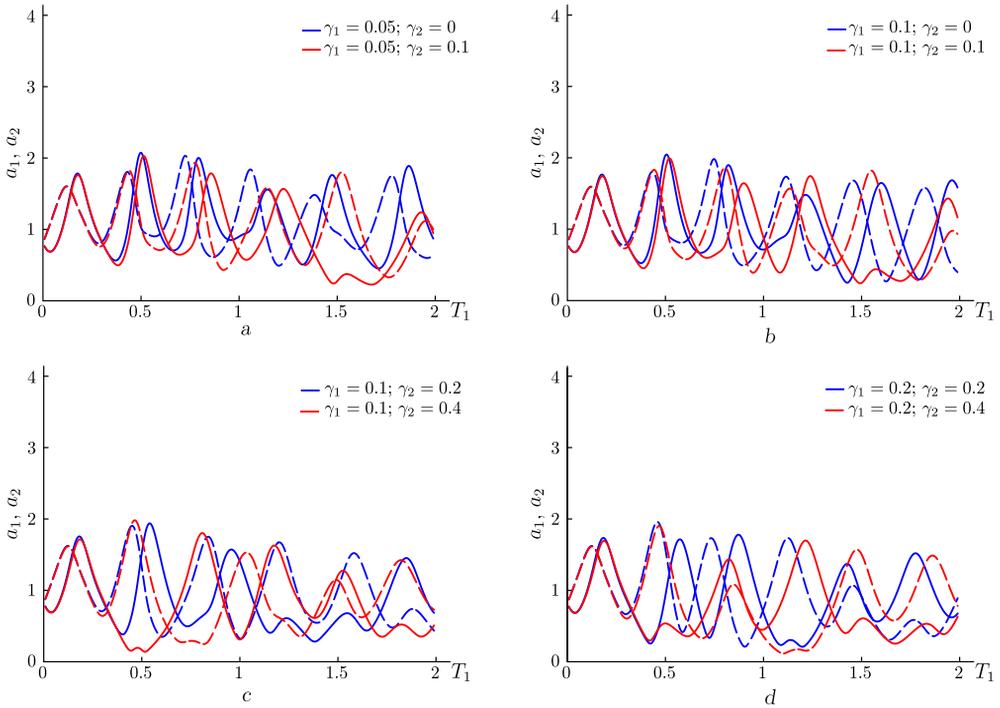


Рис. 3. (online в цвете) Зависимость амплитуд нелинейных вынужденных колебаний от времени T_1 для пластины на вязкоупругом основании при воздействии подвижной подрессоренной нагрузки ($m = 1800$ кг) для различных значений параметров дробности; сплошная линия — a_2 , пунктирная линия — a_1

[Figure 3. (color online) The T_1 -dependence of the amplitudes of nonlinear force driven vibrations of the plate on viscoelastic foundation under action of moving oscillator ($m = 1800$ kg) for different values of fractional parameters; solid line — a_2 , dashed line — a_1]

5. Заключение. Решена задача о нелинейных колебаниях шарнирно опертой упругой пластинки на вязкоупругом основании на основе обобщенной модели Фусса–Винклера под действием подвижной осциллирующей нагрузки. Демпфирующие свойства основания и окружающей среды, в которой происходят колебания, описываются вязкоупругой моделью стандартного линейного твердого тела и моделью Кельвина–Фойгта с дробными производными Римана–Лиувилля соответственно. Подвижная нагрузка моделируется при

помощи вязкоупругого осциллятора Кельвина—Фойгта с дробной производной, который движется с постоянной скоростью вдоль пластины. Получены разрешающие уравнения для определения нелинейных амплитуд и фаз вынужденных колебаний в случае внутреннего резонанса 1:1, сопровождаемого внешним резонансом, для случая, когда вязкость осциллятора считается малой величиной. Полученная система уравнений позволяет не только управлять демпфирующими свойствами окружающей среды и основания за счет изменения параметров дробности, но также регулировать параметры демпфирования внешней нагрузки, что расширяет спектр задач применимости данного решения. Данная система уравнений решена численно при помощи метода, разработанного в [42]. Численный анализ показал, что в рассматриваемой системе «пластина на вязкоупругом основании + подвижная осциллирующая нагрузка» происходит перекачка энергии между взаимодействующими модами колебаний. Представлено сравнение результатов численных исследований для различных значений внешней нагрузки, а также показана зависимость амплитуд нелинейных колебаний от значений параметров дробности окружающей среды и основания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 21–19–00634).

Библиографический список

1. Герасимов С. И., Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Лисенкова Е. Е. Динамика деформируемых систем, несущих движущиеся нагрузки (обзор публикаций и диссертационных исследований) // *Вестник научно-технического развития*, 2021. № 160. С. 25–47. EDN: HJJKPJ. DOI: <https://doi.org/10.18411/vntr2021-160-3>.
2. Fryba L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads* / Mechanics of Structural Systems. vol. 1. Springer: Dordrecht, 1973. 484+xxvii pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-9685-7>.
3. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications // *Nonlinear Dyn.*, 2019. vol. 97, no. 1. pp. 853–895. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>.
4. Rajabi K., Kargarnovin M. H., Gharini M. Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler–Bernoulli beam subjected to a moving oscillator // *Acta Mech.*, 2013. vol. 224, no. 2. pp. 425–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-012-0769-y>.
5. Almbaidin A., Abu-Alshaikh I. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo–Fabrizio fractional derivative model // *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, 2019. vol. 16, no. 2. pp. 137–146.
6. Sawant V. A., Patil V. A., Deb K. Effect of vehicle–pavement interaction on dynamic response of rigid pavements // *Geomech. Geoeng.*, 2011. vol. 6, no. 1. pp. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.1080/17486025.2010.521591>.
7. Patil V. A., Sawant V. A., Deb K. Finite element analysis of rigid pavement on a nonlinear two parameter foundation model // *Int. J. Geotech. Eng.*, 2012. vol. 6, no. 3. pp. 275–286. DOI: <https://doi.org/10.3328/IJGE.2012.06.03.274-286>.
8. Ding H., Yang Y., Chen L.-Q., Yang S.-P. Vibration of vehicle–pavement coupled system

- based on a Timoshenko beam on a nonlinear foundation // *J. Sound Vib.*, 2014. vol. 333, no. 24. pp. 6623–6636. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.016>.
9. Yang S., Chen L., Li S. Modeling and dynamic analysis of vehicle-road coupled systems / *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*. Berlin: Springer, 2015. pp. 215–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-45957-7_7.
 10. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S., Rossikhin Yu. A. Integral representations of ε_γ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity // *Int. J. Eng. Sci.*, 1971. vol. 9, no. 4. pp. 387–398. EDN: ZYMWGP. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90059-0).
 11. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // *Appl. Mech. Rev.*, 1997. vol. 57, no. 1. pp. 15–67. EDN: LELUNP. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3101682>.
 12. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / *Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием (29–31 мая 2008 г.)*. Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2008. С. 215–221. EDN: TGYVDN.
 13. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators // *Shock and Vibration*, 2009. vol. 16, no. 4, 387676. EDN: MWZYVP. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/387676>.
 14. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results // *Appl. Mech. Rev.*, 2010. vol. 63, no. 1, 010801. EDN: CUFMBA. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4000563>.
 15. Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 1(22). С. 255–268. EDN: NUPPZB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu932>.
 16. Паровик Р. И., Зуннунов Р. Т. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора // *Пробл. механ.*, 2019. № 4. С. 20–23. EDN: GREHHQ.
 17. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models // *J. Appl. Mech.*, 1964. vol. 31, no. 3. pp. 491–498. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629667>.
 18. Winkler E. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Prague: Dominicius, 1867. 388 pp. (In German)
 19. Zimmerman H. *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*. Berlin: Verlag von Ernst & Korn, 1888. 326 pp.
 20. Фусс Н. И. Опыт теории о сопротивлении причиняемом дорогами всякого рода четырёхколёсным и двухколёсным повозкам, с определением обстоятельств, при которых одни из сих повозок полезнее других / *Академические сочинения, выбранные из первого тома Деяний Императорской Академии наук*, Ч. 1. СПб., 1801. С. 373–422.
 21. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. *Балки, плиты, оболочки на упругом основании*. М.: Физ.-мат. лит., 1960. 492 с.
 22. Цытович Н. А. *Механика грунтов*. М., 1963. 637 с.
 23. Lai J., Mao S., Qiu J., Fan H., Zhang Q., Hu Z., Chen J. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering // *Math. Probl. Eng.*, 2016. vol. 2016, no. 3, 9183296. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/9183296>.
 24. Taheri M. R., Ting E. C. Dynamic response of plate to moving loads: Structural impedance method // *Comput. Struct.*, 1989. vol. 33, no. 6. pp. 1379–1393. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90478-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90478-1).
 25. Zaman M., Taheri M. R., Alvappillai A. Dynamic response of a thick plate on viscoelastic foundation to moving loads // *Int. J. Numer. Analytical Methods Geomech.*, 1991. vol. 15, no. 9. pp. 627–647. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610150903>.
 26. Yang S., Li S., Lu Y. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement // *Int. J. Vehicle Mech. Mob.*, 2010. vol. 48, no. 8. pp. 923–944. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110903243166>.

27. Li S., Yang S., Chen L. A nonlinear vehicle-road coupled model for dynamics research // *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2013. vol. 8, no. 2, 021001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4006784>.
28. Amabili M. Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates validation // *J. Sound Vib.*, 2016. vol. 362. pp. 142–156. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.035>.
29. Amabili M. Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation // *J. Mech. Phys. Solids*, 2018. vol. 118. pp. 275–292. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.004>.
30. Шитикова М. В., Канду В. В. Анализ нелинейных колебаний упругой пластинки на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса один-к-одному // *Изв. вузов. Строительство*, 2020. № 3. С. 5–22. EDN: VUGFIN.
31. Shitikova M. V., Krusser A. I. Nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation modeled by the fractional derivative standard linear solid model / *EURODYN 2020, Proc. of the XI International Conference on Structural Dynamics*. Athens: National Techn. Univ. of Athens, 2020. pp. 355–368. EDN: UAGFCT. DOI: <https://doi.org/10.47964/1120.9028.20091>.
32. Shitikova M. V., Krusser A. I. Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load // *Int. J. Comput. Civil Struct. Eng.*, 2021. vol. 17, no. 4. pp. 161–180. EDN: QLTGPZ. DOI: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180>.
33. Вольмир А. С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
34. Самко С. Г. Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
35. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional operator models of viscoelasticity / *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Berlin: Springer, 2020. pp. 971–982. DOI: <https://doi.org/QFEFJE>. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_77.
36. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014. vol. 17, no. 3. pp. 674–683. EDN: UELRWP. DOI: <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0192-2>.
37. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // *Nonlinear Dyn.*, 2020. vol. 99, no. 1. pp. 109–122. EDN: JRPYST. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05055-w>.
38. Nayfeh A. H. *Perturbation Technique*. New York: Wiley, 1973. 441 pp.
39. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // *J. Eng. Mech.*, 1998. vol. 124, no. 9. pp. 1029–1036. EDN: LEXPLL. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:9\(1029\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029)).
40. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*: Wiley, 1995. 705 pp.
41. Rossikhin Yu. A., Krusser A. I., Shitikova M. V. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic doubly curved shallow shell / *ICSV 2017, Proc. of the 24th International Congress on Sound and Vibration*. London: Int. Inst. Acoust. Vibration, 2017. EDN: ZGNMET.
42. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven vibrations of fractionally damped plates subjected to primary and internal resonances // *Eur. Phys. J. Plus*, 2019. vol. 134, no. 9, 423. EDN: GLZXP. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12812-x>.

MSC: 74D05, 74G10, 74S40

Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load based on models with fractional derivatives

A. I. Krusser¹, M. V. Shitikova^{1,2}¹ Voronezh State Technical University,
84, 20 let Oktyabrya st., Voronezh, 394006, Russian Federation.² National Research Moscow State University of Civil Engineering,
26, Yaroslavskoye sh., Moscow, 129337, Russian Federation.

Abstract

Aim. In the present paper, nonlinear vibrations of an elastic simply supported plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load are studied in the case of the internal resonance 1:1 accompanied by the external resonance. The properties of the viscoelastic foundation are given via the generalized Fuss–Winkler model with the damping term described by the standard linear solid model with the Riemann–Liouville fractional derivatives. The external load is presented by linear viscoelastic oscillator based on the Kelvin–Voigt model with a fractional derivative in the case when the viscosity of the oscillator is considered to be small value. The dynamic behavior of the plate is described by a set of nonlinear ordinary differential equations of the second order in time with respect to generalized displacements. **Methods.** To solve the resulting set of equations, the method of multiple time scales is used in combination with the method of expansion of the fractional derivative in a Taylor series. **Results.** Resolving equations for determining of the nonlinear amplitudes and phases of force driven vibrations of the plate are obtained. The governing set of equations allows one to control not only the damping properties of the environment

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Krusser A. I., Shitikova M. V. Numerical analysis of nonlinear vibrations of a plate on a viscoelastic foundation under the action of a moving oscillating load based on models with fractional derivatives, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 694–714. EDN: DOBLOB. DOI: [10.14498/vsgtu1957](https://doi.org/10.14498/vsgtu1957) (In Russian).

Authors' Details:

Anastasiya I. Krusser  <https://orcid.org/0000-0001-6203-2495>

Postgraduate Student; Junior Researcher; Research Center for Fundamental Research on Natural and Construction Sciences named after Honoured Scientist of the Russian Federation, Prof. Rossikhin Yuri Alekseyevich; e-mail: an.krusser@yandex.ru

Marina V. Shitikova  <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor; Principal Researcher; Research Center for Fundamental Research on Natural and Construction Sciences named after Honoured Scientist of the Russian Federation, Prof. Rossikhin Yuri Alekseyevich¹; Professor; Dept. of Structural and Theoretical Mechanics²; e-mail: mvs@gasu.vrn.ru

and the foundation by changing the fractional parameters, but also to control the damping parameters of the external load. **Conclusion.** Numerical analysis has shown that in the system “a plate on a viscoelastic foundation + a moving oscillating load”, energy transfer between the interacting vibration modes is observed. A comparison of the results of numerical studies for various values of the external load is presented, and the dependence of the amplitudes of nonlinear vibrations on the values of the fractional parameters of the environment and the foundation is also shown.

Keywords: plate on a viscoelastic foundation, moving oscillator load, fractional derivative, method of multiple time scales, internal and external resonances.

Received: 21st September, 2022 / Revised: 18th October, 2022 /

Accepted: 21st October, 2022 / First online: 7th December, 2022

Competing interests. We declare that we have no competing interests.

Author’s Responsibilities. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. We take full responsibility for submit the final manuscript to print. We approved the final version of the manuscript.

Funding. This work has been supported by the Russian Science Foundation (project no. 21-19-00634).

References

1. Gerasimov S. I., Erofeev V. I., Kolesov D. A., Lissenkova E. E. Dynamics of deformable systems carrying moving loads (review of publication and dissertation research), *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya* [Bulletin of Science and Technical Development], 2021, no. 160, pp. 25–47 (In Russian). EDN: HJKPJ. DOI: <https://doi.org/10.18411/vntr2021-160-3>.
2. Fryba L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Mechanics of Structural Systems, vol. 1. Springer, Dordrecht, 1973, 484+xxvii pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-9685-7>.
3. Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications, *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 97, no. 1, pp. 853–895. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>.
4. Rajabi K., Kargarnovin M. H., Gharini M. Dynamic analysis of a functionally graded simply supported Euler–Bernoulli beam subjected to a moving oscillator, *Acta Mech.*, 2013, vol. 224, no. 2, pp. 425–446. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-012-0769-y>.
5. Almbaidin A., Abu-Alshaikh I. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo–Fabrizio fractional derivative model, *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, 2019, vol. 16, no. 2, pp. 137–146.
6. Sawant V. A., Patil V. A., Deb K. Effect of vehicle–pavement interaction on dynamic response of rigid pavements, *Geomech. Geoeng.*, 2011, vol. 6, no. 1, pp. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.1080/17486025.2010.521591>.
7. Patil V. A., Sawant V. A., Deb K. Finite element analysis of rigid pavement on a nonlinear two parameter foundation model, *Int. J. Geotech. Eng.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 275–286. DOI: <https://doi.org/10.3328/IJGE.2012.06.03.274-286>.
8. Ding H., Yang Y., Chen L.-Q., Yang S.-P. Vibration of vehicle–pavement coupled system based on a Timoshenko beam on a nonlinear foundation, *J. Sound Vib.*, 2014, vol. 333, no. 24, pp. 6623–6636. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.07.016>.
9. Yang S., Chen L., Li S. Modeling and dynamic analysis of vehicle-road coupled systems, In: *Dynamics of Vehicle-Road Coupled System*. Berlin, Springer, 2015, pp. 215–250. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-45957-7_7.

10. Meshkov S. I., Pachevskaya G. N., Postnikov V. S., Rossikhin Yu. A. Integral representations of ε_γ -functions and their application to problems in linear viscoelasticity, *Int. J. Eng. Sci.*, 1971, vol. 9, no. 4, pp. 387–398. EDN: ZYMWGP. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90059-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90059-0).
11. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids, *Appl. Mech. Rev.*, 1997, vol. 57, no. 1, pp. 15–67. EDN: LELUNP. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3101682>.
12. Ogorodnikov E. N., Yashagin N. S. Forced oscillations of the fractional oscillator, In: *Proceedings of the Fifth All-Russian Scientific Conference with international participation* (29–31 May 2008). Part 1, Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2008, pp. 215–221 (In Russian). EDN: TGYVDN.
13. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators, *Shock and Vibration*, 2009, vol. 16, no. 4, 387676. EDN: MWZYVP. DOI: <https://doi.org/10.1155/2009/387676>.
14. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results, *Appl. Mech. Rev.*, 2010, vol. 63, no. 1, 010801. EDN: CUFMBA. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4000563>.
15. Ogorodnikov E. N., Radchenko V. P., Yashagin N. S. Rheological model of viscoelastic body with memory and differential equations of fractional oscillator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, no. 1(22), pp. 255–268 (In Russian). EDN: NUPPZB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu932>.
16. Parovik R. I., Zunnunov R. T. Analysis of forced vibrations of a fractional oscillator, *Probl. Mekhan.*, 2019, no. 4, pp. 20–23 (In Russian). EDN: GREHHQ.
17. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models, *J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, no. 3, pp. 491–498. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3629667>.
18. Winkler E. *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*. Prague, Dominicius, 1867, 388 pp. (In German)
19. Zimmerman H. *Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues*. Berlin, Verlag von Ernst & Korn, 1888, 326 pp.
20. Fuss N. I. An experiment on the resistance caused to roads by all kinds of four-wheeled and two-wheeled carts, with the determination of the circumstances, in the presence of one of these carts is more useful than others, *Akademicheskaya sochineniya*, 1801. Part. 1, pp. 373–422 (In Russian).
21. Vlasov V. Z., Leontiev N. N. *Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, Plates and Shells on an Elastic Foundation]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 492 pp. (In Russian)
22. Tsytoovich N. A. *Mekhanika gruntov* [Soil Mechanics]. Moscow, 1963, 637 pp. (In Russian)
23. Lai J., Mao S., Qiu J., Fan H., Zhang Q., Hu Z., Chen J. Investigation progresses and applications of fractional derivative model in geotechnical engineering, *Math. Probl. Eng.*, 2016, vol. 2016, no. 3, 9183296. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/9183296>.
24. Taheri M. R., Ting E. C. Dynamic response of plate to moving loads: Structural impedance method, *Comput. Struct.*, 1989, vol. 33, no. 6, pp. 1379–1393. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90478-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90478-1).
25. Zaman M., Taheri M. R., Alvappillai A. Dynamic response of a thick plate on viscoelastic foundation to moving loads, *Int. J. Numer. Analytical Methods Geomech.*, 1991, vol. 15, no. 9, pp. 627–647. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610150903>.
26. Yang S., Li S., Lu Y. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement, *Int. J. Vehicle Mech. Mob.*, 2010, vol. 48, no. 8, pp. 923–944. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110903243166>.
27. Li S., Yang S., Chen L. A nonlinear vehicle-road coupled model for dynamics research, *J. Comput. Nonlinear Dynam.*, 2013, vol. 8, no. 2, 021001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4006784>.

28. Amabili M. Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates validation, *J. Sound Vib.*, 2016, vol. 362, pp. 142–156. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.035>.
29. Amabili M. Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation, *J. Mech. Phys. Solids*, 2018, vol. 118, pp. 275–292. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.004>.
30. Shitikova M. V., Kandu V. V. Analysis of the nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation in the presence of the one-to-one internal resonance, *Izv. Vyzov. Stroitel'stvo*, 2020, no. 3, pp. 5–22 (In Russian). EDN: VUGFIN.
31. Shitikova M. V., Krusser A. I. Nonlinear vibrations of an elastic plate on a viscoelastic foundation modeled by the fractional derivative standard linear solid model, In: *EURODYN 2020, Proc. of the XI International Conference on Structural Dynamics*. Athens, National Techn. Univ. of Athens, 2020, pp. 355–368. EDN: UAGFCT. DOI: <https://doi.org/10.47964/1120.9028.20091>.
32. Shitikova M. V., Krusser A. I. Force driven vibrations of nonlinear plates on a viscoelastic Winkler foundation under the harmonic moving load, *Int. J. Comput. Civil Struct. Eng.*, 2021, vol. 17, no. 4, pp. 161–180. EDN: QLTGPZ. DOI: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2021-17-4-161-180>.
33. Volmir A. S. *The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*. Dayton, Dept. of the Air Force, 1974, 543 pp.
34. Samko S. G. Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriadka i nekotorye ikh prilozheniia* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)
35. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Fractional operator models of viscoelasticity, In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Berlin, Springer, 2020, pp. 971–982. DOI: <https://doi.org/QFEFJE>. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_77.
36. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Centennial jubilee of Academician Rabotnov and contemporary handling of his fractional operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2014, vol. 17, no. 3, pp. 674–683. EDN: UELRWP. DOI: <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0192-2>.
37. Shitikova M. V. The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures, *Nonlinear Dyn.*, 2020, vol. 99, no. 1, pp. 109–122. EDN: JRPYST. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05055-w>.
38. Nayfeh A. H. *Perturbation Technique*. New York, Wiley, 1973, 441 pp.
39. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges, *J. Eng. Mech.*, 1998, vol. 124, no. 9, pp. 1029–1036. EDN: LEXPPL. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:9\(1029\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:9(1029)).
40. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*, Wiley, 1995, 705 pp.
41. Rossikhin Yu. A., Krusser A. I., Shitikova M. V. Impact response of a nonlinear viscoelastic auxetic doubly curved shallow shell, In: *ICSV 2017, Proc. of the 24th International Congress on Sound and Vibration*. London, Int. Inst. Acoust. Vibration, 2017. EDN: ZGNMET.
42. Shitikova M. V., Kandu V. V. Force driven vibrations of fractionally damped plates subjected to primary and internal resonances, *Eur. Phys. J. Plus*, 2019, vol. 134, no. 9, 423. EDN: GLZXPS. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12812-x>.



УДК 539.376

Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени

А. М. Локощенко¹, Л. В. Фомин¹,
А. Ф. Ахметгалеев¹, Д. Д. Махов^{1,2}

- 1 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.
- 2 Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1.

Аннотация

Проведено исследование ползучести и длительного разрушения узкой прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри низкой жесткой матрицы) для случая пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени.

Деформирование мембраны в условиях ползучести рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания поперечной стороны жесткой матрицы. На второй стадии она деформируется при касании поперечной стенки матрицы вплоть до касания ее продольных стенок. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы.

Исследование проводится при двух видах контактных условий: идеальное скольжение мембраны вдоль стенок матрицы и прилипание мембраны к стенкам матрицы.

Анализ постепенного разрушения мембраны проводится при использовании кинетической теории ползучести Ю. Н. Работнова, при этом

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Локощенко А. М., Фомин Л. В., Ахметгалеев А. Ф., Махов Д. Д. Ползучесть и длительное разрушение узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 715–737. EDN: EUXYCR. DOI: [10.14498/vsgtu1938](https://doi.org/10.14498/vsgtu1938).

Сведения об авторах

Александр Михайлович Локощенко  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>
доктор физико-математических наук, профессор

Леонид Викторович Фомин  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: fleonid1975@mail.ru

параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер.

Полученные уравнения использованы для анализа ползучести и длительного разрушения мембраны, изготовленной из хромомолибденной стали (2.15Cr-Mo steel), деформируемой при переменном поперечном давлении при температуре 600 °С вплоть до ее разрушения.

В результате решения системы определяющего и кинетического уравнений получены значения параметра поврежденности, накопленного в течение каждой стадии деформирования, а также величины времени до разрушения мембраны. Результаты исследования показывают, что в случае разрушения мембраны на первой стадии время до разрушения на первой стадии не зависит от вида контактных условий, а при разрушении мембраны на второй и третьей стадиях деформирования время до разрушения в случае идеального скольжения не меньше, чем в случае прилипания.

Ключевые слова: прямоугольная мембрана, жесткая матрица, переменное поперечное давление, ползучесть, длительное разрушение, параметр поврежденности, кинетическая теория, длительная прочность.

Получение: 21 июня 2022 г. / Исправление: 30 сентября 2022 г. /

Принятие: 6 октября 2022 г. / Публикация онлайн: 29 декабря 2022 г.

Введение. Рассмотрим ползучесть вплоть до разрушения длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q , которое возрастает пропорционально времени t . Решение этой задачи при постоянной и кусочно-постоянной зависимостях $q(t)$ при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Л. М. Качанова [1], Одквиста (F.K.G. Odqvist) [2], Сторакерса (B. Storåkers) [3], Н. Н. Малинина [4] и др. Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. В монографиях [4, 5] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. В [5] приведены решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной, криволинейной и прямоугольной при двух типах контактных условий на границе мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В [6] исследуется ползучесть длинной узкой мембраны внутри низкой жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости величины поперечного давления от времени, исследование проведено при двух вариантах контакта матрицы и мембраны: идеальное скольжение и прилипание. В [7] проведено исследование установившейся ползучести мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Расчеты проводятся до времени практически полного прилегания мембраны к матрице. Проведено сравнение этих времен при различных контактных условиях. А. Б. Ефимов с соавторами [8] составили обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих

Александр Фагимович Ахметгалеев  <https://orcid.org/0000-0002-7999-6079>
ведущий инженер; лаб. упругости и пластичности; e-mail: achmet206a@yandex.ru

Денис Дмитриевич Махов  <https://orcid.org/0000-0001-7748-3934>
ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности¹; студент; механико-математический факультет²; e-mail: monyamail@yahoo.com

постановку задачи контактного взаимодействия общего вида. Во всех этих работах исследуется только ползучесть мембраны, длительное разрушение не рассматривается.

В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов и Ю. Н. Работнов пришли к выводу, что используемые в то время термины механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций и вектор перемещений) недостаточны для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, этот подход был назван кинетическим. Он основан на использовании введенного Л. М. Качановым [9] и Ю. Н. Работновым [10] параметра поврежденности и разработанной впоследствии Ю. Н. Работновым [11] кинетической теории ползучести и длительной прочности.

Основой этого подхода при одноосном растяжении является введение скалярного параметра поврежденности $\omega(t)$, характеризующего структурное состояние материала при произвольном значении времени t . Исходному состоянию материала (при $t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении (при $t = t^*$) поврежденность $\omega(t^*) = 1$. При рассмотрении длительной прочности в случае одноосного растяжения Л. М. Качанов [9] дополнил уравнение ползучести дифференциальным кинетическим уравнением, характеризующим изменение параметра ω во времени, а Ю. Н. Работнов [12] дополнительно ввел параметр ω в уравнение ползучести (для учета влияния процесса накопления поврежденности в процессе ползучести).

В настоящей работе этот подход применяется к решению краевой задачи реологического деформирования и разрушения узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы при заданном давлении.

1. Постановка задачи. В работе изучается процесс деформирования длинной узкой прямоугольной мембраны в условиях ползучести вплоть до ее разрушения (рис. 1). Мембрана закреплена вдоль своих длинных сторон и расположена внутри низкой жесткой матрицы прямоугольной формы. H_0 — толщина мембраны; $2a$ — ширина мембраны и матрицы; L — длина мембраны и матрицы; b — высота матрицы, при этом справедливы следующие неравенства: $2a/L \ll 1$, $b/a \leq 1$ (низкая матрица).

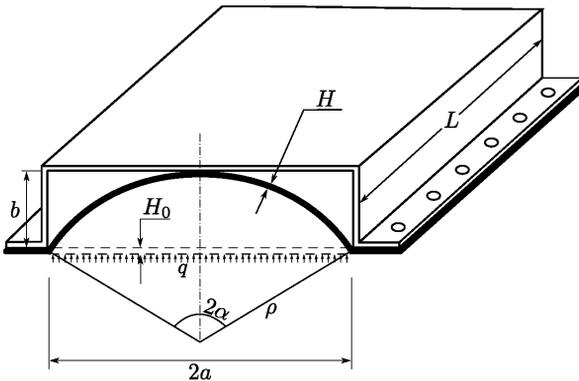


Рис. 1. Общая схема деформирования прямоугольной мембраны внутри жесткой матрицы

[Figure 1. General scheme of deformation of a rectangular membrane inside a rigid matrix]

Величина поперечного давления q зависит от времени t пропорционально:

$$q(t) = \dot{q}t,$$

где $\dot{q} = \text{const}$ — скорость возрастания величины q , точкой всюду обозначаются производные по времени t .

Деформирование мембраны в условиях ползучести рассматривается как последовательность трех стадий. На первой стадии мембрана деформируется в свободных условиях вплоть до касания поперечной стороны жесткой матрицы. На второй стадии она деформируется при касании поперечной стенки матрицы вплоть до касания ее продольных стенок. На третьей стадии она уже деформируется при одновременном касании продольных и поперечной стенок матрицы.

Задача рассматривается в стандартной цилиндрической системе координат, поэтому при моделировании напряженно-деформированного состояния при $t > 0$ рассматриваются радиальное σ_{rr} , окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz} главные напряжения и соответствующие компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr} , $p_{\theta\theta}$ и p_{zz} . Недиагональные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю.

Рассмотрим элемент мембраны [4]. Принимаем напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и, записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = q\rho/H, \quad d(\sigma_{\theta\theta}H) = 0, \quad (1)$$

где ρ — радиус кривизны срединной поверхности, H — толщина мембраны. Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \text{const}. \quad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), заключаем, что рассматриваемый радиус кривизны срединной поверхности мембраны $\rho = \text{const}$ во всех ее точках, т.е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании, является частью поверхности кругового цилиндра с углом раствора 2α [4]. Следствием принятых предположений является то, что толщина мембраны постоянна по своей длине в процессе деформации ползучести. Следовательно, согласно равенству (1), окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ по длине окружности радиуса ρ не изменяется.

Целью данного исследования является определение зависимости времени до разрушения мембраны t^* от величины скорости возрастания величины поперечного давления \dot{q} , в случае разрушения на i -той стадии эти параметры будем обозначать через t_i^* и \dot{q}_i соответственно, $i = 1, 2, 3$.

Для учета накопления поврежденности в материале мембраны в процессе ползучести вводится тензорный параметр поврежденности $\omega_{ij}(t)$, который при активном нагружении ($\dot{q} > 0$) удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{d\omega_{ij}}{dt} = \frac{3}{2}F(\sigma_{ij}, \omega_{ij}, t)s_{ij} \quad \text{при } s_{ij} > 0, \quad \frac{d\omega_{ij}}{dt} = 0 \quad \text{при } s_{ij} \leq 0, \quad (3)$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений.

Для описания ползучести мембраны при $t > 0$ с учетом накопления поврежденности материала вплоть до ее разрушения рассмотрим гипотезу пропорциональности девиаторов напряжений и девиаторов скоростей деформаций

ползучести при учете несжимаемости материала в следующем виде (в дальнейшем ω_u представляет собой аналог интенсивности напряжений σ_u):

$$\begin{cases} \dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega_u)^n} s_{ij}, & p_{ij}(0) = 0; \\ \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}; \\ \omega_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\omega_{rr} - \omega_{\theta\theta})^2 + (\omega_{\theta\theta} - \omega_{zz})^2 + (\omega_{zz} - \omega_{rr})^2}, \end{cases} \quad (4)$$

где p_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести; A , n — постоянные величины соответствующей размерности.

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести \dot{p}_{zz} принимается равной нулю:

$$\dot{p}_{zz} = 0. \quad (5)$$

Примем, как обычно для тонкостенных цилиндрических оболочек, равенство

$$\sigma_{rr} = 0. \quad (6)$$

В этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (4) при учете (5), (6) следует

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta}.$$

Компоненты девиатора напряжений s_{ij} в мембране определяются соотношениями

$$s_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} > 0, \quad s_{zz} = 0, \quad s_{rr} = -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} < 0, \quad s_{\theta z} = s_{rz} = s_{r\theta} = 0.$$

Следовательно, в соответствии с (3) в тензоре поврежденности ω_{ij} только одна компонента $\omega_{\theta\theta}$ — ненулевая, т.е. параметр поврежденности в данной задаче имеет скалярный характер: $\omega = \omega(t)$. Примем кинетическое уравнение (3) в форме

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_{\theta\theta}^k}{(1-\omega)^m}, \quad \omega(0) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, ползучесть мембраны внутри прямоугольной матрицы вплоть до разрушения определяется из системы определяющего уравнения

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{3}{2} \frac{A\sigma_u^{n-1}}{(1-\omega)^n} s_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A(\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta})^n}{(1-\omega)^n}, \quad p_{\theta\theta}(0) = 0, \quad (8)$$

и кинетического уравнения (7), а момент разрушения $t = t^*$ характеризуется условием

$$\omega(t^*) = 1. \quad (9)$$

Из уравнения (7) после серии преобразований получаем

$$(1 - \omega)^n = \left(1 - (m + 1)B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{n}{m+1}}. \quad (10)$$

Подставляя выражение $(1 - \omega)^n$ в уравнение (8), получаем выражение для скорости окружной компоненты тензора деформации ползучести:

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left(1 - (m + 1)B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}. \quad (11)$$

Дальнейшей целью исследований является определение зависимости окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ (1) от скорости возрастания давления \dot{q} при обоих рассматриваемых контактных условиях (идеальное скольжение и прилипание), а затем с помощью (7) и (9) — анализ задачи о возможности разрушения на той или иной стадии ползучести.

2. Разрушение мембраны в процессе свободного деформирования в условиях ползучести (первая стадия). На первой стадии мембрана (плоская в начальном состоянии) под действием давления $q(t)$ приобретает форму незамкнутой цилиндрической оболочки с центральным углом 2α (см. рис. 2). На этой стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания поперечной стенки жесткой матрицы.

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{H}_i = H_i/H_0, \quad \bar{H}_0 = H_0/a, \quad \bar{b} = b/a, \quad \bar{\rho} = \rho/a, \quad (12)$$

где H_0 — начальная толщина мембраны, H_i — толщина мембраны на i -той стадии, $i = 1, 2, 3$.

Далее черточки над всеми безразмерными переменными опустим. В этом пункте рассматривается длительное разрушение мембраны при постоянной скорости возрастания поперечного давления $\dot{q}_1 = \text{const}$.

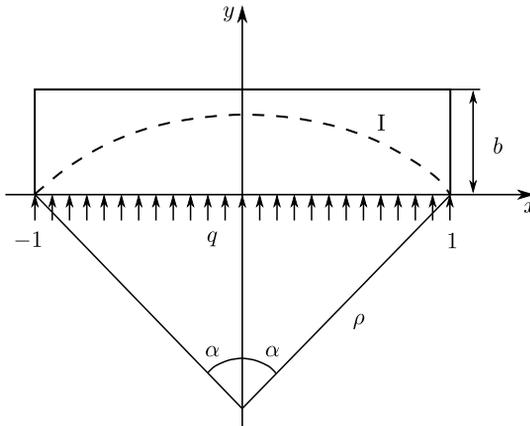


Рис. 2. Схема деформации прямоугольной мембраны на первой стадии
 [Figure 2. The scheme of deformation of a rectangular membran at the first stage]

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной компоненты деформации ползучести:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно, для скорости окружной компоненты деформации ползучести имеем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}. \quad (13)$$

Поскольку

$$\rho \sin \alpha = 1, \quad (14)$$

то

$$\dot{\rho} \sin \alpha + \rho \dot{\alpha} \cos \alpha = 0.$$

Поэтому выражение (13) преобразуется к виду

$$\dot{p}_{\theta\theta} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg} \alpha) \dot{\alpha}. \quad (15)$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния получаем:

$$\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}.$$

Так как скорость радиальной компоненты деформации ползучести

$$\dot{p}_{rr} = \dot{H}_1 / H_1, \quad (16)$$

согласно равенствам (15), (16), с учетом $\dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta}$ получаем

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_1}{H_1} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg} \alpha) \dot{\alpha}. \quad (17)$$

Интегрируя (17) при начальном условии $H_1(0) = 1$, $\alpha(0) = 0$, получаем

$$H_1(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (18)$$

При

$$\alpha = \alpha_1 = \arcsin \frac{2b}{1 + b^2}$$

из (18) имеем

$$H_1(\alpha_1) = \frac{2b}{(1 + b^2)\alpha_1} = H_1^0,$$

где H_1^0 — значение толщины мембраны в конце первой стадии, т.е. при $\alpha = \alpha_1$. Величина $\sigma_{\theta\theta}$, определяемая (1), при учете (12), (14) и (18) принимает следующий вид:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q_1 \rho}{H_0 H_1} = \frac{\dot{q}_1 t}{H_0} \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Подставляя выражение (11) в (17), получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\alpha^{-1} - \operatorname{ctg} \alpha)^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left(1 - (m+1)B \int_0^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}, \quad (19)$$

$$\alpha(0) = 0.$$

В конце первой стадии ($t = t_1$) раствор мембраны $2\alpha(t_1) = 2\alpha_1$ в случае ее неразрушения удовлетворяет равенству $2\alpha_1 = 2 \arcsin \frac{2b}{1+b^2}$. Момент времени t_1 , при котором происходит окончание первой стадии, и толщина мембраны $H_1^0 = H(t_1)$ вычисляются согласно зависимости (18):

$$t_1 = t(\alpha_1), \quad H_1^0 = H_1(t_1) = \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{2b}{(1+b^2)\alpha_1}.$$

Определим скорость увеличения поперечного давления \dot{q}_1 , при котором мембрана разрушается в процессе первой стадии ($t = t_1^*$). Для этого воспользуемся уравнением (19), начальное значение $\alpha(0) = 0$. Конечное значение $\alpha^* = \alpha(t_1^*)$ определяется с помощью уравнения (10):

$$\omega(t_1^*) = 1 = 1 - \left(1 - (m+1)B \int_0^{t_1^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}},$$

отсюда

$$(m+1)B \int_0^{t_1^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt = 1.$$

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях.

3. Идеальное скольжение мембраны вдоль сторон матрицы. Введем координаты поперечного сечения матрицы x и y (см. рис. 2) и дополнительные безразмерные координаты:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0}{a}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{a},$$

где x_0, y_0 — координаты точек касания мембраны и матрицы; далее черточки над этими безразмерными переменными также будем опускать.

3.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ($0 \leq x_0 \leq x_0^*$). Рассмотрим характеристики разрушения мембраны \dot{q}_2 и t_2^* в процессе второй стадии (рис. 3). Здесь $x_0^* = 1 - b$ определяется положением мембраны в конце второй стадии, при этом центр кривизны срединной поверхности мембраны (в угловой части матрицы) расположен на оси x в точке x_0^* . Исследование ползучести проводится сначала на первой стадии ($0 \leq t \leq t_1$), а затем на второй стадии $t_1 \leq t \leq t_2^*$.

Ползучесть мембраны на первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(t_1) = \alpha_1$, при этом

$$\sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

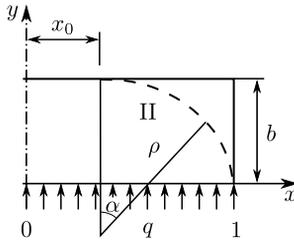


Рис. 3. Схема деформации прямоугольной мембраны на второй стадии (идеальное скольжение и прилипание)
 [Figure 3. The scheme of deformation of a rectangular membran at the second stage (ideal slip and sticking)]

Поврежденность материала в конце первой стадии согласно (10) выражается соотношением

$$\omega(t_1) = 1 - \left(1 - (m+1)B \int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}} = \omega_1. \quad (20)$$

После окончания первой стадии ползучести ($t = t_1$) наступает вторая стадия ($t_1 \leq t \leq t_2^*$, $0 \leq x_0 \leq x_0^*$, $\omega_1 \leq \omega \leq 1$).

Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ($b \geq 1$) и относительно низкой матрицы ($b \leq 1$). Для определенности в данной работе будет рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно низкой матрицы.

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы далее рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq b$ (см. рис. 3).

При $t > t_1$ часть поверхности мембраны прилегает к внутренней поперечной поверхности матрицы.

При исследовании второй стадии ползучести мембраны выделим два близких деформированных состояния: одно характеризуется длиной участка контакта x_0 , а другое — длиной участка контакта $(x_0 + dx_0)$. С помощью геометрических соотношений получим соотношение для приращения окружной деформации ползучести $dp_{\theta\theta}$ в виде

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha + x_0} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)} = -\frac{dH_2}{H_2}, \quad (21)$$

где

$$D_1(x_0)dx_0 = \rho d\alpha + \alpha d\rho + dx_0 = -\frac{1-x_0}{b} \operatorname{arctg} \frac{1-x_0}{(1-x_0)^2 - b^2} dx_0 + 2dx_0,$$

$$D_2(x_0) = \rho\alpha + x_0 = \frac{(1-x_0)^2 + b^2}{2b} \operatorname{arctg} \frac{2b(1-x_0)}{(1-x_0)^2 - b^2} + x_0.$$

Из условия несжимаемости с учетом (16) получаем, что $dp_{\theta\theta} = -dp_{rr}$. Согласно определению \dot{p}_{rr} , имеем $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_2/H_2$. Следовательно,

$$\dot{p}_{\theta\theta} = -\frac{\dot{H}_2}{H_2}, \quad dp_{\theta\theta} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)} = -\frac{dH_2}{H_2},$$

$$\int_{H_1^0}^{H_2(x_0)} \frac{dH_2}{H_2} = - \int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)},$$

$$H_2(x_0) = H_1^0 \exp\left(- \int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_2(x_0)}\right). \quad (22)$$

Толщина в конце второй стадии определяется согласно (22):

$$H_2^0 = H_2(t_2) = \frac{1}{1 - b + \pi b/2}. \quad (23)$$

Окончание второй стадии ($t = t_2$) наступает при разрушении мембраны, т.е. когда $\omega(t_2^*) = 1$.

Рассмотрим зависимость параметра поврежденности на второй стадии от времени. Из (7) следует, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B\sigma_{\theta\theta}^k}{(1 - \omega)^m},$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega} (1 - \omega)^m d\omega = \frac{(1 - \omega_1)^{m+1} - (1 - \omega)^{m+1}}{m + 1} = B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt,$$

$$\omega(t) = 1 - \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m + 1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Учитывая, что $\omega(t_2^*) = 1$, находим

$$(1 - \omega_1)^{m+1} = (m + 1)B \int_{t_1}^{t_2^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \quad (24)$$

Из (21) следует

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)}{D_1(x_0)} \dot{p}_{\theta\theta}.$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)}{D_1(x_0)} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m + 1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}. \quad (25)$$

Окружное напряжение на второй стадии определяется соотношениями (1) и (22):

$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)} = \frac{\dot{q}_2 t \rho}{H_0 H_2(x_0)}. \quad (26)$$

Определим теперь зависимость времени разрушения t_2^* от скорости возрастания величины поперечного давления \dot{q}_2 . Задавая произвольное значение \dot{q}_2 ($\dot{q}_2 \leq \dot{q}_1$) и подставляя его в выражение (26), решаем дифференциальное уравнение (25) при $t_1 \leq t \leq t_2^*$. При этом начальное значение $x_0(t_1) = 0$, а конечное значение $t = t_2^*$ определяется с помощью уравнения (24).

3.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ($1 - b \leq x_0 \leq x_0^*$). Рассмотрим процесс разрушения мембраны при \dot{q}_3 ($\dot{q}_3 < \dot{q}_2$) на третьей стадии в предположении, что на второй стадии разрушения не произошло (рис. 4). Этот процесс состоит из последовательности реализации первой, второй и третьей стадий.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \alpha_1, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

В конце первой стадии (при $t = t_1$) поврежденность материала мембраны определяется равенством (20).

Вторая стадия процесса ползучести характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 \leq x_0 \leq 1 - b, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

Толщина мембраны $H_2(x)$ на второй стадии ползучести и ее значение в конце второй стадии H_2^0 определяются равенствами (22) и (23) соответственно.

Процесс ползучести мембраны на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{D_2(x_0)}{D_1(x_0)} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}};$$

$$x_0(t_1) = 0, \quad x_0(t_2) = 1 - b, \quad \sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{\dot{q}_3 t}{H_0 H_2(x_0)};$$

$$H_2(x_0) = H_1^0 \exp \left(- \int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0) dx_0}{D_2(x_0)} \right).$$

Поврежденность материала мембраны $\omega_2 = \omega_2(t)$ в конце второй стадии определяется с помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) при $t > t_1$:

$$\omega_2 = 1 - \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}. \quad (27)$$

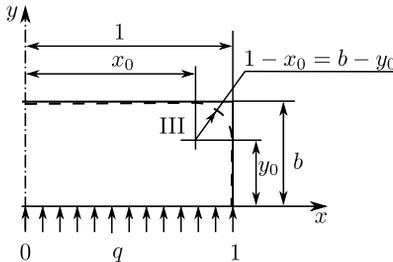


Рис. 4. Схема деформации прямоугольной мембраны на третьей стадии (идеальное скольжение и прилипание)

[Figure 4. The scheme of deformation of a rectangular membran at the third stage (ideal slip and sticking)]

Третья стадия ползучести мембраны характеризуется параметрами:

$$t_2 \leq t \leq t_3^*, \quad 1 - b \leq x_0 \leq x_0^*, \quad \omega_2 \leq \omega \leq 1.$$

Накопление параметра $\omega(t)$ в процессе третьей стадии определяется из дифференциального уравнения (7) при $t > t_2$:

$$\omega(t) = 1 - \left((1 - \omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Отсюда, учитывая, что в момент разрушения $t = t_3^*$ поврежденность $\omega(t_3^*) = 1$, получаем

$$(1 - \omega_2)^{m+1} = (m+1)B \int_{t_2}^{t_3^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \quad (28)$$

На этой стадии мембрана касается обеих сторон матрицы:

$$\begin{aligned} dp_{\theta\theta} &= \frac{(2 - \pi/2)dx_0}{b + \pi/2 - 1 + (2 - \pi/2)x_0}, \\ p_{\theta\theta} &= - \int_{H_2^0}^{H_3(x_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \ln \frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \ln \frac{b + \pi/2 - 1 + (2 - \pi/2)x_0}{1 - b + b\pi/2}, \\ H_3(x_0) &= \frac{1}{b + \pi/2 - 1 + (2 - \pi/2)x_0}, \\ \dot{x}_0 &= \frac{b + \pi/2 - 1 + (2 - \pi/2)x_0}{2 - \pi/2} \dot{p}_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее уравнение выражение (8) при учете (10) вместо $\dot{p}_{\theta\theta}$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \frac{b + \pi/2 - 1 + (2 - \pi/2)x_0}{2 - \pi/2} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \times \\ &\times \left((1 - \omega_2)^{m+1} - (m+1) \int_{t_2}^t B \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}, \quad (29) \\ \sigma_{\theta\theta}(x_0) &= \frac{\dot{q}_3 t}{H_0} (1 - x_0). \end{aligned}$$

При решении дифференциального уравнения (29) начальное значение $x_0(t_2) = 1 - b$, а конечное значение t_3^* удовлетворяет равенству (28).

4. Деформирование и разрушение мембраны в условиях прилипания мембраны вдоль сторон матрицы. Как и для предыдущего случая граничных условий рассмотрим вторую и третью стадии деформирования мембраны в условиях ползучести и определим условия ее разрушения.

4.1. Деформирование и разрушение мембраны в процессе второй стадии ($0 \leq x_0 \leq 1 - b$). Чтобы определить условия разрушения мембраны в процессе ее деформирования на второй стадии при \dot{q}_2 необходимо последовательно рассмотреть ее ползучесть на первой и второй стадиях.

Ползучесть мембраны на первой стадии при условии ее неразрушения ($0 \leq t \leq t_1$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \omega \leq \omega_1$) описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \alpha_1 = \arcsin \frac{2b}{1+b^2}, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_2 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

Поврежденность материала мембраны в конце первой стадии определяется равенством (20).

В процессе второй стадии ползучести мембраны зависимость параметра поврежденности от времени определяется соотношением (24). В случае постепенного прилипания материала мембраны к матрице ее контактная часть (с переменной толщиной) не деформируется, а свободная часть (с постоянной толщиной) представляет собой часть дуги окружности. Окружная деформация в свободной части мембраны имеет вид

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}.$$

Аналогично (21) можно получить выражение

$$D_3(x_0) = \rho\alpha = \frac{(1-x_0)^2 + b^2}{2b} \operatorname{arctg} \frac{2b(1-x_0)}{(1-x_0)^2 - b^2}.$$

Как показано ранее, $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_2/H_2$. Из условия несжимаемости $\dot{p}_{\theta\theta} = -\dot{p}_{rr}$, поэтому

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\theta\theta} &= -\frac{\dot{H}_2(x_0)}{H_2(x_0)}, \quad dp_{\theta\theta} = -\frac{dH_2}{H_2} = \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}, \\ \int_{H_1^0}^{H_2(x_0)} \frac{dH_2}{H_2} &= -\int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}, \quad H_2(x_0) = H_1^0 \exp\left(-\int_0^{x_0} \frac{D_1(x_0)dx_0}{D_3(x_0)}\right), \\ H_2^0 &= H_2(1-b). \end{aligned}$$

Интенсивности σ_u и \dot{p}_u определяются соотношениями

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{p}_{\theta\theta}.$$

Также имеем

$$\sigma_{\theta\theta}(x_0) = \frac{q\rho}{H_0 H_2(x_0)} = \frac{\dot{q}_2 t \rho}{H_0 H_2(x_0)}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{D_3(x_0)}{D_1(x_0)} \frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = \frac{D_3(x_0)}{D_1(x_0)} \frac{\sqrt{3}}{2} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \times \\ &\times \left((1-\omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}. \quad (31) \end{aligned}$$

Подставляя (30) в (31), получаем дифференциальное уравнение относительно x_0 , при этом начальное значение равно $x_0(t_1) = 0$, конечное значение t_2^* определяется с помощью уравнения (24).

4.2. Деформирование и разрушение мембраны в процессе третьей стадии ($1 - b \leq x_0 \leq x_0^*$). Рассмотрим ползучесть мембраны при \dot{q}_3 последовательно на первой, второй и третьей стадиях в случае, если разрушение не произошло на первой и второй стадиях.

Ползучесть мембраны в процессе первой стадии описывается дифференциальным уравнением (19) при условиях

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(t_1) = \alpha_1, \quad \sigma_{\theta\theta}(\alpha) = \frac{\dot{q}_3 \alpha t}{H_0 \sin^2 \alpha}.$$

В конце первой стадии (при $t = t_1$) поврежденность $\omega_1(t_1) = \omega_1$ материала мембраны задается соотношением

$$\omega_1 = 1 - \left(1 - (m+1)B \int_0^{t_1} \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Вторая стадия процесса ползучести характеризуется следующими значениями параметров:

$$t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 \leq x_0 \leq 1 - b, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2.$$

Процесс ползучести на второй стадии определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= \frac{D_3}{D_1} A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \left((1 - \omega_1)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_1}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}, \\ x_0(t_1) &= 0, \quad x_0(t_2) = 1 - b, \\ \sigma_{\theta\theta}(x_0) &= \frac{\dot{q}_2 t}{H_0 H_2(x_0)}. \end{aligned}$$

Поврежденность материала мембраны в конце второй стадии $\omega(t_2) = \omega_2$ определяется из уравнения (27).

Третья стадия деформирования мембраны характеризуется параметрами:

$$t_2 \leq t \leq t_3^*, \quad 1 - b \leq x_0 \leq x_0^*, \quad \omega_2 \leq \omega \leq 1.$$

На этой стадии ползучесть мембраны при касании ею обеих сторон матрицы описывается следующим уравнением:

$$dp_{\theta\theta} = F(x_0) dx_0, \quad F(x_0) = \frac{4 - \pi}{\pi(1 - x_0)}.$$

В результате зависимость $dp_{\theta\theta}/dt$ примет следующий вид:

$$\frac{dp_{\theta\theta}}{dt} = F(x_0) \frac{dx_0}{dt};$$

$$p_{\theta\theta} = - \int_{H_2^0}^{H_3(x_0)} \frac{dH_3}{H_3} = \int_{1-b}^{x_0} F(x_0) dx_0 = \ln \frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \frac{4-\pi}{\pi} \ln \frac{b}{1-x_0},$$

$$\dot{x}_0 = \frac{\dot{p}_{\theta\theta}}{F(x_0)} = \frac{\sqrt{3}A}{2F(x_0)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} \right)^n \times$$

$$\times \left((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{-\frac{n}{m+1}}; \quad (32)$$

$$\frac{H_2^0}{H_3(x_0)} = \left(\frac{b}{1-x_0} \right)^{\frac{4-\pi}{\pi}}, \quad H_3(x_0) = H_2^0 \left(\frac{b}{1-x_0} \right)^{-\frac{4-\pi}{\pi}}. \quad (33)$$

Окончание третьей стадии происходит при значении x_0^* , соответствующем значению t^* . Интенсивность напряжений определяется соотношением

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_3(x_0)H_0} \Big|_{\rho=1-x_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\dot{q}t}{H_0} \frac{1-x_0}{H_3(x_0)}. \quad (34)$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести задается соотношением

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} F(x_0) \frac{dx_0}{dt}.$$

Подставим (33) в (34), затем в (32). С помощью интегрирования дифференциального уравнения (7) при $t > t_2$ выпишем зависимость $\omega(t)$ на третьей стадии процесса деформирования:

$$\omega(t) = 1 - \left((1-\omega_2)^{m+1} - (m+1)B \int_{t_2}^t \sigma_{\theta\theta}^k dt \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

С учетом равенства $\omega(t_3^*) = 1$ для времени разрушения t_3^* получаем

$$(1-\omega_2)^{m+1} = (m+1)B \int_{t_2}^{t_3^*} \sigma_{\theta\theta}^k dt. \quad (35)$$

Вычисление значений \dot{q}_3 и t_3^* , соответствующих разрушению в процессе третьей стадии для прилипания, производится аналогично случаю идеального скольжения.

Дифференциальное уравнение (32) решается при $t_2 \leq t \leq t_3^*$, начальное условие $x_0(t_2) = 1-b$, конечное значение $t = t_3^*$ удовлетворяет условию (35).

5. Приложение. В качестве примера рассмотрим ползучесть и длительное разрушение прямоугольной мембраны, изготовленной из хромомолибденовой стали 2.15Cr-1Mo steel и деформируемой при 600 °C внутри жесткой матрицы высотой $b = 0.5$.

Химический состав этой стали [13]:

$$C = 0.06 \%, \quad Si = 0.18 \%, \quad Mn = 0.48 \%, \quad P = 0.008 \%, \quad S = 0.008 \%, \\ Cr = 2.18 \%, \quad Mo = 0.93 \%, \quad Fe - \text{баланс}.$$

Материальные константы этой стали, используемые в кинетической модели ползучести и длительной прочности (7), (8), имеют следующие значения [13]:

$$A = 9.17 \cdot 10^{-17} \text{ МПа/ч}, \quad B = 0.91 \cdot 10^{-17} \text{ МПа/ч}, \quad n = 6.0, \quad m = 4.8, \quad k = 6.7.$$

Кроме того, во всех вычислениях в качестве безразмерной начальной толщины мембраны использовано значение $H_0 = 0.01$.

В табл. 1–3 приведены основные характеристики длительного разрушения мембраны на первой, второй и третьей стадиях деформирования соответственно.

Таблица 1

Характеристики длительного разрушения мембраны на первой стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the first stage of deformation]

\dot{q}_1 , МПа/ч	t^* , hr	α^*
700	0.003	0.906
500	0.0046	0.92
300	0.0073	0.925

Таблица 2

Характеристики длительного разрушения мембраны на второй стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the second stage of deformation]

\dot{q}_2 , МПа/ч	x_0^*	t_2^* , hr	$t^* - t_1$, hr	ω_1
case of ideal slip				
250	0.337	0.00865	0.000002	0.894
200	0.435	0.01059	0.00001	0.874
100	0.500	0.01985	0.00009	0.865
case of sticking				
250	0.289	0.00865	0.000003	0.894
200	0.366	0.01059	0.00001	0.874
100	0.408	0.01983	0.00004	0.865
50	0.445	0.037	0.00006	0.858

Таблица 3

Характеристики длительного разрушения мембраны на третьей стадии [Characteristics of long-term destruction of the membrane at the third stage of deformation]

\dot{q}_3 , МПа/ч	x_0^*	t_3^* , hr	$t^* - t_2$, hr	ω_1	ω_2
case of ideal slip					
50	0.549	0.037	0.00015	0.858	0.925
10	0.787	0.165	0.0066	0.823	0.905
5	0.907	0.405	0.106	0.813	0.898
case of sticking					
20	0.504	0.0851	0.00063	0.841	0.929
10	0.542	0.159	0.0012	0.827	0.923
5	0.587	0.299	0.003	0.813	0.914
1	0.719	1.3	0.024	0.778	0.892
0.1	0.83	10.9	0.75	0.722	0.858
0.01	0.98	164	84.7	0.662	0.812

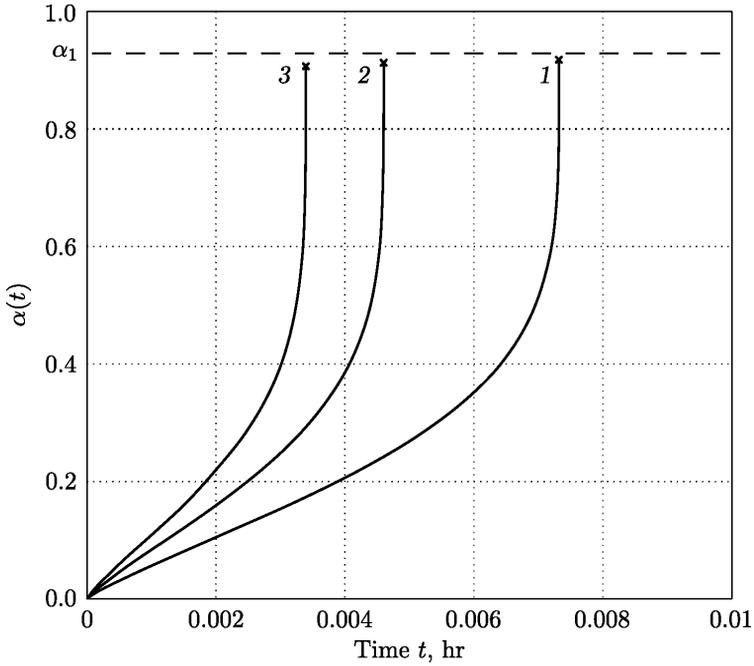


Рис. 5. Зависимость $\alpha(t)$ в процессе первой стадии деформирования мембраны для различных значений скорости \dot{q}_1 (в МПа/ч): 1 — $\dot{q}_1 = 300$, 2 — $\dot{q}_1 = 500$, 3 — $\dot{q}_1 = 700$
 [Figure 5. Dependence $\alpha(t)$ during the first stage of membrane deformation for different values of the rate \dot{q}_1 (in MPa/hr): 1 — $\dot{q}_1 = 300$, 2 — $\dot{q}_1 = 500$, 3 — $\dot{q}_1 = 700$]

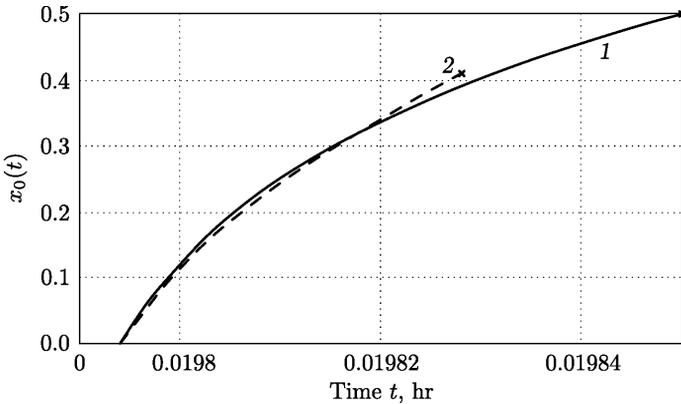


Рис. 6. Зависимость $x_0(t)$ в процессе второй стадии деформирования мембраны для $\dot{q}_1 = 100$ МПа/ч: 1 — при идеальном скольжении; 2 — при прилипании
 [Figure 6. Dependence $x_0(t)$ during the second stage of membrane deformation for $\dot{q}_1 = 100$ MPa/hr: 1 — case of ideal slip, 2 — case of sticking]

На рис. 5 приведены вычисленные зависимости угла раствора $\alpha(t)$ мембраны для различных значений скоростей нарастания давления q в процессе первой стадии деформирования мембраны.

На рис. 6 представлена зависимость $x_0(t)$ в процессе второй стадии деформирования мембраны для $\dot{q}_1 = 100$ МПа/ч при идеальном скольжении (1) и при прилипании (2). Аналогичные результаты для $x_0(t)$, вычисленные для второй и третьей стадий процесса деформирования мембраны при $\dot{q}_1 = 10$ МПа/ч, представлены на рис. 7.

На рис. 8 в логарифмических координатах приведена зависимость времени до разрушения мембраны t^* от величины \dot{q} , полученная при анализе результатов ползучести мембраны на всех трех стадиях. Здесь результаты вычислений на первой стадии обозначены треугольниками, на второй и третьей стадиях при идеальном скольжении результаты вычислений обозначены кружками и цифрой 1, а при прилипании — крестиками и цифрой 2.

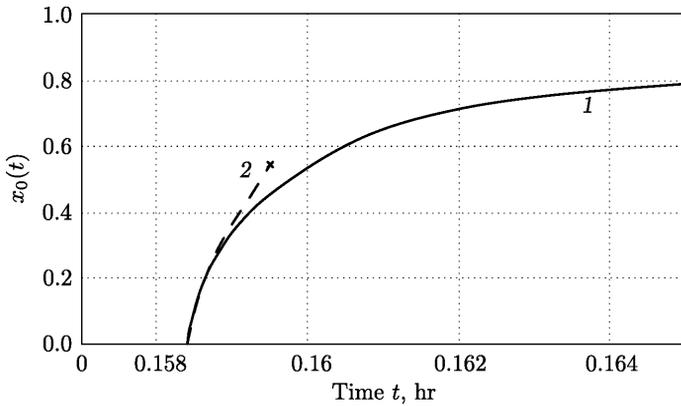


Рис. 7. Зависимость $x_0(t)$ в процессе второй и третьей стадий деформирования мембраны для $\dot{q}_1 = 10$ МПа/ч: 1 — при идеальном скольжении; 2 — при прилипании

[Figure 7. Dependence $x_0(t)$ during the second and third stages of membrane deformation for $\dot{q}_1 = 10$ МПа/hr: 1 — case of ideal slip, 2 — case of sticking]

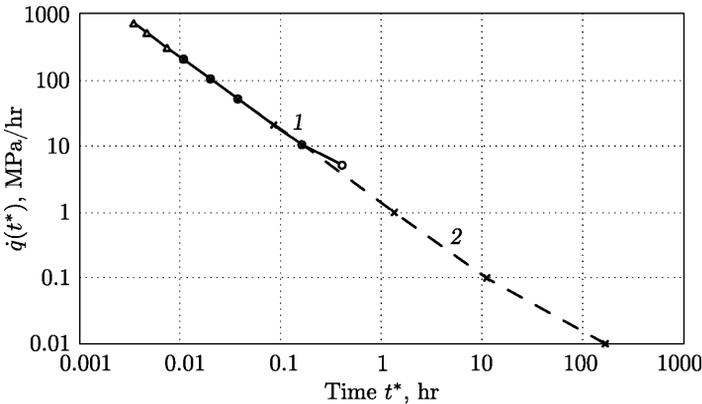


Рис. 8. Зависимость $\dot{q}(t^*)$ в логарифмических координатах: 1 — при идеальном скольжении; 2 — при прилипании

[Figure 8. Dependence $\dot{q}(t^*)$ in logarithmic coordinates: 1 — case of ideal slip, 2 — case of sticking]

Проведем анализ полученных результатов. Для удобства введем обозначения основных характеристик решения: индексом (1) будем обозначать характеристики при идеальном скольжении, индексом (2) — характеристики решения при прилипании. При задании в качестве исходных параметров величины скорости давления \dot{q}_1 получены равные значения времен до разрушения на первой стадии в случае скольжения и прилипания: $t_{1(1)}^* = t_{1(2)}^*$. При задании в качестве исходных параметров величины скорости давления \dot{q}_2 получены следующие оценки основных характеристик: предельное значение величины x_0^* в случаях скольжения и прилипания удовлетворяют неравенству $x_{0(1)}^* > x_{0(2)}^*$, аналогично и с временами до разрушения: $t_{2(1)}^* > t_{2(2)}^*$. Значения полученных характеристик при задании скорости \dot{q}_3 удовлетворяют следующим неравенствам: $x_{0(1)}^* > x_{0(2)}^*$, $\omega_{3(1)} < \omega_{3(2)}$, $t_{3(1)}^* > t_{3(2)}^*$.

Исходя из вышеизложенного можно сделать вывод, что величины времен до разрушения t^* при одном и том же фиксированном значении скорости нарастания давления \dot{q} удовлетворяют неравенству $t_{(1)}^*(\dot{q}) \geq t_{(2)}^*(\dot{q})$.

Заключение. Исследован процесс деформирования узкой мембраны внутри низкой прямоугольной матрицы вплоть до ее разрушения при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени. Рассмотрены два типа контактных условий: идеальное скольжение мембраны относительно матрицы и прилипание мембраны к матрице. Для описания процесса накопления поврежденности материала мембраны использована кинетическая теория Ю. Н. Работнова, при этом параметр поврежденности материала в данной задаче имеет скалярный характер. Решение системы, состоящей из определяющего и кинетического уравнений, проводится последовательно для первой, второй и третьей стадий деформирования.

В результате решения системы определяющего и кинетического уравнений получены значения параметра поврежденности, накопленной в течение каждой стадии деформирования, а также величины времени до разрушения мембраны (см. табл. 1–3).

Результаты исследования показывают, что в случае разрушения мембраны на первой стадии (оно происходит при высоких скоростях нарастания давления \dot{q}) время $t^*(\dot{q})$ не зависит от вида контактных условий, а при разрушении мембраны на второй и третьей стадиях деформирования время t^* в случае идеального скольжения не меньше, чем в случае прилипания.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–80–00387_a).

Библиографический список

1. Качанов Л. М. *Основы механики разрушения*. М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 pp.

3. Storåkers B. *Finite Creep of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure* / Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series. vol.44. Stocholm: Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969. 107 pp.
4. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов*. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
5. Локощенко А. М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
6. Локощенко А. М., Терауд В. В., Ахметгалеев А. Ф. Установившаяся ползучесть длинной узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой низкой матрицы при кусочно-постоянной зависимости поперечного давления от времени // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 792–812. EDN: GXKRMA. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521060084>.
7. Ахметгалеев А. Ф., Локощенко А. М., Фомин Л. В. Установившаяся ползучесть длинной узкой прямоугольной мембраны внутри низкой жесткой матрицы при пропорциональной зависимости величины поперечного давления от времени // *Изв. РАН. МТТ*, 2022. № 3. С. 40–55. EDN: QGTMEI. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329922020027>.
8. Ефимов А. Б., Романюк С. Н., Чумаченко Е. Н. Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // *Изв. РАН. МТТ*, 1995. № 6. С. 82–98.
9. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–36.
10. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций*. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
11. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
12. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ*, 1963. № 2. С. 113–123.
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels // *Materials at High Temperatures*, 2014. vol. 31, no. 3. pp. 211–220. DOI: <https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016>.

MSC: 74A05, 74D10

Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a rigid low matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time

A. M. Lokoshchenko¹, **L. V. Fomin**¹,
A. F. Akhmetgaleev¹, **D. D. Makhov**^{1,2}

¹ Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

² Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

In this work, we studied the creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane in confined conditions (inside a rigid low matrix) with a proportional dependence on the magnitude of transverse pressure on time.

Deformation of the membrane is considered as a sequence of three stages. At first stage, the membrane is deformed under free conditions until it touches the transverse side of the rigid matrix. At second stage, the membrane is deformed when it touches the transverse wall of the matrix until it touches its longitudinal walls. At third stage, the membrane is already deformed while simultaneously touching the longitudinal and transverse walls of matrix.

The study is carried out under two types of contact conditions: 1) ideal sliding of the membrane along the walls of the matrix; 2) sticking of the membrane to the walls of the matrix.

The analysis of the gradual long-term fracture of the membrane is carried out using the kinetic theory of creep by Yu. N. Rabotnov, while the parameter of material damage in this problem has a scalar character.

The obtained equations are used to analyze the creep and long-term fracture of a membrane made of 2.15Cr-1Mo steel, which is deformed under variable transverse pressure at a temperature of 600 °C until its destruction.

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Akhmetgaleev A. F., Makhov D. D. Creep and long-term fracture of a narrow rectangular membrane inside a rigid low matrix with proportional dependence on the transverse pressure on time, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 715–737. EDN: EUXYCR. DOI: [10.14498/vsgtu1938](https://doi.org/10.14498/vsgtu1938) (In Russian).

Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor

Leonid V. Fomin  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength;

e-mail: lfleonid1975@mail.ru

As a result of solving the system of constitutive and kinetic equations, the values of the damage parameter accumulated during each stage of deformation, as well as the time to fracture of the membrane, are obtained. In the case of membrane fracture at the first stage of deformation, the time to fracture at the first stage does not depend on the type of contact conditions, and in the case of membrane fracture at the second and third stages of deformation, the time to fracture in the case of ideal slip is not less than in the case of sticking.

Keywords: rectangular membrane, rigid matrix, variable transverse pressure, creep, long-term fracture, damage parameter, kinetic theory, long-term strength.

Received: 21st June, 2022 / Revised: 30th September, 2022 /

Accepted: 6th October, 2022 / First online: 29th December, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–80–00387_a).

References

1. Kachanov L. M. *Osnovy mekhaniki razrusheniia* [Fundamentals of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974, 312 pp. (In Russian)
2. Odqvist F. K. G. *Mathematical theory of creep and creep rupture*. Oxford, Clarendon Press, 1974, 200 pp.
3. Storåkers B. *Finite Creep of a Circular Membrane under Hydrostatic Pressure*, Acta polytechnica Scandinavica. Mechanical engineering series, vol. 44. Stocholm, Royal Swedish Acad. of Eng. Sci., 1969, 107 pp.
4. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov* [Creep in Metal Forming]. Moscow, Mashinostroenie, 1986, 216 pp. (In Russian)
5. Lokoshchenko A. M. *Creep and Long-term Strength of Metals*. Boca, Raton, CRC Press, 2017, xviii+545 pp. EDN: YKQNZJ. DOI: <https://doi.org/10.1201/b22242>.
6. Lokoshchenko A. M., Teraud W. V., Akhmetgaleev A. F. Steady-state creep of a narrow membrane inside a rigid low matrix, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1668–1683. EDN: EIFLHQ. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654421080112>.
7. Akhmetgaleev A. F., Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Steady-state creep of a long narrow rectangular membrane inside a low rigid matrix with a proportional dependence of the magnitude of the transverse pressure on time, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 3, pp. 40–55. EDN: VMQFVE. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422030013>.
8. Efimov A. B., Romanyuk S. N., Chumachenko E. N. On the determination of the regularities of friction in the processes of metal forming by pressure, *Mech. Solids*, 1995, no. 6, pp. 82–98 (In Russian).

Alexander F. Akhmetgaleev  <https://orcid.org/0000-0002-7999-6079>

Leading Engineer; Lab. of Elasticity and Plasticity; e-mail: achmet206a@yandex.ru

Denis D. Makhov  <https://orcid.org/0000-0001-7748-3934>

Leading Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Student; Dept. of Mechanics and Mathematics²; e-mail: monyamail@yahoo.com

9. Kachanov L. M. Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–36 (In Russian).
10. Rabotnov Yu. N. Mechanism of long-term destruction, In: *Strength of Materials and Structures*. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1959, pp. 5–7 (In Russian).
11. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
12. Rabotnov Yu. N. On fracture as a consequence of creep, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1963, no. 2, pp. 113–123 (In Russian).
13. Goyal S., Laha K., Panneer Selvi S., Mathew M. D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels, *Materials at High Temperatures*, 2014, vol. 31, no. 3, pp. 211–220. DOI: <https://doi.org/10.1179/1878641314Y.0000000016>.



УДК 521.182

Сравнение элементов орбит больших планет, Луны и Солнца с использованием различных математических моделей на интервале времени с 1600 по 2200 гг.

А. Ф. Заусаев, М. А. Романюк

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Проведен анализ точности элементов орбит, полученных по координатам и компонентам скоростей, найденных с помощью коэффициентов многочленов Чебышева планетного каталога DE405. Для исследования на интервале времени с 1600 по 2200 гг. проведено сопоставление элементов орбит, найденных с помощью каталога DE405, а также полученных на основании численного интегрирования уравнений движения, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством. На примере численного интегрирования уравнений движения Луны показано преимущество использования уравнений движения, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством по сравнению с релятивистскими уравнениями. На основании сравнения элементов орбит Меркурия, полученных путем решения уравнений, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством и найденных с помощью использования каталога DE405, показано, что на исследуемом интервале времени элементы орбит практически совпадают. Максимальное расхождение в средней аномалии на конце интервала интегрирования составляет менее $1''$ (секунды дуги). Определены невязки вековых смещений перигелиев для Меркурия, Венеры, Земли + Луны и Марса, значения которых для DE405 соответственно равны: $43.08''$, $8.4''$, $3.83''$ и $1.14''$. Показано, что погрешности вековых смещений перигелиев планет Меркурия, Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, полученные

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение элементов орбит больших планет, Луны и Солнца с использованием различных математических моделей на интервале времени с 1600 по 2200 гг. // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 738–763. EDN: DVJGRH. DOI: 10.14498/vsgtu1888.

Сведения об авторах

Анатолий Федорович Заусаев  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>

доктор физико-математических наук; профессор; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausaev_af@mail.ru

Мария Анатольевна Романюк  <https://orcid.org/0000-0003-1352-6725>

кандидат технических наук; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: zausmasha@mail.ru

при использовании каталога DE405, принимают следующие значения: $0''$, $6.06''$, $3.83''$ и $1.08''$. Для внешних планет: Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и карликовой планеты Плутон на основании рассмотренных сравнений различных уравнений движения расхождений элементов орбит не обнаружено. На основании проведенных исследований показано, что использование гармонических координат в релятивистских уравнениях при создании каталога DE405 оправдано только для Меркурия и внешних планет: Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и карликовой планеты Плутон.

Ключевые слова: элементы орбит, численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения.

Получение: 19 октября 2021 г. / Исправление: 15 октября 2022 г. /

Принятие: 17 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 6 декабря 2022 г.

Исследование движения больших планет, Луны и Солнца сопряжено с большим объемом вычислений, точность которых зависит от выбора как математической модели движения, так и метода решения задачи. Математическая модель движения небесных тел, как правило, описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка. В основе каждой математической модели лежат определенные физические предпосылки. Важную роль в механике играет понятие пространства.

Понятие об эфире исходит из глубокой древности. Две с половиной тысячи лет назад ученые древней Греции сформулировали и развили понятие об эфире. Эфирная концепция достигла своей кульминации в XIX веке, когда Максвелл, опираясь на созданную им модель эфира, получил фундаментальные уравнения электродинамики [1].

В теории тяготения Ньютона под пространством понимается плоское евклидово пространство. Механика Ньютона основана на законе всемирного тяготения и трех законах движения [2, 3].

В основе релятивистской механики лежат два основных принципа: принцип эквивалентности и принцип общековариантности [4, 5]. Принцип эквивалентности говорит о том, что все физические процессы протекают одинаково в инерциальной системе, находящейся в однородном поле тяготения и в неинерциальной равномерно ускоренной системе. Из принципа общековариантности следует, что уравнения должны иметь одну и ту же форму во всех без исключения системах отсчета. Опираясь на эти принципы, Эйнштейн пришел к выводу, что пространство событий общей теории относительности должно представлять собой псевдориманово четырехмерное пространство с метрикой [6]

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1)$$

Движение пробной частицы под действием тяготения — это свободное движение по инерции, происходящее по геодезическим линиям псевдориманова пространства, метрика которого формируется самими гравитационными массами.

С развитием квантовой теории появился термин — физический вакуум. Физический вакуум является особым видом материи, претендующим на первооснову мира. Физический вакуум стал предметом изучения физики бла-

годаря усилиям известных ученых: П. Дирака, Р. Фейнмана, Дж. Уилера, У. Лэмба, де Ситтера, Г. Казимира, Я. Б. Зельдовича [7–10]. Столь разнообразное представление от эфира до физического вакуума об окружающем нас пространстве говорит о сложности проблемы, стоящей перед наукой.

Следует отметить, что в настоящее время свойства окружающего нас пространства недостаточно изучены, поэтому при выводе дифференциальных уравнений движения материальных тел необходимо наделять его определенными динамическими свойствами.

Ранее нами получены дифференциальные уравнения движения небесных тел, основанные на взаимодействии материальных тел с окружающим пространством, которые имеют следующий вид [11–15]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{Y_i - Y}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i \left(\frac{Z_i - Z}{\Delta_i} \right) \frac{3a_{0i} r_{0i}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i \sqrt{\Delta_i^3 - r_{0i}^3} + \sqrt{(\Delta_i^3 - r_{0i}^3)^2}}, \end{cases} \quad (2)$$

где r_{0i} — эффективный радиус i -того тела; a_{0i} — соответствующее ускорение для i -того тела на расстоянии r_{0i} от центра массы; X, Y, Z — барицентрические координаты возмущаемого тела; X_i, Y_i, Z_i — барицентрические координаты возмущающих тел; Δ_i — взаимное расстояние между возмущаемым и возмущающим телом.

Дифференциальные уравнения движения в ньютоновой форме имеют следующий вид [1, 2]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} \right), \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left(\frac{Y_i - Y}{\Delta_i^3} \right), \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} = \sum_i k^2 m_i \left(\frac{Z_i - Z}{\Delta_i^3} \right), \end{cases} \quad (3)$$

где $\Delta_i^2 = (X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2$; X, Y, Z — барицентрические координаты возмущаемого тела; m_i, X_i, Y_i, Z_i — массы и барицентрические координаты возмущающих тел.

Целью данной работы является оценка точности координат планет, представленных в планетном каталоге DE405, поэтому следует привести математическую модель в форме дифференциальных уравнений, которую автор использовал при создании DE405.

Дифференциальные уравнения движения в барицентрической системе координат с учетом ньютоновых и шварцшильдовских членов и формулы (1) имеют следующий вид [16]:

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (r_j - r_i)}{r_{ij}^3} \left\{ 1 - \frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{r_{jk}} + \gamma \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{r}_i \dot{r}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(r_i - r_j) \dot{r}_i}{r_{ij}} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (r_j - r_i) \ddot{r}_j \Big\} + \\
 & + \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j) [(2 + 2\gamma) \dot{r}_i - (1 + 2\gamma) \dot{r}_j] (\dot{r}_i - \dot{r}_j) + \\
 & + \frac{3 + 4\gamma}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \ddot{r}_j}{r_{ij}} + \sum_{m=1}^n \frac{\mu_m (r_m - r_i)}{r_{im}^3}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i$ — координаты, скорости и ускорения в барицентрической системе координат i -того тела; $\mu_j = k^2 m_j$; k^2 — гравитационная постоянная; m_j — масса j -того тела; $r_{ij} = |r_j - r_i|$; β и γ — релятивистские параметры, $\beta = \gamma = 1$; $v_i = |\dot{r}_i|$; c — скорость света.

При создании эфемерид Луны помимо гравитационных и релятивистских эффектов учитывалось влияние фигур Земли и Луны в математической модели. Ускорение Луны благодаря учету зональных и тессеральных гармоник в координатной системе $\xi\eta\zeta$ имеет вид [16]

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} &= -\frac{\mu}{r^2} \left\{ \sum_{n=1}^{n_1} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1) P_n(\sin \varphi) \\ 0 \\ -\cos \theta P_n(\sin \varphi) \end{bmatrix} + \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{n_2} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1) P_n^m(\sin \varphi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \\ m \sec \varphi P_n^m(\sin \varphi) [-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda] \\ \cos \varphi P_n^m(\sin \varphi) [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где μ — гравитационная постоянная; r — расстояние между центрами масс двух тел; n_1 и n_2 — максимальные степени зональных и тессеральных гармоник несферичных тел соответственно; $P_n(\sin \varphi)$ — полином Лежандра степени n ; $P_n^m(\sin \varphi)$ — присоединенный полином Лежандра степени n и порядка m ; J_n — зональные гармоники от несферичности тела; C_{nm}, S_{nm} — коэффициенты тессеральных гармоник; φ — широта притягиваемого тела в фиксированной системе координат $\xi\eta\zeta$; λ — восточная долгота притягиваемого тела. Вклад в инерциальное ускорение от несферичного тела возникает от взаимодействия ее собственной фигуры с внешней точечной массой, представленной в координатной системе $\xi\eta\zeta$. Ось ξ направлена вовне от несферичного тела к точечной массе. Ось η направлена на восток, лежит в селенографической плоскости $XУ$, перпендикулярна оси ξ . Ось ζ направлена на север, образуя правую систему координат.

Кроме того, земные приливы оказывают на геоцентрическое ускорение Луны следующее воздействие [16]:

$$\ddot{r}_m = -\frac{3k_2 \mu_m}{r_{lm}^3} \left(1 + \frac{\mu_m}{\mu_l} \right) \left(\frac{a_l}{r_{lm}} \right)^5 \begin{bmatrix} x + y\delta \\ y - x\delta \\ z \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где k_2 — число Лява; a_l — радиус Земли; r_{lm} — геоцентрическое расстояние Луны; x, y, z , — декартовы геоцентрические координаты Луны; μ_m — гравитационная постоянная, умноженная на массу Луны; μ_l — гравитационная постоянная, умноженная на массу Земли; δ — фазовый угол.

В отличие от уравнений (4), дифференциальные уравнения (2) записаны в декартовой системе координат. В них отсутствуют понятия силы и массы, которые, по мнению Пуанкаре, не имеют точного определения [17].

Ранее проведенные исследования показали, что решение дифференциальных уравнений, основанных на взаимодействии движущихся материальных тел с окружающим пространством, обладает преимуществом по сравнению с решениями Ньтоновых и релятивистских уравнений [18]. Использование уравнений в форме Ньютона для численного интегрирования уравнений движения больших планет приводит к накоплению ошибок в координатах внутренних планет. При построении численной теории Луны автором DE405 наряду с уравнением (4) решаются уравнения (5) и (6), что значительно усложняет решение задачи [19].

В отличие от релятивистских уравнений (4), (5) и (6), нами получены координаты всех больших планет, Луны и Солнца на определенные моменты на интервале времени с помощью решения одной системы дифференциальных уравнений (2).

Координаты планет, Луны и Солнца хранятся в каталоге DE405 в форме коэффициентов полиномов Чебышева [20–22]. Для различных планет степени многочленов различны. Максимальная степень многочленов порядка тринадцать обеспечивает необходимую точность для нахождения координат внутренних планет и Луны. Коэффициенты полиномов Чебышева хранятся в каталоге DE405 с шагом тридцать два дня. Многочлены Чебышева обеспечивают гладкое приближение даже при использовании многочленов высоких порядков. Многочлен Чебышева порядка n (для $|x| \leq 1$) определяется как [21] $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$.

Из равенства $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ следует, что

$$\cos(n + 1)\varphi = 2 \cos n\varphi \cos \varphi - \cos(n - 1)\varphi. \quad (7)$$

Если $\varphi = \arccos x$, то после подстановки в (7) получим следующую рекуррентную формулу:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Многочлены Чебышева до 13-го порядка имеют следующий вид:

$$T_0(x) = 1;$$

$$T_1(x) = x;$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x;$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1;$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x;$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1;$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x;$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1;$$

$$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x;$$

$$T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1;$$

$$T_{13}(x) = 4096x^{13} - 13352x^{11} + 16640x^9 - 9984x^7 + 2912x^5 - 364x^3 + 13x.$$

Рассмотрим особенности многочлена Чебышева на отрезке $[-1, 1]$. Внутри этого отрезка $T_n(x)$ обращается в нуль в n точках:

$$T_n(x) = 0 \quad \text{при } x = \cos(\pi(k + 1/2)/n),$$

где $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

При $|x| \leq 1$ значение $|T_n(x)|$ не может превышать 1.

Чтобы аппроксимировать произвольную функцию $f(x)$ в интервале $[a, b]$, заменим независимую переменную x нормированной переменной \hat{x} в интервале $[-1, 1]$ соотношением

$$\hat{x} = \frac{2x - (a + b)}{b - a} \quad \text{при } x \in [a, b] \rightarrow \hat{x} \in [-1, 1]$$

и

$$x = \hat{x} \cdot \frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{при } \hat{x} \in [-1, 1] \rightarrow x \in [a, b].$$

Функция $f(x)$ теперь может быть представлена многочленами Чебышева вплоть до n -го порядка в виде

$$f(x) = \sum_{j=0}^n c_j T_j(\hat{x}).$$

Коэффициенты c_j вычисляются следующим образом:

$$c_j = \frac{2}{n + 1} \sum_{k=0}^n f(x_k^{n+1}) T_j(\hat{x}_k^{n+1}),$$

где \hat{x}_k^{n+1} представляет k -тый корень T_{n+1} .

Коэффициенты многочленов Чебышева в каталоге DE405 для каждого 32-дневного интервала приведены на начало интервала, что соответствует значению $\hat{x} = -1$ для интервала $[-1, 1]$. В точке $\hat{x} = -1$ многочлены Чебышева примут следующие значения: $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{i+1}$, где $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Значения координат планет Луны и Солнца в точке $\hat{x} = -1$ вычисляются с помощью следующего соотношения:

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j c_j.$$

Для нахождения скоростей планет Луны и Солнца в точке $\hat{x} = -1$ берутся производные от многочленов Чебышева, затем вычисляются коэффициенты путем подстановки $\hat{x} = -1$ в полученные многочлены. Сумма произведений полученных коэффициентов на производные от многочленов, умноженных для каждого объекта на постоянный множитель, определяет скорость исследуемых объектов. Постоянные коэффициенты в точке $\hat{x} = -1$ имеют следующие значения: $U_0 = 0, U_1 = 1, U_2 = -4, U_3 = 9, U_4 = -16, U_5 = 25, U_6 = -36, U_7 = 49, U_8 = -64, U_9 = 81, U_{10} = -100, U_{11} = 121, U_{12} = -144, U_{13} = 169$.

Компоненты скоростей планет, Луны и Солнца находятся из соотношений

$$M(x) = G_i \sum_{j=0}^n c_j U_j(x),$$

где G_i для каждой планеты имеет постоянное значение. Для Меркурия, Венеры, барицентра Земли + Луны, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна, Плутона значения G_i взяты из [23].

Для сравнения координат и элементов орбит планет, вычисленных путем решения уравнений (2) и с помощью каталога DE405, весь интервал с 9 декабря 1599 г. (JD 2305424.5) по 31 декабря 2199 г. (JD 2524592.5) был разбит на шесть подынтервалов с шагом приблизительно 100 лет, в начале каждого из которых производилось сравнение.

По начальным данным гелиоцентрических координат планет были вычислены элементы их орбит, которые представлены в табл. 1.

В табл. 2–5 представлены элементы орбит Меркурия, Венеры, Земли + Луны и Марса на различные моменты времени, полученные с использованием DE405, численного интегрирования дифференциальных уравнений (2) и путем решения уравнений движения в Ньютоновой форме (3). Элементы орбит в табл. 2–5 размещены в следующем порядке: в первых строках табл. 2–5 представлены элементы орбит Меркурия–Марса, найденные с помощью каталога DE405, во вторых строках — элементы орбит, полученные на основании решения уравнений (2), и в третьих строках — найденные с помощью решения уравнений в Ньютоновой форме (3).

В табл. 6–9 представлены разности элементов орбит Меркурия, Венеры, Земли + Луны и Марса, полученные с помощью решения уравнений (2), (3) и DE405.

Меркурий является ближайшей к Солнцу планетой. Солнце оказывает на его движение более существенное влияние по сравнению с другими большими планетами. В середине прошлого столетия французский математик и астроном Леверье доказал, что с помощью решения уравнений движения в Ньютоновой форме невозможно построить теорию движения Меркурия, согласованную с наблюдениями [24]. Создание общей теории относительности и разработанные на ее основе дифференциальные уравнения движения небесных тел позволили согласовать движение Меркурия с наблюдениями. Использование гармонической системы координат полностью обосновало невязки между наблюдениями и результатами Ньютоновой гравитационной теорией.

Как видно из табл. 6, сопоставление элементов орбит Меркурия на интервале времен с 1600 по 2200 гг., полученных с использованием решений уравнений (2) и DE405, указывает на практическое их совпадение. Максимальное расхождение имеет место в средней аномалии, что составляет -0.0002° (градуса). Данное различие составляет $0.72''$, в то время как аргументы перигелиев различаются на $0.36''$. Учитывая, что данное расхождение в элементах орбит Меркурия произошло через 350 лет от начального момента интегрирования, полученные результаты можно считать вполне удовлетворительными. По данным табл. 2 найдено вековое смещение перигелия Меркурия, равное $43.08''$.

Орбита Венеры расположена дальше орбиты Меркурия, поэтому она подвержена значительно меньшему воздействию Солнца и является объектом

Таблица 1

Элементы орбит больших планет на дату 27 июня 1969 г. (юлианская дата 2440400.5)
 [Orbital elements of the major planets as of June 27, 1969 (JD 2440400.5)]

Planets	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
Mercury	287.7773	0.387099	0.205617	29.0367	48.3688	7.0068
Venus	195.5860	0.723330	0.006813	54.6870	76.7621	3.3949
Earth + Moon	173.6153	1.000002	0.016713	107.0781	355.6508	0.0039
Mars	299.3763	1.523648	0.093379	107.0781	49.6476	1.852301
Jupiter	174.2869	5.207621	0.047265	273.7981	100.4002	1.3049
Saturn	302.9131	9.522000	0.054053	340.1900	113.7871	2.4866
Uranus	10.5307	19.280834	0.051387	97.9204	74.0516	0.7733
Neptune	185.6073	30.176592	0.004906	280.7089	131.7369	1.7702
Pluto	331.3768	39.774492	0.253318	112.9821	110.2863	17.1349

Таблица 2

Элементы орбит Меркурия [Elements of the orbits of the Mercury]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	160.8368 160.8366 160.8507	0.387099 0.387099 0.387099	0.205541 0.205541 0.205541	27.9902 27.9903 28.0343	48.8311 48.8311 48.8312	7.0287 7.0287 7.0287
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	311.1034 311.1033 311.1135	0.387898 0.387898 0.387098	0.205569 0.205569 0.205569	28.2774 28.2774 28.3096	48.7065 48.7065 48.7065	7.0228 7.0228 7.0228
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	101.3785 101.3784 101.3849	0.387098 0.387098 0.387098	0.205596 0.205596 0.205596	28.5579 28.5580 28.5782	48.5815 48.5815 48.5815	7.0169 7.0169 7.0169
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	349.7370 349.7370 349.7397	0.387098 0.387098 0.387098	0.205625 0.205625 0.205625	28.8405 28.8405 28.8488	48.4567 48.4567 48.4567	7.0110 7.0110 7.0110
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	140.0110 140.0110 140.0098	0.387098 0.387098 0.387098	0.205630 0.205629 0.205629	29.1243 29.1243 29.1206	48.4305 48.4305 48.4305	7.0050 7.0050 7.0050
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	159.3294 159.3294 159.3245	0.387097 0.387098 0.387098	0.205653 0.205653 0.205652	29.4069 29.4069 29.3913	48.2052 48.2052 48.2052	6.9991 6.9991 6.9991
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	309.5923 309.5924 309.5836	0.387098 0.387098 0.387098	0.205667 0.205667 0.205667	29.6962 29.6961 29.6686	48.0794 48.0794 48.0794	6.9930 6.9930 6.9930

Таблица 3

Элементы орбит Венеры [Elements of the orbits of the Venus]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405	306.3409	0.723344	0.006972	53.7427	77.7910	3.3976
	by the Eqs. (2)	306.3347	0.723344	0.006972	53.7490	77.7910	3.3976
	by the Eqs. (3)	306.3354	0.723344	0.006972	53.7514	77.7910	3.3976
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405	174.8557	0.723336	0.006927	53.7582	77.5144	3.3969
	by the Eqs. (2)	174.8510	0.723336	0.006927	53.7630	77.5145	3.3969
	by the Eqs. (3)	174.8516	0.723336	0.006927	53.7646	77.5145	3.3969
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405	42.8101	0.723325	0.006833	54.3392	77.2331	3.3963
	by the Eqs. (2)	42.8069	0.723325	0.006833	54.3424	77.2331	3.3963
	by the Eqs. (3)	42.8073	0.723325	0.006833	54.3434	77.2331	3.3963
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405	168.7702	0.723329	0.006802	54.3748	76.9589	3.3956
	by the Eqs. (2)	168.7689	0.723329	0.006802	54.3761	76.9589	3.3956
	by the Eqs. (3)	168.7691	0.723329	0.006802	54.3765	76.9589	3.3956
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405	36.4937	0.723327	0.006756	55.1887	76.6784	3.3946
	by the Eqs. (2)	36.4941	0.723327	0.006756	55.1884	76.6784	3.3946
	by the Eqs. (3)	36.4941	0.723327	0.006756	55.1881	76.6784	3.3946
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405	213.8268	0.723329	0.006693	55.1227	76.4005	3.3937
	by the Eqs. (2)	213.8293	0.723329	0.006693	55.1202	76.4005	3.3937
	by the Eqs. (3)	213.8290	0.723329	0.006693	55.1194	76.4005	3.3937
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405	81.7762	0.723328	0.006703	55.7055	76.1244	3.3928
	by the Eqs. (2)	81.7799	0.723328	0.006703	55.7017	76.1244	3.3928
	by the Eqs. (3)	81.7795	0.723328	0.006703	55.7002	76.1244	3.3928

Таблица 4

Элементы орбит Земли + Луны [Elements of the orbits of the Earth & Moon]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	341.0999 341.0969 341.0971	0.999994 0.999994 0.999994	0.016843 0.016843 0.016843	105.9312 105.9354 105.9360	355.7385 355.7376 355.7376	0.0524 0.0524 0.0524
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	358.8414 358.8391 358.8393	1.000002 1.000002 1.000002	0.016853 0.016853 0.016853	106.4499 106.4533 106.4537	355.5786 355.5776 355.5777	0.0393 0.0393 0.0393
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	16.6266 16.6225 16.6252	1.000021 1.000021 1.000021	0.016815 0.016815 0.016815	107.1480 107.1504 107.1507	355.1933 355.1924 355.1924	0.0260 0.0260 0.0260
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	331.4083 331.4078 331.4078	1.000006 1.000006 1.000006	0.016773 0.016773 0.016773	107.7580 107.7595 107.7597	354.8222 354.8212 354.8212	0.0131 0.0131 0.0131
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	349.1741 349.1744 349.1744	1.000004 1.000004 1.000004	0.016709 0.016709 0.016709	323.9007 323.8567 323.8561	139.0106 139.0542 139.0548	0.0001 0.0001 0.0001
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	335.4455 335.4466 335.4465	1.000001 1.000001 1.000001	0.016665 0.016665 0.016665	288.7857 288.7852 288.7850	174.4148 174.4140 174.4141	0.0131 0.0131 0.0131
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	353.1145 353.1164 353.1163	0.999996 0.999996 0.999996	0.016626 0.016626 0.016626	289.2209 289.2197 289.2194	174.4119 174.4109 174.4110	0.0260 0.0260 0.0260

Таблица 5

Элементы орбит Марса [Elements of the orbits of the Mars]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	129.2408 129.2394 129.2394	1.523749 1.523749 1.523749	0.093011 0.093011 0.093011	283.5284 283.5297 283.5298	50.7286 50.7286 50.7286	1.8819 1.8819 1.8819
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	198.9886 198.9876 198.9876	1.523632 1.523632 1.523632	0.093113 0.093011 0.093113	284.3246 284.3255 284.3255	50.4397 50.4398 50.4398	1.8739 1.8739 1.8739
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	268.8961 268.8955 268.8955	1.523698 1.523698 1.523698	0.093296 0.093296 0.093296	284.9704 284.9709 284.9710	50.1466 50.1466 50.1466	1.8658 1.8658 1.8658
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	305.1031 305.1028 305.1028	1.523683 1.523683 1.523683	0.093215 0.093215 0.093215	285.7719 285.7721 285.7722	49.8552 49.8552 49.8552	1.8578 1.8578 1.8578
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	14.9027 14.9029 14.9029	1.523666 1.523666 1.523666	0.093307 0.093307 0.093307	286.5371 286.5370 286.5370	49.5619 49.5619 49.5619	1.8499 1.8499 1.8499
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	67.9179 67.9185 67.9184	1.523690 1.523690 1.523690	0.093613 0.093612 0.093612	287.2980 287.2975 287.975	49.2578 49.2578 49.2578	1.8417 1.8417 1.8417
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	137.8190 137.8199 137.8189	1.523711 1.523711 1.523711	0.093507 0.093507 0.093507	287.9596 287.9588 287.9587	48.9631 48.9631 48.9631	1.8333 1.8333 1.8333

более легким для исследования движения. Однако, как следует из сравнения элементов орбит, полученных путем численного интегрирования дифференциальных уравнений (2) и с использованием DE405, приведенных в табл. 7, расхождение средних аномалий и аргументов перигелиев значительные. Как известно, величина невязки векового смещения перигелия планеты определяется по разности долгот перигелиев, найденных с помощью решения уравнений движения двумя различными методами. В нашем случае сравниваются долготы перигелиев, найденные на основе решения Ньютоновых уравнений (3) и полученные с помощью каталога DE405. Долгота перигелия определяется как сумма значений аргумента перигелия и долготы восходящего узла. Как видно из табл. 7, смещение долготы перигелия Венеры зависит главным образом от скорости движения аргумента перигелия, поскольку долготы восходящих узлов, найденные вышеуказанными методами, совпадают на всем рассматриваемом интервале интегрирования. Наибольшие различия средних аномалий и аргументов перигелиев наблюдаются вблизи концов интервала интегрирования. Например, 9 декабря 1599 г. значение средней аномалии, найденной с помощью решения уравнений (2) и полученной с использованием DE405, отличается от средней аномалии на -0.0062° , а аргументы перигелиев — на 0.0063° . На момент 31 декабря 2199 г. расхождение в средней аномалии составляет 0.0037° , в аргументе перигелия -0.0038° . Как видно из табл. 7, величина расхождения средних аномалий, найденная двумя методами, находится в прямой зависимости от вековых скоростей движения аргументов перигелиев. По разностям аргументов перигелиев, полученных путем решения уравнений (2) и Ньютоновых уравнений (3), а также найденных с помощью каталога DE405, определена невязка векового смещения перигелия Венеры и ее погрешность для DE405. Величина невязки векового смещения для Венеры равна $8.4''$ с погрешностью $6.06''$.

Как видно из табл. 4, барицентр Земли + Луны имеет малый угол наклона к эклиптике, поэтому изменения аргумента перигелия и долготы восходящего узла в процессе движения более значительны по сравнению с Венерой. В 1999 году наклонение орбиты барицентра Земли + Луны находилось вблизи нуля, принимая в некоторые моменты времени отрицательные значения. В этом случае нисходящий и восходящий узлы меняются местами, что наглядно представлено в табл. 4. Несмотря на значительные различия аргументов перигелиев и долгот восходящих узлов — на -0.0440° и 0.0436° (см. табл. 4), средние аномалии отличаются незначительно: на -0.0003° . На концах интервала интегрирования 9 декабря 1599 г. различие средних аномалий составляет -0.0030° , а в аргументе перигелия и долготе восходящего узла 0.0042° и -0.0009° . По данным табл. 8 найдена невязка векового смещения перигелия барицентра Земли + Луны и ее погрешность: $4.32''$ — невязка, $3.83''$ — погрешность.

Расхождение средних аномалий и аргументов перигелиев у Марса менее значительное по сравнению с Венерой и Землей (см. табл. 9). Максимальное различие средних аномалий и аргументов перигелиев, полученных путем решения уравнений (2) и с использованием DE405, имеет место 9 декабря 1599 г. и составляет -0.0014° и 0.0013° соответственно. Решением Ньютоновых уравнений с использованием DE405 найдены вековое смещение перигелия Марса и его погрешность: $1.14''$ — смещение, $1.01''$ — погрешность.

Таблица 6
Разности элементов орбит Меркурия, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Mercury, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	ΔM (in deg.)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	Δi (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0002 0.0139	0 0	0 0	-0.0001 0.0441	0 0.0001	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0001 -0.0087	0 0	0 0	0.0001 -0.0276	0 0	0 0

Таблица 7
Разности элементов орбит Венеры, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Venus, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	ΔM (in deg.)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	Δi (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0062 -0.0055	0 0	0 0	0.0063 0.0087	0 0	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0037 0.0033	0 0	0 0	-0.0038 -0.0053	0 0	0 0

Таблица 8
Разности элементов орбит Земли + Луны, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Earth & Moon, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	ΔM (in deg.)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	Δi (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0030 -0.0028	0 0	0 0	0.0042 0.0048	-0.0009 -0.0009	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0019 -0.0004	0 0	0 0	-0.0012 -0.0015	-0.0010 -0.0009	0 0

В табл. 10–14 приведены сравнения элементов орбит Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона, полученные с использованием DE405 и численного интегрирования дифференциальных уравнений (2) и Ньютоновых уравнений движения (3).

На основании сопоставления элементов орбит можно заключить, что в пределах рассматриваемой точности различий в элементах орбит Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и Плутона, полученных с использованием DE405 и численного интегрирования дифференциальных уравнений (2), не обнаружено. При сравнении элементов орбит полагалось следующее допущение: элементы орбит имеют одинаковую точность, если угловые элементы совпадают с точностью до секунды, а большие полуоси и эксцентриситеты — до шести значащих цифр.

В релятивистских уравнениях результаты вычислений существенным образом зависят от выбранной системы координат. Для уравнений (4) выбрана гармоническая система координат, которая оказалась наиболее подходящей для исследования движения Меркурия. Решение уравнений (4) позволило полностью согласовать величину векового движения перигелия Меркурия с наблюдениями.

Возникает вопрос: для всех ли больших планет при исследовании их движений использование гармонической системы координат является оправданным? Ответ на данный вопрос можно получить либо путем сравнения вычисленных положений планет с наблюдениями, либо путем сравнения координат планет, найденных с помощью решения более эффективным методом. В силу того, что величины вековых смещений перигелиев у Венеры, Земли и Марса малы, а их орбиты близки к круговым, решить данный вопрос путем сравнения с наблюдениями затруднительно. Кроме того, отсутствие на всем исследуемом интервале времени высокоточных наблюдений также препятствует решению данного вопроса.

Проверка эффективности применения уравнений (2) и (4) нами проводилась на примере исследования движения Луны с помощью решения этих уравнений. При исследовании движения Луны в DE405 наряду с решением уравнений (4) проводилось интегрирование уравнений (5) и (6). Полученные решения координат Луны согласованы как с оптическими, так и с радиолокационными наблюдениями.

В табл. 15 представлены геоцентрические координаты и компоненты скорости Луны, полученные с использованием DE405 и путем решения уравнений (2) и (4).

Как видно из табл. 15, максимальные расхождения координат, полученных путем решения уравнений (2) и (4), с данными, полученными с использованием DE405, достигаются на концах интервала интегрирования. При этом расхождения координат и компонент скоростей, найденные путем решения уравнений (2) и с использованием DE405, почти на порядок меньше по сравнению с расхождениями решений уравнений (4) и данными с использованием DE405.

При сравнении координат Луны, вычисленных с помощью решения уравнений (2) и (4), можно оценить лишь относительные погрешности решений. Сравнение геоцентрических расстояний Луны различными методами позволяет оценить абсолютные погрешности решений данными методами.

Таблица 9
 Разности элементов орбит Марса, полученные с помощью DE405 и решения уравнений (2) и (3) [Differences in the elements of the orbits of the Mars, obtained using the DE405 and solving the Eqs. (2) and the Eqs. (3)]

Current date	Differences (between the results obtained by)	ΔM (in deg.)	Δa (in au)	Δe	$\Delta \omega$ (in deg.)	$\Delta \Omega$ (in deg.)	Δi (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	-0.0014 -0.0014	0 0	0 0	0.0013 0.0014	0 0	0 0
2199 12 31 JD 2524592.5	by the Eqs. (2) and the DE405 by the Eqs. (3) and the DE405	0.0009 0.0009	0 0	0 0	-0.0008 -0.0009	0 0	0 0

Таблица 10
 Элементы орбит Юпитера [Elements of the orbits of the Jupiter]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	119.7747 119.7746 119.7746	5.206547 5.206547 5.206547	0.047515 0.047515 0.047515	273.6536 273.6536 273.6536	99.7415 99.7415 99.7415	1.3112 1.3112 1.3112
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	330.1812 330.1812 330.1812	5.208676 5.208676 5.208676	0.049767 0.049767 0.049767	272.6198 272.6198 272.6198	100.8539 100.8539 100.8539	1.2993 1.2993 1.2993

Таблица 11

Элементы орбит Сатурна [Elements of the orbits of the Saturn]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	105.4116 105.4116 105.4116	9.574720 9.574720 9.574720	0.057706 0.057706 0.057706	340.3124 340.3124 340.3124	114.6839 114.6839 114.6839	2.4793 2.4793 2.4793
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	245.9046 245.9046 245.9046	9.588370 9.588370 9.588370	0.053906 0.053906 0.053906	335.9770 335.9770 335.9770	113.1024 113.1024 113.1024	2.4927 2.4927 2.4927

Таблица 12

Элементы орбит Урана [Elements of the orbits of the Uranus]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	230.5747 230.5747 230.5747	19.185204 19.185204 19.185204	0.047213 0.047213 0.047213	95.1233 95.1233 95.1233	73.6074 73.6074 73.6074	0.7814 0.7814 0.7814
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	279.3215 279.3215 279.3215	19.183852 19.183851 19.183851	0.045924 0.045924 0.045924	96.7465 96.7465 96.7465	74.0277 74.0277 74.0277	0.7679 0.7679 0.7679

Таблица 13

Элементы орбит Нептуна [Elements of the orbits of the Neptune]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	61.7486 61.7487 61.7487	30.270547 30.270547 30.270547	0.009574 0.009574 0.009574	317.2798 317.2798 317.2798	131.7883 131.7883 131.7883	1.7671 1.7671 1.7671
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	353.1376 353.1376 353.1376	30.264791 30.264791 30.264791	0.014321 0.014321 0.014321	256.6947 256.6947 256.6947	131.7178 131.7178 131.7178	1.7702 1.7702 1.7702

Таблица 14

Элементы орбит Плутона [Elements of the orbits of the Pluto]

Current date	Data sources (calculated by)	M (in deg.)	a (in au)	e	ω (in deg.)	Ω (in deg.)	i (in deg.)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	154.6398 154.6399 154.6399	39.397879 39.397879 39.397880	0.249562 0.249562 0.249562	113.0311 113.0311 113.0311	110.5004 110.5004 110.5004	17.1365 17.1365 17.1365
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (3)	304.1102 304.1102 304.1102	39.257516 39.257516 39.257516	0.247022 0.247022 0.247022	114.7477 114.7477 114.7477	110.3397 110.3397 110.3397	17.1680 17.1680 17.1680

Таблица 15

Геоцентрические координаты и компоненты скоростей Луны, полученные по DE405 и путем решения уравнений (2) и (4) [Geocentric coordinates and velocity components of the Moon calculated by the DE405, the Eqs. (2) and the Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	V_x (in au/day)	V_y (in au/day)	V_z (in au/day)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.002596600 -0.002596680 -0.002600840	0.000681096 0.000681446 0.000667855	0.000131635 0.000129649 0.000122528	-0.000155519 -0.000155389 -0.000152079	-0.000477071 -0.000477231 -0.000478121	-0.000251468 -0.000251209 -0.000251385
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	0.002643269 0.002643220 0.002644275	-0.000298812 -0.000298181 -0.000287487	-0.000140145 -0.000141896 -0.000138329	0.0000430142 0.0000430006 0.0000405114	0.000536555 0.000536541 0.000536757	0.000178574 0.000178638 0.000178749
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.002440199 -0.00244029 -0.00243880	-0.000525672 -0.000524984 -0.000530840	-0.000134793 -0.000135636 -0.000138776	0.000142850 0.000142793 0.000144268	-0.000517844 -0.000517814 -0.000517424	-0.000278656 -0.000278747 -0.000278636
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.000198405 -0.000198560 -0.000195631	-0.002288453 -0.002288571 -0.002288897	-0.000976145 -0.000975855 -0.000975701	0.000607334 0.000607335 0.000607362	-0.000047648 -0.000047659 -0.000047016	-0.000040291 -0.000040248 -0.000040320
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.000808901 -0.000808941 -0.000807684	0.002094014 0.002093992 0.002094421	0.000849050 0.000848989 0.000849049	-0.000600679 -0.000600683 -0.000600792	-0.000198425 -0.000198425 -0.000198136	-0.000025796 -0.000025845 -0.000025728
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	-0.001038446 -0.001037717 -0.001042765	-0.001965349 -0.001965712 -0.001963643	-0.001077336 -0.001077272 -0.001076232	0.000551769 0.000551867 0.000551261	-0.000245541 -0.000245301 -0.000246343	-0.000124050 -0.000124145 -0.000124718
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405 by the Eqs. (2) by the Eqs. (4)	0.000388652 0.000386760 0.000396300	0.002506014 0.002505890 0.002504366	0.000898766 0.000899905 0.000899895	-0.000557717 -0.000557775 -0.000557422	0.000099983 0.000099700 0.000101601	0.000004597 0.000004257 0.000004940

Таблица 16
 Геоцентрические расстояния Луны, полученные по DE405 и путем решения уравнений (2) и (4)
 [Geocentric distance of the Moon calculated by the DE405 and by solving the Eqs. (2) and the Eqs. (4)]

Current date	Data sources (calculated by)	X (in au)	Y (in au)	Z (in au)	ρ (in au)	$ \Delta\rho $ (in km)
1599 12 9 JD 2305424.5	by the DE405	-0.002596600	0.000681096	0.000131635	0.002687666	
	by the Eqs. (2)	-0.002596680	0.000681446	0.000129649	0.002687736	10.47
	by the Eqs. (4)	-0.002600840	0.000667855	0.000122528	0.002688013	51.91
1699 12 28 JD 2341968.5	by the DE405	0.002643269	-0.000298812	-0.000140145	0.002663794	
	by the Eqs. (2)	0.002643220	-0.000298181	-0.000141896	0.002663768	3.89
	by the Eqs. (4)	0.002644275	-0.000287487	-0.000138329	0.002663447	51.91
1800 1 17 JD 2378512.5	by the DE405	-0.002440199	-0.000525672	-0.000134793	0.002499815	
	by the Eqs. (2)	-0.00244029	-0.000524984	-0.000135636	0.002499804	1.64
	by the Eqs. (4)	-0.00243880	-0.000530840	-0.000138776	0.002499760	8.23
1899 12 4 JD 2414992.5	by the DE405	-0.000198405	-0.002288453	-0.000976145	0.002495845	
	by the Eqs. (2)	-0.000198560	-0.002288571	-0.000975855	0.002495852	1.04
	by the Eqs. (4)	-0.000195631	-0.002288897	-0.000975701	0.002495886	6.13
1999 12 24 JD 2451536.5	by the DE405	-0.000808901	0.002094014	0.000849050	0.002400021	
	by the Eqs. (2)	-0.000808941	0.002093992	0.000848989	0.002399999	3.29
	by the Eqs. (4)	-0.000807684	0.002094421	0.000849049	0.002399965	8.38
2099 12 11 JD 2488048.5	by the DE405	-0.001038446	-0.001965349	-0.001077336	0.002470146	
	by the Eqs. (2)	-0.001037717	-0.001965712	-0.001077272	0.002470100	6.88
	by the Eqs. (4)	-0.001042765	-0.001963643	-0.001076232	0.002470125	3.77
2199 12 31 JD 2524592.5	by the DE405	0.000388652	0.002506014	0.000898766	0.002690527	
	by the Eqs. (2)	0.000386760	0.002505890	0.000899905	0.002690519	1.20
	by the Eqs. (4)	0.000396300	0.002504366	0.000899895	0.002690486	6.13

В табл. 16 представлены разности геоцентрических расстояний Луны в километрах, полученные с помощью решений уравнений (2), (4) и DE405.

В первой строке табл. 16 представлены координаты и геоцентрическое расстояние Луны, найденное с помощью DE405, во второй и третьей строках — полученные с помощью решения уравнений (2) и (4). В последней колонке табл. 16 дается разность между геоцентрическими расстояниями Луны, найденными путем решения уравнений (2) и (4) и определенными с помощью планетного каталога DE405. Полагая, что координаты Луны, найденные с помощью DE405, более точные по сравнению с координатами, полученными с помощью решения уравнений (2) и (4), оценим разности геоцентрических расстояний между точным и приближенным решением. Тот метод, у которого данная разность меньше, будем считать более точным. Данное условие является необходимым, но не достаточным для оценки точности метода. Из сопоставления разностей геоцентрических расстояний Луны, найденных различными методами, следует, что максимальные расхождения разностей, полученных с помощью решения уравнений (2) и DE405, изменяются в пределах от 1.20 до 10.47 км, в то время как разности, найденные с помощью решения уравнений (4), изменяются в пределах от 3.77 до 51.91 км.

Как видно из табл. 16, решения, полученные с помощью уравнений (2), являются более точными в шести случаях из семи по сравнению с решениями уравнений (4). Следовательно, элементы орбит планет, найденные по координатам и скоростям, полученным путем решения уравнений (2), более точные по сравнению с элементами орбит, полученных на основании решения уравнений (4). Поскольку при создании DE405 движение больших планет рассчитывалось с помощью решения уравнений (4), путем сравнения элементов орбит планет, найденных с использованием решений уравнений (2) и (4), можно оценить точность полученных решений, представленных в каталоге DE405 в форме коэффициентов многочленов Чебышева.

На основании сравнения элементов орбит Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, полученных с помощью решения уравнений (2) и (4), найденные избыточные смещения вековых долгот перигелиев с использованием каталога DE405 составляют: $6.06''$, $3.83''$ и $1.01''$.

В заключение отметим основные результаты проведенных исследований:

- 1) использование гармонической системы координат в релятивистских уравнениях движения оправдано для Меркурия и для внешних планет: Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна и карликовой планеты Плутон;
- 2) показано, что использование релятивистских уравнений при создании DE405 для исследования движения планет Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, приводит к избыточному вековому смещению долгот перигелиев этих планет;
- 3) величины погрешностей координат и компонент скоростей Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, найденных с использованием DE405, находятся в прямой зависимости от погрешностей величин вековых смещений долгот перигелиев этих планет;
- 4) решение, полученное с помощью Ньютоновых уравнений для планет Венеры, барицентра Земли + Луны и Марса, не уступает по точности решению, найденному путем решения уравнений (4).

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Максвелл Дж. К. *Избранные сочинения по теории электромагнитного поля* / Классики естествознания. Т. 104. М.: Гостехиздат, 1952. 687 с.
2. Чеботарев Г. А. *Аналитические и численные методы небесной механики*. М., Л.: Наука, 1965. 368 с.
3. Субботин М. Ф. *Введение в теоретическую астрономию*. М.: Наука, 1968. 800 с.
4. Богородский А. Ф. *Всемирное тяготение*. Киев: Наук. думка, 1971. 352 с.
5. Брумберг В. А. *Релятивистская небесная механика*. М.: Наука, 1972. 384 с.
6. Визгин В. П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбергом (новые материалы) // *УФН*, 2001. Т. 171, № 12. С. 1347–1363. EDN: MPJJEZ. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0171.200112d.1347>.
7. Дирак П. *Принципы квантовой механики*. М.: Наука, 1979. 440 с.
8. Фейнман Р. Развитие пространственно-временной трактовки квантовой электродинамики // *УФН*, 1967. Т. 91, № 1. С. 29–48. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0091.196701c.0029>.
9. Casimir H. B. G., Polder D. The influence of retardation on the London-van der Waals forces // *Phys. Rev.*, 1948. vol. 73, no. 4. pp. 360–372. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.360>.
10. Зельдович Я. Б. Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии // *УФН*, 1981. Т. 133, № 3. С. 479–503. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0133.198103c.0479>.
11. Заусаев А. Ф. Теория движения n материальных тел, основанная на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. № 43. С. 132–139. EDN: HUYDOB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu463>.
12. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. *Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы*. М.: Машиностроение-1, 2008. 250 с. EDN: QJUWVV.
13. Заусаев А. Ф. Исследование движения планет, Луны и Солнца, основанное на новом принципе взаимодействия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 3(36). С. 118–131. EDN: TLEURX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
14. Заусаев А. Ф. Сопоставление координат больших планет, Луны и Солнца, полученных на основе нового принципа взаимодействия и банка данных DE405 // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1. С. 121–148. EDN: WQPYBB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1458>.
15. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. *Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе*. Самара: СамГТУ, 2017. 265 с.
16. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries // *Astron. Astrophys.*, 1983. vol. 125, no. 1. pp. 150–167.
17. Пуанкаре А. *О науке*. М.: Наука, 1983. 560 с.
18. Заусаев А. Ф., Романюк М. А. Сравнение различных математических моделей на примере решения уравнений движения больших планет и Луны // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 23, № 1. С. 152–185. EDN: BGRYUJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.

19. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*: DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26. 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
20. Грибкова В. П. *Эффективные методы равномерных приближений, основанные на полиномах Чебышева*. М.: Спутник, 2017. 194 с.
21. Montenbruck O., Pfleger T. *Astronomy on the Personal Computer*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000. xv+300 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03436-7>.
22. Хемминг Р. В. *Численные методы для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1972. 400 с.
23. Park R. S. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, 2020. https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html.
24. Le Verrier U. J. *Theorie du mouvement de Mercure* / *Annales de l'Observatoire imperial de Paris*. vol. 5: *Annales de l'Observatoire de Paris. Memoires*. Paris: Mallet-Bachelier, 1859. 195 pp.

MSC: 70F15, 70M20, 65L05

Comparison of the orbital elements of major planets, the Moon and the Sun using various mathematical models on the time interval with 1600 to 2200

A. F. Zausaev, M. A. Romanyuk

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

An analysis of the accuracy of the orbital elements obtained according to the coordinates and components of the velocities, found using the coefficients of the Chebyshev polynomials of the DE405 planetary catalog, is carried out. We compared the elements of orbital elements in the time interval from 1600 to 2200 years found using the DE405 catalog and obtained by numerical integration of the equations of motion based on the interaction of moving material bodies with the surrounding space. On the example of the numerical integration of the Moon motion equations, the advantage of using the equations of motion based on the interaction of moving material bodies with the surrounding space is shown in comparison with relativistic equations. Based on a comparison of the elements of Mercury's orbits, found by coordinates obtained by solving equations based on the interaction of moving material bodies with the surrounding space, and obtained using the DE405 catalog, it is shown that the orbital elements practically coincide on a given interval time. The maximum discrepancy in the mean anomaly at the end of the integration interval is less than $1''$ (second). The discrepancies of the secular displacements of perihelions for Mercury, Venus, Earth + Moon and Mars were determined, the values of which for DE405 are respectively: $43.08''$, $8.4''$, $3.83''$ and $1.14''$. It is shown that the errors of the secular displacements of the perihelions of the planets Mercury, Venus, the barycenter of the Earth + Moon and Mars obtained using the DE405 catalog take the following values: $0''$, $6.06''$, $3.83''$ and $1.08''$. For the outer

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of the orbital elements of major planets, the Moon and the Sun using various mathematical models on the time interval with 1600 to 2200, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 738–763. EDN: DVJGRH. DOI: [10.14498/vsgtu1888](https://doi.org/10.14498/vsgtu1888) (In Russian).

Authors' Details:

Anatoliy F. Zausaev  <https://orcid.org/0000-0002-5035-9615>Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: zausaev_af@mail.ru*Mariya A. Romanyuk*  <https://orcid.org/0000-0003-1352-6725>Cand. Tech. Sci.; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science;
e-mail: zausmasha@mail.ru

planets: Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune and the dwarf planet Pluto, on the basis of the considered comparisons of various equations of motion, no discrepancies in the orbital elements were found. Based on the studies carried out, it is shown that the use of harmonic coordinates in relativistic equations when creating the DE405 catalog is justified only for Mercury and the outer planets: Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune and the dwarf planet Pluto.

Keywords: orbital elements, numerical integration, differential equation of motion.

Received: 19th October, 2021 / Revised: 15th October, 2022 /

Accepted: 17th November, 2022 / First online: 6th December, 2022

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

References

1. Maxwell J. C. *Izbrannye sochineniia po teorii elektromagnitnogo polia* [Selected Papers on Electromagnetic Field Theory]. Moscow, Gostekhizdat, 1952, 687 pp. (In Russian)
2. Chebotarev G. A. *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics, vol. 9. New York, American Elsevier Publishing Co., Inc., 1967, xviii+331 pp.
3. Subbotin M. F. *Vvedenie v teoreticheskuiu astronomiiu* [Introduction to Theoretical Astronomy]. Moscow, Nauka, 1968, 800 pp. (In Russian)
4. Bogorodsky A. F. *Vsemirnoe tiagotenie* [Universal Gravitation]. Kiev, Nauk. Dumka, 1971, 352 pp. (In Russian)
5. Brumberg V. A. *Relativistskaia nebesnaia mekhanika* [Relativistic Celestial Mechanics]. Moscow, Nauka, 1972, 384 pp. (In Russian)
6. Vizgin V. P. On the discovery of the gravitational field equations by Einstein and Hilbert: new materials, *Phys. Usp.*, 2001, vol. 44, no. 12, pp. 1283–1298. EDN: LGQDQR. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU2001v044n12ABEH001014>.
7. Dirak P. *Printsipy kvantovoi mekhaniki* [The Principles of Quantum Mechanics]. Moscow, Nauka, 1979, 440 pp. (In Russian)
8. Feynman R. P. *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics*, Nobel Lecture, December 11, 1965. Preprint les Prix Nobel en 1965. Stockholm, The Nobel Foundation, 1966.
9. Casimir H. B. G., Polder D. The influence of retardation on the London-van der Waals forces, *Phys. Rev.*, 1948, vol. 73, no. 4, pp. 360–372. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.360>.
10. Zel'dovich Ya. B. Vacuum theory: a possible solution to the singularity problem of cosmology, *Sov. Phys. Usp.*, 1981, vol. 24, no. 3, pp. 216–230. DOI: <https://doi.org/10.1070/PU1981v024n03ABEH004772>.
11. Zausaev A. F. Theory of motion of n material bodies, based on a new interaction principle, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 132–139. EDN: HUYDOB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu463>.

12. Zausaev A. F., Zausaev A. A. *Matematicheskoe modelirovanie orbital'noi evoliutsii malyykh tel Solnechnoi sistemy* [Mathematical Modelling of Orbital Evolution of Small Bodies of the Solar System]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2008, 250 pp. (In Russian). EDN: QJUWVV.
13. Zausaev A. F. The investigation of the motion of planets, the Moon, and the Sun based on a new principle of interaction, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2014, no. 3(36), pp. 118–131 (In Russian). EDN: TLEURX. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1304>.
14. Zausaev A. F. Comparison of the coordinates of the major planets, Moon, and Sun obtained based on a new principle of interaction and of the data bank DE405, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 121–148. EDN: WQPYBB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1458>.
15. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. *Chislennyye metody v zadachakh matematicheskogo modelirovaniia dvizheniia nebesnykh tel v Solnechnoi sisteme* [Numerical Methods in the Problems of Mathematical Modeling of the Motion of Celestial Bodies in the Solar System]. Samara, Samara State Technical Univ., 2017, 265 pp. (In Russian)
16. Newhall X. X., Standish E M., Williams J. G. DE 102: A numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries, *Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 125, no. 1, pp. 150–167.
17. Poincaré J. H. *O nauke* [About Science]. Moscow, Nauka, 1983, 560 pp. (In Russian)
18. Zausaev A. F., Romanyuk M. A. Comparison of various mathematical models on the example of solving the equations of the movement of large planets and the Moon, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 152–185. EDN: BGRYUJ. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1663>.
19. Standish E. M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, DE405/LE405. Interoffice memorandum: JPL IOM 312. F-98-048, 1998, August 26, 18 pp. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/ioms/de405.iom.pdf>.
20. Gribkova V. P. *Effektivnyye metody ravnomernykh priblizhenii, osnovannyye na polinomakh Chebysheva* [Efficient Methods of Uniform Approximations Based on Chebyshev Polynomials]. Moscow, Sputnik, 2017, 194 pp. (In Russian)
21. Montenbruck O., Pfleger T. *Astronomy on the Personal Computer*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2000, xv+300 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03436-7>.
22. Khemming R. V. *Chislennyye metody dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Numerical Methods for Scientists and Engineers]. Moscow, Nauka, 1972, 400 pp. (In Russian)
23. Park R. S. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*, 2020. https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/eph_export.html.
24. Le Verrier U. J. *Theorie du mouvement de Mercure*, Annales de l'Observatoire imperial de Paris, vol. 5, Annales de l'Observatoire de Paris. Memoires. Paris, Mallet-Bachelier, 1859, 195 pp.



УДК 517.958:533.6.011.5

Решение задачи Дородницына–Ладыженского

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Статья посвящена строгому доказательству утверждения, что энтропия принимает максимальное значение на поверхности тела с затупленной носовой частью, обтекаемого сверхзвуковым потоком, при наличии плоскости симметрии течения. Это очевидно для тел вращения при нулевом угле атаки, а численными расчетами и экспериментально установлено при ненулевых углах атаки. Доказательство сводится к обоснованию того, что лидирующая линия тока (линия тока, пересекающая скачок по нормали) заканчивается на теле. Иными словами, лидирующая линия тока и линия торможения совпадают. Такое доказательство получено Г. Б. Сизых в 2019 году для общего пространственного случая (не только для течений с плоскостью симметрии). Это достаточно сложное доказательство основано на критерии Зоравского, опыт использования которого имеет лишь узкий круг специалистов, и опирается на предположение о непрерывности вторых производных плотности и давления. В настоящей статье для практически важного случая течений с плоскостью симметрии (в частности, обтекание тел вращения при ненулевом угле атаки) предлагается оригинальное простое доказательство, для которого достаточно непрерывности только первых производных полей плотности и давления и не требуется использования критерия Зоравского.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, изоэнтальпийные течения, завихренность, линия торможения, лидирующая линия тока, отошедший скачок уплотнения.

Получение: 29 августа 2022 г. / Исправление: 10 ноября 2022 г. /

Принятие: 17 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 30 ноября 2022 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)**Образец для цитирования**

Сизых Г. Б. Решение задачи Дородницына–Ладыженского // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 764–776. EDN: DWXCOH. DOI: [10.14498/vsgtu1951](https://doi.org/10.14498/vsgtu1951).

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: ol2o3@yandex.ru

Введение. В сборнике статей [1], посвященном сверхзвуковым течениям газа, опубликовано сообщение, в котором академик А. А. Дородницын пишет: «При нулевом угле атаки на поверхности тела вращения энтропия принимает максимальное значение. Многие расчеты и эксперименты показывают, что и при углах атаки, отличных от нуля, энтропия сохраняет свое максимальное значение с точностью, которая получена в этих расчетах или эксперименте. Однако никакого строгого доказательства этого факта нет». Тем самым была поставлена задача найти доказательство для обтекания тел вращения под углом атаки. В настоящей статье она называется задачей Дородницына—Ладыженского, так как в этом же сообщении А. А. Дородницын приводит одно доказательство, которое в разговоре ему сообщил М. Д. Ладыженский. Доказательство основано на двух предположениях:

- завихренность на поверхности тела непрерывно зависит от угла атаки;
- завихренность на поверхности тела вращения под нулевым углом атаки отлична от нуля (кроме точки торможения).

С использованием этих двух предположений выкладки М. Д. Ладыженского приводят к выводу о существовании некоторого ненулевого диапазона углов атаки, при которых энтропия на поверхности тела вращения будет оставаться максимальной. Предположение о непрерывной зависимости завихренности на поверхности тела вращения от угла атаки и отсутствие не только точного значения, но и каких-либо оценок упомянутого диапазона углов атаки означает, что вопрос был решен лишь частично.

При сверхзвуковом (число Маха $M > 1$) обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью возникает отошедший головной скачок. Если тело вращения расположено так, что ось симметрии параллельна скорости набегающего потока (нулевой угол атаки), то линия торможения AB , лежащая на этой оси (рис. 1, а), заканчивается на теле в точке торможения B (которую также называют передней критической точкой). При этом точка A расположена на скачке там, где касательная к скачку перпендикулярна скорости набегающего потока (такая точка называется лидирующей точкой скачка, а проходящая через нее линия тока — лидирующей линией тока или, для краткости, лидирующей линией). Поэтому параметры течения в точке B можно рассчитывать по параметрам набегающего потока. Для это-

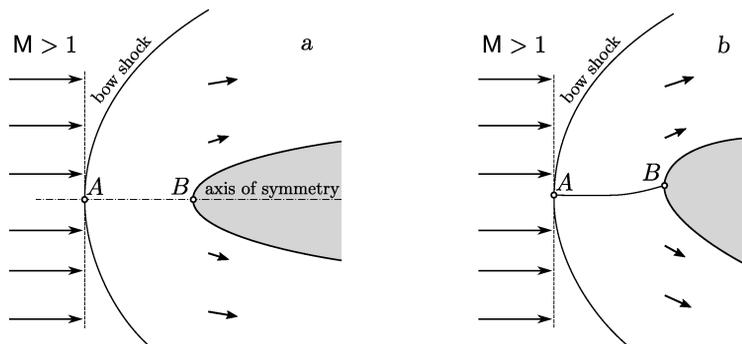


Рис. 1. Гладкая выпуклая носовая часть в сверхзвуковом потоке: а — осесимметричное обтекание; б — неосесимметричное обтекание

[Figure 1. Smooth convex nose in supersonic flow: a — axisymmetric flow; b — non-axisymmetric flow]

го достаточно использовать условия Ренкина—Гюгио на прямом скачке [2] в точке A и условие сохранения энтропии на линии торможения (энтропия сохраняется на любой линии тока в области, где нет скачков и разрывов). Хорошо известно [3, 4], что при одинаковых параметрах набегающего потока энтропия сразу за прямым скачком выше, чем за косым. Поскольку лидирующая точка есть единственная точка, где скачок является прямым, энтропия в течении за скачком принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела (последнее следует из того, что линия торможения растекается из точки B по поверхности тела).

Если угол атаки не нулевой, то энтропия сразу за скачком также максимальна в лидирующей точке. Поэтому в течении за скачком энтропия принимает максимальное значение на лидирующей линии тока. Следовательно, задача Дородницына—Ладыженского сводится к обоснованию того, что лидирующая линия заканчивается на теле. Другими словами, требуется доказать, что при углах атаки, отличных от нуля, при обтекании тел вращения лидирующая линия тока и линия торможения совпадают (рис. 1, b).

В. В. Сычев в 1968 году в предисловии к [1] замечает, что «проблема величины энтропии на поверхности тела вращения под углом атаки . . . вызывала в последние годы оживленные дискуссии». Несмотря на это, задача была решена в [5] только спустя пятьдесят лет, в 2019 году, причем не только для тел вращения, но и для тел с несимметричной, гладкой и выпуклой носовой частью.

Однако доказательство [5] изложено настолько кратко, что обоснованность в тексте некоторых шагов оказалась сложна для понимания. Поэтому позже автор [5] повторил в статье [6] это доказательство в развернутом виде с подробным обоснованием всех шагов. В итоге доказательство оказалось громоздким и, по существу, представляет собой некоторую теорию, состоящую из нескольких теорем. Кроме того, в этом доказательстве используется критерий Зоравского [7–9], который известен только узкому кругу специалистов. Поэтому возникла идея предложить более короткое и более простое доказательство без использования критерия Зоравского.

Большинство летательных аппаратов имеют вертикальную плоскость симметрии. При нулевом угле скольжения плоскостью симметрии обладает и поле течения. В частном случае обтекания тел вращения (случай задачи Дородницына—Ладыженского) течение обладает плоскостью симметрии (не обязательно вертикальной) при любых углах атаки и скольжения. Таким образом, течения с плоскостью симметрии представляют собой важный практический случай. Для таких течений удалось найти простое и короткое (по сравнению с [5, 6]) решение задачи о совпадении лидирующей линии тока и линии торможения, что, в частности, означает решение задачи Дородницына—Ладыженского. Ниже в настоящей статье приводится это решение. С теоретической точки зрения новизна состоит в том, что применение нового доказательства позволило ослабить требования к гладкости полей плотности и давления. Если в [5, 6] требовалась непрерывность вторых производных этих параметров, то для нового доказательства достаточно непрерывности первых производных.

Идеи, применяемые при доказательстве некоторых теорем, зачастую позволяют решать такие задачи, которые не решаются применением самих этих

теорем. Примером такой идеи служит преобразование Абеля, применяемое при доказательстве признака Дирихле сходимости рядов. Поэтому и в механике сплошной среды некоторые новые доказательства считаются новыми результатами. Например, в середине прошлого века в США были опубликованы новые, более простые доказательства [7] известных теорем Гельмгольца о вихрях и критерия Зоравского. Следуя этому примеру, автор настоящей статьи решил опубликовать новое, более простое решение задачи Дородницына–Ладыженского.

1. Обозначения и уравнения движения. Рассмотрим стационарное обтекание тела с гладкой выпуклой носовой частью, имеющего плоскость симметрии, однородным сверхзвуковым потоком идеального совершенного газа, скорость которого параллельна плоскости симметрии. Поскольку носовая часть гладкая и выпуклая, отошедший головной скачок уплотнения также будет иметь гладкую выпуклую форму. При этом ниже по течению могут находиться другие скачки уплотнения и тангенциальные разрывы.

Будем считать, что в течении существует ограниченная область G , замыкание \bar{G} которой расположено между головным скачком и носовой частью, обладающая следующими свойствами. Линия торможения AB , за исключением точки A на скачке и точки торможения B на теле, лежит внутри замкнутой области \bar{G} (рис. 2). При этом часть границы \bar{G} , лежащая на поверхности тела, представляет собой замыкание двумерной окрестности точки B , а часть границы, лежащая на скачке, представляет собой замыкание двумерной окрестности точки A . Оставшаяся же часть границы вместе с внутренними точками \bar{G} находится внутри зоны течения, в которой отсутствуют скачки, разрывы и другие точки торможения (кроме точки торможения B).

Введем следующие обозначения: \mathbf{V} – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$ – вектор завихренности. Для совершенного газа давление p и плотность ρ в замкнутой области \bar{G} связаны соотношением $p\rho^{-k} = \sigma$, где k – показатель адиабаты, σ – энтропийная функция. В силу отсутствия теплопередачи энтропийная функция не меняется вдоль линий тока, но может быть различной на различных линиях тока. Это свойство выражается уравнением $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\sigma = 0$.

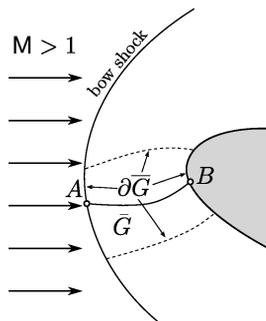


Рис. 2. Замкнутая область \bar{G} и ее граница $\partial\bar{G}$. Линия торможения, за исключением точек A и B , лежит внутри \bar{G}
 [Figure 2. Closed area \bar{G} and its boundary $\partial\bar{G}$. The stagnation line with the exception of points A and B lies inside \bar{G}]

2. Требования к гладкости параметров течения. Поскольку точки замкнутой области \bar{G} , за исключением граничных точек на скачке и на теле, являются внутренними точками зоны течения, в которой отсутствуют скачки и разрывы, будем считать, что в этих точках компоненты скорости \mathbf{V} являются дважды непрерывно дифференцируемыми, а ρ и p — непрерывно дифференцируемыми функциями пространственных координат. Кроме того, поскольку поверхности скачка и тела являются дважды непрерывно дифференцируемыми поверхностями, будем считать, что все параметры течения (\mathbf{V} , ρ и p) и их первые производные, а для компонент скорости — и вторые производные допускают непрерывное продолжение из внутренних точек замкнутой области \bar{G} как на поверхность скачка, так и на поверхность тела. Под значениями производных¹ на упомянутых поверхностях будем понимать их непрерывные продолжения из внутренних точек \bar{G} . Содержательность рассмотрения случая непрерывности вторых производных \mathbf{V} , в том числе в невыколотой окрестности точки B , подробно обоснована в [6].

3. Уравнения движения. Течение газа в замкнутой области \bar{G} подчиняется уравнению неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$. Полная энтальпия $i_0 = k(k-1)^{-1}(p/\rho) + \mathbf{V}^2/2$ не меняется при переходе через скачок. Набегающий поток однороден. Поэтому поле i_0 однородно ($\nabla i_0 = 0$) во всех точках течения, т.е. оно однородно до и после скачка. Такое течение называется изоэнергетическим. В этом случае стационарное уравнение Эйлера в форме Крокко [4, 10] записывается следующим образом:²

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \nabla \ln \sigma. \quad (1)$$

4. Скоростная альтернатива. Докажем следующее утверждение, которое верно без предположения о какой-либо симметрии.

СКОРОСТНАЯ АЛЬТЕРНАТИВА. Если на некотором отрезке (включая граничные точки отрезка) вихревой линии стационарного изоэнергетического течения идеального совершенного газа с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами скорости и с непрерывно дифференцируемыми плотностью и давлением завихренность не обращается в нуль, то либо весь отрезок вихревой линии состоит из точек торможения, либо во всех точках этого отрезка скорость газа отлична от нуля.

Доказательство. Представим уравнение (1) в виде

$$(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \times (\rho\mathbf{V}) = (k-1)^{-1} \nabla \ln \sigma.$$

Применение операции ротора к этому уравнению с использованием двух известных векторных тождеств $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}(\nabla\phi) \equiv 0$ и уравнения неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$ дает

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) - ((p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) - \rho\mathbf{V} \operatorname{div}(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) = 0.$$

¹Таким образом, предполагается непрерывность производных во всех точках замкнутой области \bar{G} , в том числе в точке B .

²См. приложение в конце статьи.

Поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} \equiv 0$, последнее слагаемое этого уравнения преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{V} \operatorname{div}(p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) &= \rho \mathbf{V}(p^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p^{-1}) = -\rho p^{-2} \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla p) = \\ &= -\rho p^{-1} \mathbf{V}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \ln p) = -\rho \mathbf{V}((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p), \end{aligned}$$

а само уравнение — к виду

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) - ((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V}((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p) = 0. \quad (2)$$

Во втором слагаемом представим завихренность в виде $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$, $|\mathbf{e}| = 1$, $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| > 0$, и запишем уравнение (2) следующим образом:

$$(\mathbf{e} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) = \frac{p}{\Omega} [(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) + \rho \mathbf{V}((p^{-1} \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p)]. \quad (3)$$

Пусть l — переменная длина дуги на рассматриваемом отрезке вихревой линии. Тогда на этой вихревой линии все параметры течения и их производные есть функции от l . Поэтому $(\mathbf{e} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) = \frac{d}{dl}(\rho \mathbf{V})$, а уравнение (3) представляется в виде линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (для компонент вектора $\rho \mathbf{V}$) с коэффициентами, зависящими от l :

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \end{pmatrix} = \frac{p}{\Omega} \begin{pmatrix} f + \partial(p^{-1} \Omega_x)/dx & \partial(p^{-1} \Omega_x)/dy & \partial(p^{-1} \Omega_x)/dz \\ \partial(p^{-1} \Omega_y)/dx & f + \partial(p^{-1} \Omega_y)/dy & \partial(p^{-1} \Omega_y)/dz \\ \partial(p^{-1} \Omega_z)/dx & \partial(p^{-1} \Omega_z)/dy & f + \partial(p^{-1} \Omega_z)/dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho V_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $f = p^{-1}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \ln p$, а нижние индексы обозначают компоненты векторов в произвольно выбранной прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$.

Коэффициенты матрицы зависят как от самих газодинамических функций, так и от их первых производных, и являются непрерывными (и ограниченными) функциями пространственных координат на рассматриваемом отрезке вихревой линии (поскольку из непрерывности $\boldsymbol{\Omega}$ и из условия $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| > 0$ следует ограниченность p/Ω на этом отрезке). Если считать коэффициенты матрицы заданными функциями переменной l , то матричное уравнение (4) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент вектора $\rho \mathbf{V}$, рассматриваемых как функции переменной l . Эта система линейна, а ее коэффициенты зависят от l , непрерывны по l и ограничены в ограниченной области (поскольку они непрерывны и ограничены как функции пространственных координат, которые в свою очередь непрерывны и ограничены как функции переменной l). Поэтому из теоремы существования и единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [11–13] следует, что на всем рассматриваемом отрезке линии тока либо $\rho \mathbf{V} \equiv 0$, либо $\rho \mathbf{V} \neq 0$. Скоростная альтернатива доказана. \square

Замечание 1. Рассмотрение в скоростной альтернативе именно отрезков вихревых линий существенно. Это связано с тем, что из условия $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| > 0$ для (открытого) интервала вихревой линии не следует ограниченность p/Ω на этом интервале.

Замечание 2. Сформулированные выше «требования к гладкости параметров течения» обосновывают векторные тождества, использованные выше при доказательстве. Кроме того, непрерывность вторых производных скорости означает непрерывность первых производных завихренности Ω , что в свою очередь позволяет так параметризовать векторную линию Ω , что пространственные координаты точек на этой линии будут непрерывно зависеть от параметра (в доказательстве это параметр l).

5. Завихренность в точке торможения. Точка торможения B (см. рис. 1) есть точка растекания газа. Поэтому энтропийная функция на поверхности тела равна своему значению в точке B и вектор $\nabla \ln \sigma$ ортогонален поверхности тела. Вместе с уравнением (1) это означает, что в точках поверхности тела, где $\mathbf{V} \neq 0$ (то есть всюду, кроме точки B), вектор Ω лежит в касательной к поверхности тела плоскости. Из непрерывности Ω следует, что в точке B вектор Ω также лежит в касательной к поверхности тела плоскости. Поэтому если предположить, что $\Omega(B) \neq 0$, то через точку B должен проходить отрезок вихревой линии (завихренность Ω на этом отрезке отлична от нуля), лежащий на поверхности тела. Но на такой линии есть точка торможения и точки со скоростью, отличной от нуля (все остальные точки отрезка), что противоречит скоростной альтернативе (см. предыдущий раздел). Поэтому предположение $\Omega(B) \neq 0$ приводит к противоречию. Следовательно, $\Omega(B) = 0$. Вывод о нулевой завихренности в точке торможения получен без использования свойств течения, вытекающих из существования плоскости симметрии. Этот промежуточный результат сам по себе представляет важное свойство трехмерных течений в окрестности точки торможения.

6. Течение с плоскостью симметрии. Далее будем рассматривать течение, в котором обтекаемое тело симметрично относительно некоторой плоскости, которая параллельна скорости однородного сверхзвукового набегающего потока \mathbf{V}_0 . Расположим прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость симметрии течения совпала с плоскостью Oxy , то есть с плоскостью $z = 0$. Введем обозначения: u , v и w — компоненты скорости газа \mathbf{V} в системе $Oxyz$; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные базисные векторы этой системы (\mathbf{k} направлен в положительном направлении оси z , а $\mathbf{V}_0 = u_0 \mathbf{i}$). В силу симметрии течение за скачком будет симметричным:

$$p(x, y, -z) = p(x, y, z), \quad \rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z), \quad (5)$$

$$u(x, y, -z) = u(x, y, z), \quad v(x, y, -z) = v(x, y, z), \quad (6)$$

$$w(x, y, -z) = -w(x, y, z) \quad (\Rightarrow w(x, y, 0) = 0). \quad (7)$$

7. Завихренность на линии торможения. В силу симметрии линия торможения и точка торможения лежат на плоскости симметрии $z = 0$. Упростим уравнение (2) для точек на плоскости симметрии (и для точек на линии торможения).

Из равенств (5)–(7) следует, что на плоскости симметрии выполняются шесть равенств: $\partial \rho / \partial z = \partial p / \partial z = \partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$. Поэтому на плоскости симметрии

$$\Omega(x, y, 0) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} =$$

$$= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Следовательно, на плоскости симметрии и на линии торможения $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, где $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$, и

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) = \Omega(\mathbf{k} \cdot \nabla) = \Omega \frac{\partial}{\partial z}.$$

Поэтому

$$(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla \ln p = p^{-1}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \ln p = p^{-1}\Omega \frac{\partial}{\partial z} \ln p = 0,$$

что означает равенство нулю последнего слагаемого (2).

Учитывая, что $\partial\rho/\partial z = \partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$, упростим второе слагаемое (2):

$$\begin{aligned} ((p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) &= p^{-1}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) = p^{-1}\Omega \frac{\partial}{\partial z}(\rho\mathbf{V}) = \\ &= p^{-1}\rho\Omega \frac{\partial}{\partial z}(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}) = \left(p^{-1}\rho\Omega \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Поскольку на плоскости симметрии $w(x, y, 0) = 0$, оператор

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

примененный на плоскости симметрии (где $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$) к вектору $p^{-1}\boldsymbol{\Omega}$, дает

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x}(p^{-1}\Omega) + v \frac{\partial}{\partial y}(p^{-1}\Omega)\right)\mathbf{k}.$$

Следовательно, первое слагаемое (2) на плоскости симметрии имеет вид

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\boldsymbol{\Omega}) = [\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\Omega)]\mathbf{k}.$$

В итоге получается, что векторное уравнение (2) на плоскости симметрии равносильно скалярному уравнению

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)(p^{-1}\Omega) - p^{-1}\rho\Omega \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

или

$$\rho p^{-1}(\mathbf{V} \cdot \nabla)\Omega - \Omega \rho p^{-2}(\mathbf{V} \cdot \nabla p) - \Omega \rho p^{-1} \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Во всех точках линии AB , кроме точки B , скорость \mathbf{V} отлична от нуля, и, следовательно, $\mathbf{V} = V\mathbf{e}$, где $\mathbf{e} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}|$, $V = |\mathbf{V}|$, $|\mathbf{e}| = 1$ (не путать с вектором \mathbf{e} в доказательстве скоростной альтернативы). В этих точках последнее уравнение равносильно уравнению $(\mathbf{e} \cdot \nabla)\Omega = \Omega(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z)$.

Если l — переменная длина дуги на линии AB (величина l отсчитывается от точки A), то последнее уравнение суть обыкновенное дифференциальное

уравнение для величины завихренности Ω , рассматриваемой как функция от l :

$$\frac{d}{dl}\Omega = \Omega(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z),$$

где множитель $(p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z)$ можно считать некоторой заданной функцией переменной l . Следовательно, для любой точки $C \neq B$, лежащей на линии AB ,

$$\Omega(C) = \Omega(A) \exp \{I(C)\}, \quad (8)$$

где $I(C) = \int_{AC} (p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z) dl$ — криволинейный интеграл вдоль линии AB от точки A до точки C . Подынтегральная функция есть сумма двух слагаемых. Первое слагаемое $p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p)$ ограничено, т.к. давление ограничено от нуля. При этом второе слагаемое $V^{-1}\partial w/\partial z$ может быть не ограничено в окрестности точки B , где $V = 0$. Передняя точка торможения B является точкой растекания. В некоторой пространственной окрестности точки B линии тока, проходящие рядом с линией торможения и находящиеся вне плоскости симметрии, также растекаются вблизи поверхности тела, удаляясь от плоскости симметрии. Поэтому из симметрии следует, что в некоторой пространственной окрестности точки B выполняются неравенства $w \leq 0$ при $z \leq 0$ и $w \geq 0$ при $z \geq 0$. Таким образом, в этой окрестности на линии AB выполняется неравенство $V^{-1}\partial w/\partial z \geq 0$. Это значит, что несобственный интеграл $I(B) = \int_{AB} (p^{-1}(\mathbf{e} \cdot \nabla p) + V^{-1}\partial w/\partial z) dl$ или сходится, или расходится к $+\infty$. Если предположить, что $\Omega(A) \neq 0$, то, согласно (8), случаю $I(B) = +\infty$ соответствует бесконечная завихренность в точке B (уравнение (8) верно на всей линии торможения, исключая точку B , но завихренность, как и остальные параметры течения, непрерывна на всей линии торможения без исключения). Это противоречит полученному выше выводу о нулевой завихренности в точке B . Поэтому или $\Omega(A) = 0$, или интеграл $I(B)$ сходится. В первом случае из (8) следует, что завихренность $\Omega = 0$ на всей линии торможения. Во втором случае $\Omega(B) = \lim_{C \rightarrow B} \Omega(C)$, где C приближается к B по линии торможения. То есть $\Omega(B) = \Omega(A) \exp I(B)$, где $0 < \exp I(B) < +\infty$. С учетом $\Omega(B) = 0$ снова приходим к выводу, что $\Omega(A) = 0$ и, согласно (8), завихренность $\Omega = 0$ на всей линии торможения. Это значит (см. уравнение (1)), что на всей линии торможения $\nabla\sigma \equiv 0$. Таким образом, получен следующий результат.

Завихренность Ω и градиент энтропийной функции $\nabla\sigma$ в течении с плоскостью симметрии равны нулю во всех точках линии торможения, включая точку ее начала на скачке ($\nabla\sigma(A) = 0$).

8. Завершение доказательства. Пусть A' — точка на скачке, в которой касательная к скачку плоскость перпендикулярна направлению набегающего потока (начало лидирующей линии тока за скачком, лидирующая точка скачка). Параметры течения на разных сторонах скачка связаны условиями на косом скачке уплотнения [3, 4]. Из этих условий и из того, что скачок имеет искривленную выпуклую форму, следует известное свойство, состоящее в том, что $\nabla\sigma$ на поверхности скачка (в течении за скачком) равен нулю только в точке A' . Итак, A' — единственная точка на скачке, где $\nabla\sigma = 0$,

а энтропия максимальна на линии тока, начинающейся в этой точке. Выше было показано, что $\nabla\sigma(A) = 0$. Поэтому точка A совпадает с точкой A' . Таким образом, приходим к основному результату (в формулировке опущены требования к гладкости, сформулированные в начале статьи).

В течениях идеального совершенного газа с отошедшим головным скачком при обтекании тел с гладкой выпуклой носовой частью при наличии плоскости симметрии течения линия торможения совпадает с лидирующей линией (то есть начинается там, где касательная к скачку плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока (см. рис. 1)), а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность на всей линии торможения равна нулю.

Закключение. Строго установлено, что при обтекании с отошедшим головным скачком тел с гладкой выпуклой носовой частью при наличии плоскости симметрии течения линия торможения совпадает с лидирующей линией, то есть начинается там, где касательная к скачку плоскость перпендикулярна скорости набегающего потока, а энтропия принимает максимальное значение на линии торможения и на поверхности тела. При этом завихренность на всей линии торможения равна нулю.

Доказательство проведено без использования критерия Зоравского и с минимальным требованием непрерывности только первых производных полей плотности и давления.

Приложение. Докажем, что векторное уравнение (1) в частном случае изоэнергетических ($\nabla i_0 = 0$) течений эквивалентно векторному уравнению Эйлера, записанному в классической форме

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p. \quad (9)$$

Используя известное векторное тождество $\nabla(\mathbf{a}^2) \equiv 2(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} + 2\mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{a}$, запишем уравнение Эйлера (9) в форме Громеки–Ламба $\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2)$. Далее выразим $\mathbf{V}^2/2$ через формулу для полной энтальпии $\mathbf{V}^2/2 = i_0 - k(k-1)^{-1}(p/\rho)$ и получим

$$\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla(i_0 - k(k-1)^{-1}(p/\rho))$$

или (поскольку $\nabla i_0 = 0$)

$$\Omega \times \mathbf{V} = -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}\nabla(p\rho^{-1}). \quad (10)$$

Таким образом, уравнение (10) есть уравнение Эйлера для изоэнергетических (постоянная полная энтальпия i_0) течений. Покажем эквивалентность уравнений (1) и (10). Для этого покажем, что правые части (1) и (10) равны.

Используя выражение для энтропийной функции $\sigma = p\rho^{-k}$ для правой части (1), имеем

$$\begin{aligned} k(k-1)^{-1}p\rho^{-1}\nabla \ln \sigma &= k(k-1)^{-1}p\rho^{-1}\nabla \ln(p\rho^{-k}) = \\ &= (k-1)^{-1}p\rho^{-1}(\nabla \ln p - k\nabla \ln \rho) = (k-1)^{-1}p\rho^{-1}(p^{-1}\nabla p - k\rho^{-1}\nabla \rho) = \\ &= (k-1)^{-1}\rho^{-1}\nabla p - k(k-1)^{-1}p\rho^{-2}\nabla \rho = \\ &= (-1 + 1 + (k-1)^{-1})\rho^{-1}\nabla p - k(k-1)^{-1}p\rho^{-2}\nabla \rho = \\ &= (-1 + k(k-1)^{-1})\rho^{-1}\nabla p - k(k-1)^{-1}p\rho^{-2}\nabla \rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}(\rho^{-1}\nabla p - p\rho^{-2}\nabla\rho) = \\
&= -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}(\rho^{-1}\nabla p + p\nabla(\rho^{-1})) = \\
&= -\rho^{-1}\nabla p + k(k-1)^{-1}\nabla(p\rho^{-1}).
\end{aligned}$$

В начале этой цепочки равенств находится правая часть уравнения (1), в конце — правая часть уравнения (10). Поэтому уравнение (1) есть уравнение Эйлера для изоэнергетических ($\nabla i_0 = 0$) стационарных течений идеального совершенного газа.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Ладыженский М. Д. *Пространственные гиперзвуковые течения газа*. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.
2. Крайко А. Н. *Краткий курс теоретической газовой динамики*. М.: МФТИ, 2007. 300 с. EDN: QJUNYN.
3. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
4. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow / Applied Mathematics and Mechanics*. vol. 3. New York, London: Academic Press, 1958. xiii+514 pp.
5. Сизых Г. Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 377–383. EDN: YGUKSX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
6. Сизых Г. Б. Решение задачи Дородницына // *Труды МФТИ*, 2022. Т. 14, № 4. С. 95–107. EDN: TNNYSF.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity / Indiana University Publications Science Series*. vol. 14. Bloomington: Indiana University Press, 1954. xvii+232 pp.
9. Фридман А. А. *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости*. Л.–М.: ОНТИ, 1934. 368 с.
10. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: University Press, 1970. xviii+615 pp.
11. Бибииков Ю. Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Высш. шк., 1991. 303 с. EDN: QJYUZF.
12. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.: Москов. унив., 1984. 296 с. EDN: QJLPYJ.
13. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982. 332 с.

MSC: 76N15

Solution of the Dorodnitsin–Ladyzhensky problem

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141700, Russian Federation.

Abstract

The article is devoted to a rigorous proof of the statement that entropy takes the maximum value on the surface of a body with a blunted nose, streamlined by a supersonic flow, in the presence of a plane of symmetry of the flow. This is obvious for bodies of rotation at zero angle of attack, and it is established by numerical calculations and experimentally at non-zero angles of attack. The proof boils down to the justification that the leading streamline (the current line crossing the shock along the normal) ends on the body. In other words, that the leading streamline and the stagnation line are coincide. Such a proof was obtained by G. B. Sizykh in 2019 for the general spatial case (not only for flows with a plane of symmetry). This rather complicated proof is based on the Zoravsky criterion, which only a narrow circle of specialists has experience using, and is based on the assumption of the continuity of the second derivatives of density and pressure. In this paper, for the practically important case of flows with a plane of symmetry (in particular, the flow around bodies of rotation at a non-zero angle of attack), an original simple proof is proposed, for which the continuity of only the first derivatives of the density and pressure fields is sufficient and it is not necessary to use the Zoravsky criterion.

Keywords: Euler equations, isenthalpic flows, vorticity, stagnation streamline, leading streamline, detached bow shock.

Received: 29th August, 2022 / Revised: 10th November, 2022 /Accepted: 17th November, 2022 / First online: 30th November, 2022

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sizykh G. B. Solution of the Dorodnitsin–Ladyzhensky problem, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 764–776. EDN: DWXCOH. DOI: [10.14498/vsgtu1951](https://doi.org/10.14498/vsgtu1951) (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;

e-mail: o1o2o3@yandex.ru

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author thanks the referee for careful reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Ladyzhenskii M. D. *Prostranstvennyye giperzvukovyye techeniya gaza* [Spatial Hypersonic Gas Flows]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 120 pp. (In Russian)
2. Kraiko A. N. *Kratkii kurs teoreticheskoi gazovoi dinamiki* [Short Course of Theoretical Gas Dynamics]. Moscow, MIPT, 2007, 300 pp. (In Russian). EDN: QJUHYN.
3. Sedov L. I. *A Course in Continuum Mechanics*, vol. 1, Basic Equations and Analytical Techniques. Groningen, The Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, xix+242 pp.
4. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. New York, London, Academic Press, 1958, xiii+514 pp.
5. Sizykh G. B. Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911. EDN: ZULUWJ. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462819070139>.
6. Sizykh G. B. Solution of the Dorodnitsin problem, *Proc. of MIPT*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 95–107 (In Russian). EDN: TNNYSF.
7. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
8. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*, Indiana University Publications Science Series, vol. 14. Bloomington, Indiana University Press, 1954, xvii+232 pp.
9. Friedman A. A. *Opyt gidromekhaniki szhimaemoi zhidkosti* [Experience of Hydromechanics of Compressible Fluid]. Leningrad, Moscow, ONTI, 1934, 368 pp. (In Russian)
10. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, University Press, 1970, xviii+615 pp.
11. Bibikov Yu. N. *Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [A Course in Ordinary Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1991, 303 pp. (In Russian). EDN: QJYUZF.
12. Petrovsky I. G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii* [Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1984, 296 pp. (In Russian). EDN: QJLPYJ.
13. Pontryagin L. S. *Ordinary Differential Equations*, Adiwes International Series in Mathematics. London, Paris, Pergamon Press, 1962, vi+298 pp.



УДК 539.376

Неодноосная ползучесть при сложном нагружении

Е. К. Кичаев, П. Е. Кичаев

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

На базе модели неполной обратимости деформации ползучести предложены определяющие уравнения для неодноосного напряженного состояния металлов при сложных путях нагружения. Предполагается независимое развитие тензоров вязкоупругой, вязкопластической и вязкой компонент деформации ползучести. Кинетика деформирования связывается с исходной и деформационной анизотропией. Мерой интенсивности ползучести исходно ортотропных материалов принято эквивалентное напряжение, введенное Хиллом. В этом случае не требуется подобие девиаторов напряжений и деформаций. Характер деформационной анизотропии связывается со значением вязкопластической компоненты деформации в направлении главных осей тензора напряжений. Предполагается суперпозиция исходной и деформационной анизотропии. Испытывались образцы из исходно изотропных материалов: из инструментальной стали ЗХВ4СФ по режимам ее работы в контейнерах для прессования алюминиевых сплавов; из жаропрочного сплава ЭИ437Б по условиям работы дисков и лопаток газотурбинных двигателей. Расчет реологических коэффициентов исходно изотропных материалов ЗХВ4СФ и ЭИ437Б производился по результатам одноосных испытаний на растяжение образцов при нескольких уровнях начальных напряжений. Проведен сравнительный анализ прогноза при сложном нагружении по предлагаемым уравнениям с результатами испытаний.

Ключевые слова: ползучесть металлов, изотропные материалы, одноосные испытания на растяжение, испытания на ползучесть при кручении, сложное нагружение.

Получение: 17 июня 2021 г. / Исправление: 12 октября 2022 г. /

Принятие: 17 ноября 2022 г. / Публикация онлайн: 26 декабря 2022 г.

Механика деформируемого твердого тела

Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Кичаев Е. К., Кичаев П. Е. Неодноосная ползучесть при сложном нагружении // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 777–788. EDN: FUAAMA. DOI: [10.14498/vsgtu1868](https://doi.org/10.14498/vsgtu1868).

Сведения об авторах

Кичаев Евгений Константинович  <https://orcid.org/0000-0003-0577-2889>

кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. механики; e-mail: mechanika01@yandex.ru

Кичаев Петр Евгеньевич  <https://orcid.org/0000-0001-7321-389X>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. механики;

e-mail: kichaevp@yandex.ru

Введение. Практически все публикации, посвященные построению определяющих уравнений ползучести и длительной прочности металлических материалов, не учитывают обратимую компоненту деформации ползучести при полной разгрузке. Однако для многих материалов обратимая деформация является существенной и ее необходимо учитывать при решении соответствующих краевых задач [1, 2]. Поэтому необходима разработка реологических моделей с учетом частичной обратимости деформации ползучести после разгрузки. Одна из первых моделей такого типа в пределах первых двух стадий ползучести была предложена Ю. П. Самариним [1] и далее обобщена на случай третьей стадии ползучести в работах [2–4] и многих других. Отдельно эта проблема стоит в условиях сложного напряженного состояния применительно к условиям исходной анизотропии характеристик деформации ползучести и приобретенной деформационной анизотропии в процессе нагружения. Поэтому целью настоящей работы является построение моделей ползучести в пределах первых двух стадий для сталей ЗХВ4СФ и ЭИ437Б в условиях одноосного и сложного напряженных состояний, которые учитывают обратимость деформации ползучести при полной разгрузке образцов.

1. Определяющие соотношения для тел исходно изотропных. Простейшие феноменологические теории полагают, что материал исходно изотропен, интенсивность деформирования определяется критерием Мизеса. Упрочнение или разупрочнение изотропно, а тензоры скоростей деформации и напряжения соосны и их девиаторы подобны [5, 6]. В дальнейшем используется декартова система координат. Вводятся понятия интенсивности скоростей деформации ползучести

$$\dot{p}_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{p}_x - \dot{p}_y)^2 + (\dot{p}_y - \dot{p}_z)^2 + (\dot{p}_z - \dot{p}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2 + \dot{\gamma}_{zx}^2)}$$

и интенсивности напряжений

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

где используются стандартные обозначения нормальных и диагональных компонент тензоров напряжений и деформаций.

Принимается гипотеза, что в стандартной индексной записи \dot{p}_3 с точностью до множителя совпадает со вторым инвариантом тензора скоростей деформации и является функцией только интенсивности напряжений σ_3 , температуры и параметров, отображающих историю процесса деформирования. В предположении, что материал несжимаем, используется соотношение в индексной форме записи

$$\dot{p}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_3}{\sigma_3} \bar{\sigma}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{dA}{\sigma_3^2} \sigma_{ij}, \quad (1)$$

где \dot{p}_{ij} — тензор скоростей деформации; $\bar{\sigma}_{ij}$ — девиатор напряжений; $dA = \dot{p}_{ij} \sigma_{ij}$ — мощность рассеяния (смешанный инвариант тензоров скоростей деформации и напряжений). Подобный подход именуется техническими теориями ползучести (старения, течения, упрочнения и др.) [5–7].

Экспериментальные данные по ползучести металлов для сложного напряженного состояния и сложных путей нагружения отличаются от прогноза по

(1) (см., например, [6, 8–11]). В то же время простота выражения (1) совместно с теорией неполной обратимости деформации ползучести [1] позволяет улучшить прогноз кинетики деформирования. Основные гипотезы модели неполной обратимости деформации ползучести [1, 3, 4, 8, 12]:

- 1) тензор деформации ползучести p_{ij} является аддитивной составляющей трех независимых тензоров:

$$p_{ij} = w_{ij} + v_{ij} + u_{ij},$$

где w_{ij} , v_{ij} , u_{ij} — вязкопластическая, вязкая и вязкоупругая составляющие тензора ползучести соответственно;

- 2) тензор скоростей вязкой составляющей определяется текущим значением тензора напряжения

$$\dot{w}_{ij}(t) = \varphi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}(t));$$

- 3) вязкоупругая составляющая описывается нелинейным уравнением наследственности:

$$u_{ij}(t) = \int_0^t h(t - \tau) d\psi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}(\tau)), \quad (2)$$

где функция влияния $h(t)$ [5–7, 12] принята в экспоненциальном виде:

$$h(t) = \sum_{k=1}^n a_k (1 - e^{-\lambda_k t}), \quad a_k > 0, \quad \lambda_k > 0; \quad (3)$$

для (2) с учетом (3) можно записать следующую эквивалентную дифференциальную зависимость:

$$u_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n u_{ij}^k(t), \quad \dot{u}_{ij}^k(t) = \lambda_k [a_k \psi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}(t)) - u_{ij}^k(t)],$$

где $u_{ij}^k(0) = 0$;

- 4) тензор вязкопластической составляющей деформации ползучести при знакопостоянных напряжениях подчиняется принципу суперпозиции с запретом отрицательных скоростей:

$$v_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n v_{ij}^k(t),$$

$$v_{ij}^k(t) = \begin{cases} \nu_k [b_k \Phi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}(t) - v_{ij}^k(t))], & [b_k \Phi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}(t) - v_{ij}^k(t))] \geq 0, \\ 0, & [b_k \Phi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}(t) - v_{ij}^k(t))] < 0; \end{cases}$$

для $v_{ij}^k(t)$ также можно записать аналогичные (2) и (3) уравнения с функцией влияния

$$q(t) = \sum_{k=1}^n b_k (1 - e^{-\nu_k t}), \quad b_k > 0, \quad \nu_k > 0,$$

но с запретом на отрицательные скорости деформации ползучести.

Для исходно изотропных материалов функции напряжений φ_{ij} , ψ_{ij} , Φ_{ij} соответствуют условию течения Мизеса, т.е. они являются функциями интенсивности напряжений для соответствующей компоненты деформации ползучести: $\varphi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}) = \varphi(\sigma_{\alpha})$, $\psi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}) = \psi(\sigma_{\alpha})$, $\Phi_{ij}(\sigma_{\alpha\beta}) = \Phi(\sigma_{\alpha})$.

Поскольку на первой стадии ползучести для большинства материалов кривые ползучести при различных постоянных напряжениях подобны, предполагается, что $q(t) = h(t)$, т.е. $a_k = b_k$, $\lambda_k = \nu_k$. Для функций $\varphi(\sigma_{\alpha})$, $\psi(\sigma_{\alpha})$ и $\Phi(\sigma_{\alpha})$ используются степенные аппроксимации:

$$\varphi(\sigma_{\alpha}) = C\sigma_{\alpha}^m, \quad \psi(\sigma_{\alpha}) = (1 - K)B\sigma_{\alpha}^n, \quad \Phi(\sigma_{\alpha}) = KB\sigma_{\alpha}^n, \quad 0 \leq K \leq 1,$$

где B , C , m , n , K , а также a_k , λ_k — подлежащие определению параметры. Порядок и схема определения этих параметров по результатам испытаний на ползучесть при не менее чем двух уровнях начальных напряжений хорошо известен и приведен в работах [1, 3, 4, 12, 13].

При сложном нагружении, когда главные оси тензора напряжений поворачиваются, математическая модель не учитывает направленность деформационной анизотропии.

В настоящей работе тензор вязкопластической деформации рассматривается в направлении главных осей текущего тензора напряжений, также предполагается их соосность. Накопление деформации в направлении этих осей описывается следующими соотношениями:

$$v_j(t) = \sum_{k=1}^n v_j^k(t), \quad v_j^k(0) = 0; \tag{4}$$

$$\dot{v}_j^k(t) = \begin{cases} \nu_k [b_k \Phi(\sigma_j(t) - v_j^k(t))], & [b_k \Phi(\sigma_j(t) - v_j^k(t))] \geq 0, \\ 0, & [b_k \Phi(\sigma_j(t) - v_j^k(t))] < 0, \end{cases}$$

где индекс j соответствует главным осям тензора напряжений.

Модель (4) позволяет объяснить следующие особенности деформирования при сложном характере нагружения тонкостенных трубчатых образцов (растяжение + кручение) [8]:

- 1) влияние предварительного растяжения на интенсивность последующего кручения;
- 2) укорочение при чистом кручении предварительно растянутого образца;
- 3) увеличение скорости осевой деформации при постоянном растяжении и реверсе кручения.

2. Адекватность модели (4) экспериментальным данным. Используя принцип суперпозиции компонент деформации ползучести, функции φ , ψ , Φ можно вводить независимо от того, является ли материал исходно изотропным или анизотропным. И если они определялись по кривым ползучести при различных видах напряженного состояния, то характер исходной анизотропии учитывается автоматически.

В настоящей работе проведены исследования на ползучесть тонкостенных трубчатых образцов из инструментальной стали 3ХВ4СФ и жаропрочного сплава ЭИ437Б при действии на них растяжения (σ) и кручения (τ), при

этом, согласно критерию Мизеса,

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

— интенсивность напряжений, а

$$p_3 = \sqrt{p^2 + \gamma^2/3}$$

— интенсивность деформаций ползучести; p и γ — осевая и угловая компоненты деформации.

Образцы из стали 3ХВ4СФ испытывались при температуре 425 °С (это средняя температура в контейнерах для прессования алюминиевых сплавов), из сплава ЭИ437Б — при температуре 800 °С (эта температура соответствует условиям работы дисков и лопаток газотурбинных двигателей). Нагрузка выбиралась так, чтобы возникающие напряжения были ниже предела текучести. Длительность испытаний ограничивалась получением гарантированного участка установившейся ползучести. Изотропность и однородность образцов обеспечивалась их предварительным отжигом.

Реологические параметры определялись на основе кривых ползучести, полученных при испытании образцов на одноосное растяжение ($\sigma_3 = \sigma$ — напряжение при растяжении, $p_3 = p$ — осевая деформация ползучести).

Осредненные (экспериментальные) кривые ползучести по результатам испытаний 8 образцов представлены на рис. 1 сплошными линиями, а аппроксимирующие функции приведены в табл. 1. Расчетные кривые на рис. 1 изображены штриховыми линиями.

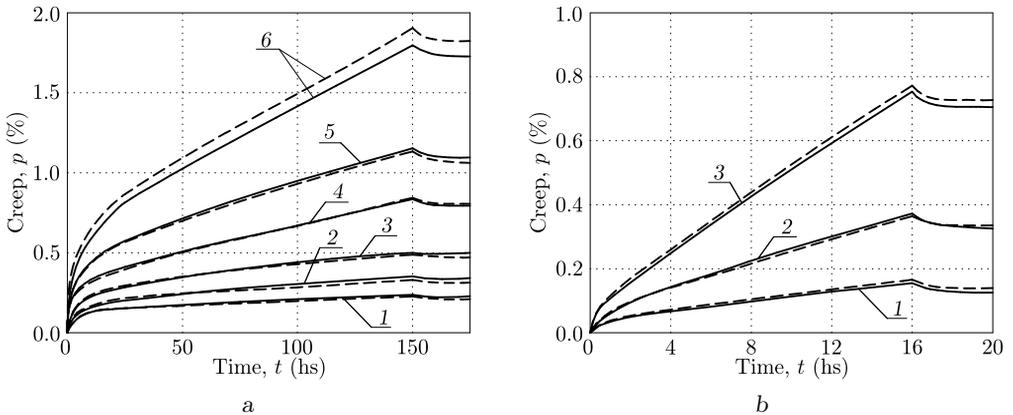


Рис. 1. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые одноосной ползучести образцов из стали 3ХВ4СФ (а) и сплава ЭИ437Б (б) при заданных начальных напряжениях (а: 1 — $\sigma_3 = 200$ МПа, 2 — $\sigma_3 = 225$ МПа, 3 — $\sigma_3 = 250$ МПа, 4 — $\sigma_3 = 275$ МПа, 5 — $\sigma_3 = 300$ МПа, 6 — $\sigma_3 = 325$ МПа; б: 1 — $\sigma_3 = 120$ МПа, 2 — $\sigma_3 = 160$ МПа, 3 — $\sigma_3 = 200$ МПа)

[Figure 1. Experimental (solid lines) and calculated (dashed lines) uniaxial creep curves for samples made of 3KhV4SF steel (a) and EI437B alloy (b) at given initial stresses (a: 1 — $\sigma_3 = 200$ МПа, 2 — $\sigma_3 = 225$ МПа, 3 — $\sigma_3 = 250$ МПа, 4 — $\sigma_3 = 275$ МПа, 5 — $\sigma_3 = 300$ МПа, 6 — $\sigma_3 = 325$ МПа; б: 1 — $\sigma_3 = 120$ МПа, 2 — $\sigma_3 = 160$ МПа, 3 — $\sigma_3 = 200$ МПа). In all experiments, samples from 3KhV4SF steel were tested at a temperature of 425 °С, from EI437B alloy were tested at a temperature of 800 °С]

Вид аппроксимирующих функций [Structure of approximating functions]

Functions	3KhV4SF steel	EI437B alloy
$h(t)$	$0.63(1 - \exp(-0.08t)) + 0.37(1 - \exp(-0.8t))$	$1 - \exp(-0.4t)$
$\varphi(\sigma_3)$	$0.0005(\sigma_3/200)^{5.55}$	$0.044894(\sigma_3/200)^{3.6}$
$\psi(\sigma_3)$	$0.0149(\sigma_3/200)^{2.85}$	$0.068(\sigma_3/200)^{2.65}$
$\Phi(\sigma_3)$	$0.1358(\sigma_3/200)^{2.85}$	$0.0757(\sigma_3/200)^{2.65}$

Данные рис. 1 и табл. 1 показывают, что для стали ЗХВ4СФ неустановившийся первый участок ползучести состоит в основном из вязкопластической компоненты, а для сплава ЭИ437Б — из вязкоупругой.

Адекватность модели, построенной по теории неполной обратимости деформации ползучести, оценивалась при одноосном ступенчатом нагружении. На рис. 2 сплошными линиями показаны усредненные деформации ползучести $p(t)$ по результатам испытаний трех образцов для стали ЗХВ4СФ и сплава ЭИ437Б, штриховыми линиями — расчет по предлагаемой модели. Приведенные экспериментальные и расчетные данные показывают, что построенная модель удовлетворительно описывает ее первую и вторую стадию при переменных одноосных напряжениях.

На рис. 3 показаны усредненные углы закручивания $\gamma(t)$ при чистом кручении по результатам испытаний 5 образцов, сплошными линиями — расчет по предлагаемой модели. Видим, что для рассматриваемых исходно изотропных материалов соблюдается условие течения Мизеса.

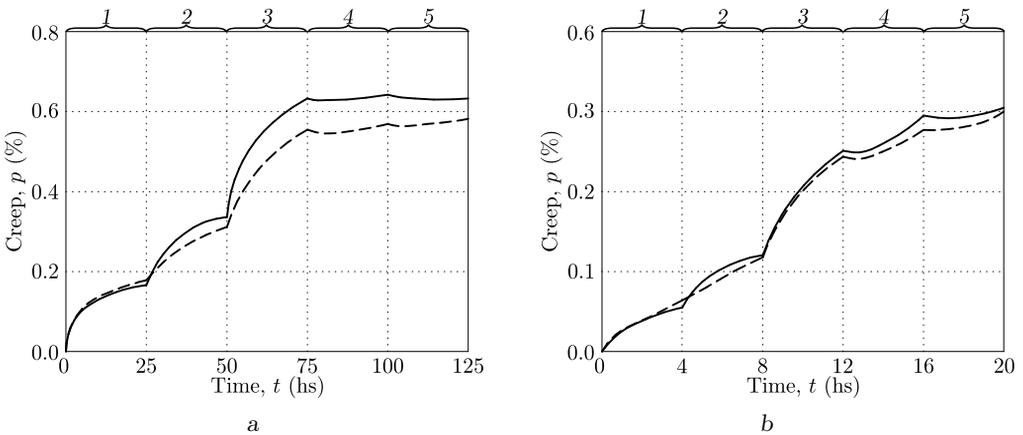


Рис. 2. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести образцов из стали ЗХВ4СФ (а) и сплава ЭИ437Б (б) при одноосном ступенчатом нагружении (а: 1 — $\sigma_3 = 200$ МПа, 2 — $\sigma_3 = 241$ МПа, 3 — $\sigma_3 = 282$ МПа, 4 — $\sigma_3 = 241$ МПа, 5 — $\sigma_3 = 200$ МПа; б: 1 — $\sigma_3 = 120$ МПа, 2 — $\sigma_3 = 145$ МПа, 3 — $\sigma_3 = 170$ МПа, 4 — $\sigma_3 = 145$ МПа, 5 — $\sigma_3 = 120$ МПа)

[Figure 2. Experimental (solid lines) and calculated (dashed lines) creep curves for samples made of 3KhV4SF steel (a) and EI437B alloy (b) under uniaxial stepped loading (a: 1 — $\sigma_3 = 200$ MPa, 2 — $\sigma_3 = 241$ MPa, 3 — $\sigma_3 = 282$ MPa, 4 — $\sigma_3 = 241$ MPa, 5 — $\sigma_3 = 200$ MPa; b: 1 — $\sigma_3 = 120$ MPa, 2 — $\sigma_3 = 145$ MPa, 3 — $\sigma_3 = 170$ MPa, 4 — $\sigma_3 = 145$ MPa, 5 — $\sigma_3 = 120$ MPa)

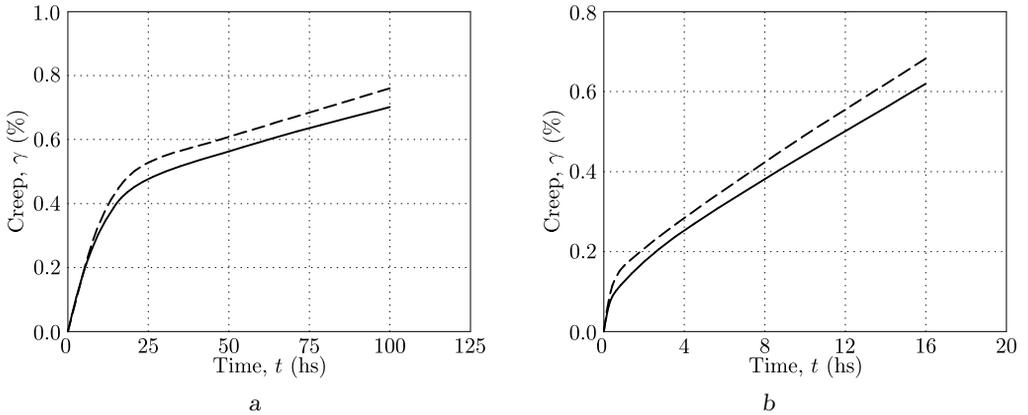


Рис. 3. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести образцов (кривые угла закручивания) из стали 3ХВ4СФ (а) и сплава ЭИ437В (b) при кручении: а – $\tau = 144.5$ МПа, б – $\tau = 92.5$ МПа

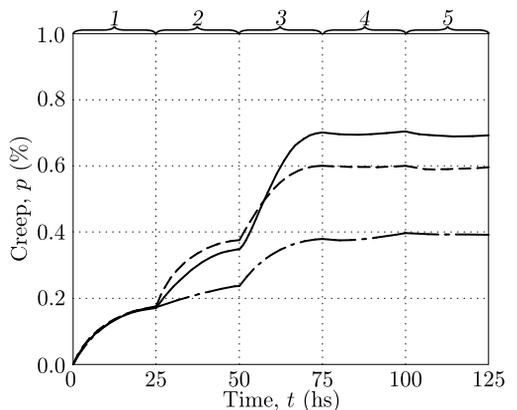
[Figure 3. Experimental (solid lines) and calculated (dashed lines) creep curves (torsion angle curves) for samples made of 3KhV4SF steel (a) and EI437B alloy (b) during torsion: а – $\tau = 144.5$ MPa, б – $\tau = 92.5$ MPa

В реальных конструкциях поле напряжений, как правило, является неоднородным. Картина может значительно усложняться при сложном нагружении, когда главные оси тензора напряжений поворачиваются.

Оценка характера деформирования при сложном неодносном нагружении производилась по результатам испытаний образцов, нагруженных ступенчатыми осевой силой и крутящим моментом (см. рис. 4–7).

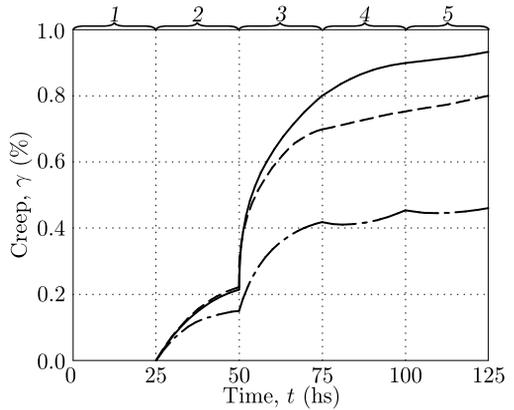
На рис. 4, 5 для стали 3ХВ4СФ, начальный участок которой в основном состоит из вязкопластической компоненты, сплошной линией представлены результаты испытаний, штрих-пунктирными линиями – результаты расчетов при условии подобия девиаторов (1), штриховыми линиями – результаты по предложенной модели. Результаты расчетов показывают, что при условии подобия девиаторов (1) наблюдается значительное расхождение расчетных

Рис. 4. Кривые ползучести (осевая деформация) образцов из стали 3ХВ4СФ при ступенчатом растяжении с кручением: 1 – $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2 – $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 78$ МПа; 3 – $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 115$ МПа; 4 – $\sigma = 136$ МПа, $\tau = 115$ МПа; 5 – $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 115$ МПа; сплошная линия – эксперимент; штрих-пунктирная линия – расчет в предположении подобия девиаторов (1); штриховая линия – расчет по предложенной модели



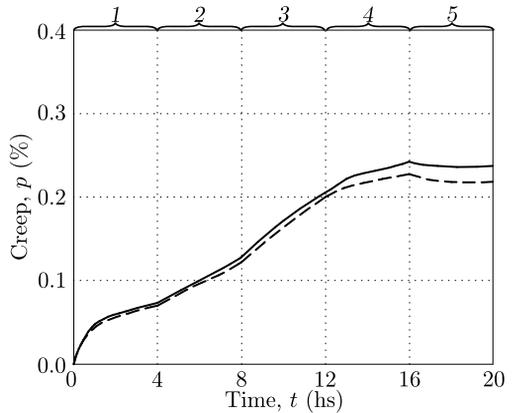
[Figure 4. Creep curves (axial deformation) of samples made of 3KhV4SF steel under step tension with torsion: 1 – $\sigma = 200$ MPa, $\tau = 0$ MPa; 2 – $\sigma = 200$ MPa, $\tau = 78$ MPa; 3 – $\sigma = 200$ MPa, $\tau = 115$ MPa; 4 – $\sigma = 136$ MPa, $\tau = 115$ MPa; 5 – $\sigma = 0$ MPa, $\tau = 115$ MPa; solid line – experimental data; dash dotted line – calculation assuming similarity of deviators (1); dashed line – calculation according to the proposed model

Рис. 5. Кривые ползучести (угол закручивания) образцов из стали 3ХВ4СФ при ступенчатом растяжении с кручением: 1— $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2— $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 78$ МПа; 3— $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 115$ МПа; 4— $\sigma = 136$ МПа, $\tau = 115$ МПа; 5— $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 115$ МПа; сплошная линия — эксперимент; штрих-пунктирная линия — расчет в предположении подобия девиаторов (1); штриховая линия — расчет по предложенной модели



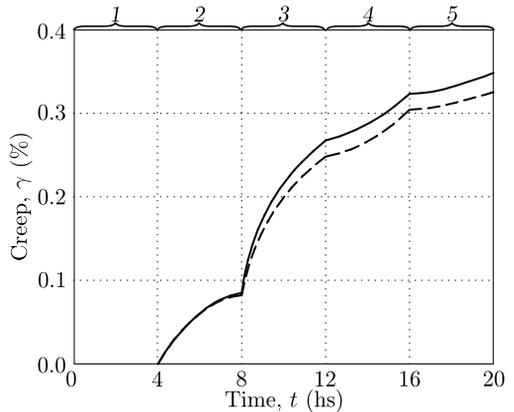
[Figure 5. Creep curves (torsion angle) of samples made of 3KhV4SF steel under step tension with torsion: 1— $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2— $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 78$ МПа; 3— $\sigma = 200$ МПа, $\tau = 115$ МПа; 4— $\sigma = 136$ МПа, $\tau = 115$ МПа; 5— $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 115$ МПа; solid line — experimental data; dash dotted line — calculation assuming similarity of deviators (1); dashed line — calculation according to the proposed model

Рис. 6. Кривые ползучести (осевая деформация) образцов из сплава ЭИ437Б при ступенчатом растяжении с кручением: 1— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 47$ МПа; 3— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 4— $\sigma = 81$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 5— $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; сплошная линия — эксперимент; штриховая линия — расчет по предложенной модели



[Figure 6. Creep curves (axial deformation) of samples made of EI437B alloy under step tension with torsion: 1— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 47$ МПа; 3— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 4— $\sigma = 81$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 5— $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; solid line — experimental data; dashed line — calculation according to the proposed model

Рис. 7. Кривые ползучести (угол закручивания) образцов из сплава ЭИ437Б при ступенчатом растяжении с кручением: 1— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 47$ МПа; 3— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 4— $\sigma = 81$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 5— $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; сплошная линия — эксперимент; штриховая линия — расчет по предложенной модели



[Figure 7. Creep curves (torsion angle) of samples made of EI437B alloy under step tension with torsion: 1— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 0$ МПа; 2— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 47$ МПа; 3— $\sigma = 120$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 4— $\sigma = 81$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; 5— $\sigma = 0$ МПа, $\tau = 69.5$ МПа; solid line — experimental data; dashed line — calculation according to the proposed model

значений от экспериментальных, а расчеты по предложенной модели дают меньшую величину расхождения и их можно считать удовлетворительными.

Для сплава ЭИ437Б, у которого начальный участок состоит на 90% из вязкоупругой компоненты деформации, также наблюдается удовлетворительное совпадение результатов испытаний (сплошные линии, рис. 6, 7) с расчетами по предложенной модели (штриховые линии, рис. 6, 7).

По представленной серии экспериментальных и расчетных данных можно сделать следующие выводы:

- 1) при одноосных ступенчатых напряжениях модель неполной обратимости деформации адекватно описывает ползучесть преимущественно с учетом вязкопластической компоненты (для стали ЗХВ4СФ) и вязкоупругой (для сплава ЭИ437Б);
- 2) для исходно изотропных материалов при плоском напряженном состоянии соблюдается условие течения Мизеса;
- 3) при сложном характере нагружения на исходное состояние материала накладывается деформационная анизотропия, зависящая от накопленной вязкопластической деформации в направлении главных осей тензора напряжений.

Заключение.

1. Предлагаемая реологическая модель учитывает исходную и деформационную анизотропию металлов, полагая, что имеет место их суперпозиция.
2. Параметры исходной анизотропии при решении краевых задач на первой итерации определяются по результатам механических испытаний.
3. Приведенные экспериментальные результаты ползучести тонкостенных трубчатых образцов из материалов ЗХВ4СФ и ЭИ437Б при их сложном нагружении растяжением и кручением удовлетворительно согласуются с результатами расчетов по предлагаемой модели.

Авторский вклад и ответственность. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторская ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Самарин Ю. П. *Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами*. Куйбышев: Куйб. госуниверситет, 1979. 84 с.
2. Радченко В. П., Самарин Ю. П., Хренов С. М. Определяющие уравнения для материалов при наличии трех стадий ползучести // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 288, № 3. С. 571–574. EDN: FZHUKUQ.
3. Радченко В. П., Еремин Ю. А. *Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций*. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с. EDN: QNATSX.
4. Радченко В. П., Кичаев П. Е. *Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов*. Самара: СамГТУ, 2011. 157 с. EDN: QNAGXB.
5. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.

6. Малинин Н. Н. *Ползучесть в обработке металлов*. М.: Машиностроение, 1986. 216 с. EDN: **XXLGDN**.
7. Локощенко А. М., Шестериков С. А. и др. *Закономерности ползучести и длительной прочности: справочник* / ред. С. А. Шестериков. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
8. Самарин Ю. П., Кичаев Е. К. Особенности ползучести металлов при растяжении с реверсируемым кручением / *Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии*. Киев: Наук. думка, 1977. С. 224–238.
9. Кичаев Е. К., Файн Г. М. Ползучесть бурильных труб из сплава Д16Т в условиях сверхглубокого бурения / *Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии*. Киев: Наук. думка, 1978. С. 232–237.
10. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium // *Appl. Math. Model.*, 2018. vol. 60. pp. 478–489. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031>.
11. Wen J.-F., Tu S.-T., Xuan F.-Z., Zhang X.-W., Gao X.-L. Effects of stress level and stress state on creep ductility: Evaluation of different models // *J. Mater. Sci. Techn.*, 2016. vol. 32, no. 8. pp. 695–704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2016.02.014>.
12. Радченко В. П., Саушкин М. Н. *Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях*. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с. EDN: **RXLJLN**.
13. Самарин Ю. П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // *Пробл. прочности*, 1974. №9. С. 24–27.

MSC: 74D10

The non-uniaxial creep under complex loading

E. K. Kichaev, P. E. Kichaev

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

Based on the model of incomplete reversibility of creep deformation, constitutive equations for the non-uniaxial stress state of metals under complex loading paths are proposed. The tensors of the viscoelastic, viscoplastic, and viscous components of the creep deformation are assumed to develop independently. The deformation kinetics is associated with the initial and deformation anisotropy. The measure of creep intensity for initially orthotropic materials is the equivalent stress introduced by Hill. In this case, the similarity of the stress and strain deviators is not required. The nature of the anisotropy of the deformation is associated with the value of the viscoplastic component of the deformation in the direction of the principal axes of the stress tensor. A superposition of the initial and deformation anisotropy is assumed. Samples made of 3KhV4SF tool steel and EI437B heat resistant alloy were tested, which are initially isotropic materials. The rheological coefficients of 3KhV4SF steel and EI437B alloy were calculated from the results of the uniaxial tension test samples at various levels of initial stresses. A comparative analysis of the forecast under complex loading according to the proposed equations with the test results was carried out.

Keywords: creep of metals, isotropic materials, uniaxial tensile tests, torsion creep tests, complex loading.

Received: 17th June, 2021 / Revised: 12th October, 2022 /Accepted: 17th November, 2022 / First online: 26th December, 2022

Mechanics of Solids

Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kichaev E. K., Kichaev P. E. The non-uniaxial creep under complex loading, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 777–788. EDN: FUAAMA. DOI: [10.14498/vsgtu1868](https://doi.org/10.14498/vsgtu1868) (In Russian).

Authors' Details:

Evgeny K. Kichaev  <https://orcid.org/0000-0003-0577-2889>

Cand. Tech. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mechanics;

e-mail: mechanika01@yandex.ru*Peter E. Kichaev*  <https://orcid.org/0000-0001-7321-389X>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Mechanics;

e-mail: kichaevp@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

References

1. Samarin Yu. P. *Uravneniia sostoianiiia materialov so slozhnymi reologicheskimi svoistvami* [Equation of State of Materials with Complex Rheological Properties]. Kuibyshev, Kuibyshev State Univ., 1979, 84 pp. (In Russian)
2. Radchenko V. P., Samarin Yu. P., Khrenov S. M. Determining equations for the materials in the presence of three stages of creep, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 288, no. 3, pp. 571–574 (In Russian). EDN: [FZHKUQ](#).
3. Radchenko V. P., Eremin Yu. A. *Reologicheskoe deformirovanie i razrushenie materialov i elementov konstruktssii* [Rheological Deformation and Fracture of Materials and Structural Elements]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2004, 264 pp. (In Russian). EDN: [QNATXS](#).
4. Radchenko V. P., Kichaev P. E. *Energeticheskaiia kontseptsiiia polzuchesti i vibropolzuchesti metallov* [Energy Concept of Creeping and Vibrocreep of Metals]. Samara, Samara State Technical Univ., 2011, 157 pp. (In Russian). EDN: [QNAGXB](#).
5. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ., 1969, xiv+822 pp.
6. Malinin N. N. *Polzuchest' v obrabotke metallov* [Creep in Treated Metals]. Moscow, Mashinostroenie, 1985, 216 pp. (In Russian). EDN: [XXLGDM](#).
7. Lokoschenko A. M., Shesterikov S. A. et al. *Zakonomernosti polzuchesti i dlitel'noi prochnosti* [Regularities of Creep and Long-Term Strength], ed. S. A. Shesterikov. Moscow, Mashinostroenie, 1983, 101 pp. (In Russian)
8. Samarin Yu. P., Kichaev E. K. Peculiarities of creep of metals in tension with reversible torsion, In: *Prochnost' materialov i elementov konstruktssii pri slozhnom napriazhenom sostoianii* [Strength of Materials and Structural Elements in a Complex Stress State]. Kiev, Nauk. Dumka, 1977, pp. 224–238 (In Russian).
9. Kichaev E. K., Fayn G. M. Creep of drill pipes from D16T alloy under conditions of ultra-deep drilling, In: *Prochnost' materialov i elementov konstruktssii pri slozhnom napriazhenom sostoianii* [Strength of Materials and Structural Elements in a Complex Stress State]. Kiev, Nauk. Dumka, 1978, pp. 232–237 (In Russian).
10. Lokoshchenko A. M., Fomin L. V. Delayed fracture of plates under creep condition in unsteady complex stress state in the presence of aggressive medium, *Appl. Math. Model.*, 2018, vol. 60, pp. 478–489. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.03.031>.
11. Wen J.-F., Tu S.-T., Xuan F.-Z., Zhang X.-W., Gao X.-L. Effects of stress level and stress state on creep ductility: Evaluation of different models, *J. Mater. Sci. Techn.*, 2016, vol. 32, no. 8, pp. 695–704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2016.02.014>.
12. Radchenko V. P., Saushkin M. N. *Polzuchest' i relaksatsiia ostatochnykh napriazhenii v uprochnennykh konstruktssiiakh* [Creep and Relaxation of Residual Stresses in Reinforced Structures]. Moscow, Mashinostroenie-1, 2005, 226 pp. (In Russian). EDN: [RXLJLN](#).
13. Samarin Yu. P. Derivation of exponential approximations for creep curves by the method of successive isolation of exponential terms, *Strength Mater.*, 1974, vol. 6, no. 9, pp. 1062–1066. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01528264>.



УДК 544.454.3

Математическое прогнозирование вероятности столкновения частиц в процессе детонационного напыления

*С. Ю. Ганигин, М. С. Гречухина, А. С. Нечаев,
А. Ю. Мурзин, В. А. Воронцова*

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Представлены методы математического прогнозирования вероятности столкновения частиц разнородных материалов в процессе детонационного напыления композиционных покрытий. Вследствие разных свойств исходных порошковых материалов (массы, аэродинамического сопротивления) показатели качества композиционных покрытий определяются не только параметрами движения частиц, но и их взаимным положением в потоке продуктов детонации. В случае использования реагирующих компонентов взаимодействие расплавленных частиц в потоке может привести к протеканию химических реакций и образованию новых материалов на подложке, созданию неоднородной структуры покрытия и ухудшению его прочностных и адгезионных свойств. Предварительный прогноз вероятности столкновения частиц до соприкосновения с поверхностью изделия дает возможность до проведения натуральных испытаний сделать вывод о получении качественных показателей покрытия.

Ключевые слова: детонационное напыление, поток частиц, вероятность столкновения, композиционные материалы.

Получение: 12 ноября 2021 г. / Исправление: 14 декабря 2022 г. /

Принятие: 16 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 21 декабря 2022 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2022

© СамГТУ, 2022 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Ганигин С. Ю., Гречухина М. С., Нечаев А. С., Мурзин А. Ю., Воронцова В. А. Математическое прогнозирование вероятности столкновения частиц в процессе детонационного напыления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 26, № 4. С. 789–801. EDN: FPLFPZ. DOI: [10.14498/vsgtu1975](https://doi.org/10.14498/vsgtu1975).

Сведения об авторах

Сергей Юрьевич Ганигин  <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>

доктор технических наук, доцент; декан; инженерно-технологический факультет;
e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Мария Сергеевна Гречухина  <https://orcid.org/0000-0001-7797-3802>

кандидат технических наук; старший научный сотрудник; лаб. цифровых двойников материалов и технологических процессов их обработки; e-mail: mariya_grechukhina@mail.ru

1. Введение. Исследование процессов детонационного напыления композиционных материалов рассмотрено в различных научных работах, описывающих его применение [1] и параметры, к которым относятся: расстояние от среза ствола до подложки [2]; выбор и соотношение компонентов газовой смеси [3–9]; толщина покрытия [10], скорость и температура потока частиц [11]; угол наклона подложки [12]; соотношение компонентов напыляемого состава [13]; взаимодействие напыляемого состава с компонентами газовой смеси [14]; коэффициент заполнения ствола газовой смесью [15]; режим напыления [16], который оказывает существенное влияние на конечный состав наносимого материала [17]. Также описывается множество преимуществ данной технологии получения покрытий, а именно: хорошая адгезия [2], высокая износостойкость и твердость [13, 18–20], коррозионная устойчивость покрытий [22].

Наносимый подобным образом материал представляет собой порошок либо смесь порошков двух или более веществ с различным размером частиц [18]. При этом допустимо, что дисперсность частиц двух или более напыляемых материалов относительно друг друга может быть различной.

Частицы напыляемого материала проходят ствол и некоторое расстояние до поверхности изделия. Внутренние стенки ствола детонационной установки имеют однородное сечение. Расстояние от границы ствола до изделия относительно небольшое, что обеспечивает сохранение необходимого импульса частицам вещества для необходимой адгезии с поверхностью [14].

Основополагающим фактором успешной реализации технологии детонационного напыления является столкновение (вне зависимости от геометрии и природы материала) наносимых частиц друг с другом только на поверхности подложки, исключая при этом их взаимный контакт в стволе детонационной установки и на всей протяженности полета до обрабатываемой поверхности. Это обусловлено тем, что взаимодействие расплавленных частиц вещества до попадания на изделие может вызвать создание неоднородной структуры покрытия и привести к ухудшению его прочностных и адгезионных свойств.

2. Оценка вероятности. Для рассмотрения вероятности столкновения частиц порошков в стволе экспериментальной установки возьмем двухкомпонентный состав веществ и примем ряд допущений [21], которые не противоречат физике протекающих реакций, но существенно упрощают процесс аналитического представления движения и взаимосвязи частиц вещества:

- 1) поток частиц ламинарный;
- 2) частицы обоих веществ в процессе движения распределены по сечению ствола детонационной установки равномерно;

Александр Сергеевич Нечаев  <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>
кандидат технических наук; доцент; каф. радиотехнических устройств;
e-mail: nechaev-as@mail.ru

Андрей Юрьевич Мурзин  <https://orcid.org/0000-0002-6737-036X>
кандидат технических наук, доцент; доцент; каф. технологий твердых химических веществ;
e-mail: ttxb@inbox.ru

Валерия Андреевна Воронцова  <https://orcid.org/0000-0002-8759-1805>
младший научный сотрудник; лаб. цифровых двойников материалов и технологических процессов их обработки; e-mail: vorontsova.va@mail.ru

- 3) вероятности, характеризующие нахождение частицы двух веществ в одно время в единице элементарного объема (рассматриваемой зоны), взаимонезависимы;
- 4) форму частиц можно с допустимой погрешностью принять сферической с определенным радиусом.

Из принятых допущений можно заключить, что факт столкновения частиц может считаться состоявшимся, если расстояние между центрами сфер двух частиц не превосходит суммы их радиусов. Также имеет место случай, когда движущиеся в ламинарном потоке частицы будут находиться в непосредственной близости к стенкам канала ствола. В этом случае допустимая площадь соприкосновения будет ограничиваться не только размерами частиц, но и внутренним радиусом ствола [15], а вероятность попадания обеих частиц в эту область будет меньше, чем та, что для частиц, удаленных от стенок установки. Однако поскольку радиальные размеры частиц значительно меньше радиуса сечения ствола, это дает основание утверждать, что количество частиц вблизи стенок установки по сравнению с количеством частиц вдали от ствола будет значительно меньше.

Принимаем, что в одном поперечном сечении ствола может находиться N частиц большого радиуса и n частиц малого радиуса. Для этого случая вероятность того, что хотя бы одна малая частица войдет хотя бы в одну область вблизи большей частицы:

$$p_{nN} = \sum_1^n \frac{N(r_b + r_s)^2}{R^2} = \frac{nN(r_b + r_s)^2}{R^2}, \quad (1)$$

где R — внутренний радиус канала ствола; r_b и r_s — радиусы большой и малой частиц соответственно. Причем ввиду относительной малости расстояния от границы ствола до поверхности изделия и сохранения условия ламинарности потока можно принять радиус потока частиц на этом промежутке равным внутреннему радиусу канала ствола.

Схематичное представление разноразмерных частиц двух веществ в сечении ствола показано на рис. 1. Пунктирной линией обозначена область, где при одновременном нахождении обеих частиц произойдет их контакт. Стоит

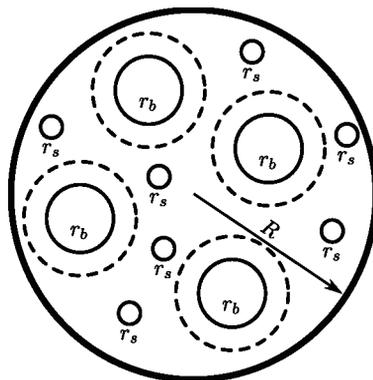


Рис. 1. Схематичное представление сечения ствола [Figure 1. The schematic image of the trunk section]

отметить, что данная область построена относительно поверхности большей частицы с учетом диаметрального размера малой.

Из формулы (1) ясно, что при больших величинах N и n вероятность контакта двух частиц будет велика, однако следует понимать, что исходя из условия проведения эксперимента величины N и n будут ограничены размерами самих частиц и внутренним радиусом ствола.

Согласно физике течения реакции, динамические параметры одних частиц (более крупных и массивных) отличаются от динамических параметров других частиц (менее крупных и массивных), что выражается в различных скоростях частиц в канале ствола и за его пределами. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что существует область, где концентрация частиц в единице объема будет наибольшей, причем одни частицы будут догонять другие частицы. А значит, следует рассмотреть данную область как область с наибольшей вероятностью соприкосновения частиц (рис. 2).

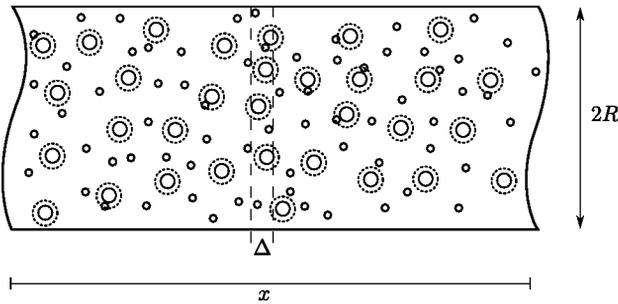


Рис. 2. Схематическое представление распределения частиц по длине в канале ствола [Figure 2. Schematic representation of the particle length distribution in the trunk channel]

Если для одной дозы загрузки порошка принять поток частиц равномерно распределенным во всем времени протекания процесса, то количество частиц в единичном объеме можно считать усредненно равным (другими словами, усредненное количество частиц в единице объема постоянное по всей длине рассматриваемой области).

Размеры области, где частицы одного вещества догоняют частицы другого, можно определить радиусом ствола R и линейной величиной области x на рис. 2. Для определения вероятности контакта частиц двух веществ по всей этой области следует рассмотреть вероятность контакта частиц в единичном объеме.

В качестве единичного объема в нашем случае удобно принять область, ограниченную цилиндрической поверхностью с основаниями площадью πR^2 и высотой Δ (рис. 2):

$$V_{\Delta} = \pi R^2 \Delta, \quad (2)$$

где $\Delta = 2r_b + 2r_s$.

Количество единичных объемов во всей рассматриваемой области будет определяться выражением

$$\lambda = \frac{V}{V_{\Delta}} = \frac{x}{\Delta}. \quad (3)$$

На основании выражений (2) и (3) можно довольно точно оценить количество частиц обоих веществ в единичном объеме. Для этого сначала определим

массу больших частиц порошка одного вещества в единичном объеме $m_{\Delta b}$ по выражению

$$m_{\Delta b} = \frac{m_{\Sigma b}}{\lambda}, \quad (4)$$

где $m_{\Sigma b}$ — общая масса порошка этого вещества. Затем определим количество частиц в единичном объеме N_{Δ} :

$$N_{\Delta} = \frac{m_{\Delta b}}{m_{1b}}, \quad (5)$$

где m_{1b} — масса одной частицы этого вещества. Аналогично формулам (4) и (5) можно получить выражение для оценки количества частиц другого вещества n_{Δ} :

$$n_{\Delta} = \frac{m_{\Sigma s}}{\lambda m_{1s}}, \quad (6)$$

где $m_{\Sigma s}$ — общая масса порошка второго вещества в одной дозе загрузки, m_{1s} — масса одной частицы этого вещества.

На основании выражений (2), (5) и (6) вероятность того, что хотя бы одна малая частица одного вещества войдет в область контакта хотя бы одной большой частицы другого вещества в определенном нами единичном объеме, будет определяться выражением

$$p_{\Delta n N} = \sum_1^{n_{\Delta}} \frac{4N_{\Delta}(r_b + r_s)^3}{3R^2(2r_b + 2r_s)} = \frac{2N_{\Delta}n_{\Delta}(r_b + r_s)^2}{3R^2}.$$

Для всей рассматриваемой области вероятность контакта больших и малых частиц при равномерном распределении частиц во всем времени протекания процесса будет определяться как

$$p_{nN} = \lambda \sum_1^{n_{\Delta}} \frac{4N_{\Delta}(r_b + r_s)^3}{3R^2(2r_b + 2r_s)} = \frac{2\lambda N_{\Delta}n_{\Delta}(r_b + r_s)^2}{3R^2}. \quad (7)$$

Если же условие равномерности потока выполняться не будет, то линейную величину области x следует рассматривать как сумму отрезков, в которых количество частиц веществ будет меняться в зависимости от скорости частиц и времени их прохождения относительно начала процесса:

$$x(v(t), t) = \sum_{i=1}^{\lambda} x(v_i), \quad (8)$$

где $v(t)$ — функция скорости потока частиц, изменяющаяся в процессе движения частицы; t — время; v_i — усредненная скорость потока частиц на рассматриваемом i -том единичном участке, которую можно считать постоянной. Тогда выражение (7) с учетом (8) запишется в виде

$$p_{nN} = \sum_{i=1}^{\lambda} \sum_1^{n_{\Delta_i}} \frac{4N_{\Delta_i}(r_b + r_s)^3}{3R^2(2r_b + 2r_s)} = \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{2N_{\Delta_i}n_{\Delta_i}(r_b + r_s)^2}{3R^2}. \quad (9)$$

Зависимость (9) можно считать окончательным выражением, дающим оценку вероятности столкновения частиц в процессе детонационного напыления с учетом приведенных допущений.

3. Математическое моделирование. Для подтверждения отсутствия взаимодействия между компонентами смеси двух веществ в стволе детонационной установки проведено математическое моделирование прогрева их частиц с дисперсностью 40 и 20 мкм (рис. 3). Для прогнозирования прогрева частиц в пространстве, а также оценки температур частиц в потоке проведено численное моделирование в программном комплексе ANSYS.¹ Температура воздействующей газовой смеси на поверхность частиц составляет 4000 °С, а значения теплового потока газа — 65 Вт/(м² · °С) (для частиц диаметром 40 мкм) и 90 Вт/(м² · °С) (для частиц 20 мкм). В качестве примера на рис. 3 представлено распределение температуры в дискретные моменты времени для частиц с размерностью 40 мкм.

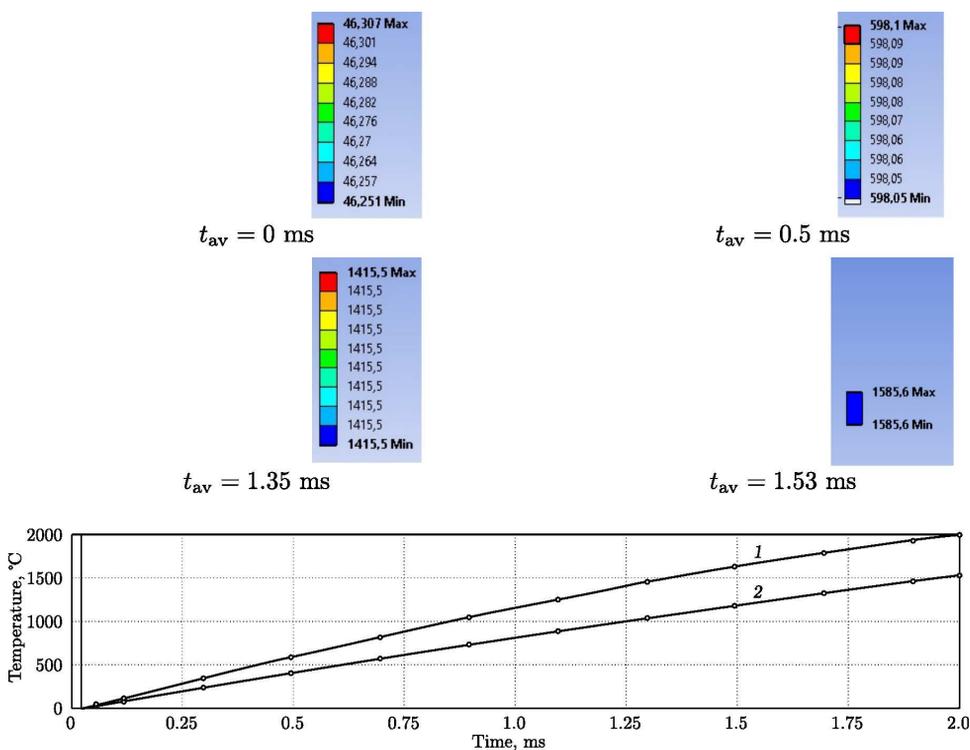


Рис. 3. Зависимость процесса прогрева частиц диаметром 40 мкм (1) и 20 мкм (2) от времени при детонационном напылении
 [Figure 3. The dependence of the heating process of particles with diameters of 40 μm (1) and 20 μm (2) on the time during detonation spraying]

Математическим моделированием показано, что частицы диаметром 40 мкм прогреваются медленнее частиц диаметром 20 мкм, что свидетельствует об отсутствии взаимодействия между ними в процессе детонационного напыления — от момента их попадания в ствол детонационной установки и до

¹Лицензия на ПО ANSYS Academic Research AUTODYN от 19 ноября 2009 г. № 00606251.

завершения процесса напыления.

4. Заключение. Полученные в ходе работы зависимость и математическая модель дают оценку вероятности столкновения разноразмерных частиц в ламинарном потоке. По этой оценке можно до проведения испытаний на установке судить о количестве расплавленных частиц порошка, вступивших в реакцию до попадания на поверхность изделия. Это позволит уже на ранней стадии процесса внести поправки количественных показателей массы порошка и определить допустимые диапазоны размера используемых в процессе гранул.

Возможность практического использования приведенных результатов теоретических исследований следует в дальнейшем скорректировать экспериментальными исследованиями, которые позволят уточнить значения вероятности столкновения частиц двух и более выбранных веществ с определенными значениями дисперсности, массы и скорости в потоке.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. С.Ю. Ганигин — идея исследования; объяснение новых фактов в контексте собственной теории процесса; постановка задач исследования; анализ результатов исследований; работа с переработанным вариантом рукописи. М.С. Гречухина — математическое моделирование прогресса частиц, находящихся в стволе детонационной установки при напылении; подготовка литературного обзора; подготовка графического материала; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. А.С. Нечаев — расчет статистических данных вероятности столкновения частиц в стволе детонационной установки; интерпретация результатов; работа с черновиком и переработанным вариантом рукописи. В.А. Воронцова — моделирование в программном комплексе ANSYS; обработка и анализ результатов моделирования; работа с черновиком рукописи. А.Ю. Мурзин — работа с переработанным вариантом рукописи; перевод на английский язык. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (тема № АААА-А12-2110800012-0).

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Haridasan V. P., Velayudham A., Krishnamurthy R. Response surface modeling and parameter optimization of detonation spraying with enhanced coating performance // *Materials Today: Proceedings*, 2021. vol. 46, no. 9. pp. 3474–3481. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.867>.
2. Ulianitsky V. Yu., Shtertser A. A., Batraev I. S., Rybin D. K. Fabrication of layered ceramic-metal composites by detonation spraying // *Ceramics Intern.*, 2020. vol. 46, no. 17. pp. 27903–27908. EDN: PAVTPA. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.07.225>.
3. Ulianitsky V. Yu., Batraev I. S., Shtertser A. A., Dudina D. V., Bulina N. V., Smurov I. Detonation spraying behavior of refractory metals: Case studies for Mo and Ta-based powders // *Adv. Powder Technol.*, 2018. vol. 29, no. 8. pp. 1859–1864. EDN: YCBFVR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apt.2018.04.023>.

4. Rybin D. K., Batraev I. S., Dudina D. V., Ukhina A. V., Ulianitsky V. Yu. Deposition of tungsten coatings by detonation spraying // *Surf. Coat. Technol.*, 2021. vol. 409, 126943. EDN: EUTKJS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.126943>.
5. Shtertser A. A., Rybin D. K., Ulianitsky V. Yu., Park W., Datekyu M., Wada T., Kato H. Characterization of nanoscale detonation carbon produced in a pulse gas-detonation device // *Diamond Relat. Mater.*, 2020. vol. 101, 107553. EDN: HRUGOT. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2019.107553>.
6. Cui S., Zhai H., Li W., Fan X., Li X., Ning W., Xiong D. Microstructure and tribological properties of Fe-based amorphous coating prepared by detonation spray // *J. Non-Cryst. Solids*, 2021. vol. 556, 120564. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2020.120564>.
7. Ulianitsky V. Yu., Rybin D. K., Ukhina A. V., Bokhonov B. B., Dudina D. V., Samodurova M. N., Trofimov E. A. Structure and composition of Fe-Co-Ni and Fe-Co-Ni-Cu coatings obtained by detonation spraying of powder mixtures // *Materials Letters*, 2021. vol. 290, 129498. EDN: SINNEA. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.129498>.
8. Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V., Batraev I. S., Kovalenko A. I., Bulina N. V., Bokhonov B. B. Detonation spraying of titanium and formation of coatings with spraying atmosphere-dependent phase composition // *Surf. Coat. Technol.*, 2015. vol. 261, pp. 174–180. EDN: UEKMPD. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.11.038>.
9. Dudina D. V., Korchagin M. A., Zlobin S. B., Ulianitsky V. Yu., Lomovsky O. I., Bulina N. V., Bataev I. A., Bataev V. A. Compositional variations in the coatings formed by detonation spraying of Ti₃Al at different O₂/C₂H₂ ratios // *Intermetallics*, 2012. vol. 29, pp. 140–146. EDN: RGCVLH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2012.05.010>.
10. Haridasan V. P., Velayudham A., Krishnamurthy R. Response surface modeling and parameter optimization of detonation spraying with enhanced coating performance // *Materials Today: Proceedings*, 2021. vol. 46, no. 9. pp. 3474–3481. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.867>.
11. Batraev I. S., Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V. Detonation spraying of copper: Theoretical analysis and experimental studies // *Materials Today: Proceedings*, 2017. vol. 4, no. 11. pp. 11346–11350. EDN: XOISOM. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.09.006>.
12. Ulianitsky V., Batraev I., Dudina D., Smurov I. Enhancing the properties of WC/Co detonation coatings using two-component fuels // *Surf. Coat. Technol.*, 2017. vol. 318, pp. 244–249. EDN: XNHHSJ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2016.08.008>.
13. Dudina D. V., Pribytkov G. A., Krinitcyn M. G., Korchagin M. A., Bulina N. V., Bokhonov B. B., Batraev I. S., Rybin D. K., Ulianitsky V. Yu. Detonation spraying behavior of TiC_x-Ti powders and the role of reactive processes in the coating formation // *Ceramics Intern.*, 2016. vol. 42, no. 1, part A. pp. 690–696. EDN: XXBCUX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2015.08.166>.
14. Dudina D. V., Batraev I. S., Ulianitsky V. Yu., Korchagin M. A. Possibilities of the computer-controlled detonation spraying method: A chemistry viewpoint // *Ceramics Intern.*, 2014. vol. 40, no. 2. pp. 3253–3260. EDN: SKKGHD. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2013.09.111>.
15. Dudina D. V., Zlobin S. B., Bulina N. V., Bychkov A. L., Korolyuk V. N., Ulianitsky V. Yu., Lomovsky O. I. Detonation spraying of TiO₂-2.5 vol.% Ag powders in a reducing atmosphere // *J. Europ. Ceramic Soc.*, 2012. vol. 32, no. 4. pp. 815–821. EDN: PDGOPL. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2011.10.022>.
16. Shtertser A., Muders C., Veselov S., Zlobin S., Ulianitsky V., Jiang X., Bataev V. Computer controlled detonation spraying of WC/Co coatings containing MoS₂ solid lubricant // *Surf. Coat. Technol.*, 2012. vol. 206, no. 23. pp. 4763–4770. EDN: RGCAMH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2012.03.043>.
17. Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V., Batraev I. S., Rybin D. K., Bulina N. V., Ukhina A. V., Bokhonov B. B. The influence of the in-situ formed and added carbon on the formation of metastable Ni-based phases during detonation spraying // *Materials Letters*, 2016. vol. 181. pp. 127–131. EDN: XFJUMP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2016.06.022>.

18. Liao W.-B., Wu Zh.-X., Lu W., He M., Wang T., Guo Z., Huang J. Microstructures and mechanical properties of CoCrFeNiMn high-entropy alloy coatings by detonation spraying // *Intermetallics*, 2021. vol. 132, 107138. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2021.107138>.
19. Shtertser A. A., Batraev I. S., Ulianitsky V. Yu., Kuchumova I. D., Bulina N. V., Ukhina A. V., Bokhonov B. B., Dudina D. V., Trinh Ph. V., Phuong D. D. Detonation spraying of Ti-Cu mixtures in different atmospheres: Carbon, nitrogen and oxygen uptake by the powders // *Surf. Interf.*, 2020. vol. 21, 100676. EDN: JEFFAG. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfin.2020.100676>.
20. Патент № RU 2744805 C1: Способ нанесения реакционноспособного композиционного покрытия на основе Ni-Al / М. В. Ненашев, Д. А. Деморецкий, С. Ю. Ганигин, И. В. Нечаев, И. А. Кузнецов, А. А. Новиков, В. Л. Симогин, А. Ю. Мурзин, А. Г. Попов, А. Т. Нурмухаметов, Н. С. Альдебенев, М. С. Гречухина, И. Р. Тонеев. Патентообладатель: ФГБОУ ВО «СамГТУ». Номер заявки: 2020113997. Дата регистрации: 03.04.2020. Дата публикации: 15.03.2021, 2021. <http://www.fips.ru/cdfi/fips.dll/ru?ty=29&docid=2744805>. EDN: XVKCSP.
21. Nechaeva I., Nechaev A. Method of assessing the sensitivity of the dust-air mixture to thermal effects caused by electric discharge / *2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*, 2019. pp. 553–557. EDN: DMELHU. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSCMP45713.2019.8976612>.
22. Lakshmi D. V., Babu P. S., Krishna L. R., Vijay R., Rao D. S., Padmanabham G. Corrosion and erosion behavior of iron aluminide (FeAl(Cr)) coating deposited by detonation spray technique // *Adv. Powder Technol.* vol. 32, no. 7. pp. 2192–2201. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.appt.2021.04.032>.

MSC: 80A17, 74A40

Mathematical prediction of the probability of particle collisions during detonation spraying

*S. Yu. Ganigin, M. S. Grechukhina, A. S. Nechaev,
A. Yu. Murzin, V. A. Vorontsova*

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The paper presents methods of mathematical prediction of the probability of collision of particles of dissimilar materials in the process of detonation spraying of composite coatings. As a consequence of different properties of initial powder materials (mass, aerodynamic resistance), quality indicators of composite coatings are determined not only with the motion parameters of the particles but with their mutual position in the flow of the detonation products. In the case of the use of reactive components, the interaction of molten particles in the flow can lead to chemical reactions, formation of new materials on the substrate, heterogeneous structure of the coating, and deterioration of its strength and adhesive properties. A preliminary forecast of the probability of collision of particles before contact with the surface of the product makes it possible to conclude before conducting full-scale tests that high-quality coating indicators have been obtained.

Keywords: detonation spraying, particle flow, collision probability, composite materials.

Received: 12th November, 2021 / Revised: 14th December, 2022 /

Accepted: 16th December, 2022 / First online: 21st December, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Short Communication

© Authors, 2022

© Samara State Technical University, 2022 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Ganigin S. Yu., Grechukhina M. S., Nechaev A. S., Murzin A. Yu., Vorontsova V. A. Mathematical prediction of the probability of particle collisions during detonation spraying, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2022, vol. 26, no. 4, pp. 789–801. EDN: [PPLFZP](https://doi.org/10.14498/vsgtu1975). DOI: [10.14498/vsgtu1975](https://doi.org/10.14498/vsgtu1975) (In Russian).

Authors' Details:

Sergey Yu. Ganigin  <https://orcid.org/0000-0001-5778-6516>

Dr. Techn. Sci., Associate Professor; Dean; Faculty of Engineering and Technology;
e-mail: ganigin.s.yu@yandex.ru

Maria S. Grechukhina  <https://orcid.org/0000-0001-7797-3802>

Cand. Techn. Sci.; Senior Researcher; Lab. of Digital Doubles of Materials and Technological Processes of their Processing; e-mail: mariya_grechukhina@mail.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. S.Y. Ganigin: Idea of study; Explanation of new facts in the context of his own theory of the process, Setting research goals; Analysis of the results; Writing — review & editing. M.S. Grechukhina: Mathematical modeling of the heating of particles in the barrel of the detonation unit during spraying; Preparation of a literature review; Preparation of graphic material; Writing — original draft and review & editing. A.S. Nechaev: Calculation of statistical data on the probability of collision of particles in the barrel of the detonation unit; Interpretation of the results; Writing — original draft and review & editing. V.A. Vorontsova: Modeling in the ANSYS software package; Processing and analysis of simulation results; Writing — original draft. A.Y. Murzin: Writing — review & editing; Translation into English. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the state task (theme no. AAAA12-2110800012-0).

Acknowledgments. The authors are grateful to the referee for careful reading of the paper and valuable suggestions and comments.

References

1. Haridasan V. P., Velayudham A., Krishnamurthy R. Response surface modeling and parameter optimization of detonation spraying with enhanced coating performance, *Materials Today: Proceedings*, 2021, vol. 46, no. 9, pp. 3474–3481. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.867>.
2. Ulianitsky V. Yu., Shtertser A. A., Batraev I. S., Rybin D. K. Fabrication of layered ceramic-metal composites by detonation spraying, *Ceramics Intern.*, 2020, vol. 46, no. 17, pp. 27903–27908. EDN: PAVTPA. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.07.225>.
3. Ulianitsky V. Yu., Batraev I. S., Shtertser A. A., Dudina D. V., Bulina N. V., Smurov I. Detonation spraying behavior of refractory metals: Case studies for Mo and Ta-based powders, *Adv. Powder Technol.*, 2018, vol. 29, no. 8, pp. 1859–1864. EDN: YCBFVR. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apt.2018.04.023>.
4. Rybin D. K., Batraev I. S., Dudina D. V., Ukhina A. V., Ulianitsky V. Yu. Deposition of tungsten coatings by detonation spraying, *Surf. Coat. Technol.*, 2021, vol. 409, 126943. EDN: EUTKJS. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.126943>.
5. Shtertser A. A., Rybin D. K., Ulianitsky V. Yu., Park W., Datekyu M., Wada T., Kato H. Characterization of nanoscale detonation carbon produced in a pulse gas-detonation device, *Diamond Relat. Mater.*, 2020, vol. 101, 107553. EDN: HRUGOT. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.diamond.2019.107553>.

Alexander S. Nechaev  <https://orcid.org/0000-0002-0939-8292>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Radio Engineering Devices;
e-mail: nechaev-as@mail.ru

Andrey Yu. Murzin  <https://orcid.org/0000-0002-6737-036X>

Cand. Techn. Sci.; Associate Professor; Dept. of Solid Chemical Technology;
e-mail: ttxb@inbox.ru

Valeria A. Vorontsova  <https://orcid.org/0000-0002-8759-1805>

Junior Researcher; Lab. of Digital Doubles of Materials and Technological Processes of their Processing; e-mail: vorontsova.va@mail.ru

6. Cui S., Zhai H., Li W., Fan X., Li X., Ning W., Xiong D. Microstructure and tribological properties of Fe-based amorphous coating prepared by detonation spray, *J. Non-Cryst. Solids*, 2021, vol. 556, 120564. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnoncrysol.2020.120564>.
7. Ulianitsky V. Yu., Rybin D. K., Ukhina A. V., Bokhonov B. B., Dudina D. V., Samodurova M. N., Trofimov E. A. Structure and composition of Fe-Co-Ni and Fe-Co-Ni-Cu coatings obtained by detonation spraying of powder mixtures, *Materials Letters*, 2021, vol. 290, 129498. EDN: SINNEA. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.129498>.
8. Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V., Batraev I. S., Kovalenko A. I., Bulina N. V., Bokhonov B. B. Detonation spraying of titanium and formation of coatings with spraying atmosphere-dependent phase composition, *Surf. Coat. Technol.*, 2015, vol. 261, pp. 174–180. EDN: UEKMPD. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.11.038>.
9. Dudina D. V., Korchagin M. A., Zlobin S. B., Ulianitsky V. Yu., Lomovsky O. I., Bulina N. V., Bataev I. A., Bataev V. A. Compositional variations in the coatings formed by detonation spraying of Ti₃Al at different O₂/C₂H₂ ratios, *Intermetallics*, 2012, vol. 29, pp. 140–146. EDN: RGCVLH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2012.05.010>.
10. Haridasan V. P., Velayudham A., Krishnamurthy R. Response surface modeling and parameter optimization of detonation spraying with enhanced coating performance, *Materials Today: Proceedings*, 2021, vol. 46, no. 9, pp. 3474–3481. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.867>.
11. Batraev I. S., Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V. Detonation spraying of copper: Theoretical analysis and experimental studies, *Materials Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, no. 11, pp. 11346–11350. EDN: XOISOM. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.09.006>.
12. Ulianitsky V., Batraev I., Dudina D., Smurov I. Enhancing the properties of WC/Co detonation coatings using two-component fuels, *Surf. Coat. Technol.*, 2017, vol. 318, pp. 244–249. EDN: XNHHSJ. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2016.08.008>.
13. Dudina D. V., Pribytkov G. A., Krinitsyn M. G., Korchagin M. A., Bulina N. V., Bokhonov B. B., Batraev I. S., Rybin D. K., Ulianitsky V. Yu. Detonation spraying behavior of TiC_x-Ti powders and the role of reactive processes in the coating formation, *Ceramics Intern.*, 2016, vol. 42, no. 1, part A, pp. 690–696. EDN: XXBCUX. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2015.08.166>.
14. Dudina D. V., Batraev I. S., Ulianitsky V. Yu., Korchagin M. A. Possibilities of the computer-controlled detonation spraying method: A chemistry viewpoint, *Ceramics Intern.*, 2014, vol. 40, no. 2, pp. 3253–3260. EDN: SKKGHD. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2013.09.111>.
15. Dudina D. V., Zlobin S. B., Bulina N. V., Bychkov A. L., Korolyuk V. N., Ulianitsky V. Yu., Lomovsky O. I. Detonation spraying of TiO₂-2.5 vol.% Ag powders in a reducing atmosphere, *J. Europ. Ceramic Soc.*, 2012, vol. 32, no. 4, pp. 815–821. EDN: PDGOPL. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2011.10.022>.
16. Shtertser A., Muders C., Veselov S., Zlobin S., Ulianitsky V., Jiang X., Bataev V. Computer controlled detonation spraying of WC/Co coatings containing MoS₂ solid lubricant, *Surf. Coat. Technol.*, 2012, vol. 206, no. 23, pp. 4763–4770. EDN: RGCAMH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2012.03.043>.
17. Ulianitsky V. Yu., Dudina D. V., Batraev I. S., Rybin D. K., Bulina N. V., Ukhina A. V., Bokhonov B. B. The influence of the in-situ formed and added carbon on the formation of metastable Ni-based phases during detonation spraying, *Materials Letters*, 2016, vol. 181, pp. 127–131. EDN: XFJUMP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2016.06.022>.
18. Liao W.-B., Wu Zh.-X., Lu W., He M., Wang T., Guo Z., Huang J. Microstructures and mechanical properties of CoCrFeNiMn high-entropy alloy coatings by detonation spraying, *Intermetallics*, 2021, vol. 132, 107138. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2021.107138>.
19. Shtertser A. A., Batraev I. S., Ulianitsky V. Yu., Kuchumova I. D., Bulina N. V., Ukhina A. V., Bokhonov B. B., Dudina D. V., Trinh Ph. V., Phuong D. D. Detonation spraying

- of Ti-Cu mixtures in different atmospheres: Carbon, nitrogen and oxygen uptake by the powders, *Surf. Interf.*, 2020, vol. 21, 100676. EDN: JEFFAG. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.surfin.2020.100676>.
20. Patent RU 2744805 C1, A method of applying a reactive composite coating based on Ni-Al / M. V. Nenashev, D. A. Demoretsky, S. Yu. Ganigin, I. V. Nechaev, I. A. Kuznetsov, A. A. Novikov, V. L. Simogin, A. Yu. Murzin, A. G. Popov, A. T. Nurmukhametov, N. S. Aldebenev, M. S. Grechukhina, I. R. Toneev; publ. 15 Mar 2021, 2021 (In Russian). <http://www.fips.ru/cdfi/fips.dll/ru?ty=29&docid=2744805>. EDN: XVKCSP.
21. Nechaeva I., Nechaev A. Method of assessing the sensitivity of the dust-air mixture to thermal effects caused by electric discharge, In: *2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*, 2019, pp. 553–557. EDN: DMELHU. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSCMP45713.2019.8976612>.
22. Lakshmi D. V., Babu P. S., Krishna L. R., Vijay R., Rao D. S., Padmanabham G. Corrosion and erosion behavior of iron aluminide (FeAl(Cr)) coating deposited by detonation spray technique, *Adv. Powder Technol.*, vol. 32, no. 7, pp. 2192–2201. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apt.2021.04.032>.

ПОДПИСКА – 2023

на январь–декабрь
в «каталоге «Газеты и журналы – 2023.
I полугодие» и на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
(<http://www.ural-press.ru/>)

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2022 г.
проводится подписная кампания на журналы
Самарского государственного технического
университета на 2023 год.

18106 Вестник Самарского государственного технического
университета. Серия «Технические науки» (стр. 61)

18108 Вестник Самарского государственного технического
университета. Серия «Физико-математические нау-
ки» (стр. 82)

70570 Градостроительство и архитектура (стр. 61)

*Условия оформления подписки Вы найдете
на сайте <http://www.ural-press.ru/>*