

ISSN 1991-8615 (print)
ISSN 2310-7081 (online)



ВЕСТНИК

САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия
«Физико-математические науки»

Т. 27, № 1 – 2023

Journal of Samara State Technical University
Ser. Physical and Mathematical Sciences

**Вестник
Самарского
государственного
технического
университета**

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Издаётся с 1996 г.
Выходит 4 раза в год

Март — 2023

Серия

«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ» (Т. 27, № 1/70 – 2023)

Главный редактор В. П. Радченко — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Заместитель главного редактора А. И. Жданов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
Отв. секретарь М. Н. Саушкин — к.ф.-м.н., доц. (Самара, Россия)
Отв. секретарь Е. В. Мурашкин — к.ф.-м.н. (Москва, Россия)
Секретарь Е. А. Козлова — к.ф.-м.н. (Самара, Россия)

Редакционный совет:

- С. А. Авдонин — д.ф.-м.н., проф. (Фэрбенкс, Аляска, США)
- Б. Д. Аннин — акад. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- А. А. Буренин — чл. кор. РАН, д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)
- Р. Вельмураган — доктор наук (Ченнай, Индия)
- С. П. Верёвкин — д.х.н., проф. (Росток, Германия)
- Ш. Иматани — доктор наук (Киото, Япония)
- О. И. Маричев — д.ф.-м.н., проф. (Ларами, Вайоминг, США)
- В. П. Матвеев — акад. РАН, д.т.н., проф. (Пермь, Россия)
- П. В. Севастьянов — д.т.н., проф. (Ченстохова, Польша)

Редакционная коллегия:

- В. Н. Акопян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- А. П. Амосов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. В. Боровских — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Л. А. Игумнов — д.ф.-м.н., проф. (Нижний Новгород, Россия)
- Ф. дель Изола — д. н., проф. (Рим, Италия)
- В. А. Ковалёв — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. И. Кожанов — д.ф.-м.н., проф. (Новосибирск, Россия)
- В. А. Кудинов — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Д. С. Лисовенко — д.ф.-м.н. (Москва, Россия)
- А. Н. Миронов — д.ф.-м.н., проф. (Елабуга, Россия)
- Е. Ю. Просвираков — д.ф.-м.н., (Екатеринбург, Россия)
- Л. С. Пулькина — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- Ю. Н. Радаев — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- Е. В. Радкевич — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- А. В. Саакян — д.ф.-м.н., проф. (Ереван, Армения)
- К. Б. Сабитов — д.ф.-м.н., проф. (Стерлитамак, Россия)
- Л. А. Сараев — д.ф.-м.н., проф. (Самара, Россия)
- А. П. Солдатов — д.ф.-м.н., проф. (Москва, Россия)
- В. В. Стружанов — д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург, Россия)
- А. И. Хромов — д.ф.-м.н., проф. (Комсомольск-на-Амуре, Россия)

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки» (Т. 27, № 1/70 – 2023)

Учредитель — ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244

Редактор Е. С. Захарова

Выпускающий редактор Е. В. Абрамова

Компьютерная вёрстка М. Н. Саушкин, О. С. Афанасьева,
Е. Ю. Арланова

Адрес редакции и издателя:

ФГБОУ ВО «СамГТУ»,
443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244

Тел.: +7 (846) 337 04 43

Факс: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/vsgtu>

Оригинал-макет изготовлен
на кафедре прикладной математики
и информатики СамГТУ

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС 77–66685 от 27.07.2016.

Федеральная служба по надзору
в сфере связи информационных
технологий и массовых коммуникаций

Подписано в печать 31 марта 2023 г.

Дата выхода в свет 17 апреля 2023 г.

Формат 70 × 108 1/16.

Усл. печ. л. 15.85. Уч.-изд. л. 15.82.

Тираж 500 экз. Рег. № 92/23.

Заказ № 232.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного
технического университета

443100, г. Самара,
ул. Молодогвардейская, 244.

Журнал индексируется в Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, [Zentralblatt MATH](#), [DOAJ](#) и входит в ядро [Российского индекса научного цитирования](#).

Журнал включен в [Перечень рецензируемых научных изданий](#), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук, по научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

- 1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки);
- 1.1.8 – Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки);
- 1.2.2 – Математическое моделирование численные методы и комплексы программ (физико-математические науки).

Полнотекстовый доступ к статьям журнала осуществляется на Общероссийском математическом портале (<http://www.mathnet.ru>), портале научных журналов «Эко-Вектор» (<https://journals.eco-vector.com>), сайтах научных электронных библиотек eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) и КиберЛенинка (<http://cyberleninka.ru>).

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](#) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Подписной индекс в каталоге «Пресса России» 18108

Цена свободная

Journal of Samara State Technical University

ISSN 1991–8615 (print)
ISSN 2310–7081 (online)
SCIENTIFIC JOURNAL
Published since 1996
4 issues per year
March — 2023

Ser. Physical & Mathematical Sciences, 2023, vol. 27, no. 1

Founder — Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Editor-in-Chief V. P. Radchenko (Samara, Russian Federation)
Deputy Editor-in-Chief A. I. Zhdanov (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary M. N. Saushkin (Samara, Russian Federation)
Executive Secretary E. V. Murashkin (Moscow, Russian Federation)
Secretary E. A. Kozlova (Samara, Russian Federation)

Editorial Council:

- B. D. Annin (Novosibirsk, Russian Federation)
- S. A. Avdonin (Fairbanks, Alaska, USA)
- A. A. Burenin (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- Shōji Imatani (Kyoto, Japan)
- O. I. Marichev (Laramie, Wyoming, USA)
- V. P. Matveenko (Perm, Russian Federation)
- P. V. Sevastiyarov (Częstochowa, Poland)
- Ramachandran Velmurugan (Chennai, India)
- S. P. Verevkin (Rostock, Germany)

Editorial Board:

- A. P. Amosov (Samara, Russian Federation)
- A. V. Borovskikh (Moscow, Russian Federation)
- F. dell'Isola (Rome, Italy)
- V. N. Hakobyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Igumnov (N. Novgorod, Russian Federation)
- A. I. Khromov (Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation)
- V. A. Kovalev (Moscow, Russian Federation)
- A. I. Kozhanov (Novosibirsk, Russian Federation)
- V. A. Kudinov (Samara, Russian Federation)
- D. S. Lisovenko (Moscow, Russian Federation)
- A. N. Mironov (Elabuga, Russian Federation)
- E. Yu. Prosviryakov (Ekaterinburg, Russian Federation)
- L. S. Pulkina (Samara, Russian Federation)
- Yu. N. Radayev (Moscow, Russian Federation)
- E. V. Radkevich (Moscow, Russian Federation)
- K. B. Sabitov (Sterlitamak, Russian Federation)
- A. V. Sahakyan (Yerevan, Armenia)
- L. A. Saraev (Samara, Russian Federation)
- A. P. Soldatov (Moscow, Russian Federation)
- V. V. Struzhanov (Ekaterinburg, Russian Federation)

Edited by E. S. Zakharova, E. V. Abramova
Compiled and typeset by M. N. Saushkin, O. S. Afanas'eva,
E. Yu. Arlanova

The Editorial Board Address:

Dept. of Applied Mathematics and Computer Science,
Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation

Phone: +7 (846) 337 04 43

Phax: +7 (846) 278 44 00

E-mail: vsgtu@samgtu.ru

URL: <http://www.mathnet.ru/eng/vsgtu>

Printed at the Printing-office of Mikhail Fursov,
14A-M, Zastavskay st., Saint Petersburg, 196084, Russian Federation
Phone: +7 (812) 646 33 77

The journal covered in Web of Science Core Collection ([Emerging Sources Citation Index](#)), [Zentralblatt MATH](#), [Scopus](#), Russian Science Citation Index, and [DOAJ](#).

The full-text electronic version of journal is hosted by the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru (<http://www.mathnet.ru>), the Eco-Vector Journals Portal (<https://journals.eco-vector.com>), and by the web-sites of scientific electronic libraries eLibrary.ru (<http://elibrary.ru>) and CyberLeninka (<http://cyberleninka.ru>).

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Содержание

Дифференциальные уравнения и математическая физика

- Orelma H.* “Анализ обобщенных алгебр Клиффорда” 7
- Сакс Р. С.* “Сеть пространств Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции” 23
- Самарин А. Ю., Штеренберг А. М.* “Представление Лагранжа квантовой эволюции материальных полей” 50
- Хасанов И. И., Акрамова Д. И., Рахмонов А. А.* “Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля” 64

Механика деформируемого твёрдого тела

- Муллахметов М. Н., Ильиных А. В.* “Численное моделирование микроструктур и процессов разрушения зернистых поликристаллических материалов с учетом влияния межзеренных границ” 81
- Фирсов С. В.* “О влиянии деформаций ползучести материала вращающегося цилиндра на последующее пластическое течение” 102
- Янковский А. П.* “Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба” 119

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

- Сизых Г. Б.* “Об одном парадоксальном свойстве решения задачи стационарного обтекания тела дозвуковым стратифицированным потоком идеального газа” 142
- Шляхин Д. А., Савинова Е. В.* “Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэлектроупругости для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины” 159

Краткие сообщения

- Локощенок А. М., Фомин Л. В., Третьяков П. М., Махов Д. Д.* “Ползучесть и длительная прочность водородсодержащего титанового сплава ВТ6 при кусочно-постоянной зависимости растягивающего напряжения от времени” 179
- Перельмутер М. Н.* “Влияние плотности костных тканей на напряженно-деформированное состояние вблизи дентальных имплантатов” 189

Contents

Differential Equations and Mathematical Physics

| | |
|--|----|
| <i>Orelma H.</i> “Analysis on generalized Clifford algebras” | 7 |
| <i>Saks R. S.</i> “A set of Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators” | 23 |
| <i>Samarin A. Yu., Shterenberg A. M.</i> “Lagrange’s representation of the quantum evolution of matter fields” | 50 |
| <i>Hasanov I. I., Akramova D. I., Rahmonov A. A.</i> “Investigation of the Cauchy problem for one fractional order equation with the Riemann–Liouville operator” | 64 |

Mechanics of Solids

| | |
|--|-----|
| <i>Mullahmetov M. N., Ilinykh A. V.</i> “Computer simulation of microstructures and processes of granular composites fracture taking into account the influence of grain boundaries” | 81 |
| <i>Firsov S. V.</i> “The influence of creep deformations on the subsequent plastic flow in a material of rotating cylinder” | 102 |
| <i>Yankovskii A. P.</i> “Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory” | 119 |

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

| | |
|--|-----|
| <i>Sizykh G. B.</i> “On a paradoxical property of solving the problem of stationary flow around a body by a subsonic stratified flow of an ideal gas” | 142 |
| <i>Shlyakhin D. A., Savinova E. V.</i> “A coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a circular piezoceramic hinged plate” | 159 |

Short Communications

| | |
|---|-----|
| <i>Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Tretyakov P. M., Makhov D. D.</i> “Creep and long-term strength of hydrogen-containing VT6 titanium alloy with a piecewise constant dependence of tensile stress on time” | 179 |
| <i>Perelmuter M. N.</i> “The effect of bone tissue density on the stress-strain state near dental implants” | 189 |

MSC: 30G35, 35E05

Analysis on generalized Clifford algebras

*H. Orelma*Tampere University,
Kalevantie 4, Tampere, 33100, Finland.

Abstract

In this article, we study the analysis related to generalized Clifford algebras $\mathcal{C}_n(\underline{a})$, where \underline{a} is a non-zero vector. If $\{e_1, \dots, e_n\}$ is an orthonormal basis, the multiplication is defined by relations

$$e_j^2 = a_j e_j - 1,$$

$$e_i e_j + e_j e_i = a_i e_j + a_j e_i,$$

for $a_j = e_j \cdot \underline{a}$. The case $\underline{a} = \underline{0}$ corresponds to the classical Clifford algebra. We define the Dirac operator as usual by $D = \sum_j e_j \partial_{x_j}$ and define regular functions as its null solution. We first study the algebraic properties of the algebra. Then we prove the basic formulas for the Dirac operator and study the properties of regular functions.

Keywords: Clifford–Kanzaki algebra, generalized Clifford algebra, Dirac operator, regular function.

Received: 27th December, 2022 / Revised: 16th February, 2023 /Accepted: 27th February, 2023 / First online: 30th March, 2023

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Orelma H. Analysis on generalized Clifford algebras, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 7–22. EDN: UQWDOF. DOI: [10.14498/vsgtu1973](https://doi.org/10.14498/vsgtu1973).

Author's Details:

Heikki Orelma  <https://orcid.org/0000-0002-8251-4333>

D.Sc. (Tech.), Adjunct Professor; Researcher; Dept of Mechanics and Mathematics;

e-mail: Heikki.Orelma@tuni.fi

1. Introduction. Clifford algebras are frequently encountered algebraic structures in both mathematics and applications. In recent decades, one key application of the field has been in the formation of higher-dimensional analysis. This branch of mathematics is known as Clifford analysis. Since the starting point of Clifford algebras is located in complex numbers, complex analysis serves as a starting point and motivation for Clifford analysis.

Both in applications, but perhaps often better among mathematicians, there is an effort to look at the generalizations of mathematical theories. Clifford analysis can be generalized in several ways. Each generalization gives a new perspective on a classic case. One way is to generalize Clifford's algebras themselves, and there are numerous articles to be published from this point of view. It would be futile to attempt to list them, given the large number.

Let us return to the complex analysis. *Isaak Moiseevitch Yaglom* introduced the following generalization for complex numbers in [1]. His idea was that the imaginary unit i satisfies the quadratic equation

$$x^2 = px + q$$

for $p, q \in \mathbb{R}$. This leads to different generalizations of complex numbers with different choices of parameters p and q . From the point of view of complex analysis, it is natural to look at the generalization, where the values of the functions are in these generalized complex numbers. For example, the invertibility of elements is lost with some of the parameter choices, which naturally significantly affects the structure of the theory. In addition, the counterpart of the holomorphic functions naturally becomes different.

Like complex numbers, Clifford algebras are also based on a quadratic form. One way to generalize them is to define a quadratic equation like Yaglom did. Naturally, this is not quite as straightforward as in the case of complex numbers. This article follows the idea introduced by *Teruo Kanzaki* in his article [2]. Later, *Jacques Helmstetter*, *Artibano Micali*, and *Philippe Revoy* continued by looking at generalized Clifford algebras in [3]. Kanzaki's idea, like Yaglom's, was to expand a quadratic equation with a term determined by a linear form. We will come back to this later. Later *Wolfgang Tutschke* and *Carmen Judith Vanegas*, when modeling boundary value problems, defined generalized Clifford algebras without mentioning Kanzaki in [4].

This article examines the generalization of the Clifford analysis to the special case mentioned above. However, it is more like the first steps in this direction. In classic Clifford analysis, the interplay of vector variables and operators is central. This means that the theory can be written very far to the end without component representations. In the author's opinion, this is also a good requirement for a generalized Clifford analysis.

The structure of the article is as follows:

- Section 2 recalls the construction of orthogonal Clifford algebras. The examination is limited to Euclidean spaces \mathbb{R}^n .
- Section 3 defines generalized Clifford algebras as in [3]. After that, algebraic fundamental properties are studied.
- Section 4 is algebraic and examines the difference related to the power of a vector variable.
- Section 5 defines the Dirac operator and defines regular functions as its zero solutions. The connection with the Laplace operator is studied.

- Section 6 examines two simple cases as examples. The examples highlight the difference between the generalized and the classical case.
- Section 7 discusses Cauchy's integral formula.
- In Section 8, more regular functions are derived using the Cauchy kernel.

2. Praefatio necessaria: Clifford algebras over quadratic spaces. A *universal Clifford algebra* is an algebra associated with a *quadratic space* (\mathbb{R}^n, Q) , denoted by $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n, Q)$ or just $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^n)$, which satisfies the condition

$$\underline{x}^2 = Q(\underline{x})$$

for any $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Moreover, its dimension is 2^n . A *quadratic form* Q is supposed to be associated with a *bilinear form*

$$B(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2}(Q(\underline{x} + \underline{y}) - Q(\underline{x}) - Q(\underline{y})).$$

With this, we obtain the product rule between the vectors

$$\underline{x}\underline{y} + \underline{y}\underline{x} = 2B(\underline{x}, \underline{y}).$$

In the Clifford analysis, we usually choose

$$Q(\underline{x}) = -|\underline{x}|^2,$$

and then

$$B(\underline{x}, \underline{y}) = -\underline{x} \cdot \underline{y},$$

where $|\underline{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ and $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. The corresponding Clifford algebra is denoted by $\mathbb{R}_{0,n}$. By defining an orthonormal basis $\{e_1, \dots, e_n\}$, we get

$$\begin{aligned} e_j^2 &= -1, & \text{for } j = 1, \dots, n, \\ e_i e_j + e_j e_i &= 0, & \text{for } i, j = 1, \dots, n \text{ and } i \neq j. \end{aligned}$$

A complete presentation of algebraic theory of Clifford algebras can be found, for example, in [5–7].

3. Generalized Clifford algebras. Consider \mathbb{R}^n with a quadratic form $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Let $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be its associated bilinear form and $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a linear form. In this case, \mathbb{R}^n is called a *generalized quadratic space*. *Generalized Clifford algebras* or *Clifford–Kanzaki algebras* are generated by the relation

$$\underline{x}^2 = P(\underline{x})\underline{x} + Q(\underline{x})$$

for $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. This gives the product rule

$$\underline{x}\underline{y} + \underline{y}\underline{x} = P(\underline{x})\underline{y} + P(\underline{y})\underline{x} + 2B(\underline{x}, \underline{y}),$$

where $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. The Riesz representation theorem states that a linear form P admits a unique representation by the Euclidean inner product in the form

$$P(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x}$$

for some $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$. A canonical choice for a quadratic form is $Q(\underline{x}) = -|\underline{x}|^2$. The generalized Clifford algebra generated by

$$\underline{x}^2 = (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x} - |\underline{x}|^2 \quad (1)$$

for some $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ is denoted by $\mathcal{C}_n(\underline{a})$. Let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be an orthonormal basis in \mathbb{R}^n and $a_j = \underline{a} \cdot e_j$. Then the multiplication rules are

$$\begin{aligned} e_j^2 &= a_j e_j - 1, \\ e_i e_j + e_j e_i &= a_i e_j + a_j e_i, \end{aligned} \quad (2)$$

where $i, j = 1, \dots, n$ and $i \neq j$. Defining paravectors $\varepsilon_j = e_j - a_j$, the multiplication rules takes the form

$$e_j \varepsilon_j = \varepsilon_j e_j = -1, \quad (3)$$

$$\varepsilon_i e_j + \varepsilon_j e_i = 0,$$

$$e_i \varepsilon_j + e_j \varepsilon_i = 0. \quad (4)$$

We define an algebra endomorphism $\tilde{\cdot} : e_j \mapsto \varepsilon_j$. Since $\tilde{e}_j = e_j - 2a_j$, we observe, that it is not an involution.

PROPOSITION 3.1. *If $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, then*

$$\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}$$

and

$$\underline{x} \tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{x}} \underline{x} = -|\underline{x}|^2.$$

Proof. If

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

then

$$\tilde{\underline{x}} = \sum_{j=1}^n x_j \varepsilon_j = \sum_{j=1}^n e_j x_j - \sum_{j=1}^n a_j x_j = \underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}.$$

From (1), we obtain $\underline{x}(\underline{x} - (\underline{a} \cdot \underline{x})) = (\underline{x} - (\underline{a} \cdot \underline{x}))\underline{x} = -|\underline{x}|^2$. □

COROLLARY 3.1. *If $\underline{x} \neq 0$, then*

$$\underline{x}^{-1} = -\frac{\tilde{\underline{x}}}{|\underline{x}|^2}.$$

PROPOSITION 3.2. *Let $x = x_0 + \underline{x}$ be a paravector. If $x_0^2 + x_0(\underline{a} \cdot \underline{x}) + |\underline{x}|^2 \neq 0$, then*

$$x^{-1} = \frac{x_0 - \underline{x} + \underline{a} \cdot \underline{x}}{x_0^2 + x_0(\underline{a} \cdot \underline{x}) + |\underline{x}|^2}.$$

Proof. We calculate

$$\begin{aligned} x(x_0 - \tilde{x}) &= (x_0 + \underline{x})(x_0 - \tilde{x}) = x_0^2 - x_0\tilde{x} + x_0\underline{x} - \underline{x}\tilde{x} = \\ &= x_0^2 - x_0(\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}) + x_0\underline{x} - \underline{x}\tilde{x} = x_0^2 + x_0(\underline{a} \cdot \underline{x}) + |\underline{x}|^2. \quad \square \end{aligned}$$

If $\underline{a} \neq \underline{0}$, a generalized Clifford algebra $\mathcal{C}_n(\underline{a})$ does not have direct sum representation by multivectors. We denote $\mathcal{C}_n^{(0)}(\underline{a}) = \mathbb{R}$ and $\mathcal{C}_n^{(1)}(\underline{a}) = \mathbb{R}^n$. Consider the subspace

$$\mathcal{C}_n^{(2)}(\underline{a}) = \text{Span}\{e_i e_j : i, j = 1, \dots, n \text{ and } i \neq j\}.$$

Multiplication rule (2) states that in addition to the bivectors, the set contains vectors. We can represent it defining

$$\vec{\mathcal{C}}_n^{(2)}(\underline{a}) = \text{Span}\{e_i e_j : i < j\}$$

and then

$$\mathcal{C}_n^{(2)}(\underline{a}) = \vec{\mathcal{C}}_n^{(2)}(\underline{a}) \oplus \mathbb{R}^n.$$

Indeed, if $B \in \mathcal{C}_n^{(2)}(\underline{a})$, using (2) we obtain the representation

$$B = \sum_{i \neq j} b_{ij} e_i e_j = \sum_{i < j} (b_{ij} - b_{ji}) e_i e_j + \sum_{i < j} b_{ji} (a_j e_i + a_i e_j).$$

Similarly, for any $k = 2, \dots, n$, we can represent

$$\mathcal{C}_n^{(k)}(\underline{a}) = \vec{\mathcal{C}}_n^{(k)}(\underline{a}) \oplus \dots \oplus \vec{\mathcal{C}}_n^{(2)}(\underline{a}) \oplus \mathbb{R}^n,$$

where $\mathcal{C}_n^{(k)}(\underline{a})$ is spanned by all products of k basis vectors and $\vec{\mathcal{C}}_n^{(j)}(\underline{a})$ is spanned by all products of j basis vectors in increasing order.

Another consideration is that the vector $\underline{a} \neq \underline{0}$ can be used to divide space by

$$\mathbb{R}^n = V(\underline{a}) \oplus \text{Span}\{\underline{a}\},$$

where

$$V(\underline{a}) = \text{Span}\{\underline{a}\}^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{a} \cdot \underline{x} = 0\}.$$

If $\underline{x} \in V(\underline{a})$, then $\tilde{x} = \underline{x}$ and $\underline{x}^2 = -|\underline{x}|^2$. We have

$$\mathcal{C}\ell(V(\underline{a})) \cong \mathbb{R}_{0,n-1}.$$

4. Powers of vectors. Let us look at algebraic differences a bit more. In a Clifford algebra, the powers \underline{x}^k for $k \in \mathbb{N}$, are easily calculated and they are always either scalars or vectors. In the generalized case, the situation is very different.

From the definition of multiplication, we have

$$\underline{x}^2 = -|\underline{x}|^2 + (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x}.$$

PROPOSITION 4.1. *Let $A, B \in \mathbb{R}$ and $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Hence*

$$(A + B\underline{x})\underline{x} = -B|\underline{x}|^2 + (A + B(\underline{a} \cdot \underline{x}))\underline{x},$$

that is, all the powers \underline{x}^k are proper paravectors, that is, they have a non-zero scalar and vector part.

We calculate

$$\begin{aligned} (A + B\underline{x})\underline{x} &= A\underline{x} + B\underline{x}^2 = A\underline{x} + B(-|\underline{x}|^2 + (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x}) = \\ &= A\underline{x} - B|\underline{x}|^2 + B(\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x} = -B|\underline{x}|^2 + (A + B(\underline{a} \cdot \underline{x}))\underline{x}. \end{aligned} \quad \square$$

We get the following recursive representation for the powers.

PROPOSITION 4.2. If $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, then

$$\underline{x}^k = P_k(\underline{x}) + Q_k(\underline{x})\underline{x},$$

where

$$\begin{aligned} P_j(\underline{x}) &= -Q_{j-1}(\underline{x})|\underline{x}|^2, \\ Q_j(\underline{x}) &= P_{j-1}(\underline{x}) + Q_{j-1}(\underline{x})(\underline{a} \cdot \underline{x}), \end{aligned}$$

starting from $P_1(\underline{x}) = 0$ and $Q_1(\underline{x}) = 1$.

Proof. The first step is

$$\begin{aligned} P_2(\underline{x}) &= -Q_1(\underline{x})|\underline{x}|^2 = -|\underline{x}|^2, \\ Q_2(\underline{x}) &= P_1(\underline{x}) + Q_1(\underline{x})(\underline{a} \cdot \underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x}, \end{aligned}$$

and we obtain

$$\underline{x}^2 = P_2(\underline{x}) + Q_2(\underline{x})\underline{x} = -|\underline{x}|^2 + (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x}.$$

Assume

$$\underline{x}^k = P_k(\underline{x}) + Q_k(\underline{x})\underline{x}.$$

Using the preceding proposition, we calculate

$$\begin{aligned} \underline{x}^{k+1} &= (P_k(\underline{x}) + Q_k(\underline{x})\underline{x})\underline{x} = \\ &= -Q_k(\underline{x})|\underline{x}|^2 + (P_k(\underline{x}) + Q_k(\underline{x})(\underline{a} \cdot \underline{x}))\underline{x}, \end{aligned}$$

that is

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\underline{x}) &= -Q_k(\underline{x})|\underline{x}|^2, \\ Q_{k+1}(\underline{x}) &= P_k(\underline{x}) + Q_k(\underline{x})(\underline{a} \cdot \underline{x}). \end{aligned} \quad \square$$

We observe, that the homogeneous polynomials P_k and Q_k are generated by $|\underline{x}|^2$ and $\underline{a} \cdot \underline{x}$. For example,

$$\begin{aligned} P_2(\underline{x}) &= -|\underline{x}|^2, \\ P_3(\underline{x}) &= -(\underline{a} \cdot \underline{x})|\underline{x}|^2, \\ P_4(\underline{x}) &= |\underline{x}|^4 - (\underline{a} \cdot \underline{x})^2|\underline{x}|^2, \\ Q_2(\underline{x}) &= \underline{a} \cdot \underline{x}, \end{aligned}$$

$$Q_3(\underline{x}) = -|\underline{x}|^2 + (\underline{a} \cdot \underline{x})^2,$$

$$Q_4(\underline{x}) = -2(\underline{a} \cdot \underline{x})|\underline{x}|^2 + (\underline{a} \cdot \underline{x})^3.$$

5. Dirac operators and regular functions. We define the *Dirac operator* by

$$D = \sum_{j=1}^n e_j \partial_{x_j}.$$

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open subset and $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_n(\underline{a})$ a differentiable function. If $Df = 0$ in Ω , the function f is called (*left*) *regular*, and respectively $fD = 0$ is called *right regular*. We define

$$\tilde{D} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \partial_{x_j} = D - \underline{a} \cdot D,$$

where $\underline{a} \cdot D$ is the directional derivative along \underline{a} .

REMARK 5.1 (MONOGENIC FUNCTIONS). *If $\underline{a} = \underline{0}$, we consider functions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{0,n}$. This is the Clifford analysis case. Then the solutions $Df = 0$ (or $fD = 0$) are called left (or right) monogenics.*

PROPOSITION 5.1. *If $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, then*

$$\begin{aligned} D\tilde{\underline{x}} &= \tilde{D}\underline{x} = -n, \\ D\underline{x} &= -n + \underline{a}, \end{aligned} \tag{5}$$

and if $\underline{x} \neq \underline{0}$, then

$$D\underline{x}^{-1} = \frac{n-2}{|\underline{x}|^2}.$$

Proof. Using (3), we calculate

$$D\tilde{\underline{x}} = \sum_{i,j=1}^n e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} x_j = \sum_{j=1}^n e_j \varepsilon_j = -n.$$

Similarly, we have $\tilde{D}\underline{x} = -n$. Since $\underline{x} = \tilde{\underline{x}} + \underline{a} \cdot \underline{x}$, we have

$$D\underline{x} = D\tilde{\underline{x}} + D(\underline{a} \cdot \underline{x}) = -n + \underline{a}.$$

If $\underline{x} \neq \underline{0}$, then we have

$$D\underline{x}^{-1} = -D \frac{\tilde{\underline{x}}}{|\underline{x}|^2} = -\frac{D\tilde{\underline{x}}}{|\underline{x}|^2} - D \frac{1}{|\underline{x}|^2} \tilde{\underline{x}} = \frac{n}{|\underline{x}|^2} + 2 \frac{\underline{x}\tilde{\underline{x}}}{|\underline{x}|^4} = \frac{n-2}{|\underline{x}|^2}. \quad \square$$

We call the constant $-n + \underline{a}$ an *abstract dimension* of the generalized quadratic space \mathbb{R}^n .

PROPOSITION 5.2. $D\underline{x}^2 = (-n + \underline{a})(\underline{a} \cdot \underline{x}) + (-2 + \underline{a})\underline{x}$.

Proof. Since $\underline{x}^2 = (\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x} - |\underline{x}|^2$ and $D\underline{x} = -n + \underline{a}$, we calculate

$$\begin{aligned} D\underline{x}^2 &= -D|\underline{x}|^2 + D(\underline{a} \cdot \underline{x})\underline{x} + (\underline{a} \cdot \underline{x})D\underline{x} = \\ &= -2\underline{x} + \underline{a}\underline{x} + (\underline{a} \cdot \underline{x})(-n + \underline{a}) = \\ &= (-2 + \underline{a})\underline{x} + (\underline{a} \cdot \underline{x})(-n + \underline{a}). \end{aligned}$$

□

Recall that the Euler operator is defined by

$$E = \sum_{j=1}^n x_j \partial_{x_j}.$$

Then we can prove the following product rule for the Dirac operator.

PROPOSITION 5.3. *If f is a differentiable function taking values in $\mathcal{C}_n(\underline{a})$, then*

$$\begin{aligned} D(\underline{x}f) &= (-n + \underline{a})f - \tilde{\underline{x}}Df - 2Ef + \underline{x}(\underline{a} \cdot D)f, \\ \tilde{D}(\underline{x}f) &= -nf - \tilde{\underline{x}}Df - 2Ef, \\ D(\tilde{\underline{x}}f) &= -nf - \underline{x}\tilde{D}f - 2Ef. \end{aligned}$$

Proof. We calculate

$$D(\tilde{\underline{x}}f) = (D\tilde{\underline{x}})f + \sum_{i,j=1}^n e_i \varepsilon_j x_j \partial_{x_i} f.$$

Using (3), (4) and (5), we obtain

$$\begin{aligned} D(\tilde{\underline{x}}f) &= -nf - \sum_{i,j=1}^n e_j \varepsilon_i x_j \partial_{x_i} f + 2 \sum_{j=1}^n e_j \varepsilon_j x_j \partial_{x_j} f = \\ &= -nf - \underline{x}\tilde{D}f - 2Ef. \end{aligned}$$

Since $\underline{x} = \tilde{\underline{x}} + \underline{a} \cdot \underline{x}$, we have

$$\begin{aligned} D(\underline{x}f) &= D((\tilde{\underline{x}} + \underline{a} \cdot \underline{x})f) = D(\tilde{\underline{x}}f) + D((\underline{a} \cdot \underline{x})f) = \\ &= (-n + \underline{a})f - \underline{x}\tilde{D}f - 2Ef + (\underline{a} \cdot \underline{x})Df = \\ &= (-n + \underline{a})f - \tilde{\underline{x}}Df - 2Ef + \underline{x}(\underline{a} \cdot D)f. \end{aligned}$$

Moreover,

$$\tilde{D}(\underline{x}f) = D(\underline{x}f) - \underline{a}f - \underline{x}(\underline{a} \cdot D)f = -nf - \tilde{\underline{x}}Df - 2Ef.$$

□

Using the preceding operators, we can factorize the Laplacian

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$$

as usual.

PROPOSITION 5.4. $D\tilde{D} = \tilde{D}D = -\Delta$.

Proof. Let f be a twice differentiable function. We calculate

$$\begin{aligned}
 D\tilde{D}f &= \sum_{i,j=1}^n e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \\
 &= \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} f + \sum_{j=1}^n e_j \varepsilon_j \partial_{x_j}^2 f + \sum_{i>j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \\
 &= \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} f - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 f + \sum_{i<j} e_j \varepsilon_i \partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \\
 &= \sum_{i<j} (e_i \varepsilon_j + e_j \varepsilon_i) \partial_{x_i} \partial_{x_j} f - \Delta f = -\Delta f,
 \end{aligned}$$

where we use (3) and (4). Similarly, we calculate $\tilde{D}D = -\Delta$. □

This property allows us to prove the following classical results.

PROPOSITION 5.5. *If $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_n(\underline{a})$ is regular, its component functions are harmonic.*

PROPOSITION 5.6. *If $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_n(\underline{a})$ is harmonic, then*

$$Df - (\underline{a} \cdot D)f$$

is regular in Ω .

From Proposition 5.3, we obtain the following results.

PROPOSITION 5.7. *If $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_n(\underline{a})$ is regular, then*

- (a) $\tilde{D}(\underline{x}f) = -nf - 2Ef$,
- (b) $\Delta(\underline{x}f) = 0$, that is, $\underline{x}f$ is harmonic.

PROPOSITION 5.8. *If $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_n(\underline{a})$ satisfies $\tilde{D}f = 0$, then*

- (a) $D(\tilde{\underline{x}}f) = -nf - 2Ef$,
- (b) $\Delta(\tilde{\underline{x}}f) = 0$, that is, $\tilde{\underline{x}}f$ is harmonic.

6. Vector and paravector-valued solutions. Let us look at two examples in this section. The examples illustrate the role of the vector \underline{a} among the regular functions.

PROPOSITION 6.1. *Consider a vector valued differentiable function*

$$f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n e_j f_j(\underline{x}).$$

Then

$$Df = \sum_{i<j} e_i e_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) + (\underline{a} \cdot D)f - D \cdot f.$$

Hence, f is regular if and only if

$$\partial_{x_i} f_j = \partial_{x_j} f_i, \quad (\underline{a} \cdot D)f = 0, \quad D \cdot f = 0.$$

Proof. We substitute $e_j = \varepsilon_j + a_j$ and we have

$$f = \sum_{j=1}^n (\varepsilon_j + a_j) f_j = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j f_j(\underline{x}) + \underline{a} \cdot f = \tilde{f} + \underline{a} \cdot f.$$

Hence, using (4),

$$\begin{aligned} D\tilde{f} &= \sum_{i,j=1}^n e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} f_j = \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} f_j + \sum_{j=1}^n e_j \varepsilon_j \partial_{x_j} f_j + \sum_{i>j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} f_j = \\ &= \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} f_j + \sum_{i<j} e_j \varepsilon_i \partial_{x_j} f_i - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j = \\ &= \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_i} f_j - \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j \partial_{x_j} f_i - D \cdot f = \\ &= \sum_{i<j} e_i \varepsilon_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) - D \cdot f = \\ &= \sum_{i<j} e_i (e_j - a_j) (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) - D \cdot f = \\ &= \sum_{i<j} e_i e_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) - \sum_{i<j} e_i a_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) - D \cdot f. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} D(\underline{a} \cdot f) &= \sum_{i=1}^n a_i Df_i = \sum_{i,j=1}^n e_j a_i \partial_{x_j} f_i = \\ &= \sum_{i<j} e_j a_i \partial_{x_j} f_i + \sum_{i>j} e_j a_i \partial_{x_j} f_i + \sum_{j=1}^n e_j a_j \partial_{x_j} f_j = \\ &= \sum_{i<j} e_j a_i \partial_{x_j} f_i + \sum_{i<j} e_i a_j \partial_{x_i} f_j + \sum_{j=1}^n e_j a_j \partial_{x_j} f_j, \end{aligned}$$

and we obtain

$$\begin{aligned} Df &= \sum_{i<j} e_i e_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) - \sum_{i<j} e_i a_j \partial_{x_i} f_j + \sum_{i<j} e_i a_j \partial_{x_j} f_i - D \cdot f + \\ &+ \sum_{i<j} e_j a_i \partial_{x_j} f_i + \sum_{i<j} e_i a_j \partial_{x_i} f_j + \sum_{j=1}^n e_j a_j \partial_{x_j} f_j = \\ &= \sum_{i<j} e_i e_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) + \sum_{i<j} e_i a_j \partial_{x_j} f_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n e_i a_i \partial_{x_i} f_i + \sum_{i>j} e_i a_j \partial_{x_i} f_j - D \cdot f. \end{aligned}$$

The middle sum terms are obtained in the form

$$\begin{aligned} & \sum_{i < j} e_i a_j \partial_{x_j} f_i + \sum_{i=1}^n e_i a_i \partial_{x_i} f_i + \sum_{i > j} e_i a_j \partial_{x_i} f_j = \\ & = \sum_{i,j=1}^n e_i a_j \partial_{x_j} f_i = \left(\sum_{j=1}^n a_j \partial_{x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^n e_i f_i \right) = (\underline{a} \cdot D) f. \end{aligned}$$

We conclude

$$Df = \sum_{i < j} e_i e_j (\partial_{x_i} f_j - \partial_{x_j} f_i) + (\underline{a} \cdot D) f - D \cdot f. \quad \square$$

When $\underline{a} = \underline{0}$, the solution is a vector-valued monogenic function. Therefore, a regular vector-valued function is a monogenic function whose directional derivative in the direction \underline{a} vanishes, i.e. the function is constant in this direction.

COROLLARY 6.1. *A paravector-valued differentiable function*

$$f(\underline{x}) = f_0(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}),$$

where

$$\underline{f}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n e_j f_j(\underline{x}),$$

is regular if and only if

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} f_j &= \partial_{x_j} f_i, \quad \text{for } i, j = 1, \dots, n, \\ (\underline{a} \cdot D) \underline{f} + D f_0 &= 0, \\ D \cdot \underline{f} &= 0. \end{aligned}$$

Thus, a regular paravector-valued function $f = f_0 + \underline{f}$ is a monogenic vector-valued function \underline{f} whose directed derivative in the direction \underline{a} is $-Df_0$.

7. Cauchy's integral formula. In some situations, the generalized theory and the Clifford analysis are exactly the same in form and proof. One such example will be presented next. It is assumed that the reader knows the structure of the proof of Cauchy's formula in the Clifford analysis case (see e.g. [7, 8]). We calculate the Cauchy kernel as usual.

PROPOSITION 7.1 (CAUCHY KERNEL). *The Cauchy kernel is of the form*

$$E(\underline{x}) = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{\underline{x}^{-1}}{|\underline{x}|^{n-2}}$$

and it is left and right regular for $\underline{x} \neq 0$. In the kernel, ω_{n-1} is the surface area of the unit sphere in \mathbb{R}^n .

Proof. We start from the Newton potential

$$N(\underline{x}) = \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}|\underline{x}|^{n-2}},$$

which defines the fundamental solution for the Laplace equation, that is, $\Delta N = \delta$. We calculate

$$\partial_{x_j} N(\underline{x}) = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{x_j}{|\underline{x}|^n}$$

and

$$DN(\underline{x}) = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^n}.$$

We define the Cauchy kernel by

$$\begin{aligned} E(\underline{x}) &= -\tilde{D}N(\underline{x}) = -(D - \underline{a} \cdot D)N(\underline{x}) = \\ &= -DN(\underline{x}) + \underline{a} \cdot DN(\underline{x}) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^n} - \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{\underline{a} \cdot \underline{x}}{|\underline{x}|^n}. \end{aligned}$$

Since

$$\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x} = \tilde{\underline{x}},$$

we have

$$E(\underline{x}) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{\tilde{\underline{x}}}{|\underline{x}|^n} = -\frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{\underline{x}^{-1}}{|\underline{x}|^{n-2}}. \quad \square$$

Although the Cauchy kernel looks formally the same as in the classical case, it is nevertheless of paravector valued.

The proof for the Clifford-Stokes formula is identical:

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma g = \int_{\Omega} ((fD)g + f(Dg))dV,$$

since in

$$d(f d\sigma g) = ((fD)g + f(Dg))dV$$

we use only the product rule of the exterior derivative d .

In the proof of the Cauchy formula, it is important to evaluate the integral

$$\int_{\partial B_r(\underline{x})} E(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}),$$

where $B_r(\underline{x})$ is the r -ball centered at \underline{x} and $n(\underline{y})$ the outward pointing unit vector on the boundary. The unit normal is as usual

$$n(\underline{y}) = \frac{\underline{y} - \underline{x}}{r}$$

and hence

$$\int_{\partial B_r(\underline{x})} E(\underline{y} - \underline{x}) n(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial B_r(\underline{x})} \frac{(\underline{y} - \underline{x})^{-1}}{|\underline{y} - \underline{x}|^{n-2}} \frac{\underline{y} - \underline{x}}{r} f(\underline{y}) dS(\underline{y}) =$$

$$= \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{\partial B_r(\underline{x})} f(\underline{y}) dS(\underline{y}) \rightarrow f(\underline{x})$$

when $r \rightarrow 0$. So, this part of the proof is exactly the same as in the classical case.

THEOREM 7.1 (CAUCHY INTEGRAL FORMULA). *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be an open set with a smooth boundary, let $f : U \rightarrow \mathcal{C}_n(\underline{a})$ be a regular function, and $\bar{\Omega} \subset U$. Then*

$$f(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} E(\underline{y} - \underline{x}) d\sigma(\underline{y}) f(\underline{y})$$

for any $\underline{x} \in \Omega$.

We conclude that in above the only difference is the interpretation of the Cauchy kernel and the proof itself is identical. A more detailed treatment of this issue is naturally unnecessary.

8. Regular functions generated by the Cauchy kernel. Let us use the classic multi-index notation, i.e. let $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ for all $j = 1, \dots, n$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $\underline{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ and $\partial_{\underline{x}}^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. We define paravector valued regular functions

$$U_\alpha(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}}^\alpha \frac{\tilde{\underline{x}}}{|\underline{x}|^n}.$$

Indeed, if $U_\alpha = U_0^{(\alpha)} + \underline{U}^{(\alpha)}$, we have

$$U_0^{(\alpha)}(\underline{x}) = -\partial_{\underline{x}}^\alpha \frac{\underline{a} \cdot \underline{y}}{|\underline{x}|^n}, \quad \underline{U}^{(\alpha)}(\underline{x}) = \partial_{\underline{x}}^\alpha \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^n}.$$

REMARK 8.1. *These functions are useful, when we want to find Taylor series, using*

$$\frac{1}{|\underline{y} - \underline{x}|^{n-2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\underline{x} \cdot D_{\underline{y}})^k \frac{1}{|\underline{y}|^{n-2}},$$

see e.g. [9, p. 34], and the Cauchy formula in the above.

The multi-index Leibniz rule is

$$\partial_{\underline{x}}^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_{\underline{x}}^\beta f) (\partial_{\underline{x}}^{\alpha-\beta} g).$$

Since

$$\partial_{\underline{x}}^\beta (\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}) = 0$$

for $|\beta| \geq 2$, we obtain

$$\begin{aligned} U_\alpha(\underline{x}) &= \partial_{\underline{x}}^\alpha \frac{\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}}{|\underline{x}|^n} = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_{\underline{x}}^\beta (\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}) \partial_{\underline{x}}^{\alpha-\beta} \frac{1}{|\underline{x}|^n} = \\ &= (\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}) \partial_{\underline{x}}^\alpha \frac{1}{|\underline{x}|^n} + \sum_{j=1}^n \binom{\alpha}{\epsilon_j} \partial_{x_j} (\underline{y} - \underline{a} \cdot \underline{x}) \partial_{\underline{x}}^{\alpha-\epsilon_j} \frac{1}{|\underline{x}|^n} = \end{aligned}$$

$$= (\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}) \partial_{\underline{x}}^{\alpha} \frac{1}{|\underline{x}|^n} + \sum_{j=1}^n \binom{\alpha}{\epsilon_j} (e_j - a_j) \partial_{\underline{x}}^{\alpha - \epsilon_j} \frac{1}{|\underline{x}|^n}$$

where $\epsilon_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ is a unit multi-index. We define polynomials p_{α} by

$$\partial_{\underline{x}}^{\alpha} \frac{1}{|\underline{x}|^n} = \frac{p_{\alpha}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha|}}.$$

Hence, the regular functions are of the form

$$U_{\alpha}(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{a} \cdot \underline{x}) \frac{p_{\alpha}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha|}} + \sum_{j=1}^n \alpha_j (e_j - a_j) \frac{p_{\alpha - \epsilon_j}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha|-2}}.$$

Let us take a closer look at the polynomial. We have

$$\partial_{\underline{x}}^{\alpha + \epsilon_j} \frac{1}{|\underline{x}|^n} = \frac{p_{\alpha + \epsilon_j}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha + \epsilon_j|}}.$$

and

$$\begin{aligned} \partial_{\underline{x}}^{\alpha + \epsilon_j} \frac{1}{|\underline{x}|^n} &= \partial_{x_j} \frac{p_{\alpha}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha|}} = -(n+2|\alpha|)x_j \frac{p_{\alpha}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha|+2}} + \frac{\partial_{x_j} p_{\alpha}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha|}} = \\ &= \frac{-(n+2|\alpha|)x_j p_{\alpha}(\underline{x}) + |\underline{x}|^2 \partial_{x_j} p_{\alpha}(\underline{x})}{|\underline{x}|^{n+2|\alpha + \epsilon_j|}}, \end{aligned}$$

and by comparing these, we get the differential-recurrence relations

$$p_{\alpha + \epsilon_j}(\underline{x}) = -(n+2|\alpha|)x_j p_{\alpha}(\underline{x}) + |\underline{x}|^2 \partial_{x_j} p_{\alpha}(\underline{x})$$

and $p_0(\underline{x}) = 1$. Multiplying the recursion both sides by $|\underline{x}|^{-2|\alpha| - n - 2}$, we get

$$|\underline{x}|^{-2|\alpha| - n - 2} p_{\alpha + \epsilon_j}(\underline{x}) = -(n+2|\alpha|)y_j |\underline{x}|^{-2|\alpha| - n - 2} p_{\alpha}(\underline{x}) + |\underline{x}|^{-2|\alpha| - n} \partial_{x_j} p_{\alpha}(\underline{x}),$$

that is,

$$|\underline{x}|^{-2|\alpha| - n - 2} p_{\alpha + \epsilon_j}(\underline{x}) = \partial_{x_j} (|\underline{x}|^{-2|\alpha| - n} p_{\alpha}(\underline{x}))$$

or

$$p_{\alpha + \epsilon_j}(\underline{x}) = |\underline{x}|^{2|\alpha| + n + 2} \partial_{x_j} (|\underline{x}|^{-2|\alpha| - n} p_{\alpha}(\underline{x})).$$

Let us consider linear operators

$$L_j f(\underline{x}) = |\underline{x}|^{2|\alpha| + n + 2} \partial_{x_j} (|\underline{x}|^{-2|\alpha| - n} f(\underline{x})),$$

satisfying

$$L_j(1) = -(2|\alpha| + n)x_j$$

and

$$L_j(x_j^m) = x_j^{m-1} (m|\underline{x}|^2 - (2|\alpha| + n)x_j^2) =$$

$$= mx_1^2 x_j^{m-1} + \dots + (m - 2|\alpha| - n)x_j^{m+1} + \dots + mx_n^2 x_j^{m-1}.$$

Similarly,

$$\begin{aligned} L_j(\underline{x}^\alpha) &= x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_{j-1}} L_j(x_j^{\alpha_j}) x^{\alpha_{j+1}} \dots x^{\alpha_n} = \\ &= x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_{j-1}} (\alpha_j x_1^2 x_j^{\alpha_j-1} + \dots + \\ &+ (\alpha_j - 2|\alpha| - n)x_j^{\alpha_j+1} + \dots + \alpha_j x_n^2 x_j^{\alpha_j-1}) x^{\alpha_{j+1}} \dots x^{\alpha_n} = \\ &= \alpha_j \underline{x}^{\alpha+2\epsilon_1-\epsilon_j} + \dots + \alpha_j \underline{x}^{\alpha+2\epsilon_{j-1}-\epsilon_j} + (\alpha_j - 2|\alpha| - n) \underline{x}^{\alpha+\epsilon_j} + \\ &+ \alpha_j \underline{x}^{\alpha+2\epsilon_{j+1}-\epsilon_j} + \dots + \alpha_j \underline{x}^{\alpha+2\epsilon_n-\epsilon_j} \end{aligned}$$

and

$$p_{\alpha+\epsilon_j}(\underline{x}) = L_j(p_\alpha(\underline{x})).$$

Conclusion. This paper considers analysis with generalized Clifford algebras. The central point of the analysis is the effect of the direction vector \underline{a} , which determines the input on the theory. Most of the results of the classical Clifford analysis can be converted almost as is to the generalized case. The biggest differences come in situations where powers of a vector variable are needed. The effect of the vector \underline{a} on the class of regular functions still needs to be examined further.

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author’s Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments. The author is grateful to his family, whose understanding and patience has helped in the writing this article.

References

1. Yaglom I. M. *Complex Numbers and Their Application in Geometry*. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 192 pp. (In Russian)
2. Kanzaki T. On the quadratic extensions and the extended Witt ring of a commutative ring, *Nagoya Math. J.*, 1973, vol. 49, pp. 127–141. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0027763000015348>.
3. Helmstetter J., Micali A., Revoy P. Generalized quadratic modules, *Afr. Mat.*, 2012, vol. 23, no. 1, pp. 53–84. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13370-011-0018-x>.
4. Tutschke W., Vanegas C. J. Clifford algebras depending on parameters and their applications to partial differential equations, In: *Some Topics on Value Distribution and Differentiability in Complex and p-Adic Analysis*, Mathematics Monograph Series, 11; eds. A. Escassut, W. Tutschke, C. C. Yang. Beijing, Science Press, 2008, pp. 430–450.
5. Bourbaki N. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 9*. Berlin, Springer, 2007, 211 pp.
6. Chevalley C. *Collected Works*, vol. 2, The algebraic theory of spinors and Clifford algebras, eds. P. Cartier, C. Chevalley. Berlin, Springer, 1997, xiv+214 pp.
7. Delanghe R., Sommen F., Souček V. *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions. A Function Theory for the Dirac Operator*, Mathematics and its Applications, vol. 53. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1992, xvii+485 pp.
8. Gürlebeck K., Habetha K., Sprößig W. *Funktionentheorie in der Ebene und im Raum*, Grundstudium Mathematik. Basel, Birkhäuser, 2006, xiii+406 pp.
9. Müller C. Properties of the legendre functions, In: *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Mathematics, 17. Berlin, Springer, 1966, pp. 29–37. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0094786>.

УДК 512.646.7:517.95

Анализ обобщенных алгебр Клиффорда

H. OrelmaTampere University,
Kalevantie 4, Tampere, 33100, Finland.

Аннотация

Изучается вопрос, связанный с обобщенными алгебрами Клиффорда $C_n(\underline{a})$, где \underline{a} — ненулевой вектор. Если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис, операция умножения определяется соотношениями

$$e_j^2 = a_j e_j - 1,$$
$$e_i e_j + e_j e_i = a_i e_j + a_j e_i,$$

где $a_j = e_j \cdot \underline{a}$. Случай $\underline{a} = \underline{0}$ соответствует классической алгебре Клиффорда. Определяется оператор Дирака $D = \sum_j e_j \partial_{x_j}$ и регулярные функции как его нулевое решение. Изучаются алгебраические свойства рассматриваемой алгебры. Доказываются основные формулы для оператора Дирака и изучаются свойства регулярных функций.

Ключевые слова: алгебра Клиффорда–Канзаки, обобщенная алгебра Клиффорда, оператор Дирака, регулярная функция.

Получение: 27 декабря 2022 г. / Исправление: 16 февраля 2023 г. /
Принятие: 27 февраля 2023 г. / Публикация онлайн: 30 марта 2023 г.

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант рукописи.

Благодарности. Автор благодарен своей семье, чье понимание и терпение помогло в написании этой статьи.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Orelma H. Analysis on generalized Clifford algebras, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 7–22. EDN: UQWDOF. DOI: [10.14498/vsgtu1973](https://doi.org/10.14498/vsgtu1973).

Сведения об авторе

[Heikki Orelma](https://orcid.org/0000-0002-8251-4333)  <https://orcid.org/0000-0002-8251-4333>

D.Sc. (Tech.), Adjunct Professor; Researcher; Dept of Mechanics and Mathematics;

e-mail: Heikki.Orelma@tuni.fi



УДК 517.984.5

Сеть пространств Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции

*Р. С. Сакс*Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН,
Россия, 450077, Уфа, ул. Чернышевского, 112.

Аннотация

В работе рассматривается шкала пространств Соболева $\mathbf{H}^m(G)$ векторных полей в ограниченной области G из \mathbb{R}^3 с гладкой границей Γ . Операторы градиент дивергенции и ротор ротора ($\nabla \operatorname{div}$ и rot^2) и их степени являются аналогами скалярного оператора Δ^m в \mathbb{R}^3 и порождают пространства $\mathbf{A}^{2k}(G)$ и $\mathbf{W}^m(G)$ потенциальных и вихревых полей, где числа $k, m > 0$ — целые.

Доказано, что $\mathbf{A}^{2k}(G)$ и $\mathbf{W}^m(G)$ являются проекциями пространств Соболева $\mathbf{H}^{2k}(G)$ и $\mathbf{H}^m(G)$ на подпространства \mathcal{A} и \mathcal{B} в $\mathbf{L}_2(G)$. Их прямые суммы $\mathbf{A}^{2k}(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ образуют сеть пространств, элементами которой являются классы $\mathbf{C}(2k, m) \equiv \mathbf{A}^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$.

Рассмотрены пространства \mathbf{A}^{-m} и \mathbf{W}^{-m} , которые соответствуют пространствам \mathbf{A}^m и \mathbf{W}^m . Также рассмотрены прямые суммы $\mathbf{A}^k(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ для любых целых чисел k и m .

В пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ строится ортонормированный базис, состоящий из базисов ортогональных подпространств \mathcal{A} и \mathcal{B} . Его элементы — собственные поля операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$. Доказательство их гладкости — важный этап разработанной теории.

В сети $\{\mathbf{C}(k, m)\}_{k, m}$ исследованы модельные краевые задачи для операторов $\operatorname{rot} + \lambda I$, $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$, их суммы, а также для оператора Стокса. Получены условия разрешимости для рассматриваемых модельных задач.

Ключевые слова: пространство Лебега, пространства Соболева векторных полей, градиент, дивергенция, ротор, потенциальные поля, вихревые поля, поля Бельтрами, эллиптические краевые задачи, спектральные задачи.

Получение: 11 октября 2022 г. / Исправление: 9 февраля 2023 г. /
Принятие: 13 марта 2023 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сакс Р. С. Сеть пространств Соболева и краевые задачи для операторов вихрь и градиент дивергенции // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 23–49. EDN: TXBBDP. DOI: 10.14498/vsgtu1961.

Сведения об авторе

Ромэн Семенович Сакс  доктор физико-математических наук; профессор;
e-mail: romen-saks@yandex.ru

1. Основные подпространства $\mathbf{L}_2(G)$

Рассмотрим линейные пространства над полем \mathbb{R} действительных чисел. Через $\mathbf{L}_2(G)$ обозначим пространство Лебега вектор-функций (полей), квадратично интегрируемых в G с внутренним произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_G \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

и нормой $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$.

1.1. Шкала пространств Соболева. Пространство Соболева, состоящее из полей, принадлежащих $\mathbf{L}_2(G)$ вместе с обобщенными производными до порядка $m > 0$, обозначается через $\mathbf{H}^m(G)$, $\|\mathbf{f}\|_m$ — норма его элемента \mathbf{f} ; $\mathbf{H}^0(G) \equiv \mathbf{L}_2(G)$.

$\mathbf{H}^m(G)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_m = (\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \int_G \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \partial^\alpha \mathbf{f} \cdot \partial^\alpha \mathbf{g} \, dx, \quad \|\mathbf{f}\|_m^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{f})_m.$$

Замыкание в норме $\mathbf{H}^m(G)$ множества $[C_0^\infty(G)]^3$ обозначается через $\mathbf{H}_0^m(G)$. Двойственное пространство Соболева отрицательного порядка $\mathbf{H}^{-m}(G)$ сопряжено с $\mathbf{H}_0^m(G)$.

С. Л. Соболев предложил всю цепь вложенных пространств:

$$\subset \mathbf{H}^m \subset \dots \subset \mathbf{H}^1 \subset \mathbf{L}_2 \subset \mathbf{H}^{-1} \subset \dots \subset \mathbf{H}^{-m} \subset .$$

В [1, § 9 гл. 12] он обозначал их $W_2^{(m)}(G)$. Мы будем обозначать их $\mathbf{H}^m(G)$, следуя книгам В. П. Михайлова [2] и В. А. Солонникова с Н. Н. Уральцевой [3].

В области G с гладкой границей Γ в каждой точке $y \in \Gamma$ определена нормаль $\mathbf{n}(y)$ к Γ . Поле \mathbf{u} из $\mathbf{H}^{m+1}(G)$ имеет на Γ след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ его нормальной компоненты, который принадлежит пространству Соболева—Слободецкого $\mathbf{H}^{m+1/2}(G)$, $|\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{m+1/2}$ — его норма.

1.2. Потенциальные и соленоидальные поля в $\mathbf{L}_2(G)$. Подобно тому как течения жидкости разделяют на ламинарные и турбулентные, векторные поля в $\mathbf{L}_2(G)$ разделяются на потенциальные (безвихревые) и соленоидальные.

Потенциальные (irrotational) поля \mathbf{f} и соленоидальные поля \mathbf{g} в $\mathbf{L}_2(G)$ впервые выделил Герман Вейль в статье [4] условиями ортогональности:

$$(\mathbf{f}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^1(G), \quad (\mathbf{g}, \nabla \psi) = 0 \quad \forall \psi \in C_0^1(G).$$

С. Л. Соболев в статье [5] (1954 г.) приводит другой способ разложения $\mathbf{L}_2(\Omega)$, предположив, что область Ω гомеоморфна шару.

Мы используем разложение Z. Yoshida и Y. Giga [6]: по определению $\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1(G)\}$, а \mathcal{B} — ортогональное дополнение \mathcal{A} в $\mathbf{L}_2(G)$.

Пространство $\mathcal{B}(G)$ также обозначается следующим образом:

$$\mathcal{B}(G) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } G, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\},$$

так как из соотношений ортогональности $(\mathbf{u}, \nabla h) = 0$ для любой $h \in H^1(G)$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(G)$ вытекает, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в G , $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0$.¹ Значит,

$$\mathbf{L}_2(G) = \mathcal{A}(G) \oplus \mathcal{B}(G). \quad (1.1)$$

Если граница Γ имеет род $\rho > 0$, то \mathcal{A} содержит подпространство потенциальных полей:

$$\mathcal{A}_H = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G) : \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \text{ в } G, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = 0\}, \quad (1.2)$$

а \mathcal{B} — подпространство безвихревых соленоидальных полей:

$$\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \text{ в } G, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0\}. \quad (1.3)$$

Размерность \mathcal{B}_H равна ρ [7], а его базисные поля $\mathbf{h}_j \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$, $j = 1, \dots, \rho$, $\mathcal{B}_H \subset \mathcal{A}_H$. Размерность \mathcal{A}_H не меньше ρ , а базисные поля $\mathbf{g}_l \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$, $l = 1, \dots, \rho_1 \geq \rho$ (см. п. 1.7).

Отметим, что род $\rho = 0$ у сферы и $\rho = 1$ у тора.

Ортогональное дополнение в \mathcal{A} к \mathcal{A}_H обозначается $\mathbf{A}^0(G)$.

Ортогональное дополнение в \mathcal{B} к \mathcal{B}_H обозначается $\mathbf{V}^0(G)$ и называется классом *вихревых* полей [8]. Так что

$$\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}_H(G) \oplus \mathbf{A}^0(G), \quad \mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_H(G) \oplus \mathbf{V}^0(G). \quad (1.4)$$

В шаре B множества \mathcal{A}_H и \mathcal{B}_H пусты и $\mathbf{A}^0 = \mathcal{A}$, а $\mathbf{V}^0 = \mathcal{B}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. О. А. Ладыженская [9], К. Фридрихс [10], Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе [11], а также Э. Б. Быховский и Н. В. Смирнов [12] приводят разложения $\mathbf{L}_2(G)$. В разложении Z. Yoshida и Y. Giga [6] мы заменили символ $L_\sigma^2(G)$ на $\mathcal{B}(G)$ и записали (1.1) как $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Авторы [6] указывают, что разложение (1.4) для $\mathcal{B}(G)$ содержится в книге С. В. Моррей [13].

1.3. Операторы $\nabla \operatorname{div}$ и rot в пространствах \mathcal{A} и \mathcal{B} . Операторы градиент, ротор (вихрь) и дивергенция определяются в трехмерном векторном анализе.² Им соответствует оператор d внешнего дифференцирования на формах ω^k степени $k = 0, 1$ и 2 .

Соотношения $d^2\omega^k = 0$ при $k = 0, 1$ имеют вид $\operatorname{rot} \nabla h = 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ для гладких функций h и \mathbf{u} . Следовательно, операторы $\nabla \operatorname{div}$ и rot аннулируют друг друга:

$$\nabla \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Оператор Лапласа выражается через них и скалярный оператор Δ_c :

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} - (\operatorname{rot})^2 \mathbf{v} = \Delta_c I_3 \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \Delta_c v_j \equiv \operatorname{div} \nabla v_j. \quad (1.5)$$

Оператор Лапласа эллиптический [14–17], а операторы rot и $\nabla \operatorname{div}$ не являются эллиптическими. Они вырождены, причем $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$, а $\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ при $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ в смысле $\mathbf{L}_2(G)$ [4]. Поэтому

$$\Delta \mathbf{v} \equiv \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \text{ при } \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \quad \Delta \mathbf{u} \equiv -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} \text{ при } \mathbf{u} \in \mathcal{B}. \quad (1.6)$$

¹Если \mathbf{u} и $\operatorname{div} \mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(G)$, то след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ существует [18].

²См. например, книгу Л. Шварца [14] или курс В. А. Зорича [19].

1.4. Краевые задачи для операторов $\operatorname{rot} + \lambda I$ и $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ в пространствах Соболева. В классе равномерно неэллиптических псевдодифференциальных операторов Б. Вайнберга и В. Грушина [20] автор выделил в [21] подкласс [REES p] обобщенно эллиптических дифференциальных операторов и доказал, что операторы $\operatorname{rot} + \lambda I$ и $\nabla \operatorname{div} + \lambda I$ первого и второго порядков при $\lambda \neq 0$ принадлежат классу [REES 1]. В пространствах Соболева $\mathbf{H}^s(G)$ изучены краевые задачи. Им соответствуют операторы \mathbb{A} и \mathbb{B} , которые расширяются до эллиптических по В. Солонникову переопределенных операторов \mathbb{A}_R и \mathbb{B}_R , ограниченных в пространствах $\mathbf{H}^s(G)$ при целом $s \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_R \mathbf{u} &\equiv \begin{pmatrix} \operatorname{rot} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{div} \\ \gamma \mathbf{n} \cdot \end{pmatrix} \mathbf{u} : \mathbf{H}^{s+1}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{H}^s(G) \\ H^s(G) \\ H^{s+1/2}(\Gamma) \end{pmatrix}, \\ \mathbb{B}_R \mathbf{u} &\equiv \begin{pmatrix} \nabla \operatorname{div} + \lambda I \\ \lambda \operatorname{rot} \\ \gamma \mathbf{n} \cdot \end{pmatrix} \mathbf{u} : \mathbf{H}^{s+2}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{H}^s(G) \\ \mathbf{H}^{s+1}(G) \\ H^{s+3/2}(\Gamma) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из Теоремы 1.1 В. Солонникова [16] в работе [21] доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор \mathbb{A}_R имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{s+1}(G)$ и $\lambda \neq 0$ (с постоянной $C_s = C_s(\lambda) > 0$, зависящей только от s, λ) выполняется оценка*

$$C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leq \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_s + |\lambda| \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 2. *Оператор \mathbb{B}_R имеет левый регуляризатор. Его ядро конечномерно и для любых $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{s+2}(G)$ и $\lambda \neq 0$ (с постоянной $C_s = C_s(\lambda) > 0$, зависящей только от s, λ) выполняется оценка*

$$C_s \|\mathbf{v}\|_{s+2} \leq |\lambda| \|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|_{s+1} + \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}\|_s + |\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})|_{s+3/2} + \|\mathbf{v}\|_s. \quad (1.8)$$

В теоремах нет топологических ограничений на область, лишь предполагается ее связность, ограниченность и гладкость границы.

Оценка (1.7) известна [6]. Мы показываем, что для операторов класса [REES p] такие оценки легко получать из [16, Теорема 1.1].

Формулы $\mathbf{u} \cdot \nabla h + h \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(h\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div}[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$, где $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ и $[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$ — скалярное и векторное произведения в \mathbb{R}^3 , и интегрирование по G используются при определении операторов $\nabla \operatorname{div}$ и rot в $\mathbf{L}_2(G)$. Интегрируя и применяя формулу Гаусса—Остроградского, имеем

$$\int_G [\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}] dx = \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{u}] dS, \quad (1.9)$$

$$\int_G [\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}] dx = \int_\Gamma [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{v}] dS. \quad (1.10)$$

1.5. Самосопряженные расширения rot и $\nabla \operatorname{div}$ в $\mathbf{L}_2(G)$. Пусть

$$\mathcal{A}_\gamma(G) = \{\nabla h, h \in H^2(G) : \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0\}, \quad \mathbf{A}_\gamma^0 = \mathbf{A}^0 \cap \mathcal{A}_\gamma,$$

положим

$$\mathbf{W}^1 = \{\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \operatorname{rot} \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0\}, \quad \mathbf{A}^2 = \{\mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^0, \nabla \operatorname{div} \mathbf{f} \in \mathbf{A}_\gamma^0\}.$$

На этих пространствах определяются операторы S и \mathcal{N}_d следующими условиями: $S\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1$ и $\mathcal{N}_d \mathbf{v} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \operatorname{div} \nabla h$ при $\mathbf{v} = \nabla h \in \mathbf{A}^2$.

Пространства $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1$, $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{H}^2$ согласно оценкам (1.7), (1.8) при $s = 0$. Пространство \mathbf{W}^1 плотно в \mathbf{V}^0 , так как $\mathbf{C}_0^\infty(G) \cap \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{W}^1$ плотно в \mathbf{V}^0 .

Аналогично, \mathbf{A}^2 плотно в \mathbf{A}^0 , так как $\mathbf{C}_0^\infty(G) \cap \mathbf{A}_\gamma^0 \subset \mathbf{A}^2$ плотно в \mathbf{A}_γ^0 .

Если поля \mathbf{u} и \mathbf{v} в равенстве (1.9) принадлежат $\mathcal{D}(S)$, то

$$\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = \gamma(\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0,$$

интеграл по Γ зануляется [6] и это равенство принимает вид $(S\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, S\mathbf{v})$.

Аналогично, если поля $\mathbf{u} = \nabla g$ и $\mathbf{v} = \nabla h$ в равенстве (1.10) принадлежат $\mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$, то $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \equiv \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)g = 0$, $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \equiv \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0$, интеграл по Γ равен нулю и это равенство принимает вид $(\mathcal{N}_d \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathcal{N}_d \mathbf{v})$.

Более того, доказано, что операторы S и \mathcal{N}_d суть самосопряженные расширения rot и $\nabla \operatorname{div}$ в $\mathbf{L}_2(G)$ (см. [6, 22]).

1.6. Гладкость собственных полей операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$. Спектральные задачи для операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$ состоят в нахождении ненулевых полей \mathbf{u} и \mathbf{v} и чисел λ и μ таких, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G}), \quad (1.11)$$

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{C}^2(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G}).$$

Из теорем 1, 2 вытекают важные свойства решений спектральных задач операторов *ротор и градиент дивергенции*:

- каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность;
- их собственные поля, принадлежащие $\mathbf{L}_2(G)$, являются гладкими вплоть до границы, если область G имеет гладкую границу.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — решение задачи (1.11).

При $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^1(G) \cap \mathbf{C}(\overline{G})$ это поле есть решение однородной эллиптической задачи:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.12)$$

Согласно теореме 1, эта задача имеет конечное число линейно независимых решений $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{u}_l(\mathbf{x})$, где l зависит от λ и не зависит от \mathbf{u} . Утверждение а) доказано.

Любое решение $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ задачи (1.12) принадлежит $\mathbf{L}_2(G)$, так как

$$\|\mathbf{u}\|^2 \equiv \int_G (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \leq V \max_G |\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}| = V \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\|_{C(\overline{G})}, \quad V = \int_G 1 d\mathbf{x}$$

и $\operatorname{rot} \mathbf{u}_j = \lambda \mathbf{u}_j$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0$ в G , $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_j = 0$. Поэтому $\|\operatorname{rot} \mathbf{u}_j\| = |\lambda| \|\mathbf{u}_j\|$ и оценка (1.7) при $s = 0$ принимает вид $C_0 \|\mathbf{u}\|_1 \leq (|\lambda| + 1) \|\mathbf{u}\|_0$, где постоянная $C_0 > 0$.

Следовательно, $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^1(G)$ и

$$\|\mathbf{u}_j\|_1 \leq C_0^{-1} (|\lambda| + 1) \|\mathbf{u}_j\|_0, \quad \|\mathbf{u}_j\|_0 \leq \sqrt{V} \|\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j\|_{C(\overline{G})}^{1/2}. \quad (1.13)$$

Далее, пусть $s > 0$ целое. Так как $\|\operatorname{rot} \mathbf{u}_j\|_s = |\lambda| \|\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\|_s$, из оценки (1.7) по индукции получаем

$$\|\mathbf{u}_j\|_{s+1} \leq C_s^{-1} (|\lambda| + 1) \|\mathbf{u}_j\|_s \leq \dots \leq C_s^{-1} \dots C_0^{-1} (|\lambda| + 1)^s \|\mathbf{u}_j\|_0.$$

Значит, поле $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^{s+1}(G)$ для любого целого $s \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространства $H^{l+2}(\Omega)$ вложены в $C^l(\bar{\Omega})$ при $l \geq 0$ в трехмерной области Ω и $\|g\|_{C^l(\bar{\Omega})} \leq c_l \|g\|_{H^{l+2}(\Omega)}$ для любой функции $g \in H^{l+2}(\Omega)$, где постоянная $c_l > 0$ не зависит от g (см. [2, Теорема 3, § 6.2]).

Итак, поля $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$ принадлежат $\mathbf{C}^l(\bar{G})$ для любого целого $l \geq 0$. Утверждение б) для ротора доказано.

Аналогично, при $\mu \neq 0$ собственное поле $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^2(G) \cap \mathbf{C}(\bar{G})$ оператора $\nabla \operatorname{div}$ есть решение однородной эллиптической задачи:

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.14)$$

Согласно теореме 2, эта задача имеет конечное число линейно независимых решений $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_k(\mathbf{x})$, где k зависит от μ и не зависит от \mathbf{v} . Утверждение а) доказано.

Любое решение $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ задачи (1.14) принадлежит $\mathbf{L}_2(G)$, так как

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(G)}^2 \leq V \|\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\|_{C(\bar{G})}, \quad V = \int_G 1 dx.$$

Ввиду того, что $\|\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}\| = |\mu| \|\mathbf{v}\|$ в $\mathbf{L}_2(G)$, оценка (1.8) при $s = 0$ принимает вид $C_0 \|\mathbf{v}\|_2 \leq (|\mu| + 1) \|\mathbf{v}\|_0$, причем постоянная $C_0 > 0$.

Значит, $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^2(G)$, и

$$\|\mathbf{v}_j\|_2 \leq C_0^{-1} (|\mu| + 1) \|\mathbf{v}_j\|_0, \quad \|\mathbf{v}_j\|_0 \leq \sqrt{V} \|\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j\|_{C(\bar{G})}^{1/2}.$$

Далее, пусть $s > 0$ целое. Так как $\|\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_j\|_s = |\mu| \|\mathbf{v}_j(\mathbf{x})\|_s$, из оценки (1.8) по индукции получаем

$$\|\mathbf{v}_j\|_{2s+2} \leq C_{2s}^{-1} (|\mu| + 1) \|\mathbf{v}_j\|_{2s} \leq \dots \leq C_{2s}^{-1} \dots C_0^{-1} (|\mu| + 1)^s \|\mathbf{v}_j\|_0. \quad (1.15)$$

Значит, $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ принадлежит $\mathbf{H}^{2s+2}(G) \subset \mathbf{C}^{2s}(\bar{G})$ для любого целого $s \geq 0$. Утверждение б) доказано. \square

1.7. Гладкость базисных полей пространств \mathcal{A}_H и \mathcal{B}_H . Пространства \mathcal{A}_H и \mathcal{B}_H определяются решениями эллиптических систем (1.2) и (1.3) в $\mathbf{L}_2(G)$. Из формул (1.5) видно, что компоненты этих решений являются гармоническими функциями, а значит, они имеют непрерывные производные любого порядка. Это впервые заметил Герман Вейль для решений системы (1.3) (см. [4, Теорема 1]).

Краевые задачи (1.2) и (1.3) удовлетворяют условиям В. Солонникова в теореме 1.1 работы [16]. Откуда получаем, что пространства \mathcal{A}_H и \mathcal{B}_H конечномерны и их базисные поля $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_j(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$, $i = 1, \dots, \rho_1 < \infty$, $j = 1, \dots, \rho < \infty$. Для $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_j(\mathbf{x})$ имеются оценки вида (1.13) с $\lambda = 0$. W. Borchers, H. Sohr доказали [7], что число ρ есть род границы Γ области G . В частности, если область Ω гомеоморфна шару, то $\rho = 0$.

Если область Ω гомеоморфна шару, а \mathbf{u} — решение задачи (1.3), определяющей \mathcal{B}_H , то $\mathbf{u} = \nabla h$, а функция h — решение задачи Неймана для оператора Лапласа:

$$\Delta h = 0 \text{ в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0.$$

Решение этой задачи N есть произвольная постоянная $h = C$. Значит, $\mathbf{u} \equiv 0$ и пространство \mathcal{B}_H пусто.

Рассмотрим пространство \mathcal{A}_H . Решение задачи (1.15) в шаре B , $|\mathbf{x}| < R$, сводится к задаче с условием Неймана:

$$\Delta h = C \text{ в } B, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0,$$

где C — произвольная постоянная. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{x}$ — радиус-вектор, тогда $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ — нормаль на границе шара. Частное решение уравнения Пуассона $\Delta h = C$ имеет вид $h = C|\mathbf{x}|^2/6 = Cr^2/6$. Дифференцируя по r , получаем $\gamma(\mathbf{r} \cdot \nabla)h = CR/3$. Граничное условие Неймана принимает вид $CR/3 = 0$. Значит, $C = 0$ и пространство $\mathcal{A}_H(B)$ в шаре B пусто.

1.8. Ортогональные базисы в \mathcal{A} , \mathcal{B} и в $\mathbf{L}_2(G)$. Пространство \mathbf{A}^2 плотно в \mathbf{A}^0 и $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{H}^2$. Собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора $\nabla \operatorname{div}$ с ненулевыми собственными значениями μ_j принадлежат \mathbf{A}^2 .

Множество собственных значений $\mu = -\nu^2$ этого оператора счетно, отрицательно и каждое из них имеет конечную кратность.

Перенумеруем их в порядке возрастания их модуля: $0 < -\mu_1 \leq -\mu_2 \leq \dots$, повторяя μ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие вектор-функции обозначим через $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ так, чтобы каждому значению $\mu_k = -\nu_k^2$ соответствовала только одна функция \mathbf{v}_k : $\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_k = -\nu_k^2 \mathbf{v}_k$, $\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, выберем ортонормальными, используя процесс ортогонализации Шмидта (см. [23]). Поля, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Их нормируем. Нормированные собственные поля градиента дивергенции обозначим через \mathbf{q}_l , $l = 1, 2, \dots$, норма $\|\mathbf{q}_l\| = 1$. Они составляют полный ортонормированный базис в классе \mathbf{A}^0 . Зафиксируем его.

Аналогично строится базис в классе \mathbf{V}^0 [21].

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно (1.6), оператор $\Delta \mathbf{u} \equiv -\operatorname{rot}^2 \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$. Собственные векторы ротора всегда встречаются парами: каждому собственному полю \mathbf{u}_j^+ с $\lambda_j > 0$ соответствует собственное поле \mathbf{u}_j^- с $-\lambda_j$. Это свойство операторов в [6] не отмечено.

Зафиксируем в \mathbf{V}^0 ортонормированный базис $\{\mathbf{q}_j^+, \mathbf{q}_j^-\}$, $\mathbf{q}_j^\pm \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = 0, \quad \|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1, \quad j \geq 1. \quad (1.16)$$

Учитывая базисы пространств \mathcal{A}_H , \mathcal{B}_H , видим, что объединение $\{g_l\}$, $\{\mathbf{q}_l\}$, $\{h_j\}$ и $\{\mathbf{q}_j^+, \mathbf{q}_j^-\}$ есть базис объемлющего пространства $\mathbf{L}_2(G)$.

Итак, в пространстве $\mathbf{L}_2(G)$ построен ортонормированный базис, состоящий из базисов двух ортогональных подпространств \mathcal{A} и \mathcal{B} , элементами которого являются гладкие собственные поля операторов rot и $\nabla \operatorname{div}$.

1.9. Явный вид собственных полей ротора в шаре B . Спектральные задачи для операторов ротор и градиент дивергенции в шаре решены автором полностью в [24]. Имеется несколько способов решения спектральной задачи ротора [8, 25, 26].

Учитывая приложения [27] и конкурирующие интересы [26], кратко изложим наш путь решения этой задачи [24].

Собственные числа $\lambda_{n,m}$ ротора в шаре радиуса R равны $\pm\rho_{n,m}/R$, где числа $\pm\rho_{n,m}$ — нули функций

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz} \right)^n \left(\frac{\sin z}{z} \right), \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

Функции $\psi_n(z)$ — цилиндрические функции $J_{n+1/2}(z)$, где $n \geq 0$ — целое. Их элементарный вид (1.17) заметил еще Леонард Эйлер (см. [23, § 23]).

Кратность собственного значения $\lambda_{n,m}^\pm$ равна $2n + 1$.

Пусть $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$ — репер поля $\mathbf{u} = u_r \mathbf{i}_r + u_\theta \mathbf{i}_\theta + u_\varphi \mathbf{i}_\varphi$.

ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (1.16). Ненормированные собственные поля \mathbf{u}_κ^\pm задачи (1.16) в сферических координатах вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\kappa^\pm = & c_\kappa^\pm (\pm\lambda_{n,m}r)^{-1} \psi_n(\pm\lambda_{n,m}r) Y_n^k(\theta, \varphi) \mathbf{i}_r + \\ & + c_\kappa^\pm (\pm\lambda_{n,m}r)^{-1} \operatorname{Re}[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)] (\operatorname{Re} \operatorname{H} Y_n^k \mathbf{i}_\varphi + \operatorname{Im} \operatorname{H} Y_n^k \mathbf{i}_\theta) + \\ & + c_\kappa^\pm (\pm\lambda_{n,m}r)^{-1} \operatorname{Im}[\Phi_n(\pm\lambda_{n,m}r)] (-\operatorname{Im} \operatorname{H} Y_n^k \mathbf{i}_\varphi + \operatorname{Re} \operatorname{H} Y_n^k \mathbf{i}_\theta), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $Y_n^k(\theta, \varphi)$ — сферические функции, оператор $\operatorname{H}v = (\sin^{-1} \theta \partial_\varphi + i \partial_\theta)v$, числа $c_\kappa^\pm \in \mathbb{R}$ — произвольны, $\kappa = (n, m, k)$ — мультииндекс, $m, n \in \mathbb{N}$, $|k| \leq n$, а

$$\Phi_n(\lambda r) = \int_0^r e^{i\lambda(r-t)} \psi_n(\lambda t) t^{-1} dt, \quad \operatorname{Im} \Phi_n(\pm\rho_{n,m}) = 0.$$

Решению этой спектральной задачи способствовали следующие наблюдения автора.

1. Функция $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = ru_r$ — скалярное произведение радиус-вектора \mathbf{x} и решения \mathbf{u} спектральной задачи (1.12) в шаре B — является решением спектральной задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$-\Delta v = \lambda^2 v \quad \text{в } B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0. \quad (1.19)$$

2. Уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в сферических координатах имеют вид двух комплексных уравнений

$$(\partial_r - i\lambda)rw = r^{-1}\operatorname{H}v, \quad Kw = \lambda v - ir^{-1}\partial_r(rv) \quad (1.20)$$

относительно функций $v = ru_r$ и $w = u_\varphi + iu_\theta$ с операторами

$$\operatorname{H}v = (\sin^{-1} \theta \partial_\varphi + i \partial_\theta)v, \quad Kw = \sin^{-1} \theta (\partial_\theta \sin \theta + i \partial_\varphi)w.$$

3. Уравнения (1.19) являются условиями совместности системы (1.20).

Таким образом, решение задачи сводится к решению спектральной задачи Дирихле—Лапласа (1.19). Ее решения — пары $\lambda_\kappa^2 = (\rho_{n,m}/R)^2$ и $v_\kappa = c_\kappa \psi_n(\rho_{n,m}r/R)Y_n^k(\theta, \varphi)$, где $\psi_n(\rho_{n,m}^2) = 0$ (см. [23, гл. V, § 26]). Условие $v(0) = 0$ выполняется, если постоянные $c_\kappa = 0$ при $\kappa = (0, m, 0)$. Числа $\lambda_\kappa^\pm = \pm \rho_{n,m}/R$ оказываются собственными значениями задачи (1.11), а функции $u_{r,\kappa} = v_\kappa/r$ — радиальными компонентами собственных полей. Далее, интегрируя уравнения (1.20) с $\lambda = \lambda_\kappa^+ > 0$ и $v = v_\kappa^+$, а затем с $\lambda_\kappa^- < 0$ и $v = v_\kappa^-$, определяем комплексные функции w_κ^\pm . Они задают касательные компоненты полей \mathbf{u}_κ^\pm , которые определяются однозначно условием $w_\kappa^\pm \in L_2(B)$. Наконец, из радиальных и касательных компонент составляем поля $\mathbf{u}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$. В итоге получаем запись решения в виде (1.18).

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (1.19) на функцию $v = ru_r$ при минимальном собственном значении $\lambda = 4.4934\dots/R$ автор обнаружил в статье [26].

1.10. Явный вид собственных полей $\nabla \operatorname{div}$ в шаре B . Собственные значения оператора $\nabla \operatorname{div}$ равны $-\nu_{n,m}^2$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m}/R$, а числа $\alpha_{n,m}$ — нули производных $\psi'_n(r)$, $n \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$; кратность собственных значений $-\nu_{n,m}^2$ равна $2n + 1$.

Собственные поля \mathbf{v}_κ градиента дивергенции — решения задачи

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}_\kappa = -\nu_\kappa^2 \mathbf{v}_\kappa, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\kappa = 0, \quad \mathbf{v}_\kappa = \nabla g_\kappa \in \mathcal{C}^\infty(\bar{G}).$$

Эта задача сводится к задаче Неймана для скалярного оператора Лапласа и градиенту функций g_κ , так как

$$\nabla \operatorname{div} \nabla g_\kappa \equiv \nabla \Delta_c g_\kappa = \Delta_c(\nabla g_\kappa) = -\nu_\kappa^2(\nabla g_\kappa), \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)g_\kappa = 0.$$

Матричный (3×1) оператор $\nabla \operatorname{div} \nabla g \equiv \nabla \Delta_c g$ эллиптичен.

Соответствующие $-\nu_\kappa^2 \equiv -\nu_{n,m}^2$ собственные функции g_κ имеют вид

$$g_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m}r/R)Y_n^k(\theta, \varphi).$$

Поля $\mathbf{v}_\kappa = \nabla g_\kappa$ являются решениями задачи (1.14); их компоненты v_r , v_θ , v_φ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} v_{r,\kappa}(r, \theta, \varphi) &= c_\kappa(\alpha_{n,m}/R)\psi'_n(\alpha_{n,m}r/R)Y_n^k(\theta, \varphi), \\ (v_\varphi + iv_\theta)_\kappa &= c_\kappa(1/r)\psi_n(\alpha_{n,m}r/R)NY_n^k(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

При $\kappa = (0, m, 0)$ функция $Y_0^0(\theta, \varphi) = 1$, $NY_0^0(\theta, \varphi) = 0$, поэтому

$$v_{r,(0,m,0)}(r) = c_{(0,m,0)}(\alpha_{0,m}/R)\psi'_0(\alpha_{0,m}r/R), \quad (v_\varphi + iv_\theta)_{(0,m,0)} = 0.$$

Построенный базис из собственных полей операторов градиент дивергенции и ротор является полным в $\mathbf{L}_2(B)$, так как $\mathbf{L}_2(B) = \mathbf{A}^0 \oplus \mathbf{V}^0$.

1.11. Визуализация потока с минимальной энергией. Формулы (1.18) удобны при расчетах поля скоростей $\mathbf{u}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$ и визуализации вихревых потоков при заданных $\kappa = (n, m, k)$.

Поля $\mathbf{u}_\kappa^\pm(\mathbf{x})$ при $n = 1$, $\kappa = (1, 1, 0)$ и $\kappa = (1, 1, \pm 1)$ выражаются наиболее просто. Так, компоненты поля $\mathbf{u}_{(1,1,0)}^+(\mathbf{x})$ имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= 2\rho(r\rho)^{-3}(\sin(r\rho) - r\rho \cos(r\rho)) \cos \theta, \\ u_\theta &= (r\rho)^{-3}(\sin(r\rho) - r\rho \cos(r\rho) - (r\rho)^2 \sin(r\rho)) \sin \theta, \\ u_\varphi &= (r\rho)^{-2}((\sin(r\rho) - r\rho \cos(r\rho)) \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Профессор Г. Г. Исламов³ [28], используя эти формулы и программу **Wolfram Mathematica**, осуществил визуализацию линий тока поля $\mathbf{u}_{1,1,0}^+(\mathbf{x})$ ротора при $R = 1$, $\rho = \rho_{1,1} = 4.4934$.⁴ Траектория движения трех соседних точек напоминает ленту, которая наматывается на тороидальную катушку (см. изображение катушки Исламова в [21]).

В связи с задачами астрофизики S. Chandrasekhar, P. C. Kendall изучали собственные поля оператора ротор в цилиндре и в шаре [29]. Они нашли элементарный способ вычисления полей в цилиндре.

D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala в [30] использовали их формулы при изучении магнитогидродинамической турбулентности в цилиндре. В предположении периодичности полей вдоль оси цилиндра они нашли три интегральных инварианта, имеющих квадратичные выражения в терминах спектральных разложений.

J. Cantarella, D. De Turck, H. Gluck, M. Teitel исследовали собственные поля ротора в шаре радиуса b и в шаровом слое. Уравнение (1.19) на функцию $v = ru_r$ при минимальном собственном значении $\lambda_{1,1} = \rho_{1,1}/b > 0$ автор обнаружил в их статье [26], в которой авторы приводят также соответствующую $\lambda_{1,1}$ формулу собственного поля ротора в шаре (см. [26, Theorem A]). К сожалению, с опечаткой, исправив которую, мы приходим к формулам (1.21) для компонент поля $\mathbf{u}_{(1,1,0)}^+(\mathbf{x})$.

В [26, Fig. 1] также представлены интегральные кривые поля $\mathbf{u}_{(1,1,0)}^+(\mathbf{x})$ и приводится их описание: «они заполняют семейство концентрированных “торов” с замкнутой орбитой “ядра”, типичных для осесимметричных собственных полей ротора; специальная орбита начинается на южном полюсе сферы в момент времени $-\infty$, проходит вертикально вверх по оси z и достигает северного полюса ко времени $+\infty$; орбиты на граничной сфере начинаются на северном полюсе в момент времени $-\infty$, продолжают по линиям долготы к южному полюсу до момента времени $+\infty$; имеются две стационарные точки в ее полюсах.»

В статье [26] отмечено, что L. Woltjer использовал векторное поле $\mathbf{u}_{(1,1,0)}^+(\mathbf{x})$ для моделирования магнитного поля в Крабовидной туманности [27].

Не зная об этих работах, Г. Исламов и автор настоящей статьи также исследовали это поле [31].

1.12. Степени оператора Лапласа в классах \mathcal{A} и \mathcal{B} . Из формул (1.6) при $k = 2, 3, \dots$ имеем

$$\Delta^k \mathbf{v} \equiv (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{v} \quad \text{при } \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \quad \Delta^k \mathbf{u} \equiv (-1)^k (\operatorname{rot})^{2k} \mathbf{u} \quad \text{при } \mathbf{u} \in \mathcal{B}. \quad (1.22)$$

³Исламов Галимзян Газизович (02.02.1948–22.11.2017).

⁴<http://wac.36f4.edgecastcdn.net/0036F4/pub/www.wolfram.com/pdf/report-islamov.pdf>

В $L_2(G)$ оператор Δ^k выражается через $(\nabla \operatorname{div})^k$ и $(\operatorname{rot})^{2k}$, а также через скалярный оператор $\Delta_c^k = (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)^k$:

$$\Delta^k \mathbf{v} = (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{v} + (-1)^k (\operatorname{rot})^{2k} \mathbf{v} = \Delta_c^k I_3 \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Эти формулы следуют из формул (1.5), так как операторы rot и $\nabla \operatorname{div}$ аннулируют друг друга.⁵

С. Л. Соболев изучил периодическую задачу π и краевые задачи D и N для скалярного полигармонического уравнения $\Delta^m u = \rho$ в пространствах $W_2^m(\Omega)$ с правой частью — обобщенной функцией (см. [1, § 9, гл. 12]).

В периодическом случае он доказал следующую теорему (цитирую).

ТЕОРЕМА XII.13. *Оператор Δ^m переводит произвольную функцию u из $\bar{W}_2^{(m)}$ в $\Delta^m u = \rho$ — элемент $\bar{L}_2^{(m)*}$. Обратно, для произвольной обобщенной функции ρ из $\bar{L}_2^{(m)*}$ существует функция $u \in \bar{W}_2^{(m)}$ такая, что $\Delta^m u = \rho$. Эта функция определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.*

Операторы $(\nabla \operatorname{div})^p$ и $(\operatorname{rot})^{2q}$, где p и q — натуральные числа, суть аналоги полигармонических операторов Δ^m в классах \mathcal{A} и \mathcal{B} , согласно (1.22).

Мы покажем, что оператор $(\nabla \operatorname{div})^{2p}$ переводит произвольное поле \mathbf{w} из A^{2p} в $(\nabla \operatorname{div})^{2p} \mathbf{w} = \rho$ — элемент $A^{-2p} \equiv (A_0^{2p})^*$, а оператор $(\operatorname{rot})^{2q}$ переводит произвольное поле \mathbf{u} из W^q в $(\operatorname{rot})^{2q} \mathbf{u} = \mathbf{v}$ — элемент $W^{-q} \equiv (W_0^q)^*$.

Имеют место и обратные утверждения (см. теоремы 3 и 4).

2. Пространство \mathcal{A} потенциальных полей

В статье [22] детально рассмотрены структура класса \mathcal{A} потенциальных полей, его базис и оператор \mathcal{N}_d . Здесь мы рассмотрим его подпространства \mathbf{A}^{2k} . По определению

$$\mathcal{A}(G) = \{\nabla h, h \in H^1\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_H \oplus \mathbf{A}^0,$$

где \mathcal{A}_H — ядро оператора $\nabla \operatorname{div}$ в \mathcal{A} , а \mathbf{A}^0 — его ортогональное дополнение;

$$\mathcal{A}_\gamma(G) = \{\nabla h, h \in H^2(G) : \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0\}, \quad \mathcal{A}_\gamma^0 = \mathbf{A}^0 \cap \mathcal{A}_\gamma.$$

Подпространство $\mathbf{A}^2 = \{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma^0 : \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\gamma^0\}$ — область определения оператора \mathcal{N}_d ; оно плотно в \mathbf{A}^0 и $\mathbf{A}^2 \subset \mathbf{H}^2$ (согласно п. 1.5).

Собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ оператора $\nabla \operatorname{div}$ с ненулевыми собственными значениями $(-\nu_j^2) : \nabla \operatorname{div} \mathbf{q}_j = -\nu_j^2 \mathbf{q}_j$, $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j) = 0$ принадлежат пространству \mathbf{A}^2 . Они составляют ортонормированный базис $\{\mathbf{q}_j(\mathbf{x})\}$ в \mathbf{A}^0 .

Проекция поля $\mathbf{f} \in L_2(G)$ на \mathbf{A}^0 имеет вид

$$\mathcal{P}_\mathcal{A} \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}_\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{f}_\mathcal{A}^n) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{f}_\mathcal{A}^n$ — частичные суммы этого ряда.

⁵Они являются проекторами: $\nabla \operatorname{div}$ проектирует $L_2(G)$ на \mathcal{A} , а rot — на \mathcal{B} .

Оператор \mathcal{N}_d определен и совпадает с $\nabla \operatorname{div}$ на \mathbf{A}^2 , поэтому

$$\mathcal{N}_d \mathbf{f}_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \nabla \operatorname{div}(\mathbf{f}_A^n) = - \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^2(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}),$$

если ряд сходится и принадлежит \mathbf{A}^0 . Это так, если $f \in \mathbf{H}^2(G)$.

Доказано, что оператор \mathcal{N}_d замкнут и самосопряжен [22].

2.1. Подпространства \mathbf{A}^{2k} в \mathcal{A} . Рассмотрим еще пространства⁶

$$\mathbf{A}^{2k} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma^0, \dots, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma^0\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно оценке (1.8), пространство $\mathbf{A}^{2k} \subset \mathbf{H}^{2k}$. С другой стороны, оно является проекцией пространства Соболева \mathbf{H}^{2k} порядка $2k$ на класс \mathcal{A} , так как для любого поля $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{2k}$ его проекция $\mathcal{P}_A \mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}$; если же $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}$, то $\mathcal{P}_A \mathbf{f} = \mathbf{f}$, а его проекция на \mathcal{B} равна 0.

Пространство \mathcal{A}_γ^0 ортогонально ядру оператора \mathcal{N}_d в $\mathbf{L}_2(G)$, поэтому \mathcal{N}_d имеет единственный обратный оператор:

$$\mathcal{N}_d^{-1} \mathbf{f}_A = - \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-2}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}).$$

Оператор \mathcal{N}_d^{-1} — компактен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Спектр оператора \mathcal{N}_d^{-1} точечный с единственной точкой накопления в нуле, $\nu_j^{-2} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

2.2. Сопряженные пространства \mathbf{A}^{-2k} . По определению, пространство $H_0^s(G)$ есть замыкание в норме $H^s(G)$ функций из $C_0^\infty(G)$, $\mathcal{A}_0 = \{\nabla h, h \in H_0^1\}$, пространство $\mathbf{A}_0^{2k} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_0, \dots, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_0\}$.

Пространство линейных непрерывных функционалов над \mathbf{A}_0^{2k} обозначим $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$. Эти пространства можно отождествить с пространствами \mathbf{A}^{-2k} порядка $-2k$ (см. п. 2.4). Наконец, \mathcal{A}^* — объединение \mathbf{A}^{-2k} при $k \geq 1$.

Цепь вложений пространств \mathbf{A}^{2k} имеет вид

$$\subset \mathbf{A}^{2k} \subset \dots \subset \mathbf{A}^2 \subset \mathbf{A}^0 \subset \mathbf{A}^{-2} \subset \dots \subset \mathbf{A}^{-2k} \subset \dots$$

Операторы $\mathcal{N}_d : \mathbf{A}^{2k} \rightarrow \mathbf{A}^{2(k-1)}$ обратимы при $k > 1$ и

$$\|\mathcal{N}_d^{-1} \mathbf{f}\|_{\mathbf{A}^{2k}}^2 \leq c_k^2 \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{A}^{2(k-1)}}^2, \quad \|\mathcal{N}_d \mathbf{f}\|_{\mathbf{A}^{2(k-1)}}^2 \leq c_k^{-2} \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{A}^{2k}}^2,$$

где $c_k^2 = \max_j (1 + 1/\nu_j^{2k})$, а $1/\nu_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$.

Автор изучил также оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$, доказаны следующие утверждения:
 – оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathbf{A}^{2(k+1)} \rightarrow \mathbf{A}^{2k}$ — фредгольмов при $k \geq 0$ [22, п. 2.10];
 – если $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathcal{N}_d)$, то оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ (и обратный) отображает пространство $\mathbf{A}^{2(k+1)}$ на \mathbf{A}^{2k} (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно [21, Лемма 2, п. 1.7].

⁶Они совпадают с пространствами \mathbf{A}_γ^{2k} в [22], если пространство \mathcal{A}_H пусто.

2.3. Оператор \mathcal{N}_d^{2k} в пространстве \mathbf{A}^{2k} . Оператор $\mathcal{N}_d \mathbf{u}$ совпадает с $\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{A}^2 \equiv \mathcal{D}(\mathcal{N}_d)$. Поэтому оператор $(\nabla \operatorname{div})^k$ на $\mathbf{A}^{2k} \subset \mathbf{A}^2$ совпадает с \mathcal{N}_d^k при $k > 1$.

ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ. Оператор \mathcal{N}_d^{2k} отображает пространство \mathbf{A}^{2k} на \mathbf{A}^{-2k} и обратно.

Ниже приведем этапы его доказательства.

Шаг 1. Оператор \mathcal{N}_d^{2k} отображает пространство \mathbf{A}^{2k} на $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$.

Действительно, пусть \mathbf{w} — произвольный элемент из \mathbf{A}^{2k} , а \mathbf{w}_η — средняя вектор-функция для него, $\mathbf{w}_\eta \in \mathbf{A}_0^{2k}$; поле $\mathbf{u} \in \mathbf{A}^{2k}$.

Рассмотрим главную часть $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\eta)_{2k} \equiv ((\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{u}, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{w}_\eta)$ скалярного произведения в $\mathbf{A}^{2k}(G)$. Проинтегрируем по частям:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\eta)_{2k} = ((\nabla \operatorname{div})^{2k} \mathbf{u}, \mathbf{w}_\eta) = \int_G \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w}_\eta) d\mathbf{x}.$$

Левая часть имеет предел при $\eta \rightarrow 0$, равный $(\mathbf{u}, \mathbf{w})_{2k}$. Следовательно, правая часть также будет иметь предел и интеграл $\int_G \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x}$ существует при любой $\mathbf{w} \in \mathbf{A}^{2k}(G)$. Кроме того, из неравенства Коши—Буняковского следует оценка этого интеграла:

$$\left| \int_G \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} \right| \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{A}^{2k}} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{A}^{2k}}.$$

Значит, \mathbf{v} — линейный функционал из $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$.

Применим его к полям \mathbf{g}_i , составляющим базис пространства $\mathcal{A}_H(G)$. Учитывая, что $\nabla \operatorname{div} \mathbf{g}_i = 0$, получим

$$\int_G \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, \dots, \rho_1.$$

Итак, на полях \mathbf{w} , отличающихся на вектор-функцию \mathbf{g} из $\mathcal{A}_H(G)$, его значения совпадают.

Пусть $\mathcal{A}/\mathcal{A}_H$ — фактор-пространство $\mathcal{A}(G)$ по \mathcal{A}_H , классы смежности $\mathcal{A}^{2k}(G) = \mathbf{A}^{2k}(G)/\mathcal{A}_H$, его элементы имеют вид $\mathbf{w} + \mathbf{g}$, где $\nabla \operatorname{div} \mathbf{g} = 0$.

2.4. Оператор \mathcal{N}_d^{2k} в фактор-пространстве \mathcal{A}^{2k} .

Шаг 2. Пространство $\mathcal{A}^{2k}(G)$ становится гильбертовым, если ввести скалярное произведение $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}_{2k} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{w})_{2k} = ((\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{u}, (\nabla \operatorname{div})^k \mathbf{w})$.

При $\mathbf{f} \in \mathcal{A}^{2k}$, $\mathbf{g}_\eta \in \mathcal{A}_0^{2k}$ в терминах рядов Фурье (2.1) оно имеет вид

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{g}_\eta\}_{2k} \equiv (\mathcal{N}_d^k \mathbf{f}, \mathcal{N}_d^k \mathbf{g}_\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{4k} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j)(\mathbf{g}_\eta, \mathbf{q}_j)],$$

так как

$$\mathcal{N}_d^k \mathbf{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\nabla \operatorname{div})^k (\mathbf{f}_n^A) = (-1)^k \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{2k} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}).$$

Для того чтобы функционал ρ служил элементом $(\mathcal{A}_0^{2k})^*$ нужно, чтобы скалярное произведение $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}))$ существовало при всех $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathcal{A}^{2k}$ и удовлетворяло неравенству $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})) \leq M_{2k} \|\mathcal{N}_d^k \mathbf{w}\|$. Мы имеем

$$(\rho, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\rho, \mathbf{q}_j) / \nu_j^{2k}] [\nu_j^{2k} (\mathbf{w}, \mathbf{q}_j)] \leq M_{2k} \|\mathcal{N}_d^k \mathbf{w}\|,$$

где

$$M_{2k} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-4k} (\rho, \mathbf{q}_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Знак равенства при заданных (ρ, \mathbf{q}_j) достижим. Значит, имеет место

Лемма 1. *Условие $M_{2k} < \infty$ необходимо и достаточно для принадлежности $\rho(\mathbf{x})$ к $(\mathcal{A}_0^{2k})^*$.*

Величина M_{2k} есть норма функционала ρ в $(\mathcal{A}_0^{2k})^*$, которая совпадает с нормой элемента

$$\mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{f} = (-1)^k \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j^{-2k} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}) \quad \text{при } \mathbf{f} \in \mathbf{A}^{-2k}.$$

Шаг 3. *Отождествление пространства $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$ с пространством \mathbf{A}^{-2k} .* Определим в $(\mathbf{A}_0^{2k})^*$ скалярное произведение:

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}_{-2k} = (\mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{u}, \mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{w}).$$

Переформулируем лемму 1 следующим образом.

Теорема 3. *При заданном $\mathbf{v} \in \mathcal{A}^*$ и $k \geq 1$ уравнение $(\nabla \operatorname{div})^{2k} \mathbf{u} = \mathbf{v}$ разрешимо в пространстве \mathbf{A}^{2k} тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} \in \mathbf{A}^{-2k}$. В факторпространстве $\mathcal{A}/\mathcal{A}_H$ его решение $\mathbf{u} = \mathcal{N}_d^{-2k} \mathbf{v}$ определяется однозначно.*

Доказательство. Действительно, если функционал $\mathbf{v} \in (\mathbf{A}_0^{2k})^*$, то его норма $M_{2k} < \infty$ и он принадлежит \mathbf{A}^{-2k} , так как

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-2k} = (\mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}, \mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}) = M_{2k}^2.$$

Ряд $\mathcal{N}_d^k \mathbf{u} = \mathcal{N}_d^k [\mathcal{N}_d^{-2k} \mathbf{v}] = \mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}$ сходится в \mathcal{A}_γ , так как $(\mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}, \mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}) = M_{2k}^2$. Элемент \mathbf{u} принадлежит \mathbf{A}^{2k} и удовлетворяет уравнению

$$(\nabla \operatorname{div})^{2k} \mathbf{u} = \mathcal{N}_d^{2k} [\mathcal{N}_d^{-2k} \mathbf{v}] = \mathbf{v},$$

так как квадрат его нормы

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}_{2k} = (\mathcal{N}_d^k \mathbf{u}, \mathcal{N}_d^k \mathbf{u}) = (\mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}, \mathcal{N}_d^{-k} \mathbf{v}) = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-m} = M_{2k}^2 < \infty.$$

Однозначность решения вытекает из определения и обратимости операторов \mathcal{N}_d . Теорема доказана. \square

Теорема 3 показывает, что между пространствами \mathbf{A}^{2k} и \mathbf{A}^{-2k} имеется соответствие. Согласно п. 2.2 между пространствами $\mathbf{A}^{2(k+1)}$ и \mathbf{A}^{2k} также имеется соответствие, что дополняет известное утверждение: *все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

3. Пространство \mathbf{V}^0 вихревых полей

Как отмечают Z. Yoshida и Y. Giga [6], разложение $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}_H(G) \oplus \mathbf{V}^0(G)$ содержится в книге С. В. Моргея [13]; они же рассмотрели⁷ пространство \mathbf{V}^0 и оператор S с областью определения $\mathbf{W}^1 = \{ \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \text{rot } \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \}$, который совпадает с $\text{rot } \mathbf{u}$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1$, и доказали, что оператор S самосопряжен в \mathbf{V}^0 , его спектр $\sigma(S)$ точечный и действительный: $\sigma(S) = \sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$. Оператор S имеет компактный обратный из \mathbf{V}^0 в $\mathbf{W}^1 \subset \mathbf{H}^1$. Значит, в пространстве \mathbf{V}^0 существует ортогональный базис, составленный из собственных полей оператора S . Авторы [6] базис не рассматривали. Он построен и использовался автором настоящей работы в [21]. Ранее в шаре B были найдены их явные выражения [24].

В п. 1.6 мы вновь рассмотрели базис $\{ \mathbf{q}_j^\pm \}$ в $\mathbf{V}^0(G) \subset \mathbf{L}_2(G)$:

$$\text{rot } \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = 0, \quad \| \mathbf{q}_j^\pm \| = 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

и доказали гладкость его полей: $\mathbf{q}_j^\pm \in \mathbf{C}^\infty(\bar{G})$.

В этом базисе элементы $\mathbf{V}^0(G)$ представляются рядами Фурье:

$$\mathbf{f}_V = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{f}_V^n) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-], \quad (3.1)$$

где \mathbf{f}_V^n — частичные суммы ряда, $\mathbf{f}_V \equiv \mathcal{P}_V \mathbf{f}$ — проекция поля $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(G)$ на \mathbf{V}^0 . Операторы S и S^{-1} являются преобразованиями этих рядов:

$$\begin{aligned} S \mathbf{f}_V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{rot}(\mathbf{f}_V^n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-], \\ S^{-1} \mathbf{f}_V &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ - (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-]. \end{aligned}$$

3.1. Подпространства \mathbf{W}^m в \mathbf{V}^0 и их сопряженные. Эти пространства определяются соотношениями

$$\mathbf{W}^m = \{ \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0, \dots, (\text{rot})^m \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0 \}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Согласно оценке (1.7), для любого поля $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^m$ его проекция $\mathcal{P}_V \mathbf{f} \in \mathbf{W}^m$; если же $\mathbf{f}_V \in \mathbf{W}^m$, то $\mathcal{P}_V \mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V$, а его проекция на подпространство \mathcal{A} равна 0. Значит, пространство $\mathbf{W}^m \subset \mathbf{H}^m$ и \mathbf{W}^m есть проекция \mathbf{H}^m на \mathbf{V}^0 .

Замыкание в норме $\mathbf{W}_0^k(G)$ пространства $\mathbf{C}_0^\infty(G)$ обозначается через \mathbf{W}_0^k , $k \geq 1$, а пространство $(\mathbf{W}_0^k)^*$ сопряжено с \mathbf{W}_0^k , его отождествляем с $\mathbf{W}^{-k}(G)$. В итоге получаем шкалу (цепь) вложенных пространств:

$$\subset \mathbf{W}^m \subset \dots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{W}^{-1} \subset \dots \subset \mathbf{W}^{-m} \subset .$$

Оператор S отображает пространство \mathbf{W}^m на \mathbf{W}^{m-1} , а S^{-1} — обратно.

Автор изучал также оператор $S + \lambda I$, в [21, Лемма 1, п. 1.5] доказано следующее:

⁷Пространства L_σ^2 , L_H^2 , L_Σ^2 , $H_{\Sigma\Sigma}^1$ в [6] мы обозначили как \mathcal{B} , \mathcal{B}_H , \mathbf{V}^0 и \mathbf{W}^1 в [21].

- оператор $S + \lambda I : \mathbf{W}^m \rightarrow \mathbf{W}^{(m-1)}$ фредгольмов при $m \geq 1$;
- если $\lambda \in \text{Sp}(S)$, то оператор $S + \lambda I$ (и его обратный) отображают пространство $\mathbf{W}^{(m)}$ на $\mathbf{W}^{(m-1)}$ (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно.

3.2. Оператор S^{2m} на пространстве \mathbf{W}^m . Пусть $m \geq 1$, а область G такова, что $\rho = \dim \mathcal{B}_H > 0$. По определению, оператор $S\mathbf{u}$ совпадает с $\text{rot } \mathbf{u}$, если $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^1 \equiv \mathcal{D}(S)$. Поэтому оператор S^{2m} на $\mathbf{W}^m \subset \mathbf{W}^1$ совпадает с $(\text{rot})^{2m}$. Докажем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Оператор S^{2m} отображает пространство \mathbf{W}^m на \mathbf{W}^{-m} и обратно.

Приведем этапы доказательства этого утверждения.

Шаг 1. Оператор S^{2m} отображает пространство \mathbf{W}^m на $(\mathbf{W}_0^m)^*$.

Действительно, пусть \mathbf{u} и \mathbf{w} — произвольные элементы из $\mathbf{W}^m(G)$, а \mathbf{w}_η — средняя вектор-функция поля \mathbf{w} , $\mathbf{w}_\eta \in \mathbf{W}_0^m(G)$.

Рассмотрим главную часть $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\eta)_m \equiv (\text{rot}^m \mathbf{u}, \text{rot}^m \mathbf{w}_\eta)$ скалярного произведения в $\mathbf{W}^m(G)$; интегрируя по частям, получим

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}_\eta)_m \equiv (\text{rot}^{2m} \mathbf{u}, \mathbf{w}_\eta) = \int_G \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w}_\eta) dx.$$

Левая часть имеет предел при $\eta \rightarrow 0$, равный $(\mathbf{u}, \mathbf{w})_m$. Следовательно, правая часть также будет иметь предел и интеграл $\int_G \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx$ существует при любой $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^m(G)$. Кроме того, из неравенства Коши—Буняковского следует оценка этого интеграла:

$$\left| \int_G \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} dx \right| \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{W}^m} \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{W}^m}.$$

Значит, \mathbf{v} есть линейный функционал из $(\mathbf{W}_0^m)^*$. Применим его к полям \mathbf{h}_i , составляющим базис пространства $\mathcal{B}_H(G)$. Учитывая, что $\text{rot } \mathbf{h}_i = 0$, получим

$$\int_G \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}_i dx = 0, \quad i = 1, \dots, \rho.$$

Итак, на полях \mathbf{w} , отличающихся на вектор-функцию \mathbf{h} из $\mathcal{B}_H(G)$, его значения совпадают.

Пусть $\mathcal{B}/\mathcal{B}_H$ — фактор-пространство $\mathcal{B}(G)$ по \mathcal{B}_H , пространство $\mathcal{B}^m(G) = \mathbf{W}^m(G)/\mathcal{B}_H$, его элементы имеют вид $\mathbf{w} + \mathbf{h}$, где $\text{rot } \mathbf{h} = 0$.

3.3. Оператор S^{2m} в фактор-пространстве $\mathcal{B}^m(G)$.

Шаг 2. Пространство $\mathcal{B}^m(G)$ становится гильбертовым, если ввести скалярное произведение $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}_m \equiv (\text{rot}^m \mathbf{u}, \text{rot}^m \mathbf{w})$.

При $\mathbf{f} \in \mathcal{B}^m$, $\mathbf{g}_\eta \in \mathcal{B}_0^m$, в терминах рядов Фурье (3.1)

$$\{\mathbf{f}, \mathbf{g}_\eta\}_m \equiv (S^m \mathbf{f}, S^m \mathbf{g}_\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^{2m}) [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) (\mathbf{g}_\eta, \mathbf{q}_j^+) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) (\mathbf{g}_\eta, \mathbf{q}_j^-)],$$

так как

$$S^m \mathbf{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{rot}^m (\mathbf{f}_n^V) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^m [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (-1)^m (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-].$$

Функционал ρ служит элементом $(\mathcal{B}_0^m)^*$, если скалярное произведение $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}))$ существует при всех $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}^m$ и удовлетворяет неравенству $(\rho(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})) \leq K_m \|S^m \mathbf{w}\|$. Мы имеем

$$(\rho, \mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{\infty} [(\rho, \mathbf{q}_j^+)(\mathbf{w}, \mathbf{q}_j^+) + (\rho, \mathbf{q}_j^-)(\mathbf{w}, \mathbf{q}_j^-)] \leq K_m \|S^m \mathbf{w}\|,$$

где

$$K_m = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^{-2m}) [(\rho, \mathbf{q}_j^+)^2 + (\rho, \mathbf{q}_j^-)^2] \right)^{1/2}.$$

Знак равенства при заданных $(\rho, \mathbf{q}_j^{\pm})$ достижим. Значит, имеет место

ЛЕММА 2. Условие $K_m < \infty$ необходимо и достаточно для принадлежности $\rho(\mathbf{x})$ к $(\mathcal{B}_0^m)^*$.

Величина K_m — норма функционала ρ в $(\mathcal{B}_0^m)^*$, которая совпадает с нормой элемента

$$S^{-m} \mathbf{f} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (-1)^m (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-] \quad \text{при } \mathbf{f} \in \mathbf{W}^{-m}.$$

Таким образом, пространство $(\mathcal{B}_0^m)^*$ можно отождествить с пространством \mathbf{W}^{-m} , определить в нем скалярное произведение

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}_{-m} = (S^{-m} \mathbf{u}, S^{-m} \mathbf{w}),$$

а лемму 2 переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. При заданном \mathbf{v} в объединении пространств $\mathbf{W}^{-n}(G)$ и $m \geq 1$ уравнение $\text{rot}^{2m} \mathbf{u} = \mathbf{v}$ разрешимо в пространстве $\mathcal{B}^m(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{-m}(G)$. Его решение $\mathbf{u} = S^{-2m} \mathbf{v}$ в классе $\mathcal{B}(G)/\mathcal{B}_H$ определяется однозначно.

Доказательство. Действительно, если функционал $\mathbf{v} \in (\mathcal{B}_0^m)^*$, то его норма $K_m < \infty$ и он принадлежит \mathbf{W}^{-m} , так как

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-m} = (S^{-m} \mathbf{v}, S^{-m} \mathbf{v}) = K_m^2.$$

Ряд $S^m \mathbf{u} = S^m [S^{-2m} \mathbf{v}] = S^{-m} \mathbf{v}$ сходится в \mathbf{V}^0 , так как $(S^{-m} \mathbf{v}, S^{-m} \mathbf{v}) = K_m^2$. Элемент \mathbf{u} принадлежит \mathbf{W}^m и удовлетворяет уравнению

$$\text{rot}^{2m} \mathbf{u} = S^{2m} \mathbf{u} = S^{2m} [S^{-2m} \mathbf{v}] = \mathbf{v},$$

так как квадрат его нормы

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}_m = (S^m \mathbf{u}, S^m \mathbf{u}) = (S^{-m} \mathbf{v}, S^{-m} \mathbf{v}) = \{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}_{-m} = K_m^2 < \infty.$$

Однозначность решения вытекает из определения и обратимости операторов S . Теорема доказана. \square

Теорема 4 показывает, что между пространствами \mathbf{W}^m и \mathbf{W}^{-m} имеется соответствие. Между пространствами $\mathbf{W}^{(m+1)}$ и \mathbf{W}^m также имеется соответствие, что дополняет известное утверждение: все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.

4. Модельные краевые задачи в сети $\{C(2k, m)\}_{k, m}$

Пусть область Ω гомеоморфна шару, а $C(2k, m) = \mathbf{A}^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$ — классы в сети пространств Соболева, числа k, m — целые.

4.1. Операторы \mathcal{N}_d и S в пространствах \mathcal{A} и \mathcal{B} . Если собственные поля $\mathbf{q}_j(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}_j^\pm(\mathbf{x})$ градиента дивергенции и ротора известны, то элементы $\mathbf{f}_A \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{f}_V \in \mathcal{B} = \mathbf{V}^0$ представляются рядами Фурье:

$$\mathbf{f}_A = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}_V = \sum_{j=1}^{\infty} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-(\mathbf{x})],$$

а элементы \mathbf{f} из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ — их суммой $\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_V$. Причем $\text{rot } \mathbf{f}_A = 0$ и $\text{div } \mathbf{f}_V = 0$, поэтому $\text{div } \mathbf{f} = \text{div } \mathbf{f}_A$, а $\text{rot } \mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{f}_V$. Скалярное произведение (\mathbf{f}, \mathbf{g}) полей \mathbf{f} и \mathbf{g} из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ равно $(\mathbf{f}_A, \mathbf{g}_A) + (\mathbf{f}_V, \mathbf{g}_V)$.

Операторы \mathcal{N}_d^p в \mathcal{A} , S^p в \mathcal{B} и обратные при $p = 1, 2, \dots$ действуют так:

$$\mathcal{N}_d^p \mathbf{f}_A = (-1)^p \sum_{j=1}^{\infty} (\nu_j^{2p}) (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j,$$

$$S^p \mathbf{f}_V = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (-1)^p (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-],$$

$$\mathcal{N}_d^{-p} \mathbf{f}_A = (-1)^p \sum_{j=1}^{\infty} (\nu_j^{-2p}) (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j,$$

$$S^{-p} \mathbf{f}_V = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-p} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^+) \mathbf{q}_j^+ + (-1)^p (\mathbf{f}, \mathbf{q}_j^-) \mathbf{q}_j^-].$$

Так как $\mathcal{A}_H = \mathcal{B}_H = \emptyset$, то $\mathcal{A}_\gamma^0 = \mathcal{A}_\gamma(B) = \{\nabla h, h \in H^2(B) : \gamma(\mathbf{n} \cdot \nabla)h = 0\}$, $\mathbf{V}^0 = \{\mathbf{g} \in \mathbf{L}_2(B), \mathbf{g} \perp \mathcal{A}, \text{div } \mathbf{g} = 0, \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{g}) = 0\}$, и пространства

$$\mathbf{A}^{2k} \equiv \{\mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma, \dots, (\nabla \text{div})^k \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma\} \quad \text{и} \quad \mathbf{W}^m \equiv \{\mathbf{g} \in \mathbf{V}^0, \dots, (\text{rot})^m \mathbf{g} \in \mathbf{V}^0\}$$

при $k \geq 1, m \geq 1$; $\mathbf{A}^0 \equiv \mathcal{A}_\gamma, \mathbf{W}^0 \equiv \mathbf{V}^0 \equiv \mathcal{B}$.

Имеют место вложения

$$\dots \subset \mathbf{A}^{2k} \subset \dots \subset \mathbf{A}^2 \subset \mathcal{A}_\gamma^0 \subset \mathbf{A}^{-2} \subset \dots \subset \mathbf{A}^{-2k} \subset \dots, \quad (4.1)$$

$$\dots \subset \mathbf{W}^m \subset \dots \subset \mathbf{W}^1 \subset \mathbf{V}^0 \subset \mathbf{W}^{-1} \subset \dots \subset \mathbf{W}^{-m} \subset \dots \quad (4.2)$$

В шкале пространств (4.1) оператор \mathcal{N}_d действует слева направо, а оператор \mathcal{N}_d^{-1} — справа налево: \mathcal{N}_d отображает \mathbf{A}^{2k} на $\mathbf{A}^{2(k-1)}, \dots, \mathbf{A}^4$ на \mathbf{A}^2 , оператор \mathcal{N}_d^2 отображает \mathbf{A}^2 на пространство \mathbf{A}^{-2} , сопряженное с \mathbf{A}_0^2 , а далее оператор \mathcal{N}_d отображает \mathbf{A}^{-2} в \mathbf{A}^{-4} и так далее.

Рассмотрен также оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$. Доказано, что

- оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I : \mathbf{A}^{2(k+1)} \rightarrow \mathbf{A}^{2k}$ — фредгольмов, $k \geq 0$ [22, п. 2.10];
- если $\lambda \in \text{Sp}(\mathcal{N}_d)$, то оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ (и обратный) отображает пространство $\mathbf{A}^{2(k+1)}$ на \mathbf{A}^{2k} (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно [21, Лемма 2, п. 1.7].

Аналогично действуют операторы $S : \mathbf{W}^m \rightarrow \mathbf{W}^{m-1}, \dots, \mathbf{W}^2 \rightarrow \mathbf{W}^1, S^2 : \mathbf{W}^1 \rightarrow \mathbf{W}^{-1} \equiv (\mathbf{W}_0^1)^*$, далее снова $S : \mathbf{W}^{-1} \rightarrow \mathbf{W}^{-2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{W}^{-m}$; операторы S^{-1} действуют в обратную сторону.

Рассмотрен также оператор $S + \lambda I$. Доказано, что

- оператор $S + \lambda I : \mathbf{W}^m \rightarrow \mathbf{W}^{(m-1)}$ – фредгольмов, $m \geq 1$;
- если $\lambda \in \text{Sp}(S)$, то оператор $S + \lambda I$ (и его обратный) отображают пространство $\mathbf{W}^{(m)}$ на $\mathbf{W}^{(m-1)}$ (и обратно) взаимно однозначно и непрерывно [21, Лемма 1 п. 1.5].

Прямые суммы пространств \mathbf{A}^{2k} и \mathbf{W}^m мы обозначили как $\mathbf{C}(2k, m)$, они принадлежат $\mathbf{L}_2(\Omega)$, если $k \geq 0, m \geq 0$ – целые.

Оператор (\mathcal{N}_d^{-1}, I) отображает класс $\mathbf{C}(2k, m)$ на $\mathbf{C}(2(k+1), m)$, оператор (I, S^{-1}) – на $\mathbf{C}(2k, m+1)$, а оператор $(\mathcal{N}_d^{-p}, S^{-q})$ – на класс $\mathbf{C}(2(k+p), m+q)$ при $p, q > 0$.

Отметим, что операторы $(\nabla \text{div})^p$ и $(\text{rot})^{2p}$ – аналоги полигармонических операторов Δ^p в классах \mathcal{A} и \mathcal{B} , p – натуральное число.

4.2. Модельные краевые задачи в классах $\mathbf{C}(2k, m)$. Рассматриваемые классы $\mathbf{C}(2k, m)$ пространств Соболева принадлежат двухпараметрической сети (прямой сумме шкал (4.1) и (4.2)).

Пространство $\mathbf{A}^{2k}(\Omega) \subset \mathbf{H}^{2k}(\Omega)$ и является проекцией \mathbf{H}^{2k} на \mathcal{A} , а пространство $\mathbf{W}^m(\Omega) \subset \mathbf{H}^m(\Omega)$ является проекцией \mathbf{H}^m на \mathcal{B} , поэтому класс $\mathbf{C}(2k, 2k)$ совпадает с пространством Соболева $\mathbf{H}^{2k}(\Omega)$. Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *Задано поле $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. Найдти поле \mathbf{u} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\text{rot } \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Другими словами, необходимо найти поле \mathbf{u} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, для которого

$$(\mathbf{u}, (\text{rot} + \lambda I)\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

для любого поля $\mathbf{v} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ и выполняется краевое условие $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0$, если след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ на границе Ω существует.

Задача 2. *Задано поле $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. Найдти поле \mathbf{w} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что*

$$\nabla \text{div } \mathbf{w} + \lambda \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) = 0,$$

если след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})$ на границе Ω существует.

Применим метод ортогонального проектирования уравнений этих задач в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ на подпространства \mathcal{A} и \mathcal{B} .

Используя разложение полей \mathbf{f}, \mathbf{u} и \mathbf{w} в суммы $\mathbf{f}_\mathcal{A} + \mathbf{f}_\mathcal{B}, \mathbf{u}_\mathcal{A} + \mathbf{u}_\mathcal{B}$ и $\mathbf{w}_\mathcal{A} + \mathbf{w}_\mathcal{B}$ и расширения S и \mathcal{N}_d операторов ротор и градиент дивергенции, эти уравнения запишем в виде уравнений-проекций на \mathcal{A} и \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{u}_\mathcal{A} &= \mathbf{f}_\mathcal{A}, & (S + \lambda I)\mathbf{u}_\mathcal{B} &= \mathbf{f}_\mathcal{B}, \\ (\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{w}_\mathcal{A} &= \mathbf{f}_\mathcal{A}, & \lambda \mathbf{w}_\mathcal{B} &= \mathbf{f}_\mathcal{B}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

так как $\text{rot } \mathbf{u}_\mathcal{A} = 0$ в \mathcal{A} , $\nabla \text{div } \mathbf{w}_\mathcal{B} = 0$ в $\mathcal{B} \equiv \mathbf{V}^0$.

ЗАДАЧА 3. Задано поле $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m) \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. Найдти поле \mathbf{u} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ такое, что

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \quad \gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

если след $\gamma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$ на границе Ω существует.

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям-проекциям:

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A, \quad (S + \lambda I)\mathbf{u}_V = \mathbf{f}_V. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если пространство $\mathcal{B}_H(G)$ не пусто и $\lambda \neq 0$, то уравнение

$$(\nabla \operatorname{div} + \operatorname{rot} + \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

распадается на три проекции

$$(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A, \quad (S + \lambda I)\mathbf{u}_V = \mathbf{f}_V, \quad \lambda \mathbf{u}_{B_H} = \mathbf{f}_{B_H}$$

— уравнения второго, первого и нулевого порядковсоответственно.

Доказано, что уравнения $(S + \lambda I)\mathbf{u}_V = \mathbf{f}_V$ и $(\mathcal{N}_d + \lambda I)\mathbf{u}_A = \mathbf{f}_A$ разрешимы по Фредгольму и что при $\lambda \in \operatorname{Sp}(\mathcal{N}_d)$ оператор $\mathcal{N}_d + \lambda I$ обратим, соответственно, при $\lambda \in \operatorname{Sp}(S)$ оператор $S + \lambda I$ обратим (см. п. 4.1).

Следовательно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. При $\lambda \neq \operatorname{Sp}(S)$ единственное решение задачи 1 имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_V, \quad \text{где } \mathbf{u}_A = \lambda^{-1} \mathbf{f}_A, \quad \mathbf{u}_V = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_V.$$

Решение $\mathbf{u} \in \mathbf{C}(2k, m + 1)$ при $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m)$. Кроме того,

$$\mathbf{u} = \lambda^{-1} \mathbf{f}_A, \quad \text{если } \mathbf{f}_A \in \mathcal{A} \quad \text{или } \mathbf{f}_A \in \mathcal{A}_\gamma, \quad \text{а } \mathbf{f}_V = 0;$$

$$\mathbf{u} = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_V \in \mathbf{W}^1, \quad \text{если } \mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}, \quad \text{а } \mathbf{f}_A = 0.$$

При $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ поле $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})$ есть классическое решение задачи.

Доказательство см. в [21].

В частности, при $\Omega = B$ согласно п. 1.9 и формуле (1.17) имеет место

СЛЕДСТВИЕ 1. Если область $\Omega = B$ есть шар, $\psi_n(\lambda R) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, числа k, m целые, а поле $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, то решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу $\mathbf{A}^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Отметим также свойство отображения $\operatorname{rot} + \lambda I$:

ЛЕММА 3. При $\lambda \in \operatorname{Sp}(S)$ и целых k, m операторы $\operatorname{rot} + \lambda I$ (и обратный) отображают класс $\mathbf{C}(2k, m + 1)$ на $\mathbf{C}(2k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно.

Следующая теорема аналогична предыдущей. Ввиду соотношений (4.3) ее доказательство основано на свойствах оператора $(\mathcal{N}_d + \nu^2 I)$.

ТЕОРЕМА 6. При $\nu^2 \neq \operatorname{Sp}(-\mathcal{N}_d)$ единственное решение задачи 2 имеет вид

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_V, \quad \text{где } \mathbf{w}_A = (\mathcal{N}_d + \nu^2 I)^{-1} \mathbf{f}_A, \quad \mathbf{w}_V = \nu^{-2} \mathbf{f}_V.$$

Решение $\mathbf{w} \in \mathbf{C}(2(k+1), m)$ при $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m)$. Кроме того,

$$\mathbf{w} = (\mathcal{N}_d + \nu^2 I)^{-1} \mathbf{f}_A \in \mathbf{A}^2(\Omega) \quad \text{при } \mathbf{f}_A \in \mathcal{A}_\gamma, \quad \mathbf{f}_V = 0;$$

$$\mathbf{w} = \nu^{-2} \mathbf{f}_V \quad \text{при } \mathbf{f}_A = 0, \quad \mathbf{f}_V \in \mathcal{B}.$$

При $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ поле $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})$ есть классическое решение задачи.

В частности, при $\Omega = B$ согласно п. 1.10 имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. Если область $\Omega = B$ есть шар, $\psi'_n(\nu R) \neq 0 \quad \forall n \geq 0$, k, m целые, а поле $\mathbf{f} \in \mathbf{A}^{2k}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$, то решение задачи 2 при $\lambda = \nu^2$ существует, единственно и принадлежит классу $\mathbf{A}^{2(k+1)}(B) \oplus \mathbf{W}^m(B)$.

Отметим также свойство отображения $\nabla \operatorname{div} + \nu^2 I$.

ЛЕММА 4. При $\nu^2 \neq \operatorname{Sp}(-\mathcal{N}_d)$, целых k, m оператор $\nabla \operatorname{div} + \nu^2 I$ отображает $\mathbf{C}(2(k+1), m)$ на класс $\mathbf{C}(2k, m)$ взаимно однозначно и непрерывно.

Эти утверждения говорят о соответствии пространств и операторов.

Согласно формуле (4.4), имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. При $\lambda \neq \operatorname{Sp}(-\mathcal{N}_d) \cup \operatorname{Sp}(S)$ единственное решение задачи 3 имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_A + \mathbf{u}_V, \quad \text{где } \mathbf{u}_A = (\mathcal{N}_d + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_A, \quad \mathbf{u}_V = (S + \lambda I)^{-1} \mathbf{f}_V.$$

Решение $\mathbf{u} \in \mathbf{C}(2(k+1), m+1)$ при $\mathbf{f} \in \mathbf{C}(2k, m)$, где k, m целые.

4.3. Оператор Стокса в пространствах $\mathbf{C}(2k, m)$. Задача Стокса состоит в определении поля \mathbf{v} и функции p в области Ω из условий

$$\nu \Delta \mathbf{v} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_\omega = \mathbf{g}$$

при заданных полях \mathbf{f} в Ω и \mathbf{g} на ее границе ω [9].

Собственные поля \mathbf{w}_k оператора Стокса являются решениями задач

$$\nu \Delta \mathbf{w}_k - \nabla p_k = \mu_k \mathbf{w}_k, \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_k = 0, \quad \mathbf{w}_k|_\omega = 0.$$

Мы рассмотрим оператор Стокса с другими краевыми условиями:

$$\nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\omega = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}|_\omega = 0 \quad (4.5)$$

в ортогональных подпространствах \mathcal{A} и \mathcal{B} в $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

По определению $\nabla p \in \mathcal{A}$ при $p \in H^1(\Omega)$, поле $\mathbf{u} \in \mathcal{B}$, а оператор

$$\Delta \mathbf{u} = -(\operatorname{rot})^2 \mathbf{u}$$

на соленоидальных полях \mathbf{u} .

Используя разложение $\mathbf{f}_A + \mathbf{f}_B$ поля $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ и самосопряженное расширение S оператора ротор, первое соотношение в (4.5) запишем в виде двух проекций:

$$-\nabla p = \mathbf{f}_A, \quad -\nu S^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}_B.$$

Так как $\mathbf{f}_A = \nabla h$, где $h \in H^1(\Omega)$, и оператор S обратим, из этих соотношений имеем

$$p = -h + c, \quad \mathbf{u} = -\nu^{-1}S^{-2}\mathbf{f}_B, \quad c = \text{const.} \quad (4.6)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 8. *Решение задачи (4.5) имеет вид (4.6).*

В частности,

$$p = -h + c, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \text{если } \mathbf{f} = \mathbf{f}_A \in \mathcal{A} \text{ или } \mathbf{f} \in \mathcal{A}_\gamma, \quad \text{а } \mathbf{f}_B = 0;$$

$$p = c, \quad \mathbf{u} = -\nu^{-1}S^{-2}\mathbf{f}_B, \quad \text{если } \mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}, \quad \text{а } \mathbf{f}_A = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{W}^2;$$

$$(\nabla p, \mathbf{u}) \in (\mathbf{A}^{2k}, \mathbf{W}^{m+2}), \quad \text{если } (\mathbf{f}_A, \mathbf{f}_B) \in (\mathbf{A}^{2k}, \mathbf{W}^m) = \mathbf{C}(2k, m), \quad k, m > 0.$$

Если же $\mathbf{f} \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, то пара $(p, \mathbf{u}) \in \mathbf{C}^\infty(\bar{\Omega})$ есть классическое решение задачи.

Собственные поля \mathbf{w}_k оператора (4.5) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla p_k = 0, \quad -\nu S^2 \mathbf{w}_k = \mu_k \mathbf{w}_k.$$

Следовательно, $p_k = \text{const}$. Оператор S есть расширение оператора ротора. Собственные поля \mathbf{q}_j^\pm ротора образуют базис в $\mathbf{V}^0(G)$, их нормы $\|\mathbf{q}_j^\pm\| = 1$, и

$$\text{rot } \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Поля \mathbf{q}_j^\pm являются также собственными полями оператора $-\nu S^2$, так как

$$\text{rot}^2 \mathbf{q}_j^\pm = \pm \lambda_j \text{rot } \mathbf{q}_j^\pm = \lambda_j^2 \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = \gamma \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{q}_j^\pm = 0,$$

$$-\nu S^2 \mathbf{q}_j^\pm = -\nu \lambda_j^2 \mathbf{q}_j^\pm, \quad \gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_j^\pm = \gamma \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{q}_j^\pm = 0,$$

его собственные значения $\mu_j = -\nu \lambda_j^2$ определяются собственными значениями ротора λ_j и параметром вязкости ν .

Конкурирующие интересы. Я заявляю, что у меня нет конкурирующих интересов в отношении данной статьи.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за представление окончательной рукописи в печатном виде. Я одобрил окончательный вариант рукописи.

Благодарности. Я выражаю благодарность академику РАН профессору В. П. Маслову, профессору д. ф.-м. н. С. Ю. Доброхотову, профессору д. ф.-м. н. М. Д. Рамазанову и доценту к. ф.-м. н. Р. Н. Гарифуллину за поддержку при написании данной статьи, а также к. ф.-м. н. М. Н. Саушкину, чья редакторская правка способствовала улучшению содержания рукописи.

Библиографический список

1. Соболев С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М.: Наука, 1974. 810 с.
2. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М.: Наука, 1975. 392 с.
3. Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Пространства Соболева / *Избранные главы анализа и высшей алгебры*. Л.: Ленингр. ун-т, 1981. 129–196 с.
4. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory // *Duke Math. J.*, 1940. vol. 7, no. 1. pp. 411–444. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00725-6>.
5. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
6. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot // *Math. Z.*, 1990. vol. 204. pp. 235–245. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02570870>.
7. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions // *Hokkaido Math. J.*, 1990. vol. 19, no. 1. pp. 67–87. DOI: <https://doi.org/10.14492/hokmj/1381517172>.
8. Сакс Р. С. Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса. Приложения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 131–146. EDN: RAVQHN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1166>.
9. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1970. 288 с.
10. Fridrichs K. Differential form on Riemannian manifolds // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955. vol. 8, no. 4. pp. 551–590. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160080408>.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика*. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
12. Быховский Э. Б., Смирнов Н. В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа / *Математические вопросы гидродинамики и магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости*: Сборник работ / Тр. МИАН СССР, Т. 59. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 5–36.
13. Morrey C. V. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations* / *Classics in Mathematics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1966. xi+506 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69952-1>.
14. Шварц Л. *Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964. 212 с.
15. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // *Матем. сб.*, 1965. Т. 68(110), № 3. С. 373–416.
16. Солонников В. А. Переопределенные эллиптические краевые задачи / *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 5 / Зап. научн. сем. ЛОМИ, Т. 21. Л.: Изд-во «Наука», Ленинград. отд., 1971. С. 112–158.
17. Сакс Р. С. *Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений*. Новосибирск: НГУ, 1975. 164 с.
18. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam: North-Holland, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1090/chel/343>.
19. Зорич В. А. *Математический анализ. Часть II*. М.: Наука, 1984. 640 с.
20. Вайнберг Б. Р., Грушин В. В. О равномерно неэллиптических задачах. I // *Матем. сб.*, 1967. Т. 72(114), № 4. С. 602–636.
21. Сакс Р. С. Пространства Соболева и краевые задачи для операторов ротор и градиент дивергенции // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 2. С. 249–274. EDN: FT00ME. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1759>.
22. Сакс Р. С. Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева // *Динамические системы*, 2018. Т. 8, № 4. С. 385–407. EDN: YWAJED.
23. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1988. 512 с.

24. Сакс Р. С. Решение спектральных задач для операторов ротора и Стокса // *Уфимск. матем. журн.*, 2013. Т. 5, № 2. С. 63–81. EDN: QBEБPH.
25. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields // *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958. vol. 44. pp. 489–491. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.44.6.489>.
26. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains // *Physics of Plasmas*, 2000. vol. 7. pp. 2766–2775. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.874127>.
27. Woltjer L. The Crab Nebula // *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958. vol. 14. pp. 39–80.
28. Исламов Г. Г. Об одном классе векторных полей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 19, № 4. С. 680–696. EDN: VQDCOD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1382>.
29. Chandrasekhar S., Kendall P. C. On force-free magnetic fields // *Astrophys. J.*, 1957. vol. 126. pp. 457–460. DOI: <https://doi.org/10.1086/146413>.
30. Montgomery D., Turner L., Vahala G. Three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence in cylindrical geometry // *Phys. Fluids.*, 1978. vol. 21, no. 5. pp. 757–764. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.862295>.
31. Saks R. S., Islamov G. G. Eigenfunctions of the curl operator in $L_2(G)$ / *Международная конференция “Бицадзе 100”. Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных: Тезисы докладов (Москва, МГУ, 16–18 июня 2016)*. М.: МГУ, 2016. С. 21–23.

MSC: 35P05, 35P15, 47A10

A set of Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators

R. S. Saks

Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Science Centre, Russian Academy of Sciences,
112, Chernyshevskiy st., Ufa, Russia, 450077.

Abstract

We will consider the scale of the Sobolev spaces $\mathbf{H}^m(G)$ vector fields in a bounded domain G of \mathbb{R}^3 with a smooth boundary of Γ . The gradient-of-divergence and the rotor-of-rotor operators ($\nabla \operatorname{div}$ and rot^2) and their powers are analogous to the scalar operator Δ^m in \mathbb{R}^3 . They generate spaces $\mathbf{A}^{2k}(G)$ and $\mathbf{W}^m(G)$ potential and vortex fields; where the numbers $k, m > 0$ are integers.

It is proven that $\mathbf{A}^{2k}(G)$ and $\mathbf{W}^m(G)$ are projections of Sobolev spaces $\mathbf{H}^{2k}(G)$ and $\mathbf{H}^m(G)$ in subspaces \mathcal{A} and \mathcal{B} in $\mathbf{L}_2(G)$. Their direct sums $\mathbf{A}^{2k}(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ form a network of spaces. Its elements are classes $\mathbf{C}(2k, m) \equiv \mathbf{A}^{2k} \oplus \mathbf{W}^m$.

We consider at the properties of the spaces \mathbf{A}^{-m} and \mathbf{W}^{-m} and proved their compliance with the spaces \mathbf{A}^m and \mathbf{W}^m . We also consider at the direct sums of $\mathbf{A}^k(G) \oplus \mathbf{W}^m(G)$ for any integer numbers k and $m > 0$. This completes the construction of the $\{\mathbf{C}(k, m)\}_{k,m}$ network.

In addition, an orthonormal basis has been constructed in the space $\mathbf{L}_2(G)$. It consists of the orthogonal subspace \mathcal{A} and \mathcal{B} bases. Its elements are eigenfields of the operators $\nabla \operatorname{div}$ and rot . The proof of their smoothness is an important stage in the theory developed.

The model boundary value problems for the operators $\operatorname{rot} + \lambda I, \nabla \operatorname{div} + \lambda I$, their sum, and also for the Stokes operator have been investigated in the network $\{\mathbf{C}(k, m)\}_{k,m}$. Solvability conditions are obtained for the model problems considered.

Keywords: Sobolev spaces, gradient operator, divergence operator, curl operator, elliptic boundary value problems, spectral problems.

Received: 11th October, 2022 / Revised: 9th February, 2023 /

Accepted: 13th March, 2023 / First online: 24th March, 2023

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Saks R. S. A set of Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 23–49. EDN: **TXBEDP**. DOI: [10.14498/vsgtu1961](https://doi.org/10.14498/vsgtu1961) (In Russian).

Author's Details:

Romen S. Saks  Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; e-mail: romen-saks@yandex.ru

Competing interests. I declare that I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments. The author thanks the Academician of RAS V. P. Maslov, Professor S. Yu. Dobrokhotov, Professor M. D. Ramazanov and Associate Professor R. N. Garifullin for their support in writing this article. The author also thanks M. N. Saushkin, whose editorial help have been invaluable.

References

1. Sobolev S. L. *Cubature Formulas and Modern Analysis: An introduction*. Montreux, Gordon and Breach Science Publ., 1992, xvi+379 pp.
2. Mikhailov V. P. *Partial Differential Equations*. Moscow, Mir, 1978, 397 pp.
3. Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Sobolev spaces, In: *Izbrannye glavy analiza i vysshei algebrы* [Selected Chapters of Analysis and Higher Algebra]. Leningrad, Leningrad State Univ., 1981, 129–196 pp. (In Russian)
4. Weyl H. The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, 1940, vol. 7, no. 1, pp. 411–444. DOI: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00725-6>.
5. Sobolev S. L. On a new problem of mathematical physics, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3–50 (In Russian).
6. Yoshida Z., Giga Y. Remarks on spectra of operator rot, *Math. Z.*, 1990, vol. 204, pp. 235–245. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02570870>.
7. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{div} u = f$ and $\operatorname{rot} v = g$ with zero boundary conditions, *Hokkaido Math. J.*, 1990, vol. 19, no. 1, pp. 67–87. DOI: <https://doi.org/10.14492/hokmj/1381517172>.
8. R. S. Saks The eigenfunctions of curl, gradient of divergence and Stokes operators. Applications, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 131–146 (In Russian). EDN: RAVQHN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1166>.
9. Ladyzhenskaya O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows*. New York, Gordon and Breach, 1969, xviii+224 pp.
10. Friedrichs K. Differential form on Riemannian manifolds, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, no. 4, pp. 551–590. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160080408>.
11. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika*. Ch. 2 [Theoretical Hydromechanics, Vol. 2]. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 728 pp. (In Russian)
12. Bykhovskii É. B., Smirnov N. V. Orthogonal decomposition of the space of vector functions square-summable on a given domain, and the operators of vector analysis, In: *Mathematical problems of hydrodynamics and magnetohydrodynamics for a viscous incompressible fluid*, Collected papers, Trudy Mat. Inst. Steklov., 59. Moscow–Leningrad, Acad. Sci. USSR, 1960, pp. 5–36 (In Russian).
13. Morrey C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Classics in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1966, xi+506 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69952-1>.
14. Schwartz L. *Kompleksnye mnogoobraziia. Ellipticheskie uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Complex Analytic Manifolds. Elliptic Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1964, 212 pp. (In Russian)
15. Volevich L. R. Solubility of boundary value problems for general elliptic systems, *Mat. Sb. (N.S.)*, 1965, vol. 68(110), no. 3, pp. 373–416 (In Russian).
16. Solonnikov V. A. Overdetermined elliptic boundary value problems, In: *Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory. Part 5*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 21. Leningrad, “Nauka”, Leningrad. Otdel., 1971, pp. 112–158 (In Russian).

17. Saks R. S. *Boundary-value problems for elliptic systems of differential equations*. Novosibirsk, Novosibirsk State Univ., 1975, 162 pp. (In Russian)
18. Temam R. I. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. Amsterdam, North-Holland, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1090/chel/343>.
19. Zorich V. A. *Mathematical analysis II*. Berlin, Springer, 2016, xx+720 pp.
20. Vainberg B. R., Grushin V. V. Uniformly nonelliptic problems. I, *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 4, pp. 543–568. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM1967v001n04ABEH001999>.
21. Saks R. S. Sobolev spaces and boundary-value problems for the curl and gradient-of-divergence operators, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 2, pp. 249–274 (In Russian). EDN: FT00ME. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1759>.
22. Saks R. S. Operator $\nabla \operatorname{div}$ and Sobolev spaces, *Dinamicheskie Sistemy*, 2018, vol. 8, no. 4, pp. 385–407 (In Russian). EDN: YWAJED.
23. Vladimirov V. S. *Equations of Mathematical Physics*. New York, Marcel Dekker, 1971.
24. Saks R. S. Solving of spectral problems for curl and Stokes operators, *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 63–81. DOI: <https://doi.org/10.13108/2013-5-2-63>.
25. Woltjer L. A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1958, vol. 44, pp. 489–491. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.44.6.489>.
26. Cantarella J., DeTurck D., Gluck H., Teytel M. The spectrum of the curl operator on spherically symmetric domains, *Physics of Plasmas*, 2000, vol. 7, pp. 2766–2775. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.874127>.
27. Woltjer L. The Crab Nebula, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 1958, vol. 14, pp. 39–80.
28. Islamov G. G. On a class of vector fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2015, vol. 19, no. 4, pp. 680–696 (In Russian). EDN: VQDCOD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1382>.
29. Chandrasekhar S., Kendall P. C. On force-free magnetic fields, *Astrophys. J.*, 1957, vol. 126, pp. 457–460. DOI: <https://doi.org/10.1086/146413>.
30. Montgomery D., Turner L., Vahala G. Three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence in cylindrical geometry, *Phys. Fluids.*, 1978, vol. 21, no. 5, pp. 757–764. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.862295>.
31. Saks R. S., Islamov G. G. Eigenfunctions of the curl operator in $L_2(G)$, In: *Actual Problems in Theory of Partial Differential Equations dedicated to the centenary of Andrey V. Bitzadze*, Abstracts (Russia, 16–18 June, 2016). Moscow, Moscow State Univ., 2016, pp. 21–23.



УДК 517.958:530.145:512

Представление Лагранжа квантовой эволюции материальных полей

А. Ю. Самарин, А. М. Штеренберг

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Показано, что квантовый интеграл по путям может быть представлен в виде функционала единственного пути, удовлетворяющего принципу наименьшего действия (ввиду несовпадения оригинального английского понятия path и русского понятия «траектория» будет употребляться понятие «путь», которое подразумевает параметрическую зависимость координат точки от времени $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$). На этом основании материальные поля, совокупность которых при данном подходе отождествляется с квантовой частицей, представляются в виде непрерывных множеств индивидуальных частиц, механическое движение которых определяет поля физических величин, атрибутов этих индивидуальных частиц в каждый момент времени. Волновая функция стационарного состояния при таком подходе является полем комплексной плотности индивидуальных точек. Модуль комплексной плотности представляет собой нормированную тем или иным образом плотность материи в данной точке пространства, фазовый множитель определяет результат суперпозиции материальных полей. Это позволило преобразовать интегральное уравнение квантовой эволюции к представлению Лагранжа. На примере описания квантового гармонического осциллятора продемонстрирована состоятельность такого подхода.

Ключевые слова: интегралы по траекториям, материальное поле, нелокальность, квантовая эволюция в физическом пространстве, представление Лагранжа и Эйлера, квантовая динамика замкнутой системы.

Получение: 18 сентября 2022 г. / Исправление: 25 декабря 2022 г. /
Принятие: 24 января 2023 г. / Публикация онлайн: 19 марта 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Самарин А. Ю., Штеренберг А. М. Представление Лагранжа квантовой эволюции материальных полей // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 50–63. EDN: JDNCTR. DOI: [10.14498/vsgtu1953](https://doi.org/10.14498/vsgtu1953).

Сведения об авторах

Алексей Юрьевич Самарин  <https://orcid.org/0000-0001-7640-3875>

кандидат физико-математических наук, доцент; каф. общей физики и физики нефтегазового производства; e-mail: samarinay@yahoo.com

Александр Моисеевич Штеренберг  <https://orcid.org/0000-0001-8909-7598>

доктор физико-математических наук, профессор; каф. общей физики и физики нефтегазового производства; e-mail: ashter53@yandex.ru

Введение. Попытки придать волновой функции смысл физической величины, характеризующей некоторый, в общем случае распределенный в пространстве, материальный носитель [1, 2], неизбежно сталкиваются с проблемой мгновенной локализации этого материального носителя при измерении. Однако кажущееся противоречие со специальной теорией относительности (СТО), возникающее в процессе редукции волновой функции [3], легко преодолевается простым предположением, что материальная сплошная среда, представляющая квантовую частицу, представляет собой «идеальный» физический континуум, всюду плотный в физическом пространстве¹ [4]. Отсутствие «пустого» пространства устраняет необходимость механического перемещения какого-либо посредника для сохранения принципа близкодействия. Корнем всех интерпретационных проблем традиционной квантовой механики является представление о квантовой частице как о материальной точке, перевод этого понятия из ранга математической аппроксимации реального физического объекта в ранг его физической сущности в случае квантовой частицы. Это, разумеется, было бы вполне допустимо (так же как и идеализация механического континуума), если бы не порождало существенных противоречий [2, 3], подтвержденных экспериментально [5–7]. Более того, уравнения квантовой механики вообще не содержат понятия материальной точки, а волновая функция локализованной измерением частицы является дельта-функцией Дирака, которая имеет представление в виде суперпозиции бесконечных в пространстве математических объектов и с учетом конечности размеров области локализации при измерении сама по себе является математической аппроксимацией результата измерения координаты.

Идея связать квантовую эволюцию с механическим движением некоторого носителя волновой функции частично выразилась в ее пространственно-временном представлении с помощью интегралов по путям [8, 9] (континуальных интегралов [10]). Тот факт, что квантовый интеграл по путям может быть формально заменен функционалом на единственном пути,² позволяет придать ему смысл реальной зависимости положения индивидуальной точки континуума от времени, а интегральному волновому уравнению — смысл представления Лагранжа временной зависимости комплексной плотности индивидуальных частиц континуума [11, 12]. Далее следует учесть, что импульсы индивидуальных частиц на некоторых виртуальных путях могут принимать мнимые значения [13–15]. Последнее обстоятельство может быть связано как с мнимым представлением времени в законе эволюции при вещественной координате, так и наоборот (мнимым представлении координаты при вещественном времени). Эти возможности разбираются в данной работе и на этом основании формулируется представление Лагранжа об эволюции комплексной плотности индивидуальной частицы.

И, наконец, в конце статьи на базе этого представления выводятся волновые функции стационарных состояний как полей комплексной плотности для квантового осциллятора в привычном представлении Эйлера.

¹Это принципиально отличает квантовый континуум от классических механических сплошных сред, которые по сути являются лишь математической аппроксимацией дискретных (с классической точки зрения) структур.

²Это утверждение справедливо именно для квантового интеграла по путям и не может быть распространено на функциональные интегралы, описывающие броуновское движение (см. п. 1).

1. Фактический путь индивидуальной точки. Интегрирование в функциональных пространствах при описании физических процессов впервые было применено для определения вероятности перехода броуновской частицы из одной области пространства в другую. В [16] была предложена аналогичная интерпретация квантового интеграла по путям. Однако исходное представление квантовой эволюции в виде интегралов по путям строилось принципиально иным образом: оно основывалось не на стохастическом процессе типа броуновского движения, а детерминированном описании изменения волновой функции во времени [8, 9]. Скрупулезный математический анализ процесса квантовой эволюции, приведенный в [10], показал, что может быть реализован предельный переход к бесконечно малым промежуткам времени в кратном интеграле, ядре интегрального оператора эволюции, и именно такой переход и позволил определить квантовый интеграл по путям.³ Более того, в этой же работе было показано, что для бесконечно малого промежутка времени носитель волновой функции локализован в пространстве. Последнее обстоятельство позволяет связать значение волновой функции с этим носителем и перейти от интеграла по путям к функционалу единственного пути, связанному с этим материальным носителем. Воспроизведем этот переход в несколько ином виде, чем представленный в [11].

Амплитуда перехода в виде интеграла по путям имеет вид [10]

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]\right) [dx(\tau)]. \quad (1)$$

Преобразуем этот интеграл к вещественному виду, заменив время $\tau \rightarrow -i\tau$, и запишем амплитуду перехода в виде кратного интеграла [10]:

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}\right)^{n/2} \int \cdots \int \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E(x_0 \dots x_n, \varepsilon)\right) \prod_{k=1}^{n-1} dx_k, \quad (2)$$

где S^E — эвклидово действие. Рассмотрим первый из цепочки интегралов (2) ($k = 0 \rightarrow k = 1$) амплитуды перехода (1). Начальная координата фиксирована и равна x_0 . Среднее значение амплитуды перехода во все точки пространства x_1 в момент времени $t_0 + \varepsilon$ определяется интегралом

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S(x_0, x_1, \varepsilon)\right) dx_1 = \\ & = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left(m \frac{(x_1 - x_0)^2}{2\varepsilon} + \frac{V(x_0 + V(x_1))}{2} \varepsilon\right)\right) dx_1 = \\ & = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left(m \frac{(x_1 - x_0)^2}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}(x_1 - x_0) \varepsilon + V(x_0) \varepsilon\right)\right) dx_1 = \\ & \qquad \qquad \qquad \exp\left(\frac{\varepsilon^3}{8\hbar m} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - V_0 \frac{\varepsilon}{\hbar}\right). \end{aligned}$$

³Очевидно, что такой переход невозможен в случае броуновского движения вследствие принципиального отсутствия определенного (пусть даже вероятностным образом) пути для броуновской частицы на расстояниях, меньших порядка длины свободного пробега.

Показатель экспоненты в последнем выражении совпадает с отношением действия к приведенной постоянной Планка на пути, соответствующем максимуму гауссовой подынтегральной функции:

$$x_1^{\max} - x_0 = -\frac{1}{2m} \frac{\partial V}{\partial x} \varepsilon^2.$$

Таким образом, рассматриваемый интеграл может быть представлен в виде

$$\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S(x_0, x_1, \varepsilon)\right) dx_1 = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S^E(x_1^{\max})\right). \quad (3)$$

Выделим область интегрирования в бесконечно малой окрестности максимума гауссовой функции. При $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграл по значениям x_1 вне этой области обратится в нуль. Это значит, что изменение координаты носителя волновой функции за бесконечно малый интервал времени детерминировано условиями движения, или, другими словами, в любой момент времени задана его скорость. Это обстоятельство, в свою очередь, предполагает существование единственного пути его движения (для всех других путей амплитуда перехода равна нулю). Тогда мы можем последовательно представить всю цепочку кратных интегралов (2) в виде (3) и записать амплитуду (2) как

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta((x - x_0 - x^{\min}(t - t_0))) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S_{\min}^E(x_0, x)\right),$$

где $S_{\min}^E(x_0, x)$ — эвклидово действие на пути, детерминированном условием $\delta S[x(t, t_0, x_0)] = 0$. Возвращаясь к вещественному времени для амплитуды перехода (1), окончательно получим

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta((x - x_0 - x^{\min}(t - t_0))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}(x_0, x)\right). \quad (4)$$

В последнем выражении $S_{\min}(x_0, x)$ — обычное классическое действие на том же пути.

2. Мнимое действие. Пространственные волновые функции, являющиеся решениями стационарного уравнения Шредингера, могут быть как комплексными, так и вещественными функциями координат. Поскольку последний случай может реализовываться не только в условиях суперпозиции волновых функций различных материальных полей, но и для одного отдельного материального поля, с учетом вида амплитуды перехода (4) следует предположить, что в общем случае действие должно быть комплексным. В частности, на необходимость существования мнимых значений импульса при туннельном эффекте указывается в работах [13–15]. Этот факт, а также наличие экспоненциальной зависимости от координаты модуля волновых функций в условиях неоднородных потенциальных полей подтверждают сделанное предположение. Анализ классического выражения для действия на заданном пути в виде

$$S(\tau_0, x_0, \tau, x) = \int_{t_0}^t \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V \right) dt$$

показывает, что оно адекватно ситуации механического движения материального поля, но не является достаточно общим для описания всех возможных квантовых состояний материальных полей. Сохраняя неизменным выражение (4), предположим, что выражение для действия в нем имеет вид

$$S(\tau_0, x_0, \tau, x) = S_{\Re}(\tau_0, x_0, \tau, x) + iS_{\Im}(\tau_0, x_0, \tau, x),$$

где мнимое действие определяется как⁴

$$S_{\Im}(\tau_0, x_0, \tau, x) = \int_{x_0}^x P(x)_{\Im} dx - \int_{t_0}^t E_{\Im} d\tau.$$

При этом предположим, что координата x и время τ — вещественные, а функция координат $P(x)$ — мнимая. Вид решений волнового уравнения в областях пространства с переменной потенциальной энергией и при $E < V$ показывает, что мнимое действие не содержит временной переменной. Это означает равенство нулю энергии $E_{\Im} = 0$. Само понятие механического движения в данном случае неприменимо (как и понятие индивидуальной точки) уже в силу отсутствия времени в выражении для мнимого действия. Пространственная переменная в этом случае не может преобразовываться во временную (отсутствует понятие скорости), и соответствующая зависимость мнимого импульса полностью определяется значениями потенциальной энергии через закон сохранения энергии, который принимает вид

$$E_{\Im} = \frac{p_{\Im}^2}{2m} + V(x) = 0.$$

Понятие пути $x(\tau)$ отсутствует и мнимое действие является исключительно функцией координат, определяемой выражением

$$S_{\Im}(x_0, x) = \int_{x_0}^x p_{\Im} dx = \sqrt{2mi} \int_{x_0}^x \sqrt{V} dx.$$

С учетом сделанных предположений амплитуда перехода (4) примет вид

$$K_{t,t_0}(x, x_0) = \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(t - t_0))) \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}^{\Re}(x, x_0)\right) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2mV} dx\right). \quad (5)$$

Это выражение для амплитуды перехода является более общим, чем формулы (1) и (4), и описывает все состояния, соответствующие дифференциальному волновому уравнению Шредингера.⁵

⁴Именно такой вид выражения для действия следует считать наиболее общим, поскольку он не содержит понятия скорости, которое, согласно [13–15], неприменимо, например, к состоянию частицы под барьером.

⁵Выражение (5) применимо для описания более широкого класса квантовых явлений, чем уравнение Шредингера, таких как, например, редукция волновой функции [4]. Это обстоятельство обусловлено зависимостью ряда квантовых явлений от предыстории возникновения состояний квантовой системы.

3. Интегральное волновое уравнение. Представление Лагранжа изменения во времени комплексной плотности индивидуальной частицы. Интегральное волновое уравнение с амплитудой (5) имеет вид

$$\Psi_{\tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(\tau - \tau_0))) \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}^{\Re}(x, x_0)\right) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2mV} dx\right) \Psi_{\tau_0}(x_0) dx_0. \quad (6)$$

Представим волновую функцию как

$$\Psi_{\tau}(x) = \Phi_{\tau}(x) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2mV} dx\right).$$

Тогда волновое уравнение (6) примет вид

$$\Psi_{\tau}(x) = \Phi_{\tau}(x) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2mV} dx\right) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(\tau - \tau_0))) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\min}^{\Re}(x, x_0)\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x \sqrt{2mV} dx\right) \Phi_{\tau_0}(x_0) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_0} \sqrt{2mV} dx\right) dx_0.$$

Исключая из последнего выражения множитель, не связанный с механическим движением, для волновой функции $\Phi_{\tau}(x)$, описывающей механическое движение материального поля, имеем

$$\Phi_{\tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta((x - x_0 - x_{\min}^{\Re}(\tau - \tau_0))) \times \\ \times \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\int_{x_0}^x p dx - \int_{\tau_0}^{\tau} E d\tau\right)\right) \Phi_{\tau_0}(x_0) dx_0. \quad (7)$$

При описании движения сплошной среды методом Лагранжа последняя рассматривается как непрерывная совокупность бесконечно малых индивидуальных объемов — индивидуальных частиц. Индивидуальная частица движется в пространстве по пути, соответствующему принципу наименьшего действия.⁶ Уравнение (7) задает измерение фазы в индивидуальном объеме равным приращению действия в единицах \hbar . Зададим относительный фазовый объем $\Delta\varphi$

⁶На вещественность действия указывать в данном случае смысла нет, поскольку мнимое действие не содержит времени и, следовательно, само понятие пути к нему неприменимо. По сути, само название «действие» с точки зрения его первоначального смысла как функционала на пути не совсем корректно и употребляется здесь лишь в качестве наименования функции единственной независимой переменной координаты в показателе вещественной экспоненты амплитуды перехода (5). То есть под действием в общем случае подразумевается комплексная функция координат в (5), вещественная часть которой зависит от времени.

индивидуального объема Ξ^7 как $\Delta\varphi = 2\pi\Xi/\lambda$, где $\lambda(\xi) = 2\pi\hbar/p$ — расстояние в пространстве между ближайшими положениями индивидуальной частицы, имеющей импульс p (для $x = 0$), в которых она имеет одинаковый фазовый множитель.⁸ Комплексную плотность индивидуальной частицы⁹ определим следующим образом:

$$\Phi(\xi, \tau) = \lim_{\Xi \rightarrow 0} \frac{M(\Xi)}{\Xi} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{S(\Xi)}{\Delta\varphi(\Xi)}\right), \quad (8)$$

где $M(\Xi)$ — мера индивидуального объема Ξ [10]; $S(\Xi)$ — приращение действия на нем в произвольный момент времени. Что касается меры индивидуального объема, в соответствии с (7) она сохраняется и плотность индивидуальной частицы может быть выражена через ее начальную плотность и скорости в соответствующие моменты времени следующим образом:

$$\rho(\xi, \tau) = \frac{v(\xi, 0)}{v(\xi, \tau)} \rho(\xi, 0).$$

Вследствие аддитивности действия каждой из точек индивидуального объема фазовый множитель в (8) не зависит от времени. В результате комплексная плотность индивидуальной частицы в произвольный момент времени имеет вид

$$\Phi(\xi, \tau) = \frac{v(\xi, 0)}{v(\xi, \tau)} \rho(\xi, 0) \exp \phi(\xi), \quad (9)$$

где $\phi(\xi)$ — фазовая плотность индивидуальной частицы. Выражение (9) представляет собой уравнение временного изменения комплексной плотности индивидуальной частицы материального поля, то есть это уравнение эволюции квантового состояния материального поля в представлении Лагранжа.

4. Переход к представлению Эйлера. При переходе к представлению Эйлера (а именно оно в конечном счете необходимо для описания квантовых явлений) учтем стационарность поля скоростей. Тогда поле плотности меры также стационарно и в соответствии с (9) имеет вид

$$\rho(x) = \rho(0) \frac{v(0)}{v(x)},$$

где $v(0)$ — скорость индивидуальных частиц в точке пространства, произвольно выбранной в качестве начала координат. Для определения поля пространственной части фазового множителя воспользуемся условием постоянства

⁷Здесь, как и ранее, рассматриваем одномерное движение и, соответственно, одномерный индивидуальный объем.

⁸Если изменением скорости на этом расстоянии можно пренебречь, то в представлении Эйлера это длина волны.

⁹Комплексная плотность обозначается той же буквой, что и волновая функция, поскольку это одна и та же величина, записанная в представлениях Лагранжа и Эйлера соответственно.

фазового множителя в представлении Лагранжа и, следовательно, равенства нулю субстанциональной производной фазового множителя по времени:

$$\frac{d}{d\tau} \exp(i\phi(x, \tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \exp(i\phi(x, \tau)) + v(x) \frac{\partial}{\partial x} \exp(i\phi(x, \tau)) = 0.$$

Разделим действие индивидуального объема и его фазовый объем на пространственные и временные части. Тогда фаза волновой функции примет вид

$$\phi(x, \tau) = \alpha(x) - \frac{1}{\hbar} E\tau + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)},$$

где λ — расстояние между ближайшими точками, в которых пространственные части фазовых множителей волновой функции имеют одинаковые значения (для стационарных полей скоростей это время не зависит от координаты пространства); T — время прохождения индивидуальной частицей, обладающей заданным значением импульса, расстояния λ . Фаза $\alpha(x)$ может быть определена из выражения для субстанциональной производной фазового множителя волновой функции, которая в соответствии с (9) равна нулю:

$$v(x) \frac{\partial}{\partial x} \exp(i\phi(x, \tau)) + \frac{\partial}{\partial \tau} \exp(i\phi(x, \tau)) = \frac{d}{d\tau} \exp(i\phi(x, \tau)) = 0.$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)} \right) = \frac{E}{\hbar} \frac{1}{v(x)},$$

и для пространственной части фазы волновой функции имеем

$$\phi(x) = \frac{E}{\hbar} \int_0^x \frac{1}{v(x)} dx + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)}.$$

Таким образом, волновая функция $\Phi(x, t)$ в представлении Эйлера имеет следующий вид:

$$\Phi_\tau(x) = \frac{v_0}{v(x)} \rho_0 \exp \left(i \left(\phi_0 + \frac{E}{\hbar} \int_0^x \frac{dx}{v(x)} + \frac{2\pi}{T} \int_0^x \frac{dx}{v(x)} \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right) \right), \quad (10)$$

где ρ_0 , ϕ_0 — значения модуля и пространственной фазы волновой функции в произвольно выбранном начале отсчета координаты $x = 0$. Последнее выражение представляет собой обобщение понятия бегущей волны на области пространства с неоднородным полем скоростей (при однородном поле потенциальной энергии и, следовательно, однородным полем скоростей последнее выражение совпадает с формулой для бегущей волны).

5. Квантование. Поскольку квантование энергии возникает при финитном движении микрообъекта, классический путь содержит две точки поворота. В квантовом случае, когда возможны мнимые значения скорости и координаты, особенность этих точек не в том, что в них меняется направление

скорости этой точки (она становится мнимой), а в равенстве нулю ее модуля. Вследствие этого модуль пространственной волновой функции отдельного материального поля обращается, согласно (10), в бесконечность. Однако в областях неоднородного поля потенциальной энергии присутствуют два материальных поля с одинаковой энергией, движущиеся в противоположных направлениях, и их суперпозиция должна быть конечна, что возможно при равенстве нулю суммы фазовых множителей индивидуальных точек этих встречных полей в точках поворота. Для суперпозиции полей при их одномерном финитном движении с одинаковой энергией в соответствии с (10) имеем

$$\Phi_{\tau}(x) = \frac{v_0}{v(x)} \rho_0 \left[\exp\left(\phi^+(a) + i \frac{E}{\hbar} \left(\int_a^x \frac{1}{v(x)} dx + \frac{2\pi}{T} \int_a^x \frac{dx}{v(x)} \right)\right) + \exp\left(\phi^-(b) + i \frac{E}{\hbar} \left(\int_b^x \frac{1}{v(x)} dx + \frac{2\pi}{T} \int_b^x \frac{dx}{v(x)} \right)\right) \right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E\tau\right), \quad (11)$$

где a и b — координаты классических точек поворота, их значения зависят от полной энергии квантовой частицы и поля потенциальной энергии; индексы “+” и “−” указывают направления движения полей; $\phi^+(a)$ и $\phi^-(b)$ — постоянные фазы пространственных волновых функций материальных полей, движущихся во встречном направлении. Тогда при постоянном поле потенциальной энергии условие равенства нулю пространственной части фазового множителя в выражении (11) в точках поворота задает спектр возможных значений полной энергии квантовой частицы. Таким образом, правило квантования энергии определяется системой двух уравнений

$$\begin{cases} \exp\left(i\left(\phi^+(a) + \frac{E}{\hbar} \int_a^b \frac{1}{v(x)} dx + \omega \int_{x_{\lambda^+}}^b \frac{dx}{v(x)}\right)\right) + \exp(i\phi^-(b)) = 0, \\ \exp(i\phi^+(a)) + \exp\left(i\left(\phi^-(b) + \frac{E}{\hbar} \int_b^a \frac{dx}{v(x)} + \omega \int_{x_{\lambda^-}}^a \frac{dx}{v(x)}\right)\right) = 0, \end{cases}$$

где $\omega = 2\pi/T$; $\Delta\phi = \phi^+(a) - \phi^-(b)$ — разность фаз волн в начале координат; верхний индекс “+” указывает направление движения поля вдоль оси x ; “−” — противоположное направление. Учитывая симметрию фаз волновых функций встречных полей, условие квантования можно переписать в виде

$$\exp\left(i\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right) \int_a^b \frac{dx}{v(x)}\right) = -\exp(-i\Delta\phi),$$

или, принимая во внимание, что $\phi^+(b) = \phi^+(a) + \pi n$ и $\phi^-(b) = -\phi^-(a)$, получим

$$\exp\left(i\left(\frac{E}{\hbar} + \frac{2\pi}{T}\right) \int_a^b \frac{dx}{v(x)}\right) = \pi k. \quad (12)$$

Это условие квантования энергии при финитном движении в любом постоянном потенциальном поле определяется конечностью волновой функции квантовой частицы в точках поворота, что обеспечивается противоположным направлением комплексных векторов фазовых множителей в точках поворота.

6. Квантовый осциллятор. Верифицируем предложенный подход к описанию микроскопических процессов на модели гармонического осциллятора, для чего получим значения энергии его стационарных состояний и соответствующие им волновые функции. Выберем точку пространства, соответствующую минимуму потенциальной энергии, за начало координат. Тогда потенциальная энергия запишется в виде

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Соответственно, для поля скоростей осциллятора в области пространства $|x| < a$, где a — амплитуда колебаний, имеем

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 - (x/a)^2},$$

где v_0 — скорость осциллятора в начале координат. В области $|x| > a$ аналогичное выражение для модуля мнимой скорости примет вид

$$v(x) = v_0 \sqrt{1 + (x/a)^2}.$$

Условие квантования (12) запишется в виде

$$\frac{E}{\hbar} \int_{-a}^a \frac{dx}{v_0 \sqrt{1 - (x/a)^2}} = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Обозначим $\eta = x/a$ и перепишем последнее выражение в виде

$$\frac{E}{\hbar\omega_0} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} d\eta = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

где $\omega_0 = a/v_0$ — собственная частота колебаний осциллятора. В результате для энергии имеем

$$E = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} + n \right).$$

Тогда волновую функцию (11) для осциллятора можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_\tau(x) &= \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left[\exp \left(i \left(\phi^+(-1) + (n+1) \int_{-1}^0 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} + (n+1) \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) \right) + \right. \\ &+ \exp \left(i \left(\phi^-(-1) + (n+1) \int_{-1}^0 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} - (n+1) \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) \right) \left. \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} \exp \left(i \frac{\pi}{2} n \right) \left[\exp(i(n+1) \arcsin \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \exp(i\pi n) \exp(-i(n+1) \arcsin \eta) \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right) = \\ &= \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \eta^2}} i^n \left[(\sqrt{1 - \eta^2} + i\eta)^{n+1} + (-1)^n (\sqrt{1 - \eta^2} - i\eta)^{n+1} \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E\tau \right). \end{aligned}$$

Переход к переменной x с учетом зависимости амплитуды a от энергии позволяет выразить функцию $\Phi_\tau(x)$ через полиномы Эрмита и волновая функция осциллятора примет вид

$$\begin{aligned}\Psi_\tau(x) &= \Phi_t(x) \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_0^x \sqrt{2mV} dx\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E\tau\right) = \\ &= C(n) \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E\tau\right),\end{aligned}$$

где $C(n)$ — нормировочная постоянная.

Заключение. В основе предложенного подхода лежит представление о субатомной частице как о совокупности материальных полей, плотно (без пустот) заполняющих все пространство. Последнее свойство позволяет предположить возможность изменения состояния сплошной среды одновременно во всем пространстве вследствие локального воздействия на нее, не входя при этом в противоречие с СТО. При этом волновая функция субатомной частицы определяется как поле комплексной плотности материи. Как было показано в п. 1, квантовый интеграл по путям определяет не только изменение комплексной плотности на пути, но и сам путь, что позволяет ввести понятие индивидуальной частицы применительно к квантовому материальному полю.¹⁰ Результатом такого подхода является возможность представления квантовой эволюции не в виде непрерывного изменения волновой функции как целого, а методом Лагранжа — изменением комплексной плотности индивидуальных частиц совокупности материальных полей. Это позволяет отказаться от описания квантовой эволюции в виде изменения вектора состояния в гильбертовом пространстве и перейти к пространственно-временному описанию.

Аналогичный по сути подход неявно реализуется при описании квантовой эволюции интегральным волновым уравнением с ядром в виде интеграла по путям. Однако в силу наличия множества виртуальных путей оно не позволяет непосредственно представить квантовую эволюцию методом Лагранжа. Это представление основано на преобразовании интеграла по путям к амплитуде перехода (4) и выражается в предельно простой форме (10), которую следует рассматривать в качестве постулата.

Применение предложенного подхода позволяет избежать при определении состояния не только необходимости вычисления интегралов по путям, но и решения интегрального волнового уравнения вообще, что в частности продемонстрировано на примере состояний квантового осциллятора в п. 6. В свою очередь, это дает возможность вычислять амплитуды перехода для произвольного потенциала без использования теории возмущений и избежать связанных с ней ограничений.

¹⁰Напомним, что отдельному материальному полю соответствует стационарное состояние квантовой частицы, а сама она представляется сплошной средой — совокупностью материальных полей.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Библиографический список

1. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik // *Naturwissenschaften*, 1926. vol. 14. pp. 664–666. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
2. Bell J. Against 'measurement' // *Physics World*, 1990. vol. 3, no. 8. pp. 33–40. DOI: <https://doi.org/10.1088/2058-7058/3/8/26>.
3. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // *Phys. Rev.*, 1935. vol. 47, no. 10. pp. 777–780 DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
4. Samarin A. Yu. Nonlinear dynamics of open quantum systems // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018. vol. 22, no. 2. pp. 214–224. EDN: [KWXSKT](https://doi.org/10.14498/vsgtu1582). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1582>.
5. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories // *Phys. Rev. Lett.*, 1969. vol. 23, no. 15. pp. 880–883. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
6. Freedman S. J., Clauser J. F. Experimental test of local hidden-variable theories // *Phys. Rev. Lett.*, 1972. vol. 28, no. 14. pp. 938–941. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938>.
7. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental realization of Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities // *Phys. Rev. Lett.*, 1982. vol. 49, no. 2. pp. 91–94 DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.91](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91).
8. Feynman R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // *Rev. Mod. Phys.*, 1948 DOI: [10.1103/RevModPhys.20.367](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367). vol. 20, no. 2. pp. 367–387.
9. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mineola, NY: Dover Publ., 2010. xii+371 pp.
10. Zinn-Justin J. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2005. xiii+318 pp.
11. Samarin A. Yu. Quantum evolution in terms of mechanical motion // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021. vol. 25, no. 2. pp. 393–401. EDN: [LIZMMB](https://doi.org/10.14498/vsgtu1851). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1851>.
12. Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua // *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020. vol. 24, no. 1. pp. 7–21. EDN: [LIZMMB](https://doi.org/10.14498/vsgtu1724). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1724>.
13. MacColl L. A. Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers // *Phys. Rev.*, 1932. vol. 40, no. 4. pp. 621–626. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621>.
14. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet // *J. Appl. Phys.*, 1962. vol. 33, no. 12. pp. 3427–3433. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1702424>.
15. Steinberg A. M. How much time does a tunneling particle spend in the barrier region? // *Phys. Rev. Lett.*, 1995. vol. 74, no. 13. pp. 2405–2409. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2405>.
16. Кас М. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. New York: Interscience Publ., 1959. xiii+266 pp.

MSC: 81S40, 58D30

Lagrange's representation of the quantum evolution of matter fields

A. Yu. Samarin, A. M. Shterenberg

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

It is shown that a quantum path integral can be represented as a functional of the unique path that satisfies the principle of least action. The concept of path will be used, which implies the parametric dependence of the coordinates of a point on time $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. On this basis, the material fields, which are identified with a quantum particle, are represented as a continuous set of individual particles, the mechanical motion of which determines the spatial fields of the corresponding physical quantities. The wave function of a stationary state is the complex density of matter field individual particles. The modulus of complex density sets the density of matter normalized in one way or another at a given point in space, and the phase factor determines the result of the superposition of material fields in it. This made it possible to transform the integral equation of quantum evolution to the Lagrange's representation. By using the description of a quantum harmonic oscillator as an example, this approach is verified. EPR-type experiment is described in detail, and the possibility of the faster-than light communication is proved, as well as the possible rules of thumb of this communication are proposed.

Keywords: path integrals, matter field, nonlocality, quantum evolution in physical space, Lagrange's and Euler's representations, quantum dynamics of a closed system.

Received: 18th September, 2022 / Revised: 25th December, 2022 /Accepted: 24th January, 2023 / First online: 19th March, 2023

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Samarin A. Yu., Shterenberg A. M. Lagrange's representation of the quantum evolution of matter fields, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 50–63. EDN: **JDHCTR**. DOI: [10.14498/vsgtu1953](https://doi.org/10.14498/vsgtu1953) (In Russian).

Authors' Details:

Alexey Yu. Samarin  <https://orcid.org/0000-0001-7640-3875>Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of General Physics and Physics of Oil and Gas Production; e-mail: samarinay@yahoo.com*Alexandr M. Shterenberg*  <https://orcid.org/0000-0001-8909-7598>Dr. Phys. & Math. Sci.; Professor; Dept. of General Physics and Physics of Oil and Gas Production; e-mail: ashter53@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

References

1. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik, *Naturwissenschaften*, 1926, vol. 14, pp. 664–666. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
2. Bell J. Against 'measurement', *Physics World*, 1990, vol. 3, no. 8, pp. 33–40. DOI: <https://doi.org/10.1088/2058-7058/3/8/26>.
3. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Phys. Rev.*, 1935, vol. 47, no. 10, pp. 777–780. DOI: [10.1103/PhysRev.47.777](https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777).
4. Samarin A. Yu. Nonlinear dynamics of open quantum systems, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 214–224. EDN: XWXSKT. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1582>.
5. Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., Holt R. A. Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, 1969, vol. 23, no. 15, pp. 880–883. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
6. Freedman S. J., Clauser J. F. Experimental test of local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, 1972, vol. 28, no. 14, pp. 938–941. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938>.
7. Aspect A., Grangier P., Roger G. Experimental realization of Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities, *Phys. Rev. Lett.*, 1982, vol. 49, no. 2, pp. 91–94. DOI: [10.1103/PhysRevLett.49.91](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91).
8. Feynman R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.*, 1948. DOI: [10.1103/RevModPhys.20.367](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.20.367), vol. 20, no. 2, pp. 367–387.
9. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Mineola, NY, Dover Publ., 2010, xii+371 pp.
10. Zinn-Justin J. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford, Oxford Univ. Press, 2005, xiii+318 pp.
11. Samarin A. Yu. Quantum evolution in terms of mechanical motion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 393–401. EDN: LIZMMB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1851>.
12. Samarin A. Yu. Quantum evolution as a usual mechanical motion of peculiar continua, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 7–21. EDN: LIZMMB. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1724>.
13. MacColl L. A. Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers, *Phys. Rev.*, 1932, vol. 40, no. 4, pp. 621–626. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.40.621>.
14. Hartman T. E. Tunneling of a wave packet, *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, no. 12, pp. 3427–3433. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1702424>.
15. Steinberg A. M. How much time does a tunneling particle spend in the barrier region?, *Phys. Rev. Lett.*, 1995, vol. 74, no. 13, pp. 2405–2409. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2405>.
16. Kac M. *Probability and Related Topics in Physical Sciences*. New York, Interscience Publ., 1959, xiii+266 pp.



УДК 517.968.7

Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля

И. И. Хасанов¹, Д. И. Акрамова¹, А. А. Рахмонов²

¹ Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 705018, Бухара, ул. Мухаммада Икбала, 11.

² Институт математики имени В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 46.

Аннотация

Статья посвящена решению задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана–Лиувилля. В данном случае начальное условие ставится естественным образом и доказывается, что построенное для этой задачи решение является регулярным. В первую очередь строится фундаментальное решение и проводится анализ его свойств. Затем, используя эти свойства, изучается решение задачи Коши для однородного уравнения. Кроме того, в отличие от других задач такого типа, в данной работе решение задачи Коши, поставленной для неоднородного уравнения, получено в явном виде при помощи принципа Дюамеля и трехпараметрической функции Миттаг–Леффлера. В результате применения дополнительных условий к данным задачам также продемонстрировано, что это решение является классическим.

Ключевые слова: дробные производные Римана–Лиувилля, задача Коши, функция Грина, функция Миттаг–Леффлера, принцип Дюамеля.

Получение: 5 сентября 2022 г. / Исправление: 12 марта 2023 г. /

Принятие: 17 марта 2023 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Дифференциальные уравнения и математическая физика

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

    Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Хасанов И. И., Акрамова Д. И., Рахмонов А. А. Исследование задачи Коши для одного уравнения дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 64–80. EDN: [HTKOLW](https://www.edn.ru/HTKOLW). DOI: [10.14498/vsgtu1952](https://doi.org/10.14498/vsgtu1952).

Сведения об авторах

Иброхим Иштиерович Хасанов  <https://orcid.org/0000-0002-9634-5550>
преподаватель; каф. дифференциальных уравнений; e-mail: ihasanov998@gmail.com

Дилшода Исроил кизи Акрамова  <https://orcid.org/0000-0001-9596-9401>
преподаватель; каф. математического анализа; e-mail: akramova.shoda@mail.ru

Аскар Ахмадович Рахмонов   <https://orcid.org/0000-0002-7641-9698>
кандидат физико-математических наук; старший научный сотрудник;
e-mail: araxmonov@mail.ru

1. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим задачу Коши для дробного дифференциального уравнения порядков $0 < \alpha, \beta \leq 1$

$$u_t + D_{0+,t}^{1-\alpha}u - D_{0+,t}^{1-\beta}u_{xx} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции и $(D_{0+,t}^\gamma g)(t)$ — дробная производная в смысле Римана—Лиувилля по переменной t , определяемая равенством [1, p. 69]:

$$(D_{0+,t}^\gamma g)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^\gamma} d\tau, \quad 0 < \gamma < 1,$$

$$D_{0+,t}^\gamma g(t) = g^{(\gamma)}(t), \quad \gamma \in \{0, 1\}.$$

В данной работе мы рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) при $0 < \alpha, \beta \leq 1$ в области $\mathbb{R}_T^2 := \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, 0 < t \leq T\}$, удовлетворяющее (1), (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $u(x, t) \in C_b(\mathbb{R}; [0, T])$ называется классическим (регулярным) решением задачи (1), (2) для заданных $f \in C_b(\mathbb{R}; [0, T])$ и $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ такая, что $\frac{\partial}{\partial t}u, D_{0+,t}^{1-\alpha}u, \frac{\partial^2}{\partial x^2}D_{0+,t}^{1-\beta}u \in C_b(\mathbb{R}; (0, T])$. Здесь $C_b(\mathbb{R}; (0, T])$ — пространство непрерывных ограниченных функций с суп-нормой по x и непрерывной по t .

В работах [2–5] были рассмотрены задачи по нахождению классического решения уравнений параболического типа, подобных (1), (2). В работе [2] исследовано дифференциальное уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования. Свойства фундаментального решения изучались с помощью функции Райта. В работе [3] построена функция Грина для уравнения (1) и показано, что в случае $\beta = 1$ найденное решение переходит в ранее известное классическое решение. В работах [4, 5] рассмотрена видоизмененная задача Коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Исследования в работах [6, 7] направлены на получение явного решения n -мерного уравнения аномальной диффузии в бесконечной области с ненулевым начальным условием и условием обращения в нуль на бесконечности. Показано, что это уравнение может быть получено из параболического интегро-дифференциального уравнения с памятью, ядром которого является $t^{-\alpha}E_{1-\alpha, 1-\alpha}(-t^{1-\alpha})$, $\alpha \in (0, 1)$, где $E_{\alpha, \beta}$ — функция Миттаг—Леффлера. На основе преобразований Лапласа и Фурье, свойств H -функции Фокса и теоремы о свертке получено явное решение уравнения аномальной диффузии.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha, \beta \leq 1$, $\varphi(x) \in C_b(\mathbb{R})$ и $f(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по крайней мере по одной из переменных. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области \mathbb{R}_T^2 , удовлетворяющее начальному условию (2), и оно имеет вид

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t)\varphi(y)dy + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t - \tau)f(y, \tau)dy,$$

где

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta, 1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta) e^{-i\xi x} d\xi.$$

2. Обозначения и вспомогательные сведения. Функцией Миттаг—Леффлера называется целая функция, определяемая рядом

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad z, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Также функцией Миттаг—Леффлера называют сумму более общего ряда:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad z, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Таким образом, $E_{\alpha, 1}(z) = E_\alpha(z)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [1, p. 26]. Пусть $0 < \alpha < 2$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. Предположим, что γ удовлетворяет неравенству $\pi\alpha/2 < \gamma < \min\{\pi, \pi\alpha\}$. Тогда существует такое постоянное $c = c(\alpha, \beta, \gamma) > 0$, что

$$|E_{\alpha, \beta}(z)| \leq \frac{c}{1 + |z|}, \quad \gamma \leq |\arg(z)| \leq \pi.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [8, p. 47]. Для $0 < \alpha < 1$, $t > 0$ имеем $0 < E_\alpha(-t) < 1$. Кроме того, $E_\alpha(-t)$ вполне монотонна:

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_\alpha(-t) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Обобщенная функция Миттаг—Леффлера определяется следующим образом:

$$E_{\alpha, \beta}^\gamma(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad z, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0.$$

Здесь

$$(\gamma)_n = \frac{\Gamma(\gamma + n)}{\Gamma(\gamma)} \quad \text{и} \quad (\gamma)_0 \equiv 1 \quad (\Re(z) > -n; n \in \mathbb{N}; z \notin \{0, -1, -2, \dots\});$$

$H(z)$ — функция Фокса, которая определяется с помощью интеграла типа Меллина—Барнса следующим образом [8, p. 14]:

$$H(z) = H_{p, q}^{m, n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Theta(s) z^{-s} ds,$$

где

$$\Theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + B_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - B_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)},$$

L — некоторый контур, разделяющий полюса двух множителей в числителе; $0 \leq n \leq p$, $1 \leq m \leq q$, $A_l, B_j \in \mathbb{R}_+$, $a_l, b_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $l = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$.

Свойство 1. Если одно из (a_j, A_j) $j = 1, \dots, n$ равно одному из (b_j, B_j) , $j = m + 1, \dots, q$, или одно из (b_j, B_j) , $j = 1, \dots, m$, равно одному из (a_j, A_j) , $j = n + 1, \dots, p$, то H -функция сводится к одному из низших порядков p и q , а также n (или m) уменьшаются на единицу, и при $n \geq 1$ и $q > m$ имеет вид

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}), (a_1, A_1) \end{matrix} \right. \right] = \\ = H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left[z \left| \begin{matrix} (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \dots, (b_{q-1}, B_{q-1}) \end{matrix} \right. \right],$$

при $m \geq 1$ и $p > n$ имеет вид

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}), (b_1, B_1) \\ (b_1, \dots, B_1), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = \\ = H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, A_1), \dots, (a_{p-1}, A_{p-1}) \\ (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right].$$

Свойство 2. Имеет место равенство

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[\frac{1}{z} \left| \begin{matrix} (1 - b_q, B_q) \\ (1 - a_p, A_p) \end{matrix} \right. \right].$$

Свойство 3 [9, р. 11]. Если $\sigma \in \mathbb{C}$, то справедлива следующая формула:

$$z^\sigma H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p + \sigma A_p, A_p) \\ (b_q + \sigma B_q, B_q) \end{matrix} \right. \right].$$

Обобщенная функция Миттаг—Леффлера $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$ имеет следующее представление через H -функцию Фокса [9, р. 25, Eq. (1.137)]:

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} H_{1,2}^{1,1} \left[-z \left| \begin{matrix} (1 - \gamma, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right].$$

Кроме того, справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 1. Преобразование Лапласа функции $t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\pm \omega t^\alpha)$ определяется следующей формулой:

$$L[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\pm \omega t^\alpha)](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(\pm \omega t^\alpha) dt = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha \mp \omega)^\gamma},$$

где $|\omega/s^\alpha| < 1$.

ЛЕММА 2. Для произвольных α и β , $\mu > 0$, и $a \in \mathbb{R}$ справедлива следующая формула:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(-a|\xi|^\mu) d\xi = (2\pi)^{n/2} |x|^{1-n/2} \int_0^\infty |\xi|^{n/2} E_{\alpha,\beta}^{(m)}(-a|\xi|^\mu) J_{n/2-1}(|x||\xi|) d|\xi|,$$

где $\alpha > 0$, β – произвольное комплексное число, $J_{n/2-1}(\cdot)$ – функция Бесселя, а $E_{\alpha,\beta}^{(m)}(\cdot)$ – m -ные производные функции типа Миттаг–Леффлера, которые могут быть выражены через H -функции Фокса [9]:

$$E_{\alpha,\beta}^{(m)}(z) = H_{1,2}^{1,1} \left[-z \middle| (0, 1), (1 - (\alpha m + \beta), \alpha) \right].$$

ЛЕММА 3 [9, p. 57]. Пусть $\gamma > 0$ или $\gamma = \mu = 0$ и $\Re(\kappa) < -1$, где

$$\gamma := \sum_{j=1}^n A_j - \sum_{j=n+1}^p A_j + \sum_{j=1}^m B_j - \sum_{j=m+1}^q B_j, \quad \mu := \sum_{j=1}^q B_j - \sum_{j=1}^p A_j,$$

$$\kappa := \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j + \frac{p-q}{2}.$$

Если $\rho, \nu, b \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$ удовлетворяют условиям

$$\Re(\rho) + \nu + \sigma \min_{1 \leq j \leq m} \left[\frac{\Re(b_j)}{B_j} \right] > -1$$

для $\Re(\nu) > -1/2$ и

$$\Re(\rho) + \sigma \min_{1 \leq j \leq n} \left[\frac{1}{A_j} - \frac{\Re(a_j)}{A_j} \right] < \frac{3}{2},$$

то для $a, b > 0$ имеет место следующее равенство:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} J_\nu(ax) H_{p,q}^{m,n} \left[bx^\sigma \middle| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right] dx = \frac{2^{\lambda-1}}{a^\lambda} H_{p+2,q}^{m,n+1} \left[b \left(\frac{2}{a} \right)^\sigma \middle| \begin{matrix} (1 - (\lambda + \nu)/2, \sigma/2), (a_p, A_p), (1 - (\lambda - \nu)/2, \sigma/2) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right].$$

3. Фундаментальное решение и его свойства. Рассмотрим однородное уравнение

$$u_t + D_{0+,t}^{1-\alpha} u - D_{0+,t}^{1-\beta} u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T \tag{3}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. Тогда задача (3), (4) имеет единственное классическое решение, определяемое формулой

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t)\varphi(y)dy, \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta, 1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Перед доказательством теоремы 2 приведем некоторые свойства функции $G(x, t)$.

Функцию Грина $G(x, t)$ можно записать в следующем виде:

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2}}{k!} H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| \begin{matrix} (1, 1), (1/2 - k, 1) \\ (\beta/2 - \alpha k, \beta) \end{matrix} \right].$$

Действительно, сначала на основе работы [1, р. 43] обобщенную функцию типа Миттаг—Леффлера приведем к двухпараметрическому виду. Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta, 1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^\beta) e^{-i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta, 1+\alpha k - \beta k}^{(k)}(-\xi^2 t^\beta) e^{-i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда, используя лемму 2 еще раз и заменив функцию Миттаг—Леффлера функцией H -Фокса, получим следующий вид для функции Грина:

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!} \int_0^\infty |\xi|^{1/2} E_{\beta, 1+\alpha k - \beta k}^{(k)}(-\xi^2 t^\beta) J_{-1/2}(|x||\xi|) d|\xi| = \\ &= \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!} \int_0^\infty |\xi|^{1/2} H_{1,2}^{1,1} \left[\xi^2 t^\beta \middle| \begin{matrix} (-k, 1) \\ (0, 1), (-\alpha k, \beta) \end{matrix} \right] J_{-1/2}(|x||\xi|) d|\xi|. \end{aligned}$$

Далее, используя лемму 3, свойства 1 и 3 H -функции Фокса, получим

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!} H_{3,2}^{1,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| \begin{matrix} (1/2, 1), (-k, 1), (0, 1) \\ (0, 1), (-\alpha k, \beta) \end{matrix} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{k!} H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| \begin{matrix} (1/2, 1), (-k, 1) \\ (-\alpha k, \beta) \end{matrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2}}{k!} H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| \begin{matrix} (1, 1), (1/2 - k, 1) \\ (\beta/2 - \alpha k, \beta) \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Функция $G(x, t)$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$G_t(x, t) + D_{0+,t}^{1-\alpha}G(x, t) - D_{0+,t}^{1-\beta}G_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T,$$

$$G(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\xi = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(x, t) dx = E_{\alpha}(-t^{\alpha}), \quad 0 < t \leq T, \quad (7)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, а также при $|x| \rightarrow 0$ имеют место оценки

$$|G(x, t)| \leq C \frac{|x|}{t^{\beta}} \exp\left(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\right),$$

$$|G_t(x, t)| \leq C \frac{|x|}{t^{1+\beta}} \exp\left(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\right), \quad (8)$$

$$|D_{0+,t}^{1-\alpha}G(x, t)| \leq C \frac{|x|}{t^{1+\beta-\alpha}} \exp\left(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\right),$$

$$|D_{0+,t}^{1-\beta}G_{xx}(x, t)| \leq C \frac{|x|}{t^{1+\beta-\alpha}} \exp\left(-\frac{t^{\alpha-\beta}x^2}{4}\right),$$

при $|x| \rightarrow \infty$ – оценки

$$|G(x, t)| \leq \frac{C}{|x|} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right],$$

$$|G_t(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^{1+2/\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right],$$

$$|D_{0+,t}^{1-\alpha}G(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^{1+2/\beta-2\alpha/\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right],$$

$$|D_{0+,t}^{1-\beta}G_{xx}(x, t)| \leq \frac{C}{|x|^{1+2/\beta-2\alpha/\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right] \quad (9)$$

для $0 < t_0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем равенство (7). Из свойства $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(0) = 1/\Gamma(\beta)$ для $G(x, t)$ имеем равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} G(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^{\beta}) e^{-i\xi x} d\xi dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^{\beta}) \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} dx d\xi = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\alpha k} \int_{\mathbb{R}} E_{\beta,1+\alpha k}^{k+1}(-\xi^2 t^{\beta}) \delta(\xi) d\xi = E_{\alpha}(-t^{\alpha}). \end{aligned}$$

Последнее равенство получено из определений дельта-функции Дирака и обобщенной функции типа Миттаг–Леффлера.

Используя теорему 1.2 из работы [9, р. 19] при $|x| \rightarrow 0$, получим

$$\left| H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right] \right| \leq C \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2+k}.$$

Отсюда для функции Грина $G(x, t)$ имеем оценку

$$|G(x, t)| \leq \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{\alpha k - \beta/2} \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2+k} \leq C \frac{|x|}{t^\beta} \exp\left(-\frac{t^{\alpha-\beta} x^2}{4}\right).$$

При $|x| \rightarrow \infty$, используя неравенство

$$\left| H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right] \right| \leq C \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2-\alpha k/\beta},$$

имеем оценку

$$|G(x, t)| \leq \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{\alpha k - \beta/2} \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2-\alpha k/\beta} \leq \frac{C}{|x|} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right].$$

Найдем оценки для $G_t(x, t)$. Поскольку подынтегральные функции в $G(x, t)$ непрерывны, с помощью свойства [8, р. 99]

$$\frac{d}{dz} [z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(az^\alpha)] = z^{\beta-2} E_{\alpha,\beta-1}^\gamma(az^\alpha)$$

получим

$$\begin{aligned} G_t(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|x|\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \alpha}}{k!} H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| (1/2, 1), (-k, 1) \right] \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2}}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1/2 + k - s)}{\Gamma(\alpha k + 1 - \beta/2 - \beta s)} \left(\frac{4t^\beta}{x^2} \right)^{-s} ds \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 - 1}}{k!} H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right]. \end{aligned}$$

Далее, применяя теорему 1.2 из работы [9, р. 19], получим оценку при $|x| \rightarrow \infty$:

$$\left| H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \middle| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right] \right| \leq C \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2-\alpha k/\beta+1/\beta},$$

используя которую, получаем следующую оценку:

$$|G_t(x, t)| \leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 - 1}}{k!} \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2-\alpha k/\beta+1/\beta} \leq$$

$$\leq \frac{C}{|x|^{1+2/\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right].$$

При $|x| \rightarrow 0$ находим оценку

$$\left| H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \left| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right. \right] \right| \leq C \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{-1/2-k}$$

и следующую оценку для функции Грина $G_t(x, t)$:

$$|G_t(x, t)| \leq \frac{C_1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 - 1}}{k!} \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{-1/2-k} \leq C \frac{|x|}{t^{\beta+1}} \exp\left[-\frac{x^2 t^{\alpha-\beta}}{4}\right].$$

Для вычисления производной дробного порядка воспользуемся следующим свойством функции Миттаг–Леффлера [8, р. 99]:

$$(D_{0+,t}^\alpha [t^{\gamma-1} E_{\beta,\gamma}^\delta(at^\beta)])(x) = x^{\gamma-\alpha-1} E_{\beta,\gamma-\alpha}^\delta(ax^\beta).$$

Для дальнейших исследований нам понадобится дробная производная функции $t^{\alpha k - \beta/2 - \beta s}$ порядка $1 - \alpha$ по t :

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^{1-\alpha} t^{\alpha k - \beta/2 - \beta s} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \tau^{\alpha k - \beta/2 - \beta s} (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} t^{\alpha k - \beta/2 - \beta s + \alpha} \frac{\Gamma(\alpha k - \beta/2 - s\beta + 1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k - \beta/2 - s\beta + \alpha + 1)} = \\ &= t^{\alpha k - \beta/2 - \beta s + \alpha - 1} \frac{\Gamma(\alpha k - \beta/2 - s\beta + 1)}{\Gamma(\alpha k - \beta/2 - s\beta + \alpha)}. \end{aligned}$$

Отсюда для дробной производной порядка $1 - \alpha$ по t функции Грина получим

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 + \alpha - 1}}{2\pi i k!} \int_L \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1/2 + k - s)}{\Gamma(\alpha k + \alpha - \beta/2 - \beta s)} \left(\frac{4t^\beta}{x^2} \right)^{-s} ds = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 + \alpha - 1}}{k!} H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \left| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right. \right]. \end{aligned}$$

Найдем оценку для $D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x, t)$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $|x| \rightarrow 0$. Применяя теорему 1.2 из работы [9, р. 19], получим

$$\begin{aligned} \left| H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \left| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right. \right] \right| &\leq C \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2 - (1-\alpha-\alpha k)/\beta}, \quad |x| \rightarrow \infty, \\ \left| H_{2,1}^{0,2} \left[\frac{4t^\beta}{x^2} \left| (1, 1), (1/2 - k, 1) \right. \right] \right| &\leq C \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{-1/2-k}, \quad |x| \rightarrow 0; \\ |D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x, t)| &\leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 + \alpha - 1}}{k!} \left(\frac{x^2}{4t^\beta} \right)^{1/2 - (1-\alpha-\alpha k)/\beta} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{|x|^{1+2/\beta-2\alpha/\beta}} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\alpha/\beta}\right], \\ |D_{0+,t}^{1-\alpha} G(x,t)| &\leq C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 + \alpha - 1}}{k!} \left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{-1/2-k} \leq \\ &\leq C \frac{|x|}{t^{1+\beta-\alpha}} \exp\left[-\frac{t^{\alpha-\beta} x^2}{4}\right]. \end{aligned}$$

Вычислим вторую производную по x от функции Грина:

$$G_{xx}(x,t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - 3\beta/2}}{k!} H_{3,2}^{2,1} \left[\frac{x^2}{4t^\beta} \middle| \begin{matrix} (-2, 2), (1 - 3\beta/2 + \alpha k, \beta) \\ (-1, 1), (-1/2 + k, 1), (0, 2) \end{matrix} \right],$$

где

$$\begin{aligned} H_{3,2}^{2,1} \left[\frac{x^2}{4t^\beta} \middle| \begin{matrix} (-2, 2), (1 - 3\beta/2 + \alpha k, \beta) \\ (-1, 1), (-1/2 + k, 1), (0, 2) \end{matrix} \right] &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma(-1+s)\Gamma(k-1/2+s)\Gamma(3-2s)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(\alpha k - 3\beta/2 + \beta s + 1)} \left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{-s} ds, \end{aligned}$$

и дробную производную функции $G_{xx}(x,t)$:

$$\begin{aligned} D_{0+,t}^{1-\beta} G_{xx}(x,t) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\pi i k!} \times \\ &\times \int_L \frac{\Gamma(-1+s)\Gamma(k-1/2+s)\Gamma(3-2s)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(\alpha k - 3\beta/2 + \beta s + 1)} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{-s} D_{0+,t}^{1-\beta} t^{\alpha k - 3\beta/2 + \beta s} ds = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 - 1}}{2\pi i k!} \times \\ &\times \int_L \frac{\Gamma(-1+s)\Gamma(k-1/2+s)\Gamma(3-2s)}{\Gamma(1-2s)\Gamma(\alpha k - \beta/2 + \beta s)} \left(\frac{x^2}{4t^\beta}\right)^{-s} ds = \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k - \beta/2 - 1}}{k!} H_{3,2}^{2,1} \left[\frac{x^2}{4t^\beta} \middle| \begin{matrix} (-2, 2), (\alpha k - \beta/2, \beta) \\ (-1, 1), (-1/2 + k, 1), (0, 2) \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

Теперь перейдем к непосредственному доказательству теоремы 2.

Применяя преобразования Фурье и Лапласа к задаче (3), (4) по переменным x и t , получаем

$$\begin{aligned} s\hat{u}(\xi, s) - \tilde{u}(\xi, 0) + s^{1-\alpha}\hat{u} + \xi^2 s^{1-\beta}\hat{u} &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad s > 0, \\ \tilde{u}(\xi, 0) &= \tilde{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\hat{u} = \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{s + s^{1-\alpha} + \xi^2 s^{1-\beta}}. \quad (10)$$

Применяя обратные преобразования Фурье и Лапласа к уравнению (10), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{s + s^{1-\alpha} + \xi^2 s^{1-\beta}} &= \frac{1}{s + s^{1-\alpha}} \cdot \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{1 + \xi^2 \frac{s^{1-\beta}}{s + s^{1-\alpha}}} = \\
 &= \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{s + s^{1-\alpha}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi^2)^n \frac{s^{(1-\beta)n}}{(s + s^{1-\alpha})^n} = \\
 &= \tilde{\varphi}(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi^2)^n \frac{s^{\alpha(n+1) - (\beta n + 1)}}{(s^\alpha + 1)^{n+1}} = \\
 &= \tilde{\varphi}(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} L\{t^{\beta n} E_{\alpha, \beta n + 1}(-t^{-\alpha})\} = \\
 &= \tilde{\varphi}(\xi) L\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi^2 t^\beta)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)_k (-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta n + 1) n!} \right\} = \\
 &= \tilde{\varphi}(\xi) L\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+1)}{\Gamma(n+1)} \frac{(-t^\alpha)^k (-\xi^2 t^\beta)^n}{\Gamma(\alpha k + \beta n + 1) \Gamma(k+1)} \right\} = \\
 &= \tilde{\varphi}(\xi) L\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-t^\alpha)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+1)_n (-t^{\beta} \xi^2)^n}{\Gamma(\alpha k + \beta n + 1) n!} \right\} = \\
 &= \tilde{\varphi}(\xi) L\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-t^\alpha)^k E_{\beta, \alpha k + 1}^{k+1}(-t^\beta \xi^2) \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} (-t^\alpha)^k E_{\beta, \alpha k + 1}^{k+1}(-t^\beta \xi^2) \tilde{\varphi}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-t^\alpha)^k E_{\beta, \alpha k + 1}^{k+1}(-t^\beta \xi^2) \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} \varphi(y) dy d\xi = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(x-y)} \sum_{k=0}^{\infty} (-t^\alpha)^k E_{\beta, \alpha k + 1}^{k+1}(-t^\beta \xi^2) d\xi \right] \varphi(y) dy = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t) \varphi(y) dy. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Заметим, что если в (11) $t = 0$, то в силу (6) имеем

$$u(x, 0) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y, 0) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Теперь покажем, что полученное выше решение является классическим. Применяя (7) в (5), имеем

$$|u(x, t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t) \varphi(y) dy \right| \leq \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})} \left| \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t) dy \right| \leq \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Отсюда

$$\|u\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leq \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Поскольку $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, с учетом (9) получим следующую оценку:

$$|u_t(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial t} G(x - y, t) \right| |\varphi(y)| dy \leq C \int_{\text{supp}(\varphi)} |\varphi(y)| dy \leq C \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}.$$

Это означает, что

$$\|u_t\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leq \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}. \quad (12)$$

Аналогичным образом получим

$$\|D_{0+,t}^{1-\alpha} u\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leq \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}, \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0+,t}^{1-\alpha} u \right\|_{C(\mathbb{R};[0,T])} \leq \|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R})}. \quad (13)$$

Теорема 2 доказана. □

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x, t) \in C_b(\mathbb{R}; [0, T])$. Тогда единственное классическое решение уравнения

$$\omega_t(x, t; \tau) + D_{\tau+,t}^{1-\alpha} \omega(x, t; \tau) - D_{\tau+,t}^{1-\beta} \omega_{xx}(x, t; \tau) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \tau < t \leq T, \quad (14)$$

удовлетворяющее условию

$$\omega(x, t; \tau)|_{t=\tau} = f(x, \tau), \quad (15)$$

имеет вид

$$\omega(x, t; \tau) = \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t - \tau) f(y, \tau) dy,$$

где G определяется, как в теореме 2.

Доказательство теоремы 3 проводится с использованием результатов теоремы 2 и леммы 1.

4. Принцип Дюамеля. Рассмотрим неоднородную начальную задачу

$$u_t + D_{0+,t}^{1-\alpha} u - D_{0+,t}^{1-\beta} u_{xx} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T, \quad (16)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (Принцип Дюамеля). Пусть $f \in C_b(\mathbb{R}; [0, T])$. Тогда единственное классическое решение задачи (16), (17) задается формулой

$$u(x, t) = \int_0^t \omega(x, t; \tau) d\tau, \quad (18)$$

где $\omega(x, t; \tau)$ — классическое решение задачи (14), (15).

Доказательство. Поскольку $\omega(x, t; \tau)$ — классическое решение начальной задачи (14), (15), из условий (12), (13) следует, что функции ω , ω_t ,

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{\tau+,t}^{1-\beta} \omega$, $D_{\tau+,t}^{1-\alpha} \omega \in C(\mathbb{R} \times (0, T])$ ограничены. Таким образом, в дальнейшем мы можем дифференцировать функцию (18) под интегралом.

Покажем, что

$$u(x, t) = \int_0^t \omega(x, t; \tau) d\tau$$

является решением начальной задачи (16), (17). Продифференцируем последнее равенство по t :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \omega(x, t; \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \omega(x, t; \tau) d\tau. \quad (19)$$

Поскольку $\omega, \omega_t, D_{0+,t}^{1-\alpha} \omega, \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0+,t}^{1-\beta} \omega$ — непрерывны и ограничены, применяя теорему Фубини, получаем

$$D_{0+,t}^{1-\alpha} u(x, t) = D_{0+,t}^{1-\alpha} \int_0^t \omega(x, t; \tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_{\tau}^t \omega(x, s, \tau) (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Обозначим

$$W(x, t; \tau) = \int_{\tau}^t \omega(x, s; \tau) (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Применяя к $\int_0^t W(x, t; \tau) d\tau$ формулу (19), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau = W(x, s; \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W(x, t; \tau) d\tau.$$

Так как $\omega(x, t; \tau)$ — непрерывная функция,

$$W(x, t; \tau)|_{\tau=t} = \lim_{\tau \rightarrow t} \int_{\tau}^t \omega(x, s; \tau) (t-s)^{\alpha-1} ds = 0.$$

Из теоремы 3 следует, что функция ω является классическим решением задачи (14), (15), тогда

$$D_{0+,t}^{1-\alpha} u(x, t) = \int_0^t D_{\tau+,t}^{1-\alpha} \omega(x, t; \tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{0+,t}^{1-\beta} u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{\tau+,t}^{1-\beta} \omega(x, t; \tau) d\tau. \quad (21)$$

С использованием (19), (20) и (21) уравнение (16) сводится к виду

$$\begin{aligned} u_t + D_{0+,t}^{1-\alpha} u - D_{0+,t}^{1-\beta} u_{xx} = & \\ = \omega(x, t; \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \omega(x, t; \tau) d\tau + \int_0^t D_{\tau+,t}^{1-\alpha} \omega(x, t; \tau) d\tau - & \\ - \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{\tau+,t}^{1-\beta} \omega(x, t; \tau) d\tau = & \end{aligned}$$

$$= \omega(x, t; \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial t} \omega(x, t; \tau) + D_{\tau+, t}^{1-\alpha} \omega(x, t; \tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_{\tau+, t}^{1-\beta} \omega(x, t; \tau) \right] d\tau = f(x, t).$$

При этом $u(x, 0) = 0$. Следовательно,

$$u(x, t) = \int_0^t \omega(x, t; \tau) d\tau$$

является решением задачи (16), (17).

Покажем регулярность решения. Применяя (7) в (18), имеем

$$|u(x, t)| \leq \|f\|_{C_b(\mathbb{R}; [0, T])} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-\tau) dy d\tau \right| \leq |tE_{\alpha, 2}(-t^\alpha)| \cdot \|f\|_{C_b(\mathbb{R}; [0, T])} \leq C \|f\|_{C_b(\mathbb{R}; [0, T])}$$

при $0 \leq t \leq T$. Аналогично доказывается регулярность u_t , $D_{0+, t}^{1-\alpha} u$ и $D_{0+, t}^{1-\beta} u_{xx}$ с использованием свойств (8), (9). Теорема 4 доказана. \square

Таким образом, в теореме 2 доказаны существование и единственность решения однородного уравнения с неоднородным начальным условием (3), (4), в теореме 3 приведено решение вспомогательной задачи (14), (15), а в теореме 4 доказана разрешимость неоднородного уравнения с однородным начальным условием (16), (17). Из этих трех теорем следует существование и единственность решения неоднородного уравнения с неоднородным начальным условием (1), (2), т.е. теорема 1 доказана.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Авторы благодарны рецензентам за тщательное прочтение статьи, ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* / North-Holland Mathematics Studies. vol. 204. Amsterdam: Elsevier, 2006. xx+523 pp. EDN: RLZKLZ. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5).
2. Псху А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2016. Т. 13. С. 1078–1098. EDN: XRNEPH. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.086>.
3. Паровик Р. И. Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 1(20). С. 127–132. EDN: NBOEJN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu742>.

4. Мамчуев М. О. Видоизмененная задача коши для нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, №9. С. 1147–1153. EDN: UVEYJV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064115090034>.
5. Мамчуев М. О. Фундаментальное решение нагруженного параболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // *Диффер. уравн.*, 2015. Т. 51, №5. С. 611–620. EDN: TRUTTF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064115050052>.
6. Durdiev D. K., Shishkina E. L., Sitnik S. M. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space // *Lobachevskii J. Math.*, 2021. vol. 42, no. 6. pp. 1264–1273. EDN: HGPFMT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508022106007X>; arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10594>.
7. Sultanov M. A., Durdiev D. K., Rahmonov A. A. Construction of an explicit solution of a time-fractional multidimensional differential equation // *Mathematics*, 2021. vol. 9, no. 17, 2052. EDN: HZEAME. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9172052>.
8. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications* / Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. xiv+443 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2>.
9. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. xiv+268 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9>.

MSC: 35R11

Investigation of the Cauchy problem for one fractional order equation with the Riemann–Liouville operator

I. I. Hasanov¹, D. I. Akramova¹, A. A. Rahmonov²

¹ Bukhara State University,

11, st. Muhammad Ikbol, Bukhara, 705018, Uzbekistan.

² Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
46, st. Universitetskaya, Tashkent, 100174, Uzbekistan.

Abstract

The article is dedicated to solving the Cauchy problem for a differential equation with a Riemann–Liouville fractional derivative. The initial condition is formulated in a natural way and it is proven that the resulting solution is regular. Firstly, a fundamental solution is constructed and its properties are analyzed. Then, based on these properties, the solution to the homogeneous equation in the Cauchy problem is studied. Furthermore, unlike other problems of this type, the solution to the Cauchy problem presented for a nonhomogeneous equation is explicitly obtained in this work using the Duhamel’s principle and the three-parameter Mittag–Leffler function. By applying additional conditions to these problems, it is also demonstrated that this solution is classical.

Keywords: Riemann–Liouville fractional derivative, Cauchy problem, Green function, Mittag–Leffler function, Duhamel’s principle.

Received: 5th September, 2022 / Revised: 12th March, 2023 /

Accepted: 17th March, 2023 / First online: 24th March, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest regarding the authorship and publication of this article.

Differential Equations and Mathematical Physics

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Hasanov I. I., Akramova D. I., Rahmonov A. A. Investigation of the Cauchy problem for one fractional order equation with the Riemann–Liouville operator, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 64–80. EDN: [HTKOLW](https://www.edn.ru/HTKOLW). DOI: [10.14498/vsgtu1952](https://doi.org/10.14498/vsgtu1952) (In Russian).

Authors’ Details:

Ibrohim I. Hasanov  <https://orcid.org/0000-0002-9634-5550>

Teacher; Dept. of Differential Equation; e-mail: ihasanov998@gmail.com

Dilshoda I. Akramova  <https://orcid.org/0000-0001-9596-9401>

Teacher; Dept. of Mathematical Analysis; e-mail: akramova.shoda@mail.ru

Askar A. Rahmonov  <https://orcid.org/0000-0002-7641-9698>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Senior Researcher; e-mail: araxmonov@mail.ru

Authors' contributions and responsibilities. All authors participated in developing the concept of the article and writing the manuscript. The authors are fully responsible for submitting the final manuscript for publication. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The research was conducted without funding.

Acknowledgments. The authors thank the reviewers for their careful reading of the paper, valuable suggestions, and comments.

References

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. Amsterdam, Elsevier, 2006, xx+523 pp. EDN: RLZKLZ. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0304-0208\(06\)x8001-5](https://doi.org/10.1016/s0304-0208(06)x8001-5).
2. Pskhu A. V. Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 1078–1098. EDN: XRNEPH. DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.086>.
3. Parovik R. I. Cauchy problem for the nonlocal equation diffusion-advection radon in fractal media, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2010, no. 1(20), pp. 127–132. EDN: NBOEJN. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu742>.
4. Mamchuev M. O. Modified cauchy problem for a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients, *Diff. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 9, pp. 1137–1144. EDN: VAHISF. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266115090037>.
5. Mamchuev M. O. Fundamental solution of a loaded second-order parabolic equation with constant coefficients, *Diff. Equat.*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 620–629. EDN: UEWBJX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266115050055>.
6. Durdiev D. K., Shishkina E. L., Sitnik S. M. The explicit formula for solution of anomalous diffusion equation in the multi-dimensional space, *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 6, pp. 1264–1273. EDN: HGPFMT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S199508022106007X>; arXiv: 2009.10594 [math.CA]. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10594>.
7. Sultanov M. A., Durdiev D. K., Rahmonov A. A. Construction of an explicit solution of a time-fractional multidimensional differential equation, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 17, 2052. EDN: HZEAME. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9172052>.
8. Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, xiv+443 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2>.
9. Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. *The H-Function. Theory and Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, xiv+268 pp. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0916-9>.



УДК 539.422.32

Численное моделирование микроструктур и процессов разрушения зернистых поликристаллических материалов с учетом влияния межзеренных границ

М. Н. Муллахметов, А. В. Ильиных

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Россия, 614990, Пермь, Комсомольский пр-т, 29.

Аннотация

Представлен алгоритм компьютерного моделирования микроструктур поликристаллических материалов с явным образом выделенными межзеренными границами. Авторами предложена модификация разработанного ранее алгоритма синтеза зернистых микроструктур, в основе которого лежит процедура пошагового выращивания зерен из эллипсов. Межзеренные границы заданной толщины формируются из исходной зернистой структуры путем смещения исходных границ внутрь зерна. Такой подход позволил сохранить исходную форму зерен, незначительно уменьшив их изначальную площадь.

Преимуществом представленного алгоритма перед другими методами компьютерного моделирования поликристаллических материалов является возможность получения кусочно-линейных межзеренных границ разной толщины, величины которых могут не только быть заданы как различным законам статистического распределения, но и иметь одинаковую величину. При этом сами зерна могут иметь как выпуклую, так и вогнутую форму, которую невозможно получить, используя большинство других методов компьютерного моделирования.

Представлены результаты генерации микроструктур поликристаллических материалов, содержащие более 100 структурных элементов и имеющие долю межзеренных границ до 20%. Представленные микроструктуры поликристаллических материалов сгенерированы при различных начальных параметрах, на примере которых продемонстрированы все возможности разработанного алгоритма. Приведены новые данные

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Муллахметов М. Н., Ильиных А. В. Численное моделирование микроструктур и процессов разрушения зернистых поликристаллических материалов с учетом влияния межзеренных границ // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 81–101. EDN: [ITZHNJ](https://www.edn.ru/). DOI: [10.14498/vsgtu1931](https://doi.org/10.14498/vsgtu1931).

Сведения об авторах

Максим Николаевич Муллахметов  <https://orcid.org/0000-0002-0884-8327>
лаборант; центр экспериментальной механики; e-mail: m.mullahmetov59@gmail.com

Артём Валерьевич Ильиных  <https://orcid.org/0000-0001-9162-1053>
кандидат технических наук; центр экспериментальной механики; каф. экспериментальной механики и конструкционного материаловедения; e-mail: ilinih@yandex.ru

численного моделирования процессов деформирования и разрушения модельных зернистых материалов, для которых задано разное отношение прочностных характеристик зерен и межзеренных границ. Показано, что в зависимости от величины этого отношения прочностных характеристик в поликристаллических материалах реализуются разные механизмы разрушения: интеркристаллитное, транскристаллитное и смешанная форма разрушения.

Ключевые слова: межзеренные границы, численное моделирование, микроструктура, зернистые поликристаллические материалы, накопленные повреждения, интеркристаллитное разрушение, транскристаллитное разрушение.

Получение: 26 мая 2022 г. / Исправление: 19 ноября 2022 г. /

Принятие: 24 января 2023 г. / Публикация онлайн: 23 марта 2023 г.

Введение. Исследование процессов упруго-хрупкого деформирования структурно-неоднородных сред при учете деградации их упругих свойств, накопления повреждений и макроразрушения является актуальной задачей в области механики деформируемого твердого тела [1]. Использование методов математического моделирования при изучении закономерностей механического поведения позволяет решать задачи механики структурно-неоднородных сред, находящихся в сложных условиях термомеханического нагружения [2, 3].

Поликристаллические металлы и сплавы, некоторые типы керамик и горных пород относятся к неоднородным материалам, имеющим ярко выраженную зернистую структуру. Геометрические параметры зернистых структур (размеры и форма зерен, механические свойства зерен и межзеренных границ) влияют на закономерности механического поведения поликристаллических материалов [4–16]. В работах [4–7] исследуются особенности микро- и макроразрушения поликристаллических материалов, связанные с наличием в структуре пор и микротрещин, со случайным распределением механических свойств структурных элементов. В работе [4] приводятся результаты, указывающие на влияние межзеренных границ на распространение трещин. Показано, что высокая прочность керамических частиц (зерен) по сравнению со свойствами матрицы вызывает разрушение и локализацию дефектов вдоль границ зерен. В работе [11] представлены результаты, показывающие увеличение деформационных характеристик при увеличении объемной доли более крупных зерен в микроструктуре цирконий-ниобиевых сплавов.

Применение методов математического моделирования в области исследования механического поведения структурно-неоднородных сред позволяет исследователям успешно решать сложные задачи механики деформированного твердого тела. Для увязки особенностей механического поведения с геометрическими параметрами структур требуется разработка сложных алгоритмов и программных комплексов для создания компьютерных моделей микроструктур конструкционных материалов. Развитие вычислительной техники позволяет создавать модели структуры материалов с большим количеством внутренних переменных (для зернистых структур такими переменными являются количество, форма, размеры и ориентация зерен, объемная доля меж-

зеренных границ и т.п.) и с различными микроструктурными дефектами (поры, микротрещины, отслаивания и т.д.). Алгоритмы генерации структурно-неоднородных сред на основе стохастических параметров находят применение в различных областях [4–22]. К настоящему времени предложены несколько подходов к генерации моделей зернистых микроструктур:

- использование диаграмм Вороного [5, 6];
- методика последовательного «выращивания» геометрических объектов простой формы [7];
- применение клеточных автоматов [8].

Учет геометрических характеристик структурной неоднородности необходим при изучении механического поведения металлов [9–12], различных композитных материалов [13–15], горных пород [15–19], керамических материалов [18, 19]. Анализ результатов численного моделирования материалов зернистой структуры позволяет дать оценку механизмам разрушения и выявить закономерности процесса накопления повреждений в структурно-неоднородных материалах при циклических, статических и квазистатических нагрузках [13, 14, 17]. В работе [15] показано, что влияние микроструктуры на макромеханическое поведение горных пород невелико, однако оказывает сильное воздействие на механизмы разрушения и накопления повреждений. Также в работе [17] приводятся результаты, показывающие влияние среднего размера зерен на механические характеристики каменной соли: чем меньше средний диаметр зерна и индекс неоднородности, тем выше прочностные и пластические характеристики.

Во многих работах отмечается важность моделирования процессов микроразрушения поликристаллических материалов с учетом межзеренных границ, механические свойства которых могут значительно отличаться от свойств зерен [4–6, 15, 18, 20].

В частности, в зависимости от соотношения прочностных характеристик зерен и межзеренных границ исследователями выделяются три механизма разрушения: транскристаллитное, интеркристаллитное и смешанная форма разрушения. В работе [12] приведено исследование влияния углов ориентации межзеренных границ на механическое поведение материала (палладия) в условиях одноосного растяжения. Представлены результаты, согласно которым зарождение дефектов начинается на большеугловых границах (границах, относящихся к зернам с большим углом ориентации относительно оси деформации), также показана большая устойчивость малоугловых границ зерен к интеркристаллитному разрушению.

Проведенный обзор научных работ свидетельствует о том, что в материалах, имеющих зернистую структуру, одним из важных направлений исследований является изучение различных типов структурного разрушения. Анализ рассмотренных источников показывает, что на механическое поведение поликристаллических материалов значительное влияние оказывают не только характеристики зерен, но также и связи между ними — межзеренная граница. При этом соотношение механических характеристик межзеренных границ и самих зерен будет воздействовать на характер разрушения материала. Для комплексного изучения влияния параметров зерен и межзеренных границ на механическое поведение зернистых материалов актуальным является разработка алгоритма и программного комплекса, позволяющих по-

лучить геометрические модели зернистых структур с явным образом выделенными межзеренными границами.

Целью данной работы является разработка нового алгоритма компьютерного моделирования микроструктур поликристаллических материалов с явно выделенными межзеренными границами, генерация новых моделей структур с заданными геометрическими параметрами и исследование закономерностей процессов структурного разрушения зернистых композитов на основе полученных структур. Научная новизна работы состоит в разработке нового алгоритма и получении на его основе новых плоских микроструктур поликристаллических материалов с явно выраженными межзеренными границами заданной ширины. Также получены новые результаты численного моделирования процессов накопления повреждений и макроразрушения модельных зернистых композитов при различных соотношениях прочностных характеристик зерен и межзеренных границ, иллюстрирующие влияние этого отношения на реализацию интеркристаллитного и транскристаллитного механизмов структурного разрушения.

1. Алгоритм выделения межзеренных границ. Предложенный авторами алгоритм выделения межзеренных границ заданной толщины является модификацией разработанного ранее алгоритма синтеза зернистых микроструктур¹. В качестве исходных данных для представляемого алгоритма используется информация о зернистых структурах, в которых имеется идеальный контакт между отдельными зёрнами, что не позволяет провести анализ влияния этих границ на некоторые особенности механического поведения поликристаллических материалов, в частности, нет возможности численного моделирования интеркристаллитного типа разрушения.

1.1. На первом этапе производится перенумерация всех узлов каждого зерна таким образом, чтобы обеспечивалась последовательная нумерация узлов по часовой стрелке относительно центра зерна. Результат сортировки показан на рис. 1.

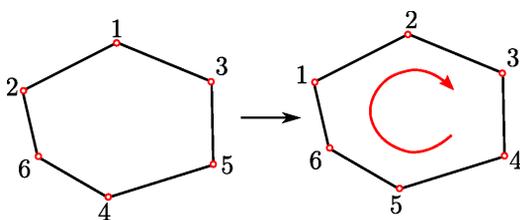


Рис. 1. Результат сортировки узлов зерна
[Figure 1. Result of grain nodes sorting]

1.2. На втором этапе вычисляются нормали к каждой границе зерна. При этом сортировка, выполненная на первом этапе, позволяет получать нормали, направленные внутрь зерна. Вычисление векторов нормалей \bar{n}_i в декартовой системе координат производится по следующей формуле:

$$\bar{n}_i = \{(y_2 - y_1)_i; (x_1 - x_2)_i\},$$

¹Программный комплекс по моделированию микроструктур зернистых композиционных материалов «Синтез зернистых микроструктур». Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ № 2011610135.

где (x_1, y_1) , (x_2, y_2) — координаты узлов i -той границы зерна. Результат вычисления нормалей для отдельного зерна представлен на рис. 2.

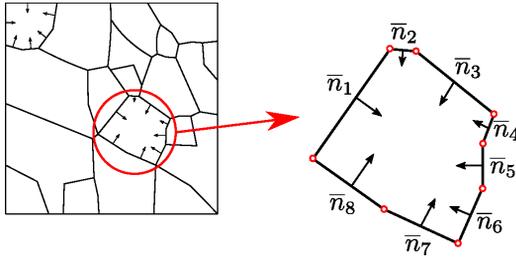


Рис. 2. Расчет нормалей границ зерна
[Figure 2. Calculation of grain boundary normals]

Полученные векторы нормалей имеют различную длину, зависящую от длины границы, для которой они вычисляются. Длины найденных векторов нормируются к величине $|\bar{n}| = 1$ с целью последующего выделения межзеренных границ заданной толщины:

$$\bar{n}_i = \left\{ \frac{n_{ix}}{|\bar{n}_i|}; \frac{n_{iy}}{|\bar{n}_i|} \right\}.$$

1.3. На третьем этапе для каждой границы определяется новое положение путем добавления к исходным координатам узлов смещения δ , помноженного на соответствующую компоненту вектора нормали. Тогда координаты узлов (x'_1, y'_1) и (x'_2, y'_2) смещенной границы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \delta \cdot \bar{n}_{ix}, & y'_1 &= y_1 + \delta \cdot \bar{n}_{iy}; \\ x'_2 &= x_2 + \delta \cdot \bar{n}_{ix}, & y'_2 &= y_2 + \delta \cdot \bar{n}_{iy}. \end{aligned}$$

Умножение величины заданного смещения δ на компоненты нормированного вектора нормали позволяет смещать узлы границы на заданную величину. Результатом этой операции является новое положение границ зерна, смещенных внутрь зерна на заданную величину δ (см. рис. 3).

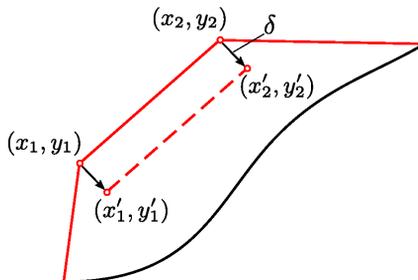


Рис. 3. Смещение узловых точек границы зерна (сплошная линия — начальная граница, штриховая линия — новая граница)
[Figure 3. Offset of the nodal points of the grain boundary (solid line — the original boundary, dashed line — the new boundary)]

1.4. На четвертом этапе алгоритма определяются новые положения узлов зерен, совпадающие с точками пересечения прямых. Уравнения полученных

прямых определяются по двум точками с новыми координатами, рассчитанными на третьем этапе алгоритма. На рис. 4 показана схема нахождения новых узлов зерен.

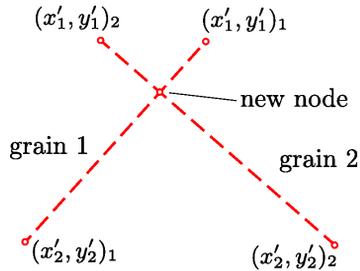


Рис. 4. Определение новых узловых точек зерна
[Figure 4. Determination of new nodal points of the grain]

На основе представленного алгоритма для исследования влияния свойств межзеренных границ на механическое поведение поликристаллических материалов была проведена модернизация программного комплекса «Синтез зернистых микроструктур» (свид. о регистр. № 2011610135).

2. Результаты работы алгоритма генерации структур. Представлены результаты генерации микроструктур и оценка распределения размеров зерен для различных структур, изображенных на рис. 5–8. В предложенном ранее алгоритме был введен ряд геометрических параметров, краткое описание которых приведено в табл. 1. В предложенной модификации авторами введен дополнительный параметр δ , отвечающий за величину смещения границ. Для статистического описания полученных микроструктур выбран геометрический параметр — площадь зерен, вид закона распределения которой оценивался с использованием критериев χ^2 и Колмогорова—Смирнова [21].

Результаты проверки представлены в табл. 2. Критическое значение критерия Колмогорова—Смирнова равно 1.95 при уровне значимости 0.9, для критерия χ^2 критическое значение равно 72.3 при уровне значимости 0.9.

На рис. 5 показано влияние коэффициента формы зерен на вид микроструктуры. Видно, что при уменьшении коэффициента формы зерна приобретают более вытянутую форму границ.

Влияние задаваемого угла ориентации начальных эллипсов показано на рис. 6. Видно, что структура № 3 имеет зерна с явно выраженной преимущественной ориентацией.

На рис. 7 представлены результаты генерации микроструктур, полученных из начальных эллипсов с разными коэффициентами размера (см. табл. 2). Видно, что структура № 6 имеет большее различие в размерах зерен по сравнению со структурой № 5.

На рис. 8 представлены микроструктуры с различной долей межзеренных границ. На структуре № 8 заметны более широкие границы, что и обуславливает увеличение процентной доли межзеренных границ.

В программном комплексе прописан модуль, позволяющий экспортировать микроструктуры в пакет конечно-элементного анализа ANSYS, в котором затем решаются задачи деформирования и разрушения материалов с зернистой структурой.

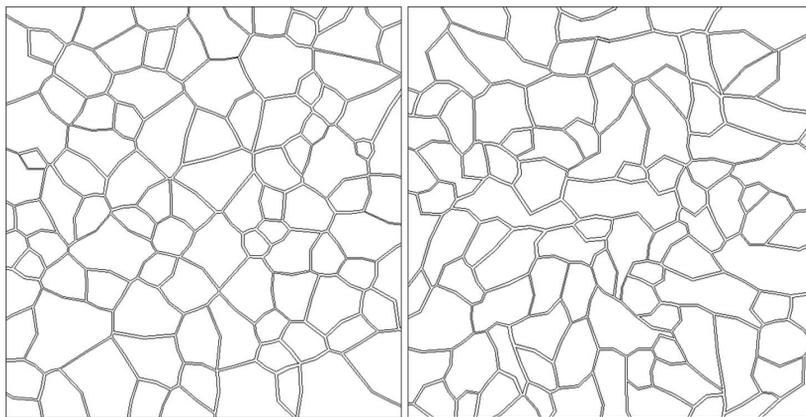


Рис. 5. Структуры № 1 и № 2
[Figure 5. Structures no.1 and no.2]

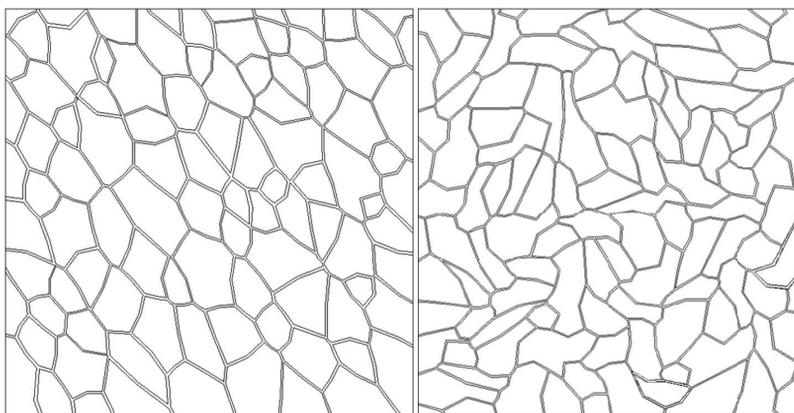


Рис. 6. Структуры № 3 и № 4
[Figure 6. Structures no.3 and no.4]

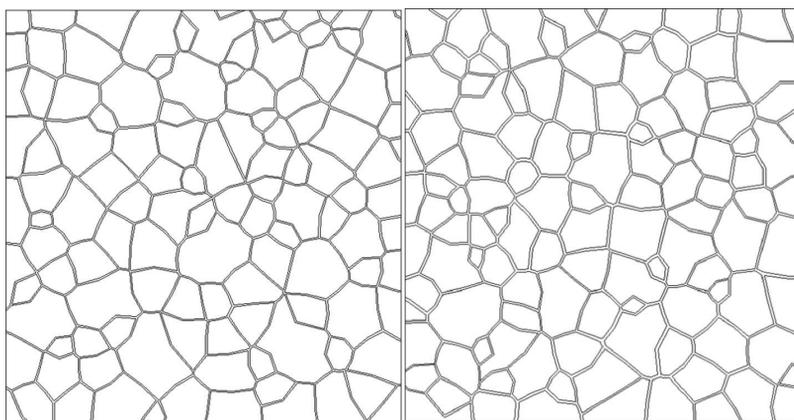


Рис. 7. Структуры № 5 и № 6
[Figure 7. Structures no.5 and no.6]

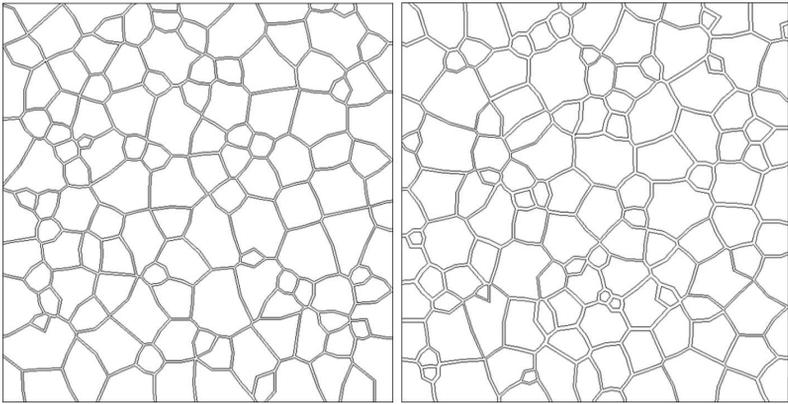


Рис. 8. Структуры № 7 и № 8
[Figure 8. Structures no.7 and no.8]

Таблица 1

Описание параметров генерации [Description of generation parameters]

| Параметры [Parameters] | Описание [Description] |
|------------------------|--|
| N | Количество зерен в структуре [The number of grains in the structure] |
| k_f | Коэффициент формы, выражающийся в отношении меньшей полуоси эллипса к большей [The shape factor expressed as the ratio of the minor semi-axis of the ellipse to the major] |
| k_r | Коэффициент размера, показывающий отношение большей полуоси наименьшего эллипса к большей полуоси наибольшего эллипса [The size factor showing the ratio of the major semi-axis of the smallest ellipse to the major semi-axis of the largest ellipse] |
| α | Угол ориентации начальных эллипсов [The orientation angle of initial ellipses] |
| δ | Величина смещения границы [The border offset value] |

3. Постановка задачи упруго-хрупкого деформирования структурно-неоднородных сред при учете деградации их упругих свойств.

Рассматриваются модельные поликристаллические материалы, состоящие из множества отдельных структурных элементов, которые разделены между собой границами разной толщины и обладают различными прочностными свойствами. Для описания процессов упруго-хрупкого деформирования структурно-неоднородных сред при учете деградации их упругих свойств используется двухуровневая структурно-феноменологическая модель. Для структурно-неоднородных материалов определяющие соотношения, включающие функцию поврежденности в виде тензора четвертого ранга, представляются в следующем виде [23]:

$$\sigma_{ij,j}(r) = 0,$$

Таблица 2
Полученные параметры структур [Received structure parameters]

| no. of structures | Заданные геометрические параметры [Given geometric parameters] | | | | Полученные геометрические параметры [Obtained geometric parameters] | | | закон распределения площадей зерен [type of grain area distribution] |
|-------------------|--|-------|-------|--------------------|---|------------------------------------|---|--|
| | N | k_f | k_r | α (in grad) | доля границ, % [proportion of borders, %] | критерий χ^2 [χ^2 test] | критерий Колмогорова–Смирнова [Kolmogorov–Smirnov test] | |
| 1 | 100 | 0.8 | 0.7 | 25 | 12 | 2.71 | 0.72 | равномерный [uniform distribution] |
| 2 | 100 | 0.4 | 0.7 | 25 | 14 | 4.94 | 1.31 | нормальный [normal distribution] |
| 3 | 110 | 0.6 | 0.9 | 45 | 20 | 4.55 | 0.69 | нормальный [normal distribution] |
| 4 | 100 | 0.3 | 0.8 | 0–180 | 13 | 1.55 | 0.55 | равномерный [uniform distribution] |
| 5 | 120 | 1.0 | 0.6 | 0 | 10 | 6.64 | 1.36 | нормальный [normal distribution] |
| 6 | 120 | 1.0 | 0.3 | 0 | 15 | 6.93 | 1.43 | нормальный [normal distribution] |
| 7 | 130 | 1.0 | 0.3 | 0 | 0 | 3.05 | 0.75 | равномерный [uniform distribution] |
| 8 | 130 | 1.0 | 0.6 | 0 | 25 | 2.87 | 1.16 | равномерный [uniform distribution] |

$$\varepsilon_{ij}(r) = \frac{1}{2}[u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r)],$$

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}(r)(I_{klmn} - \Omega_{klmn}(r, [\sigma]))\varepsilon_{mn}(r).$$

В приведенных уравнениях приняты следующие обозначения: σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензора напряжений и деформаций соответственно; r — радиус-вектор с компонентами r_j ; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей; $I_{klmn} = (\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{kn}\delta_{lm})/2$ — компоненты единичного тензора; δ_{kn} — символ Кронекера; Ω_{klmn} — компоненты тензора поврежденности четвертого ранга; $[\sigma]$ — прочностные константы материала.

Принимаем, что модули упругости и коэффициенты Пуассона у всех структурных элементов и межзеренных границ одинаковы. Тогда для случая изотропной среды, упругие характеристики которой описываются модулями объемного сжатия $K(r)$ и сдвига $G(r)$, мерами тензора поврежденности Ω являются независимые материальные функции k и g . Эти функции выражают изменение деформационных свойств, зависят от интенсивности напряжений и входят в определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij}(r) = [3K(r)(1 - k)D_{ijmn} + 2G(r)(1 - g)H_{ijmn}]\varepsilon_{mn}(r),$$

где $D_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn}/3$, $H_{ijmn} = I_{ijmn} - D_{ijmn}$.

Допустим, что материальные функции k и g зависят только от интенсивности напряжений и скачкообразным образом изменяют свои значения от 0 до 1 в зависимости от выполнения следующих условий:

$$k(\sigma_I) = g(\sigma_I) = \begin{cases} 1, & \sigma_I \geq [\sigma], \\ 0, & \sigma_I < [\sigma], \end{cases}$$

где $\sigma_I = \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)/2}$ — интенсивность напряжений, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

Представленная схема изменения материальных функций изотропной среды k и g соответствует подходу Качанова—Работнова, в рамках которого для описания процесса накопления повреждений используется безразмерный параметр поврежденности ω .

Для получения прочностных констант структурных элементов используется трехпараметрический закон распределения Вейбулла, выражающийся следующей зависимостью [23]:

$$F([\sigma]) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{[\sigma] - \sigma_0}{\sigma_a - \sigma_0}\right)^b\right],$$

где $\sigma_0 > 0$ — параметр минимальной прочности, σ_a — параметр распределения Вейбулла, $b > 0$ — параметр формы. Параметры распределения случайных величин связаны с коэффициентом вариации k_v и математическим ожиданием $\langle \sigma \rangle$ следующими соотношениями:

$$\sigma_0 = \langle \sigma \rangle \cdot \left[1 - \frac{k_v \cdot C_1}{\sqrt{C_2 - C_1^2}}\right], \quad \sigma_a = \frac{k_v \cdot \langle \sigma \rangle}{\sqrt{C_2 - C_1^2}} + \sigma_0,$$

где $C_1 = \Gamma(1 + 1/b)$, $C_2 = \Gamma(1 + 2/b)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Применение функций генерирования псевдослучайных величин, заложенных в языках программирования, позволяет получать псевдослучайные числа ξ , равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$. Тогда прочностные константы определяются по следующей формуле:

$$[\sigma] = \sigma_0 + (\sigma_a - \sigma_0) \cdot (-\ln \xi)^{1/b}.$$

При генерации случайных чисел коэффициент формы $b = 5$, коэффициент вариации $k_v = 0.8$, а среднее значение прочности зерен $\langle \sigma_g \rangle$ задается в соответствии с поставленной задачей.

Полученные модели структурно-неоднородных сред можно использовать для решения краевых задач механики. Для этого в программном пакете конечно-элементного анализа ANSYS проводятся расчеты последовательных статических задач в условиях одноосного растяжения. Граничные условия в соответствии со схемой нагружения, представленной на рис. 9: фиксируются перемещения на нижней и левой гранях области деформирования, а на верхней грани задается некоторое перемещение U , вычисляемое заново на каждом шаге расчета.

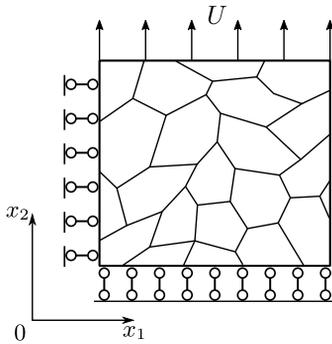


Рис. 9. Схема нагружения
[Figure 9. Loading scheme]

Для решения поставленной задачи используется алгоритм последовательного нагружения, представляющий собой итерационную процедуру [24], позволяющую исключать из модели конечные элементы, в которых перестает выполняться критерий прочности. Исключение конечного элемента реализуется путем многократного снижения его жесткости.

На начальном этапе, когда неизвестно необходимое удлинение для разрушения элемента с наименьшим запасом прочности, задается некоторое малое начальное удлинение U , при котором реализуется деформация не более 0.001 %. Это удлинение малой величины необходимо для расчета следующего шага удлинения U' , при котором разрушается конечный элемент с наименьшим запасом прочности. После его разрушения в модели происходит перераспределение напряжений, которое может привести к последующему разрушению других элементов. Итерационная процедура построена таким образом, чтобы на каждой итерации разрушался только один конечный элемент. Для реализации такой схемы разрушения конечных элементов использована процедура автоматического расчета шага нагружения. В этой процедуре

вводится коэффициент t , который равен минимальному отношению предела прочности i -того конечного элемента к интенсивности напряжений:

$$t = \min([\sigma_i]/\sigma_{Ti}).$$

Тогда следующий шаг удлинения определяется по формуле

$$U' = U \cdot t.$$

Используя такой подход, можно реализовать пошаговое разрушение конечных элементов и отследить процессы лавинообразного разрушения, заключающиеся в последовательном разрушении конечных элементов при фиксированном значении деформации вследствие перераспределения полей напряжений. Разработанный алгоритм был реализован в программном пакете конечно-элементного анализа ANSYS для численного моделирования процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных сред при случайном распределении прочностных констант.

Для демонстрации работы итерационного алгоритма представлено решение тестовой задачи. В качестве начальных параметров структурно-неоднородной среды заданы следующие данные: количество зерен $N = 100$; коэффициенты формы и размера зерен $k_f = 0.85$, $k_r = 0.7$; доля межзеренных границ 10%; среднее значение предела прочности зерен $\langle\sigma_g\rangle = 7.5$ МПа; модуль Юнга $E = 20$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$; отношение прочностных характеристик межзеренных границ и зерен $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1.5$ (здесь и далее σ_b — значение предела прочности межзеренных границ).

В качестве результатов численного моделирования тестовой задачи на рис. 10 приведены диаграмма деформирования и график накопления повреждений, на рис. 11 — картины структурных дефектов на различных стадиях нагружения.

Представленная на рис. 10 диаграмма поврежденности отражает процентную долю площади разрушенных конечных элементов к исходной площади области деформирования. На приведенной диаграмме деформирования видны срывы, которые иллюстрируют эффект лавинообразного разрушения, характерный при разрушении хрупких материалов. Связано это с итерационным разрушением нескольких конечных элементов вследствие перераспределения напряжений при фиксированном шаге нагружения.

Циклическая процедура завершается при условии наступления состояния устойчивости, т.е. такой ситуации, когда во всех конечных элементах выполняется критерий прочности. Далее подбирается следующий шаг по перемещению и снова запускается итерационная процедура разрушения конечных элементов. Завершение расчета определяется по силовому отклику системы, когда усилие становится близким к нулю.

На рис. 11 приведены картины структурных дефектов для четырех значений деформаций, которые отмечены точками на диаграмме деформирования (см. рис. 10) и иллюстрируют развитие трещины в поликристаллическом модельном материале. На представленных картинах структурных дефектов видно, что в процессе деформирования разрушаются как конечные элементы зерен (закрашены белым цветом), так и конечные элементы межзеренных границ (закрашены красным цветом). На рисунках можно проследить

влияние разрушения межзеренных границ на диаграмму деформирования. В частности, на рис. 10 между точками 2 и 3 имеется резкое снижение напряжений на величину порядка 70% от максимального значения напряжений. Такое резкое снижение напряжений обусловлено в основном разрушением межзеренных границ. Другие, меньшие по величине, скачки напряжений на этом же участке соответствуют в основном разрушению отдельных зерен.

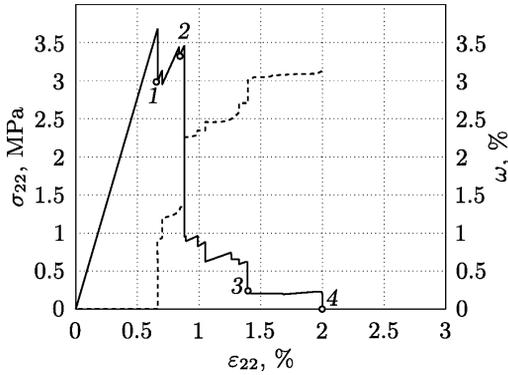


Рис. 10. Диаграмма деформирования (сплошная линия) и график накопления повреждений (штриховая линия)

[Figure 10. Deformation diagram (solid line) and damage accumulation diagram (dashed line)]

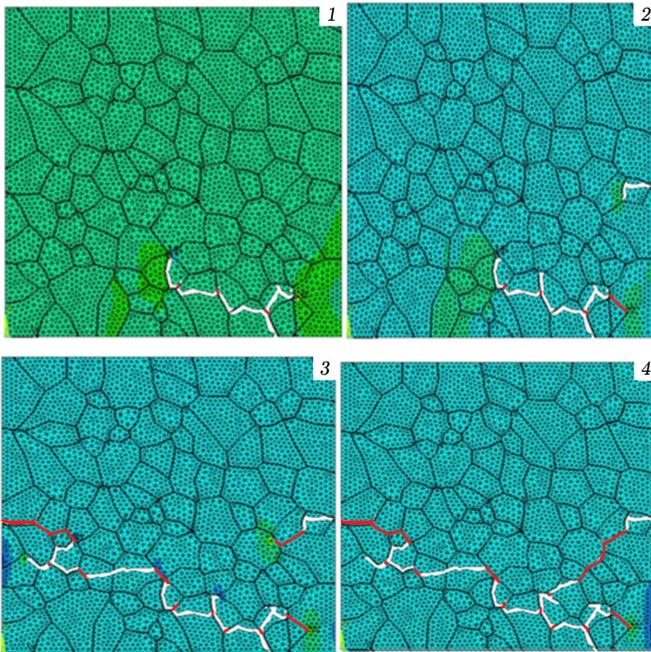


Рис. 11. Эволюция структурных дефектов (онлайн в цвете)

[Figure 11 (color online). Evolution of structural defects]

4. Результаты численного моделирования процессов разрушения модельных поликристаллических материалов. В ходе работы по численному моделированию механического поведения модельных зернистых композитов решались задачи определения условий реализации различных сценариев развития дефектов в поликристаллических материалах:

- интеркристаллитное разрушение — распространение трещины по границам зерен;
- транскристаллитное — распространение трещины через зерна;
- смешанный режим разрушения, сочетающий в себе как транскристаллитное, так и интеркристаллитное разрушение.

В качестве такого условия рассматривается только величина соотношения прочностных характеристик зерен и межзеренных границ.

Для выявления механизмов развития дефектов была выполнена серия расчетов на модельном зернистом композите, для которого упругие и прочностные свойства зерен заданы аналогично механическим свойствам, приведенным в третьей части статьи. Геометрические параметры зернистой структуры заданы следующим образом: $N = 100$, $k_f = 0.8$, $k_r = 0.7$, доля межзеренных границ составляет 10%. Прочностные характеристики межзеренных границ определялись через отношение $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle$, которое варьировалось в диапазоне от 0.1 до 3 с шагом 0.02.

На представленных ниже изображениях (см. рис. 12) показаны характерные для различных сценариев разрушения картины дефектов, полученные при соотношениях $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 0.28$ (транскристаллитное разрушение), $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1$ (смешанное разрушение) и $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 2.2$ (интеркристаллитное разрушение). Для наглядности разрушенные конечные элементы зерен закрашены оранжевым цветом, а конечные элементы межзеренных границ — красным цветом (см. рис. 12). Для этих же соотношений прочностных характеристик на рис. 13 приведены расчетные диаграммы деформирования с ниспадающими участками.

При интеркристаллитном разрушении практически отсутствуют механизмы, тормозящие рост трещины, что соответствует полному вырождению нис-

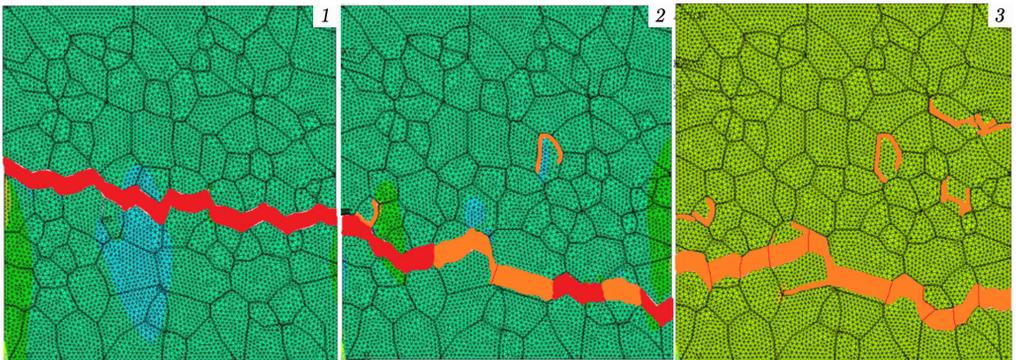


Рис. 12. Картины структурных дефектов при интеркристаллитном, транскристаллитном и смешанном режимах разрушения: 1) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 0.28$, 2) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1$, 3) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 2.2$ (онлайн в цвете)

[Figure 12 (color online). Patterns of structural defects in intercrystalline, transcrystalline and mixed fracture modes: 1) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 0.28$, 2) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1$, 3) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 2.2$]

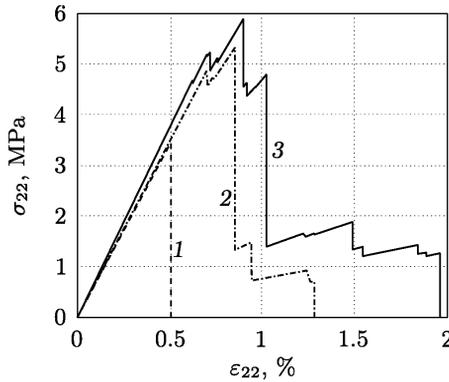


Рис. 13. Диаграммы деформирования для структур с различными соотношениями прочностных характеристик: 1) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 0.28$, 2) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1$, 3) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 2.2$

[Figure 13. Strain diagrams for structures with different ratios of strength characteristics: 1) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 0.28$, 2) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1$, 3) $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 2.2$]

падающего участка диаграммы деформирования (линия 1 на рис. 13). Вырождение ниспадающей ветви на закритической стадии деформирования в случае интеркристаллитного разрушения обусловлено лавинообразным разрушением только межзеренных границ при деформации, равной 0.5%.

В случае транскристаллитного разрушения причиной торможения роста трещин является наличие между зернами межзеренных границ, обладающих повышенными прочностными характеристиками по сравнению с зернами. На рис. 13 это проиллюстрировано диаграммой деформирования (линия 3) для соотношения $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 2.2$. Закритическая стадия на этой диаграмме деформирования имеет большую продолжительность (до величины деформации около 2%), что обусловлено процессами образования не связанных между собой структурных дефектов в зернах с наименьшим запасом прочности и последующим слиянием их в магистральную трещину посредством разрушения межзеренных границ. Доля разрушенных конечных элементов, принадлежащих межзеренным границам, для такого сценария разрушения минимальна.

В случае смешанного характера процесс разрушения протекает как по межзеренным границам, так и по зернам с наименьшим запасом прочности. Соответствующая этому сценарию разрушения диаграмма деформирования показана линией 2 на рис. 13 для соотношения $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle = 1$. Увеличение доли разрушенных конечных элементов межзеренных границ приводит к вырождению ниспадающего участка на диаграмме деформирования.

По результатам проведенных расчетов для рассматриваемого модельного поликристаллического материала при других соотношениях $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle$ были определены условия, при которых реализуется тот или иной сценарий разрушения: при значениях соотношения прочностных характеристик межзеренных границ и зерен $\sigma_b/\langle\sigma_g\rangle < 0.3$ наблюдается только интеркристаллитное разрушение, при значениях соотношения прочностных характеристик в диапазоне от 0.3 до 2 характер разрушения представляет собой совокупность интеркристаллитного и транскристаллитного типа, а при значениях свыше 2 преобладает в основном транскристаллитный механизм структурного разрушения (см. рис. 14).

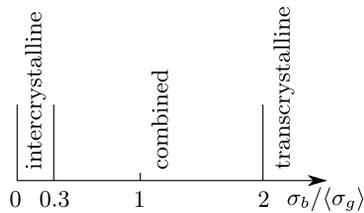


Рис. 14. Границы перехода между сценариями разрушения
[Figure 14. Borders of transition between failure scenarios]

Выводы. Разработана модификация для ранее предложенного алгоритма синтеза микроструктур, заключающаяся в явном выделении межзеренных границ. Представлены микроструктуры, сгенерированные с различными заданными параметрами, такими как коэффициент формы зерен, коэффициент размера, угол преимущественной ориентации зерен, толщина межзеренных границ. Толщины межзеренных границ могут быть заданы постоянными как по величине, так и по заданному закону распределения. Данная модификация позволяет сохранить исходную форму зерен, не внося тем самым существенных изменений в геометрию микроструктуры.

Выявлены факторы, влияющие на переход между сценариями разрушения. Основным таким фактором является соотношение прочностных характеристик зерен и межзеренных границ. Показано, что чем меньше соотношение указанных прочностных характеристик, тем больший вклад вносит интеркристаллитное разрушение, и наоборот, чем выше указанное соотношение, тем больше дефектов развивается внутри зерен, обеспечивая появление ниспадающей ветви деформирования, которой не наблюдается в случае явного интеркристаллитного разрушения.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ FSNM-2020-0027).

Библиографический список

1. Вильдеман В. Э., Третьяков М. П., Третьякова Т. В. [и др.] *Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях* / ред. В. Э. Вильдеман. М.: Физматлит, 2012. 204 с. EDN: UGLGZL.
2. Волегов П. С., Грибов Д. С., Трусов П. В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // *Физ. мезомех.*, 2015. Т. 18, № 4. С. 68–87. EDN: UGCJQL.
3. Yankin A. S. Biharmonic (two-frequency) load frequencies influence on mechanical behavior of solid propellant simulator // *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015. no. 4. pp. 273–292. EDN: VBWYNN. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.16>.
4. Balokhonov R., Romanova V., Kulkov A. Microstructure-based analysis of deformation and fracture in metal-matrix composite materials // *Eng. Fail. Anal.*, 2020. vol. 110, 104412. EDN: KTCEOH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104412>.

5. Liang K., Xie L., He B., et al. Effects of grain size distributions on the macro-mechanical behavior of rock salt using micro-based multiscale methods // *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2021. vol. 138, 104592. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2020.104592>.
6. Naderi S., Dean J. S., Zhang M. Three-dimensional virtual microstructure generation of porous polycrystalline ceramics // *Ceramics International*, 2019. vol. 45, no. 17. pp. 21647–21656. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.07.162>.
7. Ильиных А. В., Вильдеман В. Э. Моделирование структуры и процессов разрушения зернистых композитов // *Вычисл. мех. сплош. сред.*, 2012. Т. 5, № 4. С. 443–451. EDN: **PLBSKT**. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.52>.
8. Mohebbi M. S., Ploshikhin V. Implementation of nucleation in cellular automaton simulation of microstructural evolution during additive manufacturing of Al alloys // *Additive Manufacturing*, 2020. vol. 36, 101726. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101726>.
9. Roy U., McDowell D. L., Zhou M. Effect of grain orientations on fracture behavior of polycrystalline metals // *J. Mech. Phys. Solids*, 2021. vol. 151, 104384. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104384>.
10. Kowalski N., Delannay L., Yan P., et al. Finite element modeling of periodic polycrystalline aggregates with intergranular cracks // *Int. J. Solids Struct.*, 2016. vol. 90. pp. 60–68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.010>.
11. Скрипняк Н. В., Иохим К. В. Влияние распределения зерен по размерам на прочностные и деформационные свойства сплавов Zr-Nb при высокоскоростном растяжении // *Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика*, 2020. № 65. С. 124–136. EDN: **NDBIXH**. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/65/10>.
12. Bachurin D. V. Influence of grain boundary misorientation on intergranular fracture of nanocrystalline palladium // *Int. J. Fract.*, 2018. vol. 214, no. 1. pp. 69–78. EDN: **QKWFSK**. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0319-2>.
13. Zhou G., Sun Q., Li D., et al. Meso-scale modeling and damage analysis of carbon/epoxy woven fabric composite under in-plane tension and compression loadings // *Int. J. Mech. Sci.*, 2021. vol. 190, 105980. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105980>.
14. Loendersloot R., Ehsani M., Sepehry N., Shamshirsaz M. Numerical modelling of stochastic fatigue damage accumulation in thick composites / *European Workshop on Structural Health Monitoring. EWSHM 2020* / Lecture Notes in Civil Engineering, 128; eds. P. Rizzo, A. Milazzo. Cham: Springer, 2021. pp. 776–787. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-64908-1_72.
15. Yu H., Dahi Taleghani A., Lian Z. A new look at rock mechanical behavior from the meso-scale grain // *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2021. vol. 200, 108373. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.108373>.
16. Zhu Q., Kondo D., Shao J., Pensee V. Micromechanical modelling of anisotropic damage in brittle rocks and application // *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2008. vol. 45, no. 4. pp. 467–477. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2007.07.014>.
17. Liang K., Xie L., He B., et al. Effects of grain size distributions on the macro-mechanical behavior of rock salt using micro-based multiscale methods // *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2021. vol. 138, 104592. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2020.104592>.
18. Kovalski E. R., Karpov G. N., Leisle A. V. Geomechanic models of jointed rock mass // *Int. J. Civil Eng. Technol.*, 2018. vol. 9, no. 13. pp. 440–448. EDN: **PAZCJR**.
19. Silberschmidt V. V. Effect of material's randomness on scaling of crack propagation in ceramics // *Int. J. Fract.*, 2006. vol. 140, no. 1–4. pp. 73–85. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-005-3994-8>.
20. Silberschmidt V. V., Najjar J. Computational modelling of the size effect of damage inhomogeneity in ceramics // *Comput. Mater. Sci.*, 1998. vol. 13, no. 1–3. pp. 160–167. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(98\)00057-3](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(98)00057-3).
21. Ильиных А. В., Радионова М. В., Вильдеман В. Э. Компьютерный синтез и статистический анализ распределения структурных характеристик зернистых композиционных материалов // *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2010. Т. 16, № 2. С. 251–264. EDN: **MSXPNN**.

22. Вильдеман В. Э., Ильиных А. В. Моделирование процессов структурного разрушения и масштабных эффектов разупрочнения на закритической стадии деформирования неоднородных сред // *Физ. мезомех.*, 2007. Т. 10, № 4. С. 23–29. EDN: [IJIWGV](#).
23. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. *Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов* / ред. Ю. В. Соколкин. М.: Наука, 1997. 288 с. EDN: [SAQBEP](#).
24. Муллахметов М. Н., Ильиных А. В. Численное моделирование процесса разрушения пучков параллельных волокон // *Master's Journal*, 2020. № 1. С. 9–26. EDN: [KNQCWG](#).

MSC: 74E15, 74M25

Computer simulation of microstructures and processes of granular composites fracture taking into account the influence of grain boundaries

*M. N. Mullahmetov, A. V. Ilinykh*Perm State National Research Polytechnical University,
29, Komsomolskiy pr., Perm, 614990, Russian Federation.

Abstract

The paper presents the algorithm for computer simulation of polycrystalline material microstructures with explicitly distinguished grain boundaries. The algorithm is based on the procedure of “growing” structure grains from ellipses, the geometric parameters of which can be set according to different laws of statistical distribution. The grain boundaries of the given thickness are formed from the original granular structure by displacing the boundaries inside the grain. The advantage of the presented algorithm is the possibility of obtaining nonlinear grain boundaries of different thicknesses, the width of which can be specified according to various statistical distribution laws. Polycrystalline material microstructure generation results that contain more than 100 structural elements and have a grain boundary fraction of up to 20% are presented. New data on computer simulation of the deformation process and fracture of simulated granular materials are presented with different ratios of strength characteristics of grains and grain boundaries. It was revealed that, depending on the strength characteristics ratio value, different fracture mechanisms are realized in the material: intercrystalline, transcrystalline, and mixed forms of fracture.

Keywords: grain boundaries, numerical simulations, microstructures, damage accumulation, intercrystalline destroy, transcrystalline destroy.

Received: 26th May, 2022 / Revised: 19th November, 2022 /Accepted: 24th January, 2023 / First online: 23rd March, 2023

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Mullahmetov M. N., Ilinykh A. V. Computer simulation of microstructures and processes of granular composites fracture taking into account the influence of grain boundaries, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 81–101. EDN: ITTZHJ. DOI: [10.14498/vsgtu1931](https://doi.org/10.14498/vsgtu1931) (In Russian).

Authors' Details:

Maksim N. Mullahmetov   <https://orcid.org/0000-0002-0884-8327>Laboratory Assistant; Center for Experimental Mechanics; e-mail: m.mullahmetov59@gmail.com*Artem V. Ilinykh*  <https://orcid.org/0000-0001-9162-1053>Cand. Techn. Sci.; Center for Experimental Mechanics; Dept. of Experimental Mechanics and Structural Materials Science; e-mail: ilinih@yandex.ru

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest with respect to the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the development of the concept of the article and in the writing of the manuscript. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of the manuscript.

Funding. The work was carried out within the framework of the state task of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (no. FSNM–2020–0027).

References

1. Wil'deman V. E., Tret'yakov M. P., Tret'yakova T. V., et al. *Ekspperimental'nye issledovaniia svoistv materialov pri slozhnykh termomekhanicheskikh vozdeistviakh* [Experimental Investigations of Material Properties under Complex Thermomechanical Actions], ed. V. E. Wil'deman. Moscow, Fizmatlit, 2012, 204 pp. (In Russian). EDN: UGLGZL.
2. Volegov P. S., Gribov D. S., Trusov P. V. Damage and fracture: Classical continuum theories, *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, no. 2, pp. 157–173. EDN: XNDXWL. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959917020060>.
3. Yankin A. S. Biharmonic (two-frequency) load frequencies influence on mechanical behavior of solid propellant simulator, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 4, pp. 273–292. EDN: VBWYNN. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.16>.
4. Balokhonov R., Romanova V., Kulkov A. Microstructure-based analysis of deformation and fracture in metal-matrix composite materials, *Eng. Fail. Anal.*, 2020, vol. 110, 104412. EDN: KTCEOH. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104412>.
5. Liang K., Xie L., He B., et al. Effects of grain size distributions on the macro-mechanical behavior of rock salt using micro-based multiscale methods, *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2021, vol. 138, 104592. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2020.104592>.
6. Naderi S., Dean J. S., Zhang M. Three-dimensional virtual microstructure generation of porous polycrystalline ceramics, *Ceramics International*, 2019, vol. 45, no. 17, pp. 21647–21656. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.07.162>.
7. Ilinykh A. V., Wil'deman V. E. Modeling of structure and failure processes of granular composites, *Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 443–451 (In Russian). EDN: PLBSKT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.4.52>.
8. Mohebbi M. S., Ploshikhin V. Implementation of nucleation in cellular automaton simulation of microstructural evolution during additive manufacturing of Al alloys, *Additive Manufacturing*, 2020, vol. 36, 101726. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101726>.
9. Roy U., McDowell D. L., Zhou M. Effect of grain orientations on fracture behavior of polycrystalline metals, *J. Mech. Phys. Solids*, 2021, vol. 151, 104384. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104384>.
10. Kowalski N., Delannay L., Yan P., et al. Finite element modeling of periodic polycrystalline aggregates with intergranular cracks, *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 90, pp. 60–68. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.010>.
11. Skripnyak N. V., Iokhim K. V. Effect of grain size distribution on the strength and strain properties of Zr-Nb alloys under tension at high strain rates, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2020, no. 65, pp. 124–136 (In Russian). EDN: NDBIXH. DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/65/10>.
12. Bachurin D. V. Influence of grain boundary misorientation on intergranular fracture of nanocrystalline palladium, *Int. J. Fract.*, 2018, vol. 214, no. 1, pp. 69–78. EDN: QKWFSK. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-018-0319-2>.
13. Zhou G., Sun Q., Li D., et al. Meso-scale modeling and damage analysis of carbon/epoxy woven fabric composite under in-plane tension and compression loadings, *Int. J. Mech. Sci.*, 2021, vol. 190, 105980. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105980>.

14. Loendersloot R., Ehsani M., Sepehry N., Shamshirsaz M. Numerical modelling of stochastic fatigue damage accumulation in thick composites, In: *European Workshop on Structural Health Monitoring. EWSHM 2020*, Lecture Notes in Civil Engineering, 128; eds. P. Rizzo, A. Milazzo. Cham, Springer, 2021, pp. 776–787. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-64908-1_72.
15. Yu H., Dahi Taleghani A., Lian Z. A new look at rock mechanical behavior from the meso-scale grain, *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2021, vol. 200, 108373. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.108373>.
16. Zhu Q., Kondo D., Shao J., Pensee V. Micromechanical modelling of anisotropic damage in brittle rocks and application, *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2008, vol. 45, no. 4, pp. 467–477. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2007.07.014>.
17. Liang K., Xie L., He B., et al. Effects of grain size distributions on the macro-mechanical behavior of rock salt using micro-based multiscale methods, *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 2021, vol. 138, 104592. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2020.104592>.
18. Kovalski E. R., Karpov G. N., Leisle A. V Geomechanic models of jointed rock mass, *Int. J. Civil Eng. Technol.*, 2018, vol. 9, no. 13, pp. 440–448. EDN: PAZCJR.
19. Silberschmidt V. V. Effect of material's randomness on scaling of crack propagation in ceramics, *Int. J. Fract.*, 2006, vol. 140, no. 1–4, pp. 73–85. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10704-005-3994-8>.
20. Silberschmidt V. V., Najar J. Computational modelling of the size effect of damage inhomogeneity in ceramics, *Comput. Mater. Sci.*, 1998, vol. 13, no. 1–3, pp. 160–167. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(98\)00057-3](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(98)00057-3).
21. Radionova M. V., Vildeman V. E., Ilinykh A. V. Computer synthesis and statistical analysis of the distribution of structural characteristics of granular composite materials, *Composites: Mechanics, Computations, Applications*, 2011, vol. 2, no. 2, pp. 95–109. DOI: <https://doi.org/10.1615/compmechcomputapplintj.v2.i2.20>.
22. Wil'deman V. E., Ilinykh A. V. Simulation of structural failure and scale effects of softening at the post-critical deformation stage in heterogeneous media, *Phys. Mesomech.*, 2007, vol. 10, no. 4, pp. 23–29 (In Russian). EDN: IJIWGV.
23. Wil'deman V. E., Sokolkin Yu. V., Tashkinov A. A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Inelastic Deformation and Fracture of Composite Materials], ed. Yu. V. Sokolkin. Moscow, Nauka, 1997, 288 pp. (In Russian). EDN: SAQBEP.
24. Mullakhmetov M. N., Ilinykh A. V. Numerical simulation of the process of destruction of sequentially and parallel associated fibers, *Master's Journal*, 2020, no. 1, pp. 9–26 (In Russian). EDN: KNQCWG.



УДК 539.374

О влиянии деформаций ползучести материала вращающегося цилиндра на последующее пластическое течение

С. В. Фирсов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН
Хабаровского Федерального исследовательского центра ДВО РАН,
Россия, 681005, Комсомольск-на-Амуре, Металлургов, 1.

Аннотация

Изучается влияние деформаций ползучести на процесс пластического течения в материале на примере задачи вращения цилиндра с внутренней полостью (трубы), на внешнюю границу которого нанесено жесткое покрытие, предотвращающее его расширение в радиальном направлении. Задача решается в рамках теории малых деформаций. Для описания пластических свойств материала используется теория течения с ассоциированным с ним условием максимальных октаэдрических напряжений Мизеса, обобщенным на случай вязкопластического течения. Для описания вязких свойств используется широко применяемый степенной закон Нортон. В области пластического течения скорости необратимых деформаций складываются из скоростей пластической деформации и скоростей деформации ползучести. Из решения случая упругого деформирования получены зависимости для нахождения скорости вращения, при которой в материале цилиндра начнется пластическое течение. Составлена система интегро-дифференциальных уравнений для нахождения перемещений и напряжений в материале цилиндра при заданной скорости вращения и накопленных необратимых деформациях. По результатам численных расчетов получено, что наличие деформаций ползучести приводит к более позднему началу пластического течения, снижению скоростей пластических деформаций, а также к уменьшению области влияния пластического течения.

Ключевые слова: упругость, пластичность, ползучесть, вращение цилиндра, толстостенная труба, вязкопластичность, плоская деформация, малые деформации.

Получение: 20 сентября 2022 г. / Исправление: 15 февраля 2023 г. /

Принятие: 17 марта 2023 г. / Публикация онлайн: 25 марта 2023 г.

Механика деформируемого твердого тела

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Фирсов С. В. О влиянии деформаций ползучести материала вращающегося цилиндра на последующее пластическое течение // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 102–118. EDN: ZHFNQY. DOI: 10.14498/vsgtu1955.

Сведения об авторе

Сергей Викторович Фирсов  <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>

младший научный сотрудник; лаб. проблем создания и обработки материалов и изделий;
e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

Введение. На продвигающихся границах областей пластического течения в теории упругопластичности отмечается одномоментная смена в механизмах необратимых деформаций: в активном процессе — с вязкого (ползучесть) на пластический (течение); при разгрузке — наоборот. При этом вязким механизмом до начала пластического течения и при разгрузке, как правило, пренебрегают. Задача с одномоментным переходом при учете и деформаций ползучести, и деформаций пластического течения рассмотрена, по-видимому, впервые в [1]. В рамках теории больших деформаций [2] данная задача рассматривается позднее в [3–5]. В [6] отмечается, что подобная проблема возникает и в классической теории упруговязкопластичности при малых деформациях. Такое замечание делается на основе решения задачи о вращении цилиндра, изготовленного из упругопластического материала и вращающегося вокруг своей оси. Деформации ползучести и последующего вязкопластического течения возникают в материале цилиндра за счет объемных центробежных сил инерции вращения.

Прочностные расчеты материалов вращающихся дисков и валов важны для ряда технических приложений [7] механики деформирования. Соответствующие краевые задачи для упругопластических и упруговязкопластических цилиндров и дисков рассматривались неоднократно [8–14]. Теоретически постановка таких задач обуславливает возможность получения точных решений [10, 12, 14–16]. Данная возможность определяется использованием кусочно-линейных пластических потенциалов, то есть классических условий пластического течения максимальных касательных напряжений (условий Треска–Сен-Венана) [10–14] или максимальных приведенных напряжений (условий Ишлинского–Ивлева) [15, 16]. Ситуация в этом вопросе такая же, как и в теории температурных напряжений в упругопластических телах [17–19].

1. Общие соотношения модели. Будем считать, что материал деформируемого тела обладает упругими, вязкими и пластическими свойствами, где под вязкими свойствами понимается накопление деформаций ползучести. При расчетах будем ограничиваться только малыми деформациями. Тогда полные деформации \mathbf{d} можно представить суммой их обратимых (упругих) \mathbf{e} и необратимых \mathbf{p} составляющих:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}),$$

где \mathbf{u} — вектор перемещений. Положим, что напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ зависят только от обратимых деформаций \mathbf{e} . Для задания такой зависимости воспользуемся законом Гука

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{e})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}. \quad (1)$$

Здесь λ и μ — коэффициенты Ламе. Пластические деформации имеют место в материале в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружений (текучести) в пространстве напряжений $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = 0$ (σ_0 — предел текучести). В условиях принятия принципа Мизеса [20] функция $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0)$ оказывается пластическим потенциалом со следованием ассоциированного с поверхностью нагружения закона пластического течения:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \phi > 0. \quad (2)$$

В качестве условия пластического течения (поверхности нагружения) будем использовать следующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений Мизеса [21, 22]:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta}) \cdot \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta\boldsymbol{\theta}) - \sigma_0^2}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (3)$$

где η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Деформации ползучести в материале накапливаются схожим образом [7]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \frac{d\Phi(\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}))}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\Phi}{d\boldsymbol{\Sigma}} \frac{d\boldsymbol{\Sigma}}{d\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4)$$

Для задания потенциала ползучести Φ воспользуемся степенным законом Нортона [23] с двумя параметрами B и n :

$$\frac{d\Phi}{d\boldsymbol{\Sigma}} = B\boldsymbol{\Sigma}^n. \quad (5)$$

Значение $\boldsymbol{\Sigma}$ в соотношения (4) и (5) вводится при переходе от одномерного случая к трехмерному [7] и является некой мерой трехмерного напряженного состояния. Далее в качестве этой меры будет использоваться октаэдрическая мера напряжений Мизеса

$$\boldsymbol{\Sigma}^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

2. Постановка задачи. Рассмотрим полый цилиндр, радиус внутренней полости которого R_1 . Боковая поверхность данного цилиндра радиусом R_2 покрыта жестким слоем, предотвращающим его радиальное расширение. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , ось z которой проходит через ось симметрии цилиндра. Деформации в цилиндре происходят за счет центробежных сил, возникающих при его вращении вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\omega(t)$. Угловым ускорением пренебрегаем. Положим торцы цилиндра зафиксированными, то есть материал цилиндра находится в плоском деформированном состоянии. В этом случае компоненты вектора перемещений и тензора деформаций запишутся в виде

$$\begin{aligned} u_r &= u_r(r, t), & u_\varphi &= u_z = 0, & d_{rr} &= e_{rr} + p_{rr} = u_{r,r}, \\ d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u_r, & d_{zz} &= e_{zz} + p_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для удобства расчет будем производить в безразмерных переменных:

$$\xi = r/R_2, \quad u = u_r/R_2, \quad \tau = t/t^*, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_0$$

с безразмерными параметрами:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= R_1/R_2 = 0.2, & \alpha &= \lambda/\sigma_0 = 250, & \beta &= \mu/\sigma_0 = 195, \\ \chi &= B\sigma_0^n t^* = 0.01, & n &= 4, & \zeta &= \eta/(\sigma_0 t^*) = 0.1. \end{aligned}$$

Здесь t^* — общая продолжительность процесса деформирования, $\tau \in [0; 1]$. Для краткости безразмерные переменные в дальнейшем пишем без знака тильды. Уравнение равновесия запишется в виде

$$\sigma_{rr,\xi} + \xi^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = -\xi\psi^2, \quad \psi^2 = R_2^2 \frac{\rho\omega^2}{\sigma_0}. \quad (7)$$

Граничные условия задачи имеют вид

$$\sigma_{rr}(\xi_0, \tau) = 0, \quad u(1, \tau) = 0. \quad (8)$$

3. Первоначальная упругость. Положим, что в начале деформирования напряжения малы и не возникает области пластического течения, а деформации ползучести незначительны и их можно отбросить. Иными словами, необратимые деформации \mathbf{p} будут равны нулю. Тогда уравнение равновесия (7) с учетом закона Гука (1) и кинематических соотношений (6) приведет к виду

$$u_{,\xi\xi} + \xi^{-1}u_{,\xi} - \xi^{-2}u = -\frac{\xi\psi^2}{\alpha + 2\beta}.$$

Проинтегрировав данное дифференциальное уравнение, с учетом граничных условий (8) получим следующее решение задачи упругого деформирования [24]:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1 - \xi^2(2\alpha + 3\beta)\xi_0^4 - \beta\xi^2 + (\alpha + \beta)\xi_0^2(1 + \xi^2)}{8\xi(\alpha + 2\beta)((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)}\psi^2, \\ \sigma_{rr} &= -\frac{\xi^2 - \xi_0^2(2\alpha + 3\beta)(\beta(\xi_0^2 + \xi^2) + (\alpha + \beta)\xi_0^2\xi^2) - \beta(\alpha + \beta)}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)}\psi^2, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\frac{\xi_0^2(\alpha + \beta)(\beta - \xi^4(2\alpha + \beta))}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2(\alpha + \beta) + \beta)}\psi^2 - \\ &\quad - \frac{\xi_0^4(2\alpha + 3\beta)(\xi^2(\alpha + \beta) - \beta)}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2(\alpha + \beta) + \beta)}\psi^2 - \frac{\beta\xi^2((\alpha + \beta) - \xi^2(2\alpha + \beta))}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2(\alpha + \beta) + \beta)}\psi^2, \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta}\left(\frac{(2\alpha + 3\beta)\xi_0^4 + \beta}{(\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta} - 2\xi^2\right)\psi^2. \end{aligned} \quad (9)$$

С ростом угловой скорости будут увеличиваться и напряжения, и в определенный момент времени они выйдут на поверхность нагружения (выполнится условие $\Sigma = 1$). Это приведет к появлению области вязкопластического течения наравне с областью упругого деформирования. Из приведенного условия и полученных напряжений (9) найдем соответствующее значение угловой скорости ψ_p . Полученная функция может иметь два локальных минимума при $\xi = \xi_0$ и $\xi = 1$. При некотором значении $\xi_0 = \xi_p$ значения параметра нагружения в этих двух точках совпадают, то есть пластическое течение начинается одновременно на внутренней и боковой поверхностях. При меньших значениях $\xi_0 < \xi_p$ пластическое течение впервые начинается на внутренней

поверхности ($\xi = \xi_0$), при больших $\xi_0 > \xi_p$ — на боковой ($\xi = 1$):

$$\psi_p^2 = \begin{cases} 4 \frac{(\alpha + 2\beta)((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)}{\beta(1 - \xi_0^2)^2 \sqrt{3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2}}, & \xi_0 < \xi_p, \\ \frac{(\alpha + 2\beta)(3\alpha + 8\beta + 4\sqrt{3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2})}{4\beta\sqrt{3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2}}, & \xi_0 = \xi_p, \\ 2 \frac{(\alpha + 2\beta)((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)}{\beta(1 - \xi_0^2)((2\alpha + 3\beta)\xi_0^2 + \beta)}, & \xi_0 > \xi_p, \end{cases} \quad (10)$$

$$\xi_p^2 = \frac{\sqrt{3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2} - 2\beta}{\sqrt{3\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2} + 4\alpha + 6\beta}.$$

Заметим, что при замене параметров Ламе на коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

скорости в (10) будут зависеть только от ν и ξ_0 :

$$\psi_p^2 = \begin{cases} 4 \frac{(1 - \nu)(\xi_0^2 + 1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)(1 - \xi_0^2)^2 \sqrt{1 - \nu + \nu^2}}, & \xi_0 < \xi_p, \\ \frac{(1 - \nu)(4 - 5\nu + 4\sqrt{1 - \nu + \nu^2})}{2(1 - 2\nu)\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}, & \xi_0 = \xi_p, \\ 4 \frac{(1 - \nu)(\xi_0^2 + 1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)(1 - \xi_0^2)((3 - 2\nu)\xi_0^2 + 1 - 2\nu)}, & \xi_0 > \xi_p, \end{cases}$$

$$\xi_p^2 = \frac{\sqrt{1 - \nu + \nu^2} - 1 + 2\nu}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2} + 3 - 2\nu}.$$

На рис. 1 графически представлены зависимости скорости вращения, при которой начинается пластическое течение ψ_p , от положения внутренней полости ξ_0 при $\nu = 28/89$ (рис. 1, а), и места начала пластического течения как от ξ_0 , так и от $\nu \in (-1; 0.5)$ (рис. 1, б), где под «*in*» подразумевается случай начала пластического течения на внутренней полости $\xi = \xi_0$, под «*out*» — на боковой поверхности $\xi = 1$, а под «*both*» — одновременное начало на двух поверхностях. На двух оставшихся графиках приведены распределения напряжений и перемещений в материале цилиндра при $\psi = \psi_p$ и

$$\xi_0 = R_1/R_2 = 0.2, \quad \alpha = \lambda/\sigma_0 = 250, \quad \beta = \mu/\sigma_0 = 195.$$

Значение угловой скорости при таких параметрах $\psi_p \approx 1.95263$.

4. Пластическое (вязкопластическое) течение. При дальнейшем росте угловой скорости $\psi(\tau) > \psi_p$ в материале цилиндра развивается область вязкопластического течения. Для описания механизма накопления пластических деформаций в этой области воспользуемся теорией пластического течения (2) с обобщенным потенциалом Мизеса на случай вязкопластического

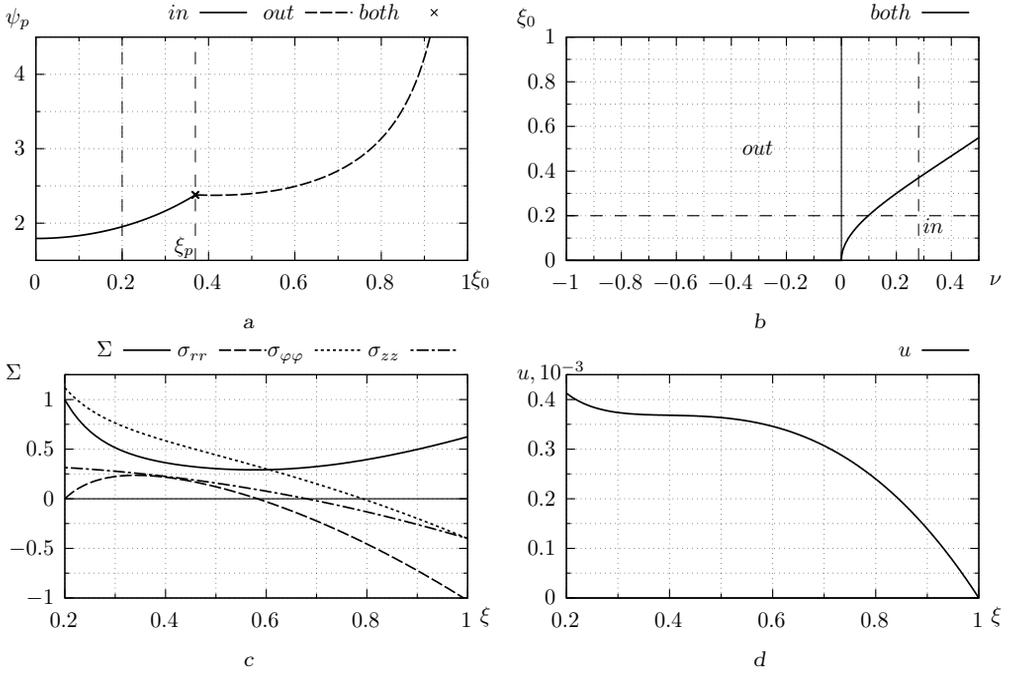


Рис. 1. Деформирование упругого материала. Зависимость скорости вращения ψ_p , при которой начнется пластическое течение, от положения внутренней полости $\xi = \xi_0$ (а). Место начала пластического течения в зависимости от ξ_p и ν (b): *in* — на внутренней полости, *out* — на боковой поверхности, *both* — одновременно на внутренней полости и боковой поверхности. Распределение напряжений (c) и перемещений (d) в цилиндре в момент начала пластического течения

[Figure 1. Elastic material deformation. Variation of plastic flow onset angular velocity ψ_p with position of the internal cavity $\xi = \xi_0$ (a). Location of beginning of plastic flow depending on ξ_p and ν (b): *in* — on the inner cavity, *out* — on the lateral surface, *both* — simultaneously on the inner cavity and side surface. Distribution of stresses (c) and displacements (d) in the cylinder at $\psi = \psi_p$]

течения (3), которые примут вид [25]

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_{rr}}{d\tau} &= \varepsilon_{rr}^p = \frac{1}{3\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \\
 \frac{dp_{\varphi\varphi}}{d\tau} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \frac{1}{3\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\
 \frac{dp_{zz}}{d\tau} &= \varepsilon_{zz}^p = \frac{1}{3\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\
 \Sigma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

В этом случае уравнение равновесия (7) сведется к виду

$$\begin{aligned}
 u_{,\xi\xi} + \xi^{-1}u_{,\xi} - \xi^{-2}u &= \xi^{-1} \frac{2\beta}{\alpha + 2\beta} (p_{rr} - p_{\varphi\varphi}) + \\
 &+ p_{rr,\xi} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} (p_{\varphi\varphi,\xi} + p_{zz,\xi}) - \frac{\xi\psi^2}{\alpha + 2\beta}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Представив левую часть данного уравнения (12) в форме [26]

$$u_{,rr} + r^{-1}u_{,r} - r^{-2}u = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ur) \right),$$

проинтегрируем его и получим соотношение для нахождения компоненты вектора перемещений [27]:

$$u(\xi, \tau) = \frac{1}{2}C_1(\tau)\xi + C_2(\tau)\xi^{-1} + \frac{\beta}{\alpha + 2\beta}\xi I_1(\xi, t) + \xi^{-1}I_2(\xi, t) - \frac{1}{8} \frac{\xi^3 \psi^2}{\alpha + 2\beta},$$

$$I_1(\xi, \tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} x^{-1}(p_{rr}(x, \tau) - p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) dx, \quad (13)$$

$$I_2(\xi, \tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} x \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta}(p_{rr}(x, \tau) + p_{\varphi\varphi}(x, \tau)) + \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta}p_{zz}(x, \tau) \right) dx.$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений примут следующий вид:

$$\sigma_{rr} = (\alpha + \beta)C_1 - 2\beta C_2 \xi^{-2} + 2\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} I_1 - 2\beta \xi^{-1} I_2 - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + 3\beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\alpha + \beta)C_1 + 2\beta C_2 \xi^{-2} + 2\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} I_1 + 2\beta \xi^{-1} I_2 -$$

$$- \frac{2\beta}{\alpha + 2\beta} (\alpha p_{zz} + 2(\alpha + \beta)p_{\varphi\varphi}) - \frac{1}{4} \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2, \quad (14)$$

$$\sigma_{zz} = \alpha C_1 + 2\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} I_1 - 2 \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{zz} - \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} p_{\varphi\varphi} \right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \xi^2 \psi^2.$$

Подставив полученные значения перемещения (13) и напряжений (14) в граничные условия (8), найдем

$$C_1(\tau) = \left(\frac{(2\alpha + 3\beta)\xi_0^4 + \beta}{4(\alpha + 2\beta)} \psi^2 - 2\beta I_3(\tau) \right) ((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)^{-1},$$

$$C_2(\tau) = - \left(\frac{(2\alpha + 3\beta)\xi_0^2 - (\alpha + \beta)}{8(\alpha + 2\beta)} \xi_0^2 \psi^2 + (\alpha + \beta)\xi_0^2 I_3(\tau) \right) ((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)^{-1},$$

$$I_3(\tau) = \frac{\beta}{\alpha + 2\beta} I_1(1, \tau) + I_2(1, \tau).$$

В итоге имеем следующие зависимости для перемещения:

$$u(\xi, \tau) = \frac{\beta\xi}{\alpha + 2\beta} I_1(\xi, t) + \xi^{-1} I_2(\xi, t) - (\beta\xi + (\alpha + \beta)\xi_0^2 \xi^{-1}) I_3(\tau) -$$

$$- \frac{1 - \xi^2}{8\xi} \frac{(2\alpha + 3\beta)\xi_0^4 - \beta\xi^2 + (\alpha + \beta)\xi_0^2(1 + \xi^2)}{(\alpha + 2\beta)((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)} \psi^2 \quad (15)$$

и напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr} &= 2\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} I_1 - 2\beta \xi^{-2} I_2 - 2\beta(\alpha + \beta) \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi^2} I_3 - \\
 &\quad - \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{4\xi^2} \frac{(2\alpha + 3\beta)(\beta(\xi_0^2 + \xi^2) + (\alpha + \beta)\xi_0^2 \xi^2) - \beta(\alpha + \beta)}{(\alpha + 2\beta)((\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta)} \psi^2, \\
 \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\beta \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} I_1 + 2\beta \xi^{-1} I_2 - 2\beta(\alpha + \beta) \frac{\xi^2 + \xi_0^2}{\xi^2} I_3 - \\
 &\quad - \frac{2\beta}{\alpha + 2\beta} (\alpha p_{zz} + 2(\alpha + \beta)p_{\varphi\varphi}) - \frac{\xi_0^2(\alpha + \beta)(\beta - \xi^4(2\alpha + \beta))}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2(\alpha + \beta) + \beta)} \psi^2 - \\
 &\quad - \frac{\xi_0^4(2\alpha + 3\beta)(\xi^2(\alpha + \beta) - \beta)}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2(\alpha + \beta) + \beta)} \psi^2 - \frac{\beta\xi^2((\alpha + \beta) - \xi^2(2\alpha + \beta))}{4\xi^2(\alpha + 2\beta)(\xi_0^2(\alpha + \beta) + \beta)} \psi^2, \\
 \sigma_{zz} &= 2\beta \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} I_1 - \alpha I_3 - 2 \frac{\alpha + \beta}{\alpha + 2\beta} p_{zz} - \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} p_{\varphi\varphi} \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} \left(\frac{(2\alpha + 3\beta)\xi_0^4 + \beta}{(\alpha + \beta)\xi_0^2 + \beta} - 2\xi^2 \right) \psi^2.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Используя полученные соотношения (15), (16), можно найти распределения перемещений и напряжений в материале цилиндра в заданный момент времени при известных значениях угловой скорости $\psi(\tau)$ и накопленных необратимых деформациях \mathbf{p} , а с помощью соотношений (11) — прирост необратимых деформаций на следующем временном шаге. При расчетах принимаем, что коэффициент вязкости $\zeta = 0.1$, а угловая скорость

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 3.2(2\tau - \frac{1}{2\pi} \sin 4\pi\tau), & 0 \leq \tau \leq 1/2, \\ 3.2, & \tau > 1/2. \end{cases} \tag{17}$$

Приведенные на рис. 2 результаты расчетов показывают следующее. Пластическое течение начинается у внутренней полости $\xi = \xi_0$, затем у боковой поверхности $\xi = 1$. При увеличении скорости вращения границы этих областей $\xi = m_1(\tau)$ и $\xi = m_2(\tau)$ движутся навстречу друг другу и в определенный момент эти области объединяются в одну. При достижении угловой скоростью фиксированного значения $\psi(\tau) = 3.2$ уровень напряжений сокращается (уменьшается величина разницы $\Sigma - 1$), что приводит к сокращению скоростей пластического течения вплоть до нуля. Хотя это и происходит практически одновременно, все же можно заметить, что скорости пластического течения сначала обращаются в нуль у боковой поверхности $\xi = 1$, а затем граница обнуления скоростей пластического течения $\xi = m_3(\tau)$ быстро продвигается в направлении внутренней полости $\xi = \xi_0$. Когда m_3 становится равным ξ_0 , пластическое течение в среде полностью останавливается.

5. Учет ползучести до начала пластического течения. Рассмотрим деформирование материала, обладающего вязкими свойствами. Ползучесть, в отличие от пластического течения, начинает проявлять себя при наличии напряжений в материале, то есть еще на стадии упругого деформирования.

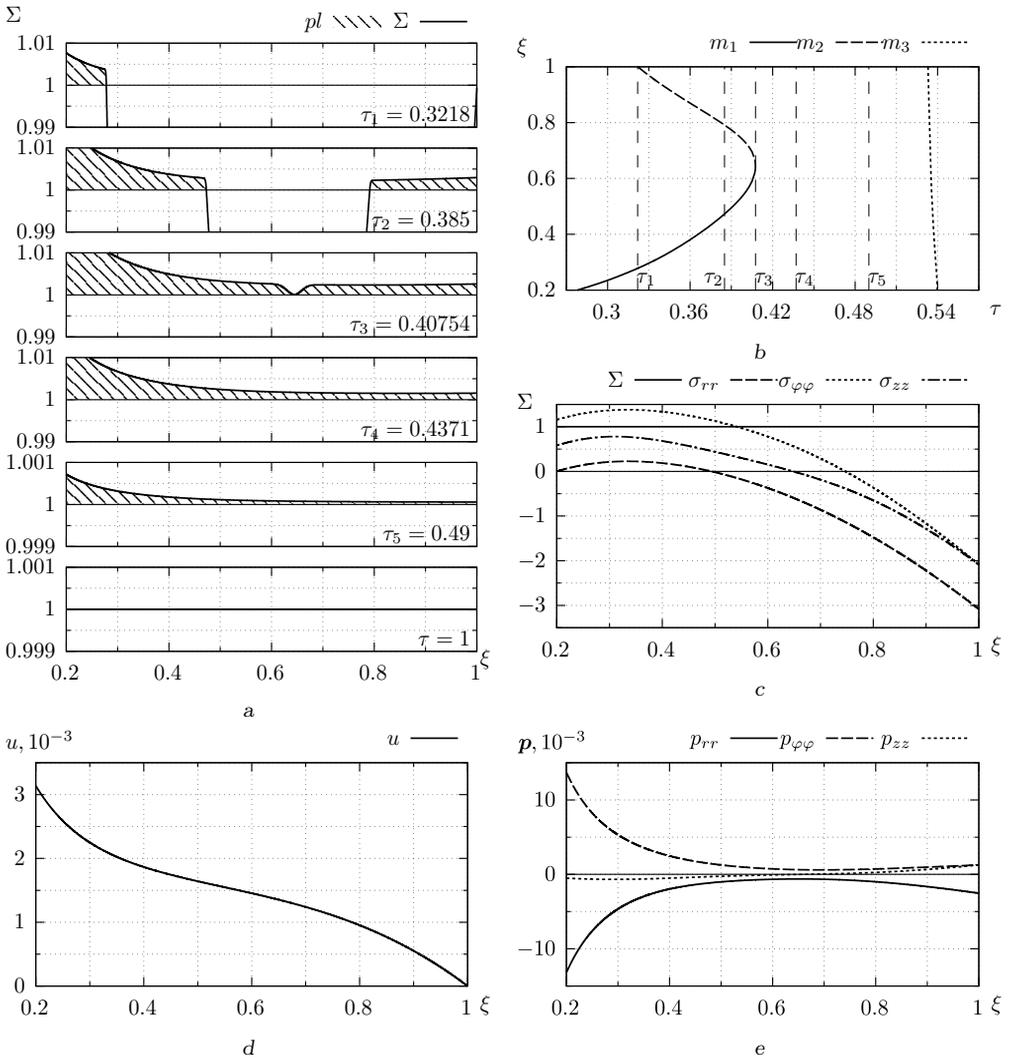


Рис. 2. Деформирование упругопластического материала. Движение упругопластических границ в материале (b). Распределение интенсивности напряжений в определенные моменты времени (a), а также остаточные напряжения (c), перемещения (d) и необратимые деформации (e)

[Figure 2. Deformation of an elastic-plastic material. Evolution of elastoplastic boundaries in a material (b). Distribution of stress intensity at certain points in time (a). Distribution of residual stresses (c), displacements (d) and irreversible strains (e)]

В этом случае необратимые деформации в материале цилиндра будут накапливаться с момента начала его вращения и их скорость накопления будет соответствовать скорости накопления деформаций ползучести. Для их нахождения воспользуемся теорией течения (4) со степенным законом Нортон (5) в качестве потенциала. После преобразований получим [28]:

$$\begin{aligned}\frac{dp_{rr}}{d\tau} &= \varepsilon_{rr}^v = \frac{\chi}{2} \Sigma^{n-1} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{d\tau} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^v = \frac{\chi}{2} \Sigma^{n-1} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \frac{dp_{zz}}{d\tau} &= \varepsilon_{zz}^v = \frac{\chi}{2} \Sigma^{n-1} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}).\end{aligned}\quad (18)$$

Данный случай математически схож со случаем упругопластического деформирования, то есть перемещения и напряжения в материале в текущий момент времени будут рассчитываться в соответствии с формулами (15) и (16) при известных угловой скорости ψ и накопленных необратимых деформациях \mathbf{p} , но прирост необратимых деформаций на следующем шаге будет определяться в соответствии с формулами (18).

На рис. 3 представлены результаты расчетов при росте угловой скорости согласно

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 1.95263 (10\tau - \frac{1}{2\pi} \sin 20\pi\tau), & 0 \leq \tau \leq 0.1, \\ 1.95263, & \tau > 0.1. \end{cases}$$

Если сравнить полученные решения в момент времени $\tau = 0.1$ с аналогичными для случая упругого деформирования (рис. 1), то можно видеть, что ползучесть за время разгона успевает оказать достаточное влияние на распределение напряжений, в связи с чем их выхода на поверхность нагружения при $\psi(0.1) = \psi_p$ не происходит. С течением времени, при зафиксированной скорости вращения $\psi(\tau) = \psi_p$ напряжения продолжают релаксировать за счет значительного прироста необратимых деформаций. Это также приводит к росту перемещений в материале.

6. Учет ползучести при пластическом течении. Если же угловая скорость не остановится на значении ψ_p и продолжит расти, то в определенный момент времени напряжения все-таки выйдут на поверхность нагружения и в материале цилиндра начнется вязкопластическое течение. В области его влияния в образовании необратимых деформаций будут принимать участие уже два механизма. Положим, что скорости необратимых деформаций в области вязкопластического течения будут находиться в виде суммы скоростей деформаций ползучести и пластического течения:

$$\begin{aligned}\frac{dp_{rr}}{d\tau} &= \varepsilon_{rr}^v + \varepsilon_{rr}^p = \left(\frac{1}{3\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} + \frac{\chi}{2} \Sigma^{n-1} \right) (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \\ \frac{dp_{\varphi\varphi}}{d\tau} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^v + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p = \left(\frac{1}{3\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} + \frac{\chi}{2} \Sigma^{n-1} \right) (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \frac{dp_{zz}}{d\tau} &= \varepsilon_{zz}^v + \varepsilon_{zz}^p = \left(\frac{1}{3\zeta} \frac{\Sigma - 1}{\Sigma} + \frac{\chi}{2} \Sigma^{n-1} \right) (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}).\end{aligned}\quad (19)$$

Соответственно, получим, что перемещения и напряжения находятся в соответствии с формулами (15) и (16), а прирост необратимых деформаций

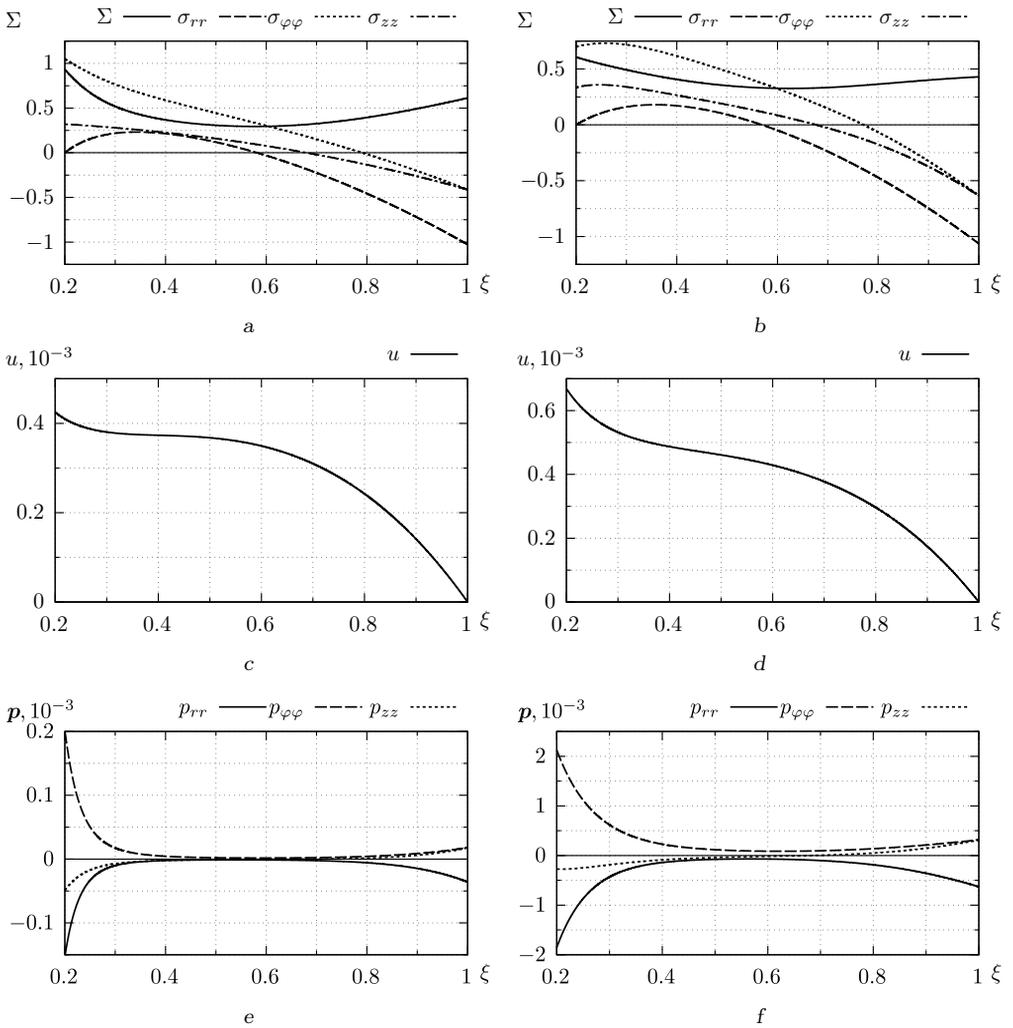


Рис. 3. Деформирование вязкоупругого материала. Распределение в материале напряжений при $\tau = 0.1$ (a) и $\tau = 1$ (b), перемещений при $\tau = 0.1$ (c) и $\tau = 1$ (d) и необратимых деформаций при $\tau = 0.1$ (e) и $\tau = 1$ (f)

[Figure 3. Deformation of a viscoelastic material. Distribution of stresses at $\tau = 0.1$ (a) and $\tau = 1$ (b), displacements at $\tau = 0.1$ (c) and $\tau = 1$ (d), irreversible strains at $\tau = 0.1$ (e) and $\tau = 1$ (f)]

определяется либо по формулам (19) в области пластического течения, либо по формулам (18) вне данных областей. Результаты подобного расчета при значениях угловой скорости, приведенных в соотношениях (17), графически показаны на рис. 4.

Как видно из представленных графиков, области пластического течения появляются позже, развиваются медленнее и сход напряжений с поверхности нагружения начинается еще до распространения пластического течения на весь материал цилиндра. При более тщательном изучении (уменьшении шага по времени) было замечено, что сход напряжений с поверхности нагружения во второй области пластического течения у боковой поверхности начинается не со стороны упругопластической границы $\xi = m_2(\tau)$ и не с бо-

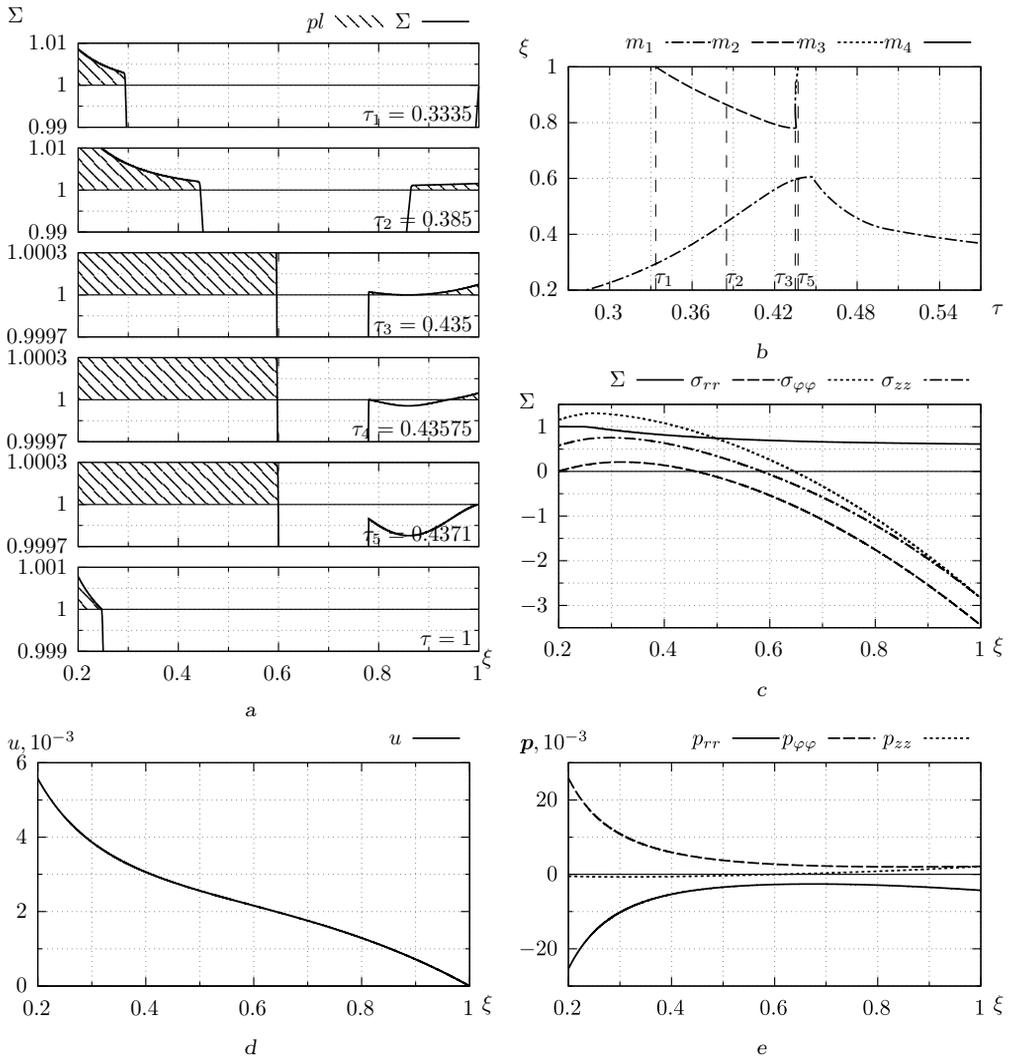


Рис. 4. Деформирование упругопластического материала с учетом вязких свойств. Движение упругопластических границ в материале (b). Распределение интенсивности напряжений в определенные моменты времени (a), а также остаточные напряжения (c), перемещения (d) и необратимые деформации (e)

[Figure 4. Deformation of an elastic-plastic material with viscous properties. Evolution of elastoplastic boundaries in a material (b). Distribution of stress intensity at certain points in time (a). Distribution of residual stresses (c), displacements (d) and irreversible strains (e)]

ковой поверхности $\xi = 1$. На рис. 4 хорошо видно, что условие прекращения пластического течения $\Sigma < 1$ впервые выполняется внутри области пластичности $m_2(\tau) < \xi < 1$. Она разбивается на две области $m_2(\tau) < \xi < m_4(\tau)$ и $m_3(\tau) < \xi < 1$. Первой исчезает область $m_2(\tau) < \xi < m_4(\tau)$, а затем граница $m_3(\tau)$ достигает боковой поверхности $\xi = 1$ и пропадает вторая область.

7. Сравнение двух решений с оценкой влияния первоначальной ползучести. Учет вязких свойств (ползучести) приводит к более позднему появлению области пластического течения, что наиболее отчетливо видно по движению границы $m_2(\tau)$. С ростом напряжений увеличивается скорость

деформаций ползучести, из-за чего увеличивается скорость релаксации напряжений. Это приводит к замедлению движения упругопластических границ, а с замедлением скорости роста угловой скорости напряжения начинают сходиться с поверхности нагружения, и области пластического течения сокращаются. Однако пластическое течение заканчивается не во всей области деформирования, как было в случае упругопластического материала. Из-за перераспределения напряжений в окрестности внутренней полости поддерживается более высокий уровень напряжений. В связи с этим область пластического течения у внутренней полости, хотя и сокращается со временем, но все же сохраняется и при $\tau = 1$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Выполнено в рамках госзадания ХФИЦ ДВО РАН.

Библиографический список

1. Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации в условиях изменяющихся механизмов их производства и проблема задания пластических потенциалов // *ДАН*, 2016. Т. 470, № 3. С. 275–278. EDN: WKDEDR. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0869565216270086>.
2. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. *Большие необратимые деформации и упругое последствие*. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.
3. Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Burenin A. A., Lemza A. O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties // *Arch. Appl. Mech.*, 2020. vol. 90, no. 4. pp. 829–845. EDN: IPUUKS. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>.
4. Prokudin A. N., Firsov S. V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium // *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2018. vol. 11, no. 4. pp. 399–410. EDN: XVATFR. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410>.
5. Буренин А. А., Галимзянова К. Н., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. О согласовании механизмов роста необратимых деформаций полого шара при всестороннем сжатии // *ДАН*, 2018. Т. 482, № 4. С. 403–406. EDN: YTJEZF. DOI: <https://doi.org/10.31857/S086956520003046-3>.
6. Фирсов С. В., Прокудин А. Н., Буренин А. А. Ползучесть и пластическое течение во вращающемся цилиндре с жестким включением // *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2019. Т. 22, № 4. С. 121–133. EDN: LZHISH. DOI: <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.412>.
7. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 2014. 752 с.
8. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube // *Acta Mech.*, 1983. vol. 50, no. 1–2. pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
9. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends // *Int. J. Eng. Sci.*, 1997. vol. 35, no. 3. pp. 253–267. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
10. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly // *Appl. Math. Mod.*, 2013. vol. 37, no. 4. pp. 2352–2363. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.018>.
11. Mack W., Plöchl M. Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit // *Int. J. Eng. Sci.*, 2000. vol. 38, no. 8. pp. 921–938. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(99\)00064-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(99)00064-6).

12. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading // *ZAMM*, 2020. vol. 100, no. 3, e201900213. EDN: SYSSIM. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
13. Прокудин А. Н., Буренин А. А. Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 2. С. 172–192. EDN: EDKAMB. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521020077>.
14. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration // *Acta Mech.*, 2021. vol. 232, no. 5. pp. 1917–1931. EDN: UPPSFS. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-021-02942-5>.
15. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Упругопластическое деформирование вращающегося полого цилиндра с жестким внешним покрытием // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2019. № 4. С. 120–135. EDN: VUXFSF. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>.
16. Прокудин А. Н. Упругопластический анализ вращающегося сплошного цилиндра при условии максимальных приведенных напряжений // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 1. С. 74–94. EDN: LJTYOU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>.
17. Буренин А. А., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. К расчету неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах // *Выч. мех. спл. сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 245–259. EDN: ZHZVHJ. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.20>.
18. Буренин А. А., Ткачева А. В. Эволюция температурных напряжений в задаче Гадолина о сборке двухслойной упругопластической трубы // *Вестн. ПНИПУ. Механика*, 2020. № 3. С. 20–31. EDN: HМУНТТ. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>.
19. Буренин А. А., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы как средство расчетов плоских неустановившихся температурных напряжений // *Изв. РАН. МТТ*, 2020. Т. 6. С. 40–49. EDN: MFTXER. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0572329920060057>.
20. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. *Теория пластичности*. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
21. Мосолов П. П., Мясников В. П. *Механика жесткопластических сред*. М.: Наука, 1988. 208 с.
22. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // *Вестн. ДВО РАН*, 2006. № 4. С. 87–93. EDN: HZMRVR.
23. Norton F. H. *The Creep of Steel at High Temperatures* / Classic Reprint Series. London: Forgotten Books, 2017. 102 pp.
24. Фирсов С. В. Необратимые деформации вращающегося цилиндра // *Изв. АлтГУ*, 2018. Т. 102, № 4. С. 114–117. EDN: YABMRN. DOI: [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2018\)4-21](https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21).
25. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Вязкопластическое течение вращающегося полого цилиндра // *Дальневост. матем. журн.*, 2018. Т. 18, № 2. С. 242–260. EDN: YUNRJB..
26. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // *Изв. РАН. МТТ*, 2019. № 3. С. 86–99. EDN: YPOULA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>.
27. Фирсов С. В. Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 4. С. 696–715. EDN: TMRVNH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1877>.
28. Прокудин А. Н., Фирсов С. В. Расчет ползучести вращающегося цилиндра со свободными концами // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Мех. пред. сост.*, 2018. № 1 (35). С. 63–73. EDN: UVVBZG.

MSC: 74C10

The influence of creep deformations on the subsequent plastic flow in a material of rotating cylinder

S. V. Firsov

Institute of Metallurgy and Mechanical Engineering Far-Eastern Branch of RAS,
Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of RAS,
1, Metallurgov str., Komsomolsk-on-Amur, 681005, Russian Federation.

Abstract

The influence of creep deformations on the process of plastic flow in a material is studied by using the example of the rotational motion of a cylinder with an inner cavity (a pipe) that has a rigid coating on its outer boundary to prevent radial expansion. The problem is solved within the frameworks of the theory of infinitesimal deformations. The theory of plastic flow with the associated condition of maximum octahedral stresses of von Mises, generalized to the case of viscoplastic flow, is used to describe the plastic properties of the material. The Norton's power law is used to describe the viscous properties. In the plastic flow region, the irreversible deformation rates are composed of plastic deformation rates and creep deformation rates. The dependencies required to determine the rotational speed at which plastic deformation initiates in the cylinder material are derived from the elastic deformation solution. A system of integro-differential equations is compiled to find the displacements and stresses in the cylinder material for the specified rotational speeds and accumulated irreversible deformations. Numerical calculations show that the presence of creep deformations leads to a later initiation of plastic flow, a reduction in plastic deformation rates, and a decrease in the plastic flow influence area.

Keywords: elasticity, plasticity, creep deformation, rotating cylinder, thick-walled tube, viscoplasticity, plain strain, small strain.

Received: 20th September, 2022 / Revised: 15th February, 2023 /

Accepted: 17th March, 2023 / First online: 25th March, 2023

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Firsov S. V. The influence of creep deformations on the subsequent plastic flow in a material of rotating cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 102–118. EDN: ZHFNQY. DOI: [10.14498/vsgtu1955](https://doi.org/10.14498/vsgtu1955) (In Russian).

Author's Details:

Sergey V. Firsov  <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>

Junior Researcher; Lab. of the Problems of Creation and Processing of Materials and Products;

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru

Competing interests. I hereby declare that I have no conflict of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The work was carried out within the framework of the state task of the KhFRC FEB RAS.

References

1. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. Large irreversible deformations under conditions of changing mechanisms of their formation and the problem of definition of plastic potentials, *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 463–466. EDN: XFIORH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833581609007X>.
2. Burenin A. A., Kovtanyuk L. V. *Bol'shie neobratimye deformatsii i uprugoe posledeystvie* [Large Irreversible Deformations and Elastic Aftereffect]. Vladivostok, Dal'nauka, 2013, 312 pp. (In Russian)
3. Begun A. S., Kovtanyuk L. V., Burenin A. A., Lemza A. O. On the mechanisms of production of large irreversible strains in materials with elastic, viscous and plastic properties, *Arch. Appl. Mech.*, 2020, vol. 90, no. 4, pp. 829–845. EDN: IPUUKS. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01641-x>.
4. Prokudin A. N., Firsov S. V. Antiplane strain of hardening elastoviscoplastic medium, *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 399–410. EDN: XVATFR. DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-4-399-410>.
5. Burenin A. A., Galimzyanova K. N., Kovtanyuk L. V., Panchenko G. L. Matching growth mechanisms of irreversible deformation of a hollow sphere under uniform compression, *Dokl. Phys.*, 2018, vol. 63, no. 10, pp. 407–410. EDN: GEIUPH. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1028335818100026>.
6. Firsov S. V., Prokudin A. N., Burenin A. A. Creep and plastic flow in a rotating cylinder with a rigid inclusion, *J. Appl. Industr. Math.*, 2019, vol. 13, no. 4, pp. 642–652. EDN: QGZJHN. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1990478919040070>.
7. Rabotnov Yu. N. *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
8. Gamer U., Lance R. H. Stress distribution in a rotating elastic-plastic tube, *Acta Mech.*, 1983, vol. 50, no. 1–2, pp. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170437>.
9. Gamer U., Mack W., Varga I. Rotating elastic-plastic solid shaft with fixed ends, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 253–267. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(96\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(96)00085-7).
10. Antoni N. Contact separation and failure analysis of a rotating thermo-elastoplastic shrink-fit assembly, *Appl. Math. Mod.*, 2013, vol. 37, no. 4, pp. 2352–2363. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.018>.
11. Mack W., Plöchl M. Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit, *Int. J. Eng. Sci.*, 2000, vol. 38, no. 8, pp. 921–938. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(99\)00064-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(99)00064-6).
12. Prokudin A. N. Exact elastoplastic analysis of a rotating cylinder with a rigid inclusion under mechanical loading and unloading, *ZAMM*, 2020, vol. 100, no. 3, e201900213. EDN: SYSSIM. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201900213>.
13. Prokudin A. N., Burenin A. A. Elastoplastic analysis of a rotating solid shaft made of linear hardening material, *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1243–1258. EDN: UDGKQG. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.3103/S0025654421070207>.
14. Begun A. S., Burenin A. A., Kovtanyuk L. V., Prokudin A. N. Irreversible deformation of a rotating disk having angular acceleration, *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, no. 5, pp. 1917–1931. EDN: UPPSFS. DOI: <https://doi.org/10.1007/S00707-021-02942-5>.

15. Prokudin A. N., Firsov S. V. Elastoplastic deformation of a rotating hollow cylinder with a rigid casing, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 4, pp. 120–135 (In Russian). EDN: VUXFSF. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.12>.
16. Prokudin A. N. Elastic-plastic analysis of rotating solid shaft by maximum reduced stress yield criterion, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 1, pp. 74–94 (In Russian). EDN: LJTYOU. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1737>.
17. Burenin A. A., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Calculation of the unsteady thermal stresses in elastoplastic solids, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 7, pp. 1197–1210. EDN: LAVRJL. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894418070040>.
18. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Evolution of temperature stresses in the Gdolin problem of assembling a two-layer elastoplastic pipe, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 3, pp. 20–31 (In Russian). EDN: HMUHTT. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.3.03>.
19. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Piecewise linear plastic potentials as a tool for calculating plane transient temperature stresses, *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 791–799. EDN: EMMOEA. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654420060059>.
20. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Teoriia plastichnosti* [Theory of Plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka, 1998, 528 pp. (In Russian)
21. Mosolov P. P., Myasnikov V. P. *Mekhanika zhestkoplasticheskikh sred* [Mechanics of Rigidly Plastic Media]. Moscow, Nauka, 1988, 208 pp. (In Russian)
22. Kovtanyuk L. V., Shitikov A. V. On the theory of finite elastoplastic deformations of materials taking into account temperature and reological effects, *Vestn. FEB RAS*, 2006, no. 4, pp. 87–93 (In Russian). EDN: HZMRVR.
23. Norton F. H. *The Creep of Steel at High Temperatures*, Classic Reprint Series. London, Forgotten Books, 2017, 102 pp.
24. Firsov S. V. Irreversible Deformations of a Rotating Cylinder, *Izv. Altai State Univ.*, 2018, vol. 102, no. 4, pp. 114–117 (In Russian). EDN: YABMRN. DOI: [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2018\)4-21](https://doi.org/10.14258/izvasu(2018)4-21).
25. Prokudin A. N., Firsov S. V. Viscoplastic flow in a rotating hollow cylinder, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2018, vol. 18, no. 2, pp. 242–260 (In Russian). EDN: YUNRJB..
26. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit, *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 559–569. EDN: BSSTLA. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654419040095>.
27. Firsov S. V. Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 4, pp. 696–715 (In Russian). EDN: TMRVNH. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1877>.
28. Prokudin A. N., Firsov S. V. Creep analysis of rotating cylinder with free ends, *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im I. Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Pred. Sost.*, 2018, no. 1 (35), pp. 63–73 (In Russian). EDN: UVVBZG.



УДК 539.4

Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба

А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1.

Аннотация

Сформулирована динамическая задача неизотермического и неупругого деформирования гибких пологих многонаправленно армированных оболочек в рамках уточненной теории их изгиба. По толщине конструкций температура аппроксимируется полиномом 7-го порядка. Геометрическая нелинейность задачи моделируется в приближении Кармана. Решение поставленной связанной нелинейной двумерной задачи получено с использованием явной численной схемы. Исследован термоупругопластический отклик стеклопластиковых и металлокомпозитных цилиндрических удлиненных панелей с ортогональной структурой армирования, нагруженных фронтально воздушной взрывной волной. Показано, что в отличие от аналогичных по структуре и характерным размерам армированных пластин пологие оболочки при интенсивном кратковременном нагружении необходимо рассчитывать с учетом возникновения в них температурных полей. При этом следует использовать уточненную теорию изгиба искривленных панелей, а не ее простейший вариант — неклассическую теорию Амбарцумяна. Приращение температуры в отдельных точках пологих оболочек из стеклопластика может достигать 14–34 °С, а в аналогичных металлокомпозитных панелях — 50–150 °С. Цилиндрические пологие оболочки более интенсивно деформируются при их нагружении воздушной взрывной волной со стороны выпуклой лицевой поверхности.

Ключевые слова: гибкие пологие оболочки, многонаправленное армирование, динамическое деформирование, связанная термоупругопластичность, уточненная теория изгиба, явная численная схема.

Механика деформируемого твердого тела**Научная статья**

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)**Образец для цитирования**

Янковский А. П. Моделирование неизотермического упругопластического поведения армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 119–141. EDN: YRWNPW. DOI: [10.14498/vsgtu1958](https://doi.org/10.14498/vsgtu1958).

Сведения об авторе*Андрей Петрович Янковский*  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. физики быстропротекающих процессов; e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Получение: 26 сентября 2022 г. / Исправление: 28 декабря 2022 г. /
Принятие: 13 февраля 2023 г. / Публикация онлайн: 27 марта 2023 г.

Введение. Изделия из композитных материалов (КМ) находят широкое применение в современной инженерной практике [1–15] и часто испытывают интенсивное термосиловое нагружение [2, 3, 5, 8–10, 12, 15], при котором компоненты композиции деформируются неупруго [5, 8, 12, 16–18]. Следовательно, актуальной является проблема математического моделирования термоупругопластического деформирования КМ-пластин и КМ-оболочек, находящаяся на сегодняшний день в стадии становления [5, 8, 12, 19–23]. Так, в работе [23] разработана модель неизотермического упругопластического деформирования материала, многонаправленно армированного непрерывными волокнами, и выполнены расчеты динамического изгиба КМ-пластин из таких материалов.

Для учета ослабленного сопротивления композитных изгибаемых пластин и оболочек поперечным сдвигам и моделирования волновых процессов в них используют простейшие неклассические теории Рейсснера [2, 5, 10, 12, 24], Амбарцумяна [1, 23], Редди [6, 9] или уточненные теории [3, 5, 10, 22].

В работе [23] показано, что температуру по толщине изгибаемой КМ-пластины при ее динамическом нагружении следует аппроксимировать полиномами 6–7 порядка. Для описания же изгибного поведения армированных пластин в [23] использована теория Амбарцумяна [1]. При интенсивном кратковременном механическом нагружении конструкций главным источником выделения тепла является диссипация механической энергии, которая зависит от скорости деформаций и уровней напряжений [25]. Частота поперечных колебаний пологих оболочек значительно больше, чем пластин тех же характерных размеров, изготовленных из тех же материалов, поэтому и скорость деформаций в таких искривленных конструкциях много больше, чем в пластинах. Следовательно, выделение тепла в пологих оболочках может оказаться значительно большим, чем в аналогичных пластинах, а значит, и результаты работы [23] нельзя будет дословно переносить на армированные пологие оболочки. Кроме того, используя разные теории изгиба тонкостенных элементов конструкций (Рейсснера, Амбарцумяна, Редди или более точные), можно с разной степенью точности аппроксимировать скорости деформаций и напряжения по толщине КМ-пластин и КМ-оболочек. Так, в работе [22] было продемонстрировано, что для адекватного описания упругопластического (изотермического) динамического поведения армированных пологих оболочек необходимо использовать уточненную теорию их изгиба. Следовательно, применение уточненной теории изгиба может внести существенные поправки в расчет диссипации механической энергии в пологих КМ-оболочках, а значит, и в расчет температурных полей и механического отклика таких конструкций.

Для интегрирования нелинейных задач динамики тонкостенных элементов конструкций используют как явные [5, 22, 23], так и неявные [8, 26] численные схемы.

Согласно вышеизложенному, настоящее исследование посвящено моделированию термоупругопластического динамического поведения армированных

пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба [22]. Нелинейная связанная термомеханическая задача численно интегрируется с использованием явной схемы шагов по времени [5, 22, 23].

1. Постановка задачи и метод расчета. Рассмотрим деформированную гибкой полой КМ-оболочку толщиной $2h$, с которой свяжем ортогональную систему координат x_i так, что ее срединная поверхность является отсчетной ($|x_3| \leq h$), а координатные линии x_1 и x_2 совпадают с линиями главной кривизны этой поверхности $x_3 = 0$ (рис. 1, где искривленность панели не изображена в силу ее малости). Оболочка многонаправленно армирована (возможно, и пространственно) K семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$). В поперечном направлении конструкции Ox_3 структура армирования однородна.

С каждым k -м семейством волокон свяжем ортогональную локальную систему координат $x_i^{(k)}$, причем ось $Ox_1^{(k)}$ ориентируем вдоль траектории армирования и ее направление зададим двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ осей $Ox_i^{(k)}$ относительно осей Ox_j ($i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq K$) определяются формулами из [23]:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что внешними касательными силами на лицевых поверхностях оболочки можно пренебречь, и в случае пространственной структуры армирования выполняются требования, изложенные в замечании в [23]. (В случаях плоско-перекрестного армирования, как на рис. 1, указанные требования заведомо выполняются.) При этом, согласно [22], усредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек гибкой полой оболочки U_i

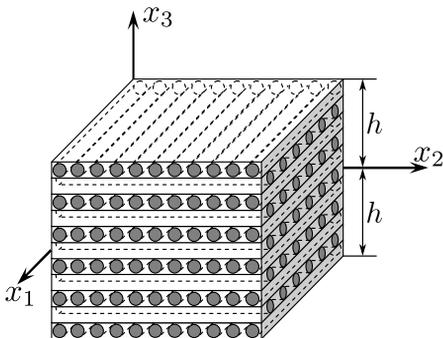


Рис. 1. Элемент волокнистой полой оболочки [Figure 1. Element of fibrous shallow shell]

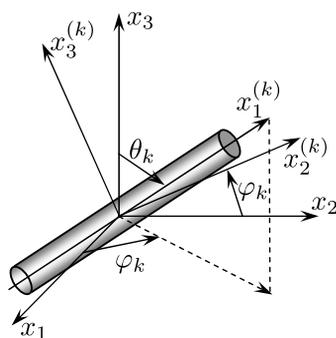


Рис. 2. Локальная прямоугольная система координат, связанная с армирующим волокном k -го семейства [Figure 2. Local cartesian coordinate system associated with k -th family reinforcing fiber]

в рамках уточненной теории изгиба можно аппроксимировать так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G,$$

$$|x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3),$$

где w — прогиб; u_i — перемещения точек отсчетной поверхности ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; R_i — главные радиусы кривизны срединной поверхности; t_0 — начальный момент времени t ; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); δ_{ij} — символ Кронекера; M — целое число, которое задает количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах по степеням x_3 ; G — область, занимаемая искривленной панелью в плане. При $M = 0$ из соотношений (2) и (3) вытекают кинематические гипотезы теорий Амбарцумяна [1] и Редди [6, 9]. В равенствах (2) и (3) подлежат определению двумерные функции w , u_i , $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ ($i = 1, 2$; $0 \leq m \leq M$).

В данном исследовании изучается динамическое поведение полой КМ-оболочки как гибкой тонкостенной термомеханической системы, следовательно, напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных расчетов точностью можно линейно аппроксимировать по толщине конструкции [2]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (−) лицевых поверхностях панели, которые известны из силовых граничных условий.

К соотношениям (2)–(4) следует присоединить двумерные уравнения движения гибкой полой оболочкой (см. (10)–(12) в [22]) и определяющие уравнения, связывающие усредненные скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$, напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и температуры $\dot{\Theta}$ в композиции конструкции. Последние уравнения целесообразно представить в матричном виде [23]:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{B} \dot{\varepsilon} + \mathbf{p}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, \dot{\sigma}_4, \dot{\sigma}_5, \dot{\sigma}_6)^\top \equiv (\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12})^\top, \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= (\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3, \dot{\epsilon}_4, \dot{\epsilon}_5, \dot{\epsilon}_6)^\top \equiv (\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, 2\dot{\epsilon}_{23}, 2\dot{\epsilon}_{31}, 2\dot{\epsilon}_{12})^\top;\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\equiv \left(\omega_0 \mathbf{Z}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{Z}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \\ \mathbf{f} &\equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{Z}_k \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{g} &\equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \varsigma_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k \quad (1 \leq k \leq N), \\ \mathbf{Z}_k &= \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv \beta_k \dot{\Theta} \quad (0 \leq k \leq N), \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k;\end{aligned}\quad (7)$$

\mathbf{I} — единичная 6×6 -матрица; \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k , \mathbf{Z}_k , $\bar{\mathbf{Z}}_k$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k$ — 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} — матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k , \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , ς_k , \mathbf{p}_k , β_k — шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбцов $\varsigma_k = (\varsigma_i^{(k)})$, $\beta_k = (\beta_i^{(k)})$ вычисляются по формулам [23]:

$$\begin{aligned}\bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G_k + \lambda_k, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k, \\ \beta_i^{(k)} &= \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)} + 3K_k \alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k], \\ \beta_l^{(k)} &= \frac{s_l^{(k)}}{G_k} [G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) A_k], \quad (i, j = \overline{1, 3}, l = \overline{4, 6}), \\ \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \\ \lambda_k &= \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1 + \nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2\nu_k}, \\ A_k &= \frac{\gamma_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}, \quad K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \\ \tau_\Theta^{(k)} &= \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}, \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}, \quad \chi_k = \int_{t_0}^t \sqrt{2\bar{p}_{ij}^{(k)} \bar{p}_{ij}^{(k)}} dt, \\ \gamma_k &= \begin{cases} 0, & \text{если } T_k < \tau_s^{(k)} \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k \leq 0, \\ 1, & \text{если } T_k = \tau_s^{(k)}, W_k > 0, \end{cases} \\ W_k &= G_k \mathbf{s}_k^\top \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} (\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k) \dot{\Theta}, \\ T_k^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}, \quad 0 \leq k \leq N;\end{aligned}\quad (8)$$

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad (9)$$

$$s_1^{(k)} = 0, \quad s_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & g_{12}^{(k)} &= q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, & \dots, \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & \dots, \\ 2g_{61}^{(k)} &= q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, & \dots, \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, & 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (10)$$

α_k — коэффициент линейного температурного расширения k -го компонента композиции ($k = 0$ — связующая матрица, $k \geq 1$ — волокна k -го семейства); E_k , ν_k — модуль Юнга и коэффициент Пуассона того же материала; $\tau_s^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi_k, \Theta)$ — предел текучести того же материала при чистом сдвиге, зависящий от параметра Одквиста χ_k и температуры Θ и при активном пластическом деформировании равный интенсивности касательных напряжений T_k ; \bar{G}_k — касательный модуль сдвига при пластическом деформировании k -й фазы композиции; $\sigma_{ij}^{(k)}$ — напряжения в том же материале; $\mathbf{s}_k = (s_l^{(k)})$, $\dot{\mathbf{e}}_k = (\dot{\epsilon}_l^{(k)})$ — шестикомпонентные векторы-столбцы с компонентами девизатора напряжений $s_{ij}^{(k)}$ и тензора скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)}$ в k -м материале композиции, по структуре аналогичные векторам $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ соответственно (см. (6)); $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ — скорости пластических деформаций того же материала; γ_k — параметр переключения, который при $\gamma_k = 0$ определяет термоупругое деформирование, разгрузку или нейтральное нагружение, а при $\gamma_k = 1$ — активное нагружение при пластическом деформировании k -го компонента композиции; $p_l^{(k)}$ — элементы вектора-столбца \mathbf{p}_k ($l = \overline{1, 6}$, $0 \leq k \leq N$); точка — производная по времени t ; индекс \top — операция транспонирования. По повторяющимся индексам k и l в равенствах (8) суммирование нет. Не выписанные в (10) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$, зависящие от направляющих косинусов (1), приведены в табл. 21.40 и 21.44 в [27]. Матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k определяют преобразования шестикомпонентных векторов-столбцов скоростей напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = (\dot{\sigma}_l^{(k)})$ и деформаций $\dot{\mathbf{e}}_k = (\dot{\epsilon}_l^{(k)})$ ($l = \overline{1, 6}$) в k -м компоненте композиции при переходе от глобальной ортогональной системы координат x_j к локальной системе $x_i^{(k)}$ (см. рис. 2). Векторы $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$ и $\dot{\mathbf{e}}_k$, имеющие соответственно структуру, аналогичную (6), связаны определяющими соотношениями [23]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\mathbf{e}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (11)$$

где матрица \mathbf{Z}_k и вектор-столбец \mathbf{p}_k вычисляются по формулам (7). В соотношениях (8) учтено, что упругие характеристики k -го материала композиции могут зависеть от температуры Θ (термочувствительность).

При выводе равенств (5) и (7) попутно получаются следующие структурные матричные соотношения:

$$\dot{\epsilon}_0 = \mathbf{H}^{-1}\dot{\epsilon} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}, \quad \dot{\epsilon}_k = \mathbf{E}_k\dot{\epsilon}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (12)$$

Первое выражение (12) определяет скорости деформаций связующей матрицы $\dot{\epsilon}_0$ через скорости осредненных деформаций композиции $\dot{\epsilon}$, а второе соотношение — скорости деформаций волокон k -го семейства $\dot{\epsilon}_k$ через скорости деформаций связующего материала $\dot{\epsilon}_0$. По формулам же (11) при учете (12) можно выразить и скорости напряжений $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$ в k -м компоненте композиции через осредненные скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ ($i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq N$).

В силу структуры векторов-столбцов $\dot{\sigma}$ и $\dot{\epsilon}$ (см. (6)) из третьего равенства системы (5) определим скорость линейной деформации в направлении x_3 :

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1}(\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}), \quad (13)$$

где p_3, b_{3i} ($i = \overline{1, 6}$) — элементы вектора-столбца \mathbf{p} и матрицы \mathbf{B} в соотношении (5); скорость $\dot{\sigma}_{33}$ выражается из (4) путем дифференцирования по времени. Скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ в правой части (13) вычисляются за счет дифференцирования по t соотношений (2), т. е. определяются через двумерные функции $w, \dot{w}, \dot{u}_i, \dot{\epsilon}_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$).

Используя результаты работы [23], температуру конструкции Θ аппроксимируем по ее толщине полиномом порядка L :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (14)$$

где $\Theta^0 = \text{const}$ — температура естественного состояния искривленной панели; Θ_l — подлежащие определению двумерные функции ($0 \leq l \leq L$).

Для завершения формулировки связанной задачи неупругого термомеханического деформирования пологой КМ-оболочки к соотношениям (2)–(14) нужно присоединить уравнения теплового баланса. Так как метрика в искривленной панели с приемлемой для приложений точностью может быть отождествлена с метрикой в декартовой прямоугольной системе координат [1], в качестве двумерных уравнений, описывающих теплопроводность в рассматриваемой пологой КМ-оболочке, можно применять формулы (4.11), (4.13), (4.14) и (4.18) из работы [23]. Кроме того, следует использовать необходимые механические (см. (22)–(24) и (26) в [22]) и теплофизические (см. (3.20) в [23]) граничные условия, а также начальные условия, заданные при $t = t_0$ (см. (25), (26) в [22] и (3.22) в [23]).

Для численного интегрирования поставленной нелинейной начально-краевой задачи используем явную схему шагов по времени, т. е. неизвестные функции будем определять в дискретные моменты времени $t = t_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При этом считаем, что в моменты времени t_m уже вычислены значения следующих функций [22, 23]:

$${}^m w(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad {}^m u_l^{(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad {}^m \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}),$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{33}^{m(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & U^{n(r)}(\mathbf{x}) &\equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), & q_i^n(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\
 \Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), & \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), & q_\infty^{n(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\
 \sigma_{ij}^{m(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \varepsilon_{ij}^{m(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \chi^{m(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\
 l = 1, 2, & \quad i, j = \overline{1, 3}, & m = n - 1, n, & \quad 0 \leq p \leq M + 1, & 0 \leq r \leq L - 2, \\
 0 \leq s \leq L, & \quad 0 \leq k \leq K, & \mathbf{x} \in G, & \quad |x_3| \leq h,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, & U^{(r)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \\
 l = 1, 2, & \quad 0 \leq p \leq M + 1, & 0 \leq r \leq L - 2;
 \end{aligned} \tag{16}$$

U — удельная внутренняя энергия композиции оболочка; $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ — напряжения и деформации в k -й фазе композиции ($k = 0$ — связующий материал, $k \geq 1$ — арматура k -го семейства); $\chi^{(k)}$ — параметр Оджвиста в той же фазе; q_i — компоненты вектора теплового потока в композиции; $q_\infty^{(\pm)}$ — заданные значения тепловых потоков через нижнюю (–) и верхнюю (+) лицевые поверхности оболочки. Искомые функции w , u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$) в соотношениях (2) и (3) однозначно определяются через кинематические переменные $u_i^{(p)}$ (см. выражения (16)) за счет матричного равенства (30) в [22].

В механической составляющей рассматриваемой связанной неизотермической упругопластической задачи производные по времени t аппроксимируем их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$. Это позволяет построить явную численную схему [22]. Так, после замены в двумерных уточненных уравнениях динамического равновесия гибкой полой КМ-оболочкой вторых производных по t от кинематических переменных w и $u_i^{(p)}$ их конечными разностями при учете соотношений (3), (4), (16) и обозначений, аналогичных (15), будем иметь [22]

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\tau^2} (w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\
 \frac{\rho}{\tau^2} (u_i^{n+1(l)} - 2u_i^{n(l)} + u_i^{n-1(l)}) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n) - \\
 &\quad - h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w^n - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)},
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где

$$\rho \equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3,$$

$$lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) \equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} [(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)})(1 - (-1)^l) +$$

$$+ \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)})(1 + (-1)^l)], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M+1; \quad (18)$$

ρ_0, ρ_k — объемные плотности связующей матрицы и волокон k -го семейства; $\tau = \text{const} > 0$ — шаг по времени. Внешние объемные силы в равенствах (17) не учитываются. Осредненные напряжения σ_{ij} в выражениях (18) связаны с напряжениями в фазах композиции $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$) структурными соотношениями из [23] (по правилу простой смеси).

По формулам (18) с учетом предположений (15) в текущий момент времени t_n можно определить силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$ и внешние силы $\sigma_{33}^{(\pm)}$ в правых частях уравнений (17), поэтому, учитывая необходимые граничные условия [22], из равенств (17) по явной схеме можем вычислить искомые функции w^{n+1} и $u_i^{n+1(l)}$ при $t = t_{n+1}$.

Для численного интегрирования теплофизической составляющей исследуемой задачи также применим явную схему шагов по времени, но на двухточечном шаблоне $\{t_n, t_{n+1}\}$. При этом с учетом выражений (14), (16) и обозначений типа (15) двумерные уравнения теплового баланса полой КМ-оболочки примут вид [23]:

$$\frac{\rho}{\tau} (U^{n+1(m)} - U^{n(m)}) = -\partial_1 \dot{Q}_1^{n(m)} - \partial_2 \dot{Q}_2^{n(m)} - \dot{Q}_3^{n(m)} + \dot{W}^{n(m)}, \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \alpha^{(-)} (\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}), \quad (20)$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \alpha^{(+)} (\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l =$$

$$= U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
 H(s) &\equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}), \\
 \bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \\
 W^{(m)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2), \\
 \lambda_{33}^{(\pm)} &\equiv \lambda_{33} |_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_\infty^{(\pm)};
 \end{aligned} \tag{22}$$

λ_{33} — коэффициент теплопроводности композиции в поперечном направлении Ox_3 , определяемый по структурным формулам из [28]; $\alpha^{(\pm)}$ — коэффициент теплоотдачи на верхней (+) и нижней (–) лицевой поверхности оболочки; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ — температура окружающей среды со стороны той же поверхности; $c_l^{(k)}$ — коэффициент разложения удельной теплоемкости материала k -й фазы композиции $c_k(\Theta - \Theta^0)$ по формуле (в случае термочувствительности):

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K. \tag{23}$$

Равенства (20) — тепловые граничные условия на лицевых поверхностях искривленной КМ-панели, преобразованные с учетом представления температуры в виде (14). Соотношение (21) выражает двумерные функции $U^{(m)}$ (см. (16)) через коэффициенты разложения (14) с учетом равенства (23). Уравнения (20), (21) справедливы для любого момента времени t .

Используя соотношения (22) и предположения (15), в текущий момент времени t_n можно вычислить правые части в равенствах (19). Учитывая при этом необходимые граничные (заданные на контуре Γ , ограничивающем область G) и начальные тепловые условия [23], получаем из (19) по явной схеме значения $U^{n+1(m)}$ при $t = t_{n+1}$. Далее, в следующий момент времени t_{n+1} из равенств (20), (21) (где правые части уже известны) при учете (22) определяем коэффициенты разложения для температуры $\Theta^l(\mathbf{x})$, $0 \leq l \leq L$ (см. (14)). В случае термочувствительности компонентов композиции ($c_1^{(k)} \neq 0$ и/или $c_2^{(k)} \neq 0$ ($0 \leq k \leq K$) в равенстве (23)) система (20), (21) является нелинейной. Для ее линеаризации может быть использован метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости. В остальных деталях разработанный численный метод (17), (19) при учете соотношений (2), (5)–(13), (18), (22) и структурных формул, полученных в [28] (см. выражения (20) и (22)), реализуется так же, как подробно описано в [22, 23]. При этом в соотношениях (5), (7)–(9), (11) и (12) всем величинам следует приписать верхний индекс n (аналогично (17) и (19)), означающий номер текущего дискретного момента времени t_n . (Величины же, входящие в равенства (10), от n не зависят.) Кроме того, в соотношениях (7) и (8) скорость температуры $\dot{\Theta}$ необходимо выразить разностной формулой,

вытекающей из формулы трапеций [23]:

$$\dot{\Theta} \equiv \dot{\Theta} = \frac{2}{\tau} \left(\Theta - \Theta^{n-1/2} \right), \quad \Theta^{n-1/2} \equiv \Theta^{n-1} + \frac{\tau}{2} \Theta^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Согласно предположениям (15), при $t = t_n$ правые части в равенствах (24) известны, т. е. известна и скорость температуры $\dot{\Theta} = \dot{\Theta}(t_n, \mathbf{r})$.

В работе [23] показано, что в уравнениях (17), (19) шаг по времени τ нужно задавать так, чтобы выполнялось необходимое условие устойчивости Куранта—Фридрихса—Леви [5].

2. Обсуждение результатов расчетов. Рассматривается термоупруго-пластический динамический изгиб относительно тонких пологих цилиндрических КМ-оболочек толщиной $2h = 2$ см, имеющих в плане удлиненную прямоугольную форму ($G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b; 1/R_1 \equiv 0, R_2 \equiv R = \text{const}; b = 50$ см). Стрела подъема искривленных панелей f над продольными (в направлении оси Ox_1) кромками равна 10 см. Радиус цилиндрической оболочки R при этом определяется формулой [22]: $R = (b^2 + f^2)/(2f), 0 \leq f < 0.4b$. По кромкам конструкции имеют жесткое закрепление: $w = 0, u_i^{(m)} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq t_0$ (см. (16), (17)). До начального момента времени $t = t_0 = 0$ панели покоятся ($w = 0, u_i^{(m)} = 0, \mathbf{x} \in G, t = t_0, i = 1, 2, 0 \leq m \leq M + 1$) в естественном состоянии при $\Theta = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ ($\mathbf{x} \in G, |x_3| \leq h, t = t_0$). Начиная с момента времени t_0 оболочки подвергаются воздействию избыточного давления $p(t)$, порожденного воздушной взрывной волной [26]:

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} \cdot t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \cdot \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0.01p_{\max},$$

где смысл величин $p_{\max}, t_{\max}, t_{\min}$ и α вполне очевиден и описан в [22, 23]. В соответствии с экспериментальными данными [26] в расчетах задано $t_{\max} = 0.1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Из соотношений (25) получаем: при $p_{\max} > 0$ конструкции нагружены со стороны нижней (вогнутой) лицевой поверхности (при этом условно считаем $\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0$), а при $p_{\max} < 0$ — со стороны верхней (выпуклой) поверхности (при этом принимаем $\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$).

Теплообмен оболочек с окружающей средой через их лицевые поверхности реализуется в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ [29], $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$) при температуре воздуха, равной температуре естественного состояния конструкций: $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. (20)). На торцевых поверхностях цилиндрических панелей задана температура, которая поддерживается равной Θ^0 .

Оболочки выполнены из эпоксисвязующего [17], армированного стеклянными волокнами [16] (стеклопластик), или магниевое сплава ВТ65 [30], усиленного стальной проволокой У8А [16] (металлокомпозиция). Упругопластическое поведение компонентов композиции при постоянной температуре Θ и активном нагружении определяется билинейной диаграммой растяжения — сжатия:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}/E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ , ε — осевое напряжение и соответствующая ему деформация; $E^{(k)} = E^{(k)}(\Theta)$, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$ — модули Юнга и линейного упрочнения материала k -й фазы композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$ — предел текучести этого же компонента. Физико-механические характеристики материалов фаз композиций представлены в таблице, где ν — коэффициент Пуассона, λ — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент линейного теплового расширения, c — удельная теплоемкость, а в скобках приведено значение температуры (Θ , °C), при которой была определена данная характеристика. В расчетах использованы линейные аппроксимации по Θ для всех физико-механических характеристик по данным, указанным в таблице.

Для дискретизации задачи по пространственным переменным x_1 и x_2 использована равномерная сетка с шагами $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50$, а шаг по времени τ задавался равным 0.25 мкс. Необходимые условия устойчивости разработанной численной схемы при этом выполняются с запасом (см. соотношения (6.3) в [23]).

Пологие оболочки армированы двумя ($K = 2$) семействами непрерывных волокон, ориентированных по направлениям Ox_1 и Ox_2 (см. рис. 1), с плотностями $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ соответственно. Углы армирования при этом имеют следующие значения (см. рис. 2): $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

В [23] были проведены расчеты для гибких КМ-пластин с рассматриваемой структурой армирования при тех же характерных размерах тонкостенных конструкций (h , a , b и $f = 0$). При этом в соотношениях (2) и (3) принималось значение $M = 0$ (использовалась теория изгиба Амбарцумяна [1]),

Физико-механические характеристики материалов композиций [16, 17, 30]
[Physico-mechanical characteristics of the components of composite [16, 17, 30]]

| Характеристика материала [Material characteristic] | Эпоксисвязующее [Epoxy] | Стекловолокно [Fiberglass] | Магнийевый сплав ВТ65(Mg) [VT65(Mg) magnesium alloy] | Стальная проволока У8А [U8A steel wire] |
|---|----------------------------------|----------------------------------|--|--|
| ρ , kg/m ³ | 1210.0 (20 °C) 1208.0 (40 °C) | 2520.0 (20 °C) 2519.6 (80 °C) | 1800.0 (20 °C) 1796.2 (100 °C) | 7800.0 (20 °C) 7791.8 (100 °C) |
| E , GPa | 2.8 (20 °C) 2.3 (40 °C) | 86.8 (20 °C) 86.3 (80 °C) | 43.0 (20 °C) 38.5 (100 °C) | 210.0 (20 °C) 195.0 (100 °C) |
| ν | 0.33 (20 °C) 0.333 (40 °C) | 0.25 (20 °C) 0.254 (80 °C) | 0.330 (20 °C) 0.334 (100 °C) | 0.3 (20 °C) 0.305 (100 °C) |
| σ_s , МПа | 20 (20 °C) 18 (40 °C) | 4500 (20 °C) 4400 (80 °C) | 267 (20 °C) 219 (100 °C) | 3968 (20 °C) 3971 (200 °C) |
| E_s , GPa | 1.114 (20 °C) 0.783 (40 °C) | 6.230 (20 °C) 5.168 (80 °C) | 0.379 (20 °C) 0.367 (100 °C) | 6.973 (20 °C) 5.014 (200 °C) |
| λ , W/(m · K) | 0.243 (20 °C) 0.240 (40 °C) | 0.89 (20 °C) 0.86 (80 °C) | 117.23 (20 °C) 121.42 (100 °C) | 42.7 (20 °C) 41.7 (100 °C) |
| $\alpha \cdot 10^6$, K ⁻¹ | 68.1 (20 °C) 70.3 (40 °C) | 2.5 (20 °C) 2.6 (80 °C) | 20.9 (20 °C) 22.6 (100 °C) | 12.3 (20 °C) 13.2 (100 °C) |
| c , kJ/(kg · K) | 1.54 (20 °C) 1.60 (40 °C) | 0.800 (20 °C) 0.839 (80 °C) | 1.032 (20 °C) 1.054 (100 °C) | 0.485 (20 °C) 0.488 (100 °C) |

а в разложении температуры (14) варьировалось значение $L \geq 2$. Было показано, что в динамически изгибаемых КМ-пластинах температурные поля следует определять по формуле (14) при задании в них $L = 6$ или $L = 7$.

В работе же [22] было продемонстрировано, что в случае изотермического изгибного динамического деформирования пологих КМ-оболочек для адекватного описания их неупругого механического поведения в кинематических соотношениях (2) и (3) нужно принимать не $M = 0$, а $M = 6$ или $M = 7$ (т. е. следует применять уточненную теорию изгиба).

Как уже отмечалось ранее, в данной работе исследуется влияние использования уточненных соотношений (2) и (3) (при $M = 7$) на результаты расчета термомеханического отклика динамически изгибаемых искривленных КМ-панелей при упругопластическом деформировании материалов компонентов их композиций.

В связи с этим на рис. 3 изображены зависимости максимальных значений температуры $\Theta_m(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M)$ в рассматриваемых пологих КМ-оболочках. При этом на основании результатов, полученных в [23], в формуле (14) было принято $L = 7$. Кривые 1 и 2 рассчитаны соответственно при $M = 0$ (теория Амбарцумяна) и $M = 7$ (уточненная теория изгиба) для стеклопластиковой панели, нагруженной снизу (рис. 3, а) при $p_{\max} = 8$ МПа (см. (25)) и сверху (рис. 3, б) при $p_{\max} = -8$ МПа, а также металлокомпозитной конструкции, нагруженной сверху при $p_{\max} = -30$ МПа (рис. 3, в). Для случая нагружения металлокомпозитной оболочки снизу ($p_{\max} = 30$ МПа) зависимости $\Theta_m(t; M)$ здесь не приводятся, так как кривые 1 и 2 при этом на рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq 24$ мс практически совпадают (незначительное различие наблюдается лишь при $t > 22$ мс).

Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 3 показывает, что температурные поля, рассчитанные по простейшей неклассической теории изгиба искривленной КМ-панели — теории Амбарцумяна (см. кривые 1) — и по уточненной теории изгиба (см. кривые 2), с течением времени все более различаются. Следовательно, есть основания предполагать, что теория Амбарцумяна, широко используемая в расчетной практике, в случае динамического термоупругопластического деформирования тонкостенных КМ-конструкций типа оболочек может оказаться непригодной для проведения таких расчетов. Окончательное же решение этого вопроса возможно только после сравнения с результатами соответствующих экспериментов, которые автору неизвестны. (Здесь следует отметить, что дополнительные расчеты показали: в случаях квазистатического нагружения и динамического термоупругого деформирования пологих КМ-оболочек результаты, полученные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, практически совпадают.)

Сделанный выше вывод подтверждают и расчеты поперечных колебаний рассматриваемых панелей. Так, на рис. 4 представлены осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой пологой КМ-оболочки ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$), определенные при $p_{\max} = 8$ МПа (рис. 4, а) и $p_{\max} = -8$ МПа (рис. 4, б). Кривые 1 и 2 на рис. 4 получены при тех же значениях M , что и на рис. 3, а кривые 2' на рис. 4 изображены для сравнения: они рассчитаны по уточненной теории изгиба и соответствуют изотермическому упругопластическому случаю, когда изменение температуры в пологой КМ-оболочке не учитывается. Поведение кривых 1 и 2 на рис. 4 свидетельствует

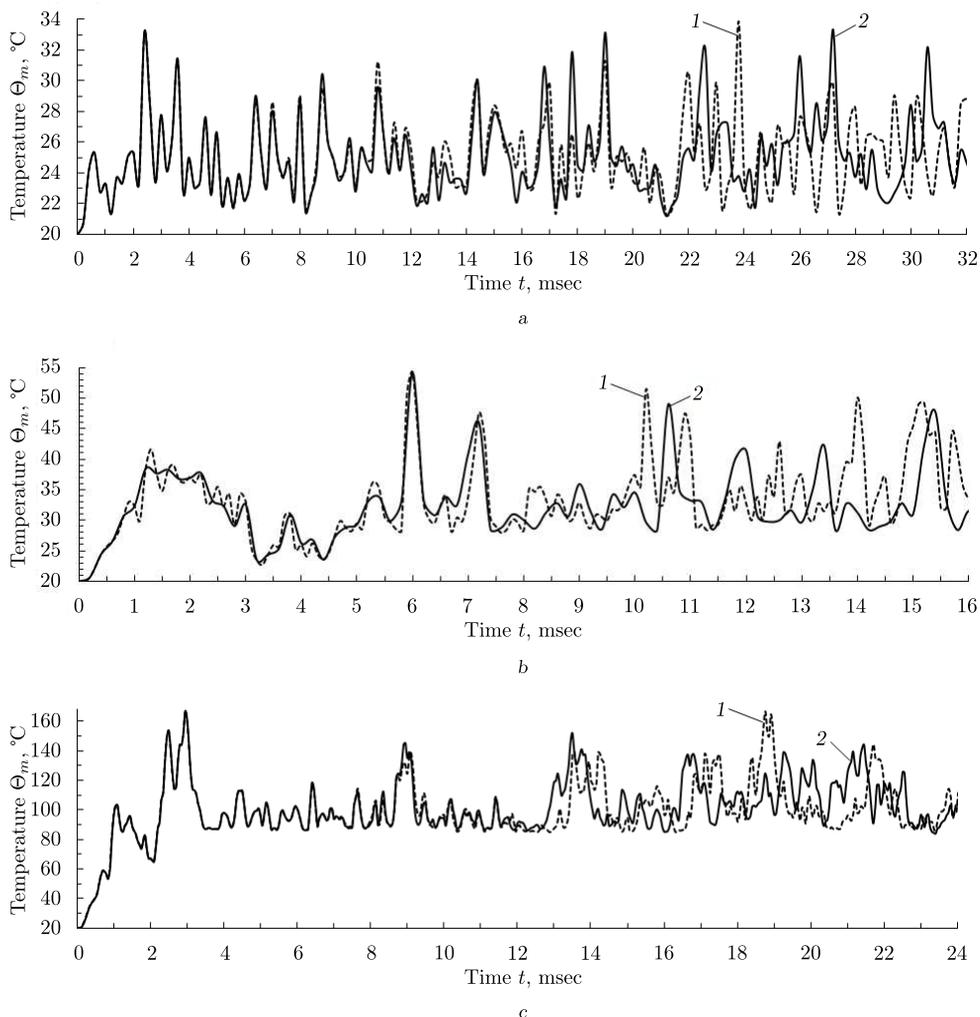


Рис. 3. Зависимость от времени максимального значения температуры в стеклопластиковой полой оболочке, нагруженной снизу (а) и сверху (б), а также в металлокомпозитной панели, нагруженной сверху (с)

[Figure 3. Time dependence of the maximum temperature value in a fiberglass shallow shell loaded from below (a) and from above (b), as well as in a metal-composite panel loaded from above (c)]

о том, что с увеличением времени зависимости $w_0(t)$, рассчитанные по теории Амбарцумяна (кривые 1) и по уточненной теории (кривые 2), существенно различаются. Аналогичное сопоставление кривых 2 и 2' демонстрирует, что с увеличением t зависимости $w_0(t)$, определенные с учетом (кривые 2) и без учета (кривые 2') температурного отклика в искривленной стеклопластиковой панели, все более отличаются друг от друга. Согласно этим результатам, в еще большей степени различаются напряженно-деформированные состояния в компонентах композиции таких тонкостенных конструкций, рассчитанные по теории Амбарцумяна ($M = 0$) и уточненной теории изгиба ($M = 7$), а также с учетом и без учета температурных полей, возникающих в них. Соответствующие зависимости здесь не представлены.

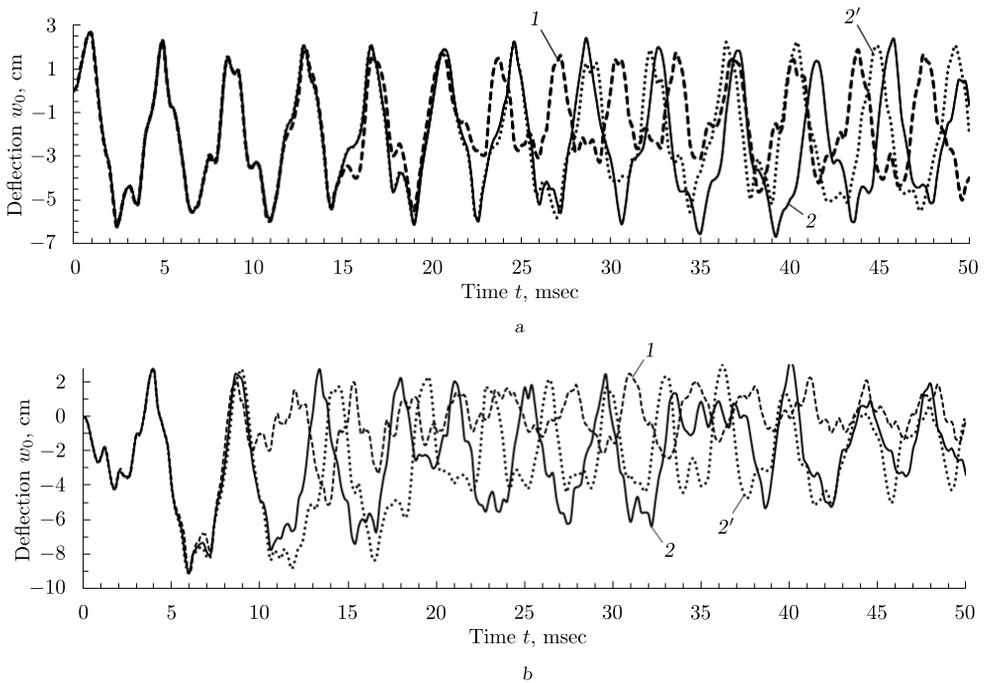


Рис. 4. Осцилляции прогиба центральной точки стеклопластиковой полой оболочки, нагруженной снизу (а) и сверху (б), рассчитанные по разным теориям изгиба
 [Figure 4. Deflection oscillations of the central point of a fiberglass shallow shell loaded from below (a) and from above (b) calculated using different bending theories]

На рис. 5 изображены аналогичные кривые 1, 2 и 2', рассчитанные для металлокомпозитной полой оболочки при $p_{\max} = 30$ МПа (рис. 5, а) и $p_{\max} = -30$ МПа (рис. 5, б). Как видно из рис. 5, б, при нагружении искривленной Mg-У8А-панели сверху уже на рассматриваемом малом интервале времени ($0 \leq t \leq 24$ мс) кривые 1 и 2, а также 2 и 2' значительно различаются между собой. Кривые 1 и 2 на рис. 5, а (нагружение снизу) визуально незначительно различаются между собой лишь при $t \approx 23.5$ мс. Объяснятся это тем, что, как отмечалось выше, при нагружении металлокомпозитной полой оболочки снизу зависимости $\Theta_m(t; M)$, рассчитанные по теории Амбарцумяна (кривая 1) и по уточненной теории изгиба (кривая 2), заметно различаются только при $t > 22$ мс. Однако сравнение кривых 2 и 2' на рис. 5, а свидетельствует о том, что даже в этом случае нагружения расчеты Mg-У8А-панели, выполненные по уточненной теории изгиба с учетом (кривая 2) и без учета (кривая 2') теплового отклика в ней, приводят к значительно различающимся зависимостям $w_0(t)$.

Несмотря на то, что на рис. 5, а кривые 1 и 2 визуально почти не различаются, деформированные состояния компонентов композиции, рассчитанные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, в этом случае на рассматриваемом интервале времени различаются весьма заметно. Так, на рис. 6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$ ($\varepsilon_m^{(k)}(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r}; M)$) связующего материала (рис. 6, а; $k = 0$) и арматуры второго семейства (рис. 6, б; $k = 2$), которая испытывает наи-

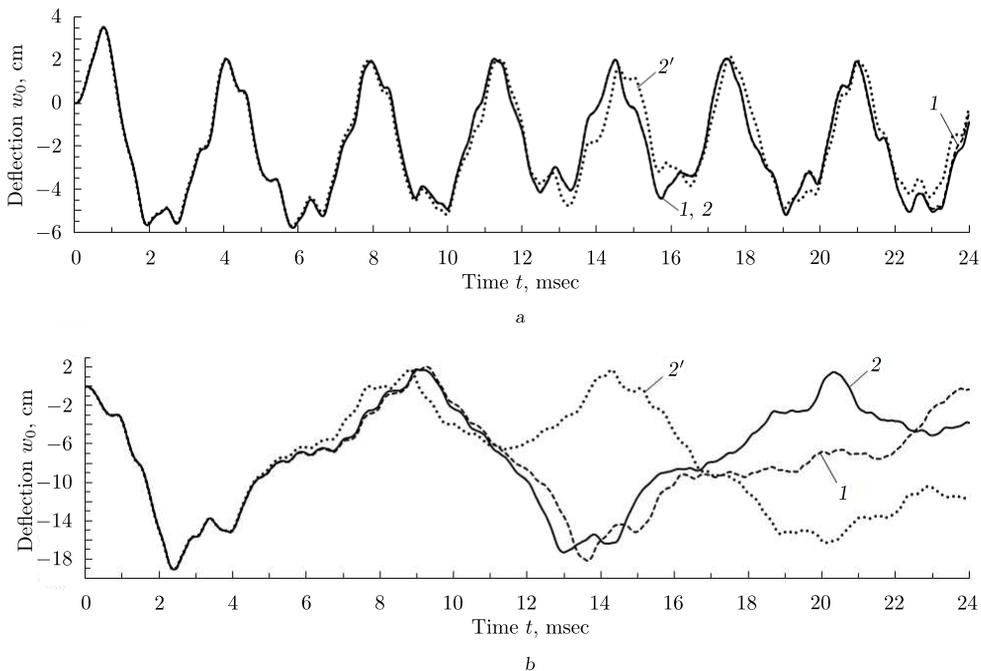


Рис. 5. Осцилляции прогиба центральной точки металлокомпозитной пологой оболочки, нагруженной снизу (а) и сверху (б), рассчитанные по разным теориям изгиба

[Figure 5. Deflection oscillations of the central point of a metal-composite shallow shell loaded from below (a) and from above (b) calculated using different bending theories]

большее деформирование в металлокомпозитной панели, нагруженной снизу. Кривые 1 и 2 на рис. 6 получены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис. 5, а. Кривые 1 и 2 на рис. 6 (особенно на рис. 6, b) показывают, что расчет деформированного состояния материалов фаз композиции даже в этом случае необходимо проводить по уточненной теории изгиба (кривые 2). Действительно, поведение кривой 1 на рис. 6, b (расчет по теории Амбарцумяна) свидетельствует о том, что наибольшее значение интенсивности деформаций в волокнах второго семейства $\varepsilon_{\max}^{(2)} = \max_t \varepsilon_m^{(2)}(t)$ достигается при $t = 19.1$ мс и равно 4.99%, а согласно поведению кривой 2 на этом рисунке (уточненная теория изгиба), значение $\varepsilon_{\max}^{(2)} = 4.78\%$ достигается при $t = 6.7$ мс.

Согласно поведению кривой 2 на рис. 3, с, температура в металлокомпозитной панели, нагруженной сверху, в отдельных точках в некоторые моменты времени может достигать порядка 150–170 °С. При нагружении же такой пологой КМ-оболочки снизу температура не превышает 70 °С. (Как уже отмечалось, соответствующие зависимости $\Theta_m(t; M)$ здесь не приводятся.) Целесообразно предположить, что высокий уровень нагрева динамически изгибаемой металлокомпозитной конструкции обусловлен тем, что в проведенных расчетах предполагалось: теплообмен КМ-панели с окружающей средой через лицевые поверхности реализуется при естественной конвекции воздуха ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м²·К)). Однако при нагружении искривленной панели взрывной волной она осциллирует в поперечном направлении с высокой частотой (см. кривые на рис. 5), поэтому теплообмен через ее лицевые поверхности

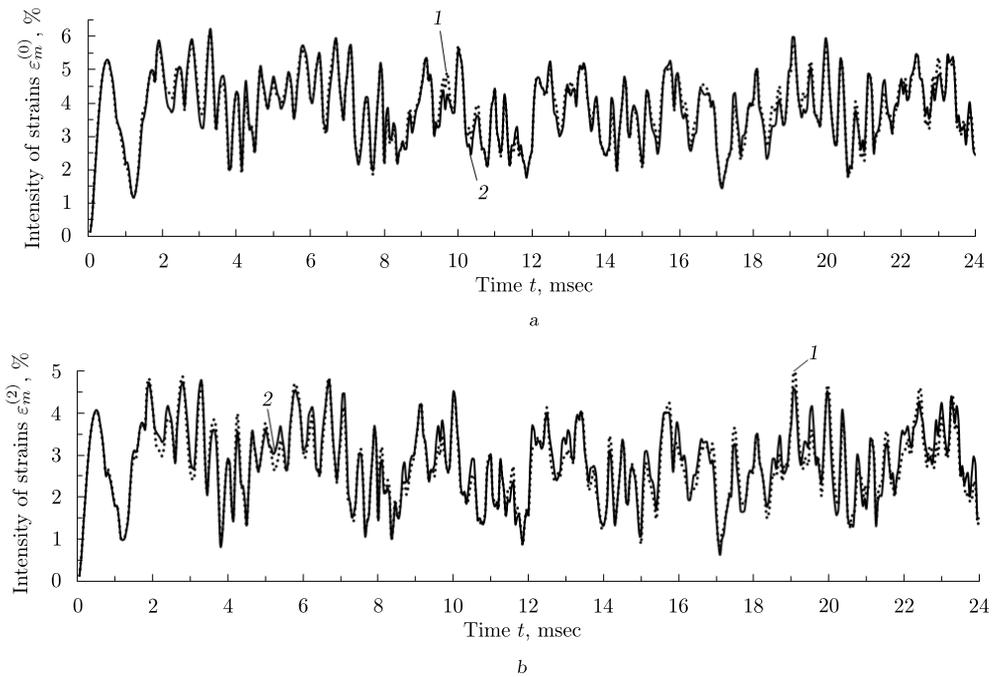


Рис. 6. Осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала (а) и волокон второго семейства (б) в металлокомпозитной полой оболочке, нагруженной снизу, рассчитанные по разным теориям изгиба

[Figure 6. Oscillations of the maximum values of the intensity of strains of the binder material (a) and fibers of the second family (b) in a metal-composite shallow shell loaded from below, calculated according to different bending theories]

следовало бы моделировать не при естественной, а при вынужденной конвекции. Согласно этому допущению, были выполнены дополнительные расчеты при значении коэффициентов теплоотдачи $\alpha^{(\pm)} = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ (см. равенства (20)), которое характеризует вынужденную конвекцию для газов [29]. Определенные таким образом значения $\Theta_m(t; M)$ отличаются от полученных ранее, т. е. при естественной конвекции (см. рис. 3), лишь в четвертой значащей цифре. А значит, увеличение коэффициентов теплоотдачи на лицевых поверхностях изучаемых искривленных КМ-панелей в 10 раз практически не оказывает влияния на результаты расчетов их неизоэтермического упругопластического поведения на рассматриваемых временных интервалах ($0 \leq t \leq 50 \text{ мс}$). Следовательно, на таких, достаточно малых, интервалах времени теплофизические процессы в полых КМ-оболочках можно считать адиабатическими, т. е. можно не учитывать кондуктивную составляющую процесса теплопереноса в них.

Заклучение. Разработанная математическая модель неизоэтермического упругопластического поведения гибких полых оболочек с произвольными структурами армирования непрерывными волокнами позволяет аппроксимировать тангенциальные перемещения и температуру в поперечном направлении с разной степенью точности.

Сравнительный анализ термоупругопластической динамики искривленных КМ-панелей показал, что в отличие от гибких армированных пластин [23]

как стеклопластиковые, так и металлокомпозитные пологие оболочки, нагруженные в поперечном направлении, необходимо рассчитывать, учитывая тепловой отклик в них. При этом целесообразно использовать не простейшую неклассическую теорию изгиба таких тонкостенных элементов конструкций (теорию Амбарцумяна [1, 23]), а уточненную теорию изгиба [22].

Выполненные расчеты показали, что при нагружении поперечной взрывной волной относительно тонкие искривленные панели из стеклопластика в отдельных точках кратковременно (менее 1 мс) могут дополнительно нагреваться на 14–34 °С (аналогичные по структуре и характерным размерам стеклопластиковые пластины нагреваются не более чем на 14 °С [23]), а металлокомпозитные пологие оболочки в отдельных точках способны дополнительно нагреваться на 50 °С при их нагружении со стороны вогнутой лицевой поверхности и на 150 °С при нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности (аналогичные металлокомпозитные гибкие пластины нагреваются не выше, чем на 30–32 °С [23]). Более интенсивное тепловыделение и, как результат, более активное воздействие температурных полей на механический отклик всегда наблюдается при динамическом нагружении искривленных КМ-панелей со стороны их выпуклой лицевой поверхности.

При нагружении пологой КМ-оболочки взрывной волной с любой лицевой стороны наблюдается ее прощелкивание в сторону вогнутости. Максимальный модуль прогиба конструкции при таком прощелкивании, которое реализуется позже прекращения действия нагрузки, в случае нагружения пологой оболочки со стороны ее выпуклой лицевой поверхности значительно превосходит аналогичную величину при нагружении искривленной панели со стороны ее вогнутой лицевой поверхности. Это обстоятельство и объясняет более интенсивное тепловыделение в первом случае. Наибольшее значение температуры в отдельных точках пологой КМ-оболочки достигается именно в момент ее прощелкивания.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ регистрации 121030900260-6).

Библиографический список

1. Амбарцумян С. А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
2. Богданович А. Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
3. Куликов Г. М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. РАН. МТТ*, 1994. № 2. С. 33–42. EDN: [SLRUCB](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
4. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium — a reinforcement perspective // *Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf.*, 2001. vol.32, no.7. pp. 901–910. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
5. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
6. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.

7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.*, 2010. vol. 93, no. 1. pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011. vol. 46, no. 5. pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
9. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Saarbrücken: Palmarium Academic Publ., 2013. 93 с. EDN: QZAPNP.
10. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
11. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite // *Front. Mech. Eng.*, 2013. vol. 8, no. 2. pp. 187–200. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
12. Соломонов Ю. С., Георгиевский В. П., Недбай А. Я., Андришин В. А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с. EDN: UGLCQJ.
13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review // *Int. J. Impact Eng.*, 2014. vol. 67. pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
14. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
15. Димитриенко Ю. И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. М.: Физматлит, 2019. 448 с https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2079143#1.
16. *Композиционные материалы: Справочник* / ред. Д. М. Карпинос. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
17. *Handbook of Composites* / ed. G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.
18. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // *Int. J. Mech. Sci.*, 2010. vol. 52, no. 12. pp. 1579–1587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
19. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plasticity*, 2008. vol. 24, no. 3. pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
20. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plasticity*, 2012. vol. 36. pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
21. Ахундов В. М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Мех. композ. матер.*, 2015. Т. 51, № 3. С. 539–558.
22. Янковский А. П. Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест» // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2017. Т. 10, № 3. С. 276–292. EDN: ZHZVIN DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.22>.
23. Янковский А. П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // *ПММ*, 2022. Т. 86, № 1. С. 121–150. EDN: EKGCRN DOI: <https://doi.org/10.31857/S003282352201009X>.
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells // *Quart. Appl. Math.*, 1955. vol. 13, no. 2. pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Грешнов В. М. *Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов*. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
26. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comp. Struct.*, 1987. vol. 26, no. 1–2. pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).

27. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. *Сопротивление жестких полимерных материалов*. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
28. Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // *Прикл. физ.*, 2011. № 3. С. 32–38. EDN: [NURWHZ](#).
29. Луканин В. Н., Шатров М. Г., Камфер Г. М. [и др.] *Теплотехника* / ред. В. Н. Луканин. М.: Высш. шк., 2003. 671 с. EDN: [QMHYSH](#).
30. Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. [и др.] *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур* / ред. И. И. Гольденблат. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.

MSC: 74K20

Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory

A. P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
4/1, Institutskaya st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

Abstract

The dynamic problem of non-isothermal and inelastic deformation of flexible shallow multidirectionally reinforced shells is formulated in the frameworks of the refined theory of bending. The temperature is approximated by a 7th order polynomial over the thickness of constructions. The geometric nonlinearity of the problem is modeled by the Karman approximation. The solution of the formulated coupled nonlinear two-dimensional problem is obtained using an explicit numerical scheme. The thermo-elastic-plastic response of fiberglass and metal-composite cylindrical elongated panels with an orthogonal reinforcement structure, loaded frontally with an air blast wave, has been studied. It is shown that, unlike reinforced plates similar in structure and characteristic dimensions, shallow shells under intense short-term loading must be calculated taking into account the occurrence of temperature fields in them. In this case, the refined theory of bending of curved panels should be used instead of the simplified version (the non-classical theory of Ambartsumyan). The temperature increment at separate points of shallow fiberglass shells can reach 14–34 °C, and in similar metal-composite panels can reach 50–150 °C. Cylindrical shallow shells are more intensively deformed when they are loaded by an air blast wave from the side of a convex front surface.

Keywords: flexible shallow shells, multidirectional reinforcement, dynamic deformation, coupled thermo-elastic-plasticity, refined bending theory, explicit numerical scheme.

Received: 26th September, 2022 / Revised: 28th December, 2022 /

Accepted: 13th February, 2023 / First online: 27th March, 2023

Mechanics of Solids

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Yankovskii A. P. Modeling of non-isothermal elastic-plastic behavior of reinforced shallow shells in the framework of a refined bending theory, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 119–141. EDN: YRWNPW. DOI: [10.14498/vsgtu1958](https://doi.org/10.14498/vsgtu1958) (In Russian).

Author's Details:

Andrei P. Yankovskii  <https://orcid.org/0000-0002-2602-8357>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Research Scientist; Lab. of Fast Processes Physics;

e-mail: lab4nemir@rambler.ru

Competing interests. I hereby declare that I have no conflict of interest in the authorship and publication of this article.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research was carried out within the framework of a state assignment; state registration number — 121030900260-6.

References

1. Ambartsumian S. A. *Obshchaia teoriia anizotropnykh obolochek* [The General Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Nauka, 1974, 446 pp. (In Russian)
2. Bogdanovich A. E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga, Zinatne, 1987, 295 pp. (In Russian)
3. Kulikov G. M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells, *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27–35. EDN: TVBRLF.
4. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium — a reinforcement perspective, *Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf.*, 2001, vol. 32, no. 7, pp. 901–910. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
5. Abrosimov N. A., Bazhenov V. G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod State Univ., 2002, 400 pp. (In Russian)
6. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004, xxiii+831 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b12409>.
7. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009, *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, no. 1, pp. 14–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>.
8. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
9. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and Thermoelasticity of Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of Numerical Analysis]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publ., 2013, 93 pp. (In Russian). EDN: QZAPNP.
10. Vasiliev V. V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013, xii+412 pp. EDN: UERHXD. DOI: <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>.
11. Gill S. K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite, *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
12. Solomonov Yu. S., Georgievskii V. P., Nedbai A. Ya., Andryushin V. A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 pp. (In Russian)
13. Morinière F. D., Alderliesten R. C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates — A review, *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27–38. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
14. Gibson R. F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, CRC Press, 2016, xxiii+700 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/b19626>.
15. Dimitrienko Yu. I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksii pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of Composite Structures under High Temperatures]. Moscow, Fizmatlit, 2019, 448 pp. (In Russian). https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_2079143#1
16. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite Materials: Handbook], ed. D. M. Karpinos. Kiev, Nauk. Dumka, 1985, 592 pp. (In Russian)

17. *Handbook of Composites*, ed. G. Lubin. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982.
18. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders, *Int. J. Mech. Sci.*, 2010, vol. 52, no. 12, pp. 1579–1587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
19. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites, *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
20. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle, *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
21. Akhundov V. M. Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations, *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 383–396. EDN: MCFUEJ. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9509-4>.
22. Yankovskii A. P. A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit “cross” scheme, *Comput. Cont. Mech.*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 276–292 (In Russian). EDN: ZHZVIN DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.3.22>.
23. Yankovskii A. P. Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates, *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 111–133. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654422070184>.
24. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells, *Quart. Appl. Math.*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
25. Greshnov V. M. *Physico-Mathematical Theory of High Irreversible Strains in Metals*. Boca Raton, CRC Press, 2019, xii+242 pp. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780429259791>.
26. Houlston R., DesRochers C. G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading, *Comp. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
27. Malmeister A. K., Tamuzh V. P., Teters G. A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of Rigid Polymeric Materials]. Riga, Zinatne, 1972, 500 pp. (In Russian)
28. Yankovskii A. P. Simulation of processes of heat conductivity in spatially reinforced composites with an arbitrary orientation of fibers, *Prikl. Fiz.*, 2011, no. 3, pp. 32–38 (In Russian). EDN: NURWHZ.
29. Lukanin V. N., Shatrov M. G., Kamfer G. M., et al. *Teplotekhnika* [Heat Engineering], ed. V. N. Lukanin. Moscow, Vyssh. Shk., 2003, 671 pp. (In Russian). EDN: QMHYSH.
30. Bezukhov N. I., Bazhanov V. L., Gol'denblat I. I., et al. *Raschety na prochnost', ustoychivost' i kolebaniia v usloviakh vysokikh temperatur* [Calculations for Strength, Stability Vibrations under High Temperatures], ed. I. I. Gol'denblat. Moscow, Mashinostroenie, 1965, 567 pp. (In Russian)



УДК 533.6.011:51

Об одном парадоксальном свойстве решения задачи стационарного обтекания тела дозвуковым стратифицированным потоком идеального газа

Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Россия, 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9.

Аннотация

Рассматривается задача обтекания гладкого выпуклого тела, движущегося горизонтально с постоянной дозвуковой скоростью в покоящейся стратифицированной атмосфере, состоящей из идеального газа. По условию задачи (вертикальный) градиент функции Бернулли (с учетом потенциальной энергии однородного поля тяжести) в покоящейся атмосфере на всех высотах отличен от нуля (как это имеет место в стандартной атмосфере Земли на высотах до 51 км), а высота полета не превышает величину, равную квадрату скорости полета тела, деленного на удвоенное ускорение свободного падения. Поверхность земли считается плоской. Используется система координат, связанная с телом. Рассматривается общий пространственный случай (несимметричное тело или симметричное тело под углом атаки). Используется общепринятое предположение о том, что в некоторой окрестности передней линии торможения (линии тока, которая заканчивается на теле в передней точке торможения) нет второй точки торможения, параметры течения в этой окрестности дважды непрерывно дифференцируемы, а точка торможения является точкой растекания (т.е. в некоторой ее окрестности все линии тока на поверхности тела начинаются в этой точке). На основе строгого анализа уравнений Эйлера показывается, что существование стационарного решения задачи противоречит этому общепринятому (но строго не доказанному) представлению о линии торможения. Это свойство решения задачи названо парадоксальным и вызывает сомнение в существовании решения.

Ключевые слова: стратифицированная атмосфера, существование стационарного решения, уравнения Эйлера, линия торможения, передняя точка торможения.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

  Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Сизых Г. Б. Об одном парадоксальном свойстве решения задачи стационарного обтекания тела дозвуковым стратифицированным потоком идеального газа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 142–158. EDN: XZCBCO. DOI: [10.14498/vsgtu1963](https://doi.org/10.14498/vsgtu1963).

Сведения об авторе

Григорий Борисович Сизых  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. высшей математики;
e-mail: 01o2o3@yandex.ru

Получение: 18 октября 2022 г. / Исправление: 5 декабря 2022 г. /
Принятие: 7 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 23 декабря 2022 г.

Введение. Предположения о существовании решений заданного вида некоторых стационарных задач гидродинамики (например, [1, 2]) в одних случаях приводят к противоречиям, из которых следует отсутствие таких решений, в других случаях — к парадоксальным выводам (противоречащим общепризнанному, но не доказанному мнению), вызывающим сомнение в существовании этих решений. Иногда прийти к противоречию или парадоксу не удается, и вопрос о существовании решения заданного вида остается открытым, однако при этом обнаруживаются неизвестные ранее свойства, которым должно удовлетворять это решение, если оно существует (например, в [3]). В данной статье ставится под сомнение существование стационарного решения задачи дозвукового обтекания гладкого выпуклого тела стратифицированным потоком идеального газа (полная формулировка задачи приведена ниже в первом разделе). Это сомнение объясняется следующим парадоксом.

Общепринято (хотя строгое доказательство отсутствует) представление о том, что при обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью по крайней мере в некоторой окрестности линии торможения (линии тока, которая начинается в невозмущенном набегающем потоке и заканчивается на теле в передней точке торможения) нет второй точки торможения, плотность и давление отграничены от нуля некоторыми положительными константами, а точка торможения является точкой растекания (т.е. все линии тока в некоторой ее окрестности на поверхности тела начинаются в этой точке). При дозвуковом обтекании (невозмущенный набегающий поток имеет дозвуковую скорость) на поверхности тела могут формироваться скачки и иные разрывы, но также общепринято, что при дозвуковом обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью в некоторой окрестности линии торможения скачки и разрывы отсутствуют. Для краткости линию торможения со свойствами, перечисленными в данном абзаце, в дальнейшем будем называть «правильной». Для различных типов жидкости наличие «правильной» линии торможения подтверждают эксперименты (например, в [4]), численные расчеты (например, в [5–8]) и известные точные решения (например, безвихревое обтекание сферы несжимаемой жидкостью [9]), а в учебниках и в теоретических исследованиях [9–16] факт наличия «правильной» линии торможения даже не обсуждается и при описании картины обтекания используется как нечто само собой разумеющееся (при дозвуковом стационарном обтекании тела с гладкой выпуклой носовой частью). По мнению автора настоящей статьи, наибольшие сомнения может вызывать предположение о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения, где поле единичного вектора, касательного к линиям тока, имеет разрыв, а кривизна линий тока не ограничена в окрестности этой точки. Однако допустимость этого предположения оправдывается известными точными решениями для идеальной несжимаемой жидкости (например, обтекание сферы или решение, приведенное в монографии [17, § 2.7]), в которых вторые производные компонент скорости непрерывны в (непроколотой) окрестности точки торможения, и отсутствием известных решений с разрывами вторых производных параметров

течения в этой окрестности. Однако во всех перечисленных точных решениях (в которых вторые производные компонент скорости непрерывны в окрестности точки торможения) завихренность в точке торможения равна нулю. А именно этот факт ниже будет установлен как свойство решения рассматриваемой задачи и станет ключевым моментом доказательства. Поэтому мог возникнуть следующий вопрос, вызывающий сомнение в верности результата данной работы: «Может быть, нулевое значение завихренности есть следствие предположения о непрерывности вторых производных компонент скорости в точке торможения?» Отрицательный ответ на этот вопрос получен в [18], где приведен пример такого точного решения с непрерывными вторыми производными компонент скорости, в котором завихренность в точке торможения отлична от нуля.

Как будет показано ниже, из предположения о существовании решения рассматриваемой в настоящей статье задачи обтекания следует отсутствие в решении «правильной» линии торможения. Такое свойство решения в настоящей статье названо парадоксальным и ставит под сомнение существование решения задачи.

При знакомстве с текстом статьи необходимо учитывать следующее. Доказательство проводится методом «от противного». Оно начинается в конце первого раздела (после формулировки задачи обтекания) с предположения о том, что решение задачи существует и что в этом решении есть «правильная» линия торможения. Заканчивается доказательство в конце пятого раздела противоречием. В процессе доказательства возникают различные гипотетические утверждения (т.е. утверждения, вытекающие из предположений, сделанных в начале доказательства). По мере приближения к концу доказательства (по мере приближения к противоречию) эти гипотетические утверждения становятся все более сомнительными и могут вызвать у читателя желание их опровергнуть. Но не стоит этого делать, поскольку это будет сделано автором. Эти утверждения «порождены» неверным предположением, и их нельзя рассматривать как «обнаруженные в статье свойства решения». Поэтому хочется обратить внимание читателя на то, что в разделах начиная со второго и заканчивая пятым включительно доказывается только одно негипотетическое утверждение (которое и представляет собой результат статьи): *из предположения о существовании решения задачи обтекания следует отсутствие в решении «правильной» линии торможения.*

1. Задача стационарного обтекания стратифицированным потоком и начало доказательства парадоксального свойства ее решения. Задачу о горизонтальном движении тела с постоянной скоростью в покоящейся атмосфере будем рассматривать в системе координат, связанной с телом, то есть рассмотрим задачу стационарного обтекания этого тела невозмущенным стратифицированным набегающим потоком (поле скорости однородно и имеет нулевую вертикальную составляющую, а плотность и давление в невозмущенном потоке могут меняться с высотой). Сформулируем общий вид задачи стационарного обтекания тела невозмущенным стратифицированным потоком с ненулевым (вертикальным) градиентом функции Бернулли на высотах полета, не превышающих величину, равную квадрату скорости полета тела, деленного на удвоенное ускорение свободного падения. Все эти условия существенны для доказательства, которое будет проведено в следующих раз-

делах. Используем систему уравнений [19], соответствующую модели идеального (отсутствуют вязкость и теплопроводность) совершенного (выполняется уравнение Менделеева—Клапейрона) газа с постоянными теплоемкостями c_p и c_v . В задаче рассматривается область течения, ограниченная поверхностью тела и поверхностью земли, которая считается плоской. Тело и поверхность земли не имеют общих точек. Начало системы координат расположено в самой верхней точке поверхности тела, а ось z направлена вертикально вверх (рис. 1). Для краткости и однозначности ссылок именно эту формулировку назовем задачей 1.

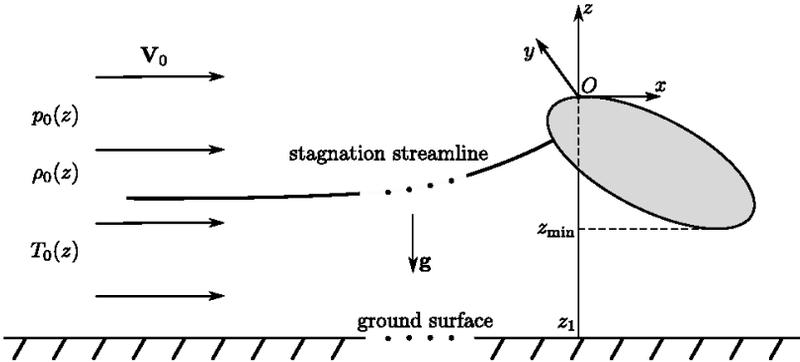


Рис. 1. Обтекание тела стратифицированным потоком
[Figure 1. Flow around a body by a stratified flow]

ЗАДАЧА 1. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается замкнутая область \bar{G} (замыкание области G), расположенная между поверхностью ограниченного гладкого выпуклого тела и плоскостью (поверхностью земли). При этом начало координат лежит на поверхности тела, максимальная z -координата точек на поверхности тела равна нулю, минимальная z -координата точек на поверхности тела равна $z_{\min} < 0$, а плоскость (поверхность земли) задается уравнением $z = z_1$, где $z_1 < z_{\min}$. Требуется найти решение, т.е. поля параметров (стационарного) пространственного течения: плотности ρ , давления p , температуры T и скорости \mathbf{V} , в котором допускается существование скачков и тангенциальных разрывов на некоторых неподвижных поверхностях, расположенных в \bar{G} , а в остальных точках \bar{G} параметры течения дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют системе четырех уравнений:¹

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2 + gz), \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (1)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{\Omega})(p\rho^{-k}) = 0, \quad p = \rho R\mu^{-1}T \quad (2)$$

и следующим граничным условиям.² Невозмущенная скорость \mathbf{V}_0 по величине равна $V_0 = \text{const} > \sqrt{2g|z_1|}$ и направлена в сторону роста координаты x

¹Здесь $\mathbf{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{V}$ — завихренность, $k = c_p/c_v > 1$ — показатель адиабаты Пуассона, $g = 9.8 \text{ м/с}^{-2}$, $R\mu^{-1}$ — отношение универсальной газовой постоянной к молярной массе.

²При постановке граничных условий предельные значения параметров течения и само течение при $z \geq z_1$ и при $x \rightarrow -\infty$ будем называть «невозмущенными», а нижним индексом «0» будем обозначать параметры невозмущенного набегающего потока; см. рис. 1.

(y и z компоненты \mathbf{V}_0 равны нулю, т.е. поле невозмущенной скорости \mathbf{V}_0 однородно), а ее пространственные производные и предел пространственных производных \mathbf{V} при $x \rightarrow -\infty$ равны нулю. В невозмущенном течении плотность ρ_0 и температура T_0 являются заданными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями одной только (вертикальной) координаты z (стратифицированная атмосфера). При этом функция $T_0(z)$ задана так, что производная невозмущенной функции Бернулли

$$i_0(z) = k(k-1)^{-1} R\mu^{-1} T_0(z) + V_0^2/2 + gz$$

при всех $z \geq z_1$ отлична от нуля:

$$di_0/dz \neq 0. \quad (3)$$

На поверхностях земли ($z = z_1$) и тела нормальная к поверхности составляющая скорости \mathbf{V} должна быть равна нулю (условие непротекания). Отрицательная константа z_1 считается заданной, а величина $z_{\min} < 0$ определяется формой тела.

Для каждой точки E , лежащей на поверхности тела, существует такая двумерная окрестность H_2 этой точки, лежащая на поверхности тела, что она в прямоугольной декартовой системе координат $E x' y' z'$, ориентированной так, что ось z' нормальна к поверхности тела и направлена внутрь тела, может быть представлена в виде

$$H_2 = \{x', y', z' : z' = \phi(x', y'), (x', y') \in S\},$$

где $\phi(x', y')$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая на замыкании \bar{S} некоторой ограниченной области S переменных (x', y') . При этом существует такое число $\Delta z > 0$, что область (слой)

$$H_3 = \{x, y, z : \phi(x, y) < z < \phi(x, y) + \Delta z, (x, y) \in S\}$$

лежит внутри тела.³

На поверхностях скачков и разрывов (существование которых допускается) должны выполняться законы сохранения массы, энергии и импульса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При постановке задачи 1 не приведена развернутая формулировка условий на поверхностях скачков и разрывов (ее можно найти в [19]). Это связано с тем, что в настоящем исследовании будет рассматриваться не вся замкнутая область течения \bar{G} , а только окрестность (правильной) линии торможения, в которой нет скачков и разрывов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Несложно проверить, что условие (3) выполнено в стандартной атмосфере Земли (ГОСТ 4401-81) на высотах до 51 км.

На первый взгляд может показаться, что если скорость V_0 значительно ниже скорости звука, а форма тела подобрана некоторым надлежащим образом, то решение задачи 1 должно существовать. Однако, как сказано во введении, факт существования решения задачи 1 приводит к парадоксальному выводу о том, что в таком решении отсутствует «правильная» линия торможения. Чтобы прийти к такому выводу, предположим «противное», т.е. сделаем два предположения.

³Нижние индексы 2 и 3 подчеркивают, что H_2 — поверхность, а H_3 — трехмерная область.

1. Решение задачи 1 существует.
2. В этом решении правильная линия торможения, т.е. передняя линия торможения, имеет в некоторой своей окрестности (на всей своей протяженности) только одну точку торможения (на теле), и эта точка торможения является точкой растекания, т.е. все линии тока в некоторой ее окрестности на поверхности тела начинаются в этой точке. При этом все параметры течения дважды непрерывно дифференцируемы в упомянутой окрестности линии торможения (в том числе и на поверхности тела, в частности в точке торможения), а плотность и давление отграничены от нуля некоторыми положительными константами.

Проведем исследование при этих двух предположениях. Противоречие, к которому приведет такое исследование, будет означать, что если решение существует, то в нем отсутствует «правильная» линия торможения.

2. Преобразование уравнений движения с учетом стратификации невозмущенного течения. Обозначим через $\sigma = p\rho^{-k}$ — энтропийную функцию, а через $i = k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T + V^2/2 + gz$ — функцию Бернулли. Тогда систему (1), (2) можно записать в форме Крокко [20]:

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1}R\mu^{-1}T\nabla \ln \sigma - \nabla i, \quad \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad (4)$$

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\sigma = 0, \quad p = \rho R\mu^{-1}T. \quad (5)$$

При $x \rightarrow -\infty$ поле скорости \mathbf{V} стремится к однородному полю \mathbf{V}_0 , а производные компонент скорости стремятся к нулю. Поэтому завихренность $\boldsymbol{\Omega}$ стремится к нулю, и первое уравнение системы (4) принимает вид⁴

$$0 = (k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_0 d \ln \sigma_0 / dz - di_0 / dz. \quad (6)$$

По условию задачи 1 производная функции $i_0(z)$ непрерывна и отлична от нуля для всех значений z (неравенство (3)). Это значит, что производная функции $i_0(z)$ сохраняет знак для всех значений z , и поэтому $i_0(z)$ строго монотонно изменяется с ростом z . Следовательно, существует обратная функция Z , выражающая z через i_0 : $z = Z(i_0)$. Поэтому невозмущенную энтропийную функцию $\sigma_0(z)$ и невозмущенную температуру $T_0(z)$ можно представить в виде функций переменной i_0 : $\tilde{\sigma}_0(i_0) = \sigma_0(Z(i_0))$ и $\tilde{T}_0(i_0) = T_0(Z(i_0))$.⁵ В дальнейшем будем считать $\tilde{\sigma}_0$ и \tilde{T}_0 заданными функциями одной переменной.⁶ Для дальнейшего исследования достаточно факта их существования, и конкретный вид этих функций не потребуется.

Из (6) следует, что $d \ln \tilde{\sigma}_0(i_0) / di_0 = [(k-1)^{-1}R\mu^{-1}\tilde{T}_0(i_0)]^{-1}$. Как левая часть этого равенства (производная), так и его правая часть зависят только от i_0 . Функции $\tilde{\sigma}_0(i_0)$, $\tilde{T}_0(i_0)$ и производная $d \ln \tilde{\sigma}_0(i_0) / di_0$ — суть функции одной переменной i_0 . Для исследования связи функций $\tilde{\sigma}_0$ и \tilde{T}_0 с помощью последнего равенства можно абстрагироваться от их физического смысла: равенство потеряет физический смысл, но останется верным при замене i_0 на

⁴По условию задачи 1 все функции с нижним индексом «0» зависят только от z .

⁵Знак волны используется потому, что хотя в каждой точке невозмущенного течения $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$ и $\tilde{T}_0 = T_0$, функции $\tilde{\sigma}_0$ и σ_0 , а также \tilde{T}_0 и T_0 как функции одной переменной могут по-разному зависеть от своих аргументов.

⁶Несложно убедиться, что они однозначно определяются условиями задачи 1.

любую переменную, изменяющуюся в диапазоне изменений i_0 . Следовательно, если только диапазон изменения переменной ξ совпадает с диапазоном изменения i_0 , то в этом диапазоне верно равенство⁷

$$d \ln \tilde{\sigma}_0(\xi)/d\xi = [(k-1)^{-1} R\mu^{-1} \tilde{T}_0(\xi)]^{-1}.$$

Это равенство дает связь между энтропийной функцией и температурой в невозмущенном набегающем потоке только при $\xi = i_0$. В остальных случаях это не связь параметров течения, а всего лишь связь функций одной переменной $\tilde{\sigma}_0(\xi)$ и $\tilde{T}_0(\xi)$.

Умножая обе части первого уравнения (4) скалярно на \mathbf{V} и учитывая первое уравнение (5), получим, что $(\mathbf{V} \cdot \nabla i) = 0$, т.е. что не только энтропийная функция σ , но и функция Бернулли i сохраняют свои значения на любой линии тока (эти значения могут отличаться на разных линиях тока). Поэтому диапазон изменений функции Бернулли i во всем потоке совпадает с диапазоном изменения i_0 . Следовательно, во всем потоке верно равенство (замена ξ на i)

$$d \ln \tilde{\sigma}_0(i)/di = [(k-1)^{-1} R\mu^{-1} \tilde{T}_0(i)]^{-1}. \quad (7)$$

Физический смысл $\tilde{\sigma}_0(i)$ и $\tilde{T}_0(i)$ в точках возмущенного течения, в которых функция Бернулли равна i , будет установлен ниже. На данном этапе исследования важно, что последнее равенство верно для любого i , лежащего в диапазоне изменений i_0 .

Совокупность линий тока, проходящих в невозмущенном потоке (т.е. при $x \rightarrow -\infty$) через прямую, параллельную (поперечной) оси y , представляет собой поверхность тока. Такие поверхности в невозмущенном потоке имеют плоскую форму (параллельную плоскости Oxy), параллельны друг другу и однозначно определяются своей координатой z (или значением i_0). По мере приближения к обтекаемому телу эти поверхности искривляются и в общем случае разные поверхности искривляются по-разному. На линиях, параллельных оси y , через которые проходят эти поверхности в невозмущенном потоке, функция Бернулли i_0 и энтропийная функция $\tilde{\sigma}_0(i_0)$ сохраняют свои значения (поскольку значения i_0 зависят только от z). Как замечено выше, i и σ сохраняют свои значения на любой линии тока. Следовательно, и в возмущенной части течения на каждой из рассматриваемых поверхностей тока значения i и σ равны своим значениям на той же поверхности в невозмущенном потоке. Таким образом, рассматриваемые поверхности тока являются одновременно изоэнергетическими (функция Бернулли постоянна) и изоэнтропийными поверхностями. Это позволяет выразить связь между i и σ в точках возмущенного течения через связь этих величин в невозмущенном набегающем потоке (т.е. через функцию $\tilde{\sigma}_0$). Найдем эту связь.

Пусть в некоторой точке течения функция Бернулли равна i , а энтропийная функция равна σ . Эта точка лежит на одной из поверхностей тока, которая представляет собой изоэнергетическую и изоэнтропийную поверхность. Поэтому значения функции Бернулли i_0 и энтропийной функции $\tilde{\sigma}_0(i_0)$ на этой поверхности тока в невозмущенном набегающем потоке равны значениям i и σ соответственно, т.е. $i_0 = i$ и $\tilde{\sigma}_0(i_0) = \sigma$. Подставляя $i_0 = i$ в $\tilde{\sigma}_0(i_0) = \sigma$,

⁷Как левая часть (производная), так и правая часть, зависят только от ξ .

получаем $\tilde{\sigma}_0(i) = \sigma$. Последнее равенство означает, что и в невозмущенном, и в возмущенном потоке энтропийную функцию σ можно рассматривать как функцию одной только функции Бернулли i и при этом $\sigma(i) = \tilde{\sigma}_0(i)$.⁸ Поэтому $d \ln \sigma(i)/di = d \ln \tilde{\sigma}_0(i)/di$. Правую часть этого равенства запишем с использованием равенства (7), верного для любого i , лежащего в диапазоне изменений i_0 . В результате получим, что в любой точке течения, функция Бернулли в которой равна i , выполняется равенство

$$d \ln \sigma(i)/di = [(k-1)^{-1} R \mu^{-1} \tilde{T}_0(i)]^{-1}. \quad (8)$$

Физический смысл $\tilde{T}_0(i)$ состоит в следующем. В рассматриваемой точке A температура $\tilde{T}_0(i)$, где i — функция Бернулли в точке A , есть температура тех точек на изоэнергетической поверхности тока, проходящей через точку A , которые расположены на бесконечном удалении вверх по потоку на этой поверхности, т.е. в невозмущенном потоке. В общем случае в произвольной точке A течения (т.е. не только в невозмущенном потоке) величина $\tilde{T}_0(i)$ не совпадает с температурой газа T в точке A .

Из (8) следует, что систему уравнений (4), (5) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = F \nabla i, \quad F = T/\tilde{T}_0(i) - 1, \quad \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (9)$$

$$(\mathbf{V}, \nabla) \sigma = 0, \quad p = \rho R \mu^{-1} T. \quad (10)$$

Здесь T — температура в рассматриваемой точке течения. Система (9), (10) представляет собой полную систему уравнений, описывающих стационарное обтекание стратифицированным потоком идеального газа, и при условии (3) равносильна системе (1), (2), рассматриваемой в задаче 1.⁹

3. Две леммы. В дальнейшем доказательстве будут использованы следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Если решение задачи 1 существует, то на любой вихревой линии, на всем ее участке, на котором $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ и $F \neq 0$, имеет место альтернатива: либо на всем участке $\mathbf{V} \equiv 0$, либо на всем участке $\mathbf{V} \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{q} = \alpha \boldsymbol{\Omega}/(\rho F)$, α — произвольный ненулевой постоянный размерный коэффициент, обеспечивающий для \mathbf{q} размерность скорости. Для доказательства леммы 1 размерность \mathbf{q} не имеет значения. Однако вектор \mathbf{q} будет рассматриваться не только здесь при доказательстве леммы 1, но и в пятом разделе в качестве некоторой скорости, что и вызвало необходимость внести в формулу для \mathbf{q} коэффициент α . Применение операции rot к обеим частям первого уравнения (9), представленного в виде

$$\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V}) = \alpha \nabla i, \quad (11)$$

дает

$$(\rho \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{V}) + \mathbf{q} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) - (\rho \mathbf{V}) \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$

⁸Последнее равенство устанавливает физический смысл $\tilde{\sigma}_0(i)$ в возмущенном течении: это энтропийная функция в точке, в которой функция Бернулли равна i .

⁹По крайней мере, в той окрестности линии торможения, о которой говорится во втором предположении, сделанном в конце первого раздела.

или (с учетом уравнения неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$)

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla)(\rho\mathbf{V}) - (\rho\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{q} + (\rho\mathbf{V}) \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (12)$$

Компоненты вектора $\rho\mathbf{V}$ дифференцируются только в первом слагаемом левой части (12), а в другие слагаемые компоненты $\rho\mathbf{V}$ входят линейно как коэффициенты при различных производных компонент \mathbf{q} . Пусть l — переменная длина дуги вдоль векторной линии \mathbf{q} (т.е. вдоль вихревой линии). Поскольку по условию леммы 1 вектор $\mathbf{q} \neq 0$, равенство (12) можно представить на этой линии в виде линейной системы дифференциальных уравнений для компонент вектора $\rho\mathbf{V}$, компоненты которого зависят от l : $\rho\mathbf{V} = \rho(l)\mathbf{V}(l)$. Эта система имеет вид $d(\rho\mathbf{V})/dl = \frac{1}{|\mathbf{q}|}A(\rho\mathbf{V})$, где A — матрица размером 3×3 с коэффициентами, непрерывно зависящими от переменной l ; $(\rho\mathbf{V})$ — столбец компонент вектора $\rho\mathbf{V} = \rho(l)\mathbf{V}(l)$. Поэтому лемма 1 представляет собой известное свойство систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [21]. Таким образом, лемма 1 доказана. \square

ЛЕММА 2. *Если решение задачи 1 существует, то на любой линии тока, на всем ее участке, на котором $\mathbf{V} \neq 0$, имеет место альтернатива: либо на всем участке $\nabla i \equiv 0$, либо на всем участке $\nabla i \neq 0$.*

Доказательство. Поскольку, как было показано выше, $(\mathbf{V} \cdot \nabla i) = 0$, градиент этого скалярного произведения также будет равен нулю, то есть $\nabla(\mathbf{V} \cdot \nabla i) = 0$. Используя известное векторное тождество для градиента скалярного произведения и учитывая, что ротор градиента равен нулю, получим $(\mathbf{V} \cdot \nabla)(\nabla i) + ((\nabla i) \cdot \nabla)\mathbf{V} + (\nabla i) \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$. Дальнейшее доказательство повторяет часть доказательства леммы 1 после формулы (12), если только вместо вектора $\rho\mathbf{V}$ рассматривать вектор ∇i , а в качестве переменной l рассматривать переменную длину дуги вдоль линии тока. Приводить эту часть доказательства представляется излишним. \square

4. Завихренность в точке торможения. Вернемся к системе (9), (10) и предположим, что в точке торможения (и, следовательно, в некоторой ее окрестности) $F \neq 0$. Точка торможения есть точка растекания, и, следовательно, в некоторой ее окрестности величина функции Бернулли i постоянна на поверхности тела, а вектор ∇i ортогонален этой поверхности (допускается случай $\nabla i = 0$). При этом по условию задачи 1 в некоторой окрестности точки торможения скорость обращается в нуль только в точке торможения. Поэтому из первого уравнения (9) следует, что в некоторой окрестности точки торможения на поверхности тела вектор завихренности Ω лежит в касательной к поверхности плоскости всюду, кроме, может быть, точки торможения. Отсюда в силу непрерывности он лежит в касательной плоскости и в точке торможения. Таким образом, если предположить, что в точке торможения (и, следовательно, в некоторой ее окрестности) $\Omega \neq 0$, то существует участок вихревой линии, проходящий через точку торможения и целиком лежащий на поверхности тела. На этом участке есть точки с ненулевой скоростью и есть точка торможения. Это противоречит лемме 1. К этому противоречию привели два предположения, сделанные в данном разделе о том, что в точке торможения $F \neq 0$ и $\Omega \neq 0$. Поэтому если оставить в силе предположение $F \neq 0$, то в точке торможения должно быть $\Omega = 0$. Этот вывод будет использован в следующем разделе.

5. Завершение доказательства. Продолжим исследование, считая, что в точке торможения $F \neq 0$. Тогда в силу непрерывности это неравенство будет выполнено в некоторой замкнутой окрестности $\bar{G}_1 \subset \bar{G}$ точки торможения (точки внутри тела не рассматриваются). В этой окрестности вместо уравнения (9) можно рассматривать уравнение (11) и его следствие — уравнение (12).

Далее воспользуемся представлением о движении в \bar{G}_1 воображаемых частиц, основанном на критерии Зоравского [23, 24], который обобщает известные теоремы Гельмгольца о вихрях. В области G_1 рассмотрим течение воображаемой жидкости, частицы которой, в дальнейшем называемые q -частицами, движутся со скоростью \mathbf{q} (определение \mathbf{q} дано в доказательстве леммы 1). Эти q -частицы не взаимодействуют с газом и не влияют на течение газа. В стационарном случае из уравнения (12) с учетом $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$, согласно критерию Зоравского, следует, что q -частицы, составляющие сегмент векторной линии $\rho\mathbf{V}$ (т.е. сегмент линии тока газа), лежащий в области G_1 , в некоторый момент времени, двигаясь со скоростью \mathbf{q} , будут составлять сегмент одной из линий тока газа в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти q -частицы находятся в области G_1). Следует обратить внимание на то, что q -частицы, находящиеся на поверхности тела, находятся на границе области, и на них сформулированное выше следствие критерия Зоравского не распространяется.

Пусть C — точка на линии торможения AB ; (CB) — открытый сегмент линии торможения между точками C и B . Выберем точку C так, чтобы сегмент (CB) целиком лежал в \bar{G}_1 . Введем следующие обозначения: $Q(CB)$ — совокупность q -частиц, которые составляют открытый сегмент (CB) в момент времени t_0 ; $Q(CB]$ — совокупность q -частиц, которые составляют полуоткрытый (включающий точку B) сегмент $(CB]$ в момент времени t_0 ; $Q(B) \in Q(CB]$ — q -частица, которая находится в точке B в момент времени t_0 . Частицы $Q(CB]$ движутся со скоростью \mathbf{q} .

Движение q -частиц описывается автономной системой ОДУ, правая часть которой есть скорость \mathbf{q} . Если в качестве точки E в постановке задачи 1 рассматривать точку торможения, то без ограничения общности можно считать, что $H_2 \subset \bar{G}_1$. Как показано в [22], векторное поле \mathbf{q} можно так доопределить в H_3 , что в области, состоящей из внутренних точек множества $\bar{G}_1 \cup H_3$, будут выполнены все условия теоремы о непрерывной зависимости решения автономной системы ОДУ от начальных условий [21]. Это означает непрерывность линии, составленной из частиц $Q(CB]$ во время их движения.

Как было показано выше, завихренность в точке торможения (при условии, что в точке торможения $F \neq 0$) равна нулю: $\Omega = 0$. Вместе с ней равна нулю и скорость $\mathbf{q} = \alpha\Omega/(\rho F)$ воображаемой частицы, находящейся в точке торможения. Другими словами, q -частица $Q(B) \in Q(CB]$, находящаяся в точке торможения, неподвижна. Остальные q -частицы, т.е. $Q(CB)$, согласно критерию Зоравского, должны составлять линию тока газа, а q -частицы $Q(CB]$, согласно установленному выше, должны составлять непрерывную линию. В силу единственности линии торможения это возможно только, если частицы $Q(CB]$ составляют линию торможения, т.е. если они (во время своего движения) остаются на линии торможения. Поэтому частицы $Q(CB)$ или по-

¹⁰В этот момент q -частицы $Q(CB]$ составляют непрерывную кривую.

коятся, или движутся вдоль линии торможения. В любом случае это означает, что внутри $\overline{G_1}$ на линии торможения выполняется равенство $\mathbf{q} \times (\rho \mathbf{V}) = 0$ или, согласно (11), равенство $\nabla i = 0$. Из этого в силу единственности точки торможения на линии торможения (см. конец первого раздела) следует, что на линии торможения есть точка P с ненулевой скоростью \mathbf{V} , в которой $\nabla i = 0$. Далее, из единственности точки торможения на линии торможения следует, что на всей линии торможения от точки P до бесконечности ($x \rightarrow -\infty$), согласно лемме 2, градиент функции Бернулли должен быть равен нулю ($\nabla i = 0$). Но это противоречит (3). Противоречие возникло из предположения (сделанного в начале пятого раздела) о том, что в точке торможения $F \neq 0$. Поэтому в точке торможения должно выполняться равенство $F = 0$.

Таким образом, из двух предположений, сделанных в конце первого раздела, вытекает гипотетическое свойство решения задачи 1, состоящее в равенстве $F = 0$, т.е. в равенстве температур на «концах» линии торможения (в точке торможения и на линии торможения в невозмущенном потоке). Это означает, что $T_s = \tilde{T}_0(i_s)$, где T_s — температура в точке торможения, i_s — функция Бернулли в точке торможения (и на всей линии торможения). Однако по крайней мере при высотах полета ниже $V_0^2/(2g)$ (именно такие высоты рассматриваются в задаче 1) это свойство невыполнимо. Действительно, обозначим через z_{s0} вертикальную координату линии торможения в невозмущенном потоке, а через z_s — вертикальную координату точки торможения на теле. Значения функции Бернулли на линии торможения в невозмущенном потоке и в точке торможения совпадают:

$$k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_0(z_0) + V_0^2/2 + gz_{s0} = k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_s + 0^2/2 + g \cdot z_s,$$

или, учитывая равенство температур,

$$z_{s0} = z_s - V_0^2/(2g). \quad (13)$$

Это значит, что линия торможения должна начинаться в невозмущенном потоке ниже уровня точки торможения, расположенной на теле. При этом линия торможения должна начинаться выше уровня земли, и, следовательно, должно выполняться неравенство $z_1 < z_{s0} = z_s - V_0^2/(2g)$, которое, с учетом $z_s \leq 0$, противоречит условию $V_0 > \sqrt{2g|z_1|}$ (см. постановку задачи 1).

Итак, получено противоречие, вытекающее из предположений, сделанных в конце первого раздела. Следовательно, *если решение задачи 1 существует, то в нем отсутствует «правильная» линия торможения*. В этом парадоксальном свойстве состоит основной результат настоящей статьи.

Заметим, что в стандартной атмосфере Земли, например, при скоростях 150 м/с и 250 м/с, согласно (13), противоречие возникает при высотах полета ниже 1148 м и 3188 м соответственно.

6. Обсуждение некоторых условий, на которые опирается доказательство. Остановимся на двух ключевых моментах. Первым таким моментом является условие (3). Без него не возникло бы противоречия из предположения, что в точке торможения $F \neq 0$. Таким образом, например, для решения задачи обтекания не стратифицированным, а однородным потоком, предложенное в предыдущих главах доказательство не позволяет получить противоречие и прийти к парадоксу.

Второй момент – это предположение об отсутствии в некоторой окрестности линии торможения второй точки торможения. Это предположение исключает из рассмотрения плоскопараллельные течения, которые исключены при постановке задачи 1 требованием пространственной ограниченности обтекаемого тела. Дело в том, что плоскопараллельное течение состоит из «расположенных рядом друг с другом» плоскостей, в каждой из которых есть линия торможения и точка торможения. Поэтому нарушается предположение о том, что в некоторой окрестности линии торможения нет второй точки торможения. Это предположение было ключевым при доказательстве равенства нулю завихренности в точке торможения. Поэтому для плоскопараллельных течений предложенное в пятом разделе доказательство неприменимо и никаких парадоксальных выводов о свойстве решения «плоского» варианта задачи 1 сделать нельзя.

7. Случай отсутствия силы тяжести. Рассмотрим решение задачи, которая отличается от задачи 1 отсутствием силы тяжести. Если параметры стратификации таковы, что градиент невозмущенной температуры всюду отличается от нуля (т.е. или $dT_0/dz > 0$, или $dT_0/dz < 0$), то в отсутствие силы тяжести условие (3) будет выполнено. Поэтому приведенное выше доказательство можно повторить, и из двух предположений в конце первого раздела снова последует гипотетический вывод о равенстве температур $T_s = \tilde{T}_0(i_s)$. Как и выше, этот вывод приводит к противоречию. Действительно, равенство значений функции Бернулли на линии торможения в невозмущенном потоке и в точке торможения будет иметь вид

$$k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_0(z_0) + V_0^2/2 = k(k-1)^{-1}R\mu^{-1}T_s + 0^2/2.$$

Отсюда и из предположения $T_s = T_0(i_s)$ получается, что $V_0^2 = 0$. Но это невозможно при $V_0 > 0$. Следовательно, в отсутствие силы тяжести при $dT_0/dz \neq 0$, если решение существует, то в нем отсутствует «правильная» линия торможения при всех высотах полета.

Заключение. Общепринято, что при гладком стационарном обтекании гладкой выпуклой носовой части формируется линия торможения, в некоторой окрестности которой есть только одна точка торможения (на теле), а сама точка торможения является точкой растекания (т.е. все линии тока в некоторой ее окрестности на поверхности тела начинаются в этой точке). В статье такая линия торможения названа «правильной». Приведены примеры задач пространственного обтекания гладкого выпуклого тела идеальным газом, которые на первый взгляд должны иметь решения, но оказалось, что решения этих задач (если эти решения существуют) должны обладать одним парадоксальным свойством: у них должна отсутствовать «правильная» линия торможения. Если бы необходимость наличия «правильной» линии торможения в решении была строго обоснована, то можно было бы сделать вывод об отсутствии решений рассмотренных задач. Но поскольку обязательное наличие «правильной» линии торможения — всего лишь общепринятое предположение (для гладких выпуклых носовых частей), полученное выше свойство решения названо парадоксальным.

По мнению автора, этот парадокс означает, что решение задачи 1 существует только в рамках нестационарных уравнений Эйлера, т.е. когда вместо

системы (4), (5), используется система

$$\partial \mathbf{V} / \partial t - \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} = -\rho^{-1} \nabla p - \nabla(\mathbf{V}^2/2) - \mathbf{g}, \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0,$$

$$\partial(p\rho^{-k}) / \partial t + (\mathbf{V}, \nabla)(p\rho^{-k}) = 0$$

и параметры течения могут меняться со временем, оставаясь стационарными в набегающем потоке при $x \rightarrow -\infty$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.

Библиографический список

1. Сизых Г. Б. Винтовые вихревые линии в осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости // *ПММ*, 2019. Т. 83, № 3. С. 370–376. EDN: MNOFDE. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0032823519030135>.
2. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Инвариант линии торможения при стационарном обтекании тела завихренным потоком идеальной несжимаемой жидкости // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 780–789. EDN: HMRRXC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
3. Марков В. В., Сизых Г. Б. Критерий существования решения уравнений движения идеального газа для заданной винтовой скорости // *Известия вузов. ПНД*, 2020. Т. 28, № 6. С. 643–652. EDN: BEONTY. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
4. Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, California: Parabolic Press, 1982. 176 pp.
5. Матяш Е. С., Савельев А. А., Трошин А. И., Устинов М. В. Учет влияния сжимаемости газа в γ -модели ламинарно-турбулентного перехода // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2019. Т. 59, № 10. С. 1779–1791. EDN: FBKJJA. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919100119>.
6. Королев Г. Л. Стационарное вязкое обтекание эллиптического цилиндра до чисел Рейнольдса 900 // *Уч. зап. ЦАГИ*, 2012. Т. 43, № 5. С. 46–59. EDN: PDHYTV.
7. Egorov I. V., Fedorov A. V., Palchekovskaya N., Obraz A. O. Effects of injection on heat transfer and the boundary-layer instability for a hypersonic blunt body configuration // *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2020. vol. 149, 119197. EDN: RNXRVP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119197>.
8. Чувахов П. В., Егоров И. В. Численное моделирование эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое над углом разряжения // *Изв. РАН. МЖГ*, 2021. № 5. С. 49–60. EDN: TFRXIL. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0568528121050029>.
9. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
10. Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики*. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с. EDN: QJPLMV.
11. Ладыженский М. Д. *Пространственные гиперзвуковые течения газа*. М.: Машиностроение, 1968. 120 с.
12. Никольский А. А. *Теоретические исследования по механике жидкости и газа* / Тр. ЦАГИ. Т. 2122. М.: ЦАГИ, 1981. 286 с.
13. Миронюк И. Ю., Усов Л. А. Точки торможения на вихревых линиях в течениях идеального газа // *Труды МФТИ*, 2020. Т. 12, № 4. С. 171–176. EDN: GICTHX. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.

14. Сизых Г. Б. Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 6. С. 742–747. EDN: **SRMQIO**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521060102>.
15. Анкудинов А. Л. Кинетический ударный слой в плоскости растекания аппарата типа несущий корпус // *ПММ*, 2021. Т. 85, № 5. С. 615–625. EDN: **UZKDNE**. DOI: <https://doi.org/10.31857/S0032823521050027>.
16. Сизых Г. Б. Второе интегральное обобщение инварианта Крокко для 3D течений за отошедшим головным скачком // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 25, № 3. С. 588–595. EDN: **LRHSER**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
17. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: University Press, 1970. xviii+615 pp.
18. Сизых Г. Б. О линии торможения за отошедшим скачком уплотнения в плоских течениях // *Труды МФТИ*, 2022. Т. 14, № 4. С. 84–94.
19. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
20. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow* / Applied Mathematics and Mechanics. vol. 3. New York, London: Academic Press, 1958. xiii+514 pp.
21. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982. 332 с.
22. Сизых Г. Б. Решение задачи Дородницына // *Труды МФТИ*, 2022. Т. 14, № 4. С. 95–107. EDN: **TNNYSF**.
23. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950. vol. 1, no. 1. pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
24. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity* / Indiana University Publications Science Seres. vol. 14. Bloomington: Indiana University Press, 1954. xvii+232 pp.

MSC: 76N15, 76G25

On a paradoxical property of solving the problem of stationary flow around a body by a subsonic stratified flow of an ideal gas

G. B. Sizykh

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University),

9, Institutskiy per., Dolgoprudny, 141700, Russian Federation.

Abstract

The problem of flow around a smooth convex body moving horizontally at a constant subsonic velocity in a stratified atmosphere at rest consisting of an ideal gas is considered. By the condition of the problem, the (vertical) gradient of the Bernoulli function (taking into account the potential energy of a uniform gravity field) in the atmosphere at rest at all altitudes is nonzero (as is the case in the Earth's standard atmosphere at altitudes up to 51 km), and the flight altitude does not exceed a value equal to the square of the body's flight speed divided by twice the acceleration of gravity. The surface of the earth is considered flat. The coordinate system associated with the body is used. The general spatial case is considered (an asymmetric body or a symmetric body at an angle of attack). We use the generally accepted assumption that in some neighborhood of the stagnation streamline (streamline that ends on the body at the forward stagnation point) there is no second stagnation point, the flow parameters in this neighborhood are twice continuously differentiable, and the stagnation point is spreading point (i.e. in some neighborhood of it, all streamlines on the surface of the body start at this point). Based on a rigorous analysis of the Euler equations, it is shown that the existence of a stationary solution to the problem contradicts this generally accepted (but not strictly proven) idea of the stagnation streamline. This property of the solution of the problem is called paradoxical and casts doubt on the existence of the solution.

Keywords: stratified atmosphere, existence of a stationary solution, Euler equations, stagnation streamline, forward stagnation point.

Received: 18th October, 2022 / Revised: 5th December, 2022 /

Accepted: 7th December, 2022 / First online: 23rd December, 2022

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Sizykh G. B. On a paradoxical property of solving the problem of stationary flow around a body by a subsonic stratified flow of an ideal gas, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 142–158. EDN: XZCBC0. DOI: [10.14498/vsgtu1963](https://doi.org/10.14498/vsgtu1963) (In Russian).

Author's Details:

Grigory B. Sizykh  <https://orcid.org/0000-0001-5821-8596>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Associate Professor; Dept. of Higher Mathematics;

e-mail: olo2o3@yandex.ru

Competing interests. I have no competing interests.

Authors' contributions and responsibilities. The author assumes full responsibility for the submission of the final manuscript in print. I approve the final version of the manuscript.

Funding. The research has not received funding.

Acknowledgments. The author thanks the referee for careful reading of the paper and for valuable suggestions and comments.

References

1. Sizykh G. B. Helical vortex lines in axisymmetric viscous incompressible fluid flows, *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, no. 8, pp. 1038–1042. EDN: WHGVGS. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462818060083>.
2. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. The invariant of stagnation streamline for a stationary vortex flow of an ideal incompressible fluid around a body, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 780–789 (In Russian). EDN: HMRRXC. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1815>.
3. Markov V. V., Sizykh G. B. Existence criterion for the equations solution of ideal gas motion at given helical velocity, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 28, no. 6, pp. 643–652 (In Russian). EDN: BEONTY. DOI: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2020-28-6-643-652>.
4. Van Dyke M. *An Album of Fluid Motion*. Stanford, California, Parabolic Press, 1982, 176 pp.
5. Matyash E. S., Savelyev A. A., Troshin A. I., Ustinov M. V. Allowance for gas compressibility in the γ -model of the laminar-turbulent transition, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 6, pp. 1720–1731. EDN: PHGAXX. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542519100117>.
6. Korolev G. L. Steady viscous flow past an elliptic cylinder up to Reynolds number 900, *TsAGI Science Journal*, 2012, vol. 43, no. 5, pp. 615–635. DOI: <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2013007000>.
7. Egorov I. V., Fedorov A. V., Palchekovskaya N., Obraz A. O. Effects of injection on heat transfer and the boundary-layer instability for a hypersonic blunt body configuration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2020, vol. 149, 119197. EDN: RNXRVP. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119197>.
8. Chuvakhov P. V., Egorov I. V. Numerical simulation of disturbance evolution in the supersonic boundary layer over an expansion corner, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 645–656. EDN: ZYLZDV. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821050025>.
9. Loitsyansky L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, vol. 6. Oxford, Pergamon Press, 1966, xii+804 pp.
10. Ovsyannikov L. V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on Basic Gas Dynamics]. Moscow, Izhevsk, Institute of Computer Studies, 2003, 336 pp. (In Russian). EDN: QJPLMV
11. Ladyzhenskii M. D. *Prostranstvennye giperzvukovye techeniia gaza* [Spatial Hypersonic Gas Flows]. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 120 pp. (In Russian)
12. Nikol'skii A. A. *Teoreticheskie issledovaniia po mekhanike zhidkosti i gaza* [Theoretical Studies in Fluid and Gas Mechanics], Tr. TsAGI, vol. 2122. Moscow, TsAGI, 1981, 286 pp. (In Russian)
13. Mironyuk I. Yu., Usov L. A. Stagnation points on vortex lines in flows of an ideal gas, *Proc. of MIPT*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 171–176 (In Russian). EDN: GICTHX. DOI: https://doi.org/10.53815/20726759_2020_12_4_171.
14. Sizykh G. B. Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1027–1030. EDN: FWLWLT. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821080097>.

15. Ankudinov A. L. A kinetic shock layer in the spreading plane of a lifting-body apparatus, *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 967–974. EDN: XDTFTI. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462821070028>.
16. Sizykh G. B. Second integral generalization of the Crocco invariant for 3D flows behind detached bow shock wave, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, vol. 25, no. 3, pp. 588–595 (In Russian). EDN: LRHSER. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1861>.
17. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, University Press, 1970, xviii+615 pp.
18. Sizykh G. B. The stagnation line behind a detached bow shock wave in plane flows, *Proc. of MIPT*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 84–94 (In Russian).
19. Sedov L. I. *A Course in Continuum Mechanics*, vol. 1, Basic Equations and Analytical Techniques. Groningen, The Netherlands, Wolters-Noordhoff Publ., 1971, xix+242 pp.
20. Mises R. *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Applied Mathematics and Mechanics, vol. 3. New York, London, Academic Press, 1958, xiii+514 pp.
21. Pontryagin L. S. *Ordinary Differential Equations*, Adiwes International Series in Mathematics. London, Paris, Pergamon Press, 1962, vi+298 pp.
22. Sizykh G. B. Solution of the Dorodnitsin problem, *Proc. of MIPT*, 2022, vol. 14, no. 4, pp. 95–107 (In Russian).
23. Prim R., Truesdell C. A derivation of Zorawski's criterion for permanent vector-lines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 1, pp. 32–34. DOI: <https://doi.org/10.2307/2032429>.
24. Truesdell C. *The Kinematics of Vorticity*, Indiana University Publications Science Series, vol. 14. Bloomington, Indiana University Press, 1954, xvii+232 pp.



УДК 539.3

Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэластостатики для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины

Д. А. Шляхин, Е. В. Савинова

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Аннотация

Построено новое замкнутое решение связанной нестационарной осесимметричной задачи термоэластостатики для круглой аксиально поляризованной шарнирно закрепленной пьезокерамической пластины в трехмерной постановке. Ее цилиндрическая поверхность шарнирно закреплена. Рассматривается случай изменения температуры на цилиндрической поверхности и лицевых плоскостях пластины (граничные условия теплопроводности 1-го рода). Лицевые электродированные поверхности конструкции подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (электрический холостой ход).

Исследуется пластина, геометрические размеры которой и скорость изменения температурной нагрузки не оказывают существенного влияния на инерционные характеристики электроупругой системы, что позволяет использовать при математической формулировке задачи уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. При этом исходные расчетные соотношения формируют несамосопряженную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Решение задачи осуществляется с помощью последовательного использования интегрального преобразования Ханкеля по радиальной координате и обобщенного метода биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) по аксиальной переменной. При этом на каждом этапе исследования выполняется процедура стандартизации, связанная с приведением соответствующих неоднородных граничных

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

    Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International \(https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

Образец для цитирования

Шляхин Д. А., Савинова Е. В. Связанная нестационарная осесимметричная задача термоэластостатики для круглой пьезокерамической шарнирно закрепленной пластины // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 159–178. EDN: **WXLOUH**. DOI: [10.14498/vsgtu1959](https://doi.org/10.14498/vsgtu1959).

Сведения об авторах

Дмитрий Аверкиевич Шляхин  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>

доктор технических наук, доцент; зав. кафедрой; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

Елена Владимировна Савинова   <https://orcid.org/0000-0001-7155-2281>

аспирант; старший преподаватель; каф. строительной механики, инженерной геологии, оснований и фундаментов; e-mail: slenax@yandex.ru

условий к однородным. Использование структурного алгоритма КИП позволяет построить сопряженный оператор, без которого невозможно осуществить решение несамосопряженных линейных задач путем разложения по собственным вектор-функциям.

Построенные расчетные соотношения дают возможность определить напряженно-деформированное состояние, температурное и электрическое поля, индуцируемые в пьезокерамическом элементе при произвольном температурном внешнем воздействии, а также проанализировать влияние скоростей изменения объема тела и напряженности на температурное поле.

Ключевые слова: задача термоэластостатики, связанная задача, круглая пьезокерамическая пластина, биортогональные конечные интегральные преобразования.

Получение: 5 октября 2022 г. / Исправление: 19 декабря 2022 г. /

Принятие: 27 декабря 2022 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Введение. Для бесконтактного определения температуры широкое применение получили тепловые датчики [1, 2], основным элементом в которых является пьезокерамический элемент. Для описания их работы и повышения функциональных возможностей возникает необходимость углубленного анализа нестационарных процессов, без которого невозможно понять взаимодействие температурных, электрических и упругих полей. При решении данной проблемы используются различные теории термоэластостатики [3,4], в которых математическая формулировка включает систему несамосопряженных дифференциальных уравнений в частных производных.

Для наиболее точного учета эффекта связанности термоэластостатических полей на первый план выходят методы, позволяющие получить замкнутые решения нестационарных краевых задач в трехмерной постановке. При этом для преодоления математических трудностей в случае интегрирования исходной системы уравнений используются различные упрощения: исследуются стационарные задачи, рассматриваются в несвязанной постановке или анализируются конструкции с вырожденной геометрией.

В частности, в статье [5] рассматривается несвязанная стационарная осесимметричная задача для длинного электроупругого цилиндра. В работе [6] изложен подход к решению трехмерных статических задач для изотропного тела и систематизированы решения для пьезокерамических тел канонической формы.

В работе [7] в несвязанной постановке рассматривается толстостенный шар с короткозамкнутыми электродированными поверхностями при наличии на его внутренней поверхности осесимметричной механической и температурной (граничные условия теплопроводности 1-го рода) нагрузки. В статьях [8, 9] исследуется нестационарная задача радиально поляризованного функционально градуированного пьезоэлектрического полого цилиндра. Исследования [10, 11] посвящены построению решения несвязанных задач для пьезокерамической оболочки и круглой пластины при удовлетворении на лицевых поверхностях граничных условий теплопроводности 1-го и 3-го рода.

Связанные нестационарные задачи термоэластостатики для однородного и неоднородного пьезокерамического слоя рассматривались в работах

[12–14], а в статьях [15, 16] объектом исследования являлась неограниченная среда. Работы [17, 18] посвящены анализу связанных нестационарных полей в длинном пьезокерамическом цилиндре. В статье [19] рассмотрена нелинейная одномерная задача термоэлектроупругости с термической релаксацией.

Целью настоящей работы является построение нового замкнутого решения нестационарной осесимметричной задачи термоэлектроупругости для шарнирно закрепленной круглой пьезокерамической пластины с учетом связанности механических, электрических и температурных полей при удовлетворении граничных условий теплопроводности 1-го рода. При этом ограничение по скорости изменения температуры на ее лицевой поверхности [11] позволяет использовать в расчетных соотношениях уравнения равновесия.

1. Постановка задачи. Круглая сплошная однородная шарнирно закрепленная пьезокерамическая пластина в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) занимает область $\Omega : \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h^*\}$, где b, h^* — радиус и толщина. Рассматривается случай нестационарного изменения температуры $\omega_1^*(r_*, t_*)$, $\omega_2^*(r_*, t_*)$, $\omega_3^*(t_*)$ соответственно на ее верхней ($z_* = 0$) и нижней ($z_* = h^*$) лицевых плоскостях, а также на цилиндрической ($r_* = b$) поверхности; t_* — время. Лицевые электродированные поверхности пластины подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (рис. 1), при этом нижний электрод заземлен. Пренебрежимо малая толщина электродного металлопокрытия по сравнению с высотой пластины позволяет учитывать его только при формировании электрических граничных условий.

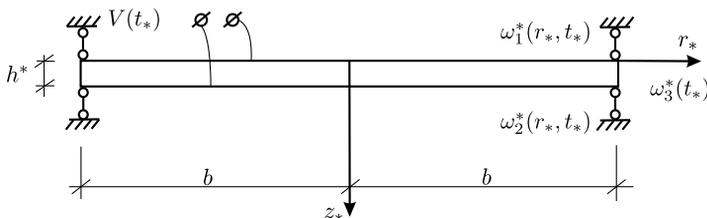


Рис. 1. Расчетная схема для закрепленной пьезокерамической пластины
 [Fig. 1. Calculation scheme for a fixed piezoceramic plate]

Математическая формулировка рассматриваемой задачи термоэлектроупругости включает в себя систему дифференциальных уравнений для аксиально поляризованного трансверсально-изотропного пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой и следующие краевые условия данной задачи в безразмерной форме [20]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial r} \nabla U + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \\
 & a_1 \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_2 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_5 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} + a_6 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \\
 & -\nabla \frac{\partial \phi}{\partial r} - a_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_9 \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + a_{10} \nabla \frac{\partial W}{\partial r} + a_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + a_{12} \nabla \Theta + a_{13} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \\
 & \nabla \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta + a_{14} \left(\nabla U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0;
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \{U, W, \phi, \Theta\}|_{r=0} < \infty, \quad \{W, \phi\}|_{r=1} = 0, \quad \Theta|_{r=1} = \omega_3, \\ \left\{ \frac{\partial U}{\partial r} + a_{16} \frac{U}{r} + a_{17} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Theta \right\}|_{r=1} = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \left(a_{17} \nabla U + a_4 \frac{\partial W}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_7 \Theta \right)|_{z=0,h} = 0, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)|_{z=0,h} = 0, \\ \left(-a_8 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} \nabla U + a_{11} \frac{\partial W}{\partial z} + a_{13} \Theta \right)|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=h} = 0, \quad \Theta|_{z=0} = \omega_1, \quad \Theta|_{z=h} = \omega_2; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\{U, W, \phi, \Theta\}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \{U, W, \phi\}}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t}|_{t=0} = \dot{\Theta}_0. \quad (4)$$

В равенствах (1)–(4) использованы следующие обозначения:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \{U, W, r, z\} = \frac{1}{b} \{U^*, W^*, r_*, z_*\}, \quad \phi = \frac{e_{31}}{C_{11}b} \phi^*,$$

$$t = \frac{\Lambda}{kb^2} t_*, \quad \Theta = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} \Theta^*, \quad \Theta^* = T - T_0, \quad \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \frac{\gamma_{11}}{C_{11}} [\{\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*\} - T_0];$$

$$a_1 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad a_2 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}}, \quad a_3 = \frac{e_{15} + e_{31}}{e_{31}}, \quad a_4 = \frac{C_{33}}{C_{11}}, \quad a_5 = \frac{e_{15}}{e_{31}},$$

$$a_6 = \frac{e_{33}}{e_{31}}, \quad a_7 = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}, \quad a_9 = \frac{e_{31}(e_{15} + e_{31})}{C_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{10} = \frac{e_{15}e_{31}}{C_{11}\varepsilon_{11}},$$

$$a_{11} = a_{10} \frac{e_{33}}{e_{15}}, \quad a_{12} = \frac{g_{11}e_{31}}{\gamma_{11}\varepsilon_{11}}, \quad a_{13} = a_{12} \frac{g_{33}}{g_{11}}, \quad a_{14} = T_0 \frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{C_{11}k},$$

$$a_{15} = T_0 \frac{g_{33}\gamma_{11}}{e_{31}k}, \quad a_{16} = \frac{C_{12}}{C_{11}}, \quad a_{17} = \frac{C_{13}}{C_{11}},$$

где ∇ — дифференциальный оператор; $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$, $\Theta^*(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и приращение температуры в размерной форме; C_{ms} , e_{ms} , ε_{11} , ε_{33} — модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала, $m, s = \bar{1}, \bar{3}$; γ_{11} , γ_{33} — компоненты тензора температурных напряжений, $\gamma_{11} = C_{11}\alpha_t$, $\gamma_{33} = C_{33}\alpha_t$; Λ , k , α_t — коэффициенты теплопроводности, объемной теплоемкости и линейного температурного расширения материала; g_{11} , g_{33} — компоненты тензора пироккоэффициентов; T , T_0 — соответственно текущая температура и температура первоначального состояния тела; $\dot{\Theta}_0$ — известная в начальный момент скорость изменения температуры.

Последнее условие (2) и первые две зависимости (3) соответственно учитывают отсутствие механических напряжений на цилиндрической и лицевых поверхностях. Равенство $\phi|_{r=1} = 0$ учитывает отсутствие свободных электрических зарядов вследствие аксиальной поляризации материала. Условия (4) предполагают, что в начальный момент времени конструкция имеет температуру T_0 и находится в недеформированном состоянии.

Напряжение холостого хода $V(t_*)$ определяется зависимостью

$$V^*(t_*) = \frac{2}{b^2} \int_0^b \phi^*(r_*, 0, t_*) r_* dr$$

с учетом заземления нижней лицевой поверхности пьезокерамического элемента.

2. Построение общего решения. Для использования преобразования Ханкеля по радиальной координате необходимо принять $C_{11} = C_{12}$ ($a_{16} = 1$) и привести неоднородное граничное условие (2) на цилиндрической поверхности к однородному путем введения новых функций $u(r, z, t)$, $\Phi(r, z, t)$, связанных с $U(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ следующими зависимостями:

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + \Phi(r, z, t), \quad U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + u(r, z, t). \quad (5)$$

В результате подстановки (5) в (1)–(4) получаем новую краевую задачу относительно функций u , W , ϕ , Φ . При этом второе и третье уравнения (1), а также граничные (2) и начальные условия (4), включающие функции U , Θ , становятся неоднородными соответственно с правыми частями $F_1, F_2, B_1, \dots, B_4, u_0, \dot{u}_0, \Phi_0, \dot{\Phi}_0$ следующего вида:

$$\begin{aligned} F_1 &= -a_{12} r^{-1} \omega_3, & F_2 &= (1 + a_{14}) \frac{d\omega_3}{dt}, & B_1 &= (a_7 - a_{17}) \omega_3, \\ B_2 &= -\left(a_{13} + \frac{a_{10}}{a_5}\right) \omega_3, & B_3 &= \omega_1 - \omega_3, & B_4 &= \omega_2 - \omega_3, & u_0 &= -\frac{r}{2} \omega_3(0), \\ \dot{u}_0 &= -\frac{r}{2} \frac{d\omega_3}{dt} \Big|_{t=0}, & \Phi_0 &= -\omega_3(0), & \dot{\Phi}_0 &= \dot{\Theta}_0 - \frac{d\omega_3}{dt} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

а граничные условия (2) принимают вид

$$\{u, W, \phi, \Phi\}|_{r=0} < \infty, \quad \{W, \phi, \Phi\}|_{r=1} = 0, \quad \left\{ \nabla u + a_{17} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} - \Phi \right\} \Big|_{r=1} = 0.$$

Введем на сегменте $[0, 1]$ однокомпонентное интегральное преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r при использовании следующих трансформант:

$$\begin{aligned} u_H(n, z, t) &= \int_0^1 u(r, z, t) r J_1(j_n r) dr, \\ \{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\} &= \\ &= \int_0^1 \{W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Phi(r, z, t)\} r J_0(j_n r) dr, \end{aligned}$$

и формул обращения

$$u(r, z, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n, z, t)}{J_1(j_n)^2} J_1(j_n r),$$

$$\begin{aligned} & \{W(r, z, t), \phi(r, z, t), \Theta(r, z, t)\} = \\ & = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{w_H(n, z, t), \phi_H(n, z, t), \Theta_H(n, z, t)\}}{J_1(j_n)^2} J_0(j_n r), \end{aligned} \quad (6)$$

где j_n – положительные нули (корни) функции $J_0(j_n)$, $J_\nu(\cdot)$ – функции Бесселя первого рода порядка ν .

В результате использования алгоритма преобразования получается начально-краевая задача относительно трансформант Ханкеля:

$$\begin{aligned} & -j_n^2 u_H + a_1 \frac{\partial^2 u_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + j_n \Theta_H = 0, \\ & -a_1 j_n^2 w_H + a_4 \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \phi_H + a_6 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = 0, \\ & j_n^2 \phi_H - a_8 \frac{\partial^2 \phi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial u_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 w_H + a_{11} \frac{\partial^2 w_H}{\partial z^2} + a_{12} j_n \Theta_H + a_{13} \frac{\partial \Theta_H}{\partial z} = F_{1H}, \\ & -j_n^2 \Theta_H + \frac{\partial^2 \Theta_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Theta_H + a_{14} \left(j_n u_H + \frac{\partial w_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \phi_H}{\partial z} \right] = F_{2H}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left(a_{17} j_n u_H + a_4 \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} - a_7 \Theta_H \right) \Big|_{z=0,h} = B_{1H}, \quad \left(\frac{\partial u_H}{\partial z} - j_n w_H \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\ & \left(-a_8 \frac{\partial \phi_H}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n u_H + a_{11} \frac{\partial w_H}{\partial z} + a_{13} \Theta_H \right) \Big|_{z=0} = B_{2H}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\phi_H|_{z=h} = 0, \quad \Theta_H|_{z=0} = B_{3H}, \quad \Theta_H|_{z=h} = B_{4H};$$

$$\begin{aligned} & u_H|_{t=0} = u_{0H}, \quad \Theta_H|_{t=0} = \Theta_{0H}, \quad \{w_H, \phi_H\}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_{0H}, \\ & \frac{\partial \{u_H, w_H\}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\Theta}_{0H}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} & \{u_{0H}, \dot{u}_{0H}\} = \int_0^1 \{u_0, \dot{u}_0\} r J_1(j_n r) dr, \\ & \{F_{1H}, F_{2H}, B_{1H}, B_{2H}, B_{3H}, B_{4H}, \Theta_{0H}, \dot{\Theta}_{0H}\} = \\ & = \int_0^1 \{F_1, F_2, B_1, B_2, B_3, B_4, \Phi_0, \dot{\Phi}_0\} r J_0(j_n r) dr. \end{aligned}$$

На следующем этапе решения выполняется процедура приведения расчетных соотношений (7)–(9) к виду, позволяющему в дальнейшем использовать метод конечных биортогональных интегральных преобразований [21]. Для этого вводятся новые функции $U_H(n, z, t)$, $W_H(n, z, t)$, $\varphi_H(n, z, t)$, $\Phi_H(n, z, t)$, связанные с $u_H(n, z, t)$, $w_H(n, z, t)$, $\phi_H(n, z, t)$, $\Theta_H(n, z, t)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} & u_H(n, z, t) = H_1(n, z, t) + U_H(n, z, t), \quad w_H(n, z, t) = H_2(n, z, t) + W_H(n, z, t), \\ & \phi_H(n, z, t) = H_3(n, z, t) + \varphi_H(n, z, t), \quad \Theta_H(n, z, t) = H_4(n, z, t) + \Phi_H(n, z, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \{H_1, H_2, H_3, H_4\} = & \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), f_4(z)\}B_{1H}(0, t) + \\ & + \{f_5(z), f_6(z), f_7(z), f_8(z)\}B_{1H}(h, t) + \\ & + \{f_9(z), f_{10}(z), f_{11}(z), f_{12}(z)\}B_{2H}(0, t) + \\ & + \{f_{13}(z), f_{14}(z), f_{15}(z), f_{16}(z)\}B_{3H}(0, t) + \\ & + \{f_{17}(z), f_{18}(z), f_{19}(z), f_{20}(z)\}B_{4H}(h, t), \end{aligned}$$

$f_1(z), \dots, f_{20}(z)$ — дважды дифференцируемые функции.

Подстановка (10) в (7)–(9) при удовлетворении условий для случая $z = 0, h$:

$$\begin{aligned} \left(a_{17}j_n H_1 + a_4 \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_6 \frac{\partial H_3}{\partial z} - a_7 H_4 \right) \Big|_{z=0, h} = B_{1H}, \quad j_n H_2 - \frac{\partial H_1}{\partial z} = 0, \\ H_3|_{z=h} = 0, \quad \left(-a_8 \frac{\partial H_3}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n H_1 + a_{11} \frac{\partial H_2}{\partial z} + a_{13} H_4 \right) \Big|_{z=0} = B_{2H}, \\ H_4|_{z=0} = B_{3H}, \quad H_4|_{z=h} = B_{4H} \end{aligned} \quad (11)$$

позволяет получить начально-краевую задачу относительно функций $U_H(n, z, t)$, $W_H(n, z, t)$, $\varphi_H(n, z, t)$, $\Phi_H(n, z, t)$ с однородными граничными условиями:

$$\begin{aligned} -j_n^2 U_H + a_1 \frac{\partial^2 U_H}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_3 j_n \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + j_n \Phi_H = F_{1H}^*, \\ -a_1 j_n^2 W_H + a_4 \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_5 j_n^2 \varphi_H + a_6 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} - a_7 \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = F_{2H}^*, \\ j_n^2 \varphi_H - a_8 \frac{\partial^2 \varphi_H}{\partial z^2} + a_9 j_n \frac{\partial U_H}{\partial z} - a_{10} j_n^2 W_H + a_{11} \frac{\partial^2 W_H}{\partial z^2} + \\ + a_{12} j_n \Phi_H + a_{13} \frac{\partial \Phi_H}{\partial z} = F_{3H}^*, \\ -j_n^2 \Phi_H + \frac{\partial^2 \Phi_H}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] = F_{4H}^*; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(a_{17}j_n U_H + a_4 \frac{\partial W_H}{\partial z} + a_6 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} - a_7 \Phi_H \right) \Big|_{z=0, h} = 0, \quad \left(\frac{\partial U_H}{\partial z} - j_n W_H \right) \Big|_{z=0, h} = 0,$$

$$\left(-a_8 \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n U_H + a_{11} \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad (13)$$

$$\varphi_H|_{z=h} = \Phi_H|_{z=0} = \Phi_H|_{z=h} = 0;$$

$$U_H|_{t=0} = U_{0H}, \quad W_H|_{t=0} = W_{0H}, \quad \varphi_H|_{t=0} = \varphi_{0H}, \quad \Phi_H|_{t=0} = \Phi_{0H},$$

$$\frac{\partial U_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{U}_{0H}, \quad \frac{\partial W_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{W}_{0H}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_{0H}, \quad \frac{\partial \Phi_H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\Phi}_{0H};$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{1H}^* &= j_n^2 H_1 - a_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} + a_2 j_n \frac{\partial H_2}{\partial z} - a_3 j_n \frac{\partial H_3}{\partial z} - j_n H_4, \\
 F_{2H}^* &= a_1 j_n^2 H_2 - a_4 \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_2 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_5 j_n^2 H_3 - a_6 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} + a_7 \frac{\partial H_4}{\partial z}, \\
 F_{3H}^* &= F_{1H} - j_n^2 H_3 + a_8 \frac{\partial^2 H_3}{\partial z^2} - a_9 j_n \frac{\partial H_1}{\partial z} + a_{10} j_n^2 H_2 - \\
 &\quad - a_{11} \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - a_{12} j_n H_4 - a_{13} \frac{\partial H_4}{\partial z}, \\
 F_{4H}^* &= F_{2H} + j_n^2 H_4 - \frac{\partial^2 H_4}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \\
 &\quad \times \left[H_4 + a_{14} \left(j_n H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial H_3}{\partial z} \right]; \\
 U_{0H} &= u_{0H} - H_1|_{t=0}, \quad W_{0H} = -H_2|_{t=0}, \\
 \varphi_{0H} &= -H_3|_{t=0}, \quad \Phi_{0H} = \Theta_{0H} - H_4|_{t=0}, \\
 \dot{U}_{0H} &= \dot{u}_{0H} - \frac{\partial H_1}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{W}_{0H} = -\frac{\partial H_2}{\partial t} \Big|_{t=0}, \\
 \dot{\varphi}_{0H} &= -\frac{\partial H_3}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \dot{\Phi}_{0H} = \dot{\Theta}_{0H} - \frac{\partial H_4}{\partial t} \Big|_{t=0}.
 \end{aligned}$$

Начально-краевую задачу (12)–(14) решаем, используя структурный алгоритм вырожденного биортогонального конечного интегрального преобразования (КИП) [21]. Для этого вводим на сегменте $[0, h]$ КИП с неизвестными компонентами собственных вектор-функций ядер преобразований $K_m(\lambda_{in}, z)$, $N_m(\mu_{in}, z)$, $m = \overline{1, 4}$:

$$\begin{aligned}
 G(n, \lambda_{in}, t) &= \int_0^h \left[\Phi_H + a_{14} \left(j_n U_H + \frac{\partial W_H}{\partial z} \right) - a_{15} \frac{\partial \varphi_H}{\partial z} \right] K_4(\lambda_{in}, z) dz, \\
 \{U_H, W_H, \varphi_H, Y_H\} &= \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) \frac{\{N_1(\mu_{in}, z), N_2(\mu_{in}, z), N_3(\mu_{in}, z), N_4(\mu_{in}, z)\}}{\|K_{in}\|^2}, \quad (15) \\
 \|K_{in}\|^2 &= \int_0^h K_4(\lambda_{in}, z) N_4(\mu_{in}, z) dz,
 \end{aligned}$$

где λ_{in} , μ_{in} — собственные значения соответствующих однородных линейных краевых задач относительно сопряженных $K_k(\lambda_{in}, z)$ и инвариантных $N_k(\mu_{in}, z)$ компонент вектор-функций ядер КИП, $k = \overline{1, 4}$.

Особенность данного преобразования заключается в том, что трансформанта и формулы обращения (15) содержат различные ядровые вектор-функции $K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_k(\mu_{in}, z)$.

Согласно процедуре преобразования формируется счетное множество задач для трансформанты $G(n, \lambda_{in}, t)$ вида

$$\left(\frac{d}{dt} + \lambda_{in}^2 \right) G(n, \lambda_{in}, t) = -F_H(n, \lambda_{in}, t), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad n = \overline{0, \infty};$$

$$G(\lambda_{in}, n, t)|_{t=0} = G_{0H},$$

решение которых имеет вид

$$G(n, \lambda_{in}) = G_0 \exp(-\lambda_{in}^2 t) - \int_0^t F_H(n, \lambda_{in}, \tau) \exp[\lambda_{in}^2(\tau - t)] d\tau, \quad (16)$$

и две однородные задачи относительно компонент ядра преобразования $K_k(\lambda_{in}, z)$, $k = \overline{1, 4}$:

$$\begin{aligned} -j_n^2 K_{1in} + a_1 \frac{d^2 K_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dK_{2in}}{dz} - a_9 j_n \frac{dK_{3in}}{dz} + \lambda_{in}^2 a_{14} j_n K_{4in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 K_{2in} + a_4 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 K_{3in} + \\ &+ a_{11} \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - \lambda_{in}^2 a_{14} \frac{dK_{4in}}{dz} = 0, \\ j_n^2 K_{3in} - a_8 \frac{d^2 K_{3in}}{dz^2} - a_3 j_n \frac{dK_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 K_{2in} + \\ &+ a_6 \frac{d^2 K_{2in}}{dz^2} + \lambda_{in}^2 a_{15} \frac{dK_{4in}}{dz} = 0, \\ (\lambda_{in}^2 - j_n^2) K_{4in} + \frac{d^2 K_{4in}}{dz^2} + j_n K_{1in} + a_7 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{12} j_n K_{3in} - a_{13} \frac{dK_{3in}}{dz} &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \left(a_{17} j_n K_{1in} + a_4 \frac{dK_{2in}}{dz} + a_{11} \frac{dK_{3in}}{dz} \right) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ \left(\frac{dK_{1in}}{dz} - j_n K_{2in} - \frac{a_{10}}{a_1} j_n K_{3in} \right) \Big|_{z=0, h} &= 0, \\ \left(-a_8 \frac{dK_{3in}}{dz} - a_3 j_n K_{1in} + a_6 \frac{dK_{2in}}{dz} \right) \Big|_{z=0} &= 0, \\ K_{3in}|_{z=h} = K_{4in}|_{z=0} = K_{4in}|_{z=h} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

и компонент $N_k(\mu_{in}, z)$, $k = \overline{1, 4}$:

$$\begin{aligned} -j_n^2 N_{1in} + a_1 \frac{d^2 N_{1in}}{dz^2} - a_2 j_n \frac{dN_{2in}}{dz} + a_3 j_n \frac{dN_{3in}}{dz} + j_n N_{4in} &= 0, \\ -a_1 j_n^2 N_{2in} + a_4 \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + a_2 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_5 j_n^2 N_{3in} + \\ &+ a_6 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} - a_7 \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\ j_n^2 N_{3in} - a_8 \frac{d^2 N_{3in}}{dz^2} + a_9 j_n \frac{dN_{1in}}{dz} - a_{10} j_n^2 N_{2in} + a_{11} \frac{d^2 N_{2in}}{dz^2} + \\ &+ a_{12} j_n N_{4in} + a_{13} \frac{dN_{4in}}{dz} = 0, \\ -j_n^2 N_{4in} + \frac{d^2 N_{4in}}{dz^2} + \mu_{in}^2 \left(N_{4in} + a_{14} j_n N_{1in} + a_{14} \frac{dN_{2in}}{dz} - a_{15} \frac{dN_{3in}}{dz} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(a_{17} j_n N_{1in} + a_4 \frac{dN_{2in}}{dz} + a_6 \frac{dN_{3in}}{dz} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\
 & \left(\frac{\partial N_{1in}}{\partial z} - j_n N_{2in} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\
 & \left(-a_8 \frac{dN_{3in}}{dz} + \frac{a_{10}}{a_5} j_n N_{1in} + a_{11} \frac{dN_{2in}}{dz} \right) \Big|_{z=0} = 0, \\
 & N_{3in}|_{z=h} = N_{4in}|_{z=0} = N_{4in}|_{z=h} = 0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_H(n, \lambda_{in}, t) &= \int_0^h (F_1 K_{1in} + F_2 K_{2in} + F_3 K_{3in} + F_4 K_{4in}) dz, \\
 G_{0H} &= \int_0^h \left[\Phi_{0H} + a_{14} \left(j_n U_{0H} + \frac{dW_{0H}}{dz} \right) - a_{15} \frac{d\varphi_{0H}}{dz} \right] K_{4in} dz.
 \end{aligned}$$

Построенная однородная задача (19), (20) относительно функций $N_k(\mu_{in}, z)$, $k = \overline{1,4}$, является сопряженной по отношению к исходным расчетным соотношениям (12), (13).

Системы (17), (19) приводятся к следующим дифференциальным уравнениям относительно $K_2(\lambda_{in}, z)$, $N_2(\mu_{in}, z)$:

$$\left(\frac{d^8}{dz^8} + e_{1in} \frac{d^6}{dz^6} + e_{2in} \frac{d^4}{dz^4} + e_{3in} \frac{d^2}{dz^2} + e_{4in} \right) \{K_{2in}, N_{2in}\} = 0, \tag{21}$$

левые части которых можно разложить на следующие коммутативные сомножители:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - A_{1in}^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} + A_{2in}^2 \right) \left(\frac{d^4}{dz^4} + m_{3in}^2 \frac{d^2}{dz^2} + m_{4in}^2 \right) \{K_{2in}, N_{2in}\} = 0, \tag{22}$$

где

$$A_{1in} = \sqrt{B_{1in}}, \quad A_{2in} = \sqrt{S_{1in}}, \quad m_{3in}^2 = e_{1in} + B_{1in} + S_{1in}, \quad m_{4in}^2 = \frac{e_{4in}}{B_{1in} S_{2in}};$$

B_{1in} , S_{1in} — действительные положительные корни следующих характеристических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & B_{in}^4 + e_{1in} B_{in}^3 + e_{2in} B_{in}^2 + e_{3in} B_{in} + e_{4in} = 0, \\
 & S_{in}^3 - (e_{1in} + B_{1in}) S_{in}^2 + (e_{1in} B_{1in} + B_{1in}^2 + e_{2in}) S_{in} - \frac{e_{4in}}{B_{1in}} = 0;
 \end{aligned}$$

величины e_{1in}, \dots, e_{4in} определяются различными комбинациями коэффициентов a_1, \dots, a_{15} .

Общий интеграл уравнений (22) при исследовании пластины из пьезокерамического материала имеет вид

$$\begin{aligned}
 \{K_{2in}, N_{2in}\} &= \{D_{1in}, E_{1in}\} \exp(A_{1in}z) + \{D_{2in}, E_{2in}\} \exp(-A_{1in}z) + \\
 &+ \{D_{3in}, E_{3in}\} \sin(A_{2in}z) + \{D_{4in}, E_{4in}\} \cos(A_{2in}z) + \\
 &+ \{D_{5in}, E_{5in}\} \sin(A_{3in}z) + \{D_{6in}, E_{6in}\} \cos(A_{3in}z) + \\
 &+ \{D_{7in}, E_{7in}\} \sin(A_{4in}z) + \{D_{8in}, E_{8in}\} \cos(A_{4in}z), \tag{23}
 \end{aligned}$$

где коэффициенты

$$A_{3in} = \left(\frac{m_{3in}^2 + (m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}, \quad A_{4in} = \left(\frac{m_{3in}^2 - (m_{3in}^4 - 4m_{4in}^2)^{1/2}}{2} \right)^{1/2}.$$

Здесь следует отметить, что условия о действительных положительных значениях коэффициентов B_{1in} , S_{1in} , A_{1in} , \dots , A_{4in} выполняются для большинства конструкций, изготовленных из пьезокерамического материала. В противном случае меняется структура формул (22), (23).

Принимая во внимание связи, полученные в результате приведения (17), (19) к (21), получаем выражения для функций $K_1(\lambda_{in}, z)$, $K_3(\lambda_{in}, z)$, $K_4(\lambda_{in}, z)$, $N_1(\lambda_{in}, z)$, $N_3(\lambda_{in}, z)$, $N_4(\lambda_{in}, z)$. Их подстановка в граничные условия (18), (20) позволяет сформировать две системы алгебраических уравнений, решение которых позволяет определить постоянные интегрирования D_{kin} , E_{kin} , $k = \overline{1, 8}$, и собственные значения λ_{in} , μ_{in} .

Окончательные выражения функций $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$, $\phi(r, z, t)$, $\Theta(r, z, t)$ получим, последовательно применяя к трансформанте (16) формулы обращения (15), (6). В результате с учетом (5), (10) имеем

$$U(r, z, t) = \frac{r}{2} \omega_3(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\ \times \left[H_1(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_1(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$W(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_2(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_2(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\phi(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \left[H_3(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_3(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right],$$

$$\Theta(r, z, t) = \omega_3(t) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0(j_n r)}{J_0(j_n)^2} \times \\ \times \left[H_4(n, z, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(n, \lambda_{in}, t) N_4(\mu_{in}, z) \|K_{in}\|^{-2} \right].$$

Заключительным этапом исследования является определение функций $f_1(z)$, \dots , $f_{20}(z)$ из условия упрощения правых частей дифференциальных уравнений (12) и удовлетворения граничных условий (11).

3. Вычислительный эксперимент и анализ результатов. Рассмотрим круглую пластину ($b = 0.014$ м) из пьезокерамики состава PZT-5A со следующими термоэлектроупругими характеристиками [22]:

$$\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{33}, C_{55}\} = \{9.92, 5.4, 5.08, 8.69, 1.6\} \times 10^{10} \text{ Па}, \\ \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{15.3, 15.0\} \times 10^{-9} \text{ Ф/м},$$

$$\{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} = \{12.3, -7.2, 15.1\} \text{ Кл/м}^2, \quad \Lambda = 1.8 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)},$$

$$\alpha_t = 0.33 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \quad k = 3 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)},$$

$$g_{11} = g_{33} = -2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/(м}^2 \cdot \text{К)}, \quad \{\gamma_{11}, \gamma_{33}\} = \{3.31, 2.89\} \times 10^5 \text{ Па/К}.$$

Изменение температуры на верхней лицевой плоскости ($z_* = 0$) задается в виде

$$\omega_1^*(r_*, t_*) = \left(1 - \frac{r_*}{b}\right) T_{\max}^* \left[\sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$$

при отсутствии приращения температуры на нижней лицевой и цилиндрической поверхности:

$$\omega_2^*(r_*, t_*) = \omega_3^*(t_*) = 0.$$

Здесь $H(\cdot)$ — функция Хевисайда; T_{\max}^* , t_{\max}^* — максимальное значение внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме:

$$T_{\max}^* = 373 \text{ К (100}^\circ\text{C)}, \quad T_0 = 293 \text{ К (20}^\circ\text{C)}, \quad t_{\max}^* = 0.1 \text{ с}.$$

На рис. 2 представлены графики изменения температуры $\Theta^*(0, z, t)$ по высоте пластины ($b = 0.014 \text{ м}$, $h^* = 0.001 \text{ м}$) в различные моменты времени: $1 - t = t_{\max}$, $2 - t = 2t_{\max}$, $3 - t = 10t_{\max}$, где $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^* / (kb^2)$.

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают, что установившийся температурный режим в пьезокерамической пластине формируется достаточно быстро при $t_* = 1 \text{ с}$ (см. рис. 2) за счет высокого коэффициента теплопроводности, ее небольшой толщины и отсутствия приращения температуры на ее нижней лицевой поверхности ($\omega_2^*(r_*, t_*) = 0$).

Анализ результатов, связанный с определением функции $\Theta^*(r, z, t)$, показал, что при исследовании пьезокерамических конструкций можно пренебречь влиянием на температурное поле скоростями изменения объема тела и напряженности вследствие небольших значений коэффициентов a_{14} , a_{15} ($a_{14} = 9.24 \cdot 10^{-5}$, $a_{15} = 0.89 \cdot 10^{-5}$), т.е. в расчетах можно использовать только уравнение теплопроводности.

На рис. 3, 4 представлены графики перемещений $W^*(z, r, t)$, $U^*(z, r, t)$ и радиальной компоненты нормальных механических напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t)$ по радиальной координате r в момент времени $t = t_{\max}$. Здесь сплошной, штрих-пунктирной и штриховой линиями соответственно обозначены результаты для $z = 0$, $h/2$, h .

Представленные на рис. 3, 4 зависимости позволяют сделать вывод, что при $t = t_{\max}$ наблюдается изгиб пластины с увеличением верхнего и уменьшением нижнего радиуса лицевых поверхностей пластины. При этом за счет характера изменения $\omega_1^*(r_*, t_*)$ по радиальной координате во всех ее точках образуются сжимающие механические напряжения $\sigma_{rr}(r, z, t)$, за исключением нижней лицевой поверхности, которая является нейтральной (здесь $\sigma_{rr}(r, h, t) = 0$). Дальнейший прогрев конструкции качественно не влияет на картину напряженно-деформированного состояния конструкции.

На рис. 5 показано изменение потенциала электрического поля $\phi(r, 0, t)$ по радиальной координате r в различные моменты времени: $1 - t = t_{\max}$, $2 -$

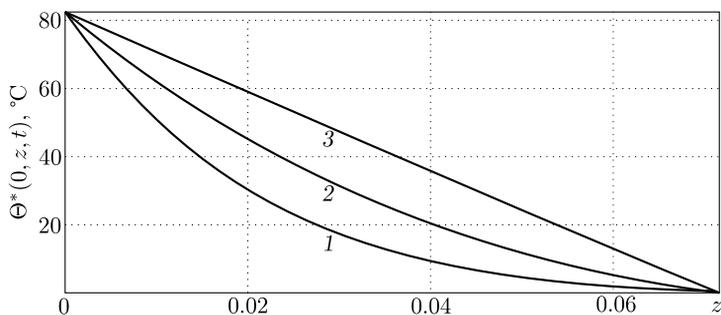


Рис. 2. Изменение функций $\Theta^*(0, z, t)$ по высоте пластины $z = z_*/b$:
 1 - $t = t_{\max}$, 2 - $t = 2 t_{\max}$, 3 - $t = 10 t_{\max}$; $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$

[Figure 2. Change of functions $\Theta^*(0, z, t)$ along the plate height $z = z_*/b$:
 1 - $t = t_{\max}$, 2 - $t = 2 t_{\max}$, 3 - $t = 10 t_{\max}$; $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$]

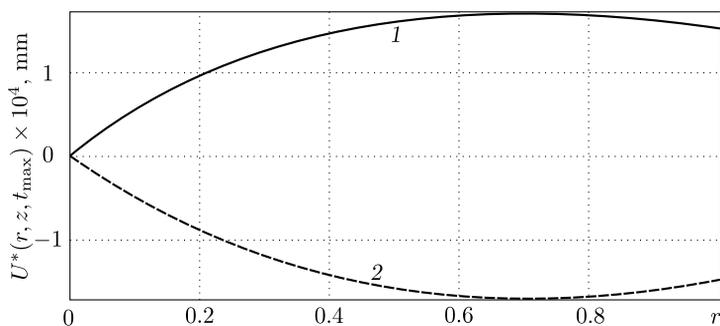
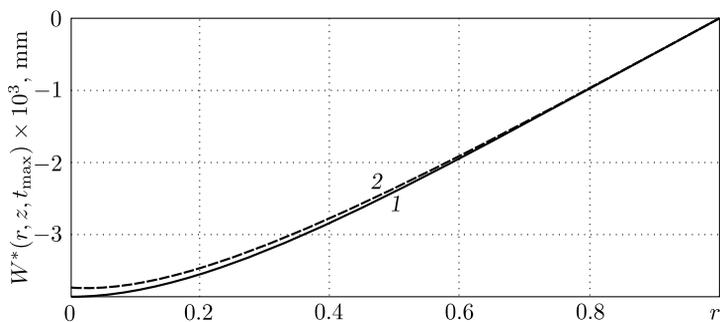


Рис. 3. Изменение перемещений $W^*(z, r, t_{\max})$, $U^*(z, r, t_{\max})$ по координате r : 1 - $z = 0$, 2 - $z = h$; $r = r_*/b$, $h = h^*/b$

[Figure 3. Change of displacements $W^*(z, r, t_{\max})$, $U^*(z, r, t_{\max})$ along the coordinate r : 1 - $z = 0$, 2 - $z = h$; $r = r_*/b$, $h = h^*/b$]

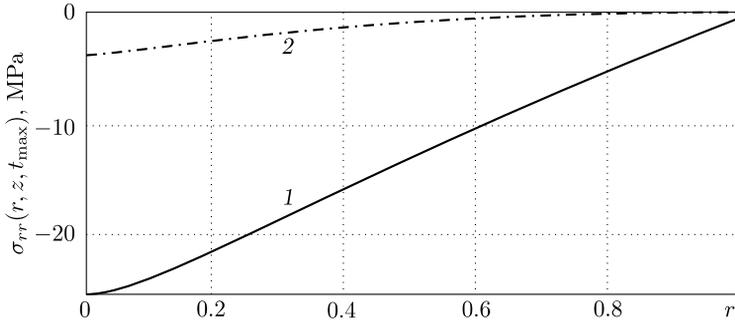


Рис. 4. Изменение напряжений $\sigma_{rr}(r, z, t_{\max})$ по координате r : 1 – $z = 0$, 2 – $z = h/2$; $r = r_*/b$, $h = h^*/b$

[Figure 4. Change of stresses $\sigma_{rr}(r, z, t_{\max})$ along the coordinate r : 1 – $z = 0$, 2 – $z = h/2$; $r = r_*/b$, $h = h^*/b$]

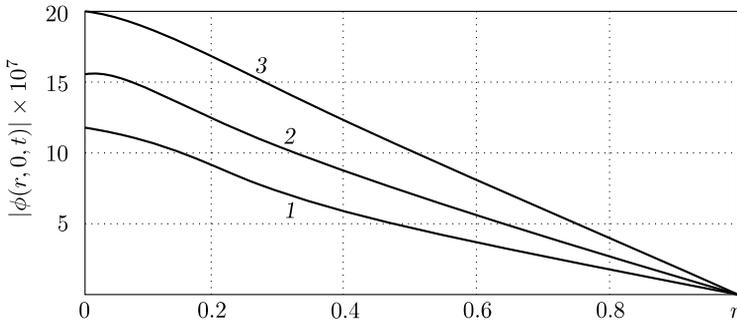


Рис. 5. Изменение потенциала электрического поля $\phi(r, 0, t)$ по координате r : 1 – $t = t_{\max}$, 2 – $t = 2t_{\max}$, 3 – $t = 10t_{\max}$; $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$

[Figure 5. Change of the electric field potential $\phi(r, 0, t)$ along the coordinate r : 1 – $t = t_{\max}$, 2 – $t = 2t_{\max}$, 3 – $t = 10t_{\max}$; $t_{\max} = \Lambda t_{\max}^*/(kb^2)$]

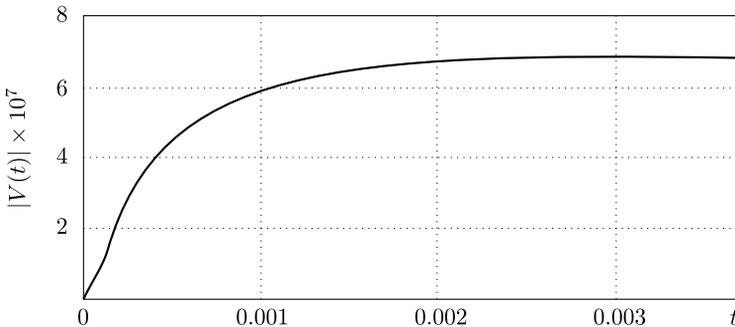


Рис. 6. Разность потенциалов электрического поля $V(t) = \epsilon_{31}V^*(t)/(C_{11}b)$, где $t = \Lambda t/(kb^2)$

[Figure 6. The potential difference of the electric field $V(t) = \epsilon_{31}V^*(t)/(C_{11}b)$, where $t = \Lambda t/(kb^2)$]

Таблица 1

| $\varphi_H(0, t) = \sum_{i=1}^N (\dots)$ | $t = t_{\max}/2, N = 8$ | $t = t_{\max}/2, N = 7$ | $\Delta, \%$ | $t = t_{\max}, N = 8$ | $t = t_{\max}, N = 7$ | $\Delta, \%$ |
|--|-------------------------|-------------------------|--------------|------------------------|------------------------|--------------|
| $n = 1$ | $1.049 \cdot 10^{-7}$ | $1.045 \cdot 10^{-7}$ | 0.38 | $1.150 \cdot 10^{-7}$ | $1.147 \cdot 10^{-7}$ | 0.26 |
| $n = 2$ | $-0.593 \cdot 10^{-7}$ | $-0.590 \cdot 10^{-7}$ | 0.51 | $-0.649 \cdot 10^{-7}$ | $-0.645 \cdot 10^{-7}$ | 0.62 |

Таблица 2

| $\phi(0, 0, t) = 2 \sum_{n=1}^M (\dots)$ | $t = t_{\max}/2, M = 10$ | $t = t_{\max}/2, M = 9$ | $\Delta, \%$ | $t = t_{\max}, M = 10$ | $t = t_{\max}, M = 9$ | $\Delta, \%$ |
|--|--------------------------|-------------------------|--------------|------------------------|------------------------|--------------|
| | $-6.69 \cdot 10^{-7}$ | $-6.59 \cdot 10^{-7}$ | 0.86 | $-11.8 \cdot 10^{-7}$ | $-11.69 \cdot 10^{-7}$ | 0.95 |

$t = 2t_{\max}$, $3 - t = 10t_{\max}$, а на рис. 6 представлена зависимость разности потенциалов электрического поля $V(t) = e_{31}V^*(t)/(C_{11}b)$, где $t = \Lambda t/(kb^2)$.

Здесь следует отметить, что изменение температурного поля пластины (см. рис. 2) приводит к росту по абсолютной величине потенциала $\phi(r, 0, t)$ (см. рис. 5) на верхней лицевой поверхности и разности потенциалов $V(t)$ (см. рис. 6).

Для оценки сходимости рядов при определении потенциала электрического поля в табл. 1, 2 приведены численные значения $\varphi_H(0, t)$, $\phi(0, 0, t)$ при учете различного количества их членов в моменты времени $t = t_{\max}/2$, t_{\max} .

Результаты расчета показывают, что при определении составляющей потенциала $\varphi_H(0, t)$ и потенциала $\phi(0, 0, t)$ учет соответственно 8 и 10 членов рядов $\varphi_H(0, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (\dots)$, $\phi(0, 0, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\dots)$ обеспечивает их сходимость.

4. Заключение. Разработанный алгоритм решения позволяет точно, в рамках используемой математической модели, определить термоэлектроупругое поле в круглой пьезокерамической пластине, что существенно повышает теоретический уровень инженерных расчетов и позволяет улучшить технические характеристики разрабатываемых температурных пьезокерамических преобразователей. При этом основное преимущество построенного замкнутого решения связанной осесимметричной задачи термоэлектроупругости перед аналогичными результатами для несвязанной постановки, заключается в том, что полученные расчетные соотношения дают возможность точно определить влияние нестационарного температурного поля на напряженно-деформированное состояние и электрическое поле пьезокерамической круглой пластины.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Библиографический список

1. Ионов Б. П., Ионов А. Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры // *Датчики и системы*, 2009. № 2. С. 9–11. EDN: JWYALN.
2. Паньков А. А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектродлюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 2. С. 72–82. EDN: XUGGCD. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
3. Mindlin R. D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates // *Int. J. Solids Struct.*, 1974. vol. 10, no. 6. pp. 625–637. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
4. Green A. E. Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity*, 1993. vol. 31. pp. 189–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>.
5. Saadatfar M., Razavi A. S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient // *J. Mech. Sci. Technol.*, 2009. vol. 23. pp. 45–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>.
6. Podil'chuk Y. N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems // *Int.*

- Appl. Mech.*, 2003. no. 39. pp. 132–170. EDN: VAWZKP. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>.
7. Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks // *J. Mech. Eng. Sci.*, 2014. vol. 228, no. 4. pp. 632–645. DOI: <https://doi.org/10.1177/09544062134894>.
 8. Akbarzadeh A. H., Babaei M. H., Chen Z. T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder // *Smart Mater. Struct.*, 2011. vol. 20, no. 6, 065008. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>.
 9. Rahimi G. H., Arefi M., Khoshgoftar M. J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads // *Appl. Math. Mech.*, 2011. vol. 32, no. 8. pp. 997–1008. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>.
 10. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell / *XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering* / Lecture Notes in Civil Engineering, 189. Cham: Springer, 2022. pp. 263–271. EDN: GHLQKB. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31.
 11. Шляхин Д. А., Савинова Е. В., Юрин В. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для круглой жестко закрепленной пластины // *Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета*, 2022. №1(50). С. 3–16. EDN: QUVZUZ. DOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>.
 12. Ватульян А. О. Тепловой удар по термоэлектроупругому слою // *Вестник ДГТУ*, 2001. Т. 1, № 1. С. 82–89. EDN: SONTVO.
 13. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // *Вычисл. мех. сплош. сред*, 2017. Т. 10, № 2. С. 117–126. EDN: ZBPCWT. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
 14. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. О смешанных задачах для термоэлектроупругих сред с разрывными граничными условиями // *ДАН*, 2007. Т. 412, № 6. С. 753–758. EDN: IAALFF.
 15. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part I: Analytical development // *J. Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2003. vol. 40, no. 3. pp. 237–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.08.003>.
 16. Kirilyuk V. S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plate crack under symmetric thermal load // *Int. Appl. Mech.*, 3. vol. 44. pp. 320–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8>.
 17. Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 4. С. 677–691. EDN: MRFBKD. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.
 18. Шляхин Д. А., Кальмова М. А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2021. № 2. С. 181–190. EDN: HLRTJN. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>.
 19. Abou-Dina M., Dhaba A. R. E, Ghaleb A. F., Rawy E. K. A model of nonlinear thermoelectroelasticity in extended thermodynamics // *Int. J. Eng. Sci.*, 2017. vol. 119. pp. 29–39. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.06.010>.
 20. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988. 470 с.
 21. Сеницкий Ю. Э. Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики // *Изв. вузов. Матем.*, 1996. № 8. С. 71–81.
 22. Tung V. T., Tinh N. T., Yen N. H., Tuan D. A. Evaluation of electromechanical coupling factor for piezoelectric materials using finite element modeling // *Int. J. Mat. Chem.*, 2013. vol. 3, no. 3. pp. 59–63. DOI: <https://doi.org/10.5923/j.ijmc.20130303.03>.

MSC: 74F15, 74S20

A coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a circular piezoceramic hinged plate

D. A. Shlyakhin, E. V. Savinova

Samara State Technical University,

244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

Abstract

The new closed solution of the coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a round axially polarized hinged piezoceramic plate in a three-dimensional formulation is constructed. Its cylindrical surface is hinged. The case of temperature change on the cylindrical surface and front planes of the plate (boundary conditions of the 1st kind) is considered. The front electroded surfaces of the structure are connected to a measuring device with a large input resistance (electric idle).

A plate is investigated, the geometrical dimensions of which and the rate of change of the temperature load do not significantly affect the inertial characteristics of the electroelastic system, making it possible to use the equations of equilibrium, electrostatics and thermal conductivity in the mathematical formulation of the problem. In this case, the initial calculated relations form a non-self-adjoint system of differential equations in partial derivatives.

The problem is solved by sequentially using the Hankel integral transform with respect to the radial coordinate and the generalized method of the biorthogonal finite integral transform (FIT) with respect to the axial variable. The application of the structural FIT algorithm allows one to construct an adjoint operator, without which it is impossible to solve non-self-adjoint linear problems by expanding in terms of eigenvector functions.

The constructed calculation relations make it possible to determine the stress-strain state, temperature and electric fields induced in a piezoceramic

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes

Research Article

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Shlyakhin D. A., Savinova E. V. A coupled non-stationary axisymmetric problem of thermoelectroelasticity for a circular piezoceramic hinged plate, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 159–178. EDN: [WXLOUH](https://www.edn.ru/WXLOUH). DOI: [10.14498/vsgtu1959](https://doi.org/10.14498/vsgtu1959) (In Russian).

Author's Details:

Dmitry A. Shlyakhin  <https://orcid.org/0000-0003-0926-7388>Dr. Techn. Sci., Associate Professor; Head of Dept.; Dept. of Construction Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations; e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru*Elena V. Savinova*  <https://orcid.org/0000-0001-7155-2281>Postgraduate Student; Senior Lecturer; Dept. of Construction Mechanics, Engineering Geology, Grounds and Foundations; e-mail: slenax@yandex.ru

element under an arbitrary external temperature action, and also to analyze the effect of the rate of change in body volume and tension on the temperature field.

Keywords: problem of thermoelectroelasticity, coupled problem, round piezoceramic plate, biorthogonal finite integral transformations.

Received: 5th October, 2022 / Revised: 19th December, 2022 /

Accepted: 27th December, 2022 / First online: 24th March, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

References

1. Ionov B. P., Ionov A. B. Spectral-statistical approach to non-contact temperature measurement, *Sensors and Systems*, 2009, no. 2, pp. 9–11 (In Russian). EDN: [JWYALN](#).
2. Pankov A. A. Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electroluminescent fiber-optical sensor according to the solution of the fredholm integral equation, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no.2, pp. 72–82 (In Russian). EDN: [XUGGCD](#). DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.07>.
3. Mindlin R. D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates, *Int. J. Solids Struct.*, 1974, vol. 10, no. 6, pp. 625–637. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
4. Green A. E. Thermoelasticity without energy dissipation, *J. Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00044969>.
5. Saadatfar M., Razavi A. S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient, *J. Mech. Sci. Technol.*, 2009, vol. 23, pp. 45–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12206-008-1002-8>.
6. Podil'chuk Y. N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems, *Int. Appl. Mech.*, 2003, no. 39, pp. 132–170. EDN: [VAZWKP](#). DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1023953313612>.
7. Khorsand M. Dynamic analysis of a functionally graded piezoelectric spherical shell under mechanical and thermal shocks, *J. Mech. Eng. Sci.*, 2014, vol. 228, no. 4, pp. 632–645. DOI: <https://doi.org/10.1177/09544062134894>.
8. Akbarzadeh A. H., Babaei M. H., Chen Z. T. The thermo-electromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder, *Smart Mater. Struct.*, 2011, vol. 20, no. 6, 065008. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>.
9. Rahimi G. H., Arefi M., Khoshgoftar M. J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads, *Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 32, no. 8, pp. 997–1008. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1475-6>.
10. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell, In: *XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering*, Lecture Notes in Civil Engineering, 189. Cham, Springer, 2022, pp. 263–271. EDN: [GHLQKB](#). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31.
11. Shlyakhin D. A., Savinova E. V., Yurin V. A. Dynamic problem of thermoelectricity for round rigidly fixed plate, *FEFU School of Engineering Bulletin*, 2022, no. 1(50), pp. 3–16 (In Russian). EDN: [QUVZUZ](#). DOI: <https://doi.org/10.24866/2227-6858/2022-1/3-16>.

12. Vatulyan A. O. Thermal shock on the thermoelectroelastic layer, *Vestnik of Don State Technical University*, 2001, vol. 1, no. 1, pp. 82–89 (In Russian). EDN: **SONTVO**.
13. Vatulyan A. O. Nesterov S. A. Dynamic problem of thermoelectroelasticity for a functional-gradient layer, *Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126 (In Russian). EDN: **ZBPCWT**. DOI: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>.
14. Babeshko V. A., Ratner S. V., Syromyatnikov P. V. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions, *Dokl. Phys.*, 2007, vol. 52, no. 2, pp. 90–95. EDN: **LKJKEP**. DOI: <https://doi.org/10.1134/S102833580702005X>.
15. Shang F., Kuna M., Kitamura T. Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part I: Analytical development, *J. Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 237–246. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.08.003>.
16. Kirilyuk V. S. Thermostressed state of a piezoelectric body with a plate crack under symmetric thermal load, *Int. Appl. Mech.*, 3, vol. 44, pp. 320–330. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0048-8>.
17. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2020, vol. 24, no. 4, pp. 677–691 (In Russian). EDN: **MRFBKD**. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>.
18. Shlyakhin D. A., Kalmova M. A. The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 2, pp. 181–190 (In Russian). EDN: **HLRTJN**. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.16>.
19. Abou-Dina M., Dhaba A. R. E., Ghaleb A. F., Rawy E. K. A model of nonlinear thermoelectroelasticity in extended thermodynamics, *Int. J. Eng. Sci.*, 2017, vol. 119, pp. 29–39. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.06.010>.
20. Parton V. Z., Kudryavtsev B. A. *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*. New York, Gordon and Breach Science, 1988, xix+503 pp.
21. Senitskii Yu. E. A biorthogonal multicomponent finite integral transformation and its application to boundary value problems in mechanics, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1996, vol. 40, no. 8, pp. 69–79.
22. Tung V. T., Tinh N. T., Yen N. H., Tuan D. A. Evaluation of electromechanical coupling factor for piezoelectric materials using finite element modeling, *Int. J. Mat. Chem.*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 59–63. DOI: <https://doi.org/10.5923/j.ijmc.20130303.03>.



УДК 539.376
EDN: **NCUTFK**

Ползучесть и длительная прочность водородсодержащего титанового сплава ВТ6 при кусочно-постоянной зависимости растягивающего напряжения от времени

А. М. Локощенко¹, **Л. В. Фомин**¹,
П. М. Третьяков^{1,2}, **Д. Д. Махов**^{1,2}

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1.

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1.

Аннотация

Рассматривается ползучесть наводороженного стержня из титанового сплава ВТ6 при кусочно-постоянной зависимости напряжения от времени вплоть до разрушения. Обсуждаются результаты экспериментально-теоретического исследования влияния концентрации предварительно внедренного водорода на ползучесть и длительную прочность растягиваемых стержней из титанового сплава ВТ6 при температуре 600 °С и постоянных номинальных растягивающих напряжениях в диапазоне от 47 до 217 МПа.

Ключевые слова: ползучесть, длительная прочность, наводороживание, ступенчатое нагружение.

Получение: 25 декабря 2022 г. / Исправление: 12 февраля 2023 г. /
Принятие: 27 февраля 2023 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Научная статья

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

Content публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Локощенко А. М., Фомин Л. В., Третьяков П. М., Махов Д. Д. Ползучесть и длительная прочность водородсодержащего титанового сплава ВТ6 при кусочно-постоянной зависимости растягивающего напряжения от времени // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 179–188. EDN: **WXLOUH**. DOI: [10.14498/vsgtu1971](https://doi.org/10.14498/vsgtu1971).

Сведения об авторах

Александр Михайлович Локощенко  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>
доктор физико-математических наук, профессор

Леонид Викторович Фомин  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>
кандидат физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. ползучести и длительной прочности; e-mail: fleonid1975@mail.ru

Влияние водорода на сопротивление пластической деформации титановых сплавов с позиции металловедения изучено достаточно подробно [1, 2]. Однако явлению ползучести при температурах, превышающих температуры традиционного применения титановых сплавов, в том числе жаропрочных (выше 500 °С), уделено недостаточное внимание. Кроме того, информация о закономерностях деформационного поведения водородсодержащих титановых сплавов, особенно гетерофазных, весьма противоречива. Это обусловлено интенсивным влиянием водорода не только на процессы необратимой деформации α - и β -фаз, но и на изменение объемного соотношения фаз в сплавах, размеры и морфологию фаз, концентрацию в них легирующих элементов (Al, V и др.), прочность фаз и др. Все эти факторы, которые в совокупности можно назвать структурными, сами по себе оказывают существенное влияние на процессы необратимой деформации [1, 2]. Поэтому для изучения влияния растворенного водорода на ползучесть водородсодержащих гетерофазных титановых сплавов, получения достаточно достоверных результатов и их корректного анализа необходимы методические подходы, позволяющие максимально снизить влияние ряда перечисленных структурных факторов на механизм и параметры ползучести.

Настоящая работа базируется на использовании введенного Л. М. Качановым [3] и Ю. Н. Работновым [4] параметра поврежденности и разработанной впоследствии Ю. Н. Работновым [5] кинетической теории ползучести и длительной прочности. Основой этого подхода при одноосном растяжении является введение скалярного параметра поврежденности $\omega(t)$, характеризующего структурное состояние материала при произвольном значении времени t . Исходному состоянию материала (при $t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении в момент времени t^* поврежденность $\omega(t^*) = 1$. При рассмотрении длительной прочности в случае одноосного растяжения Л. М. Качанов [3] дополнил уравнение ползучести дифференциальным кинетическим уравнением, характеризующим изменение параметра $\psi = 1 - \omega$ во времени, а Ю. Н. Работнов [6] дополнительно ввел параметр ω в уравнение ползучести (для учета влияния процесса накопления поврежденности на процесс ползучести).

Рассмотрим результаты экспериментально-теоретического исследования влияния водорода на ползучесть и длительную прочность сплава ВТ6 при одноосном растяжении [7, 8]. В [7, 8] образцы двухфазного ($\alpha + \beta$)-титанового сплава ВТ6 (Ti-6Al-4V) насыщались водородом термодиффузионным способом в аппаратуре Сивертса. Аппаратура позволяет получать высокочистый газообразный водород и проводить гидрирование в высоком вакууме при температурах 600–900 °С, что исключает окисление поверхности образцов. Введение в сплав водорода, являющегося эффективным стабилизатором высокотемпературной β -фазы, приводит к увеличению ее объемной доли и, соответственно, к снижению доли α -фазы.

Петр Максимович Третьяков  <https://orcid.org/0000-0002-8221-3127>

ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности¹; студент; механико-математический факультет²; e-mail: pet3tyak@gmail.com

Денис Дмитриевич Махов  <https://orcid.org/0000-0001-7748-3934>

ведущий инженер; лаб. ползучести и длительной прочности¹; студент; механико-математический факультет²; e-mail: monyamail@yahoo.com

В исходном состоянии (концентрация водорода c не более 0.008 мас. %) ¹ образцы горячекатаного прутка сплава ВТ6 имели структуру с глобулярной или близкой к глобулярной α -фазой в виде частиц размером 2–5 мкм и β -фазой в промежутках между частицами α -фазы.

В образцы вводился водород до концентраций $c = \{0.1, 0.2, 0.3\}\%$ с точностью $\pm 0.02\%$. Результаты испытаний на ползучесть и длительную прочность сплава приведены в числителях столбцов табл. 1. В таблице приняты следующие обозначения: σ_0 — номинальное напряжение, равное отношению величины постоянной растягивающей силы P к площади недеформированного поперечного сечения F_0 ; $\dot{p}_0 = f(\sigma_0)$ — скорость установившейся ползучести; p^* — предельное значение логарифмической деформации растяжения; числители t^* — экспериментальное время до разрушения. Испытания проводились в широком диапазоне номинальных напряжений σ_0 (от 47 до 217 МПа).

Из условия несжимаемости необратимой деформации следует зависимость текущего напряжения σ от времени t при $\sigma_0 = \text{const}$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp[p(t)]. \quad (1)$$

Из данных табл. 1 следует, что увеличение доли предварительно внедренного водорода приводит к систематическому уменьшению скорости установившейся ползучести \dot{p}_0 , увеличению времени до разрушения t^* и, как правило, уменьшению предельной деформации p^* в несколько раз. Для теоретического описания реологического процесса деформации титанового сплава с предварительно внедренным водородом в [7, 8] был использован вариант кинетической теории Ю. Н. Работнова [5]. С этой целью был введен зависящий от времени параметр поврежденности $\omega(t)$. При этом зависимости скорости деформации ползучести \dot{p} и скорости накопления поврежденности $\dot{\omega}$ являются функциями не только $\sigma(t)$ и $\omega(t)$, но и средней концентрации $c(t)$ водорода в металле.

Для зависимостей скоростей \dot{p} и $\dot{\omega}$ от поврежденности ω вместо общепринятой степенной функции $(1 - \omega(t))^{-1}$ в [7, 8] была рассмотрена экспоненциальная функция $e^{\omega(t)}$.

Для теоретического описания ползучести наводороженного сплава ВТ6 предлагается система уравнений:

$$\frac{dp}{dt} = A(\sigma(t)e^{\omega(t)})^n f_1(c), \quad (2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = B(\sigma(t)e^{\omega(t)})^k f_2(c). \quad (3)$$

Определяемые с помощью уравнений (2) и (3) функции $p(t)$ и $\omega(t)$ удовлетворяют начальным $p(0) = 0$, $\omega(0) = 0$ и конечному $\omega^* = \omega(t^*) = 1$ значениям.

Функция $f_1(c)$ характеризует уменьшение скорости \dot{p} деформации ползучести при увеличении концентрации c . По аналогии с $f_1(c)$ функция $f_2(c)$ определяет скорость $\dot{\omega}(t)$ накопления поврежденности в зависимости от величины c . Значения $f_1(c)$ определяются как отношения скоростей деформации ползучести сплава с водородом и без него (исходный сплав). Значения $f_2(c)$

¹Здесь и далее концентрация водорода указана в масс. %.

Таблица 1

Результаты испытаний образцов титанового сплава ВТ6 с разной концентрацией c водорода
 [Test results for samples of titanium alloy VT6 (Ti-6Al-4V) with different hydrogen concentrations c]

| σ_0 , МПа | $c = 0$ | | | $c = 0.1\%$ | | | $c = 0.2\%$ | | | $c = 0.3\%$ | | |
|------------------|------------------------|-------|-----------|------------------------|-------|-----------|------------------------|-------|-----------|------------------------|-------|-----------|
| | \dot{p}_0 , h^{-1} | p^* | t^* , h | \dot{p}_0 , h^{-1} | p^* | t^* , h | \dot{p}_0 , h^{-1} | p^* | t^* , h | \dot{p}_0 , h^{-1} | p^* | t^* , h |
| 47 | 0.0036 | 0.565 | 83.10 | 0.0038 | 0.82 | 100.36 | — | — | — | — | — | — |
| | 0.0024 | 0.579 | 57.97 | 0.0017 | 0.57 | 80.27 | — | — | — | — | — | — |
| 67 | 0.0162 | 0.655 | 24.76 | 0.0075 | 0.59 | 27.96 | 0.0028 | 0.30 | 38.00 | — | — | — |
| | 0.0066 | 0.525 | 19.40 | 0.0047 | 0.51 | 26.84 | 0.0015 | 0.24 | 45.30 | — | — | — |
| 117 | 0.0556 | 0.613 | 4.72 | 0.0470 | 0.54 | 7.02 | 0.041 | 0.18 | 2.12 | 0.0008 | 0.21 | 73.00 |
| | 0.0332 | 0.452 | 3.45 | 0.0230 | 0.44 | 4.77 | 0.008 | 0.20 | 7.83 | 0.0010 | 0.13 | 40.90 |
| 167 | 0.1940 | 0.448 | 1.16 | 0.0990 | 0.31 | 1.79 | 0.119 | 0.30 | 1.10 | 0.0030 | 0.14 | 11.00 |
| | 0.0931 | 0.409 | 1.14 | 0.0660 | 0.40 | 1.58 | 0.021 | 0.18 | 2.55 | 0.0030 | 0.12 | 13.20 |
| 217 | 0.4374 | 0.374 | 0.43 | 0.2840 | 0.29 | 0.55 | 0.129 | 0.36 | 0.99 | 0.0257 | 0.15 | 2.31 |
| | 0.1989 | 0.382 | 0.51 | 0.1410 | 0.37 | 0.70 | 0.046 | 0.17 | 1.17 | 0.0060 | 0.11 | 5.77 |

находятся из сопоставления времен до разрушения t^* при разных значениях концентрации c .

Рассмотрим малые значения времени t , при которых деформация p и поврежденность ω являются малыми величинами, следовательно, можно полагать $\sigma = \sigma_0$. Из уравнения (2) находим скорость установившейся ползучести:

$$\dot{p}_0(c) = A\sigma_0^n f_1(c). \quad (4)$$

Согласно соотношению (4), скорость установившейся деформации $\dot{p}_0(0)$ сплава без водорода при $f_1(0) = 1$ составляет:

$$\dot{p}_0(0) = A\sigma_0^n. \quad (5)$$

Из сопоставления соотношений (4) и (5) находим, что $f_1(c) = \dot{p}_0(c)/\dot{p}_0(0)$.

Постоянные A и n в соотношениях (4) и (5) вычисляются из аппроксимации экспериментальной зависимости скорости установившейся ползучести $\dot{p}_0(0)$ от номинального напряжения σ_0 зависимостью (5), а величина B — из сопоставления теоретических и экспериментальных деформационных кривых при совместном решении (2) и (3):

$$n = 2.9, \quad k = 3.2, \quad A = 3.33 \cdot 10^{-8} (\text{МПа})^{-2.9} \cdot \text{час}^{-1}, \\ B = 1.43 \cdot 10^{-8} (\text{МПа})^{-3.2} \cdot \text{час}^{-1}.$$

Приведем значения функций $f_1(c)$ и $f_2(c)$ при разных концентрациях водорода c :

| $c, \%$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |
|----------|------|------|------|------|
| $f_1(c)$ | 1.00 | 0.71 | 0.23 | 0.03 |
| $f_2(c)$ | 1.00 | 0.73 | 0.54 | 0.11 |

В знаменателях столбцов табл. 1 приведены теоретические значения всех характеристик ползучести и длительной прочности сплава при различных уровнях σ_0 и c .

Рассмотрим ползучесть водородсодержащего стержня при ступенчатом изменении напряжения. На первой стадии ($0 \leq t \leq t_1$) действует растягивающее напряжение σ_{01} . Здесь $t_1 = t_1^*/2$, где t_1^* — осредненное время разрушения при напряжении σ_{01} . Значения t_1^* приведены в табл. 1 в знаменателях величин t^* при различных уровнях концентрации c . На второй стадии ($t_1 \leq t \leq t^*$) растягивающее напряжение ступенчато изменяется с величины σ_{01} на величину σ_{02} и действует вплоть до момента разрушения ($t = t^*$), при этом $\omega(t^*) = 1$.

Рассмотрим первую стадию нагружения. Согласно (1), для растягивающего текущего напряжения на первой стадии имеем

$$\sigma(t) = \sigma_{01} e^{p(t)}. \quad (6)$$

Разделим (2) на (3) с учетом (6):

$$\frac{dp}{d\omega} = C_1 [e^p e^\omega]^{n-k}, \quad C_1 = \frac{A}{B} \sigma_{01}^{n-k} \frac{f_1(c)}{f_2(c)},$$

откуда

$$e^{(k-n)p} dp = \frac{A}{B} [\sigma_{01} e^{\omega}]^{n-k} \frac{f_1(c)}{f_2(c)} d\omega. \quad (7)$$

Проинтегрировав (7) при начальных условиях $p(0) = 0$ и $\omega(0) = 0$, получим

$$e^{kp} = [1 + C_1(1 - e^{(n-k)\omega})]^{k/(k-n)}. \quad (8)$$

Подстановка (8) в (3) позволяет установить дифференциальное уравнение для $\omega = \omega(t)$ на первом этапе:

$$\frac{d\omega}{dt} = C_2 [1 + C_1(1 - e^{(n-k)\omega})]^{k/(k-n)} e^{k\omega}, \quad \omega(0) = 0, \quad (9)$$

где $C_2 = B\sigma_{01}^k f_2(c)$.

Деформация ползучести вычисляется с помощью соотношения (8):

$$p(\omega) = \frac{1}{k-n} \ln[1 + C_1(1 - e^{(n-k)\omega})]. \quad (10)$$

Зависимость деформации ползучести p от времени определяется с помощью совместного решения уравнений (9) и (10).

Окончание первой стадии происходит в момент времени $t_1 = t_1^*/2$, при этом величина t_1^* определяется из условия $\omega(t_1^*) = 1$, накладываемого на решение дифференциального уравнения (9) при постоянном напряжении σ_{01} . Значение времени до разрушения t_1^* при действии постоянных напряжений σ_{01} приведено в знаменателях дробей в табл. 1.

В конце первой стадии поврежденность $\omega_1 = \omega(t_1)$, а деформация ползучести $p_1 = p(t_1)$ принимает значение:

$$p_1 = \frac{1}{(k-n)} \ln[1 + C_1(1 - e^{(n-k)\omega_1})].$$

Рассмотрим вторую стадию нагружения. На второй стадии напряжение (1) имеет вид

$$\sigma(t) = \sigma_{02} e^{p(t)}. \quad (11)$$

Тогда из (2), (3), (11) получаем уравнение

$$e^{(k-n)p} dp = \frac{A}{B} [\sigma_{02} e^{\omega}]^{n-k} \frac{f_1(c)}{f_2(c)}, \quad p(t_1) = p_1, \quad \omega(t_1) = \omega_1,$$

после интегрирования которого находим

$$e^{kp} = \left[e^{(k-n)p_1} + \frac{A}{B} \sigma_{02}^{n-k} \frac{f_1(c)}{f_2(c)} (e^{(n-k)\omega_1} - e^{(n-k)\omega}) \right]^{k/(k-n)}. \quad (12)$$

Используя (1), (3), (12), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{dt} = B\sigma_{02}^k f_2(c) \left[e^{(k-n)p_1} + \frac{A}{B} \sigma_{02}^{n-k} \frac{f_1(c)}{f_2(c)} (e^{(n-k)\omega_1} - e^{(n-k)\omega}) \right]^{k/(k-n)} e^{k\omega}, \quad (13)$$

из которого определяем время t^* на основании условия $\omega(t^*) = 1$.

Деформация ползучести $p(t)$ на второй стадии рассчитывается с помощью совместного использования уравнений (12) и (13), при этом значение $p^* = p(t^*) = p(\omega)$ при $\omega = 1$.

В табл. 2 приведены основные расчетные данные для водородсодержащих стержней из титанового сплава ВТ6 в условиях ползучести при температуре 600 °С, полученные для четырех программ нагружения:

- программа 1: $\sigma_{01} = 167$ МПа при $t \in [0, t_1]$, $\sigma_{02} = 217$ МПа при $t \in [t_1, t_1^*]$;
- программа 2: $\sigma_{01} = 217$ МПа при $t \in [0, t_1]$, $\sigma_{02} = 167$ МПа при $t \in [t_1, t_1^*]$;
- программа 3: $\sigma_{01} = 67$ МПа при $t \in [0, t_1]$, $\sigma_{02} = 117$ МПа при $t \in [t_1, t_1^*]$;
- программа 4: $\sigma_{01} = 117$ МПа при $t \in [0, t_1]$, $\sigma_{02} = 67$ МПа при $t \in [t_1, t_1^*]$.

Таблица 2

Результаты вычислений [Calculation results]

| | $c = 0\%$ | $c = 0.1\%$ | $c = 0.2\%$ | $c = 0.3\%$ |
|------------------------------------|-----------|-------------|-------------|-------------|
| Программа 1 [Loading program no.1] | | | | |
| $t_1, \text{ h}$ | 0.570 | 0.790 | 1.275 | 6.600 |
| p_1 | 0.071 | 0.070 | 0.036 | 0.024 |
| ω_1 | 0.147 | 0.149 | 0.176 | 0.202 |
| p^* | 0.383 | 0.373 | 0.169 | 0.011 |
| $t^*, \text{ h}$ | 0.823 | 1.138 | 1.832 | 9.486 |
| Программа 2 [Loading program no.2] | | | | |
| $t_1, \text{ h}$ | 0.255 | 0.350 | 0.585 | 2.885 |
| p_1 | 0.068 | 0.067 | 0.036 | 0.023 |
| ω_1 | 0.153 | 0.152 | 0.191 | 0.186 |
| p^* | 0.402 | 0.392 | 0.177 | 0.114 |
| $t^*, \text{ h}$ | 0.822 | 1.138 | 1.799 | 9.500 |
| Программа 3 [Loading program no.3] | | | | |
| $t_1, \text{ h}$ | 9.699 | 13.419 | 22.619 | — |
| p_1 | 0.086 | 0.0847 | 0.046 | — |
| ω_1 | 0.135 | 0.137 | 0.1684 | — |
| p^* | 0.462 | 0.450 | 0.205 | — |
| $t^*, \text{ h}$ | 11.417 | 15.795 | 26.521 | — |
| Программа 4 [Loading program no.4] | | | | |
| $t_1, \text{ h}$ | 1.725 | 2.385 | 3.914 | 20.42 |
| p_1 | 0.077 | 0.075 | 0.173 | 0.027 |
| ω_1 | 0.142 | 0.144 | 0.039 | 0.183 |
| p^* | 0.513 | 0.5007 | 0.227 | 0.147 |
| $t^*, \text{ h}$ | 11.464 | 15.859 | 26.601 | 139.839 |

Приведенные в табл. 2 данные, а также результаты численного анализа деформационных кривых по разработанной модели ползучести и длительной прочности показывают, что независимо от уровня концентрации водорода с деформация ползучести при ступенчатом уменьшении σ_0 превышает деформацию ползучести при ступенчатом увеличении соответствующих напряжений. При этом увеличение уровня предварительно внедренного водорода с приводит к увеличению значения времени до разрушения t_1^* и к уменьшению значения предельной деформации $p^* = p(t_1^*)$.

Конкурирующие интересы. Заявляем, что в отношении авторства и публикации этой статьи конфликта интересов не имеем.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи; все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Финансирование. Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 20–80–00387_а).

Библиографический список

1. Носов В. К., Колачев Б. А. *Водородное пластифицирование при горячей деформации титановых сплавов*. М.: Metallurgia, 1986. 118 с.
2. Ильин А. А., Колачев Б. А., Носов В. К., Мамонов А. М. *Водородная технология титановых сплавов*. М.: МИСИС, 2002. 392 с.
3. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958. № 8. С. 26–36.
4. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения / *Вопросы прочности материалов и конструкций*. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
5. Работнов Ю. Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести // *ПМТФ*, 1963. № 2. С. 113–123.
7. Локощенко А. М., Ильин А. А., Мамонов А. М., Назаров В. В. Экспериментально-теоретическое исследование влияния водорода на ползучесть и длительную прочность титанового сплава ВТ6 // *Металлы*, 2008. № 2. С. 60–66. EBN: [IJPPCZ](#).
8. Локощенко А. М., Ильин А. А., Мамонов А. М., Назаров В. В. Анализ ползучести и длительной прочности титанового сплава ВТ6 с предварительно внедренным водородом // *Физ.-хим. мех. матер.*, 2008. № 5. С. 98–104.

MSC: 74R20

Creep and long-term strength of hydrogen-containing VT6 titanium alloy with a piecewise constant dependence of tensile stress on time

A. M. Lokoshchenko¹, **L. V. Fomin**¹,
P. M. Tretyakov^{1,2}, **D. D. Makhov**^{1,2}

¹ Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
1, Michurinsky prospekt, Moscow, 119192, Russian Federation.

² Lomonosov Moscow State University,
Department of Mechanics and Mathematics,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Abstract

We consider the creep of a hydrogenated rod made of VT6 (Ti-6Al-4V) titanium alloy with a piecewise constant dependence of the stress on time up to failure. The results of an experimental and theoretical study on the effect of the concentration of previously introduced hydrogen on the creep and long-term strength of tensile rods made of VT6 titanium alloy at a temperature of 600°C and constant nominal tensile stresses in the range from 47 to 217 MPa.

Keywords: creep, long-term strength, hydrogen saturation, step loading.

Received: 25th December, 2022 / Revised: 12th February, 2023 /

Accepted: 27th February, 2023 / First online: 24th March, 2023

Competing interests. We declare that we have no conflicts of interest in the authorship and publication of this article.

Authors' contributions and responsibilities. Each author has participated in the article concept development; the authors contributed equally to this article. The authors

**Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Research Article**

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Lokoshchenko A. M., Fomin L. V., Tretyakov P. M., Makhov D. D. Creep and long-term strength of hydrogen-containing VT6 titanium alloy with a piecewise constant dependence of tensile stress on time, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 179–188. EDN: **WXLOUH**. DOI: [10.14498/vsgtu1971](https://doi.org/10.14498/vsgtu1971) (In Russian).

Authors' Details:

Alexander M. Lokoshchenko  <https://orcid.org/0000-0002-5462-6055>

Dr. Phys. & Math. Sci., Professor

Leonid V. Fomin  <https://orcid.org/0000-0002-9075-5049>

Cand. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Creep and Long-Term Strength;

e-mail: fleonid1975@mail.ru

are absolutely responsible for submit the final manuscript to print. Each author has approved the final version of manuscript.

Funding. This study was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20–80–00387_a).

References

1. Nosov V. K., Kolachev B. A. *Vodorodnoe plastifitsirovanie pri goriachei deformatsii titanovykh splavov* [Hydrogen Plasticization in Hot Deforming of Titanium Alloys]. Moscow, Metallurgiya, 1986, 118 pp. (In Russian)
2. Il'in A. A., Kolachev B. A., Nosov V. K., Mamonov A. M. *Vodorodnaia tekhnologiya titanovykh splavov* [Hydrogen Technology of Titanium Alloys]. Moscow, MISIS, 2002, 392 pp. (In Russian)
3. Kachanov L. M. Time of the rupture process under creep conditions, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Techn. Nauk*, 1958, no. 8, pp. 26–36 (In Russian).
4. Rabotnov Yu. N. Mechanism of long-term destruction, In: *Strength of Materials and Structures*. Moscow, USSR Academy of Sciences, 1959, pp. 5–7 (In Russian).
5. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, London, North-Holland Publ. Co., 1969, xiv+822 pp.
6. Rabotnov Yu. N. On fracture as a consequence of creep, *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1963, no. 2, pp. 113–123 (In Russian).
7. Lokoshchenko A. M., Il'in A. A., Mamonov A. M., Nazarov V. V. Experimental and theoretical study of the effect of hydrogen on the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy, *Russ. Metall.*, 2008, vol. 2008, no. 2, pp. 142–147. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029508020109>. EDN: LLNZQN.
8. Lokoshchenko A. M., Nazarov V. V., Il'in A. A., Mamonov A. M. Analysis of the creep and long-term strength of VT6 titanium alloy with preliminarily injected hydrogen, *Mater. Sci.*, 2008, vol. 44, no. 5, pp. 700–707. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11003-009-9128-0>. EDN: KHLBHT.

Petr M. Tretyakov  <https://orcid.org/0000-0002-8221-3127>

Leading Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Student; Dept. of Mechanics and Mathematics²; e-mail: pet3tyak@gmail.com

Denis D. Makhov  <https://orcid.org/0000-0001-7748-3934>

Leading Engineer; Lab. of Creep and Long-Term Strength¹; Student; Dept. of Mechanics and Mathematics²; e-mail: monyamail@yahoo.com



УДК 539.32

Влияние плотности костных тканей на напряженно-деформированное состояние вблизи дентальных имплантатов

М. Н. Перельмутер

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1.

Аннотация

Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния костной ткани от ее плотности вблизи дентального имплантата. Расчеты выполнены методом граничных элементов в постановке плоской деформации для модели, состоящей из цилиндрического имплантата и окружающих костных тканей. Костная ткань рассматривается как изотропный и однородный упругий материал. Моделирование влияния плотности костной ткани на напряженно-деформированное состояние при квазистатическом приложении нагрузки выполняется посредством изменения модуля упругости кости. Установлено, что при увеличении модуля упругости губчатой костной ткани максимальные эквивалентные напряжения в этой костной ткани возрастают. Напряжения в кортикальной костной ткани при увеличении модуля упругости губчатой кости снижаются за счет уменьшения нагрузки, передаваемой на эту часть кости. Напряжения в губчатой кости снижаются при увеличении модуля упругости кортикальной кости. Уровень максимальных напряжений в кортикальной кости возрастает при увеличении модуля упругости этой костной ткани. Максимальные напряжения в кортикальной костной ткани наблюдаются вблизи шейки имплантата.

Ключевые слова: имплантат, костные ткани, напряженно-деформированное состояние, метод граничных интегральных уравнений.

Получение: 26 декабря 2022 г. / Исправление: 19 февраля 2023 г. /
Принятие: 17 марта 2023 г. / Публикация онлайн: 24 марта 2023 г.

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
Краткое сообщение

© Коллектив авторов, 2023

© СамГТУ, 2023 (составление, дизайн, макет)

 Контент публикуется на условиях лицензии [Creative Commons Attribution 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Перельмутер М. Н. Влияние плотности костных тканей на напряженно-деформированное состояние вблизи дентальных имплантатов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 27, № 1. С. 189–201. EDN: VDVFUD. DOI: 10.14498/vsgtu1976.

Сведения об авторе

Михаил Натанович Перельмутер   <https://orcid.org/0000-0002-8430-5412>

доктор физико-математических наук; ведущий научный сотрудник; лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций; e-mail: perelm@ipmnet.ru

Введение. Эффективность дентальной имплантации помимо прочих факторов [1] зависит от плотности костной ткани, которая может изменяться в широком диапазоне [2, 3]. Ввиду этого изучение влияния плотности кортикальной и губчатой костных тканей челюсти на напряженно-деформированное состояние в зоне дентальной имплантации представляет большой научный и практический интерес [4, 5]. Изменение плотности костной ткани приводит к изменению ее модуля упругости [6]. Этот факт позволяет выполнять математическое моделирование влияния плотности костной ткани на напряженно-деформированное состояние при квазистатическом приложении нагрузки посредством соответствующего изменения модуля упругости кости [3, 7–9, 11].

Для моделирования напряженного состояния стоматологических имплантатов и костных тканей в последние десятилетия используются численные методы. Наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [12, 13]. Метод граничных элементов (МГЭ) в задачах стоматологической биомеханики используется не так широко. Одно из первых применений этого метода было выполнено в 1993 году для анализа напряженного состояния соединения цилиндрического имплантата и костной ткани [14]. МГЭ также применялся для исследования напряженного состояния костных тканей и винтовых стоматологических имплантатов, изготовленных из различных материалов (титана или керамики) [15]. Сравнительный анализ применения МКЭ и МГЭ для анализа напряженного состояния имплантатов и костной ткани был выполнен в [16]. При использовании МГЭ ввиду независимого моделирования перемещений и напряжений на поверхности тела, в зонах с высокими градиентами напряжений можно получить результаты, сопоставимые с результатами, полученными с помощью МКЭ, но без существенного измельчения сетки элементов. При решении задачи МГЭ выполняется дискретизация только поверхности (границы — в двумерном случае) расчетной модели, что является одним из основных преимуществ данного метода перед МКЭ, при использовании которого необходимо разбиение на элементы всего объема тела. В данной работе МГЭ используется для анализа влияния изменения плотности костных тканей на напряженное состояние вблизи дентальных имплантатов.

1. Постановка задачи и методика численного решения. Расчет напряженно-деформированного состояния выполнен в постановке плоской деформации для модели, состоящей из цилиндрического имплантата с коронкой и окружающих костных тканей при допущении, что костная ткань является изотропным и однородным упругим материалом. Значения модуля упругости кортикальной и губчатой костных тканей изменяются в достаточно широком диапазоне [17]. При выполнении данного исследования предполагалось, что модуль упругости губчатой костной ткани изменяется в интервале $E_s = 0.5 \div 8$ ГПа, модуль упругости кортикальной костной ткани — $E_c = 6 \div 20$ ГПа.

Расчеты выполнялись при фиксированном модуле упругости костной ткани одного типа и вариации модуля упругости костной ткани другого типа:

- 1) для каждого из трех значений модуля упругости кортикальной кости $E_c = \{6; 10; 18\}$ ГПа выполнялся расчет при различных значениях модуля упругости губчатой кости $E_s = \{0.5; 1; 3; 5; 8\}$ ГПа;

- 2) для каждого из трех значений модуля упругости губчатой кости $E_s = \{0.5; 1; 3\}$ ГПа выполнялся расчет при различных значениях модуля упругости кортикальной кости $E_c = \{6; 8; 10; 14; 18; 20\}$ ГПа.

Полагалось также, что коронка изготовлена из керамики, а остальные детали имплантата изготовлены из титана. Базовые механические свойства материалов имплантата и костных тканей приведены в табл. 1 по данным работ [10, 11, 17].

Таблица 1

Механические свойства имплантата и костных тканей
[Mechanical properties of the implant and bone tissues]

| Material | Young's modulus E , GPa | Poisson's ratio | Yield strength (a), Tensile strength (b), MPa |
|---------------|---------------------------|-----------------|--|
| Titanium | 110 | 0.3 | 880 (a) |
| Ceramics | 70 | 0.19 | 320 (b) |
| Cortical bone | 18 | 0.3 | 130 (a) |
| Spongy bone | 0.5 | 0.35 | 10 ÷ 20 (b) |

Расчетная модель имплантата и костных тканей содержит семь подобластей (см. рис. 1). Первые три подобласти моделируют костные ткани: 1 — внешний слой кортикальной кости (средняя толщина слоя 1.7 мм); 2 — губчатая кость — основная часть костной ткани челюсти; 3 — слой кортикальной кости толщиной 1 мм, формирующий стенки нижнечелюстного канала, имеющего диаметр 3 мм. Остальные подобласти соответствуют элементам конструкции имплантата (длина цилиндрической части имплантата — 12 мм, диаметр — 4.2 мм, см. подобласть 4). Вся модель полностью с указанием вида нагрузки и граничных условий, а также увеличенное изображение верхней части модели представлены на рис. 2 (для удобства графического представления внешний слой кортикальной кости, цилиндрическая часть имплантата и коронка заштрихованы). Между всеми подобластями модели полагается выполнение условий идеального сцепления, включая зону соединения цилиндрической части имплантата и костных тканей (полная остеоинтеграция). Нагрузка величиной $p = 6$ МПа, соответствующая усилию жевания [18], прикладывается к окклюзионной поверхности коронки в двух вариантах (в вертикальном направлении и под углом 45° к вертикали). Полагая, что площадь контактной поверхности коронки $S \approx 0.25 \text{ см}^2$, можно считать, что заданное усилие p соответствует приложенной силе $F \approx 150 \text{ Н}$. По внешней границе кортикальной кости полагаем нулевые перемещения по направлениям осей координат, тонкая заштрихованная зона на рис. 2 показывает область заданных перемещений по внешней границе модели (это обозначение только на рисунке, не является частью модели).

Интенсивность напряжений (эквивалентные напряжения, напряжения по Мизесу) для состояния плоской деформации определяется следующим образом:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения.

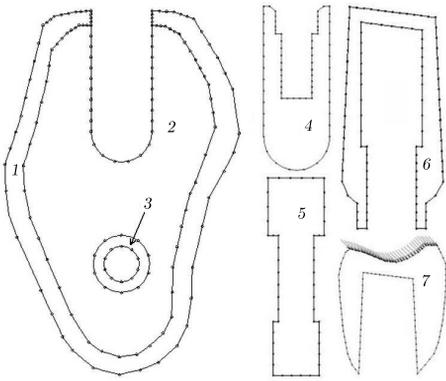


Рис. 1. Подобласти модели: 1, 3 — кортикальная кость, 2 — губчатая кость, 4 — имплантат, 5 — винт, 6 — абатмент, 7 — керамическая коронка под действием наклонной нагрузки

[Figure 1. The model subregions: 1, 3 — cortical bone, 2 — spongy bone, 4 — implant, 5 — screw, 6 — abutment, 7 — ceramics crown under inclined load]

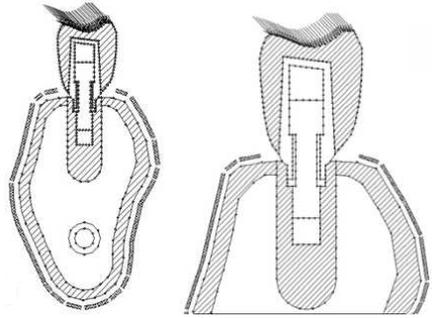


Рис. 2. Дискретизация границ подобластей имплантата и костных тканей; действие наклонной нагрузки; 7 подобластей; 1106 узлов во всей модели

[Figure 2. Boundary elements discretization of the implant and surrounded bone tissues under inclined load application; 7 subregions; total 1106 nodes]

Для численного анализа напряженно-деформированного состояния в работе используется прямой вариант МГЭ [19]. Двумерная составная конструкция моделируется набором однородных подобластей. Такой подход позволяет рассматривать соединения различных материалов в конструкции, а также условия неидеального соединения между подобластями. Граничное интегральное уравнение (ГИУ) теории упругости для каждой однородной подобласти конструкции без учета массовых сил и температурных воздействий имеет вид [19]

$$c_{ij}(p)u_i(p) = \int_{\Gamma} [G_{ij}(p, q)t_i(q) - F_{ij}(p, q)u_i(q)] d\Gamma(q), \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где точки p и q принадлежат границе подобласти Γ ; $u_i(q)$, $t_i(q)$ — перемещения и усилия на границе подобласти; $c_{ij}(p)$ — функции, зависящие от локальной геометрии в точке p ; для гладкой границы $c_{ij}(p) = \delta_{ij}/2$. Функции $G_{ij}(p, q)$ и $F_{ij}(p, q)$ являются фундаментальными решениями Кельвина для задачи теории упругости (плоская деформация) [19].

На участках идеального контакта подобластей полагаем, что выполняются условия непрерывности для перемещений и равновесия для усилий:

$$u_i^k(p) = u_i^n(p), \quad t_i^k(p) = -t_i^n(p), \quad (2)$$

где k и n — номера соседних подобластей.

Для численного решения ГИУ (1) используются изопараметрические квадратичные граничные элементы. Дискретизация границ подобластей и аппроксимация переменных позволяет заменить вычисление интегралов по всей поверхности подобласти в ГИУ (1) суммой интегралов по совокупности граничных элементов, представляющих поверхность подобласти, и получить для

каждой точки коллокации p дискретное представление ГИУ. Сингулярное поведение фундаментальных решений в ГИУ (1) проявляется в основном при вычислении интегралов по элементам, содержащим точку коллокации p . Поэтому рассматривается два случая расположения точки p : $p \notin e$ и $p \in e$, где e — граничный элемент, по которому выполняется интегрирование. В первом случае интегрирование выполняется по квадратурным формулам Гаусса—Лежандра с учетом сгущения точек интегрирования в направлении точки коллокации. При $p \in e$ фундаментальное решение плоской задачи теории упругости для перемещений $G_{ij}(p, q)$ содержит слабую логарифмическую особенность и интегралы в дискретном представлении ГИУ, содержащие эту функцию, вычисляются с использованием квадратурной формулы с логарифмической весовой функцией. Фундаментальное решение для поверхностных усилий $F_{ij}(p, q)$ содержит сильную особенность и вычисление суммы соответствующих интегралов и параметра $c_{ij}(p)$ выполняется косвенным путем исходя из смещения тела как жесткого целого (см. описание алгоритма численного интегрирования для двумерных и пространственных задач в [20]). Обходя последовательно узловые точки границ всех подобластей, получаем дискретное представление ГИУ. Учет граничных условий на внешних границах подобластей и дополнительных условий на участках соединения подобластей (2) позволяет получить из системы дискретных ГИУ для всех подобластей конструкции систему линейных алгебраических уравнений для определения узловых неизвестных задачи. Методика численного решения ГИУ реализована в комплексе программ «МЕГРЭ» (Метод ГРаничных Элементов) [20–22], который использован для получения результатов, приведенных в данной статье.

2. Результаты расчетов при нормальной нагрузке на коронку.

Первый этап расчета выполнен при сжимающей нагрузке, приложенной к окклюзионной поверхности коронки. Зависимости максимальных эквивалентных напряжений в костных тканях от модулей упругости кортикальной и губчатой костной ткани представлены на рис. 3–6.

При увеличении модуля упругости губчатой костной ткани E_s (увеличении жесткости кости) возрастает часть нагрузки, передаваемая на эту костную ткань. Поэтому максимальные напряжения в губчатой костной ткани возрастают, см. рис. 3. Напряжения в кортикальной костной ткани при увеличении модуля упругости губчатой кости E_s снижаются за счет уменьшения нагрузки, передаваемой на эту часть кости, см. рис. 4. Отметим, что напряжения в губчатой кости снижаются при увеличении модуля упругости кортикальной кости E_c , см. рис. 3 и 5. С другой стороны, уровень напряжений в кортикальной кости возрастает при увеличении модуля упругости этой кости, см. рис. 4 и 6.

На рис. 7 представлены распределения интенсивности напряжений по границе губчатой кости для двух значений модуля упругости кортикальной кости. При малом значении модуля упругости губчатой кости максимум напряжений наблюдается вблизи зоны контакта губчатой и кортикальной костных тканей с имплантатом (шейка имплантата, см. рис. 1, подобласти 1 и 2, верхняя часть), а при увеличении модуля упругости губчатой кости положение максимума смещается в нижнюю зону контакта между имплантатом и губчатой костью. Отметим, что ввиду несимметрии коронки и возникновения

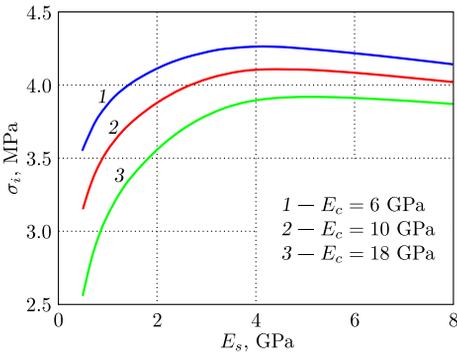


Рис. 3. Зависимость максимальных напряжений в губчатой кости от модуля упругости губчатой кости; сжатие

[Figure 3. The maximum stresses in the spongy bone vs the modulus of elasticity of the spongy bone; compression]

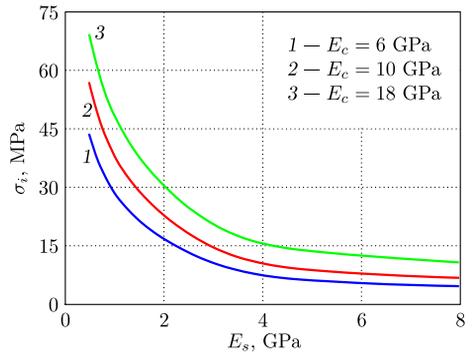


Рис. 4. Зависимость максимальных напряжений в кортикальной кости от модуля упругости губчатой кости; сжатие

[Figure 4. The maximum stresses in the cortical bone vs the modulus of elasticity of the spongy bone; compression]

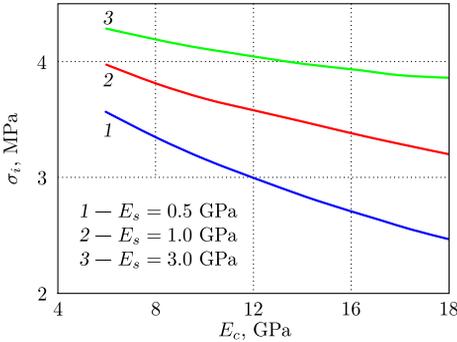


Рис. 5. Зависимость максимальных напряжений в губчатой кости от модуля упругости кортикальной кости; сжатие

[Figure 5. The maximum stresses in the spongy bone vs the modulus of elasticity of the cortical bone, compression]

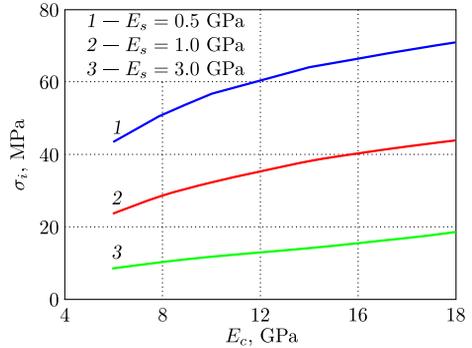


Рис. 6. Зависимость максимальных напряжений в кортикальной кости от модуля упругости кортикальной кости; сжатие

[Figure 6. The maximum stresses in the cortical bone vs the modulus of elasticity of the cortical bone; compression]

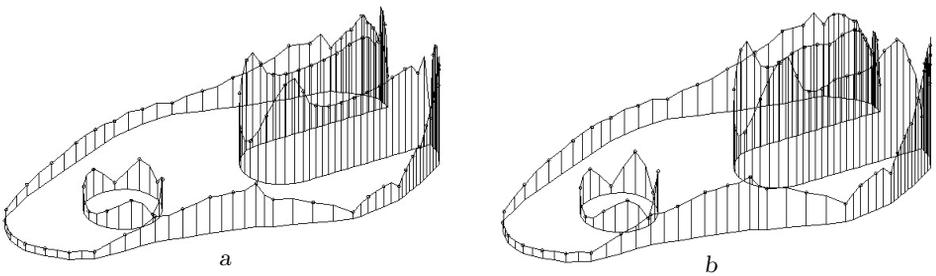


Рис. 7. Интенсивность напряжений σ_i вдоль контура губчатой кости; сжатие, $E_c = 18$ ГПа: а) $\sigma_{i,max} = 2.6$ МПа, $E_s = 0.5$ ГПа; б) $\sigma_{i,max} = 3.9$ МПа, $E_s = 5.0$ ГПа

[Figure 7. Stresses intensity σ_i along the spongy bone contour; compression, $E_c = 18$ ГПа: а) $\sigma_{i,max} = 2.6$ МПа, $E_s = 0.5$ ГПа; б) $\sigma_{i,max} = 3.9$ МПа, $E_s = 5.0$ ГПа]

в связи с этим изгибающего момента распределение напряжений при нормальной нагрузке не является симметричными.

3. Результаты расчетов при наклонной нагрузке на коронку. Второй этап расчета на модели имплантата выполнен при наклонной нагрузке, приложенной к коронке (см. рис. 2). Зависимости максимальных эквивалентных напряжений в костных тканях от модулей упругости кортикальной и губчатой кости представлены на рис. 8–11. При наклонной нагрузке тенденции изменения максимальных эквивалентных напряжений аналогичны полученным ранее при сжимающей нагрузке, но уровень максимальных напряжений выше, что связано с действием сдвиговой компоненты нагрузки p_x , приводящей к возникновению изгибающих моментов $M_1 \approx p_x h$ в слое кортикальной

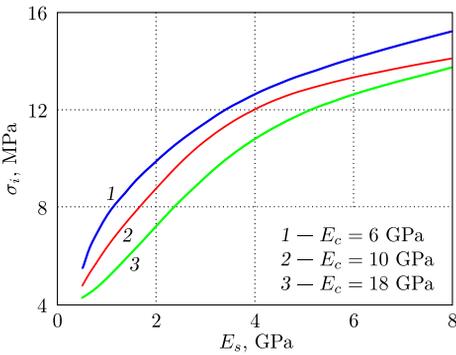


Рис. 8. Зависимость максимальных напряжений в губчатой кости от модуля упругости губчатой кости; наклонная нагрузка

[Figure 8. The maximum stresses in the spongy bone vs the modulus of elasticity of the spongy bone; inclined load]

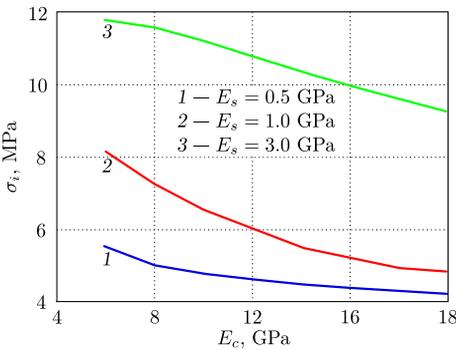


Рис. 10. Зависимость максимальных напряжений в губчатой кости от модуля упругости кортикальной кости; наклонная нагрузка

[Figure 10. The maximum stresses in the spongy bone vs the modulus of elasticity of the cortical bone; inclined load]

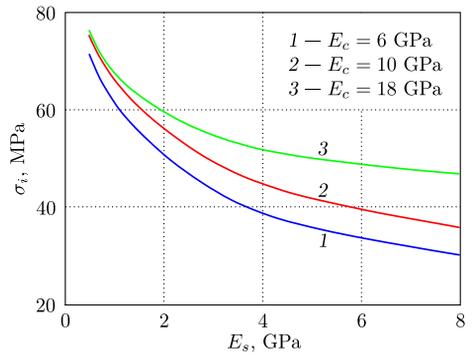


Рис. 9. Зависимость максимальных напряжений в кортикальной кости от модуля упругости губчатой кости; наклонная нагрузка

[Figure 9. The maximum stresses in the cortical bone vs the modulus of elasticity of the spongy bone; inclined load]

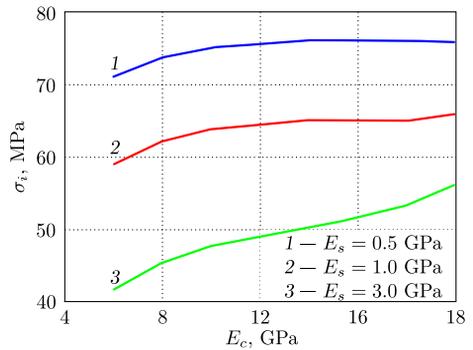


Рис. 11. Зависимость максимальных напряжений в кортикальной кости от модуля упругости кортикальной кости; наклонная нагрузка

[Figure 11. The maximum stresses in the cortical bone vs the modulus of elasticity of the cortical bone; inclined load]

кости и $M_2 \approx p_x(h + L)$ — у основания имплантата, где h — высота коронки, L — длина имплантата.

Увеличение модуля упругости губчатой костной ткани E_s приводит к возрастанию максимальных напряжений в губчатой кости, причем рост напряжений происходит более интенсивно, чем при нормальной нагрузке, см. рис. 3 и 8. Отметим, что при наклонной нагрузке и малых значениях модуля упругости губчатой кости ($E_s < 2$ МПа) изменение напряжений в кортикальной кости слабо зависит от модуля упругости кортикальной костной ткани (см. рис. 4 и 9). Напряжения в губчатой кости снижаются при увеличении модуля упругости кортикальной кости E_c , см. рис. 8 и 10. При этом значения максимальных напряжений значительно (примерно в три раза) превышают соответствующие значения при нормальной нагрузке (см. рис. 3, 5 и рис. 8, 10), что связано с действием изгибающего момента. Уровень напряжений в кортикальной кости возрастает при увеличении модуля упругости этой кости, (см. рис. 9 и 11). Для максимальных напряжений в кортикальной кости при наклонной нагрузке отличия от случая нормальной нагрузки невелики (см. рис. 4, 6 и рис. 9, 11), что связано с меньшей величиной механического момента M_1 в слое кортикальной кости.

Распределение интенсивности напряжений по границе губчатой кости при действии наклонной нагрузки представлено на рис. 12. При этом характер распределения напряжений в губчатой кости заметно изменяется: при $E_s = 0.5$ ГПа максимальные напряжения наблюдаются в нижней части зоны контакта губчатой кости и основания имплантата, а при $E_s = 5.0$ ГПа положение максимума напряжений смещается в зону шейки имплантата на границу с губчатой и кортикальной костными тканями.

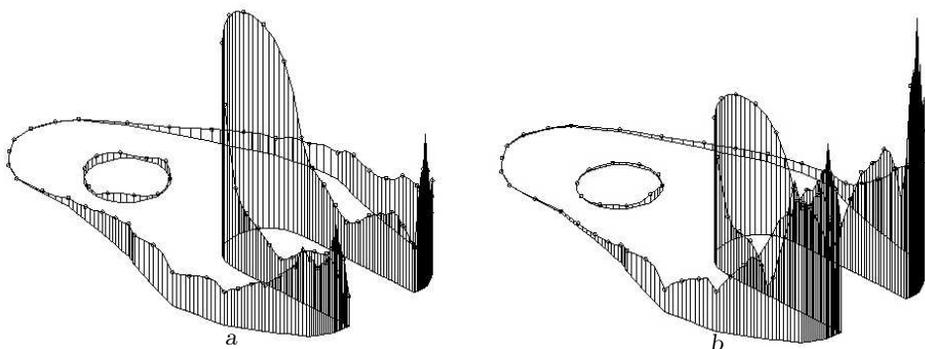


Рис. 12. Интенсивность напряжений σ_i вдоль контура губчатой кости; сжатие, $E_c = 18$ ГПа: а) $\sigma_{i,\max} = 4.3$ МПа, $E_s = 0.5$ ГПа; б) $\sigma_{i,\max} = 12.2$ МПа, $E_s = 5.0$ ГПа

[Figure 12. Stresses intensity σ_i along the spongy bone contour; compression, $E_c = 18$ GPa: а) $\sigma_{i,\max} = 4.3$ МПа, $E_s = 0.5$ GPa; б) $\sigma_{i,\max} = 12.2$ МПа, $E_s = 5.0$ GPa]

Заключение. Исследование зависимости интенсивности напряжений от плотности кортикальной и губчатой костных тканей выполнено посредством параметрической вариации модулей упругости соответствующих костных тканей для модели соединения цилиндрического имплантата и костных тканей при действии нормальной и наклонной нагрузок. Полученные результаты качественно (ввиду различия геометрических параметров моделей и механических свойств) согласуются с результатами работ [3, 8, 11].

При увеличении модуля упругости губчатой костной ткани (увеличении ее плотности) возрастает часть нагрузки, передаваемая на эту костную ткань. Поэтому максимальные эквивалентные напряжения в губчатой костной ткани возрастают, что стимулирует процесс остеоинтеграции имплантата, сопровождающийся ростом плотности костной ткани [23]. Напряжения в кортикальной костной ткани при увеличении модуля упругости губчатой кости снижаются за счет уменьшения нагрузки, передаваемой на эту часть кости, что приводит к более однородному распределению напряжений в костных тканях при нагружении имплантата. С другой стороны, наличие слоя кортикальной кости высокой плотности (с большим модулем упругости) приводит к снижению напряжений в губчатой кости, что позволяет повысить надежность имплантации при ослабленной губчатой кости. При этом уровень максимальных напряжений в кортикальной кости возрастает и область максимальных напряжений наблюдается вблизи шейки имплантата.

Расчеты выполнены для цилиндрических имплантатов и полученные результаты могут быть использованы при выборе формы и размеров имплантатов, соответствующих состоянию костных тканей пациента.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ государственной регистрации 123021700050-1).

Библиографический список

1. Параскевич В. Л. *Дентальная имплантология: Основы теории и практики*. М.: МИА, 2011. 400 с.
2. Chugh T., Jain A. K., Jaiswal R. K., et al. Bone density and its importance in orthodontics // *J. Oral Biol. Craniofac. Res.*, 2013. vol. 3, no. 2. pp. 92–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jobcr.2013.01.001>.
3. Premnath K., Sridevi J., Kalavathy N., et al. Evaluation of stress distribution in bone of different densities using different implant designs: A three-dimensional finite element analysis // *J. Indian Prosthodont Soc.*, 2013. vol. 13, no. 4. pp. 555–559. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13191-012-0189-7>.
4. Wirth A. J., Muller R., van Lenthe G. H. Computational analyses of small endosseous implants in osteoporotic bone // *Eur. Cell. Mater.*, 2010. vol. 20. pp. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.22203/ecm.v020a06>.
5. Lee H., Jo M., Noh G. Biomechanical effects of dental implant diameter, connection type, and bone density on microgap formation and fatigue failure: A finite element analysis // *Comput. Methods Programs Biomed.*, 2021. vol. 200, 105863. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105863>.
6. Zioupos P., Cook R. B., Hutchinson J. R. Some basic relationships between density values in cancellous and cortical bone // *J. Biomech.*, 2008. vol. 41, no. 9. pp. 1961–1968. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2008.03.025>.
7. Clift S. E., Fisher J., Watson C. J. Finite element stress and strain analysis of the bone surrounding a dental implant: Effect of variations in bone modulus // *Proc. Inst. Mech. Eng. H*, 1992. vol. 206, no. 4. pp. 233–241. DOI: https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1992_206_295_02.
8. Рогожников Г. И., Конохова С. Г., Няшин Ю. И. [и др.] Влияние модуля упругости губчатой и кортикальной кости на напряженное состояние в области пластинчатого

- имплантата при окклюзионной нагрузке // *Российский журнал биомеханики*, 2004. Т. 8, № 1. С. 54–60. EDN: JWSHCL.
9. Nutu E., Ahmad S., Pastrama S. Influence of bone elastic properties on the predicted stress distribution in the dental implant vicinity // *Materials Today: Proceedings*, 2017. vol. 4, no. 5, part 1. pp. 5904–5908. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.06.067>.
 10. Олесова В. Н., Бронштейн Д. А., Лернер А. Я. [и др.] Напряженно-деформированное состояние в протезной конструкции на дентальном имплантате при цементной фиксации искусственной коронки // *Российский журнал биомеханики*, 2016. Т. 20, № 4. С. 311–315. EDN: XXMXF. DOI: <https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2016.4.02>.
 11. Fedorova N. V. The study of the stress-strain state of the dental ceramic implants depending on their shape and bone mineralization degree // *Russian Journal of Biomechanics*, 2019. vol. 23, no. 3. pp. 388–394. EDN: BDBUKN. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.3.10>.
 12. Дьяченко Д. Ю., Дьяченко С. В. Применение метода конечных элементов в компьютерной симуляции для улучшения качества лечения пациентов в стоматологии: систематический обзор // *Кубанский научный медицинский вестник*, 2021. Т. 28, № 5. С. 98–116. EDN: KDCHLT. DOI: <https://doi.org/10.25207/1608-6228-2021-28-5-98-116>.
 13. Büyüük F. N., Savran E., Karpat F. Review on finite element analysis of dental implants // *J. Dent. Implant Res.*, 2022. vol. 41, no. 3. pp. 50–63. DOI: <https://doi.org/10.54527/jdir.2022.41.3.50>.
 14. Wolfe L. A. Stress analysis of endosseous implants using the Boundary Integral Equation (BIE) method // *J. Biomed. Eng.*, 1993. vol. 15, no. 4. pp. 319–323. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-5425\(93\)90009-N](https://doi.org/10.1016/0141-5425(93)90009-N).
 15. Перельмутер М. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния стоматологических имплантатов методом граничных интегральных уравнений // *Вестник ПНИПУ. Механика*, 2018. № 2. С. 83–95. EDN: XUGGCL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.08>.
 16. Citarella R., Armentani E., Caputo F., Lepore M. Stress analysis of an endosseous dental implant by BEM and FEM // *The Open Mechanical Engineering Journal*, 2012. vol. 6. pp. 115–124. DOI: <https://doi.org/10.2174/1874155X01206010115>.
 17. Misch C. E., Qu Z., Bidez M W. Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement // *J. Oral Maxillofac. Surg.*, 1999. vol. 57, no. 6. pp. 700–706. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0278-2391\(99\)90437-8](https://doi.org/10.1016/S0278-2391(99)90437-8).
 18. Король Д. М., Николов В. В., Оникко Е. Л., Ефименко А. С. Определение интенсивности окклюзионного давления у пациентов на ортопедическом приеме // *Современная медицина: актуальные вопросы*, 2015. № 46–47. С. 40–46. EDN: UINWJH.
 19. Banerjee P. K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. London: McGraw-Hill, 1981. 452 pp.
 20. Перельмутер М. Н. Применение метода граничных элементов при исследовании пространственного напряженного состояния составных конструкций / *Проблемы прочности и динамики в авиадвигателестроении. Вып. 4* / Труды ЦИАМ, Т. 1237, 1989. С. 74–99.
 21. Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // *Comput. Mech.*, 2013. vol. 51, no. 4. pp. 523–534. EDN: RFJHND. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-012-0817-4>.
 22. Perelmuter M. Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces // *Int. J. Mech. Sci.*, 2018. vol. 149, no. 4. pp. 349–360. EDN: BLWNCV. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.10.011>.
 23. Lin D., Li Q., Li W., et al. Mandibular bone remodeling induced by dental implant // *J. Biomech.*, 2010. vol. 43, no. 2. pp. 287–293. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.08.024>.

MSC: 74A10, 74S15, 74M15

The effect of bone tissue density on the stress-strain state near dental implants

M. N. Perelmuter

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101–1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

Abstract

The dependence of the stress-strain state of the bone tissue on its density near the dental implant has been studied. The computations were performed by the boundary element method for the plane-deformed state of a model consisting of a cylindrical implant and surrounding bone tissues. Bone tissue is considered as an isotropic and homogeneous elastic material. Simulation the effect of bone density on the stress-strain state when applying a quasi-static load is performed by changing of elasticity modulus of the bone. It has been established that with the increasing in the spongy bone tissue elastic modulus, the maximum equivalent stresses in this bone tissue increase. Stresses in the cortical bone tissue decrease with the increasing in the spongy bone elastic modulus due to the decreasing in the load transferred to this bone part. Stresses in the spongy bone decrease with the increasing in the cortical bone layer elasticity modulus. The level of maximum stress in the cortical layer of the bone increases with the increasing of this bone tissue elastic modulus. The maximum of stresses in the cortical bone tissue are observed near the implant neck.

Keywords: implant, bone tissues, stress-strain state, boundary integral equations method.

Received: 26th December, 2022 / Revised: 19th February, 2023 /

Accepted: 17th March, 2023 / First online: 24th March, 2023

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Complexes
Short Communication

© Authors, 2023

© Samara State Technical University, 2023 (Compilation, Design, and Layout)

   The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Perelmuter M. N. The effect of bone tissue density on the stress-strain state near dental implants, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2023, vol. 27, no. 1, pp. 189–201. EDN: VDVFD. DOI: 10.14498/vsgtu1976 (In Russian).

Author's Details:

Mikhail N. Perelmuter   <https://orcid.org/0000-0002-8430-5412>

Dr. Phys. & Math. Sci.; Leading Researcher; Lab. of Mechanics of Strength and Fracture of Materials and Structures; e-mail: perelm@ipmnet.ru

Funding. The work was carried out within the framework of a state assignment (state registration no. 123021700050-1).

References

1. Paraskevich V. L. *Dental'naia implantologiya: Osnovy teorii i praktiki* [Dental Implantology: The fundamentals of Theory and Practice]. Moscow, Medical Information Agency, 2011, 400 pp. (In Russian)
2. Chugh T., Jain A. K., Jaiswal R. K., et al. Bone density and its importance in orthodontics, *J. Oral Biol. Craniofac. Res.*, 2013, vol. 3, no. 2, pp. 92–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jobcr.2013.01.001>.
3. Premnath K., Sridevi J., Kalavathy N., et al. Evaluation of stress distribution in bone of different densities using different implant designs: A three-dimensional finite element analysis, *J. Indian Prosthodont Soc.*, 2013, vol. 13, no. 4, pp. 555–559. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13191-012-0189-7>.
4. Wirth A. J., Muller R., van Lenthe G. H. Computational analyses of small endosseous implants in osteoporotic bone, *Eur. Cell. Mater.*, 2010, vol. 20, pp. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.22203/ecm.v020a06>.
5. Lee H., Jo M., Noh G. Biomechanical effects of dental implant diameter, connection type, and bone density on microgap formation and fatigue failure: A finite element analysis, *Comput. Methods Programs Biomed.*, 2021, vol. 200, 105863. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105863>.
6. Zioupos P., Cook R. B., Hutchinson J. R. Some basic relationships between density values in cancellous and cortical bone, *J. Biomech.*, 2008, vol. 41, no. 9, pp. 1961–1968. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2008.03.025>.
7. Clift S. E., Fisher J., Watson C. J. Finite element stress and strain analysis of the bone surrounding a dental implant: Effect of variations in bone modulus, *Proc. Inst. Mech. Eng. H*, 1992, vol. 206, no. 4, pp. 233–241. DOI: https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1992_206_295_02.
8. Rogozhnikov G. I., Konyuhova S. G., Nyashin Y. I., et al. The influence of elasticity modulus of spongy and cortical bone on stress state near planar implant under occlusal load, *Russian Journal of Biomechanics*, 2004, vol. 8, no. 1, pp. 49–54.
9. Nutu E., Ahmad S., Pastrama S. Influence of bone elastic properties on the predicted stress distribution in the dental implant vicinity, *Materials Today: Proceedings*, 2017, vol. 4, no. 5, part 1, pp. 5904–5908. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.06.067>.
10. Olesova V. N., Bronshtein D. A., Lerner A. Ya., et al. Stress-strain state in prosthetic construction on dental implant with cement fixing artificial crown, *Russian Journal of Biomechanics*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 266–269.
11. Fedorova N. V. The study of the stress-strain state of the dental ceramic implants depending on their shape and bone mineralization degree, *Russian Journal of Biomechanics*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 388–394. EDN: BDBUKN. DOI: <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2019.3.10>.
12. Dyachenko D. Yu., Dyachenko S. V. Finite element method in computer simulation for improved patient care in dentistry: A systematic review, *Kuban Scientific Medical Bulletin*, 2021, vol. 28, no. 5, pp. 98–116 (In Russian). EDN: KDCHLT. DOI: <https://doi.org/10.25207/1608-6228-2021-28-5-98-116>.
13. Büyüç F. N., Savran E., Karpat F. Review on finite element analysis of dental implants, *J. Dent. Implant Res.*, 2022, vol. 41, no. 3, pp. 50–63. DOI: <https://doi.org/10.54527/jdir.2022.41.3.50>.
14. Wolfe L. A. Stress analysis of endosseous implants using the Boundary Integral Equation (BIE) method, *J. Biomed. Eng.*, 1993, vol. 15, no. 4, pp. 319–323. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-5425\(93\)90009-N](https://doi.org/10.1016/0141-5425(93)90009-N).
15. Perelmuter M. N. Analysis of stress-strain state of dental implants by the boundary integral equations method, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 83–95 (In Russian). EDN: XUGGCL. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.08>.

16. Citarella R., Armentani E., Caputo F., Lepore M. Stress analysis of an endosseus dental implant by BEM and FEM, *The Open Mechanical Engineering Journal*, 2012, vol. 6, pp. 115–124. DOI: <https://doi.org/10.2174/1874155X01206010115>.
17. Misch C. E., Qu Z., Bidez M W. Mechanical properties of trabecular bone in the human mandible: Implications for dental implant treatment planning and surgical placement, *J. Oral Maxillofac. Surg.*, 1999, vol. 57, no. 6, pp. 700–706. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0278-2391\(99\)90437-8](https://doi.org/10.1016/S0278-2391(99)90437-8).
18. Korol D. M., Nikolov V. V., Onipko E. L., Efimenko A. S. Determination of the intensity of occlusal pressure in patients at orthopedic examination, *Modern Medicine: Current Issues*, 2015, no. 46–47, pp. 40–46 (In Russian). EDN: UINWJH.
19. Banerjee P. K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. London, McGraw-Hill, 1981, 452 pp.
20. Perelmuter M. N. Application of the boundary element method in the study of the spatial stress state of composite structures, In: *Problems of Strength and Dynamics in Aircraft Engine. Issue 4*, Proc. CIAM, 1237, 1989, pp. 74–99 (In Russian).
21. Perelmuter M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks, *Comput. Mech.*, 2013, vol. 51, no. 4, pp. 523–534. EDN: RFJHDN. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-012-0817-4>.
22. Perelmuter M. Analysis of interaction of bridged cracks and weak interfaces, *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, vol. 149, no. 4, pp. 349–360. EDN: BLWNCV. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.10.011>.
23. Lin D., Li Q., Li W., et al. Mandibular bone remodeling induced by dental implant, *J. Biomech.*, 2010, vol. 43, no. 2, pp. 287–293. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.08.024>.

**ПОДПИСКА – 2023
НА ЯНВАРЬ – ДЕКАБРЬ**

в «каталоге «Газеты и журналы – 2023»,
и на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
<http://www.ural-press.ru/>

Уважаемые читатели!

Обратите внимание, что с 1 сентября 2022 г. проводится подписная кампания на журналы Самарского государственного технического университета на 2023 год

**18106 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Технические науки»
Промышленность. Энергетика. Строительство. Транспорт.**

**18108 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Физико-математические науки»
Образование. Наука.**

**70570 Градостроительство и архитектура
Промышленность. Строительство.**

**18107 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Психолого-педагогические науки»
Образование. Педагогика. Религия. Философия. Социология. Психология.**

**41340 Вестник Самарского государственного технического университета.
Серия «Философия».
Образование. Педагогика. Религия. Философия. Социология. Психология.**

Условия оформления подписки Вы найдете
на сайте <http://www.ural-press.ru/>

Учебная литература, изданная в СамГТУ

ПОДПИСКА
на сайте «ООО Урал-Пресс Округ»
<http://www.ural-press.ru/>

- 014827 **Технология производства смазочных масел и спецпродуктов.** Учебное пособие / В.А. Тыщенко, И.А. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.Н. Томина, С.А. Антонов, Е.О. Жилкина. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014 – 240 с.
- 014828 **Номограммы, графики и табличные данные для технологических расчетов процессов переработки нефти и газа:** справочное пособие / В.Г. Власов, И.Г. Агафонов, А.А. Пимерзин, Н.М. Максимов, Е.Е. Вишневская, Д.И. Ишутенко. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 91 с.
- 014829 **Проектирование установки ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г. Власов, И.А. Агафонов – Изд. 2-е, испр. и доп. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 159 с.
- 014832 **Химия и технология вторичных процессов переработки нефти:** учебное пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 332 с.
- 014833 **Каталитический реформинг:** учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 166 с.
- 014834 **Проектирование нефтеперерабатывающих заводов:** учеб. пособие / Л.И. Заботин, А.А. Пимерзин, А.В. Можжаев. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2018. – 129 с.
- 014835 **Методы очистки нефтяных фракций:** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.
- 014837 **Катализ в химической промышленности:** учебное пособие / Н.Н. Томина, П.А. Никульшин, Н.М. Максимов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 374 с.
- 014839 **Процессы нефтехимического синтеза в нефтепереработке:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. – 207 с.
- 014840 **Подготовка и первичная переработка нефти. Проектирование установок ЭЛОУ-АВТ:** учебно-методическое пособие / В.Г. Власов, И.А. Агафонов. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2015. – 327 с.
- 014841 **Каталитический крекинг:** учеб.-метод. пособие / Л.И. Заботин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 97 с.
- 014842 **Синтетические моторные масла и присадки:** учебное пособие / В.А. Тыщенко, С.В. Котов, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 260 с.
- 014843 **Алкилирование спиртов олефинами. Получение топливных оксигенатов:** учебное пособие / В.А. Пильщиков, Ал.А. Пимерзин, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2020. – 115 с.
- 014844 **Методы очистки нефтяных фракций ч. 1.** учебное пособие / Н.Н. Томина, Н.М. Максимов, В.А. Тыщенко, А.А. Пимерзин. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2014. – 293 с.